



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

---

“Diseño de leyes de control con entradas acotadas para la  
estabilización de mini naves aéreas no tripuladas tipo  
VTOL”

Tesis que se presenta al

**Posgrado en Física Aplicada**

como requisito parcial para obtener el grado de

**DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA APLICADA)**

por

Rafael Cruz José

asesorado por

Dr. José Fermi Guerrero Castellanos

Dr. W. Fermín Guerrero Sánchez

Puebla, Pue., México.

Diciembre de 2016.



# Índice general

<b>Dedicatoria</b>	<b>XI</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>XIII</b>
<b>Resumen</b>	<b>XV</b>
<b>Introducción</b>	<b>XVII</b>
<b>1. Modelo matemático de los vehículos tipo VTOL</b>	<b>1</b>
1.1. Fundamentos teóricos . . . . .	1
1.1.1. Parametrización de la orientación (attitude) de los vehículos aéreos . . . . .	2
1.1.2. Ecuaciones del cuerpo rígido . . . . .	13
1.1.3. Ecuaciones de movimiento de los vehículos aéreos . . . . .	19
1.1.4. Resumen de ecuaciones cinemáticas y dinámicas . . . . .	23
1.2. Modelo de los vehículos tipo VTOL . . . . .	25
1.2.1. Resumen del modelo general de los sistemas VTOL . . . . .	27
<b>2. Control de orientación para vehículos tipo VTOL</b>	<b>29</b>
2.1. Fundamentos teóricos . . . . .	29
2.1.1. Vectores de referencia y de observación . . . . .	29
2.1.2. Función de saturación . . . . .	33
2.2. Planteamiento del problema . . . . .	33
2.3. Estabilización de orientación biológicamente inspirado . . . . .	36
2.3.1. Control de orientación acotado con medidas de vectores de observación y velocidad angular . . . . .	37
2.3.2. Estabilización de orientación con vectores de observación y sin medidas de velocidad angular . . . . .	40
2.4. Aplicación al helicóptero cuadirotor . . . . .	44
2.4.1. El mini helicóptero cuadirotor . . . . .	44
2.4.2. Modelo del sistema cuadirotor completo . . . . .	47
2.4.3. Forma reducida del modelo del cuadirotor . . . . .	55
2.4.4. Aplicación del ancho de pulso modulado (PWM) . . . . .	56
2.4.5. Modelación de los sensores . . . . .	58
2.4.6. Determinación del equilibrio inestable . . . . .	59
2.4.7. Realimentación de salida acotada para la estabilización de orientación del cuadirotor . . . . .	60

2.5.	Resultados en simulación . . . . .	61
2.5.1.	Primera ley de control . . . . .	61
2.5.2.	Segunda ley de control . . . . .	62
2.6.	Resultados experimentales . . . . .	62
2.6.1.	Estabilización usando la ley de control del Corolario 1 . . . . .	66
2.6.2.	Estabilización usando la ley de control del corolario 2 . . . . .	67
<b>3.</b>	<b>Estabilización global de integradores múltiples con controles acotados y posicionamiento dinámico de polos</b>	<b>75</b>
3.1.	Sistemas en cadena de integradores . . . . .	76
3.2.	Propuesta de control . . . . .	78
3.2.1.	Control acotado con posicionamiento de polos . . . . .	78
3.2.2.	Posicionamiento dinámico de polos . . . . .	80
3.3.	Un ejemplo de aplicación: el caso del triple integrador . . . . .	81
3.3.1.	Cálculo de los polos de la cadena de integradores de orden $n = 3$ y uso del posicionamiento dinámico de polos . . . . .	83
<b>4.</b>	<b>Diseño del control de traslación para vehículos VTOL</b>	<b>89</b>
4.1.	Control de orientación . . . . .	90
4.1.1.	Resultados en simulación . . . . .	95
4.2.	Diseño del control de posición . . . . .	97
4.2.1.	Ecuaciones del movimiento traslacional . . . . .	98
4.2.2.	Control de posición . . . . .	100
4.2.3.	Resultados en simulación . . . . .	102
4.3.	Consideración para seguimiento de trayectorias de posición . . . . .	105
4.3.1.	Resultados en simulación . . . . .	106
4.4.	Resultados experimentales . . . . .	111
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>123</b>
<b>A.</b>	<b>Diseño de Simulador</b>	<b>125</b>
A.1.	Presentación de resultados . . . . .	125
A.2.	Animación . . . . .	127
<b>B.</b>	<b>Características técnicas del vehículo cuadrirotor</b>	<b>131</b>
B.1.	Sistema VTOL . . . . .	131
B.1.1.	Descripción de la plataforma experimental . . . . .	131
B.1.2.	Estructura mecánica del mini helicóptero de cuatro motores . . . . .	134
B.2.	Diseño e implementación de la tarjeta de control de vuelo . . . . .	134
B.3.	Tarjeta de desarrollo Pipistrello . . . . .	135
B.4.	Sistema de navegacion asistido por GPS 3DM-GX3-45 . . . . .	137
B.5.	Sistema de propulsión . . . . .	142
B.5.1.	Motores brushless . . . . .	142
<b>C.</b>	<b>Teoría de estabilidad de Liapunov</b>	<b>145</b>
C.1.	Concepto de punto de equilibrio . . . . .	145
C.2.	Conceptos de estabilidad . . . . .	146

<b>D. Cuaterniones y sus operaciones</b>	<b>153</b>
D.1. Representación de los cuaterniones . . . . .	153
D.1.1. Vectorial . . . . .	153
D.1.2. Matricial . . . . .	154
D.2. Aritmética básica de cuaterniones . . . . .	154
D.2.1. Adición de cuaterniones . . . . .	155
D.2.2. Resta de cuaterniones . . . . .	155
D.2.3. Multiplicación de cuaterniones . . . . .	155
D.2.4. Conjugación de cuaterniones . . . . .	156
D.2.5. División de cuaterniones . . . . .	156
D.2.6. Exponenciación de cuaterniones . . . . .	156
D.2.7. Normalización de un cuaternión . . . . .	157
D.2.8. Aplicaciones del cuaternión . . . . .	157



# Índice de figuras

1.	Esquema de la relación que guardan los contenidos de este trabajo de tesis .	XXIV
1.1.	Esquemas de (a) la rotación alrededor del eje $z_n$ un ángulo $\psi$ , (b) la rotación alrededor del eje $x_1$ un ángulo $\theta$ y (c) la rotación alrededor del eje $z_2$ un ángulo $\phi$ .	3
1.2.	Los ángulos de Cardán.	4
1.3.	Esquema de la sucesión de giro de los ángulos de Cardán .	5
1.4.	Esquemas de (a) la rotación alrededor del eje $z_n$ un ángulo $\psi$ , (b) la rotación alrededor del eje $y_1$ un ángulo $\theta$ y (c) la rotación alrededor del eje $x_2$ un ángulo $\phi$ . Los ejes de rotación son perpendiculares al plano y su dirección es saliendo de la página.	6
1.5.	Esquemas de las rotaciones sobre los ejes $z_n$ , $y_1$ y $x_2$ junto con las velocidades lineales descritas en cada eje.	7
1.6.	Esquemas donde se describen (a) las componentes de $\omega_1$ , (b) las componentes de $\omega_2$ y (c) las componentes de $\omega_3$ .	10
1.7.	Esquema de las componentes de un cuaternión.	11
1.8.	Esquema de las componentes de la velocidad angular $\omega$ del cuerpo rígido.	13
1.9.	La fuerza resultante $\delta\mathbf{F}$ sobre un elemento de masa $\delta m$ .	15
1.10.	Vehículo aéreo y los sistemas de referencia.	20
1.11.	Esquemas de (a) las componentes de la fuerza de gravedad sobre los ejes $x_b$ y $z_b$ para un vehículo aéreo cualquiera con ángulo de cabeceo $\theta$ y sin ángulo de alabeo $\phi$ , (b) las componentes de la fuerza de gravedad sobre los ejes $y_b$ y $z_b$ para un vehículo aéreo cualquiera donde se presenta un ángulo de alabeo $\phi$ además del ángulo de cabeceo $\theta$ .	21
1.12.	Marcos de referencia para un vehículo VTOL.	26
2.1.	Marcos de referencia fijo al cuerpo $\mathbf{E}^b$ e inercial $\mathbf{E}^f$ .	30
2.2.	Cuerpo rígido, sistema de referencia inercial y vectores de referencia y de observación.	32
2.3.	Vectores de observación y de referencia con la misma orientación, donde $\omega = \mathbf{0}$ .	34
2.4.	<b>(a)</b> Simetría con respecto al vector normal $\mathbf{n}$ al plano $\Pi$ ; <b>(b) la simetría con respecto al plano</b> ( $\mathbf{e}_1^f, \mathbf{e}_3^f$ ).	35
2.5.	Estabilización de orientación biológicamente inspirado.	37
2.6.	Esquema gráfico de la primera propuesta de control.	38
2.7.	Esquema gráfico de la segunda propuesta de control con el filtro pasa bajas.	41

2.8. Esquema de la configuración del cuadrirotor: el marco de referencia inercial $\mathbf{E}^f = [\mathbf{e}_1^f, \mathbf{e}_2^f, \mathbf{e}_3^f]$ , el marco de referencia fijo al cuerpo $\mathbf{E}^b = [\mathbf{e}_1^b, \mathbf{e}_2^b, \mathbf{e}_3^b]$ , las fuerzas $\mathbf{f}_i$ de cada motor, la velocidad angular de los motores $\boldsymbol{\omega}_{m_i}$ y los torques de reacción $\mathbf{Q}_i$ . . . . .	45
2.9. Grados de libertad angulares y desplazamientos en el espacio. . . . .	46
2.10. Esquema de los movimientos angulares del cuadrirotor. . . . .	46
2.11. Esquemas de (a)-(b) la configuración de fuerzas para el movimiento de alabeo y (c)-(d) la configuración de torques para el movimiento de guiñada. . . . .	48
2.12. Esquemas de (a)-(b) la configuración de fuerzas para el movimiento de desplazamiento en el eje $\mathbf{e}_1^f$ y (c)-(d) la configuración de fuerzas para el movimiento de desplazamiento en el eje $\mathbf{e}_3^f$ . . . . .	49
2.13. Esquema de la configuración de los torques de control $\Gamma_1, \Gamma_2$ y $\Gamma_3$ . . . . .	54
2.14. Resultados en simulación para la primera ley de control. . . . .	63
2.15. Resultados en simulación para la segunda ley de control. . . . .	64
2.16. El mini helicóptero cuadrirotor en vuelo. . . . .	65
2.17. Diagrama a bloques del sistema de control de orientación del cuadrirotor. . . . .	66
2.18. Ley de control del corolario 1: evolución de los ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada. . . . .	67
2.19. Ley de control del Corolario 1: evolución de la velocidad angular del cuerpo. . . . .	68
2.20. Ley de control del Corolario 1: evolución de las medidas del acelerómetro $\mathbf{s}_1^b$ . . . . .	68
2.21. Ley de control del Corolario 1: evolución de las medidas del magnetómetro $\mathbf{s}_2^b$ . . . . .	69
2.22. Torques de control acotados del Corolario 1. Las líneas rojas definen las cotas de los torques de control. . . . .	69
2.23. Ley de control del Corolario 1: ancho de pulso de las cuatro señales de control de los motores. Las líneas rojas definen las cotas del ancho de pulso. . . . .	70
2.24. Ley de control del corolario 2: evolución de los ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada. . . . .	71
2.25. Ley de control del corolario 2: evolución de la velocidad angular del cuerpo. . . . .	72
2.26. Ley de control del corolario 2: evolución de las medidas del acelerómetro $\mathbf{s}_1^b$ . . . . .	72
2.27. Ley de control del corolario 2: evolución de las medidas del magnetómetro $\mathbf{s}_2^b$ . . . . .	73
2.28. Torques de control acotados del corolario 2. Las líneas rojas definen las cotas de los torques de control. . . . .	73
2.29. Ley de control del corolario 2: ancho de pulso de las cuatro señales de control de los motores. Las líneas rojas definen las cotas del ancho de pulso. . . . .	74
3.1. Control del integrador de tercer orden. Evolución de $\ \mathbf{x}(t)\ $ para una condición inicial $x_0 = (2; -2; 3)^T$ , $\varepsilon = 0,618$ , $a_1 = 1,2$ y $\eta = 0,62$ , con posicionamiento dinámico de polos. 1.- [93] (teorema 3), 2.- [93] (teorema 1), 3.- Propuesta, 4.- [112]/[121], 5.- [82], 6.- [92]. . . . .	84
3.2. Evolución de los estados del sistema y el control propuesto en el teorema 3 de [93]. . . . .	86
3.3. Evolución de los estados del sistema y el control propuesto en el teorema 1 de [93]. . . . .	86
3.4. Evolución de los estados del sistema y el control propuesto aquí. . . . .	86
3.5. Evolución de los estados del sistema y el control propuesto en [82]. . . . .	87
3.6. Evolución de los estados del sistema y el control propuesto en [92]. . . . .	87

3.7. Evolución de los estados del sistema y el control propuesto en [112]/[121]. . . . .	87
4.1. En (a) un esquema que muestra lo considerado en las propuestas de control mostradas en el capítulo 2, en (b) la nueva propuesta de control considera la velocidad angular deseada $\omega_d$ en su estructura. . . . .	90
4.2. Comportamiento de los torques de control $\Gamma_{(1,2,3)}$ y de la orientación en términos de ángulos de Cardán. . . . .	96
4.3. Comportamiento de la orientación en términos de cuaterniones. . . . .	97
4.4. Comportamiento de las velocidades angulares, se muestran las trayectorias de referencia y real bajo el control de orientación propuesto. . . . .	98
4.5. Esquema completo del sistema y el control. . . . .	101
4.6. Resultados de los torques de control, los ángulos de Cardán y las velocidades angulares. . . . .	103
4.7. Resultados del control $T$ , la posición y la velocidad lineales. . . . .	104
4.8. Comportamiento de los torques de control, los ángulos de Cardán y las velocidades angulares para el caso de seguimiento de trayectorias en el espacio. . . . .	108
4.9. Comportamiento de la fuerza de sustentación $T$ y de las componentes de posición para el caso de seguimiento de trayectorias en el espacio comparadas con los valores deseados. . . . .	109
4.10. Comportamiento de las componentes de velocidad para el caso de seguimiento de trayectorias en el espacio comparadas con los valores deseados. . . . .	110
4.11. Vista del comportamiento de la posición del vehículo en 3D comparada con la posición deseada . . . . .	111
4.12. Vuelo estacionario del mini helicóptero de cuatro motores. . . . .	112
4.13. Procedimiento de pruebas . . . . .	113
4.14. Resultados del control de torques $\Gamma_{(1,2,3)}$ , los ángulos de Cardán y las velocidades angulares. . . . .	114
4.15. Resultados del control de sustentación $T$ y la evolución de la posición en el eje $z$ . . . . .	115
4.16. Resultados del control de torques $\Gamma_{(1,2,3)}$ , los ángulos de Cardán y las velocidades angulares. . . . .	116
4.17. Resultados del control de sustentación $T$ , la posición en el espacio y las velocidades lineales. . . . .	117
4.18. Gráfica de la evolución de la posición del vehículo aéreo en 3D. . . . .	118
4.19. Resultados del control de torques $\Gamma_{(1,2,3)}$ , los ángulos de Cardán y las velocidades angulares del experimento 3. . . . .	119
4.20. Resultados del control de sustentación $T$ , la posición en el espacio y las velocidades lineales para el experimento 3. . . . .	120
4.21. Resultados del control en tiempo real del movimiento del vehículo en 3D y los puntos de posición deseados vistos en el plano $x - y$ , para el experimento 3. . . . .	121
A.1. Ejemplos de cómo son presentados los resultados en simulación usando MATLAB/Simulink. . . . .	126
A.2. Animación de un Cuadrirotor realizado en V-Realm builder y en (b) una vista de como se observa al vincularse con el diagrama a bloques de Simulink. . . . .	128
A.3. Última parte de una trayectoria de aeronave vista desde distintas perspectivas. . . . .	129

B.1. Diagrama a bloques del sistema. . . . .	132
B.2. Esquema completo del sistema y el control. . . . .	132
B.3. Mini helicóptero de cuatro rotores. . . . .	133
B.4. Partes principales del mini helicóptero de cuatro rotores. . . . .	133
B.5. Esquema completo del sistema y el control. . . . .	134
B.6. Vista de la cara superior e inferior de la placa de la tarjeta: a)Vista superior, b)Vista inferior. . . . .	136
B.7. Placa de alimentación y tarjeta completa. . . . .	136
B.8. Tarjeta Pipistrello FPGA SPARTAN 6. . . . .	137
B.9. Unidad de Medición (AHRS). . . . .	138
B.10. Dispositivos que conforman el sistema de navegación. . . . .	139
B.11. Sistema coordinado terrestre. . . . .	139
B.12. Sistema local coordinado de la Unidad de medición. . . . .	140
B.13. Recepción, concatenación y dimensionamiento de la información de ori- entación recibida. . . . .	142
B.14. Motor brushless (BLDC). . . . .	143
B.15. Interfaz gráfica. . . . .	144
C.1. Definición de estabilidad en el sentido de Liapunov. . . . .	148
C.2. Definición de estabilidad asintótica. . . . .	149

# Dedicatoria

Quiero dedicar este trabajo de tesis a mis amadas hijas

Naomi Yarezi

Keyra Leilany

ojalá esto pueda convertirse en una meta para su vida...



# Agradecimientos

En primer lugar, quiero expresar mi sincera gratitud a mis asesores

Dr. José Fermi Guerrero Castellanos

Dr. Wuiyebaldo Fermín Guerrero Sánchez

por su paciencia, valiosa dirección y apoyo, sin lo cual este trabajo sería imposible.

A mis padres, por darme la oportunidad de la vida.

A mi compañera de vida Ester Castro Medina por su amor, compañía y apoyo durante todos estos años.

A mis hijas, por darme la fuerza para seguir adelante.

A mis profesores, amigos y compañeros por sus enseñanzas, amistad, consejo y acompañamiento en las etapas de desarrollo escolar y profesional.

Además quiero agradecer al

PRODEP

y al Cuerpo Académico

Sistemas de Potencia, para Tracción, Calidad y Generación de Energía

por el apoyo para la conclusión de este trabajo.



# Resumen

En este trabajo de tesis se expone el diseño de leyes de control para la estabilización en orientación y posición de mini sistemas aéreos tipo VTOL (despegue y aterrizaje vertical por sus siglas en inglés de Vertical Take-Off and Landing). La primera parte de este trabajo consiste en obtener el modelo matemático del sistema, para lo cual se descompone la dinámica del movimiento en dos subsistemas; orientación y traslación, considerando que estos sistemas están acoplados en una configuración de cascada, esto significa que bajo este esquema, la dinámica de traslación depende de la dinámica de orientación, sin embargo la dinámica de orientación no depende de la dinámica de traslación. A continuación, se trata con el desarrollo de leyes de control de realimentación imitando la estrategia adoptada por animales voladores para estabilizar la orientación de sistemas que están dentro del marco de los cuerpos rígidos. Los animales voladores son capaces de orientar su trayectoria sin ningún conocimiento de su orientación actual y sin ningún cálculo de su orientación, se basan en mediciones de algunos órganos sensibles: halterios, sencilas en patas y el sentido magnético, los cuales proporcionan información acerca de su velocidad angular y de la orientación de los vectores de gravedad y campo magnético. Entonces, las leyes de realimentación propuestas se calculan utilizando directamente las mediciones de los sensores inerciales, esto es el vector de observación con/sin medidas de la velocidad angular, por lo tanto, la orientación no es explícitamente requerida. Esta propuesta biomimética es muy simple, requiere poco poder computacional y es adecuada para aplicaciones embebidas en pequeñas unidades de control. En este trabajo se incluye un estudio de los sistemas conocidos como cadena de integradores. Se propone una ley de control para estos sistemas, consistente en la suma de funciones de saturación y el posicionamiento dinámico de los polos lo que hace posible modificar la velocidad de convergencia de los estados del sistema y el tiempo de convergencia puede ser disminuido. Para concluir el trabajo, se proponen dos leyes de control no lineales adicionales, la primera para el movimiento rotacional y la segunda para el movimiento traslacional, con la característica de acoplar el movimiento traslacional con el movimiento de orientación (attitude) que permite la estabilización global de las aeronaves (orientación y traslación). En las propuestas se considera información adicional para el control como es la velocidad angular deseada, lo que aumenta la eficiencia del control en ambos casos y es posible conseguir capacidad de seguimiento de trayectorias de orientación y posición. La estrategia de control propuesta es extremadamente simple, de forma que puede ser implementada en microprocesadores sencillos. La característica principal de todas las leyes de control propuestas es que las entradas de control son acotadas, evitando la saturación de los actuadores, aumentando su eficiencia y disminuyendo el desgaste. Estas leyes de control se basan en la utilización de funciones de saturación y la prueba de convergencia se realiza utilizando un formalismo de Lyapunov. El modelo

matemático que describe el movimiento de los sistemas VTOL junto con las leyes de control se validan en simulaciones computacionales utilizando la herramienta MATLAB/Simulink, de donde se obtienen gráficas del desempeño de la propuesta, adicionalmente se utiliza la herramienta V-Realm Builder, también incluida en MATLAB, para apreciar el comportamiento del sistema mediante animación. Finalmente, y que constituye una aportación importante de este trabajo, fue posible la realización de pruebas en tiempo real en modelos físicos de mininares tipo VTOL conocidos como cuadrirotos, los cuales utilizan sensores inerciales de tecnología MEMS, estos modelos han sido construidos en el Laboratorio de Control Avanzado de la Facultad de Ciencias de la Electrónica bajo la dirección del Dr. Fermi Guerrero. Estos experimentos en tiempo real se realizaron para enfatizar la eficiencia de las estrategias de control al mostrar la convergencia de los estados de la aeronave en el modo de vuelo, así como la robustez con respecto a las perturbaciones externas debidas al medio ambiente.

# Introducción

En las décadas de los ochentas y noventas el campo de la robótica móvil mostró un gran progreso y los esfuerzos se concentraron principalmente en la aplicación de robots móviles terrestres y en el desarrollo de los algoritmos necesarios para el control, estabilización y seguimiento de trayectorias [1]. Sin embargo, los vehículos terrestres presentan inherentes restricciones para el acceso a localizaciones deseadas, esto debido a las características del terreno y a la presencia de obstáculos imposibles de evitar. En estos casos los vehículos aéreos no tripulados representan una solución natural para aproximarse al punto deseado, recopilar información e incluso llevar a cabo una acción. A excepción del ámbito aeronáutico, se suele utilizar el término “Robot Aéreo” entendiéndose como tal a un sistema físico capaz de desplazarse de manera autónoma o semiautónoma por el aire para realizar diferentes misiones. En este documento, se utilizará el término “vehículo aéreo no tripulado”, “vehículo aéreo autónomo” o “Robot aéreo” de manera indistinta.

La utilización de vehículos aéreos no tripulados no es una novedad histórica. Desde los papalotes y los globos aerostáticos, pasando por las bombas aéreas utilizadas en varios conflictos bélicos para la observación y el ataque, hasta las aeronaves automatizadas, han tenido que pasar varias décadas de innovaciones y esfuerzos tecnológicos. Sin embargo en la última década, con los Vehículos Aéreos Autónomos UAV (por sus siglas en inglés de Unmanned Aerial Vehicle), un nuevo capítulo se abre en las áreas de física aplicada; aeronáutica, robótica, teoría de control, ya que no se trata solamente de máquinas controladas a distancia, sino de verdaderos sistemas autónomos capaces de evolucionar en un medio ambiente y adaptarse a él. La evolución de los UAV, también llamados “Drones” (Falso abejorro), es una evolución lógica, resultado del progreso tecnológico en el área de los microprocesadores, la construcción de sensores, actuadores y el desarrollo de los dispositivos de almacenamiento de energía. Esta evolución se ha intensificado considerablemente en los últimos años, debido al interés en aplicaciones militares. Actualmente varios países compiten en el diseño de vehículos capaces de llevar a cabo misiones de diversa índole, incrementando el tiempo de autonomía de vuelo y capacidades ofensivas, a tal punto que se han usado para la eliminación física de objetivos específicos, ya no solo para recolectar información [2], [3], esto tiene consecuencias para la población civil, no solo por decesos no contemplados [4], [5], sino también por afectaciones psicológicas para los operadores de estas aeronaves [6], [7]. Algunos Estados han realizado ingeniería inversa con modelos capturados de tal manera que obtienen información y han producido un salto tecnológico cerrando la brecha que existe con países avanzados [8], [9]. Este interés se ha extendido a modelos submarinos, en los que se pone especial interés por parte de algunas potencias [10], [11]. De hecho, se está considerando que los conflictos bélicos futuros en gran medida, estarán

protagonizados por vehículos autónomos como se puede suponer por las previsiones de organismos gubernamentales [12]. Lo anterior es un indicio claro de la importancia que está tomando el desarrollo en esta línea de investigación por parte de distintos Estados, a tal punto que se piensa adaptar recursos importantes existentes actualmente para este desarrollo [13], [14], además de producir armamento para su detección y destrucción en combate [15].

Sin embargo, son las aplicaciones civiles de estos artefactos las que han motivado el desarrollo de la investigación en universidades, en centros de investigación gubernamentales y en organismos privados de todo el mundo [16]. Este desarrollo es notorio por la enorme popularización de robots aéreos, no solo para aplicaciones de esparcimiento [17], [18], [19], o competencias de manejo [20], [21], sino también para usos comerciales [22], [23], supervisión de líneas de comunicación y alta tensión [24], supervisión de infraestructuras civiles (presas, puentes, edificios, estructuras) [25], [26], acciones de desastre y protección civil [27], [28], emergencias [29], supervisión de tráfico [30], vigilancia de fronteras [31], climatología, agricultura [32], reforestación [33], cinematografía [34], retransmisión de eventos deportivos [35], espectáculos [36], concentraciones masivas para televisión, antropología, arqueología [37], biología [38], [39], geología [40], construcción [41] entre otras. Lo anterior es solo una muestra de la utilidad práctica de estos sistemas, que seguramente se ampliarán a investigaciones u operaciones de campo, cuando su autonomía de vuelo se vea incrementada, en disciplinas científicas que lo requieran tales como las mencionadas arriba. Todo lo anterior supone un incremento muy importante en los recursos involucrados en este sector [42], [43]. El uso masivo de estos vehículo también ha empezado a generar problemas de seguridad [44], principalmente para la aviación civil, se observa una posible fuente de accidentes con aeronaves de mayor tamaño en las que se transportan personas lo que es potencialmente peligroso, a tal grado, que varios países han tomado en serio la regulación del uso de drones particulares [45], [46].

Los UAV pueden ser clasificados por su tamaño, su aplicación o los dos. El tamaño es un criterio dominante y en este contexto podemos encontrar los vehículos conocidos como Mini-UAV que son caracterizados principalmente por sus reducidas dimensiones y propulsión eléctrica, lo cual permite realizar vuelos en interiores (indoor). Otra posible clasificación de los UAV es su funcionamiento aerodinámico, así podemos encontrar a los vehículos de ala fija (aeroplanos), de ala rotativa (helicópteros) y de ala batiente los cuales están basados en sistemas biológicos como el colibrí.

Un estudio bibliográfico muestra que la investigación en robótica aérea se ha concentrado principalmente en los vehículos de ala rotativa; helicópteros y arquitecturas con capacidad de despegue y aterrizaje vertical VTOL (por sus siglas en inglés de Vertical Take-Off and Landing). Esto es debido a la capacidad de estos vehículos para realizar vuelos estacionarios, así como la gran movilidad, características importantes y necesarias en una gran cantidad de aplicaciones. Los vehículos VTOL son sistemas mecánicos subactuados, puesto que poseen seis grados de libertad y solo cuatro entradas de control. Los controles están compuestos del vector de fuerza vertical (empuje total) y tres controles de torque. El control de fuerza vertical es usado para compensar la fuerza de gravedad y controlar los movimientos verticales. Los movimientos horizontales se logran direccionando el vector de fuerza vertical en la dirección apropiada. En consecuencia, el control de torque

permite orientar al vehículo a una orientación deseada, lo que permite a su vez, efectuar movimientos horizontales (ver figura 1.12).

Puesto que la investigación en este tipo de vehículos comenzó a mediados de la década pasada, existe una rica literatura sobre el control y la estabilización de estos sistemas. Debido a que el modelo matemático de este tipo de sistemas es no lineal, algunas técnicas se basan en la linealización de la dinámica alrededor de un punto de equilibrio preseleccionado [47]. Entonces, con el modelo lineal técnicas convencionales de control lineal como el control PID, LQR [48] han sido aplicadas. Sin embargo, estas técnicas sufren de una degradación del desempeño cuando el vehículo se aleja de los puntos de equilibrio. Para evitar esto, se utiliza la técnica llamada “Gain Scheduling” [49] que consiste en crear una familia de puntos de equilibrio y una familia de controladores correspondientes a cada uno de ellos, los cuales se interpolan según la necesidad de la maniobra. La principal desventaja de esta técnica es el gran compromiso entre el desempeño del control y el número de puntos de equilibrio requeridos, así como el costo de cálculo necesario. Con el objetivo de evitar las limitaciones y desventajas impuestas por las técnicas lineales, se desarrollaron una variedad de técnicas no lineales de control de vuelo. Entre ellas encontramos, Linealización por realimentación (feedback linearization) [50], [51], [52], inversión dinámica (dynamic inversion) [53], [54], backstepping [55], [56], [57], modos deslizantes [58], adaptivo [59], [60], difuso [61]. Las ventajas principales de estas técnicas es la prueba de estabilidad en lazo cerrado. Desgraciadamente, los algoritmos de control resultantes no son dados explícitamente, son sumamente complejos, son dependientes del modelo y en consecuencia, son difíciles de implementar. A excepción de [51] los algoritmos de control no han sido probados en un sistema real.

El trabajo doctoral presentado en este documento contribuye en el desarrollo de técnicas de control no lineal utilizando un enfoque de control jerárquico, este enfoque a diferencia de la mayoría de los trabajos descritos anteriormente [59] permite obtener leyes de control explícitas, generales y de fácil implementación práctica. Una de las principales aportaciones de este trabajo es que las leyes de control son implementadas en tiempo real. El esquema de control jerárquico o también conocido como esquema de lazo-interno y lazo-externo (inner-outer loop) es una técnica surgida de un espíritu ingenieril que tiene el objetivo de controlar sistemas complejos, por medio de la división del sistema completo en subsistemas unidos en cascada y diseñando leyes de control para cada uno de ellos. La técnica de control jerárquico también ha sido utilizada en el problema del control y estabilización de vehículos VTOL [62], [63]. Este esquema explota la característica de la estructura del modelo matemático de los vehículos VTOL, el cual permite separar la dinámica de orientación de la dinámica de traslación y expresarlos como dos sistemas dinámicos unidos en cascada. Como se menciona al inicio, los vehículos VTOL son sistemas sub-actuados (número de grados de libertad mayor que el número de controles), en consecuencia para que un VTOL tenga movimientos horizontales es necesario inclinarlo en la dirección deseada de movimiento (ver figura 1.12). Con este esquema, el lazo interno permite controlar la orientación mientras que el lazo externo la posición. Cuando una posición debe ser alcanzada, el lazo externo envía información al lazo interno, entonces las torques actúan en el vehículo para ser orientado de tal forma que el vector de fuerza vertical sea orientado en dirección de la posición deseada. La idea de controlar la posición de un VTOL a través

de su orientación ha sido explotada en la práctica debido a que es relativamente simple de comprender, aunque no necesariamente fácil de implementar. La desventaja de la técnica de control jerárquico es que, en general, no existen metodologías definidas, en consecuencia, las ganancias en las leyes de control son ajustadas de manera experimental haciendo uso del ensayo y error. Además, en los trabajos propuestos en la literatura [62], [63], la señal de control no está acotada, esto puede inducir la saturación de los actuadores, degradando el desempeño en una maniobra e incluso llevando al sistema a la inestabilidad. En el presente trabajo se propone una metodología con la que estas ganancias estarán teóricamente determinadas, adicionalmente se garantiza que las señales de control se mantendrán dentro de un intervalo definido a priori.

Una parte fundamental en el control del movimiento de estos sistemas robóticos aéreos es el control de orientación. En este trabajo de tesis, las primeras dos propuestas de control de orientación presentadas están inspiradas, como en no pocas ocasiones, en ejemplos que proporciona la naturaleza. Los insectos voladores realizan distintos tipos de maniobras durante su vuelo basados en información proporcionada por sus órganos sensitivos, esta información permite al animal controlar su equilibrio, orientándose por si solo en su medio ambiente, interactuando con él y realizando otras tareas. Los órganos sensitivos de un insecto, incluyen sensores visuales tales como el ocelo y los ojos compuestos, además de otros sensores biológicos tales como los halterios, las sensilas y el sentido magnético [64, 65, 66]. Los especialistas afirman que las señales de control de vuelo involucrados en el vuelo de insectos se originan en su cerebro, el cual tiene 3000 células nerviosas o neuronas [66]. Sin embargo, estas tres mil neuronas, cada una interpretada como un transistor encendido-apagado (código binario), proporciona no más poder computacional del que posee un tostador [67], a pesar de los aspectos mencionados, los insectos son más ágiles que las modernas aeronaves equipadas con computadoras digitales súper rápidas. Consecuentemente, como es propuesto en [67], el control de vuelo desde la perspectiva del vuelo de los insectos representa un cambio de paradigma con respecto al control de vuelo convencional, usado para sistemas aeronaves tripuladas y no tripuladas. Actualmente, el control de vuelo convencional usa pocas medidas y muchos cálculos, mientras el control de vuelo de los insectos hace lo opuesto, muchas medidas mediante múltiples sensores y pequeños cálculos.

Muchas propuestas han sido reportadas en la literatura para desarrollar leyes de control de estabilización de orientación para varias aplicaciones ([68], [69], [70], [71], [72], [73], [74], [75], [76]), la lista no es exhaustiva. A pesar de que las estrategias citadas han resuelto el problema de estabilización de orientación, estas se basan en realimentación de estado: la orientación, representada por ángulos de Euler en  $\mathbb{R}^3$ , cuaterniones en  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$  o matriz de rotación en  $SO(3)$ <sup>1</sup> y la velocidad angular en  $\mathbb{R}^3$ , las cuales se suponen conocidas. Puesto que una medida directa de la orientación no es posible, la información acerca de la orientación es obtenida a través de observadores adecuados (estimadores de orientación) que combinan mediadas de sensores (ver [78], [79], [80], [81]). Los sensores usados para la determinación de la orientación pueden ser clasificados en dos categorías principales: (i) sensores de velocidad angular; y (ii) sensores de vectores de referencia (es decir, magnetómetros, acelerómetros, seguidores de estrellas, sensores solares) que proporcionan la proyección ,

---

<sup>1</sup>Ver definición en la página 8 o en [77].

en su marco de referencia local, de un vector fijo en el espacio, esta proyección es conocida como “vector de observación”. En la actualidad, existen varias unidades de orientación comerciales que están basadas en este tipo de sensores y estimadores de orientación, sin embargo, los algoritmos de estimadores de orientación requieren potentes capacidades de cómputo, las cuales hacen a éstas, inconvenientes para aplicaciones embebidas con restricciones de peso o poder de cómputo. Además, estas estrategias no son inspiradas por vuelo natural, la cual está basada directamente en medidas de sensores.

En el capítulo 2 de este trabajo doctoral se realizan dos propuestas de leyes de control biológicamente inspiradas. Primero, una ley de control acotada, continua y estática es desarrollada usando las medidas de velocidad angular (por ejemplo, los halterios) y el error de orientación mediante medidas directas de los sensores del vector de referencia (por ejemplo, sensilas en patas y sentido magnético). Una segunda ley de control acotada, continua y dinámica es propuesta basada solo en las medidas de los sensores de los vectores de referencia: la información acerca de la velocidad angular proviene de por lo menos dos vectores de observación no colineales, sin alguna reconstrucción de esta. Esta ley de control evita la medida de la velocidad angular (los halterios) en caso de que este órgano sensitivo no esté trabajando. A pesar de que las leyes de control son una función de los vectores de observación, el análisis de estabilidad se lleva a cabo en la configuración del espacio  $SO(3)$  de la física el cuerpo rígido, para evitar cualquier reinterpretación. La estabilidad asintótica del cuerpo rígido sujeto a la ley de control es probada mediante el análisis de Lyapunov en ambos casos. La propuesta es aplicada a la estabilización de orientación en tiempo real de una aeronave cuadrirotor en vuelo. La velocidad angular es obtenida usando tres girómetros montados ortogonalmente (equivalente a los halterios) y los vectores de observación son obtenidos de un acelerómetro triaxial y un magnetómetro triaxial (equivalentes, respectivamente, a las sensilas en patas y al sentido magnético). Las capacidades de las dos leyes de control son probadas para asegurar la estabilización en una orientación constante deseada. Estas muestran un rendimiento esperado en términos de tiempo de estabilización y robustez relativa al ruido del sensor y perturbaciones externas. Un aspecto importante de la originalidad del trabajo consiste en que la ley de control es general y puede ser aplicada a cualquier vehículo que esté dentro de la clase de vehículos VTOL.

Una cadena de integradores está definida como  $\dot{x} = Ax + Bu$  donde  $A$  es tal que  $a_{ij} = 1$  si  $j = i + 1$  y  $a_{ij} = 0$  en otro caso,  $B$  es tal que  $b_i = 0$  para  $i = 1, \dots, n - 1$  y  $b_n = 1$ ,  $n$  es la dimensión del sistema. Estos sistemas conforman un subconjunto de una clase de sistemas que son llamados *asintóticamente nulo-controlables con controles acotados* ([82] y [83]). Esta propiedad se muestra en [84] y es equivalente a un sistema que es estabilizable y que tiene todos sus polos en lazo abierto en el semiplano izquierdo. El capítulo 3 de este trabajo de tesis incluye un desarrollo que tiene que ver con la estabilización global de un sistema de cadena de integradores, donde el valor del control  $u$  está restringido a satisfacer  $u \in [-\bar{u}, \bar{u}]$ , donde  $\bar{u}$  es algún número real estrictamente positivo conocido a priori. El estudio de tales sistemas está motivado en el hecho de que es común encontrar un problema de control no lineal fundamental por la saturación de los actuadores. En realidad, todos los dispositivos de control están sujetos a restricciones de amplitud, fuerzas, torques, empujes, golpes, voltaje, corriente, flujo, velocidad y todas las entradas físicas en

cada tecnología de aplicación de control está restringida. Por lo tanto, el diseño, análisis y síntesis de controladores para sistemas con restricciones de amplitud en la entrada es una necesidad para teóricos e ingenieros, pues ambos profesionales deben tomar en cuenta en su trabajo, las restricciones físicas de los actuadores utilizados en determinado sistema.

La estrategia de control desarrollada para la estabilización de la cadena de integradores es de tipo no lineal y consiste en la suma de funciones de saturación. A diferencia de los trabajos reportados, esta estrategia mantiene el valor de los límites de la saturación previamente definidos, aquí el valor de los polos del sistema, tomados como coeficientes en las funciones de saturación del control, pueden modificar la velocidad de convergencia de los estados del sistema, entonces la atención se centra en el cambio de la magnitud de los coeficientes, es decir, posiciona los polos de forma dinámica de tal manera que el tiempo de convergencia puede ser disminuido. Esta estrategia de control será empleada para diseñar la ley de control para la estabilización de la posición en el espacio de vehículos VTOL.

Con el problema del control de orientación resuelto, es posible la manipulación de un vehículo VTOL para la realización de movimientos de traslación, donde el control de traslación, en este caso, es realizado por un ser humano mediante un dispositivo de radiocontrol con capacidad de transmisión a diferentes distancias. En este sentido, se han realizado esfuerzos para diseñar leyes de control de traslación que doten a los vehículos VTOL de la capacidad de realizar el seguimiento de trayectorias previamente definidas, con el fin de realizar alguna tarea específica y así prescindir de un piloto humano, varias de estas propuestas ya han sido mencionadas anteriormente. El modelo más emblemático en las arquitecturas VTOL es el helicóptero con cuatro rotores, que ha dado origen a trabajos muy importantes, por ejemplo [51], [62], [85], [86], [87], [88], [89], [90].

En el capítulo 4 de este trabajo se desarrolla una estrategia de control que permite la estabilización completa del vehículo aéreo VTOL (orientación y traslación). Este sistema robótico, como ya se mencionó anteriormente, se puede expresar como un sistema en cascada, entonces el diseño de la ley de control se realizó utilizando un enfoque jerárquico lazo interno- lazo externo. Con este esquema, el lazo interno permite controlar la orientación mientras que el externo controla la posición. Estos dos lazos de control se relacionan por señales de control intermedias. El control de orientación se realiza mediante una propuesta que combina el resultado de la ley de control propuesta en [85] y una parte de la propuesta en [91]. Para el control de posición se realiza una adecuada transformación de coordenadas, en este caso, se toma como base el desarrollo mostrado para estabilización de cadena de integradores, entonces, inspirados en los trabajos de [92], [82] y [93] se proponen tres leyes de control basadas en la suma de saturaciones con garantía de polos reales diferentes de uno. Aquí se divide la dinámica de traslación en cada uno de los ejes espaciales. La estrategia de control propuesta es extremadamente simple, de forma que ella puede ser fácilmente implementada con algún microprocesador de 16 bits. La prueba de estabilidad para estas propuestas tienen la misma forma que las realizadas en cadena de integradores. Es necesario mencionar que para el funcionamiento de esta propuesta, se decidió proponer un control de orientación convencional, donde se asume que los estados del sistema son conocidos (orientación y velocidad angular), la nueva propuesta de control de orientación está basada en una combinación de las propuestas descritas en [85] aunada a la parte que se refiere a la suma de un torque deseado propuesto en [94], esta última parte se hace con

el fin de tener en cuenta las velocidades angulares deseadas en el movimiento rotacional del vehículo. Esta propuesta de control de orientación, en los términos en que se plantea tiene la capacidad de realizar seguimiento de trayectorias de orientación al incluir en ella el término que refiere a la velocidad angular deseada, adicional al torque deseado. Esta característica permite aumentar el rendimiento en el control del movimiento de orientación y posibilita, así mismo, extender las capacidades del control de traslación, de estabilización en un punto deseado en el espacio, a seguimiento de trayectorias deseadas en el espacio tridimensional.

En particular, esto se hizo por el hecho de que las leyes de control de orientación basados en vectores de observación, también propuestas en este trabajo, tienen un defecto de rendimiento debido al ruido que detectan los sensores y que son producidos por los motores que hacen funcionar los rotores de la aeronave. El nuevo control de orientación evita en cierto grado esta situación y el rendimiento del control de posición es capaz de realizar la tarea solicitada. Con la finalidad de conseguir la capacidad de seguimiento de trayectorias de posición, adicionalmente se realiza una modificación del control de posición inspirada en la estructura que presenta el control de orientación.

Con el fin de asegurar el rendimiento de las propuestas presentadas en este trabajo de tesis, para todas las propuestas de ley de control han sido realizadas pruebas de estabilidad utilizando el formalismo de Lyapunov, una parte de esta teoría se muestra en el apéndice D. Con el mismo fin, se debe mencionar que para cada una de las propuestas contenidas en este trabajo, se realizaron pruebas en simulación utilizando un simulador construido utilizando herramientas contenidas en el software MATLAB, las características de este simulador también son descritas aquí. Los resultados de estas pruebas se incluyen en este trabajo, ejecutadas para distintas condiciones supuestas del vehículo VTOL.

Una de las contribuciones más importantes en este trabajo de tesis es la posibilidad de realizar pruebas en tiempo real, tanto en las leyes de control presentadas en el capítulo 2, como en la propuesta de control global descrita en el capítulo 4. Para esto, se han utilizando dos modelos VTOL cuadrirotor construidos en el Laboratorio de Control Avanzado de la Facultad de Ciencias de la Electrónica, por alumnos del posgrado Ingeniería Electrónica, opción Instrumentación Electrónica, bajo la supervisión del Dr. Fermi Guerrero. Es necesario mencionar que no es parte de los objetivos de este trabajo la construcción de dicho modelo, sin embargo, en el apéndice B se describen las características técnicas de uno de los vehículos con el que se realizaron pruebas reales, se entiende que el otro modelo comparte las características básicas. Los resultados de estas pruebas experimentales son mostrados aquí y estos validan la efectividad de las propuestas planteadas en este trabajo, así como su robustez ante perturbaciones del medio ambiente. Finalmente, en la figura 1 se muestra un esquema de la forma cómo están relacionadas cada una de las partes que integran este documento.

## Estructura del trabajo de tesis doctoral

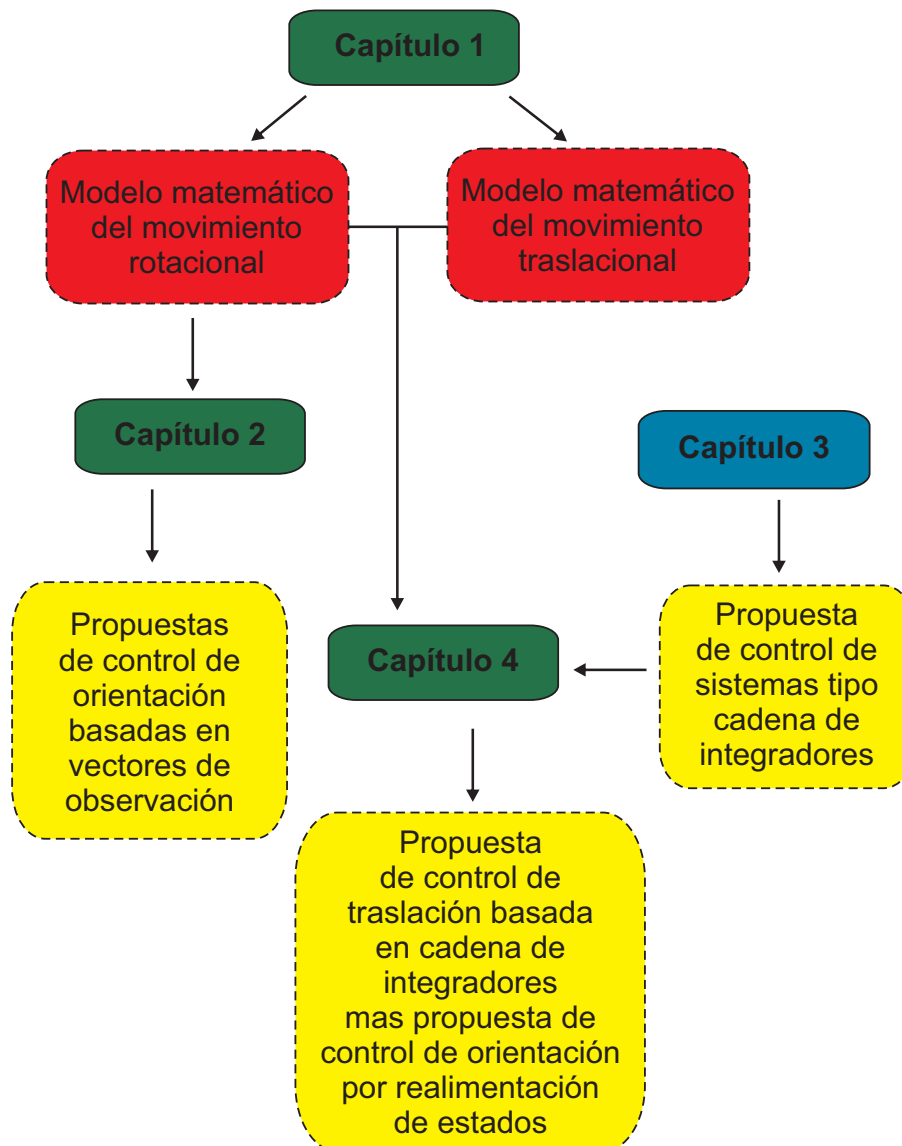


Figura 1: Esquema de la relación que guardan los contenidos de este trabajo de tesis

# Capítulo 1

## Modelo matemático de los vehículos tipo VTOL

En la actualidad es necesario contar con modelos matemáticos que describan el comportamiento de sistemas de desarrollo tecnológico, los vehículos aéreos no son la excepción. Por fortuna se cuenta con buena cantidad de literatura sobre este tema, y las bases teóricas sobre este tipo de sistemas se ha trabajado ampliamente en el campo de la Física, en particular en la Mecánica Clásica.

En este capítulo se muestra la manera en que se construye el modelo matemático que describe el comportamiento de los vehículos aéreos tipo VTOL<sup>1</sup>. Para esto es necesario previamente, una revisión de los fundamentos teóricos del modelo utilizado para describir el movimiento de los vehículos aéreos en general, a través del estudio del movimiento de los cuerpos rígidos. Adicionalmente, se muestran las ecuaciones que rigen el comportamiento de los actuadores que serán utilizados en el modelo real. Finalmente, como ahora es común en desarrollos tecnológicos, se hace una descripción del simulador construido utilizando la aplicación MATLAB/Simulink con el fin de contar con una herramienta virtual que proporcione una idea del posible comportamiento del sistema al utilizar los controles propuestos, y con esto tomar decisiones de cuándo es seguro probar con sistemas reales.

### 1.1. Fundamentos teóricos

Para construir el modelo matemático que describe el comportamiento de los sistemas aéreos VTOL, es necesario revisar desarrollos teóricos realizados para modelar cualquier vehículo aéreo. Esto se ha realizado en los estudios de Mecánica Clásica, en esencia, las partes Cinemática y Dinámica de cuerpos rígidos. En esta Sección, se presenta una descripción de partes fundamentales de estos desarrollos con el fin de tener claridad de la base teórica que fundamenta el modelo matemático que describe el movimiento de los vehículos de interés para este trabajo. Al mismo tiempo, es importante considerar para su estudio algunos de los distintos formalismos con los que se expresa la orientación de cuerpos en el

---

<sup>1</sup>Despegue y aterrizaje vertical, por sus siglas en inglés de Vertical Take Off and Landing.

espacio, los cuales serán parte también del modelo a utilizar. Será con la presentación de estos formalismos con los que se comenzará este estudio para enseguida continuar con lo concerniente al cuerpo rígido y la dinámica de vehículos aéreos.

### 1.1.1. Parametrización de la orientación (attitude) de los vehículos aéreos

La orientación de un cuerpo rígido en el espacio se puede representar de distintas maneras<sup>2</sup>, aquí se presentarán las parametrizaciones en términos de ángulos de Euler y ángulos de Cardán, estas parametrizaciones son muy similares por lo que en ocasiones se usan indistintamente, particularmente en aeronáutica. Adicionalmente, se muestra la parametrización en términos de cuaterniones, que son ampliamente usados en aplicaciones tecnológicas reales y virtuales.

#### Parametrización de la orientación en términos de ángulos de Euler y ángulos de Cardán

La manera más común de representar una rotación en el espacio de tres dimensiones es utilizando los ángulos de Euler  $(\psi, \theta, \phi)$ . Sin embargo, es necesario poner atención en las confusiones puesto que en ciertos casos los ángulos de Euler son a menudo confundidos con los ángulos de Cardán [16].

Al utilizar los ángulos de Euler, el paso de un sistema de coordenadas inercial definido por  $\mathbf{E}^f = [x_n, y_n, z_n]$  a un sistema de coordenadas fijo al cuerpo<sup>3</sup> definido por  $\mathbf{E}^b = [x_b, y_b, z_b]$  se hace en tres etapas.

1. La posición del sistema de referencia inercial  $\mathbf{E}^f = [x_n, y_n, z_n]$  cambia a la posición de un sistema de referencia intermedio  $[x_1, y_1, z_1]$  debido a una rotación un ángulo  $\psi$ , alrededor del eje  $z_n$  descrito en la figura 1.1(a).
2. A continuación se hace una segunda rotación esta vez alrededor del nuevo eje  $x_1$ , un ángulo  $\theta$ , para llegar a un segundo sistema de referencia intermedio  $[x_2, y_2, z_2]$ , como se puede ver en la figura 1.1(b).
3. Por último, se hace una tercera rotación alrededor del nuevo eje  $z_2$ , un ángulo  $\phi$ , para coincidir finalmente con la posición del sistema de coordenadas fijo al cuerpo  $\mathbf{E}^b = [x_b, y_b, z_b]$ , como se muestra en la figura 1.1(c).

---

<sup>2</sup>El lector puede consultar [16], Capítulo 1, para ver más representaciones

<sup>3</sup>Es común llamar “marco de referencia inercial” al sistema de coordenadas inercial o simplemente “marco inercial”, así como “marco de referencia fijo al cuerpo” o simplemente “marco del cuerpo” al sistema de coordenadas fijo al cuerpo.

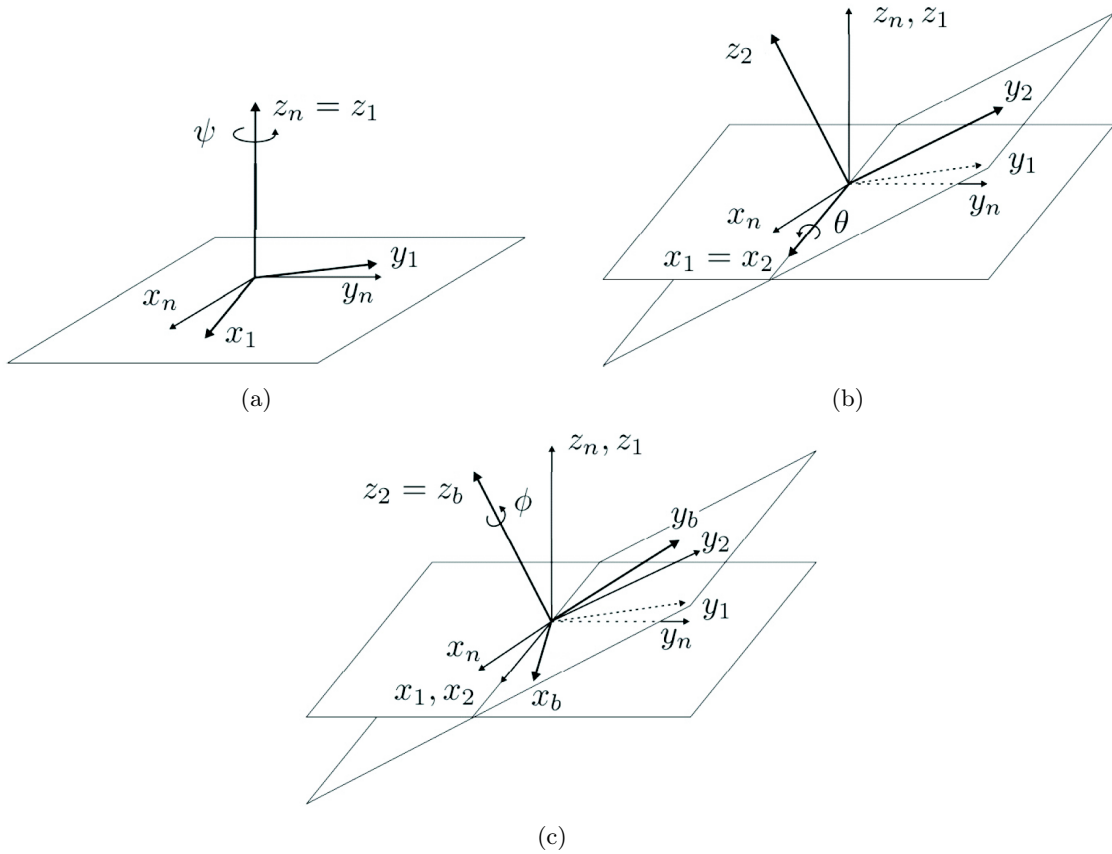


Figura 1.1: Esquemas de (a) la rotación alrededor del eje  $z_n$  un ángulo  $\psi$ , (b) la rotación alrededor del eje  $x_1$  un ángulo  $\theta$  y (c) la rotación alrededor del eje  $z_2$  un ángulo  $\phi$ .

Los ángulos de Cardán describen la secuencia de rotaciones más utilizada en aeronáutica y en robótica (ver figura 1.2) y es una de las parametrizaciones que se utilizarán en este trabajo de tesis. Es conveniente mencionar que existe una pequeña diferencia entre los sistemas de referencia presentados en esta sección en cuanto a su dirección, es decir, los sistemas de referencia mostrados en las figuras 1.1-1.2 son sistemas de mano derecha con el eje  $z$  apuntando hacia arriba, posteriormente se mostrarán sistemas de referencia llamados NED, donde el eje  $x$  apunta al norte, el eje  $y$  hacia el este y el eje  $z$  hacia abajo, como el primer sistema de referencia mostrado en la figura 1.3. La utilización de uno u otro no debe causar confusión, pues ambos sistemas son físicamente equivalentes y las descripciones matemáticas obtenidas a partir de uno funcionan también para el otro, considerando un cambio de signo. La utilización de los sistemas NED en aeronáutica es común con el fin de simplificar las ecuaciones.

Al emplear los ángulos de Cardán, pasar de un sistema de coordenadas inercial  $\mathbf{E}^f = [x_n, y_n, z_n]$  a un sistema de coordenadas fijo al cuerpo  $\mathbf{E}^b = [x_b, y_b, z_b]$  se lleva a cabo también en tres etapas que se describen a continuación. Estando en una posición, en el tiempo  $t = 0$ , donde coincidan los marcos de referencia  $\mathbf{E}^f$  y  $\mathbf{E}^b$  se dan las siguientes rotaciones (ver figura 1.3) [95].

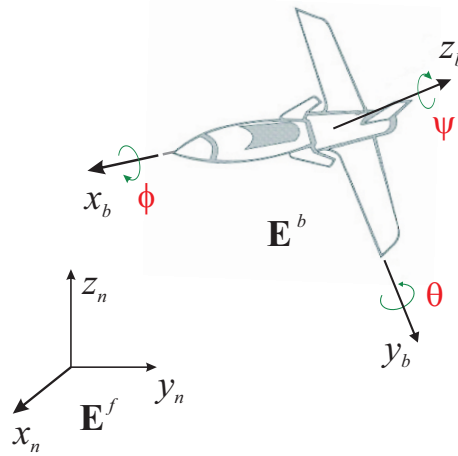


Figura 1.2: Los ángulos de Cardán.

1. Rotar el marco de referencia inercial  $[x_n, y_n, z_n]$  alrededor del eje  $z_n$  un ángulo  $\psi$ , conocido en aeronáutica como ángulo de guiñada (*yaw*), hasta el marco de referencia  $[x_1, y_1, z_1]$  (con  $-\pi \leq \psi \leq \pi$ ).
2. Rotar el marco de referencia  $[x_1, y_1, z_1]$  alrededor del eje  $y_1$  un ángulo  $\theta$ , conocido en aeronáutica como ángulo de cabeceo (*pitch*), hasta el marco de referencia  $[x_2, y_2, z_2]$  (con  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ).
3. Rotar el marco de referencia  $[x_2, y_2, z_2]$  alrededor del eje  $x_2$  un ángulo  $\phi$ , conocido en aeronáutica como ángulo de alabeo (*roll*), hasta el marco de referencia  $[x_3, y_3, z_3]$  (con  $-\pi \leq \phi \leq \pi$ ), esta orientación del marco de referencia fijo al cuerpo es relativa al marco de referencia inercial.

De la misma manera, si se requiere ir del sistema de coordenadas fijo al cuerpo  $\mathbf{E}^b$  al sistema de coordenadas inercial  $\mathbf{E}^f$ , la secuencia  $(\phi, \theta, \psi)$  debe ser respetada, recuérdese que el orden de las rotaciones es extremadamente importante.

Teniendo definidos los ángulos de Cardán, es posible obtener una matriz que hace posible transformar cualquier cantidad lineal, expresada en el marco de referencia inercial  $\mathbf{E}^f$ , a su forma expresada en el marco de referencia fijo al cuerpo  $\mathbf{E}^b$ . A continuación se describe la forma en cómo esta matriz, llamada matriz de rotación, es obtenida.

Considerese la rotación alrededor del eje  $z_n$  un ángulo  $\psi$  mostrado en la figura 1.3, con fines de claridad, esta rotación es mostrada en el plano en la figura 1.4(a), donde el marco inercial está dado por  $\mathbf{E}^f = [x_n, y_n, z_n]$  y un sistema de coordenadas intermedio  $[x_1, y_1, z_1]$  es considerado, entonces se pueden observar las relaciones

$$x_n = x_1 \cos\psi - y_1 \operatorname{sen}\psi, \quad (1.1)$$

$$y_n = x_1 \operatorname{sen}\psi + y_1 \cos\psi, \quad (1.2)$$

$$z_n = z_1. \quad (1.3)$$

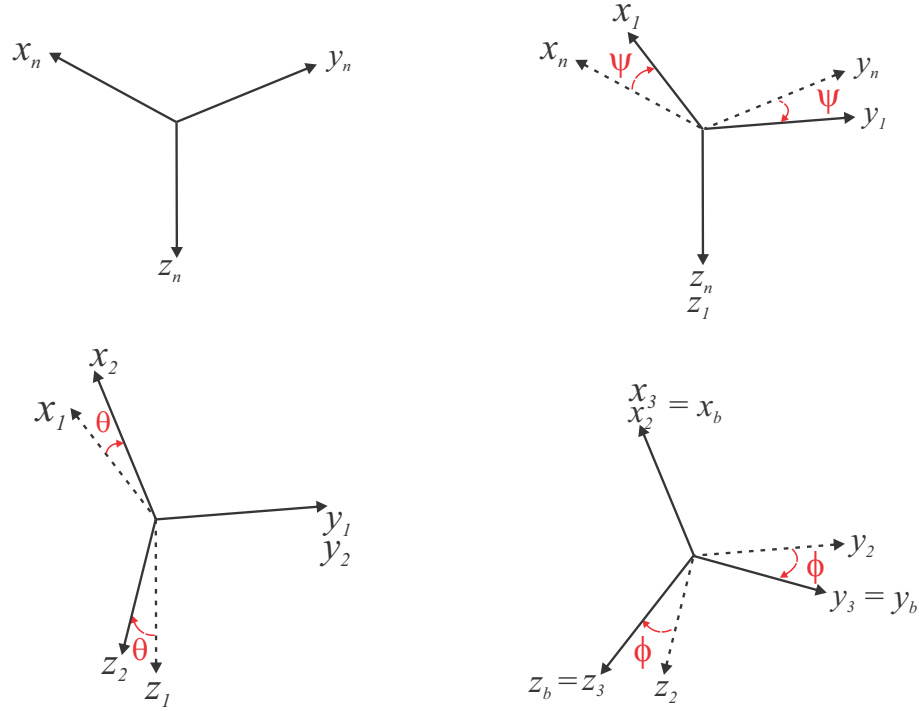


Figura 1.3: Esquema de la sucesión de giro de los ángulos de Cardán

De la misma manera, tomando en cuenta la rotación alrededor del eje  $y_1$  un ángulo  $\theta$  mostrado en la figura 1.3 y considerando otro sistema de coordenadas intermedio denotado por  $[x_2, y_2, z_2]$ , la figura 1.4(b) muestra esta rotación en el plano bidimensional y se pueden derivar las relaciones

$$x_1 = x_2 \cos\theta + z_2 \operatorname{sen}\theta, \quad (1.4)$$

$$y_1 = y_2, \quad (1.5)$$

$$z_1 = -x_2 \operatorname{sen}\theta + y_1 \cos\theta. \quad (1.6)$$

Por último, la rotación alrededor del eje  $x_2$  un ángulo  $\phi$  mostrado en la última imagen de la figura 1.3, coloca al sistema de coordenadas inercial en la orientación del sistema de coordenadas fijo al cuerpo  $\mathbf{E}^b = [x_b, y_b, z_b]$ , esta rotación se muestra en dos dimensiones en la figura 1.4(c) y es posible obtener las relaciones

$$x_2 = x_b \quad (1.7)$$

$$y_2 = y_b \cos\phi - z_b \operatorname{sen}\phi, \quad (1.8)$$

$$z_2 = y_b \operatorname{sen}\phi + z_b \cos\phi. \quad (1.9)$$

Observando la ecuación (1.1), es posible sustituir  $x_1$  y  $y_1$  mostradas en las ecuaciones (1.4) y (1.5), y posteriormente sustituir  $x_2$ ,  $y_2$  y  $z_2$  de las ecuaciones (1.7)-(1.9), de esta manera en el caso de  $x_n$  se tiene

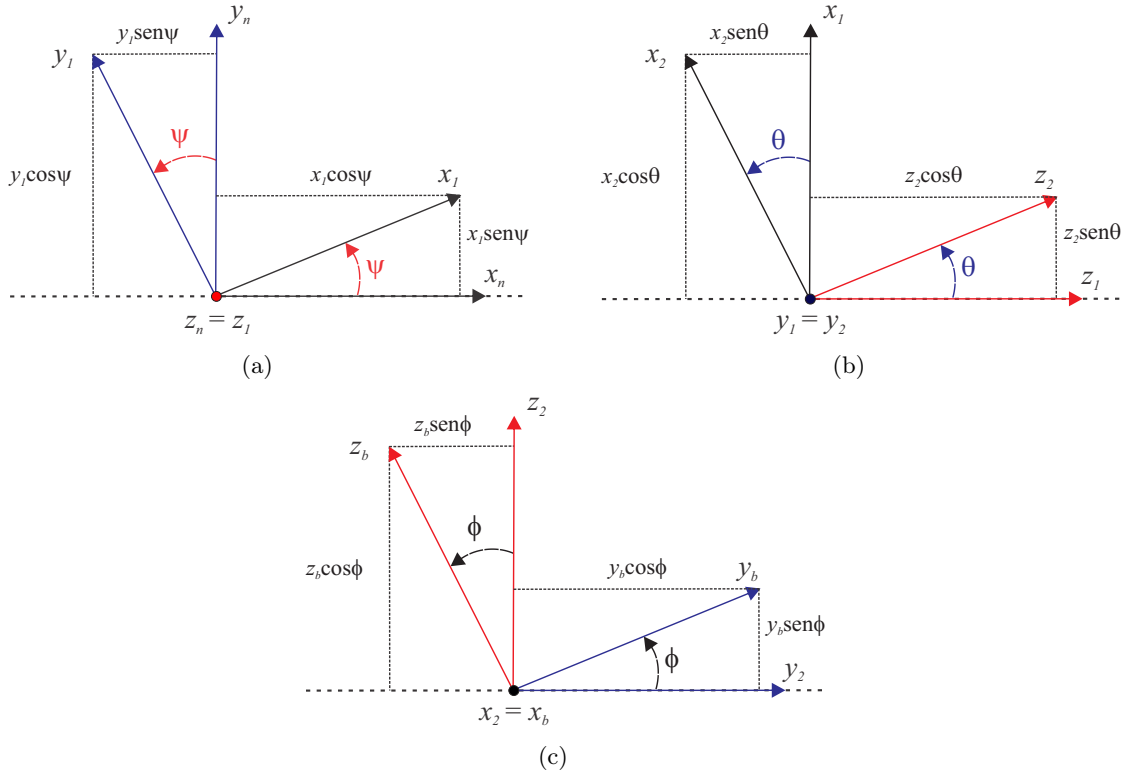


Figura 1.4: Esquemas de (a) la rotación alrededor del eje  $z_n$  un ángulo  $\psi$ , (b) la rotación alrededor del eje  $y_1$  un ángulo  $\theta$  y (c) la rotación alrededor del eje  $x_2$  un ángulo  $\phi$ . Los ejes de rotación son perpendiculares al plano y su dirección es saliendo de la página.

$$x_n = x_b(\cos \psi \cos \theta) + y_b(\cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi) + z_b(\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi). \quad (1.10)$$

Realizando los desarrollos correspondientes para  $y_n$  y  $z_n$ , el resultado en forma matricial puede ser expresado como

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

Como se mencionó antes, esta matriz es la llamada *matriz de rotación*, el proceso para derivarla no es único [], e incluso usando otra variable, por ejemplo la velocidad, es posible

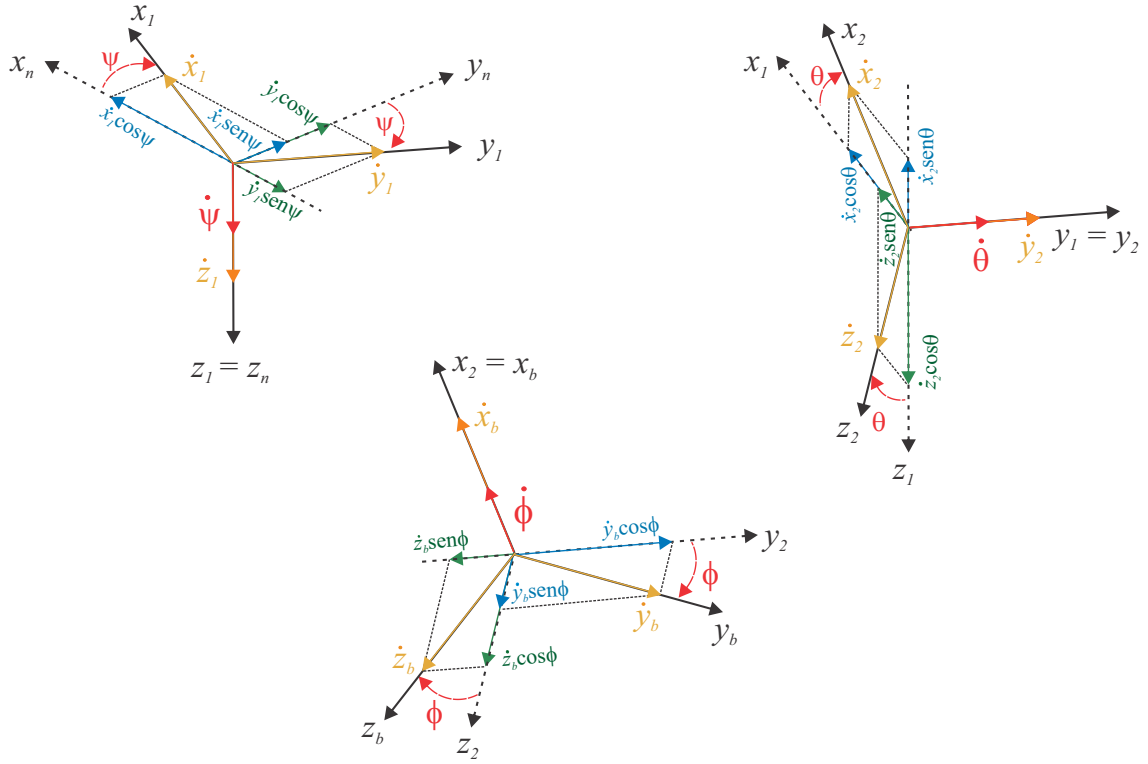


Figura 1.5: Esquemas de las rotaciones sobre los ejes  $z_n$ ,  $y_1$  y  $x_2$  junto con las velocidades lineales descritas en cada eje.

derivarla al determinar las componentes de la velocidad de vuelo relativas al marco de referencia inercial, lo anterior se puede conseguir de la siguiente manera. Sean las componentes de velocidad en el marco de referencia inercial  $[x_n, y_n, z_n]$  dadas por  $\frac{dx_n}{dt}$ ,  $\frac{dy_n}{dt}$ ,  $\frac{dz_n}{dt}$  y similarmente, sean las componentes de velocidad  $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$  y  $\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2$  en los marcos de referencia intermedios  $[x_1, y_1, z_1]$  y  $[x_2, y_2, z_2]$ , respectivamente.

La figura 1.5 contiene una serie de imágenes con la misma secuencia de rotaciones con que se definieron los ángulos de Cardán, con la diferencia que en esta una perspectiva en tres dimensiones es mostrada. Si bien se corre el riesgo de confusión en las imágenes, es necesario aclarar que esta secuencia de imágenes expresa las mismas rotaciones mostradas anteriormente en las figuras 1.4. Por inspección de la primera imagen en la figura 1.5, se puede observar que, para la primera rotación alrededor del eje  $z_n$ , se cumplen las siguientes relaciones

$$\frac{dx_n}{dt} = \dot{x}_1 \cos\psi - \dot{y}_1 \operatorname{sen}\psi, \quad (1.12)$$

$$\frac{dy_n}{dt} = \dot{x}_1 \operatorname{sen}\psi + \dot{y}_1 \cos\psi, \quad (1.13)$$

$$\frac{dz_n}{dt} = \dot{z}_1, \quad (1.14)$$

---

CAPÍTULO 1. MODELO MATEMÁTICO DE LOS VEHÍCULOS TIPO VTOL

---

la inspección de la segunda imagen en la figura 1.5, para la segunda rotación alrededor del eje intermedio  $y_1$ , se obtienen las relaciones

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 \cos\theta + \dot{z}_2 \operatorname{sen}\theta, \quad (1.15)$$

$$\dot{y}_1 = \dot{y}_2, \quad (1.16)$$

$$\dot{z}_1 = -\dot{x}_2 \operatorname{sen}\theta + \dot{z}_2 \cos\theta, \quad (1.17)$$

por último, de la tercera imagen de la figura 1.5 para la tercera rotación alrededor del eje intermedio  $x_2$  se tienen las relaciones

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_b, \quad (1.18)$$

$$\dot{y}_2 = \dot{y}_b \cos\phi - \dot{z}_b \operatorname{sen}\phi, \quad (1.19)$$

$$\dot{z}_2 = \dot{y}_b \operatorname{sen}\phi + \dot{z}_b \cos\phi. \quad (1.20)$$

Como en el caso de la posición, para la ecuación (1.10) es posible sustituir  $\dot{x}_1$  y  $\dot{y}_1$  de las ecuaciones (1.15) y (1.16), posteriormente, sustituir  $\dot{x}_2$ ,  $\dot{y}_2$  y  $\dot{z}_2$  de las ecuaciones (1.18)-(1.20), de esta manera en el caso de  $\frac{dx_n}{dt}$  se tiene

$$\frac{dx_n}{dt} = \dot{x}_b(\cos\psi \cos\theta) + \dot{y}_b(\cos\psi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\psi \cos\phi) + \dot{z}_b(\cos\psi \operatorname{sen}\theta \cos\phi + \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\phi). \quad (1.21)$$

Haciendo algo similar para  $\frac{dy_n}{dt}$  y  $\frac{dz_n}{dt}$  se puede expresar el resultado en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_n}{dt} \\ \frac{dy_n}{dt} \\ \frac{dz_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi \cos\theta & \cos\psi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\psi \cos\phi & \cos\psi \operatorname{sen}\theta \cos\phi + \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\psi \cos\theta & \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + \cos\psi \cos\phi & \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta \cos\phi - \cos\psi \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \operatorname{sen}\phi & \cos\theta \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \\ \dot{z}_b \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Tomando  $\mathbf{v}_f = [\frac{dx_n}{dt} \ \frac{dy_n}{dt} \ \frac{dz_n}{dt}]^T$  como el vector velocidad del vehículo en el marco de referencia inercial ( $\mathbf{E}^f$ ) y  $\mathbf{v}_b = [\dot{x}_b \ \dot{y}_b \ \dot{z}_b]^T$  como el vector velocidad del vehículo en el marco de referencia fijo al cuerpo ( $\mathbf{E}^b$ ), la ecuación anterior puede ser puesta en términos vectoriales de la forma

$$\mathbf{v}_f = R_b^f(\psi, \theta, \phi)\mathbf{v}_b. \quad (1.23)$$


---

De la integración de estas ecuaciones es posible obtener la posición de la aeronave con respecto al marco de referencia inercial, la cual debe coincidir con la obtenida anteriormente y que es mostrada en la ecuación (1.11).  $R_b^f(\psi, \theta, \phi)$  es la matriz de rotación que describe el paso del sistema de coordenadas del cuerpo  $\mathbf{E}^b = (x_b, y_b, z_b)$  al sistema de coordenadas inercial  $\mathbf{E}^f = (x_n, y_n, z_n)$  [96].

Es importante mencionar que, en aplicaciones de control de orientación, los dispositivos usados para determinar la posición, velocidad o aceleración de vehículos en el espacio, miden estos estados con respecto al sistema de referencia inercial, por lo tanto, para determinar estos valores con respecto al sistema de referencia fijo al cuerpo, se deben multiplicar estos valores por la matriz que describe el paso del sistema de coordenadas inercial  $\mathbf{E}^f$  al sistema de coordenadas del cuerpo  $\mathbf{E}^b$  denotada por  $R_f^b$ . De la ecuación (1.23) se deriva que  $R_f^b = R_b^{fT}$ . Con el fin de simplificar la notación para los desarrollos mostrados posteriormente en los siguientes capítulos, se adoptará la siguiente convención

$$R = R(\phi, \theta, \psi) = R_f^b = R_b^{fT}(\psi, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\psi \cos\theta & \sin\psi \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\psi \sin\theta \sin\phi - \sin\psi \cos\phi & \sin\psi \sin\theta \sin\phi + \cos\psi \cos\phi & \cos\theta \sin\phi \\ \cos\psi \sin\theta \cos\phi + \sin\psi \sin\phi & \sin\psi \sin\theta \cos\phi - \cos\psi \sin\phi & \cos\theta \cos\phi \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

La matriz de rotación  $R \in SO(3)$ , donde el grupo ortogonal especial  $SO(3)$  es el grupo de matrices ortogonales de  $3 \times 3$  que cumple las propiedades de  $R^T R = I$ , que implica que  $R^T = R^{-1}$ , además  $\det(R) = 1$ , es decir,  $SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | R^T R = R R^T = I, R^T = R^{-1}, \det(R) = 1\}$ . La matriz de rotación  $R$  también puede ser entendida como la que describe la orientación del marco fijo a la aeronave con respecto al marco inercial ([90], [97], [98], [99]), es decir,  $R$  determina la orientación del cuerpo con respecto del marco de referencia inercial.

La representación de la orientación a través de los ángulos de Cardán es la más utilizada en las comunidades de aeronáutica y robótica. Esta popularidad es debida a que esta representación es más sencilla e intuitiva para describir una rotación en el espacio. Sin embargo, tiene la desventaja de presentar una singularidad geométrica cuando  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , fenómeno conocido como “Gimbal-lock”. Además, esta singularidad geométrica introduce una singularidad en la ecuación cinemática asociada a esta representación, como se verá más adelante.

La relación entre las velocidades angulares en el marco de referencia fijo al cuerpo  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  y la razón de cambio de los ángulos de Cardán con respecto al tiempo  $(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$  también pueden ser determinados. Por inspección de la figura 1.6(a) se obtiene que

$$\omega_1 = \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin\theta, \quad (1.25)$$

de la figura 1.6(b) se obtiene

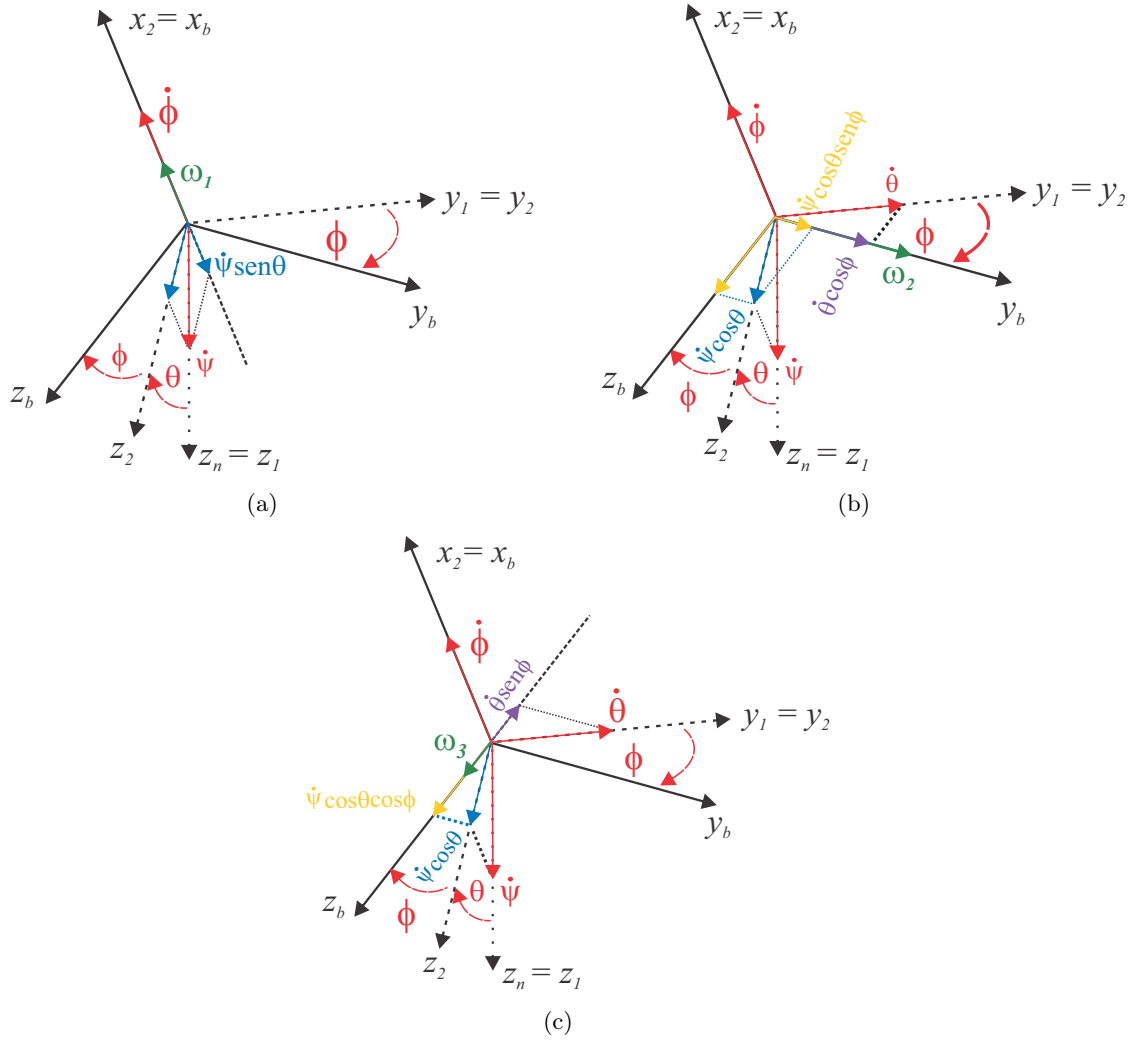


Figura 1.6: Esquemas donde se describen (a) las componentes de  $\omega_1$ , (b) las componentes de  $\omega_2$  y (c) las componentes de  $\omega_3$ .

$$\omega_2 = \dot{\theta} \cos\phi + \dot{\psi} \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \quad (1.26)$$

finalmente, de la figura 1.6(c) se obtiene

$$\omega_3 = -\dot{\theta} \operatorname{sen}\phi + \dot{\psi} \cos\theta \operatorname{cos}\phi. \quad (1.27)$$

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir en su forma matricial de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{cos}\phi & \operatorname{cos}\theta \operatorname{sen}\phi \\ 0 & -\operatorname{sen}\phi & \operatorname{cos}\theta \operatorname{cos}\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

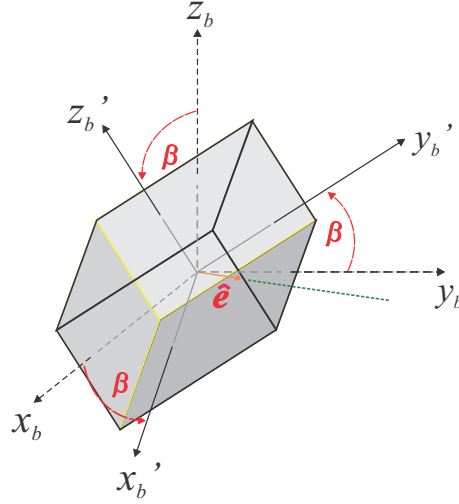


Figura 1.7: Esquema de las componentes de un cuaternión.

Al obtener la inversa de la matriz de la ecuación (1.28) se tienen las derivadas con respecto del tiempo de los ángulos de Cardán en términos de las velocidades angulares,

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \text{sen}\phi \tan\theta & \text{cos}\phi \tan\theta \\ 0 & \text{cos}\phi & -\text{sen}\phi \\ 0 & \frac{\text{sen}\phi}{\text{cos}\theta} & \frac{\text{cos}\phi}{\text{cos}\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad (1.29)$$

esta es la ecuación cinemática en términos de los ángulos de Cardán  $\psi$ ,  $\theta$  y  $\phi$ , integrando estas ecuaciones se pueden determinar la evolución de estos ángulos.

En efecto, la singularidad que aparece en la ecuación (1.29) ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) se puede eliminar si la orientación del cuerpo en el espacio se limita. En consecuencia esta representación no es adecuada cuando el cuerpo evoluciona en todo el espacio (en todas las orientaciones posibles) [16]. Una forma de evitar las singularidades es utilizar el cuaternión de rotación que se describe en seguida.

### Parametrización de la orientación en términos de cuaterniones

Por otra parte, la posición angular (orientación) de un cuerpo rígido también se puede representar por un cuaternión<sup>4</sup> que consiste de un vector unitario  $\hat{e}$ , conocido como el eje de Euler y un ángulo de rotación  $\beta$  alrededor de este eje [16]. La figura 1.7 muestra un esquema geométrico de lo dicho anteriormente.

El cuaternión  $q$  se define como sigue

$$q = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} \\ \hat{e} \sin \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \in H \quad (1.30)$$

<sup>4</sup>Una breve descripción de los cuaterniones se hace en el Apéndice D.

donde

$$H = \{q \mid q_0^2 + \mathbf{q}^T \mathbf{q} = 1, q = [q_0 \ \mathbf{q}]^T, q_0 \in \mathbb{R}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3\}, \quad (1.31)$$

donde  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$  y  $q_0$  son las partes vectorial y escalar del cuaternión, respectivamente. En aplicaciones de control de orientación, el cuaternión unitario representa la rotación desde un marco de referencia inercial  $\mathbf{E}^f = (x_n, y_n, z_n)$ , localizado en algún punto del espacio, al marco de referencia  $\mathbf{E}^b = (x_b, y_b, z_b)$  localizado en el centro de masa del cuerpo rígido.

Esta rotación es la misma que la descrita anteriormente usando los ángulos de Cardán mediante la matriz de rotación  $R(\phi, \theta, \psi)$ , en este caso se tendrá también una matriz de rotación que depende del cuaternión y en esencia ambas matrices son iguales. La matriz de rotación  $R(q)$  correspondiente al cuaternión  $q$  se calcula por

$$R(q) = (q_0^2 - \mathbf{q}^T \mathbf{q})I_3 + 2(\mathbf{q} \mathbf{q}^T - q_0 M_{\mathbf{q}}), \quad (1.32)$$

donde  $I_3$  es la matriz identidad y  $M_{\boldsymbol{\xi}}$  expresa la matriz antisimétrica<sup>5</sup> asociado con el vector axial  $\boldsymbol{\xi}$  y está dada por

$$M_{\boldsymbol{\xi}} = M_{(\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3)^T} = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

entonces, la matriz de rotación  $R(q)$  tiene la forma

$$R(q) = \begin{pmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_0 q_1 + q_2 q_3) \\ 2(q_0 q_2 + q_1 q_3) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

Denotando con  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$  el vector de velocidad angular del marco de referencia en el cuerpo  $\mathbf{E}^b$  relativo al marco inercial  $\mathbf{E}^f$ , como se muestra en la figura 1.8, la ecuación cinemática está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\mathbf{q}^T \\ I_3 q_0 + M_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega}, \quad (1.35)$$

como se puede ver, la ecuación anterior y la ecuación (1.29) expresan la misma relación del sistema pero en formalismos distintos, con la ventaja de la ecuación (1.35) que no tiene la singularidad contenida en la ecuación (1.29).

---

<sup>5</sup>Recuerdese que la matriz antisimétrica está definida como una matriz cuadrada  $A$  cuya traspuesta es igual a su negativa,  $A^T = -A$ .

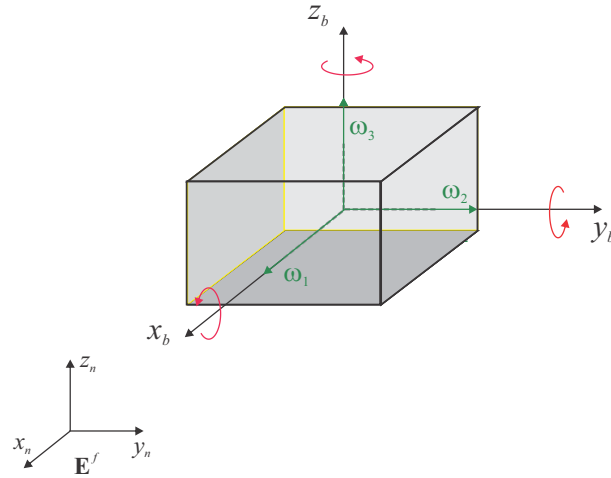


Figura 1.8: Esquema de las componentes de la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  del cuerpo rígido.

Ahora, si  $q$  define el cuaternión de posición angular actual y  $q_d$  es el cuaternión de referencia, es decir, la orientación deseada, entonces el cuaternión de error que representa el error de posición angular entre la orientación actual y la que uno desea está dada por

$$q_e = q \otimes q_d^{-1}, \quad (1.36)$$

$\otimes$  denota la multiplicación de cuaterniones<sup>6</sup> y  $q_d^{-1}$  es la rotación complementaria del cuaternión  $q_d$ , el cual es el cuaternión conjugado [16].

### 1.1.2. Ecuaciones del cuerpo rígido

Las ecuaciones de movimiento de las aeronaves se obtienen de la Segunda Ley de Newton del movimiento, la cual establece que la suma de todas las fuerzas externas actuantes sobre el cuerpo es igual a la razón de cambio con respecto al tiempo del momentum del cuerpo, y la suma de los torques (par de fuerzas) externos actuantes sobre el cuerpo es igual a la razón de cambio con respecto al tiempo del momentum angular. Las razones de cambio con respecto al tiempo de los momentos lineal y angular se toman con referencia a un marco de referencia inercial [95].

La segunda ley de Newton se puede expresar en las siguientes ecuaciones vectoriales

$$\text{Movimiento de traslación:} \quad \sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}), \quad (1.37)$$

$$\text{Movimiento de rotación:} \quad \sum \boldsymbol{\Gamma} = \frac{d}{dt}(\mathbf{L}), \quad (1.38)$$

<sup>6</sup>Las operaciones con cuaterniones también se describen en el Apéndice D

donde  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{\Gamma}$  y  $\mathbf{L}$  son vectores en el espacio de tres dimensiones  $\mathbb{R}^3$ , la ecuación vectorial (1.37) se pueden escribir en su forma escalar de la siguiente manera<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{d}{dt}(mv_x), \\ F_y &= \frac{d}{dt}(mv_y), \\ F_z &= \frac{d}{dt}(mv_z), \end{aligned} \tag{1.39}$$

donde  $F_x, F_y, F_z$  y  $v_x, v_y, v_z$  son las componentes de la fuerza y la velocidad a lo largo de los ejes  $x_n, y_n, z_n$ , respectivamente. Las componentes de fuerza están compuestas de contribuciones debido a fuerzas aerodinámicas, de propulsión y gravitacionales actuantes sobre la aeronave. La ecuación de torque (1.38) se pueden expresar de manera similar

$$\begin{aligned} \Gamma_x &= \frac{d}{dt}(L_x), \\ \Gamma_y &= \frac{d}{dt}(L_y), \\ \Gamma_z &= \frac{d}{dt}(L_z), \end{aligned} \tag{1.40}$$

donde  $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$  y  $L_x, L_y, L_z$  son las componentes del torque y del momento angular a lo largo de los ejes  $x_n, y_n, z_n$ , respectivamente.

Sea  $\delta m$  un elemento de masa de la aeronave,  $\mathbf{v}$  su velocidad y  $\delta \mathbf{F}$  la fuerza resultante sobre el elemento de masa, entonces

$$\delta \mathbf{F} = \delta m \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \tag{1.41}$$

la fuerza externa total actuante sobre la aeronave es la suma sobre todos los elementos del cuerpo rígido

$$\sum \delta \mathbf{F} = \mathbf{F}, \tag{1.42}$$

un esquema de la fuerza resultante actuando sobre un elemento de masa de un cuerpo rígido cualquiera puede ser observado en la figura 1.9.

La velocidad del diferencial de masa es

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \tag{1.43}$$

---

<sup>7</sup>Si bien se debe escribir  $\sum F_x, \sum F_y$  y  $\sum F_z$  para expresar la sumatoria de todas las componentes de todas las fuerzas en cada eje, aquí solo se escribirá como en la ecuación (1.39) para expresar esta idea. Lo mismo aplica para las componentes de  $\sum \mathbf{\Gamma}$ .

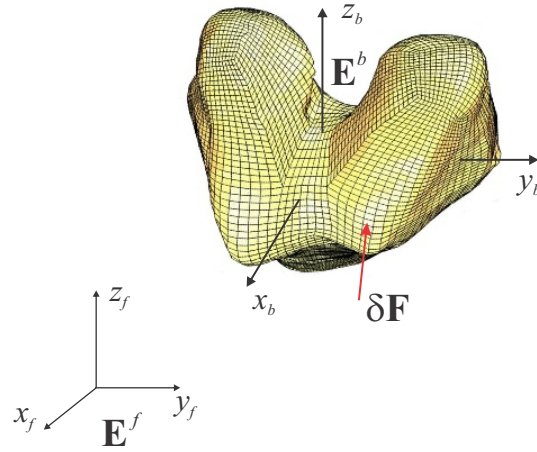


Figura 1.9: La fuerza resultante  $\delta\mathbf{F}$  sobre un elemento de masa  $\delta m$ .

donde  $\mathbf{v}_c, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{v}_c$  es la velocidad del centro de masa de la aeronave y  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  es la velocidad del elemento relativo al centro de masa. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1.41) se tiene

$$\sum \delta\mathbf{F} = \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \sum (\mathbf{v}_c + \frac{d\mathbf{r}}{dt}) \delta m. \quad (1.44)$$

si se supone que la masa de la aeronave es constante, entonces la ecuación (1.44) se puede reescribir como

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} + \frac{d^2}{dt^2} \sum \mathbf{r} \delta m. \quad (1.45)$$

Debido a que  $\mathbf{r}$  es medido desde el centro de masa, la sumatoria  $\sum \mathbf{r} \delta m$  es igual a cero. La ecuación de fuerza queda como

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt}, \quad (1.46)$$

lo cual relaciona las fuerzas externas sobre la aeronave con el movimiento de su centro de masa.

De forma similar, se puede desarrollar la ecuación del torque con respecto al movimiento del centro de masa. Para el elemento diferencial de masa,  $\delta m$ , la ecuación del torque se puede escribir como

$$\delta\mathbf{\Gamma} = \frac{d}{dt} \delta\mathbf{L} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \delta m. \quad (1.47)$$

La velocidad del elemento de masa se puede expresar en términos de la velocidad del centro de masa y la velocidad relativa del elemento de masa al centro de masa, así

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (1.48)$$

donde  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$  es la velocidad angular de la aeronave y  $\mathbf{r}$  es la posición del elemento de masa medida desde el centro de masa. El momento angular total se puede escribir como

$$\mathbf{L} = \sum \delta\mathbf{L} = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{v}_c) \delta m + \sum [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \delta m. \quad (1.49)$$

La velocidad  $\mathbf{v}_c$  es una constante con respecto a la sumatoria, por lo que se puede escribir

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{r} \delta m \times \mathbf{v}_c + \sum [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \delta m, \quad (1.50)$$

el primer término del lado derecho de la ecuación (1.50) es cero puesto que  $\sum \mathbf{r} \delta m = 0$ , como ya se explicó. Si se expresa la velocidad angular y la posición por

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \hat{\mathbf{i}} + \omega_2 \hat{\mathbf{j}} + \omega_3 \hat{\mathbf{k}}, \quad (1.51)$$

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}, \quad (1.52)$$

donde  $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$  son los vectores unitarios en la dirección de los ejes  $x_n, y_n, z_n$ , respectivamente, del marco de referencia inercial. Sustituyendo las relaciones anteriores en la ecuación (1.50),  $\mathbf{L}$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = & (\omega_1 \hat{\mathbf{i}} + \omega_2 \hat{\mathbf{j}} + \omega_3 \hat{\mathbf{k}}) \sum (x^2 + y^2 + z^2) \delta m \\ & - \sum (x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}) (\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z) \delta m. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Las componentes escalares de  $\mathbf{L}$  son

$$\begin{aligned} L_x &= \omega_1 \sum (y^2 + z^2) \delta m - \omega_2 \sum xy \delta m - \omega_3 \sum xz \delta m, \\ L_y &= -\omega_1 \sum xy \delta m + \omega_2 \sum (x^2 + z^2) \delta m - \omega_3 \sum yz \delta m, \\ L_z &= -\omega_1 \sum xz \delta m - \omega_2 \sum yz \delta m + \omega_3 \sum (x^2 + y^2) \delta m. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Las sumatorias en estas ecuaciones son los momentos y los productos de inercia de la aeronave. Se debe recordar que los elementos de masa  $\delta m$  se pueden expresar de la forma

$$\delta m \approx \rho(x, y, z) \Delta V \quad (1.55)$$

donde  $\rho(x, y, z)$  es la función de densidad de un objeto sólido, en unidades de masa por unidad de volumen, para algún punto dado  $(x, y, z)$ , esto hace posible que

$$m = \int \int \int \rho(x, y, z) \delta V \quad (1.56)$$

que expresa la sumatoria de la multiplicación de  $\rho(x, y, z)$  con todos los volúmenes infinitesimales que componen al objeto sólido completo<sup>8</sup> que es precisamente la masa  $m = \rho V$ . Por lo anterior, es razonable definir los momentos y los productos de inercia para cada elemento de masa del sólido de la siguiente manera

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int \int \int (y^2 + z^2) \delta m, \\ I_{yy} &= \int \int \int (x^2 + z^2) \delta m, \\ I_{zz} &= \int \int \int (x^2 + y^2) \delta m, \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int \int \int xy \delta m, \\ I_{xz} &= \int \int \int xz \delta m, \\ I_{yz} &= \int \int \int yz \delta m. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Los términos  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  e  $I_{zz}$  son los momentos de inercia del cuerpo alrededor de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, expresados en las ecuaciones (1.57). Los términos con los subíndices cruzados, expresados en las ecuaciones (1.58), son los productos de inercia. Todos ellos son las nueve componentes de la llamada matriz de inercia, que aquí denotaremos por  $J$ .

Tanto los momentos como los productos de inercia dependen de la forma de la aeronave y la manera en la cual está distribuida su masa. El mayor de los momentos de inercia será el de la resistencia a la rotación. Tomando en cuenta lo anterior, las ecuaciones escalares de las componentes del momento angular serán

$$\begin{aligned} L_x &= \omega_1 I_{xx} - \omega_2 I_{xy} - \omega_3 I_{xz}, \\ L_y &= -\omega_1 I_{xy} + \omega_2 I_{yy} - \omega_3 I_{yz}, \\ L_z &= -\omega_1 I_{xz} - \omega_2 I_{yz} + \omega_3 I_{zz}, \end{aligned} \quad (1.59)$$

que en términos vectoriales tendrá la forma

$$\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}, \quad (1.60)$$

donde

---

<sup>8</sup>Para mayores detalles, consultar el Capítulo 15 del libro [100].

$$J = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1.61)$$

Ahora, si el marco de referencia no está rotando, y puesto que el vehículo aéreo rota, el momento y los productos de inercia variarán con el tiempo. Para abordar esta dificultad se fijará el sistema de ejes a la aeronave (sistema de ejes del cuerpo). Se deben determinar las derivadas de los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{L}$  con respecto al marco de referencia del cuerpo en rotación.

Se puede mostrar que la derivada de un vector arbitrario  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$  con respecto al marco de referencia del cuerpo en rotación teniendo una velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  se puede representar por la siguiente identidad vectorial

$$\left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{\mathbf{E}^f} = \left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{\mathbf{E}^b} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}, \quad (1.62)$$

donde los subíndices  $\mathbf{E}^f$  y  $\mathbf{E}^b$  se refieren a los marcos de referencia inercial y fijo al cuerpo, respectivamente.

Aplicando esta identidad a la ecuación (1.37) se tiene

$$\mathbf{F} = m \left. \frac{d\mathbf{v}_b}{dt} \right|_{\mathbf{E}^b} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_b), \quad (1.63)$$

haciendo

$$m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_b) = \mathbf{F}_{cb} \quad (1.64)$$

donde  $\mathbf{F}_{cb}$  expresa la fuerza centrífuga en el marco de referencia fijo al cuerpo. Entonces la ecuación (1.63) se puede poner en la forma

$$m\dot{\mathbf{v}}_b = -\mathbf{F}_{cb} + \mathbf{F}, \quad (1.65)$$

que proporciona la dinámica de traslación del cuerpo rígido expresado en el marco de referencia móvil, las ecuaciones escalares de esta ecuación están dadas por

$$\begin{aligned} m\dot{v}_{bx} &= -F_{cbx} + F_x, \\ m\dot{v}_{by} &= -F_{cb y} + F_y, \\ m\dot{v}_{bz} &= -F_{cbz} + F_z. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Por otra parte, aplicando la identidad (1.62) a la ecuación (1.38) se tiene

$$\boldsymbol{\Gamma} = \left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{\mathbf{E}^b} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}), \quad (1.67)$$

donde las ecuaciones escalares están dadas por

$$\begin{aligned}\Gamma_x &= \dot{L}_x + \omega_2 L_z - \omega_3 L_y, \\ \Gamma_y &= \dot{L}_y + \omega_3 L_x - \omega_1 L_z, \\ \Gamma_z &= \dot{L}_z + \omega_1 L_y - \omega_2 L_x,\end{aligned}\tag{1.68}$$

tomando en cuenta las relaciones en (1.59) y desarrollando la ecuación (1.68), se tiene

$$\begin{aligned}\Gamma_x &= I_{xx}\dot{\omega}_1 - I_{xy}(\dot{\omega}_2 - \omega_1\omega_3) - I_{xz}(\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2) - I_{yz}(\omega_2^2 - \omega_3^2) + (I_{zz} - I_{yy})\omega_2\omega_3, \\ \Gamma_y &= I_{yy}\dot{\omega}_2 - I_{xy}(\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3) - I_{yz}(\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2) + I_{xz}(\omega_1^2 - \omega_3^2) + (I_{xx} - I_{zz})\omega_1\omega_3, \\ \Gamma_z &= I_{zz}\dot{\omega}_3 - I_{xz}(\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3) - I_{yz}(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3) - I_{xy}(\omega_1^2 - \omega_2^2) + (I_{yy} - I_{xx})\omega_1\omega_2.\end{aligned}\tag{1.69}$$

reordenando para estar de acuerdo con las ecuaciones (1.66), las ecuaciones (1.69) quedan como

$$\begin{aligned}I_{xx}\dot{\omega}_1 - I_{xy}\dot{\omega}_2 - I_{xz}\dot{\omega}_3 &= -I_{xy}\omega_1\omega_3 + I_{xz}\omega_1\omega_2 + I_{yz}(\omega_2^2 - \omega_3^2) - (I_{zz} - I_{yy})\omega_2\omega_3 + \Gamma_x, \\ -I_{xy}\dot{\omega}_1 + I_{yy}\dot{\omega}_2 - I_{yz}\dot{\omega}_3 &= I_{xy}\omega_2\omega_3 - I_{yz}\omega_1\omega_2 - I_{xz}(\omega_1^2 - \omega_3^2) - (I_{xx} - I_{zz})\omega_1\omega_3 + \Gamma_y, \\ -I_{xz}\dot{\omega}_1 - I_{yz}\dot{\omega}_2 + I_{zz}\dot{\omega}_3 &= -I_{xz}\omega_2\omega_3 + I_{yz}\omega_1\omega_3 + I_{xy}(\omega_1^2 - \omega_2^2) - (I_{yy} - I_{xx})\omega_1\omega_2 + \Gamma_z,\end{aligned}\tag{1.70}$$

estas últimas ecuaciones expresan la dinámica de rotación del cuerpo y pueden expresarse en términos vectoriales, tomando en cuenta las ecuaciones (1.67) y (1.60), de la forma

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Gamma}.\tag{1.71}$$

con  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$  y  $\boldsymbol{\Gamma} = [\Gamma_1 \ \Gamma_2 \ \Gamma_3]^T$ .

Debe notarse que las ecuaciones (1.66) y (1.70) están expresadas en el marco de referencia fijo al cuerpo. Veremos en la sección siguiente que la aeronave puede considerarse como un cuerpo rígido y las fuerzas y los torques actuantes sobre la aeronave están compuestas por contribuciones aerodinámicas, gravitacionales y de propulsión.

### 1.1.3. Ecuaciones de movimiento de los vehículos aéreos

El análisis anterior permite construir un modelo de los movimientos rotacional y traslacional de un cuerpo en el espacio, con lo cual se puede establecer el modelo que se utilizará. Sin embargo, es importante para este objetivo el análisis y la comprensión de la acción de las fuerzas que actúan sobre los cuerpos en interacción con el medio ambiente, es decir, para la obtención del modelo, se hace necesario un análisis dinámico específico de las fuerzas que

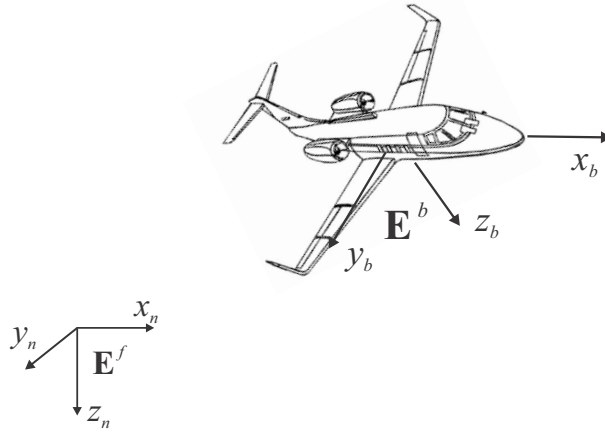


Figura 1.10: Vehículo aéreo y los sistemas de referencia.

pueden actuar sobre vehículos aéreos en vuelo, y como afectan los movimientos traslacional y rotacional de estos. A continuación se presenta el análisis de las fuerzas que pueden ser relevantes para el estudio de la dinámica de vehículos aéreos, además de posibles torques que pueden producir en el sistema, lo que será fundamental para comprender el modelo ha utilizar en el desarrollo de este trabajo.

### Dinámica traslacional de vehículos aéreos

Para el estudio del movimiento de traslación de aeronaves en vuelo, es necesario expresar las ecuaciones dinámicas con respecto al marco de referencia inercial, un esquema de cómo serán tomados los marcos de referencia para cualquier tipo de vehículo aéreo puede ser observado en la figura 1.10.

Para lograr lo anterior, se tomará en cuenta la relación descrita por las ecuaciones (1.63)-(1.66) y que por claridad se presentan a continuación.

$$\mathbf{F} = m \left. \frac{d\mathbf{v}_b}{dt} \right|_{\mathbf{E}^b} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_b), \quad (1.72)$$

$$m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_b) = \mathbf{F}_{cb}, \quad (1.73)$$

$$m\dot{\mathbf{v}}_b = -\mathbf{F}_{cb} + \mathbf{F}, \quad (1.74)$$

y

$$\begin{aligned} m\dot{v}_{bx} &= -F_{cbx} + F_x, \\ m\dot{v}_{by} &= -F_{cb y} + F_y, \\ m\dot{v}_{bz} &= -F_{cbz} + F_z. \end{aligned} \quad (1.75)$$

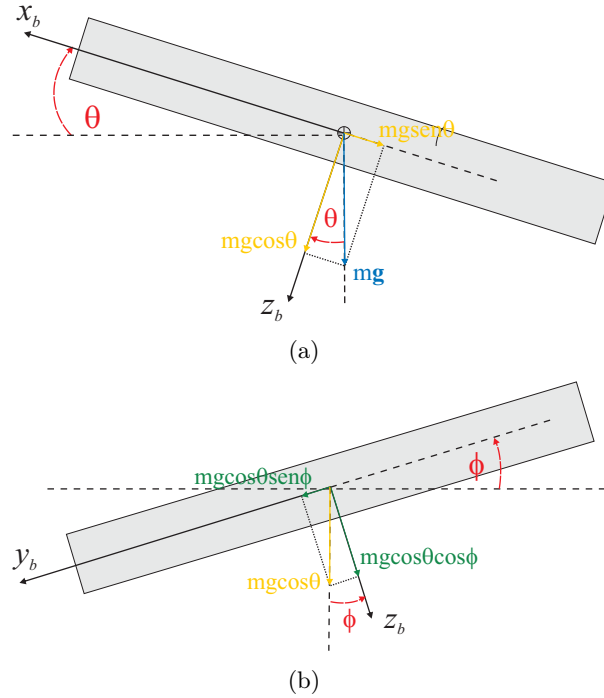


Figura 1.11: Esquemas de (a) las componentes de la fuerza de gravedad sobre los ejes  $x_b$  y  $z_b$  para un vehículo aéreo cualquiera con ángulo de cabeceo  $\theta$  y sin ángulo de alabeo  $\phi$ , (b) las componentes de la fuerza de gravedad sobre los ejes  $y_b$  y  $z_b$  para un vehículo aéreo cualquiera donde se presenta un ángulo de alabeo  $\phi$  además del ángulo de cabeceo  $\theta$ .

Estas ecuaciones relacionan la aceleración y la fuerza centrípeta del vehículo aéreo con las fuerzas adicionales  $\mathbf{F}$  que actúan sobre el mismo, las cuales se originan del sistema de propulsión, la fuerza de gravedad y alguna perturbación externa.

### Fuerzas gravitacional y propulsora

En los vehículos aéreos existen diferentes fuerzas que actúan sobre ellos, tal como la fuerza gravitacional giroscópica. La fuerza gravitacional sobre el sistema actúa en el centro de masa de la aeronave, debido a que el sistema de ejes del cuerpo está fijo al centro de masa, la fuerza gravitacional no produce ningún momento de fuerza (torque) [95]. Las componentes de la fuerza de gravedad a lo largo de los ejes  $x_b$ ,  $y_b$  y  $z_b$  del marco de referencia fijo al cuerpo, se pueden obtener por inspección de las figuras 1.11, estas tienen la forma

$$\begin{aligned}
 (F_{b_x})_{gravedad} &= -mg \sin \theta, \\
 (F_{b_y})_{gravedad} &= mg \cos \theta \sin \phi, \\
 (F_{b_z})_{gravedad} &= mg \cos \theta \cos \phi.
 \end{aligned} \tag{1.76}$$

Por otra parte, la fuerza de propulsión también tiene componentes a lo largo de las direcciones de los ejes, adicionalmente estas fuerzas pueden dar origen a torques si su

aplicación no se da justo en el centro de masa del sistema. Estas fuerzas dependen de la posición de los actuadores sobre el sistema y hacen la diferencia entre los sistemas de ala fija, ala rotatoria o alguna otra configuración.

Tomando en cuenta lo anterior, las fuerzas de propulsión que actúan a lo largo de los ejes del marco de referencia fijo al cuerpo son denotadas de manera general por

$$\begin{aligned}(F_{b_x})_{propulsión} &= F_{Pb_x}, \\ (F_{b_y})_{propulsión} &= F_{Pb_y}, \\ (F_{b_z})_{propulsión} &= F_{Pb_z},\end{aligned}\tag{1.77}$$

del mismo modo, los posibles torques producidos por estas fuerzas se denotan por

$$\begin{aligned}(\Gamma_{b_x})_{propulsión} &= \Gamma_{Pb_x}, \\ (\Gamma_{b_y})_{propulsión} &= \Gamma_{Pb_y}, \\ (\Gamma_{b_z})_{propulsión} &= \Gamma_{Pb_z}.\end{aligned}\tag{1.78}$$

La ecuación dinámica es similar a la mostrada en (1.71), dada de la siguiente forma

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Gamma}_P + \boldsymbol{\Gamma}_E,\tag{1.79}$$

donde  $\boldsymbol{\Gamma}_P = [\Gamma_{Pb_x} \ \Gamma_{Pb_y} \ \Gamma_{Pb_z}]^T$  y el vector  $\boldsymbol{\Gamma}_E$ , que pertenecen a  $\mathbb{R}^3$ , representa los torques debido a perturbaciones y fuerzas externas.

Se debe notar que las fuerzas y los torques expuestos anteriormente son descritos en el marco de referencia fijo a la aeronave  $\mathbf{E}^b = (x_b, y_b, z_b)$ . Un análisis similar se puede hacer para las otras dos fuerzas básicas que actúan sobre las aeronaves, a saber, la fuerza de sustentación y la fuerza de arrastre, e incluso para alguna otra fuerza externa o debido a la dinámica de las componentes del vehículo. Todo este conjunto de fuerzas se pueden considerar como fuerzas adicionales<sup>9</sup> ( $\mathbf{F}_{ab}$ ) y que, para propósitos de diseño de control, no se tomará en cuenta dentro del modelo y se consideran como perturbaciones.

Se desea obtener las ecuaciones que relacionan la aceleración y las fuerzas que actúan en el sistema pero vistos desde el marco de referencia inercial, es decir, observar el movimiento de la aeronave como si esta fuera solo un punto moviéndose en el espacio, sin considerar su movimiento de rotación. Analizando la ecuación (1.73), se observa que las fuerzas centrípetas son originadas por la velocidad angular de la aeronave, puesto que no se consideran movimientos rotacionales, estas fuerzas centrípetas se considerarán como parte de las fuerzas adicionales  $\mathbf{F}_{ab}$ . En estas condiciones, la ecuación que relaciona las aceleraciones

---

<sup>9</sup>Aquí se consideran como fuerzas adicionales las fuerzas producidas por ráfagas de viento, fuerzas producidas por el efecto suelo, etc. Estas fuerzas no se consideran en el modelo usado para el diseño de control, se usarán posteriormente para mostrar la robustez del control.

con las fuerzas actuantes sobre el sistema, con respecto al marco de referencia inercial, estaría dada por

$$\mathbf{F} = m \left. \frac{d\mathbf{v}_b}{dt} \right|_{\mathbf{E}^f} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (1.80)$$

El vector de fuerzas  $\mathbf{F}$  está compuesto por las fuerzas de gravedad, propulsión, fricción y todas las demás fuerzas adicionales  $\mathbf{F}_{ab}$  que actúan sobre la aeronave y que deben tomarse en cuenta para describir completamente el movimiento traslacional. En cuanto a la fuerza de gravedad, sus componentes están descritas por la ecuación (1.76), como lo que interesa es ver la fuerza de gravedad desde el marco de referencia inercial  $\mathbf{E}^f$ , para este solo existe componente en el eje  $z_n$ ,

$$(\mathbf{F})_{\text{gravedad}}|_{\mathbf{E}^f} = -m\mathbf{g}. \quad (1.81)$$

Por otra parte, las fuerzas de propulsión están expresadas por las ecuaciones (1.77) en el marco de referencia fijo a la aeronave, para obtener la expresión que describe estas fuerzas en el marco de referencia inercial, se debe multiplicar las relaciones (1.77) por la matriz de rotación  $R(\phi, \theta, \psi)$  dada en la ecuación (1.11), así

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}_{\text{propulsión}} = \begin{pmatrix} \cos\psi \cos\theta & \cos\psi \sin\theta \sin\phi - \sin\psi \cos\theta & \cos\psi \cos\phi \sin\theta + \sin\psi \sin\phi \\ \sin\psi \cos\theta & \sin\phi \sin\theta \sin\psi + \cos\psi \cos\phi & \sin\theta \sin\psi \cos\phi - \cos\psi \sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta \sin\phi & \cos\theta \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{Pb_x} \\ F_{Pb_y} \\ F_{Pb_z} \end{pmatrix}, \quad (1.82)$$

el mismo proceso se sigue para expresar fuerzas de fricción, o en general todas las demás fuerzas adicionales  $\mathbf{F}_{ab} = (F_{ab_x} \ F_{ab_y} \ F_{ab_z})^T$  expresadas en el marco de referencia fijo al vehículo, en el marco de referencia inercial  $\mathbf{F}_a = (F_{ax} \ F_{ay} \ F_{az})^T$ .

Con lo desarrollado en estas secciones se tienen todas las ecuaciones que describen el movimiento de una aeronave en vuelo. A continuación se hace un extracto de las que servirán para la descripción del movimiento del sistema estudiado.

#### 1.1.4. Resumen de ecuaciones cinemáticas y dinámicas

Ahora se está en condiciones de mostrar las principales ecuaciones que serán utilizadas para describir el movimiento de los vehículos aéreos que específicamente se analizan en esta tesis. Estas ecuaciones están integradas por las partes cinemática y dinámica presentadas anteriormente, las cuales determinan el movimiento de aeronaves en vuelo, y que básicamente serán utilizadas para la construcción del modelo matemático del sistema particular

---

de interés. En primera instancia, se muestran las matrices que sirven para determinar la orientación de los vehículos con respecto a los ángulos de Cardán y cuaterniones, los cuales pueden ser usados en el modelo.

### Matriz de rotación en términos de ángulos de Cardán y cuaternión

$$R(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} C\psi C\theta & S\psi C\theta & -S\theta \\ C\psi S\theta S\phi - S\psi C\phi & S\psi S\theta S\phi + C\psi C\phi & C\theta S\phi \\ C\psi S\theta C\phi + S\psi S\phi & S\psi S\theta C\phi - C\psi S\phi & C\theta C\phi \end{pmatrix}. \quad (1.83)$$

con  $\text{sen}(\cdot)=S(\cdot)$  y  $\text{cos}(\cdot)=C(\cdot)$ ,

$$R(q) = \begin{pmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_0q_1 + q_2q_3) \\ 2(q_0q_2 + q_1q_3) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{pmatrix}, \quad (1.84)$$

donde  $R(\phi, \theta, \psi) = R(q)$ .

### Ecuaciones cinemáticas en términos de ángulos de Cardán y cuaternión

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \text{sen}\phi \tan\theta & -\text{cos}\phi \tan\theta \\ 0 & \text{cos}\phi & -\text{sen}\phi \\ 0 & \frac{\text{sen}\phi}{\text{cos}\theta} & \frac{\text{cos}\phi}{\text{cos}\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad (1.85)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\mathbf{q}^T \\ I_3q_0 + [\mathbf{q}]^\times \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega}. \quad (1.86)$$

### Ecuaciones dinámicas

$$\text{Traslación:} \quad \begin{cases} m\dot{v}_x = F_{Px} + F_{ax} \\ m\dot{v}_y = F_{Py} + F_{ay} \\ m\dot{v}_z = -mg + F_{Pz} + F_{az} \end{cases} \quad (1.87)$$

Rotación:

$$\begin{cases} I_{xx}\dot{\omega}_1 = I_{xy}(\dot{\omega}_2 - \omega_1\omega_3) + I_{xz}(\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2) + I_{yz}(\omega_2^2 - \omega_3^2) - (I_{zz} - I_{yy})\omega_2\omega_3 + \Gamma P b_x, \\ I_{yy}\dot{\omega}_2 = I_{xy}(\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3) + I_{yz}(\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2) - I_{xz}(\omega_1^2 - \omega_3^2) - (I_{xx} - I_{zz})\omega_1\omega_3 + \Gamma P b_y, \\ I_{zz}\dot{\omega}_3 = I_{xz}(\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3) + I_{yz}(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3) + I_{xy}(\omega_1^2 - \omega_2^2) - (I_{yy} - I_{xx})\omega_1\omega_2 + \Gamma P b_z, \end{cases} \quad (1.88)$$

## 1.2. Modelo de los vehículos tipo VTOL

El modelo matemático de los vehículos VTOL está compuesto por las velocidades y las aceleraciones, tanto lineales como de rotación, y su relación con las fuerzas y torques que actúan en el sistema. Para determinar estas componentes, se tomarán en cuenta los desarrollos expuestos anteriormente.

Para empezar, se tomará el vector de posición  $\mathbf{p} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  y el vector de velocidad lineal como  $\mathbf{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$ , ambos con respecto al marco de referencia inercial  $\mathbf{E}^f = [x_n, y_n, z_n]$  (ver figura 1.12). La primera relación se obtiene de los vectores anteriores y tiene la forma conocida

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}, \quad (1.89)$$

donde la derivada del vector de posición con respecto al tiempo  $\dot{\mathbf{p}}$  es la velocidad lineal  $\mathbf{v}$ . La siguiente ecuación expresa la relación que existe entre la aceleración y las fuerzas que actúan sobre el sistema, para determinarla, recordemos la Segunda Ley de Newton del movimiento expresada por

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}}, \quad (1.90)$$

donde el vector  $\mathbf{F}$  es la suma de todas las fuerzas actuando sobre el vehículo, expresadas en el sistema de referencia inercial. Para expresar las fuerzas en el sistema de referencia inercial se utiliza la matriz de rotación anteriormente expuesta.

Se necesitan determinar las fuerzas que actúan sobre la aeronave con respecto al sistema de referencia inercial ( $\mathbf{E}^f$ ), lo cual se realizó anteriormente de forma general. Tomando en cuenta las ecuaciones (1.82) y (1.87) se tiene que la ecuación (1.90) toma la siguiente forma

$$m\dot{\mathbf{v}} = -m\mathbf{g} + R(\cdot) \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{ab_x} \\ F_{ab_y} \\ F_{ab_z} \end{pmatrix} \right], \quad (1.91)$$

donde el vector  $\mathbf{g} = [0 \ 0 \ g]^T$  solo tiene componente en el eje  $z_n$ ,  $R(\cdot)$  representa la matriz de rotación la cual se expresa en términos de ángulos de Cardán, tal como se mostró en la ecuación (1.83).  $T$  es la única componente de la fuerza de propulsión/sustentación del vehículo y está en la dirección de  $z_b$  (ver figura 1.12).  $(F_{ab_x} \ F_{ab_y} \ F_{ab_z})^T$  representan las componentes en cada uno de los ejes de las fuerzas adicionales con respecto al marco de referencia en el centro de masa del vehículo. Recordemos que estas fuerzas adicionales se componen de las fuerzas de arrastre, y fuerzas producto de la dinámica del vehículo, la fricción de las hélices, corrientes de aire, etc. que pueden afectar al sistema y que se deben a su interacción con el medio ambiente. La ecuación (1.91) se puede reescribir en términos vectoriales como

$$m\dot{\mathbf{v}} = -m\mathbf{g} + R(\mathbf{F} + \mathbf{F}_{ab}). \quad (1.92)$$

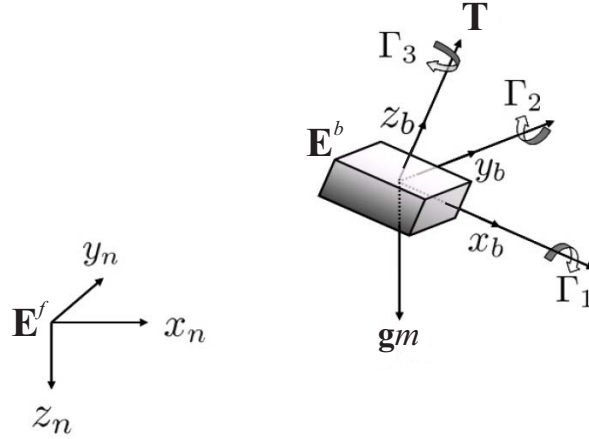


Figura 1.12: Marcos de referencia para un vehículo VTOL.

Hasta aquí se tienen las ecuaciones que describirán el movimiento traslacional de los sistemas VTOL con respecto al sistema de coordenadas inercial  $\mathbf{E}^f = [x_n, y_n, z_n]$ , lo que sigue es determinar las dos ecuaciones restantes que describan el movimiento rotacional de la aeronave y que se utilizarán para estabilizar la orientación del VTOL.

Nuevamente, se tienen que establecer ecuaciones que expresen la velocidad y la aceleración con relación a las fuerzas que actúan sobre el sistema, con la diferencia de que ahora se describen para movimientos de rotación. En este caso se hablará de desplazamientos, velocidades y aceleraciones angulares, además de torques (momentos de fuerza).

Como ya se mencionó, la manera más común de expresar movimientos rotacionales es utilizar los ángulos de Cardan desarrollados previamente y expresados en la ecuación (1.85). Sin embargo, es posible expresar el cambio en la orientación de la aeronave con respecto al tiempo de una forma alternativa. Como se describió anteriormente, la orientación de un cuerpo rígido es representada por la matriz  $R \in SO(3)$  y denotará una rotación del marco fijo al cuerpo al marco inercial.  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$  denota la velocidad angular dada en el marco del cuerpo. Entonces, el cuerpo rígido satisface la ecuación cinemática [77, 101]

$$\dot{R} = RM_{\boldsymbol{\omega}}, \quad (1.93)$$

donde  $M_{\boldsymbol{\xi}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow SO(3)$  transforma un vector en  $\mathbb{R}^3$  a una matriz antisimétrica  $3 \times 3$ ,  $M_{\boldsymbol{\xi}}$  es la matriz anti simétrica asociada con el vector axial  $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3]^T$  dada de la siguiente forma

$$M_{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.94)$$

Usando la propiedad que establece la no conmutatividad del producto vectorial, la ecuación (1.93) se puede reescribir como

$$\dot{R} = -M_\omega R, \quad (1.95)$$

con esto se tiene la primera ecuación del movimiento rotacional que relaciona la velocidad angular con la matriz de rotación y proporciona información sobre cómo cambia la orientación con respecto al tiempo.

Para encontrar la expresión que relaciona las aceleraciones angulares con las torques, se toma como base la Segunda Ley de Newton del movimiento rotacional expresada en (1.38) en la forma

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{d}{dt}(\mathbf{L}). \quad (1.96)$$

Este desarrollo se hizo previamente, la ecuación que expresa la relación que buscamos es (1.88). Considerando que, en general, los vehículos VTOL tienen simetría en dos de sus planos, los términos de inercia cruzados se eliminan, entonces la ecuación (1.88) toma la forma

$$\begin{aligned} I_{xx}\dot{\omega}_1 &= -(I_{zz} - I_{yy})\omega_2\omega_3 + \Gamma_{Pb_x} + \Gamma_{ab_x}, \\ I_{yy}\dot{\omega}_2 &= -(I_{xx} - I_{zz})\omega_1\omega_3 + \Gamma_{Pb_y} + \Gamma_{ab_y}, \\ I_{zz}\dot{\omega}_3 &= -(I_{yy} - I_{xx})\omega_1\omega_2 + \Gamma_{Pb_z} + \Gamma_{ab_z}, \end{aligned} \quad (1.97)$$

donde, como antes, los términos  $(\Gamma_{ab_x}, \Gamma_{ab_y}, \Gamma_{ab_z})$  expresan los torques adicionales producidos por la dinámica del vehículo, corrientes de aire, etc., que se producen como consecuencia de la interacción con el medio ambiente. Esta última ecuación se expresa en términos vectoriales como en la ecuación (1.71) de la forma

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} + \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}_{ab}, \quad (1.98)$$

donde, redefiniendo  $\mathbf{\Gamma} = \Gamma_{(1,2,3)}$ , expresará los torques de control del vehículo aéreo (ver figura 1.12). Con esto queda completo el modelo matemático que describe el comportamiento dinámico de los sistemas VTOL.

### 1.2.1. Resumen del modelo general de los sistemas VTOL

Como antes y con fines de claridad, se muestra el modelo obtenido en un sistema de ecuaciones diferenciales que describen tanto la dinámica como la cinemática de los vehículos de interés. En resumen, el modelo matemático que describe el movimiento de los vehículos tipo VTOL está dado por

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}, \quad (1.99)$$

$$m\dot{\mathbf{v}} = -m\mathbf{g} + R(\mathbf{F} + \mathbf{F}_{ab}) \quad (1.100)$$


---

$$\dot{R} = -M_{\omega}R, \quad (1.101)$$

$$J\dot{\omega} = -\omega \times J\omega + \Gamma + \Gamma_{ab}. \quad (1.102)$$

Como se puede observar, estos subsistemas componen un sistema en cascada, donde la posición depende de la orientación y la orientación no depende de la posición. Esta propiedad es muy importante y es la que se utilizará y explotará para el diseño de las leyes de control en este trabajo. Analizando varios de los trabajos recientemente propuestos, podemos notar que los modelos matemáticos utilizados son una clase particular del modelo (1.99)-(1.102). Esto es muy importante ya que nuestro objetivo es diseñar leyes de control genéricos, los cuales se puedan aplicar a toda la clase de vehículos VTOL.

## Capítulo 2

# Control de orientación para vehículos tipo VTOL

En el capítulo anterior se ha mostrado cómo se obtiene el modelo matemático que describe el movimiento de los vehículos aéreos VTOL. Ahora, estamos en condiciones de avanzar en el diseño de las propuestas de leyes de control para los movimientos de orientación y traslación de estos sistemas. Antes, es necesario establecer la forma matemática en cómo se expresarán algunos conceptos necesarios para describir la posición y los movimientos del sistema estudiado, así como la forma matemática de referencias que se tomarán en cuenta. Cabe mencionar que las propuestas presentadas aquí tienen íntima relación con lo que se observa en la naturaleza, en particular las condiciones que se deben cumplir para que algunos animales voladores puedan realizar esta actividad, lo anterior también es descrito en el presente capítulo.

### 2.1. Fundamentos teóricos

Antes de comenzar con las propuestas de control, es necesario establecer y fundamentar teóricamente algunos elementos necesarios para entender la forma en cómo se determina la orientación del sistema con el propósito de aplicar propuestas de control de orientación. Con fines de claridad, es necesario retomar una parte del modelo desarrollado en el capítulo anterior, además de establecer las características de vectores que serán utilizados más adelante, plantear algunas operaciones necesarias junto con la definición de una función que se utilizarán en la propuesta. Adicionalmente, es importante establecer la relación que existe entre algunos de estos conceptos con las partes corporales de animales con los que se ha observado correspondencia en la aplicación del control. Todo esto será descrito a continuación.

#### 2.1.1. Vectores de referencia y de observación

Considere cualquier tipo de vehículo VTOL representado en general por un cuerpo rígido con un marco de referencia ortonormal fijo al centro de masa, denotado por  $\mathbf{E}^b = [\mathbf{e}_1^b, \mathbf{e}_2^b, \mathbf{e}_3^b]$ ,

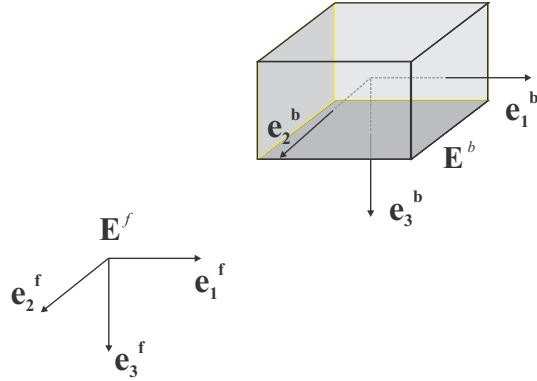


Figura 2.1: Marcos de referencia fijo al cuerpo  $\mathbf{E}^b$  e inercial  $\mathbf{E}^f$ .

con ejes alineados con los ejes principales de inercia, adicionalmente un marco de referencia inercial dado por  $\mathbf{E}^f = [\mathbf{e}_1^f, \mathbf{e}_2^f, \mathbf{e}_3^f]$ , localizado en algún punto en el espacio, la dirección de los ejes se toma como se muestra en el esquema de la figura 2.1. En aplicaciones de aeronáutica, es conveniente seleccionar la dirección de los marcos de referencia inercial y fijo al cuerpo como se muestra en la figura anterior, debido a que esto simplifica las ecuaciones que se utilizan.

Como se estableció en el capítulo anterior, la rotación del marco de referencia del cuerpo  $\mathbf{E}^b$  con respecto al marco fijo  $\mathbf{E}^f$  es representado por la matriz de orientación  $R \in SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : R^T R = I, \det R = 1\}$ . Denotando con  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$  el vector de velocidad angular del marco del cuerpo  $\mathbf{E}^b$  relativo al marco inercial  $\mathbf{E}^f$ , expresado en  $\mathbf{E}^b$ , las ecuaciones cinemática y dinámica del cuerpo rígido, en este caso, se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\dot{R} = -M_{\boldsymbol{\omega}} R, \quad (2.1)$$

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Gamma}. \quad (2.2)$$

donde  $\times$  denota el producto cruz,  $M_{\boldsymbol{\xi}}$  es la matriz anti simétrica asociada con el vector axial  $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3]^T$  dada de la forma en que se muestra en la ecuación (1.94).

$J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  representa la matriz de inercia constante definida positiva del cuerpo rígido expresada en el marco de referencia  $\mathbf{E}^b$  y  $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbb{R}^3$  es el vector de torques de control en  $\mathbf{E}^b$ . Estos torques dependen de los pares generados por los actuadores, pares aerodinámicos, tales como pares giroscópicos, gradiente gravitacional, etc. En este trabajo, se supone que estos torques son solo generados por los actuadores. Las ecuaciones (2.1) y (2.2) describen el movimiento rotacional de un cuerpo rígido que tiene evolución dinámica en el conjunto tangente  $TSO(3)$  [101, 102].

Por otro lado, en la naturaleza existen ejemplos de animales capaces de volar utilizando información básica que obtienen con elementos que forman parte de su cuerpo, estos especímenes voladores son abastecidos con información de múltiples órganos sensitivos, en el caso de los insectos, uno puede mencionar los siguientes:

- Los halterios: Estos son sensores giroscópicos biológicos, localizados en la base de las alas. Estos permiten la detección del movimiento rotacional del cuerpo y la determinación de la velocidad angular a lo largo de los tres ejes. [64, 66].
- La sensila: Localizada en la antena, alas y patas, estos sensores cuticulares detectan estímulos químicos o mecánicos. Particularmente, la sensila en la pata determina la dirección del vector del campo gravitacional con respecto al marco de referencia en el cuerpo del insecto [64, 66].
- El sentido magnético: Este determina la dirección del vector de campo magnético de la Tierra con respecto al marco de referencia en el cuerpo del insecto [64, 66].

Estos tres órganos sensitivos tienen equivalentes tecnológicos: giróscopos de velocidad, acelerómetros y magnetómetros, respectivamente, y estos pueden ser divididos en dos tipos principales:

- Sensores de velocidad angular: Estos sensores proporcionan medida de velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ . Estos se supone que son perfectos: los problemas causados por la parcialidad o el rango de medidas limitado no son tratados en este trabajo.
- Sensores del vector de referencia: Considere un vector unitario  $\mathbf{s}_k$ ; con sus representaciones  $\mathbf{s}_k^f$  en el marco de referencia inercial  $\mathbf{E}^f$  y  $\mathbf{s}_k^b$  en el marco de referencia fijo al cuerpo  $\mathbf{E}^b$ . Se supone que  $\mathbf{s}_k^f$  es constante. Estas representaciones están relacionadas por la matriz de rotación  $R$  de la siguiente forma

$$\mathbf{s}_k^b = R\mathbf{s}_k^f. \quad (2.3)$$

En aplicaciones de control de orientación, los vectores  $\mathbf{s}_k^f$  también se llaman “vectores de referencia”, y en general son conocidos con bastante precisión, los vectores en el cuerpo  $\mathbf{s}_k^b$  son conocidos como “vectores de observación” y son obtenidos con sensores a bordo (acelerómetros, magnetómetros, detectores de sol, seguidores de estrellas, etc.).  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  representa el número de diferentes tipos de sensores de vectores de referencia, las imperfecciones de los sensores no son tomadas en cuenta en este trabajo, en la figura 2.2 se puede observar un ejemplo con dos vectores de referencia y sus correspondientes proyecciones en el marco fijo al cuerpo.

De forma similar a como se estableció la ecuación (2.1) en el capítulo anterior, los vectores de observación y la velocidad angular están relacionados a través de la ecuación cinemática

$$\dot{\mathbf{s}}_k^b = \mathbf{s}_k^b \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.4)$$

extendiendo a  $n$  vectores de observación y definiendo  $S^b = (\mathbf{s}_1^b \ \mathbf{s}_2^b \ \dots \mathbf{s}_n^b)^T$  esto da

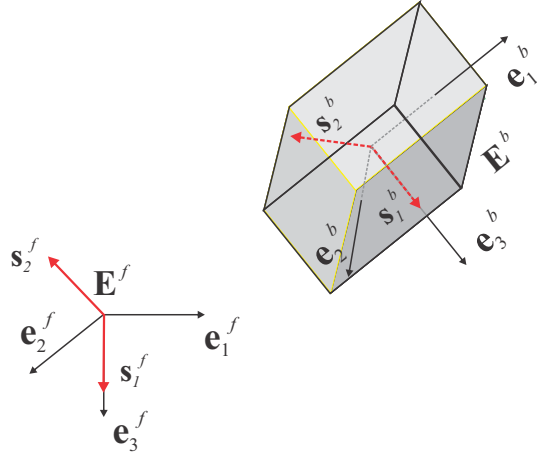


Figura 2.2: Cuerpo rígido, sistema de referencia inercial y vectores de referencia y de observación.

$$\dot{\mathbf{s}}^b := \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}}_1^b \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{s}}_n^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^b \times \\ \vdots \\ \mathbf{s}_n^b \times \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega} =: M\boldsymbol{\omega}. \quad (2.5)$$

El error entre la orientación real, definida por una matriz de rotación  $R$  de los ejes del marco inercial  $\mathbf{E}^f$ , y la orientación deseada, definida por una matriz de rotación  $R_d$  de los ejes de  $\mathbf{E}^b$ , es medida por ([77])

$$R_e = RR_d^T. \quad (2.6)$$

Alternativamente, la información acerca del error de orientación puede ser definida como el error entre las medidas del sensor en el marco de referencia del cuerpo  $\mathbf{E}^b$  y los valores deseados de los vectores de referencia proyectados en  $\mathbf{E}^b$ . El vector de error de orientación  $\boldsymbol{\gamma}$  es definido por

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [R\mathbf{s}_k^f] \times (R_d\mathbf{s}_k^f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\mathbf{s}_k^b] \times R_d\mathbf{s}_k^f. \quad (2.7)$$

Desde la perspectiva de la estimación/determinación de orientación, es bien conocido que al menos dos vectores de observación distintos son necesarios en cada instante de medición para obtener la información de orientación completa [78]. Por lo tanto, para llevar el cuerpo rígido a la orientación deseada, uno debe anular el error de orientación forzando  $\boldsymbol{\gamma}$  a cero usando al menos dos vectores no colineales en cada instante de medición, es decir,  $n \geq 2$ .

**Observación 1** *Si solo un vector de observación está disponible ( $n = 1$ ), este vector está vinculado al vector de referencia, a través de la matriz de rotación  $R$ :  $\mathbf{s}_1^b = R\mathbf{s}_1^f$ . Esta ecuación proporciona una restricción bidimensional sobre la matriz de rotación tridimensional. Por lo tanto, un único vector de observación no proporciona la información de orientación completa. En este caso, es imposible identificar una rotación alrededor del eje  $\mathbf{s}_1^b$  en el marco de coordenadas del cuerpo o, equivalentemente, alrededor del eje  $\mathbf{s}_1^f$  en el marco de coordenadas inercial.*

### 2.1.2. Función de saturación

Para fines de definir correctamente las propuestas de control, es necesario establecer la característica de la llamada función de saturación.

**Definición 1** *Se define una Función de Saturación escalar  $sat_N(\cdot)$  acotada entre  $\pm N$ , con  $N > 0$ , como*

$$sat_N(x) := \min(N, \max(-N, x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

*Se define también un vector Función de Saturación para  $N = [N_1 \ N_2 \ \dots N_n]$  como*

$$Sat_N(\mathbf{x}) := [sat_{N_1}(x_1) \dots sat_{N_j}(x_j) \dots sat_{N_n}(x_n)]^T, \quad \forall \mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n. \quad (2.9)$$

*con  $j \in 1, \dots, n$  y  $n$  es la dimensión del vector.*

Con todo lo anterior, podemos continuar con el diseño de las leyes de control que se proponen en este trabajo, sin embargo, es necesario tener claro cuál es el problema que se pretende atacar, cuáles son las restricciones y cuáles los alcances y condiciones que se tienen. Con fines de claridad, se aborda este aspecto previamente a las propuestas de control.

## 2.2. Planteamiento del problema

En este capítulo se muestra el diseño de la estrategia de control capaz de garantizar la estabilización de orientación de un cuerpo rígido imitando la estrategia adoptada por animales voladores de alas batientes para estabilizar su orientación. Estas estrategias están basadas en la utilización de medidas directas de algunos órganos sensoriales, esto es, que la orientación no es requerida explícitamente. Además, las propuestas de control de alimentación toman en cuenta las restricciones y limitaciones físicas de la estructura y propulsión del cuerpo, esto es garantizado por una saturación del torque de control y en

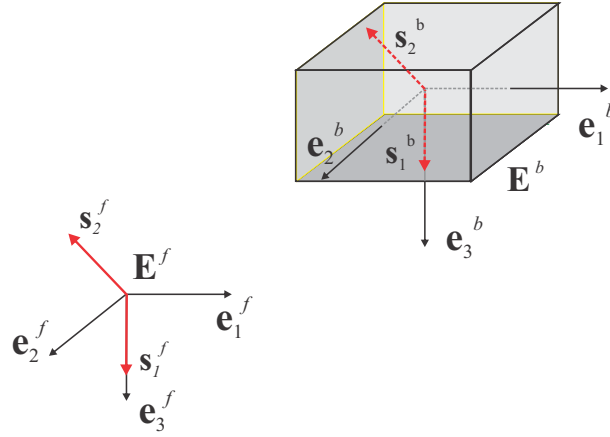


Figura 2.3: Vectores de observación y de referencia con la misma orientación, donde  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ .

realidad permite al sistema evitar daños indeseados y maximizar su efectividad. Matemáticamente puede ser formulado como

$$\Gamma_j \in [-\bar{\Gamma}_j, \bar{\Gamma}_j], \quad j \in \{1, 2, 3\} \quad (2.10)$$

donde  $\bar{\Gamma}_j$  representa la cota de la componente  $\Gamma_j$  del torque de control y corresponde a las cotas de saturación de los actuadores equivalentes a las cotas de los torques aerodinámicos desarrollados por las alas de estos animales, debido al acotamiento de los ángulos de aleteo.

El problema de estabilización de orientación clásico es definido de la siguiente manera: dirigir la orientación del cuerpo desde alguna condición inicial a una orientación constante deseada y mantenerlo en esta posición. En consecuencia, el vector de velocidad angular es también llevada a cero y permanece nula una vez que la orientación deseada ha sido alcanzada,

$$\begin{cases} R & \rightarrow R_d \\ \boldsymbol{\omega} & \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Las orientaciones deseada y real,  $R_d$  y  $R$ , son idénticas si para todo  $k \in \{1, \dots, n\}$  con  $n \geq 2$ ,  $\mathbf{s}_k^b = R\mathbf{s}_k^f = R_d\mathbf{s}_k^f$ , y por consiguiente, de la ecuación (2.7),  $\gamma = 0$ , un esquema de esto puede ser observado en la figura 2.3. Sin embargo, lo contrario no es verdad, y  $\gamma$  es también minimizado para

$$\mathbf{s}_k^b = -R_d\mathbf{s}_k^f. \quad (2.11)$$

Analizando la igualdad (2.11) con respecto al  $n$  número de vectores de referencia no colineales

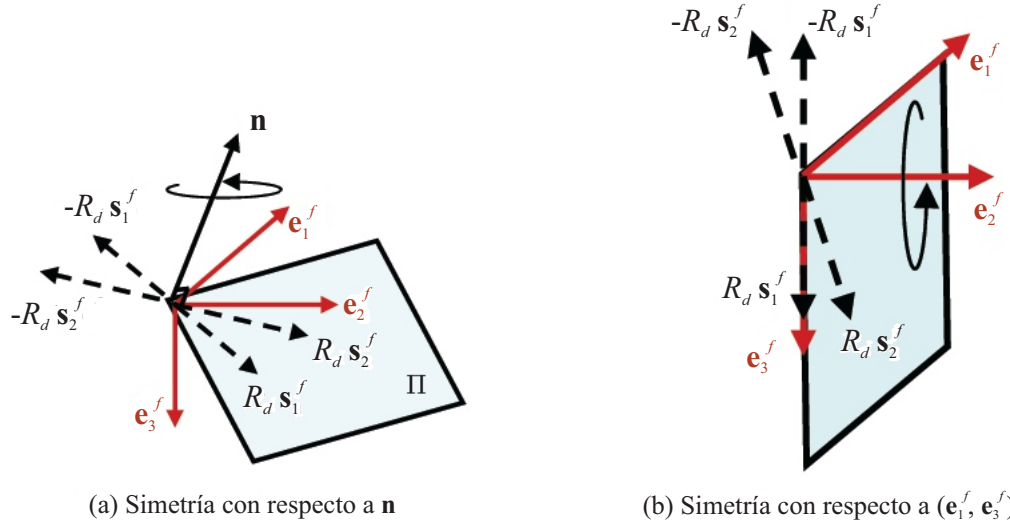


Figura 2.4: (a) Simetría con respecto al vector normal  $\mathbf{n}$  al plano  $\Pi$ ; (b) la simetría con respecto al plano  $(\mathbf{e}_1^f, \mathbf{e}_3^f)$ .

- Si  $n \geq 3$ , esta identidad define una simetría con respecto al origen del marco y puede ser expresada como  $\mathbf{s}_k^b = -R_d \mathbf{s}_k^f$ .  $-R_d$ , sin embargo, no pertenece a  $SO(3)$  y, como consecuencia, no es una matriz de rotación. Consecuentemente, la igualdad (2.11) define una configuración físicamente no factible. Por lo tanto, un error de orientación nulo  $\gamma = 0$  tiene sentido solo si  $\mathbf{s}_k^b = R_d \mathbf{s}_k^f$ .
- Si  $n = 2$ , existe un plano  $\Pi$  que contiene los vectores  $R_d \mathbf{s}_1^f$  y  $R_d \mathbf{s}_2^f$ . Las configuraciones  $\mathbf{s}_k^b = -R_d \mathbf{s}_k^f$ ,  $k \in \{1, 2\}$ , pueden ser alcanzadas por una rotación de  $180^\circ$  ( $\pi \text{ rad}$ ) alrededor del vector  $\mathbf{n}$  normal al plano  $\Pi$  en la intersección de los vectores (figura 2.4). Algunos casos específicos de  $\mathbf{s}_k^f$  permiten la definición de simetría con respecto a los ejes separados  $\mathbf{e}_1^f$ ,  $\mathbf{e}_2^f$ , y  $\mathbf{e}_3^f$  si  $\mathbf{s}_k^f$ ,  $k \in \{1, 2\}$ , pertenecen, respectivamente, a los planos  $(\mathbf{e}_2^f, \mathbf{e}_3^f)$ ,  $(\mathbf{e}_1^f, \mathbf{e}_3^f)$ ,  $(\mathbf{e}_1^f, \mathbf{e}_2^f)$  (figura 2.4). En este caso,  $\mathbf{s}_k^b = -R_d \mathbf{s}_k^f$  es equivalente a  $\mathbf{s}_k^b = R_s R_d \mathbf{s}_k^f$  con  $R_s$  una matriz simétrica que pertenece a  $SO(3)$  y tiene una traza  $Tr(R_s) = -1$

$$R_s \in \{\mathbf{diag}(1, -1, -1), \mathbf{diag}(-1, 1, -1), \mathbf{diag}(-1, -1, 1)\} \quad (2.12)$$

definiendo una simetría con respecto a  $\mathbf{e}_1^f$ ,  $\mathbf{e}_2^f$  y  $\mathbf{e}_3^f$ , respectivamente. Uno debe enfatizar que sería por lo tanto más prudente elegir los sensores de referencia de tal manera que los vectores de referencia pertenezcan a uno de los tres planos  $(\mathbf{e}_1^f, \mathbf{e}_2^f)$ ,  $(\mathbf{e}_1^f, \mathbf{e}_3^f)$  o  $(\mathbf{e}_2^f, \mathbf{e}_3^f)$ , que han sido adoptados en este trabajo. Si tales sensores de referencia no existen, otra propuesta sería la definición del marco fijo con respecto a los sensores de referencia, tal que una ortogonalización de los vectores de referencia es usada para construir una base ortonormal  $(\mathbf{e}_1^f, \mathbf{e}_2^f, \mathbf{e}_3^f)$ .

- Si  $n = 1$ , la simetría es definida respecto a un plano. Este caso no es considerado aquí.

Como una conclusión, existen dos conjuntos para los cuales la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  y el error de orientación  $\boldsymbol{\gamma}$  son iguales a cero, a saber  $(\boldsymbol{\omega}, R) = (0, R_d)$  y  $(\boldsymbol{\omega}, R) = (0, R_s R_d)$ . Definiendo  $\mathcal{E}$  como la unión de estos dos conjuntos

$$\mathcal{E} = \{(\boldsymbol{\omega}, R) \in TSO(3) : \boldsymbol{\omega} = 0, R = PR_d, P \in \mathcal{P}\} \quad (2.13)$$

con

$$\mathcal{P} := \{\mathbf{diag}(1, 1, 1), \mathbf{diag}(1, -1, -1), \mathbf{diag}(-1, 1, -1), \mathbf{diag}(-1, -1, 1)\} \quad (2.14)$$

Note que  $\mathcal{P}$  forma un subgrupo del grupo de matrices ortogonales  $O(3)$ .

### 2.3. Estabilización de orientación biológicamente inspirado

En esta sección dos leyes de control acotadas dirigidas a estabilizar la orientación de un cuerpo rígido expresado por las ecuaciones (2.1) y (2.2) son propuestas. Ambas leyes de control (i) están basadas en una realimentación de salida usando medidas de sensores a bordo y (ii) respetan los límites de los actuadores mediante acotamiento de los torques desarrollados. Los vectores de observación, definiendo el error de orientación, además de la medición de la velocidad angular, son las bases para el cálculo de la primera ley de control, esto corresponde al caso de accesibilidad de medidas de los halterios, las sensilas en patas y el sentido magnético de un insecto (ver figura 2.5). En la segunda ley de control, los tres giróscopos de velocidad montados ortogonalmente son escatimados, es decir, las medidas de los halterios no son accesibles, y solo los vectores de observación están disponibles. Este caso corresponde, por ejemplo, a aplicaciones que están limitadas en términos de carga útil o falla de sensor. Para establecer la condición que garantice una convergencia asintótica, la configuración geométrica de los vectores de observación requiere satisfacer la suposición siguiente.

**Suposición 1** *Existen al menos dos vectores de observación no colineales en cada instante de medida, es decir,  $\mathbf{s}_k^b$  con  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  y  $n \geq 2$ . El caso de la no existencia de estos dos vectores se considera mas allá del alcance de este trabajo.*

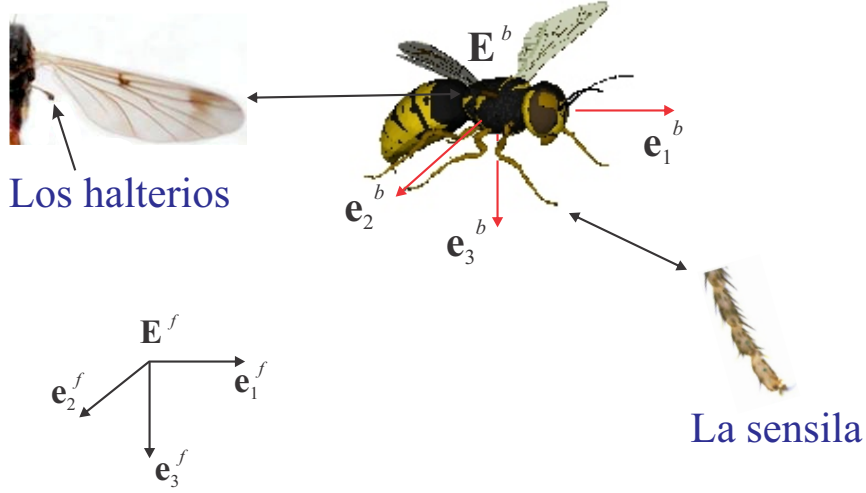


Figura 2.5: Estabilización de orientación biológicamente inspirado.

### 2.3.1. Control de orientación acotado con medidas de vectores de observación y velocidad angular

**Teorema 1** *Considere la dinámica rotacional del vehículo tipo VTOL descrita por las ecuaciones (2.1) y (2.2). El error de orientación entre la orientación deseada y la real está definida por la ecuación (2.7) con  $n \geq 2$  y se asume que la velocidad angular del cuerpo  $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$  es medida por tres sensores montados ortogonalmente. Se define el control acotado  $\Gamma = [\Gamma_1 \ \Gamma_2 \ \Gamma_3]^T$  por:*

$$\Gamma_j = -\text{sat}_{N_j}(\lambda_j \omega_j) - \rho \gamma_j, \quad j \in \{1, 2, 3\} \quad (2.15)$$

donde  $\bar{\Gamma}_j = N_j + \rho$  es la cota de la componente de torque de control  $\Gamma_j$ ,  $\text{sat}_{N_j}(\cdot)$  es la función de saturación clásica definida por la ecuación (2.8),  $\lambda_j, \rho \in \mathbb{R}_{>0}$  son parámetros de sintonización tales que  $N_j > \rho$  con  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_j)$ . Entonces, el torque de control definido en la ecuación (2.15) estabiliza asintóticamente al cuerpo rígido en  $(\omega, R) = (0, R_d)$  con un dominio de atracción igual a  $TSO(3) \setminus \{(0, R_s R_d)\}$ .

Antes de hacer la prueba del teorema 1, se hace un análisis del equilibrio del sistema en lazo cerrado, usando la ley de control definida en la ecuación (2.15)

$$\begin{aligned} 0 &= -M\omega R, \\ 0 &= -\omega \times J\omega + \Gamma. \end{aligned} \quad (2.16)$$

lo que produce  $\omega = 0$  y  $\Gamma = \mathbf{0}$ , por lo tanto,  $\gamma = 0$ . Siguiendo el análisis dado en la Sección 2.2 el equilibrio del sistema en lazo cerrado está dado por el conjunto  $\mathcal{E}$  definido en la ecuación (2.13).

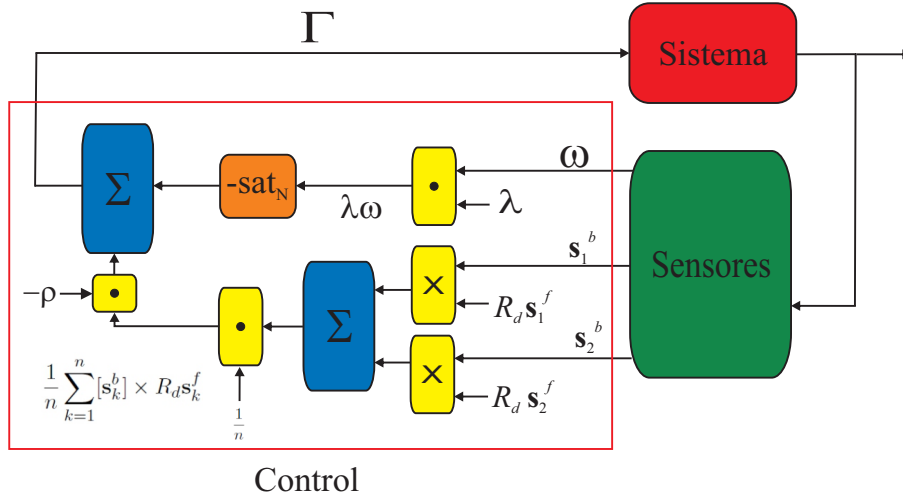


Figura 2.6: Esquema gráfico de la primera propuesta de control.

**Prueba 1** Considere la función candidata de Lyapunov  $V$  definida por

$$V(\omega, R) = \frac{1}{2} \omega^T J \omega + \frac{\delta}{n} \sum_{k=1}^n [1 - (R s_k^f)^T R_d s_k^f] \quad (2.17)$$

$V(\omega, R)$  es una función continua y definida positiva en  $TSO(3)$ , mientras  $V(\omega, R) > 0$  para toda  $(\omega, R) \in TSO(3) \setminus (0, R_d)$  y  $V(\omega, R) = 0$  si y solo si  $(\omega, R) = (0, R_d)$ .

Note que  $s_k^b = R s_k^f$  y  $s_k^f$  es constante. La derivada de la ecuación (2.17) a lo largo de una solución del sistema en lazo cerrado esta dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(\omega, R) &= \omega^T J \dot{\omega} - \frac{\delta}{n} \sum_{k=1}^n \dot{s}_k^{bT} R_d s_k^f \\ &= \omega^T (-\omega \times J \omega + \Gamma) - \frac{\delta}{n} \sum_{k=1}^n (s_k^b \times \omega)^T R_d s_k^f \\ &= \omega^T \Gamma + \frac{\delta}{n} \sum_{k=1}^n \omega^T (s_k^b \times R_d s_k^f) \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación (2.7), uno tiene:

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^3 [\omega_j (-sat_{N_j}(\lambda_j \omega_j) - \rho \gamma_j) + \delta \omega_j \gamma_j]$$

Eligiendo  $\delta = \rho$  y puesto que  $\lambda_j > 0$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , se sigue que:

$$\dot{V}(\omega, R) = -\omega_1 sat_{N_1}(\lambda_1 \omega_1) - \omega_2 sat_{N_2}(\lambda_2 \omega_2) - \omega_3 sat_{N_3}(\lambda_3 \omega_3) = -\omega^T Sat_N(\Lambda \omega) \leq 0 \quad (2.18)$$

### 2.3. ESTABILIZACIÓN DE ORIENTACIÓN BIOLÓGICAMENTE INSPIRADO

---

Así, la derivada de la función de Lyapunov a lo largo de una solución del sistema en lazo cerrado es semidefinida negativa.

Vale la pena recordar que  $SO(3)$  es compacto. Por lo tanto, para cualquier  $(\omega(0), R(0)) \in TSO(3)$ , el conjunto

$$\Omega = \{(\omega, R) \in TSO(3) : V(\omega, R) \leq V(\omega(0), R(0))\}$$

es un conjunto compacto, positivamente invariante del lazo cerrado.

Sea  $E$  el conjunto de todos los puntos para los cuales  $\dot{V}(\omega, R) \equiv 0$ . Del principio de invarianza de La Salle, se sigue que toda solución que comience en  $\Omega$  converge al conjunto invariante mas grande en  $E$  contenido en  $\Omega$ . De la ecuación (2.18),  $\dot{V}(\omega, R) \equiv 0$  implica que  $\omega \equiv 0$ . Entonces, substituyendo esta última identidad en el sistema en lazo cerrado definido por las ecuaciones (2.1) y (2.2) con la realimentación dada en la ecuación (2.15), uno tiene:

$$E = \{(\omega, R) \in TSO(3) : \omega \equiv 0, \gamma \equiv 0\}$$

con  $\gamma$  definida en la ecuación (2.7).

Así, siguiendo el análisis del sistema en equilibrio en lazo cerrado, el conjunto invariante mas grande en  $E$  está dado por la ecuación (2.13), es decir,  $E = \mathcal{E}$ . Los cuatro puntos dados en las ecuaciones (2.13) y (2.14) corresponden a los equilibrios del sistema en lazo cerrado en  $TSO(3)$ . Consecuentemente, todas las trayectorias del sistema en lazo cerrado convergen a una de las soluciones de equilibrio en  $\mathcal{E}$ . Además, si en  $t_0 = 0$  la solución del sistema en lazo cerrado se encuentra en  $\mathcal{E}$ , permanece allí para  $t > t_0$ .

Ahora, considere separadamente cada punto de equilibrio de  $\mathcal{E}$  definido por las ecuaciones (2.13) y (2.14). Evaluando la función de Lyapunov definida en la ecuación (2.17) en estos puntos, se obtiene:

$$V(0, R_d) = 0 \quad \text{and} \quad V(0, R_s R_d) = 2\delta$$

En realidad, los puntos  $(0, R_d)$  y  $(0, R_s R_d)$  corresponden, respectivamente, a un mínimo ( $V(0, R_d) = 0$ ) y un máximo local ( $V(0, R_s R_d) = 2\delta$ ) de la función de Lyapunov de la ecuación (2.17). La derivada  $\dot{V}(\omega, R)$  es igual a cero en estos puntos.

A continuación, considere cualquier condición inicial  $(0, (R_s R_d)^*)$  diferente de  $(0, R_s R_d)$ . Entonces, evaluando la función de Lyapunov en estos puntos da trivialmente:

$$(0, (R_s R_d)^*) \neq (0, R_s R_d) \Rightarrow V(0, (R_s R_d)^*) < 2\delta$$

Puesto que  $\dot{V} < 0$  fuera de  $\mathcal{E}$ , cualquier condición inicial fuera de  $\mathcal{E}$  dará lugar a un decremento de la función de Lyapunov y una convergencia a un punto de equilibrio, donde  $V$  se hace cero (como  $\dot{V}$ ), esto es  $(0, R_d)$ . Por lo tanto, las soluciones del sistema en lazo cerrado cuyas condiciones iniciales son diferentes de  $(0, R_s R_d)$  convergen asintóticamente a el punto  $(\omega, R) = (0, R_d)$ .

### 2.3.2. Estabilización de orientación con vectores de observación y sin medidas de velocidad angular

En esta sección se diseña una ley de control basada solo en vectores de observación  $\mathbf{s}_k^b$  y sus derivadas, con  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  y  $n \geq 2$ , se considera que la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  no esta disponible. Prácticamente, esta solución corresponde a aplicaciones donde solo un acelerómetro triaxial (usado como un inclinómetro) y un magnetómetro triaxial están a bordo, es decir, solo se conoce la dirección del vector de gravedad y el vector de dirección del campo magnético de la Tierra.

Entonces se tiene el siguiente resultado

**Teorema 2** *Considere la dinámica rotacional de un cuerpo rígido descrita por las ecuaciones (2.1)-(2.2). El error de orientación  $\boldsymbol{\gamma}$  entre la orientación deseada y la real, es calculado a través de la ecuación (2.7). Se define un torque de control acotado  $\boldsymbol{\Gamma} = [\Gamma_1 \ \Gamma_2 \ \Gamma_3]$  como:*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma} &= -\lambda M^T \text{Sat}_{\mathbf{N}}(\mathbf{v}_m) - \rho \boldsymbol{\gamma} \\ \dot{\boldsymbol{\zeta}} &= -a \mathbf{v}_m \\ \mathbf{v}_m &= \boldsymbol{\zeta} + b S^b\end{aligned}\tag{2.19}$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$  son los parámetros de filtro y  $\lambda, \rho \in \mathbb{R}_{>0}$  son los parámetros de sintonización.  $\text{Sat}(\cdot)$  está definida por la ecuación (2.9). El vector  $\mathbf{N}$   $3n$ -ésimo está compuesto por la adición de  $n$  veces un vector de niveles de saturación estrictamente positivos  $\bar{\mathbf{N}} = [\bar{N}_1 \ \bar{N}_2 \ \bar{N}_3]$ , esto es  $N_i := \bar{N}_j$  para  $i = 3(k-1) + j$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Con las definiciones de arriba la ley de control dinámica definida en la ecuación (2.19) estabiliza asintóticamente el cuerpo rígido en  $(\boldsymbol{\omega}, R, \mathbf{v}_m) = (0, R_d, 0)$  con un dominio de atracción igual a  $TSO(3) \times \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, R_s R_d, 0)\}$ . Además, el torque de control  $\Gamma_j$  permanece acotado por  $\bar{\Gamma}_j$  a lo largo de cada eje.

Antes de realizar la prueba del teorema 2, la idea detrás de la construcción de la realimentación definida en la ecuación (2.19) es explicada. Se asume que la velocidad angular no es medida (no se usan los giróscopos). Entonces, un camino es usar la ecuación (2.5) para reconstruir la velocidad angular por medio de  $\boldsymbol{\omega} = M^\dagger \dot{S}^b$ , donde  $M^\dagger = (M^T M)^{-1} M^T$  es la matriz pseudoinversa de  $M$ , y usarlo en el teorema 2. Esta propuesta tiene dos inconvenientes principales. Primero, requiere cálculos relativamente pesados debido a la matriz pseudoinversa, además la estabilidad numérica se vuelve un problema en el caso de que el número de sensores se incremente. Segundo, este también requiere la derivación del vector de observación, siendo que es muy sensible al ruido. Este problema puede evitarse tomando la diferencia entre la señal y su versión filtrada pasa bajas, lo cual aproxima la derivada para bajas frecuencias [103]. En el presente caso, este filtro es dado por las dos últimas ecuaciones de (2.19) en su espacio de estados de realización. La salida del filtro es  $\mathbf{v}_m$ , la cual es uno de los argumentos del torque de control definido en la ecuación (2.19). De hecho

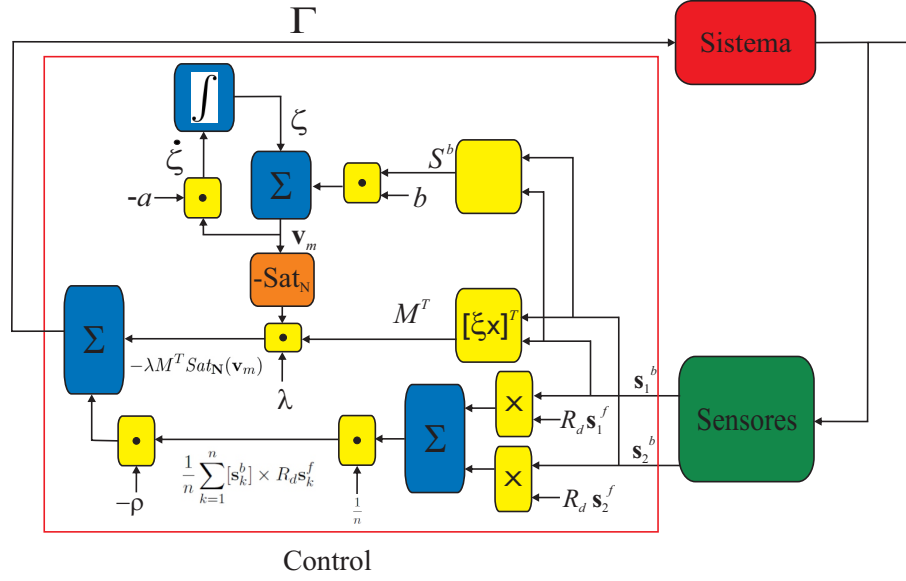


Figura 2.7: Esquema gráfico de la segunda propuesta de control con el filtro pasa bajas.

$\mathbf{v}_m$  y la matriz  $M$  proporcionan el amortiguamiento necesario para lograr la estabilización asintótica. Además, el conocimiento exacto de la velocidad angular no es requerida. Note que la ley de control dinámico definida en la ecuación (2.19) es similar a una propuesta en [104] para seguimiento de orientación. Sin embargo, en la obra citada, el conocimiento del cuaternión es necesario, contrario a la realimentación propuesta.

El estado del sistema definido por las ecuaciones (2.1) y (2.2) sujeto al control descrito en la ecuación (2.19), en lazo cerrado, evoluciona en  $TSO(3) \times \mathbb{R}^{3n}$ . El análisis del punto de equilibrio de este sistema en lazo cerrado produce  $\boldsymbol{\omega} = 0$  y  $\boldsymbol{\Gamma} = 0$ . Entonces, de la ecuación (2.5), uno obtiene  $\dot{S}^b = 0$ . La segunda y tercera ecuaciones de (2.19) pueden ser escritas como  $\dot{\mathbf{v}}_m = -a\mathbf{v}_m + b\dot{S}^b$ ; entonces  $\mathbf{v}_m = 0$ , y consecuentemente  $\boldsymbol{\gamma} = 0$ . Usando el mismo argumento de la ley de control anterior, existen dos conjuntos de puntos de equilibrio para el sistema en lazo cerrado, a saber  $(\boldsymbol{\omega}, R, \mathbf{v}_m) = (0, R_d, 0)$  y  $(\boldsymbol{\omega}, R, \mathbf{v}_m) = (0, R_s R_d, 0)$ . Dado  $R_d$  y  $\mathbf{s}_k^f$ ,  $\bar{\mathcal{E}}$  denota el conjunto de soluciones de equilibrio para el sistema en lazo cerrado

$$\bar{\mathcal{E}} = \{(\boldsymbol{\omega}, R, \mathbf{v}_m) \in TSO(3) \times \mathbb{R}^{3n} : \boldsymbol{\omega} = 0, \mathbf{v}_m = 0, R = PR_d, P \in \mathcal{P}\} \quad (2.20)$$

con  $\mathcal{P}$  definida en la ecuación (2.14).

Note que el filtro pasa bajas dado por las dos últimas ecuaciones de (2.19) es equivalente a  $\dot{\mathbf{v}}_m = -a\mathbf{v}_m + b\dot{S}^b$ , pero no requiere los cálculos de  $\dot{S}^b$ .

**Prueba 2 .** Considere la función candidata de Lyapunov  $L : TSO(3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$L = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T J \boldsymbol{\omega} + \frac{\delta}{n} \sum_{k=1}^n [1 - (R \mathbf{s}_k^f)^T R_d \mathbf{s}_k^f] + \alpha b^{-1} \sum_{i=1}^{3n} \int_0^{v_{m_i}} \text{sat}_{N_i}(\sigma) d\sigma \quad (2.21)$$

$L$  es una función continua, propia y definida positiva.  $\text{sat}(\cdot)$  es la función de saturación clásica definida en la ecuación (2.8) y es obviamente Lipschitz.  $L(\boldsymbol{\omega}, R, \mathbf{v}_m) > 0$  para todo  $(\boldsymbol{\omega}, R, \mathbf{v}_m) \in TSO(3) \times \mathbb{R}^{3n}$  y  $L(\boldsymbol{\omega}, R, \mathbf{v}_m) = 0$  si y solo si  $(\boldsymbol{\omega}, R, \mathbf{v}_m) = (0, R_d, 0)$ . Puesto que  $\mathbf{s}_k^f$  es constante y  $R \mathbf{s}_k^f = \mathbf{s}_k^b$ , la derivada de  $L$  a lo largo de la solución del sistema en lazo cerrado, usando  $\gamma$  definida en la ecuación (2.7), está dada por

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \boldsymbol{\omega}^T J \dot{\boldsymbol{\omega}} - \frac{\delta}{n} \sum_{k=1}^n \dot{\mathbf{s}}_k^{bT} R_d \mathbf{s}_k^f + \alpha b^{-1} \text{Sat}_{\mathbf{N}}^T(\mathbf{v}_m) \dot{\mathbf{v}}_m \\ &= \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\omega}^T \delta \gamma - \alpha a b^{-1} \text{Sat}_{\mathbf{N}}^T(\mathbf{v}_m) \mathbf{v}_m + \alpha \text{Sat}_{\mathbf{N}}^T(\mathbf{v}_m) \dot{S}^b \\ &= \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\omega}^T \delta \gamma - \alpha a b^{-1} \text{Sat}_{\mathbf{N}}^T(\mathbf{v}_m) \mathbf{v}_m + \alpha \text{Sat}_{\mathbf{N}}^T(\mathbf{v}_m) M \boldsymbol{\omega} \\ &= \underbrace{-\alpha a b^{-1} \text{Sat}_{\mathbf{N}}^T(\mathbf{v}_m) \mathbf{v}_m}_{\dot{L}_1 \leq 0} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\omega}^T \delta \gamma + \alpha \boldsymbol{\omega}^T M^T \text{Sat}_{\mathbf{N}}(\mathbf{v}_m)}_{\dot{L}_2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Analizando  $\dot{L}_2$  se sigue de  $\boldsymbol{\Gamma}$  definida en la ecuación (2.19) que

$$\dot{L}_2 = -\lambda \boldsymbol{\omega}^T M^T \text{Sat}_{\mathbf{N}}(\mathbf{v}_m) - \boldsymbol{\omega}^T \rho \gamma + \boldsymbol{\omega}^T \delta \gamma + \alpha \boldsymbol{\omega}^T M^T \text{Sat}_{\mathbf{N}}(\mathbf{v}_m). \quad (2.23)$$

Eligiendo  $\delta = \rho$  y  $\alpha = \lambda$ , uno obtiene

$$\dot{L}_2 = 0.$$

Consecuentemente, la derivada de la función de Lyapunov definida en la ecuación (2.21) está dada por

$$\dot{L} = \dot{L}_1 + \dot{L}_2 = -\alpha a b^{-1} \text{Sat}_{\mathbf{N}}^T(\mathbf{v}_m) \mathbf{v}_m \leq 0. \quad (2.24)$$

Así, la derivada de la función de Lyapunov a lo largo de las soluciones del sistema en lazo cerrado es semidefinida negativa.

Recuérdese que  $SO(3)$  es compacto. Por lo tanto, para cualquier  $(\boldsymbol{\omega}(0), R(0), \mathbf{v}_m(0)) \in TSO(3) \times \mathbb{R}^{3n}$ , el conjunto

$$\Omega = \{(\boldsymbol{\omega}, R, \mathbf{v}_m) \in TSO(3) \times \mathbb{R}^3 : L(\boldsymbol{\omega}, R, \mathbf{v}_m) \leq L(\boldsymbol{\omega}(0), R(0), \mathbf{v}_m(0))\} \quad (2.25)$$

es un conjunto compacto y positivamente invariante del lazo cerrado.

### 2.3. ESTABILIZACIÓN DE ORIENTACIÓN BIOLÓGICAMENTE INSPIRADO

---

Del principio de invariancia de LaSalle, se sigue que todas las soluciones que comiencen en  $\Omega$  convergen al conjunto invariante mas grande en  $\bar{\mathcal{E}}$  contenido en  $\Omega$ .  $\dot{L}(\boldsymbol{\omega}, R, \mathbf{v}_m) \equiv 0$  implica que  $\mathbf{v}_m \equiv 0 \Rightarrow \dot{S}^b \equiv 0 \Rightarrow \boldsymbol{\omega} \equiv 0$ . Entonces, sustituyendo esta última identidad en el sistema en lazo cerrado definido por las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.19), uno tiene

$$\bar{\mathcal{E}} = \{(\boldsymbol{\omega}, R, \mathbf{v}_m) \in TSO(3) \times \mathbb{R}^{3n} : \boldsymbol{\omega} \equiv 0, \mathbf{v}_m \equiv 0, \boldsymbol{\gamma} \equiv 0\} \quad (2.26)$$

con  $\boldsymbol{\gamma}$  definida en la ecuación (2.7). Siguiendo los mismos argumentos de la prueba del Teorema 1, resulta que  $\dot{L} < 0$  fuera de  $\bar{\mathcal{E}}$  dado en la ecuación (2.20), y la ley de control actúan para asegurar la convergencia de las soluciones del sistema en lazo cerrado al punto de equilibrio  $(\boldsymbol{\omega}, R, \mathbf{v}_m) = (0, R_d, 0)$  donde  $L = \dot{L} = 0$ .

Finalmente, todavía es necesario comprobar que el control satisface las restricciones de saturación. En lo que sigue, para dos vectores  $\boldsymbol{\vartheta}_1$  y  $\boldsymbol{\vartheta}_2$  de la misma dimensión,  $\boldsymbol{\vartheta}_1 \leq \boldsymbol{\vartheta}_2$  significará que para cada componente  $i$ ,  $\boldsymbol{\vartheta}_{1_i} \leq \boldsymbol{\vartheta}_{2_i}$ . Usando la ecuación (2.19) y el hecho de que  $\boldsymbol{\gamma}$  es unitario, se sigue que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma} &= -\lambda M^T \text{Sat}_{\mathbf{N}}(\mathbf{v}_m) - \rho \boldsymbol{\gamma} \\ &\leq \lambda \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} [|\mathbf{s}_{k_3}^b| & |\mathbf{s}_{k_2}^b|] \begin{bmatrix} \bar{N}_2 \\ \bar{N}_3 \end{bmatrix} \\ [|\mathbf{s}_{k_3}^b| & |\mathbf{s}_{k_1}^b|] \begin{bmatrix} \bar{N}_1 \\ \bar{N}_3 \end{bmatrix} \\ [|\mathbf{s}_{k_2}^b| & |\mathbf{s}_{k_1}^b|] \begin{bmatrix} \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \\ \rho \end{bmatrix} \leq \lambda n \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \\ \bar{N}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \\ \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_1 \\ \bar{\Gamma}_2 \\ \bar{\Gamma}_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.27)$$

El vector de niveles de saturación  $\bar{\mathbf{N}}$  está dado como una función del torque de saturación  $\bar{\Gamma}_i$  en cada eje por:

$$\begin{pmatrix} \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \\ \bar{N}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\lambda n} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Gamma}_1 - \rho \\ \bar{\Gamma}_2 - \rho \\ \bar{\Gamma}_3 - \rho \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

con la siguiente desigualdad límite con el fin de mantener los niveles reales y estrictamente positivos

$$(\bar{\Gamma}_i - \rho) < \sum_{j \in \{1,2,3\}, j \neq i} (\bar{\Gamma}_j - \rho) \quad (2.29)$$

La desigualdad (2.29) siempre se cumple tomando  $\bar{\Gamma}_j$  idéntica en cada eje. Note, sin embargo, que también se cumple con dos límites idénticos y una más pequeña (el cual es el caso del helicóptero cuadirotor en la secciones 2.4 y 2.6). Por lo tanto, si los límites físicos del torque no satisfacen la desigualdad, siempre es posible cambiar artificialmente un límite del control para obtener una solución admisible.

Con lo anterior se han establecido las dos propuestas de control de orientación, las mismas han sido probadas en simulación, los resultados serán presentados más adelante. Afortunadamente y gracias al trabajo realizado por integrantes del Laboratorio de Control Avanzado de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, fue posible probar estas propuestas en un modelo cuadrirotor construido para estos fines. Es por esto que se hace necesaria la descripción de la modelación matemática de este sistema, lo cual es presentado a continuación.

## 2.4. Aplicación al helicóptero cuadrirotor

Una parte fundamental en este trabajo es la validación de la efectividad de las propuestas de control, no solo utilizando simulación computacional, que es importante, sino además poder hacerlo de forma experimental. Con este objetivo ha sido utilizado uno de los sistemas mini helicóptero cuadrirotor construidos en el Laboratorio de Control Avanzado de la Facultad de Ciencias de la Electrónica. El mencionado sistema tiene la capacidad de realizar vuelos mediante la implementación en programación de distintos controles, lo que hizo posible probar las leyes de control presentadas anteriormente. Antes de mostrar los resultados obtenidos, tanto en simulación como utilizando el vehículo mencionado, se presenta la forma en cómo es modelado el sistema cuadrirotor, así como los sensores necesarios para implementar el control, la forma en cómo se establece el equilibrio del sistema, además de la forma en cómo es interpretada la propuesta de control para hacerlo accesible al prototipo real.

### 2.4.1. El mini helicóptero cuadrirotor

El mini helicóptero de cuatro rotores es un sistema mecatrónico, constituido por una base formada por dos barras entrecruzadas, con una hélice y un motor acoplados en cada uno de los extremos de la cruz y en el centro de esta configuración se encuentran todos los elementos electrónicos de control y las baterías, como se muestra en la figura 2.16. A diferencia del helicóptero clásico, este modelo no tiene plato cíclico y se controla variando la velocidad angular de cada uno de sus cuatro motores [105].

Los cuatro rotores están constituidos por las hélices acopladas a motores de corriente continua por medio de un engrane. Los motores 1 y 3 giran en el sentido contrario a las manecillas del reloj, mientras los motores 2 y 4 lo hacen en el sentido de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 2.8, esto con el fin de anular el efecto giroscópico que causaría que todo el cuerpo del helicóptero girara alrededor del eje  $\mathbf{e}_3^b$ .

Cada rotor produce una fuerza  $\mathbf{f}_i$  y un torque reactivo  $\mathbf{Q}_i$  proporcionales a la velocidad de rotación del motor, como también se muestra en la figura 2.8. Así, el voltaje aplicado a cada uno de los motores representa una entrada de control. La fuerza de sustentación que permite realizar los vuelos estacionarios es la fuerza resultante de la suma de fuerzas producidas por cada rotor, así

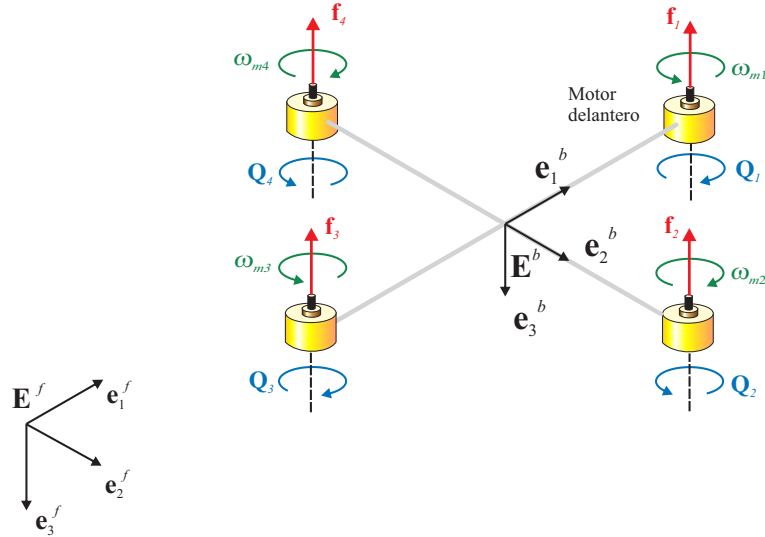


Figura 2.8: Esquema de la configuración del cuadrirotor: el marco de referencia inercial  $\mathbf{E}^f = [\mathbf{e}_1^f, \mathbf{e}_2^f, \mathbf{e}_3^f]$ , el marco de referencia fijo al cuerpo  $\mathbf{E}^b = [\mathbf{e}_1^b, \mathbf{e}_2^b, \mathbf{e}_3^b]$ , las fuerzas  $\mathbf{f}_i$  de cada motor, la velocidad angular de los motores  $\omega_{m_i}$  y los torques de reacción  $\mathbf{Q}_i$ .

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{f}_i. \quad (2.30)$$

Los grados de libertad del sistema, representados en la figura 2.9, están dados por

1. el ángulo de alabeo  $\phi$  (*roll*) (giro en torno al eje  $\mathbf{e}_1^b$  paralelo a la dirección de avance),
2. el ángulo de cabeceo  $\theta$  (*pitch*) (giro en torno al eje  $\mathbf{e}_2^b$  perpendicular a la dirección de avance),
3. el ángulo de guiñada  $\psi$  (*yaw*) (giro en torno al eje  $\mathbf{e}_3^b$  perpendicular al suelo),
4. el desplazamiento  $x$  en el eje  $\mathbf{e}_1^f$ ,
5. el desplazamiento  $y$  en el eje  $\mathbf{e}_2^f$ ,
6. el desplazamiento  $z$  en el eje  $\mathbf{e}_3^f$ .

Los tres primeros representan la orientación del cuerpo del helicóptero en el espacio, los otros tres grados de libertad son las coordenadas de la posición con respecto al marco de referencia inercial. De esta manera se tiene un sistema de seis grados de libertad y cuatro señales de control, por lo que se considerará como un sistema subactuado, pues el número de señales de control es inferior al número de grados de libertad.

Los movimientos posibles de la aeronave, tanto los de orientación mostrados en la figura 2.10, como los de traslación, están relacionados con los grados de libertad y se describen de la siguiente manera.

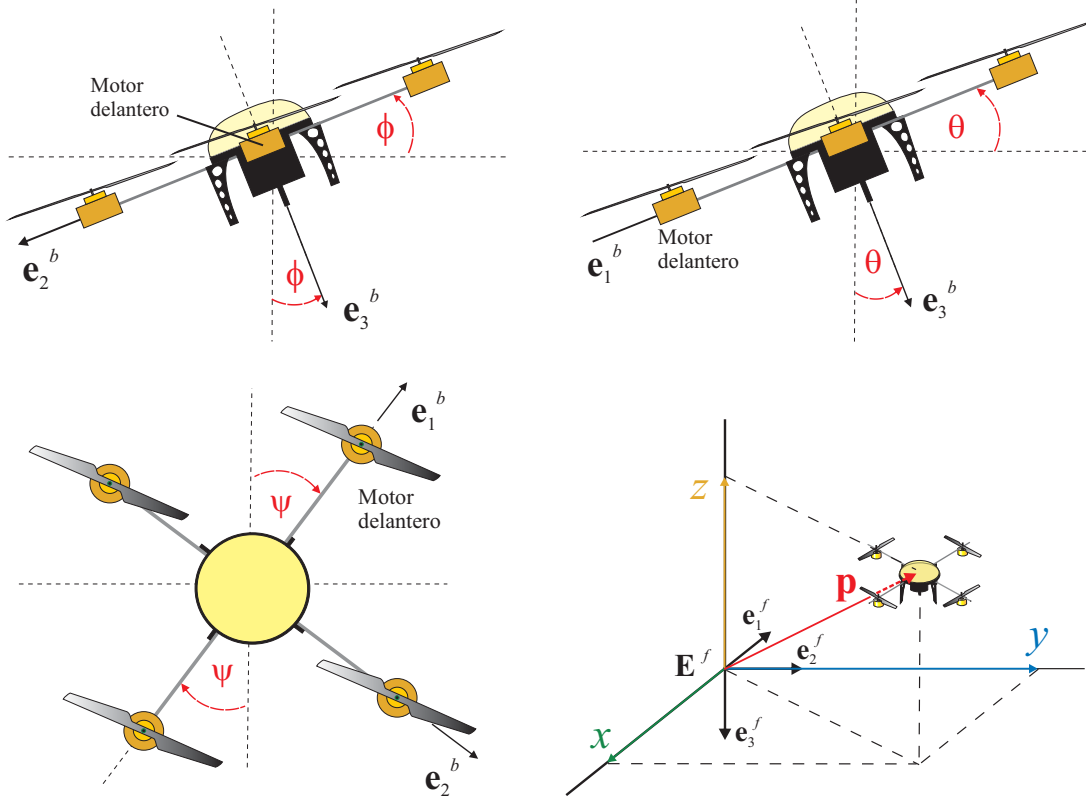


Figura 2.9: Grados de libertad angulares y desplazamientos en el espacio.

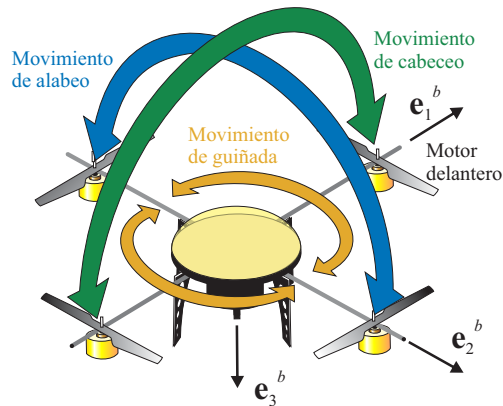


Figura 2.10: Esquema de los movimientos angulares del cuadrirotor.

1. Movimiento de alabeo (*roll*), es producido por la diferencia  $\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_4$ , como se muestra en las figuras 2.11(a)-2.11(b), para conseguir esto se incrementa (reduce) la velocidad del motor derecho  $m_2$  mientras se reduce (incrementa) la velocidad del motor izquierdo  $m_4$ .
2. Movimiento de cabeceo (*pitch*), es producido por la diferencia de  $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_3$ , de forma similar a como se muestra en la figura 2.11(a)-2.11(b), de la misma manera que en el caso anterior esto se logra incrementando (reduciendo) la velocidad del motor delantero  $m_1$  mientras se reduce (incrementa) la velocidad del motor trasero  $m_3$ .
3. Movimiento de guiñada (*yaw*), es la combinación de los torques de reacción de cada rotor  $\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3 - \mathbf{Q}_4$  como se ve en las figuras 2.11(c)-2.11(d), se obtiene incrementando (reduciendo) el par en el motor frontal y trasero ( $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_3$ ) mientras se reduce (incrementa) el par en los motores laterales ( $\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_4$ ). Estos movimientos se deben realizar manteniendo la fuerza principal,  $\mathbf{T}$ , constante.
4. Movimiento de desplazamiento en el eje  $x_n$ , para avanzar (retroceder) se debe incrementar (reducir) la velocidad del motor trasero  $m_3$  y reducir (incrementar) la velocidad del motor frontal  $m_1$ , como se muestra en las figuras 2.12(a)-2.12(b).
5. Movimiento de desplazamiento en el eje  $y_n$ , para ir a la derecha (izquierda) se debe incrementar (reducir) la velocidad del motor izquierdo  $m_4$  y reducir (incrementar) la velocidad del motor derecho  $m_2$ , de manera similar a como se muestra en las figuras 2.12(a)-2.12(b).
6. Movimiento de desplazamiento en el eje  $z_n$ , para ir hacia arriba (abajo) se debe incrementar (reducir) el par de los cuatro rotores de sustentación  $m_i$ , como se muestra en las figuras 2.12(c)-2.12(d). Estos últimos tres movimientos se consideran desde el marco de referencia inercial.

Se puede observar, de los movimientos de la aeronave descritos anteriormente, que existe una relación muy estrecha entre los movimientos de orientación y traslación, muestra de esto es el movimiento de cabeceo  $\theta$  con el movimiento de desplazamiento en el eje  $x_n$ , ambos se logran a partir de la acción combinada de los motores delantero  $m_1$  y trasero  $m_3$ , lo mismo se puede decir del movimiento de alabeo  $\phi$  con el movimiento de desplazamiento sobre el eje  $y_n$ . De la misma forma existe una relación entre el movimiento de guiñada y el movimiento de desplazamiento en el eje  $z_n$ , ambos debidos a la acción combinada de los pares de los rotores del sistema.

### 2.4.2. Modelo del sistema cuadrirotor completo

En nuestro caso, el modelo matemático del mini helicóptero de cuatro rotores estará representado por las velocidades y las aceleraciones, tanto lineales como rotacionales, y su relación con las fuerzas y torques que actúan en el sistema. Para determinar estas componentes, se tomarán en cuenta los desarrollos expuestos en el Capítulo 1.

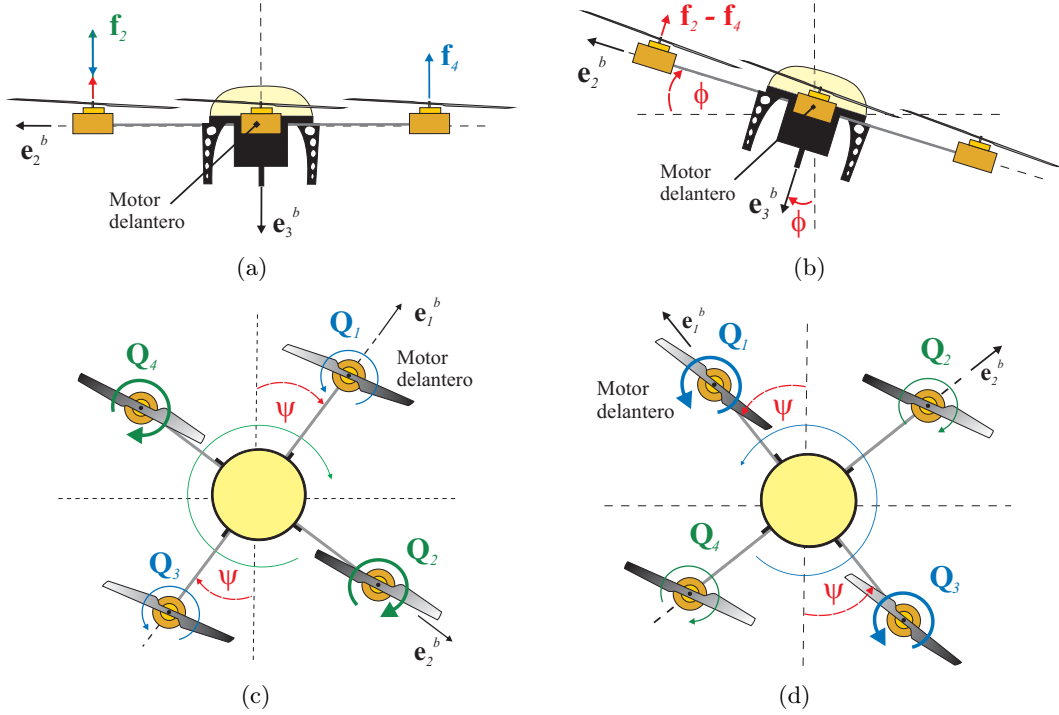


Figura 2.11: Esquemas de (a)-(b) la configuración de fuerzas para el movimiento de alabeo y (c)-(d) la configuración de torques para el movimiento de guiñada.

Para empezar, se tomará el vector de desplazamiento  $\mathbf{p} = x\mathbf{e}_1^f + y\mathbf{e}_2^f + z\mathbf{e}_3^f$  y el vector de velocidad lineal como  $\mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_1^f + v_y\mathbf{e}_2^f + v_z\mathbf{e}_3^f$ , ambos con respecto al marco de referencia inercial, la primera relación se obtiene de los vectores anteriores y tiene la forma conocida

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}, \quad (2.31)$$

donde la derivada del desplazamiento con respecto al tiempo  $\dot{\mathbf{p}}$  es la velocidad lineal  $\mathbf{v}$ .

La siguiente ecuación expresa la relación que existe entre la aceleración y las fuerzas que actúan sobre el sistema, para determinarla, recordemos la segunda Ley de Newton del movimiento expresada por

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}}. \quad (2.32)$$

Se necesitan determinar las fuerzas que actúan sobre la aeronave vistas desde el sistema de referencia inercial, lo que ya se hizo en el capítulo anterior, tomando en cuenta las ecuaciones (1.82) y (1.87) se tiene que (2.32) es

$$m\dot{\mathbf{v}} = -m\mathbf{g} + R^T(\phi, \theta, \psi) \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{abx} \\ F_{aby} \\ F_{abz} \end{pmatrix} \right], \quad (2.33)$$

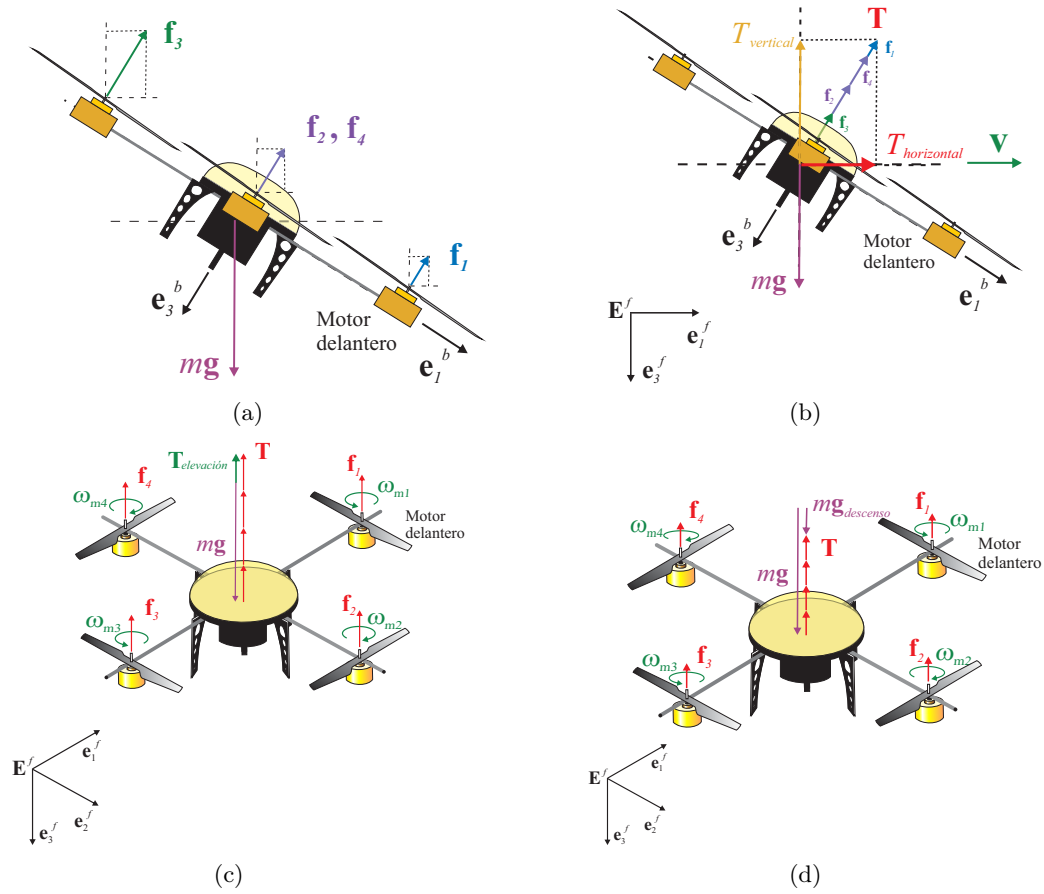


Figura 2.12: Esquemas de (a)-(b) la configuración de fuerzas para el movimiento de desplazamiento en el eje  $e_1^f$  y (c)-(d) la configuración de fuerzas para el movimiento de desplazamiento en el eje  $e_3^f$ .

donde el vector  $\mathbf{g}$  solo tiene componente en el eje  $\mathbf{e}_3^f$ ,  $R(\phi, \theta, \psi)$  representa la matriz de rotación (1.83) que es la misma que la matriz de rotación dada en (1.84),  $F_{Pb_z} = T$  es la magnitud de la fuerza de propulsión del vehículo y  $(F_{ab_x}, F_{ab_y}, F_{ab_z})^T$  representan las componentes en cada uno de los ejes de las fuerzas adicionales con respecto al marco de referencia en el centro de masa del vehículo.

Adicionalmente se consideran fuerzas de fricción sobre las hélices, denotadas por

$$\mathbf{F}_{fricción} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 F_{h_{xi}} \\ \sum_{i=1}^4 F_{h_{yi}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

De esta forma, la ecuación (2.33) se puede expresar en forma completa como

$$m\dot{\mathbf{v}} = -m\mathbf{g} + R^T(\phi, \theta, \psi) \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 F_{h_{xi}} \\ \sum_{i=1}^4 F_{h_{yi}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{ab_x} \\ F_{ab_y} \\ F_{ab_z} \end{pmatrix} \right]. \quad (2.35)$$

Hasta aquí se tienen las ecuaciones que describirán el movimiento traslacional del sistema cuadrirotor con respecto al sistema de coordenadas inercial  $\mathbf{E}^f = (\mathbf{e}_1^f, \mathbf{e}_2^f, \mathbf{e}_3^f)$ , lo que sigue es determinar las dos ecuaciones restantes que describirán el movimiento rotacional de la aeronave y que se utilizarán para estabilizar la orientación del mini helicóptero.

Nuevamente, se tienen que establecer ecuaciones que expresen la velocidad y la aceleración con relación a las fuerzas que actúan sobre el sistema, con la diferencia de que ahora se describen para movimientos de rotación. En este caso se hablará de desplazamientos, velocidades y aceleraciones angulares, además de torques (par de fuerza).

Como se mencionó en el capítulo 1, es común expresar movimientos rotacionales usando los ángulos de Cardan, dos formas alternativas han sido desarrolladas previamente y expresadas en las ecuaciones (1.85) y (1.95). Para nuestros propósitos, es conveniente utilizar esta última ecuación, la cual proporciona información de cómo está cambiando la orientación del vehículo con respecto del tiempo, es decir, la velocidad del sistema. Como se ha establecido, la orientación de un cuerpo rígido es representada por la matriz  $R \in SO(3)$  y denotará una rotación del marco fijo al cuerpo al marco inercial.  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$  denota la velocidad angular dada en el marco del cuerpo. Entonces, el cuerpo rígido satisface la ecuación cinemática

$$\dot{R} = -M_{\boldsymbol{\omega}}R, \quad (2.36)$$

con las mismas características que ya se mencionaron en el capítulo 1, con esto se tiene la primera ecuación del movimiento rotacional la cual relaciona la velocidad angular con la matriz de rotación.

---

## 2.4. APLICACIÓN AL HELICÓPTERO CUADRIROTOR

---

Para encontrar la expresión que relaciona las aceleraciones angulares con las torques, se toma como base la segunda ley de Newton del movimiento rotacional expresado en la ecuación (1.38) en la forma

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{d}{dt}(\mathbf{L}). \quad (2.37)$$

Este desarrollo se hizo previamente en el capítulo 2, la ecuación que expresa la relación que buscamos es (1.88). Considerando la simetría aproximada del sistema estudiado, los términos de inercia cruzados se eliminan, entonces la ecuación (1.88) toma la forma

$$\begin{aligned} I_{xx}\dot{\omega}_1 &= -(I_{zz} - I_{yy})\omega_2\omega_3 + \Gamma_{Pb_x}, \\ I_{yy}\dot{\omega}_2 &= -(I_{xx} - I_{zz})\omega_1\omega_3 + \Gamma_{Pb_y}, \\ I_{zz}\dot{\omega}_3 &= -(I_{yy} - I_{xx})\omega_1\omega_2 + \Gamma_{Pb_z}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

que en términos vectoriales se expresa como

$$J_h\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times J_h\boldsymbol{\omega} + \mathbf{\Gamma}. \quad (2.39)$$

Un torque adicional tiene su origen en el movimiento a gran velocidad de los rotores de sustentación ( $m_1, \dots, m_4$ ) que componen al cuadrirotor y que originan torques giroscópicos, estos torques se pueden expresar de la siguiente manera [16]

$$\mathbf{\Gamma}_G = \sum_{i=1}^4 J_m(\boldsymbol{\omega} \times z_b)(-1)^{i+1}\omega_{m_i}. \quad (2.40)$$

donde  $J_m$  es la matriz de inercia del motor.

Ahora se puede proponer una expresión para la aceleración angular y su relación con los torque que actúan sobre el mini helicóptero, de la ecuación (2.39), agregando los torques expresados en (2.40), se tiene que la ecuación dinámica para la rotación es

$$J_h\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times J_h\boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^4 J_m(\boldsymbol{\omega} \times z_b)(-1)^{i+1}\omega_{m_i} + \mathbf{\Gamma} \quad (2.41)$$

donde redefiniendo  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_{(1,2,3)}$  expresará los torques de control del vehículo aéreo. Con esto queda establecido el modelo matemático que describe el comportamiento dinámico del sistema cuadrirotor.

### Dinámica de los rotores

Es importante conocer la dinámica de los rotores del sistema y su relación con el accionar de los motores, esto debido a que son ellos los que nos proporcionan la fuerza de sustentación.

Como ya se ha mencionado, la fuerza de sustentación de la aeronave es producida por los cuatro rotores en los vértices del cuadrado, necesitamos saber cómo está relacionada la fuerza producida por cada rotor con la velocidad angular del motor que impulsa la hélice.

La magnitud de la fuerza  $f_i$  producida por el rotor  $i$  está relacionada con la magnitud de la velocidad angular del motor en la forma<sup>1</sup>

$$f_i = b_2\omega_{m_i}^2 + b_1\omega_{m_i} + b_0, \quad (2.42)$$

debido a que el motor gira a altas velocidades ( $\approx 260 \frac{rad}{s}$ ), esta ecuación se puede aproximar a

$$f_i = b_m\omega_{m_i}^2, \quad (2.43)$$

donde  $b_m = b_2$  es una constante aerodinámica<sup>2</sup>.

En consecuencia, de la ecuación (2.30) la expresión para la magnitud de la fuerza de sustentación está dada por

$$T = b_m \sum_{i=1}^4 \omega_{m_i}^2. \quad (2.44)$$

Lo anterior describe las fuerzas que actúan sobre el sistema cuadrirotor en relación con las velocidades angulares de los motores. Esto quiere decir que las fuerzas de propulsión sobre el sistema dependen tanto de las capacidades del motor como de la forma de las hélices empleadas en la construcción del mismo.

Por otro lado, como antes con la fuerza, también se tiene una relación entre la magnitud del torque reactivo del motor y la magnitud de su velocidad angular dada por<sup>3</sup>

$$Q_i = k_2\omega_{m_i}^2 + k_1\omega_{m_i} + k_0, \quad (2.45)$$

por la misma razón que antes, esta ecuación se puede reducir a

$$Q_i = k_m\omega_{m_i}^2, \quad (2.46)$$

---

<sup>1</sup>La descripción completa de esta relación se puede ver en [16], Capítulo 2, Sección 5.

<sup>2</sup>Esta constante aerodinámica  $b$  junto con la constante  $k$ , que se mostrará mas adelante, se determinan experimentalmente en condiciones de atmósfera estática, esto se muestra en [16], Capítulo 2, Sección 5, y se obtienen los valores  $b = 29,1 \times 10^{-5} Kg \cdot m$ ,  $k = 1,14 \times 10^{-6} Kg \cdot m^2$

<sup>3</sup>La descripción completa de esta relación también se puede ver en [16], Capítulo 2, Sección 5.

donde  $k_m = k_2 > 0$  es una constante que en la realidad depende, entre otros factores, de la densidad del aire, del radio y de la forma de la hélice.

Con esto se completa el análisis de la dinámica de los rotores, a continuación se muestra su relación con los torques de control. Mas detalles sobre el estudio aerodinámico de los rotores se pueden ver en [16], Capítulo 2, Sección 5.

### Descripción de los torques en el sistema cuadirotor

Por otra parte, como se mencionó en la descripción del sistema, el movimiento de *pitch* (cabeceo) es producido por la diferencia de  $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_3$ , el movimiento de *roll* (alabeo) es producido por  $\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_4$ , y el movimiento de *yaw* (guiñada) es la suma de los torques de reacción de cada rotor  $\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_4$ .

Estos tres movimientos originan los torques de control  $\mathbf{\Gamma}$  presentes en la ecuación (2.41), el desarrollo anterior permite mostrar la relación que existe entre estos torques de control y la dinámica de los rotores, lo cual se expone a continuación.

El torque  $\Gamma_1$  está descrito por el movimiento de *roll* (alabeo) dado por la diferencia  $\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_4$ , tomando en cuenta la definición de  $f_i$  dada en la ecuación (2.43) se tiene

$$\Gamma_1 = db_m(\omega_{m_2}^2 - \omega_{m_4}^2), \quad (2.47)$$

donde  $d$  es la distancia del centro de la aeronave al centro del motor donde se aplica la fuerza resultante, que es necesaria para cumplir la definición de la magnitud del torque. Un análisis similar da la forma de  $\Gamma_2$ .

Para encontrar la forma en que se define  $\Gamma_3$  debida al movimiento de *yaw* (guiñada), se toma en cuenta la ecuación (2.46) y se tiene

$$\Gamma_3 = k_m(\omega_{m_1}^2 - \omega_{m_2}^2 + \omega_{m_3}^2 - \omega_{m_4}^2), \quad (2.48)$$

donde los signos expresan la dirección en que rota cada uno de los motores. Un esquema gráfico de los torques mencionados se muestra en la figura 2.13.

Así, se concluye la obtención de todo lo que se necesita para describir el comportamiento del sistema estudiado. Para finalizar esta sección y con el fin de tener mayor claridad, se hará un compendio de las ecuaciones fundamentales del desarrollo anterior.

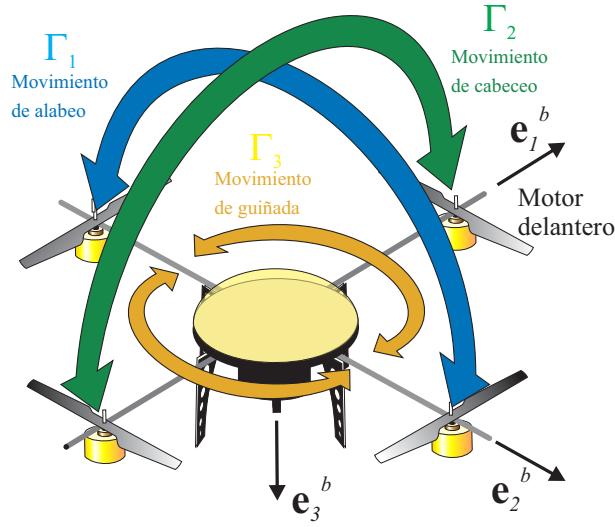


Figura 2.13: Esquema de la configuración de los torques de control  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_3$ .

### Resumen de ecuaciones del sistema completo

Ahora se tiene ya el sistema de ecuaciones que modelan al cuadricóptero, estas se expresan por las ecuaciones (2.31), (2.35), (1.95) y (2.41) que se muestran a continuación

$$\Sigma_T \begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}, \\ m\dot{\mathbf{v}} = -m\mathbf{g} + R^T(\phi, \theta, \psi) \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 F_{h_{xi}} \\ \sum_{i=1}^4 F_{h_{yi}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{ab_x} \\ F_{ab_y} \\ F_{ab_z} \end{pmatrix} \right], \end{cases} \quad (2.49)$$

$$\Sigma_R \begin{cases} \dot{R} = -M\omega R, \\ J_h \dot{\omega} = -\omega \times J_h \omega + \sum_{i=1}^4 J_m(\omega \times z_b)(-1)^{i+1} \omega_{m_i} + \Gamma_{(1,2,3)}. \end{cases} \quad (2.50)$$

Las componentes del torque de control  $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^3$ , que determinan el movimiento de orientación y que son generados por los rotores, están dados por  $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1 \ \Gamma_2 \ \Gamma_3)^T$  de la forma

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= db(\omega_{m_2}^2 - \omega_{m_4}^2), \\ \Gamma_2 &= db(\omega_{m_1}^2 - \omega_{m_3}^2), \\ \Gamma_3 &= k(\omega_{m_1}^2 - \omega_{m_2}^2 + \omega_{m_3}^2 - \omega_{m_4}^2), \end{aligned} \quad (2.51)$$

donde  $b$  y  $k$  son parámetros aerodinámicos que dependen de la forma de la hélice.

La ecuación de control que determina la magnitud del empuje total de sustentación del vehículo está dada por

$$T = b \sum_{i=1}^4 \omega_{m_i}^2. \quad (2.52)$$

Se debe notar que las ecuaciones (2.51) y (2.52) representan las cuatro entradas de control de este sistema subactuado, este sistema de ecuaciones se puede representar en forma matricial de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & db & 0 & -db \\ db & 0 & -db & 0 \\ k & -k & k & -k \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{m_1}^2 \\ \omega_{m_2}^2 \\ \omega_{m_3}^2 \\ \omega_{m_4}^2 \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

### 2.4.3. Forma reducida del modelo del cuadirotor

Tomando en consideración lo expuesto anteriormente, así como el modelo presentado en el capítulo anterior para el cuerpo rígido, y de acuerdo a [106], los seis grados de libertad del modelo del sistema cuadirotor (posición y orientación) pueden ser separados en movimientos traslacional y rotacional, representados por  $\Sigma_T$  y  $\Sigma_R$  respectivamente. El modelo del cuadirotor puede ser expresado en forma reducida como

$$\Sigma_T \begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = g\mathbf{e}_3 - \frac{1}{m}R^T T \mathbf{e}_3 \end{cases} \quad (2.54)$$

$$\Sigma_R \begin{cases} \dot{R} = -M_\omega R \\ J_h \dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times J_h \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Gamma}_G + \boldsymbol{\Gamma} \end{cases} \quad (2.55)$$

donde  $m$  denota la masa del cuadirotor y  $J_h$  su matriz de inercia expresada en  $\mathbf{E}^b$ .  $g$  es la aceleración de la gravedad, y  $\mathbf{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ .  $\mathbf{p} = [x \ y \ z]^T$  representan la posición del centro de gravedad del cuadirotor, el cual coincide con el origen del marco  $\mathbf{E}^b$ , con respecto al marco  $\mathbf{E}^f$ ,  $\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$  su velocidad lineal en  $\mathbf{E}^f$ , y  $\boldsymbol{\omega}$  denota la velocidad angular del cuadirotor expresado en  $\mathbf{E}^b$ .  $\boldsymbol{\Gamma}_G \in \mathbb{R}^3$  contiene el torque giroscópico creado por el movimiento rotacional del cuadirotor y los cuatro rotores;  $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbb{R}^3$  es el vector de torques de control, y  $-T\mathbf{e}_3$  es el empuje total expresado en  $\mathbf{E}^b$ . Note que el modelo de orientación (movimiento rotacional) del cuadirotor difiere del modelo general del cuerpo rígido, ecuaciones (2.1) y (2.1) por el torque giroscópico  $\boldsymbol{\Gamma}_G$ .  $R$  es la transformación rotacional de  $\mathbf{E}^f$  a  $\mathbf{E}^b$ .

---

#### 2.4.4. Aplicación del ancho de pulso modulado (PWM)

Anteriormente se ha establecido la relación entre las magnitudes del empuje  $T$ , los torques de control  $\Gamma_i$  y los torques reactivos  $Q_i$  con la magnitud de la velocidad angular  $\omega_{mi}$  de los rotores del vehículo aéreo. Sin embargo, en la aplicación real, la velocidad angular de los rotores es controlada por una señal denominada pulso de ancho modulado (pulse width-modulated (PWM)), las ecuaciones anteriores pueden ser reescritas en términos de esta señal de control como se muestra a continuación.

El torque reactivo  $Q_i$  debido al arrastre del  $i$ -ésimo rotor,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , y el empuje total  $T$  generado por los cuatro rotores pueden ser aproximados por una relación algebraica con la señal de control pulso de ancho modulado aplicada a los controladores BLDC como sigue

$$Q_i = k_m u_{mi} \quad (2.56)$$

$$T = b_m \sum_{i=1}^4 u_{mi} = \sum_{i=1}^4 f_i \quad (2.57)$$

donde las señales de entrada  $u_{mi}$  son expresadas en segundos, es decir, el tiempo durante el cual la señal de control PWM, que es aplicada al motor  $i$ , está en estado alto (high state).  $k_m > 0$  y  $b_m > 0$  son dos parámetros que dependen de la densidad del aire, la presión dinámica, el coeficiente de sustentación, el radio y el ángulo de ataque de las hélices y son obtenidas experimentalmente.

El torque giroscópico  $\mathbf{\Gamma}_G$  está dado por

$$\mathbf{\Gamma}_G = \sum_{i=1}^4 J_r (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3) (-1)^{i+1} \omega_{mi} \quad (2.58)$$

donde  $\omega_{mi}$  es la velocidad rotacional del rotor  $i$  y  $J_r$  es la inercia equivalente del motor DC, la hélice y el engranaje. Las componentes del vector de torques de control  $\mathbf{\Gamma} = [\Gamma_1 \ \Gamma_2 \ \Gamma_3]^T$  generados por los rotores está dado por

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= d(f_3 - f_4) = db_m(u_{m3} - u_{m4}) \\ \Gamma_2 &= d(f_1 - f_2) = db_m(u_{m1} - u_{m2}) \\ \Gamma_3 &= -Q_1 + Q_2 - Q_3 + Q_4 = k_m(-u_{m1} + u_{m2} - u_{m3} + u_{m4}) \end{aligned} \quad (2.59)$$

con  $d$  siendo la distancia desde uno de los rotores hasta el centro de masa del cuadrirotor. Combinando las ecuaciones (2.57) y (2.59), las fuerzas y torques aplicados al cuadrirotor son escritas como

## 2.4. APLICACIÓN AL HELICÓPTERO CUADRIROTOR

Parámetro	Descripción	Valor	Unidades
$m$	Masa	0.986	kg
$d$	Distancia	0.23	m
$J_{h_{xx}}$	Inercia alrededor de $\mathbf{e}_1^b$	$8.13 \times 10^{-3}$	kg·m <sup>2</sup>
$J_{h_{yy}}$	Inercia alrededor de $\mathbf{e}_2^b$	$8.13 \times 10^{-3}$	kg·m <sup>2</sup>
$J_{h_{zz}}$	Inercia alrededor de $\mathbf{e}_3^b$	$10.89 \times 10^{-3}$	kg·m <sup>2</sup>
$b_m$	Constante de proporcionalidad	5106.8	N/s
$k_m$	Constante de proporcionalidad	342.4	N·m/s

Tabla 2.1: Especificaciones y parámetros del cuadrirotor.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ T \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & db_m & -db_m \\ db_m & -db_m & 0 & 0 \\ -k_m & k_m & -k_m & k_m \\ b_m & b_m & b_m & b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \\ u_{m3} \\ u_{m4} \end{pmatrix} \\
 &= N\mathbf{U}_m
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

donde  $\mathbf{U}_m = [u_{m1} \ u_{m2} \ u_{m3} \ u_{m4}]^T$ . Puesto que  $N$  es una matriz invertible, la ecuación (2.60) puede ser reformulada, de tal manera que es posible obtener una expresión que proporcione los valores necesarios para las señales de control  $\mathbf{U}_m$ , esto considerando que se conocen los valores de  $\mathbf{\Gamma}$  y  $T$  para que el vehículo realice alguna tarea específica, entonces

$$\mathbf{U}_m = N^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ T \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

se puede utilizar para obtener los valores de las señales de control necesario para la tarea asignada.

Para terminar este apartado, es necesario mencionar que para un determinado modelo de vehículo se tienen ciertas especificaciones y parámetros que no son iguales para otros modelos, lo que se debe considerar a la hora de realizar pruebas reales. En nuestro caso, las especificaciones y parámetros del prototipo cuadrirotor utilizado en este trabajo están descritos en la Tabla 2.1.

Con todo lo anterior, se tiene la forma en cómo se ha modelado el sistema a utilizar para la realización de las pruebas en tiempo real del rendimiento de las propuestas de Leyes de control descritas arriba, así como las especificaciones y parámetros del sistema particular utilizado. Sin embargo, es necesario realizar la modelación de otros implementos igualmente importantes que determinan el buen funcionamiento del vehículo y la correcta realización de tales pruebas. Adicionalmente, se hace una reformulación de las leyes de control para hacerlo accesible a estos implementos adicionales, lo mencionado anteriormente es descrito a continuación.

### 2.4.5. Modelación de los sensores

El cuadrirotor está equipado con un conjunto de sensores (conjunto MAG) compuesto de un magnetómetro triaxial, un acelerómetro triaxial y tres girómetros montados ortogonalmente. El conjunto MAG representa el sistema sensorial del insecto que es usado para su estabilización de orientación es decir, los halterios, la sensila y el sentido magnético.

Los componentes del conjunto MAG son cuidadosamente colocados, tal que sus ejes sensitivos coinciden con el marco del cuerpo  $\mathbf{E}^b$ . El marco de coordenadas inercial  $\mathbf{E}^f$  es elegido para ser marco de coordenadas NED (norte, este, abajo). En este caso, los vectores de referencia son los vectores gravitacional y magnético. Los vectores de observación, es decir, los vectores gravitacional y magnético expresados en el marco del cuerpo  $\mathbf{E}^b$ , son obtenidos del acelerómetro y del magnetómetro triaxiales. La velocidad angular del cuadrirotor es obtenido de los tres girómetros. Para propósitos de control, un modelo de medición sencilla que no incluya un término parcial, errores de calibración o rango de medición limitados es considerado. Como se mostrará en los resultados experimentales, la ley de control es robusta con respecto al ruido presente en estas mediciones de los sensores y a las perturbaciones externas.

#### Girómetros

La velocidad angular  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$  es medida por tres girómetros montados ortogonalmente. Esto es

$$\boldsymbol{\omega}_G = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\eta}_G$$

donde  $\boldsymbol{\omega}$  es la velocidad angular real del cuadrirotor y  $\boldsymbol{\eta}_G \in \mathbb{R}^3$  es el vector de ruido de media cero supuesto acotado.

#### Acelerómetros

Los acelerómetros miden la diferencia entre la aceleración inercial y la gravedad expresada en el marco del cuerpo  $\mathbf{E}^b$ . Entonces, la salida del acelerómetro triaxial pueden ser escrita como

$$\mathbf{s}_1^b = R(\mathbf{a} - g\mathbf{e}_3) + \boldsymbol{\eta}_s$$

donde  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  es la proyección, en el marco inercial  $\mathbf{E}^f$ , del vector de aceleración del cuerpo.  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  denota la aceleración gravitacional y  $\boldsymbol{\eta}_s \in \mathbb{R}^3$  es el vector de ruido de media cero acotado. Si la aceleración absoluta del cuadrirotor es pequeña con respecto a la aceleración gravitacional ( $|a| \ll |ge_3|$ ), el “vector de observación” dado por el acelerómetro es

$$\mathbf{s}_1^b = -R\mathbf{s}_1^f + \boldsymbol{\eta}_A \quad (2.62)$$

con  $\mathbf{s}_1^f = g\mathbf{e}_3/|ge_3| = [0 \ 0 \ 1]^T$  y  $\boldsymbol{\eta}_A = \boldsymbol{\eta}_s + \boldsymbol{\eta}_a$ , donde  $\boldsymbol{\eta}_a$  representa las vibraciones y pequeñas aceleraciones del cuadrirotor.

**Observación 2** *En ausencia de fuerzas de reacción de movimiento ejercidas por el medio ambiente, el cuadrirotor (o cualquier vehículo VTOL en general) solo experimenta aceleración a lo largo de la dirección fija del cuerpo para el despegue  $\mathbf{e}_3^b$  y movimientos de traslación horizontales. En el presente caso, solo la estabilización de orientación es estudiada. Por lo tanto,  $|a| \ll |ge_3|$  y el acelerómetro triaxial puede ser usado como un sensor de vector de referencia donde el vector de gravedad es el vector de referencia y la misma aceleración es considerada como una perturbación. En el caso donde los movimientos de traslación son considerados, sensores de velocidad colocados en el cuadrirotor pueden ser utilizados para determinar la fuerza vertical o empuje y para calcular la aceleración posteriormente. Una compensación de esta aceleración en las mediciones suministradas por el acelerómetro puede ser considerado con el fin de obtener únicamente la proyección del vector de gravedad en el marco del cuerpo.*

### Magnetómetros

El vector de campo magnético expresado en el marco  $\mathbf{E}^f$  es supuesto que sea modelado por el vector unitario  $\mathbf{s}_2^f = [0,71 \ 0 \ 0,69]^T$ , el cual representa la dirección del vector de campo magnético en la Ciudad de Puebla, México (GPS: 19°01'41.78" N 98°11'16.81" O) donde los experimentos se han llevado a cabo. Puesto que las medidas son relativas al marco del cuerpo  $\mathbf{E}^b$ , estas son dadas por

$$\mathbf{s}_2^b = R\mathbf{s}_2^f + \boldsymbol{\eta}_M$$

donde  $\boldsymbol{\eta}_M \in \mathbb{R}^3$  denota la perturbación del campo magnético supuesto para ser modelado por el ruido de media cero acotado.

**Observación 3** *El cuadrirotor evoluciona en un espacio limitado caracterizado por un vector de campo magnético constante.*

#### 2.4.6. Determinación del equilibrio inestable

Dadas las medidas del sensor acelerómetro  $\mathbf{s}_1^f = [0 \ 0 \ 1]^T$  y las medidas del sensor magnetómetro  $\mathbf{s}_2^f = [0,71 \ 0 \ 0,69]^T$  (figura 2.4), uno puede fácilmente notar que los dos vectores pertenecen al plano  $(\mathbf{e}_1^f, \mathbf{e}_3^f)$ . La identidad  $\mathbf{s}_k^b = -R_d\mathbf{s}_k^f = R_s R_d\mathbf{s}_k^f$  es definida por una simetría relativa al eje  $\mathbf{e}_2^f$ ; por lo tanto,  $R_s = \text{diag}(-1, 1, -1)$ , el cual caracteriza una rotación del ángulo 180° alrededor del eje  $\mathbf{e}_2^f$ .

### 2.4.7. Realimentación de salida acotada para la estabilización de orientación del cuadrirotor

Con el fin de estabilizar la orientación del cuadrirotor UAV, el subsistema  $\Sigma_R$  de la ecuación (2.54) es usada. El movimiento rotacional del helicóptero responde a los torques de control derivados de la combinación lineal de las velocidades rotacionales de las hélices dadas en la ecuación (2.60). Por lo tanto, los máximos torques de control en vuelo dependen de las mayores velocidades rotacionales de los actuadores que son usados.

Consecuentemente, los máximos torques que pueden ser aplicados para controlar el movimiento rotacional del cuadrirotor son dados por

$$\bar{\Gamma}_1 = 0.15 \text{ N}\cdot\text{m}, \quad \bar{\Gamma}_2 = 0.15 \text{ N}\cdot\text{m}, \quad \bar{\Gamma}_3 = 0.09 \text{ N}\cdot\text{m} \quad (2.63)$$

Con el fin de evitar daños no deseados a los actuadores, el control de orientación acotado presentado anteriormente es aplicado al subsistema  $\Sigma_R$  de la ecuación (2.54).

**Corolario 1** *Considere la dinámica rotacional del cuadrirotor UAV descrito por el subsistema  $\Sigma_R$  de la ecuación (2.54). La entrada de control acotado definido en la ecuación (2.15) estabiliza asintóticamente el cuadrirotor en el equilibrio  $(\boldsymbol{\omega}, R) = (0, R_d)$  con un dominio de atracción igual a  $TSO(3) \setminus \{(0, R_s R_d)\}$ .*

**Prueba 3** *Los pasos de la prueba son idénticos a los del teorema 3. La única diferencia radica en el vector  $\boldsymbol{\Gamma}_G$ , el cual agrega un término que se cancela debido a la relación*

$$\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Gamma}_G = \boldsymbol{\omega}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3) \sum_{i=1}^4 J_r (-1)^{i+1} \omega_{m_i} = 0$$

donde  $J_r$  es la inercia del rotor.

En el caso donde la velocidad angular no está disponible, la ley de control propuesta en el teorema 2 puede ser aplicada al cuadrirotor descrito por el subsistema  $\Sigma_R$  de la ecuación (2.54). Entonces, uno expone el siguiente resultado

**Corolario 2** *Considere la dinámica rotacional del mini helicóptero cuadrirotor descrito por el subsistema  $\Sigma_R$  de la ecuación (2.54). La entrada de control acotada definida en la ecuación (2.19) estabiliza asintóticamente el cuadrirotor en el equilibrio  $(\boldsymbol{\omega}, R, \mathbf{v}_m) = (0, R_d, 0)$  con un dominio de atracción igual a  $TSO(3) \times \mathbb{R}^{3n} \setminus \{(0, R_s R_d, 0)\}$ .*

**Prueba 4** *Los pasos de la prueba son idénticos a los del teorema 2 y del corolario 1.*

**Observación 4** *Los Corolarios 1 y 2 establecen que el cuadrirotor puede ser teóricamente estabilizado asintóticamente desde cualquier condición inicial que pertenezca a  $TSO(3) \setminus \{(0, R_s R_d)\}$  y  $TSO(3) \times \mathbb{R}^{3n} \setminus \{(0, R_s R_d, 0)\}$ , respectivamente. Sin embargo, la estabilización depende de la dinámica de los actuadores. En realidad, un cuadrirotor con velocidad y potencia suficiente puede volar en un circuito sin ningún problema. Sin embargo, flotar o volar en línea recta en posición invertida es casi imposible, debido a que el perfil de las aspas no permite que esto suceda.*

Con esto se da por terminada esta sección, una vez descrito todo lo concerniente al funcionamiento del modelo cuadrirotor, así como la forma en que es accesible para éste las leyes de control propuestas, estamos en posibilidades de presentar los resultados, tanto en simulación como en tiempo real, obtenidos a partir de estas experiencias. Esto es presentado a continuación.

## 2.5. Resultados en simulación

Con el fin de analizar el comportamiento del sistema en lazo cerrado, utilizando las leyes de control propuestas, se realizaron pruebas utilizando el simulador descrito en la Sección (A) del capítulo anterior. En esta ocasión se analiza un escenario con las condiciones iniciales para un cuerpo rígido que se muestran a continuación  $\boldsymbol{\omega} = (0 \ 0 \ 0)^T$  y  $(\phi \ \theta \ \phi)^T = (65^\circ \ 85^\circ \ -80^\circ)^T$ . Los valores utilizados para las componentes de la matriz de inercia  $J$  fueron  $J_1 = J_2 = 8.28 \times 10^{-3} \text{Kg m}^2$  y  $J_3 = 0.1 \text{Kg m}^2$ . Los valores utilizados para los vectores de referencia son  $\mathbf{s}_1^f = [0 \ 0 \ 1]^T$  y  $\mathbf{s}_2^f = [0.5 \ 0 \ \sqrt{3}/2]^T$ . Adicionalmente, los valores de los vectores de observación fueron contaminados con una perturbación de tipo ruido blanco, de amplitud 0.01 y frecuencia 1 Hz para el vector  $\mathbf{s}_1^b$  y amplitud 0.05 con la misma frecuencia para el vector  $\mathbf{s}_2^b$ . Los resultados obtenidos son presentados en seguida. Cabe mencionar que a pesar que en la ley de control no se utiliza ninguna parametrización de la orientación, aquí se mostrarán los ángulos de Euler con el fin de ser explícitos.

### 2.5.1. Primera ley de control

Esta propuesta de control utiliza los vectores de observación y la velocidad angular obtenidos por sensores para lograr la orientación del sistema. Los resultados obtenidos para esta ley de control se muestran en la figura 2.14. En la primera gráfica se observan las magnitudes de las torques aplicadas al sistema para lograr su estabilización en aproximadamente 1.3 segundos. Se puede notar que las magnitudes están entre -2 a 1 Nm, lo cual es razonable para este tipo de sistemas. La gráfica de la figura 2.14(b) muestra la forma en como se comportan los ángulos de Euler del sistema los cuales convergen a cero en aproximadamente 1.3 segundos, lo que concuerda con la gráfica anterior. La figura 2.14(c) muestra la gráfica de las velocidades angulares del vehículo VTOL, las cuales convergen a cero en un tiempo similar al anterior. Las dos últimas gráficas mostradas en las figuras

2.14(d)-2.14(e) muestran el comportamiento de los vectores de observación  $\mathbf{s}_1^b$  y  $\mathbf{s}_2^b$ , respectivamente, los cuales alcanzan los valores de las componentes del vector de referencia  $\mathbf{s}_1^f$  y  $\mathbf{s}_2^f$  en aproximadamente 1.4 s. Se puede notar el efecto del ruido introducido en estos valores.

### 2.5.2. Segunda ley de control

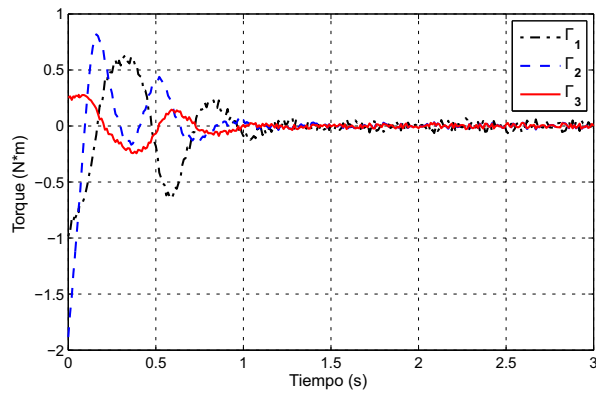
Esta propuesta de control utiliza solo los vectores de observación para lograr la orientación del sistema, a partir de estos vectores se estima información de la velocidad angular a través de una derivada filtrada, lo que se describió anteriormente. Para esta simulación se utilizaron los valores  $a = b = 25$  para construir las matrices diagonales  $A$  y  $B$ .

Los resultados obtenidos de esta simulación se muestran en las gráficas de la figura 2.15. En la primera gráfica del conjunto se expresan las magnitudes de los torques aplicados al sistema para su estabilización, se puede notar que la acción de los torques es una señal de alta frecuencia que al final se mantiene en un promedio de cero. Al inicio esta señal de control provoca un movimiento para llevar al sistema a la orientación deseada, luego la información sobre la velocidad angular contribuye al control y esto se nota en el intervalo de 1.5 a 2 segundos. La Gráfica 2.15(b) muestra la orientación del sistema mediante los valores de los ángulos  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$ , se puede observar que el tiempo de estabilización es de aproximadamente 6 segundos, es notorio el giro que se produce en el ángulo  $\psi$ , pero a pesar de esto el sistema entra en la región de estabilidad en aproximadamente 5 segundos, con lo que el vehículo puede mantenerse en el aire. Las Gráficas 2.15(c) y 2.15(d) muestran la velocidad angular real y la información que se tiene de esta mediante el sistema que utiliza los vectores de observación, se observa que existe una diferencia entre ambas básicamente debido al ruido registrado en los vectores base y que producen la respuesta mostrada para el control, a pesar de esto, la velocidad angular converge a cero en un tiempo aproximado de 3 segundos y se mantiene con algunas variaciones debido al ruido. Las dos últimas gráficas 2.15(e) y 2.15(f) muestran el comportamiento de los vectores de observación  $\mathbf{s}_1^b$  y  $\mathbf{s}_2^b$ , respectivamente, se puede observar la diferencia en amplitud de las perturbaciones introducidas en cada vector. Aun con esto, el control logra hacerlos coincidir, en promedio, con los vectores de referencia en un tiempo aproximado de 8 segundos en ambos casos. En este momento,  $\mathbf{s}_1^b = \mathbf{s}_1^f$  y  $\mathbf{s}_2^b = \mathbf{s}_2^f$ , con lo que el sistema queda orientado de tal manera que los vectores de observación están en la misma posición que los vectores de referencia en alguna vecindad debido a las perturbaciones sobre el sistema.

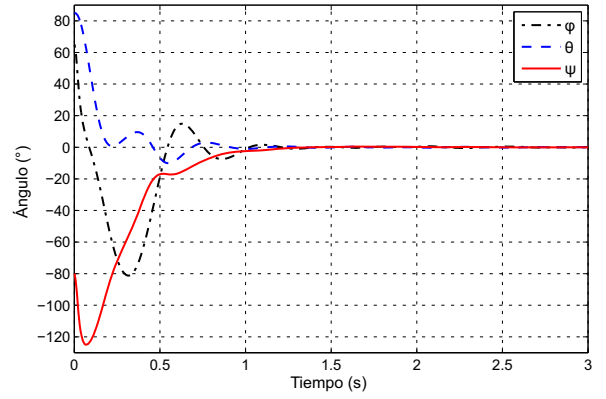
## 2.6. Resultados experimentales

Esta sección está dedicada a mostrar la efectividad de la propuesta de control aplicada en un sistema real. Se llevan a cabo experimentos en tiempo real en uno de los prototipos cuadrirotor ( figura 2.16) desarrollado por el Laboratorio de Control Avanzado de la Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP).

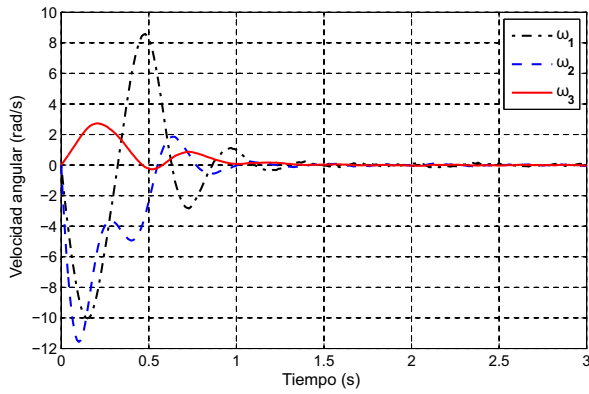
## 2.6. RESULTADOS EXPERIMENTALES



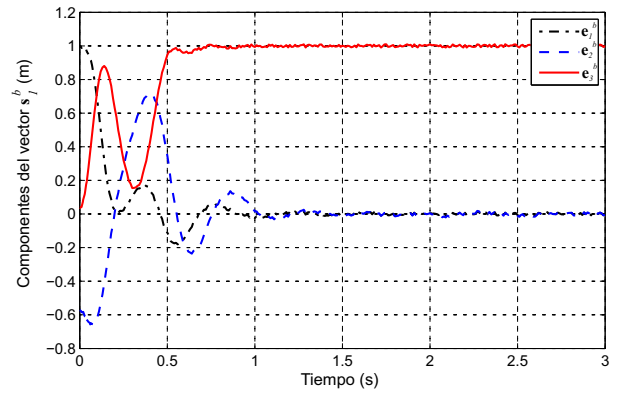
(a)



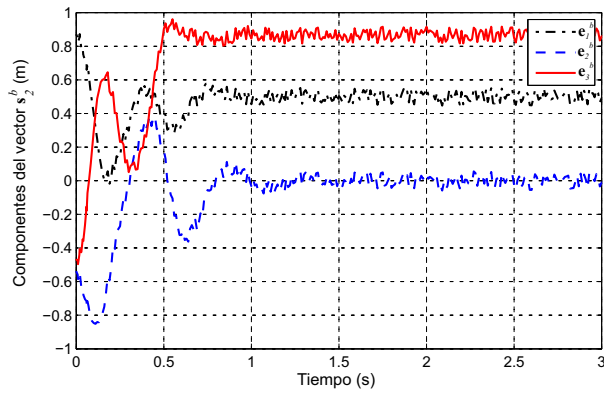
(b)



(c)

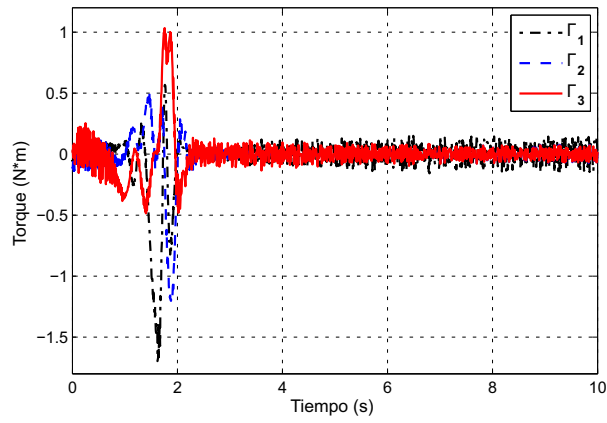


(d)

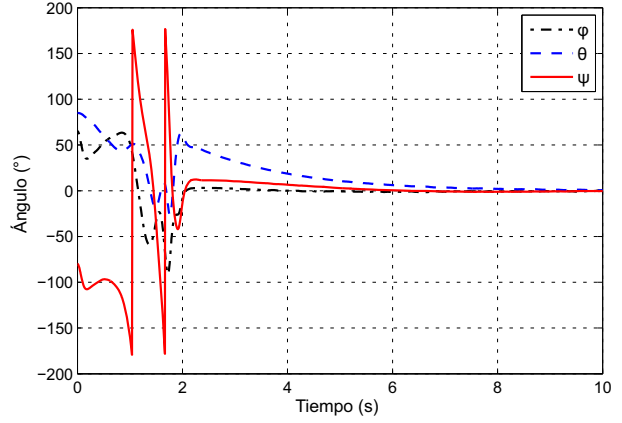


(e)

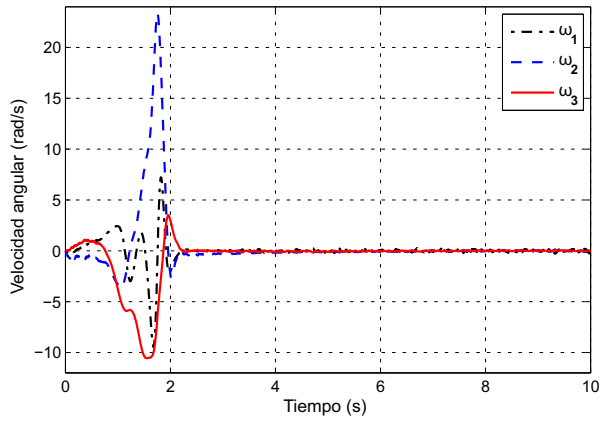
Figura 2.14: Resultados en simulación para la primera ley de control.



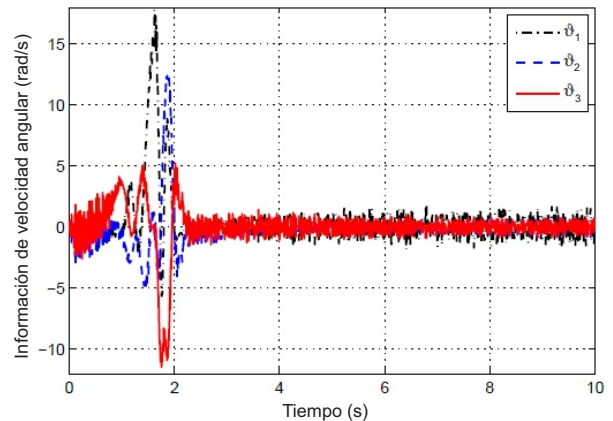
(a)



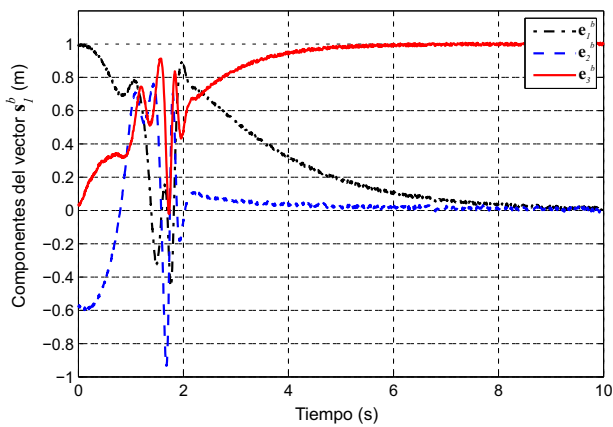
(b)



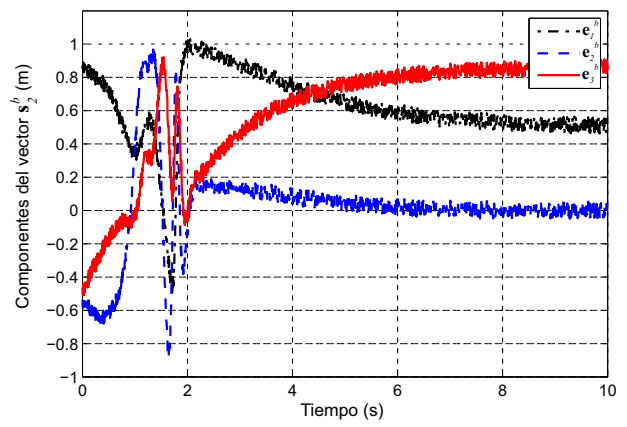
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 2.15: Resultados en simulación para la segunda ley de control.



Figura 2.16: El mini helicóptero cuadrirotor en vuelo.

Las leyes de control son ejecutadas en una Spartan-6 FPGA LX9 MicroBoard. La Spartan-6 tiene la capacidad de implementar un procesamiento suave “MicroBlaze” a 66.7 MHz. Además, la Spartan-6 tiene la ventaja de desarrollar módulos independientes, tales como generadores PWM y puertos universales de recepción/transmisión sincrónica/asíncrona (USART). Un conjunto de sensores compuesta por un magnetómetro triaxial, un acelerómetro triaxial y tres girómetros montados ortogonalmente es usado para obtener los vectores de observación y la velocidad angular mediante una comunicación serial (RS-232). Un módem Bluetooth conectado a una PC se utiliza para intercambiar los datos procesados. La orientación deseada también puede ser proporcionada mediante un radio control de cinco canales Spektrum DX5e de 2.4-GHz. Cuatro módulos de potencia son usados para manejar los motores por medio de una señal PWM. La frecuencia de la señal PWM es fijada a 500 Hz. La potencia para todos los sistemas es suministrada por una batería Li-Po de 11.1 Volts, y la masa total es 0.986 kg.

Las entradas FPGA son la velocidad angular y los vectores de observación (vectores de campo magnético y gravitacional) proporcionados por el MAG-suite, junto con la orientación deseada proporcionada por la estación de tierra mediante el modem Bluetooth o el receptor Spektrum (En este último caso, un temporizador detecta y mide el ancho de los pulsos desde el receptor, los cuales son proporcionales a los ángulos y empujes deseados). Debido a que la orientación deseada es proporcionada por el piloto en términos de los ángulos de Euler, el procesador a bordo calcula la matriz de rotación deseada  $R_d$  con el fin de evaluar el error de posición definida en la ecuación (2.7). Entonces, la ley de control de orientación es calculada, y las señales PWM usadas para controlar las velocidades rotacionales de los cuatro motores son actualizadas. Opcionalmente, el sistema embebido puede proporcionar los datos procesados a una estación en tierra, con el fin de monitorear el experimento. El lazo de control de orientación se ejecuta a 75 Hz, sujeto a las restricciones MAG-suite. El diagrama a bloques del sistema completo es mostrado en la figura 2.17.

Dos experimentos son desarrollados usando los torques de control definidos en los corolarios 1 y 2, respectivamente, y respetando las características de los motores dadas en la ecuación (2.63). El objetivo de los experimentos es llevar el cuadrirotor desde cualquier orientación inicial a la orientación deseada definida por los ángulos alabeo, cabeceo y guiñada

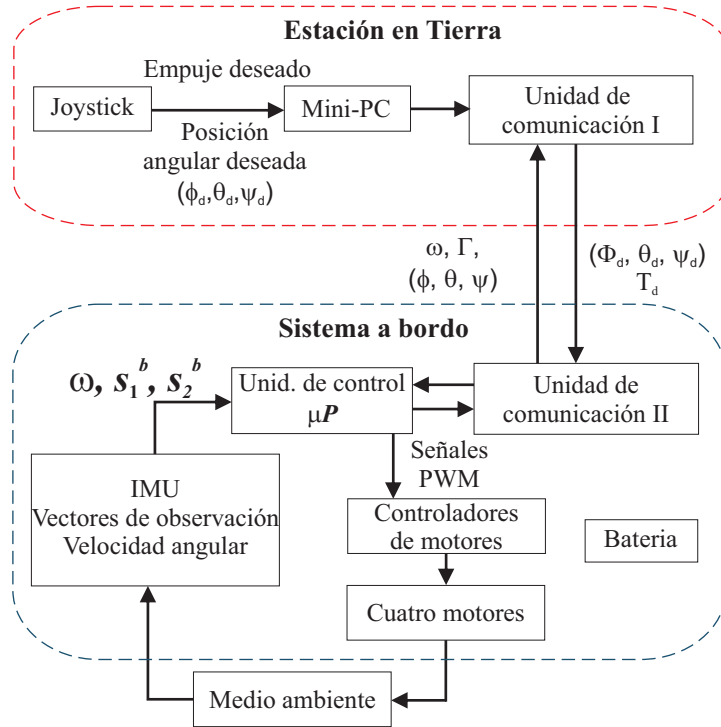


Figura 2.17: Diagrama a bloques del sistema de control de orientación del cuadrirotor.

nulos y mantenerlo allí manteniendo la velocidad angulara en cero. El empuje deseado es tomado como  $T \geq mg = 8.19 \text{ N}$ , de tal manera que garantiza un equilibrio del peso del cuadrirotor. Note que los vectores  $\mathbf{s}_1^f$  y  $\mathbf{s}_2^f$  son no colineales. Además, la dirección de  $\mathbf{s}_1^f$  coincide con la dirección del eje  $\mathbf{e}_3^f$  del marco de coordenadas inercial  $\mathbf{E}^f$ .

### 2.6.1. Estabilización usando la ley de control del Corolario 1

Los parámetros de sintonización de las entradas de control son el conjunto  $N_{1,2} = 0.11$ ,  $N_3 = 0.05$ ,  $\lambda = 0.05$  y  $\rho = 0.04$ . Las condiciones iniciales son  $(\phi = 18^\circ, \theta = -19^\circ$  y  $\psi = -44^\circ)$  para los ángulos alabeo, cabeceo y guiñada, respectivamente, con una velocidad angular nula. La evolución de estos ángulos es mostrada en la figura 2.18. Note que los ángulos no son usados para calcular los torques de control; se presentan solo para mostrar la evolución de la orientación, debido a que estos son más intuitivos. Las velocidades angulares, los vectores de observación (medidas del acelerómetro y del magnetómetro) los torques de control y el ancho de los pulsos de la señal de control del motor son presentados en las figuras 2.19–2.23, respectivamente. La convergencia de los ángulos y velocidades angulares se alcanza en un tiempo aceptable (1.5 s). Como puede verse en las figuras 2.18 y 2.19, las condiciones iniciales producen un gran error en el ángulo de guiñada y la velocidad angular. Consecuentemente, la señal de control  $\Gamma_3$  alcanza su límite de  $\pm 0.09 \text{ N}\cdot\text{m}$  (ver figuras 2.22 y 2.23) y actúa sobre el sistema para estabilizarlo. Note que existe una ligera desviación del ángulo de guiñada. Esta es debida principalmente a las perturbaciones en

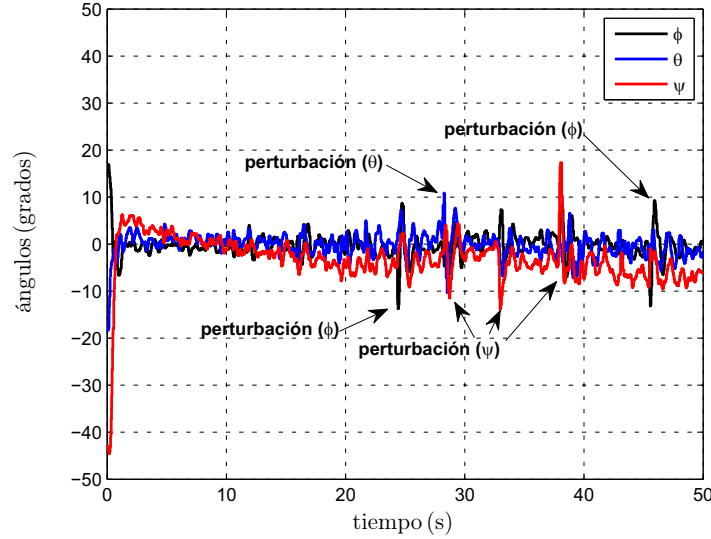


Figura 2.18: Ley de control del corolario 1: evolución de los ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada.

el campo magnético inducido por los motores. A pesar de las desviaciones mencionadas anteriormente, el comportamiento del sistema sigue siendo muy aceptable.

La ley de control del corolario 1 es probada también en presencia de perturbaciones aplicadas sucesivamente a los tres ejes (alabeo, cabeceo y guiñada). Estas perturbaciones pueden caracterizar algunos vientos que enfrenta la máquina. Durante los experimentos, las perturbaciones se han aplicado de forma manual como un movimiento en el cuerpo del cuadrirotor por menos de un segundo. Note que la perturbación produce un gran error del ángulo de guiñada y la velocidad angular correspondiente, la señal de control  $\Gamma_3$  alcanza su límite una vez más. Evidentemente, las acciones de control son para llevar el cuadrirotor a la orientación deseada, mientras se respetan las limitaciones del motor.

### 2.6.2. Estabilización usando la ley de control del corolario 2

La ley de control presentada en el corolario 2 es aplicada. La sintonización de los parámetros de entradas de control son el conjunto  $\bar{N}_{1,2} = 0.29$ ,  $\bar{N}_3 = 0.866$ ,  $\lambda = 0.06$ ,  $\rho = 0.04$ ,  $a = 25$  y  $b = 5$ , con el fin de respetar la restricción (2.29). Las condiciones iniciales son  $(\phi = 19^\circ, \theta = -4^\circ$  y  $\psi = -31^\circ)$  para los ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada, respectivamente, con una velocidad angular nula. Uno debe ser cuidadoso con la elección de las condiciones iniciales de las dos últimas ecuaciones de (2.19). Una forma sencilla es establecer  $\zeta(0) = \mathbf{v}_m(0) - bS^b(0)$ , cuando  $\mathbf{v}_m(0) = 0$ .

La evolución de los ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada, la correspondiente velocidad angular, los vectores de observación (medidas del acelerómetro y magnetómetro) los torques de control y el ancho de pulso de las señales de control del motor son presentadas,

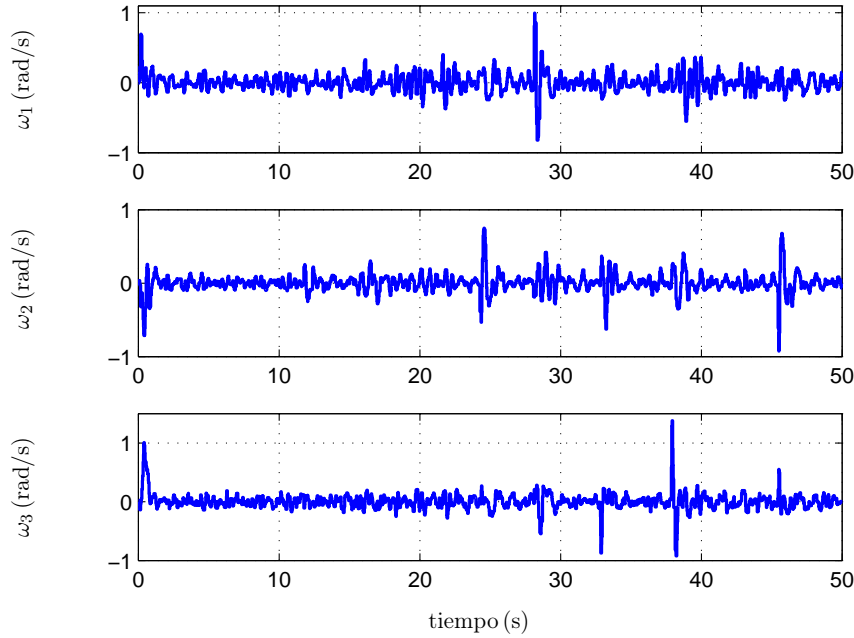


Figura 2.19: Ley de control del Corolario 1: evolución de la velocidad angular del cuerpo.

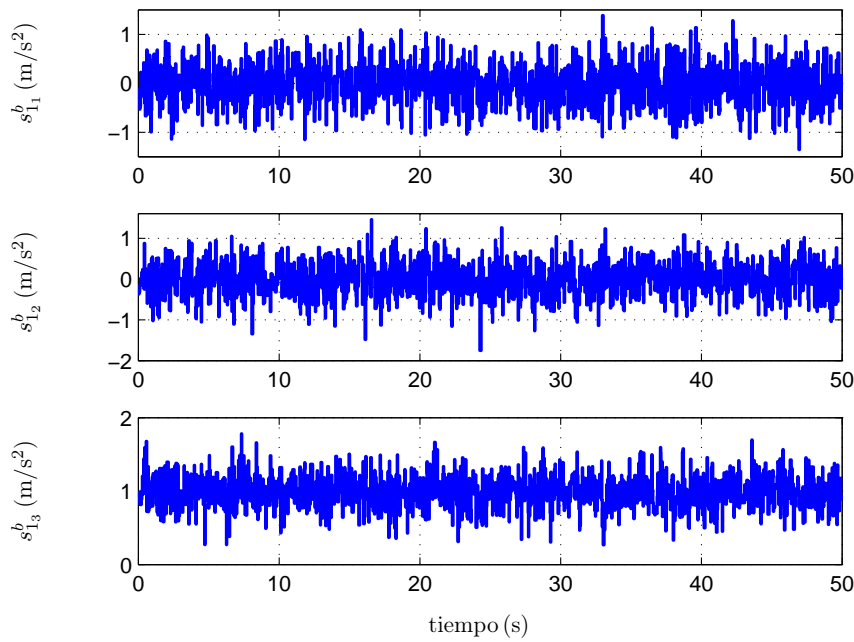


Figura 2.20: Ley de control del Corolario 1: evolución de las medidas del acelerómetro  $s_1^b$ .

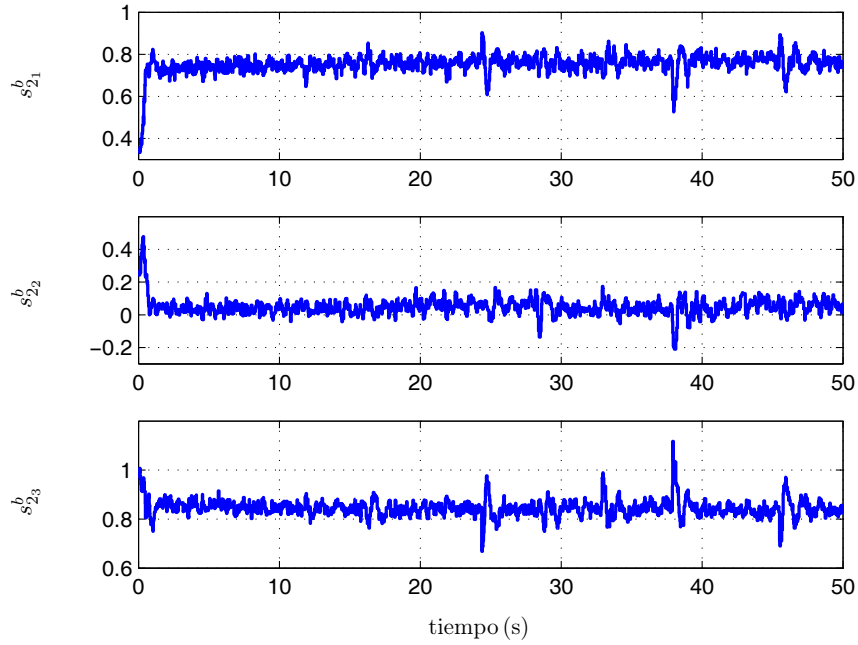


Figura 2.21: Ley de control del Corolario 1: evolución de las medidas del magnetómetro  $s_2^b$ .

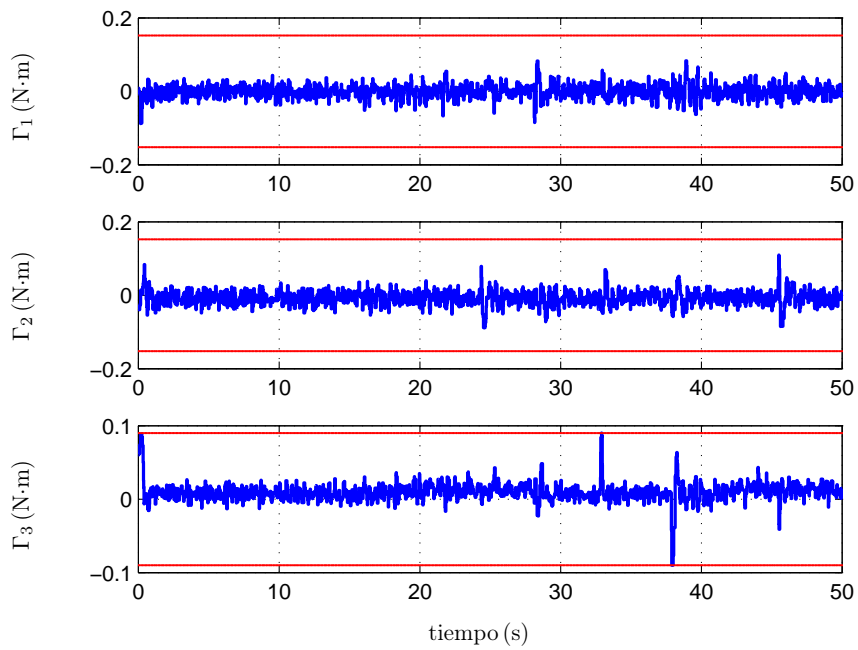


Figura 2.22: Torques de control acotados del Corolario 1. Las líneas rojas definen las cotas de los torques de control.

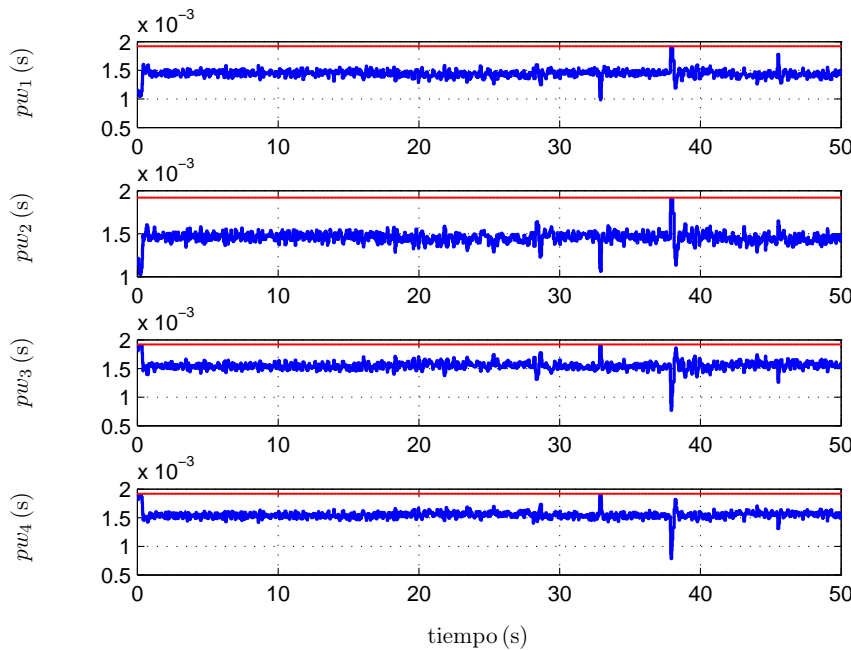


Figura 2.23: Ley de control del Corolario 1: ancho de pulso de las cuatro señales de control de los motores. Las líneas rojas definen las cotas del ancho de pulso.

respectivamente, en las figuras 2.24–2.29. La convergencia de los ángulos se alcanza en un tiempo aceptable (1.5 s). Las variaciones de las señales de torques de control son más pronunciadas en relación con la ley de control del corolario 1. Esto es debido a las perturbaciones inducidas por el vector de observación usado para reconstruir la velocidad angular. Note que los vectores de observación son más ruidosos que los giróscopos. Sin embargo, el efecto de las oscilaciones se reduce cuando se aplica al cuadrirotor, debido a que la señal de control es filtrada por los motores. Esto puede ser explicado por el hecho de que un motor DC es equivalente a un integrador que se comporta como un filtro pasa bajas o un filtro de promedio. Como en los ángulos, la evolución de la velocidad angular se presenta sólo para efectos de claridad, esta no es usada para cálculos de la ley de control.

La presente ley de control es probada con respecto a algunas perturbaciones. Note que las perturbaciones producen un gran error en los ángulos, así como en la velocidad angular, hacen que las señales de control  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_3$  alcancen sus límites. Evidentemente, el control actúa sobre el sistema para superar las perturbaciones, mientras solo las señales de control factibles son aplicadas al sistema. Este caso de estudio muestra que el controlador propuesto en este trabajo es robusto con respecto a perturbaciones externas. La ley de control maximiza la efectividad de los actuadores sin poner en riesgo la estabilidad del sistema. Esta propiedad de robustez es esencial en misiones reales, donde fuerzas aerodinámicas y otros factores están presentes.

Con esto se da por finalizado este capítulo, se puede observar que las propuestas de control tiene un buen rendimiento, sin embargo no se pueden utilizar como el sistema

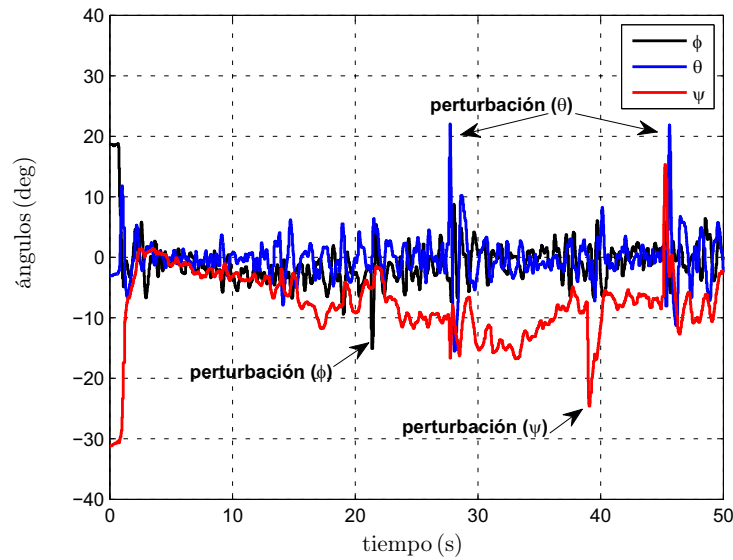


Figura 2.24: Ley de control del corolario 2: evolución de los ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada.

principal debido a la sensibilidad que tiene con respecto a la vibración que registra el acelerómetro, esto no impide usarlo como un sistema de apoyo en caso de fallas de un motor o que uno de los sensores deje de funcionar, este control haría posible su aterrizaje de emergencia sufriendo el menor daño posible del sistema. En el último capítulo se presentará, junto con el control de traslación, una propuesta adicional de control de orientación la cual no presenta los problemas mencionados.

El trabajo presentado en este capítulo ha sido publicado en la revista *Micromachines* bajo el título “Biomimetic-Based Output Feedback for Attitude Stabilization of Rigid Bodies: Real-Time Experimentation on a Quadrotor” (ver [107]).

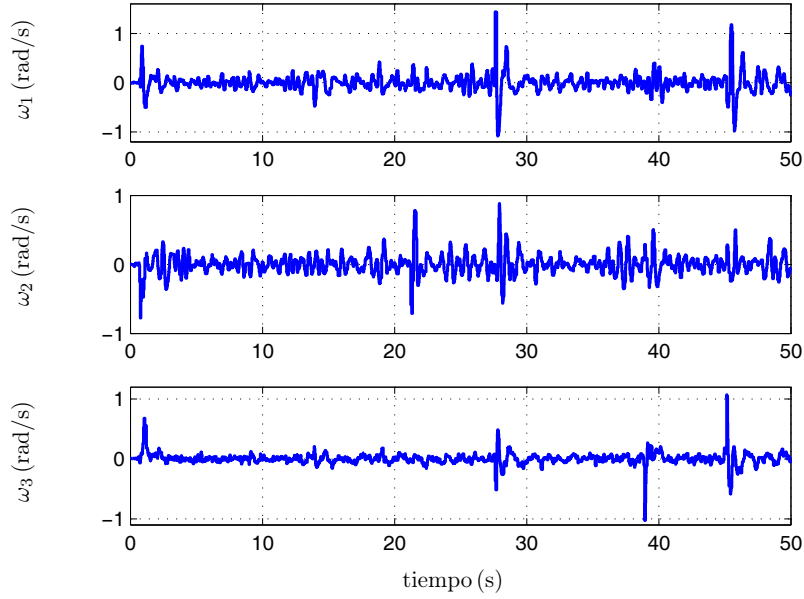


Figura 2.25: Ley de control del corolario 2: evolución de la velocidad angular del cuerpo.

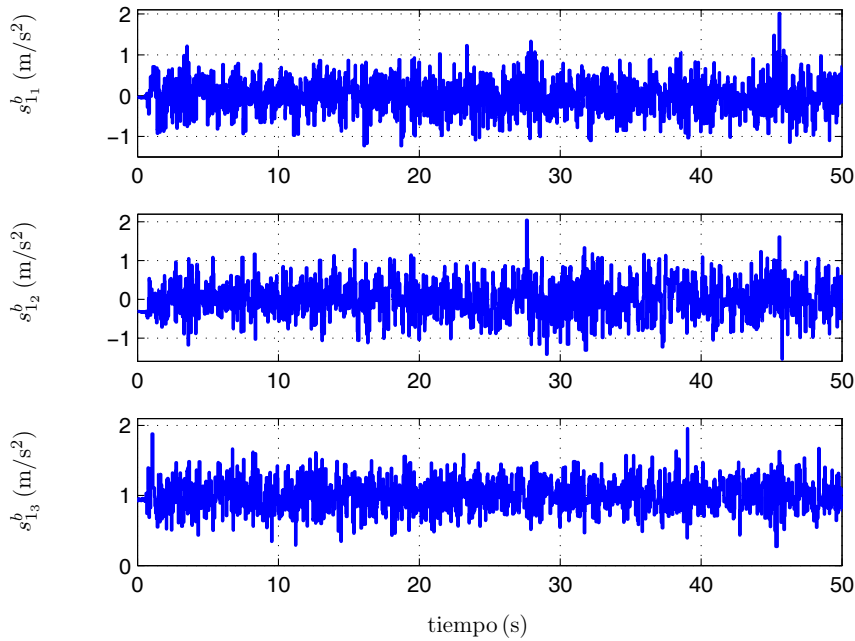


Figura 2.26: Ley de control del corolario 2: evolución de las medidas del acelerómetro  $\mathbf{s}_1^b$ .

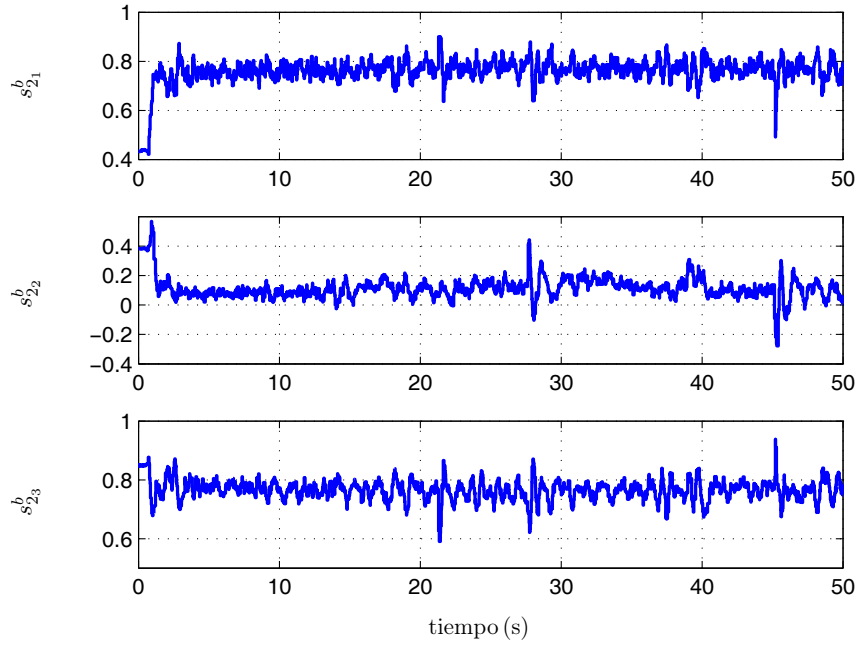


Figura 2.27: Ley de control del corolario 2: evolución de las medidas del magnetómetro  $s_2^b$ .

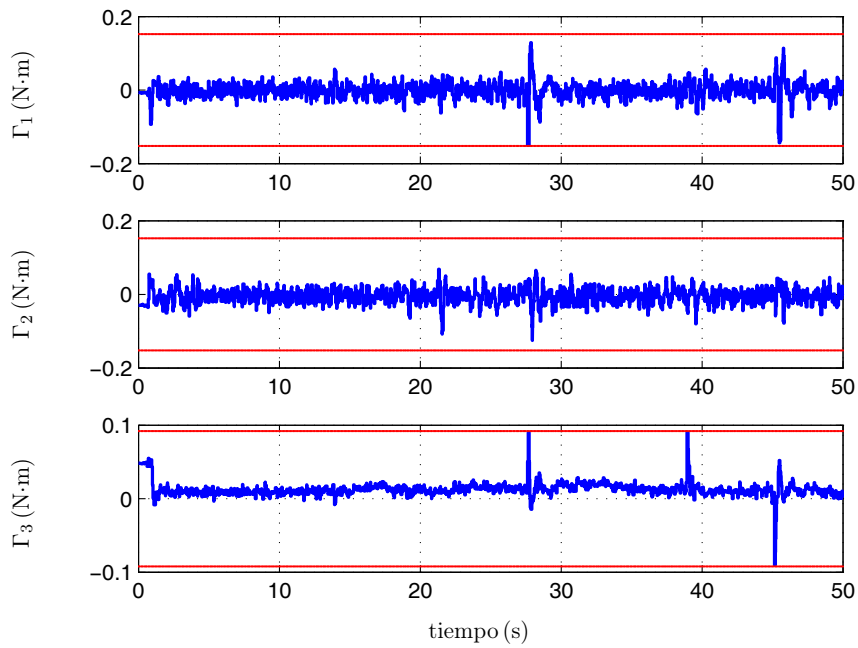


Figura 2.28: Torques de control acotados del corolario 2. Las líneas rojas definen las cotas de los torques de control.

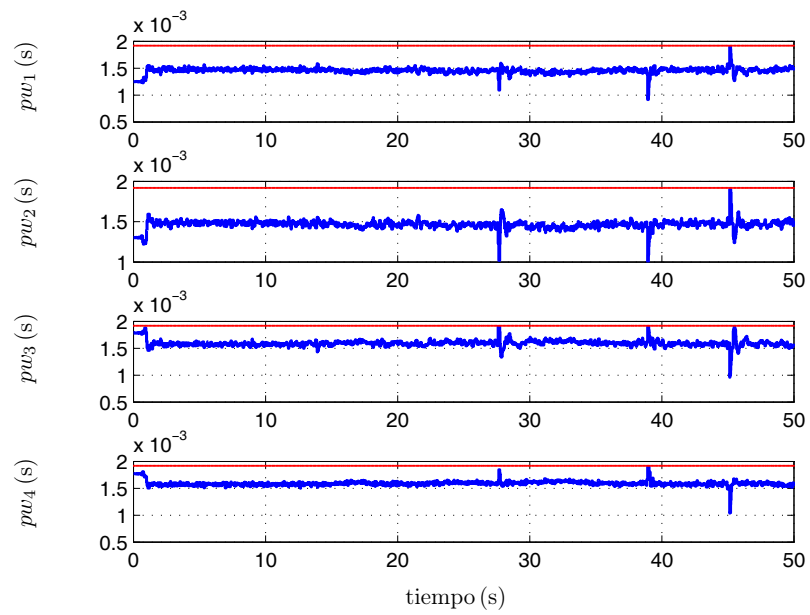


Figura 2.29: Ley de control del corolario 2: ancho de pulso de las cuatro señales de control de los motores. Las líneas rojas definen las cotas del ancho de pulso.

## Capítulo 3

# Estabilización global de integradores múltiples con controles acotados y posicionamiento dinámico de polos

En este capítulo se muestra el desarrollo de una propuesta de control para sistemas que se pueden expresar en la forma de cadena de integradores. El objetivo principal que se busca con este desarrollo es contar con una ley de control con entradas acotadas que estabilice globalmente este tipo de sistemas. Esto es debido a que se pretende dividir el movimiento de traslación de los sistemas tipo VTOL en subsistemas tipo cadena de integradores. Con esto se tiene una ley de control para incidir sobre el movimiento de traslación de los sistemas de interés en este trabajo de tesis.

En las últimas décadas varios métodos han sido propuestos para el diseño de este tipo de controladores, algunos de ellos se pueden consultar en [83], [108] y la edición especial [109]. Ejemplos importantes son las propuestas basadas en técnicas de control lineal. En la compensación anti-windup, primero se diseña una realimentación lineal mientras se ignora la entrada no lineal para después agregar una realimentación de compensación que minimize su efecto ([110], [111]). Desafortunadamente, como menciona Megretski, rara vez se hace un análisis riguroso de estabilidad y robustez debido a su complejidad. También se puede mencionar el desarrollo de leyes de control de baja ganancia que consisten en la saturación de un control lineal usualmente obtenido de la resolución de una ecuación de Riccati ([112], [113], [114], [115]), se sabe que no se puede alcanzar estabilidad global para sistemas de dimensión  $n \geq 3$  ([116]) y para disfrazar este inconveniente se propone sintonizar la ecuación de Riccati con algún parámetro  $\varepsilon$  que se pueda adaptar en línea ([112], [113], [117]), con lo que se consigue estabilidad global y mejora el rendimiento en términos de convergencia. Desafortunadamente, se vuelve un problema de optimización convexa que a cada paso necesita resolver una ecuación de Riccati lineal, lo que es muy caro en términos de cálculo.

Por otra parte, se han desarrollado propuestas completamente no lineales. Estas fueron iniciadas por [92], quien propone un control basado en funciones de saturación anidadas para la estabilización de cadena de integradores. A partir de este, varios trabajos fueron de-

sarrollados extendiendo los resultados a sistemas lineales controlables en general con diferencia en el tipo de realimentación [82], o una manipulación en los límites de las mediciones [118]. Una propiedad común de este tipo de leyes de control es su extremada simplicidad comparada con otras propuestas. Además, como se menciona en [119], en un artículo de comparación para el caso del doble integrador, la propuesta no lineal muestra buen comportamiento en términos de robustez y degradación de rendimiento. Desgraciadamente, para sistemas de dimensión mayor a 2 el rendimiento en lazo cerrado se degrada. La eficiencia y la simplicidad de las propuestas no lineales han alentado una mayor exploración en este campo, como en [93], donde se ha generalizado el resultado a sistemas de grado  $n$  modificando la realimentación, garantizando la estabilidad global del sistema en lazo cerrado y mejorando el rendimiento de la ley de control en [82]. Lo anterior es posible por la modificación del valor del parámetro  $\varepsilon$  y fundamentalmente por el recálculo de los límites de la función de saturación con los que trabaja el control. Un camino distinto que también se ha explorado a partir de [92], es la modificación del valor de los polos del sistema cuando ocurre la saturación [120], lo cual también mejora el rendimiento de la ley de control. Parte de esta propuesta será empleada para diseñar la propuesta de ley de control de traslación, con lo que se pretende obtener el control global que pueda ser utilizada en el movimiento de vehículos VTOL.

### 3.1. Sistemas en cadena de integradores

Una cadena de integradores está definida por

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \tag{3.1}$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es tal que  $a_{ij} = 1$  si  $j = i + 1$  y  $a_{ij} = 0$  en otro caso,  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  es tal que  $b_i = 0$  para  $i = 1, \dots, n - 1$  y  $b_n = 1$ ,  $n$  es la dimensión del sistema y  $u$  corresponde a la entrada de control. Estos sistemas conforman un subconjunto de una clase de sistemas que son llamados *asintóticamente de controlabilidad nula con controles acotados* ([82] y [83]). Esta propiedad se muestra en [84] y es equivalente a un sistema que es estabilizable y que tiene todos sus polos en lazo abierto en el semiplano izquierdo, es decir, la parte real del número complejo que lo expresa es negativa.

El tema aquí tiene que ver con la estabilización global de un sistema del tipo expresado por la ecuación (3.1) donde el valor del control  $u$  está restringido a satisfacer

$$u \in [-\bar{u}, \bar{u}], \tag{3.2}$$

donde  $\bar{u}$  es algún número real estrictamente positivo conocido a priori.

El estudio de tales sistemas está motivado en el hecho de que es común encontrar un problema de control no lineal fundamental por la saturación de los actuadores. En realidad, todos los dispositivos de control están sujetos a restricciones de amplitud, fuerzas, torques,

impulsos, voltajes, corrientes, flujos, velocidades y todas las entradas físicas en cada tecnología de aplicación de control en la realidad y en ciertos rangos, están restringidas. Por lo tanto, el diseño de controladores para sistemas con restricciones es una necesidad para profesionales en el estudio teórico y de aplicación en ingeniería.

Antes de mostrar el proceso de diseño de la propuesta de ley de control, es necesario establecer algunas definiciones, a saber, el factor de escala  $\sigma$  que se utiliza aquí tiene la forma

$$\sigma := \frac{\bar{u}}{\sum_{i=1}^n a_i}, \quad (3.3)$$

donde los  $a_i$  (con  $i = 1, 2, \dots, n$ ) son los polos del sistema y serán definidos mas adelante. Adicionalmente, la aplicación de la transformación lineal

$$\mathbf{y} := \frac{1}{\sigma} C \mathbf{x} \quad (3.4)$$

sobre  $\mathbf{x}$ , se hace posible al obtener la forma de la matriz  $C = (\mathbf{C}_1 \ \mathbf{C}_2 \ \dots \ \mathbf{C}_n)$  (donde los  $\mathbf{C}_i$  son vectores columna con  $n$  elementos), lo cual se logra a través del conjunto de relaciones siguiente

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (\lambda + a_i) &= p_0 + p_1 \lambda + \dots + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n \\ \mathbf{C}_n &= B_{cl}, \\ \mathbf{C}_{n-1} &= (A_{cl} + p_{n-1} I) B_{cl}, \\ \mathbf{C}_{n-2} &= (A_{cl}^2 + p_{n-1} A_{cl} + p_{n-2} I) B_{cl}, \\ &\vdots \\ \mathbf{C}_1 &= (A_{cl}^{n-1} + p_{n-1} A_{cl}^{n-2} + \dots + p_1 I) B_{cl}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde  $A_{cl}$  y  $B_{cl}$  son las matrices de sistema y de control en lazo cerrado que se obtiene al aplicar la transformación mostrada en la ecuación (3.6), y que serán necesarias para que este sistema sea global y asintóticamente estable. Estas matrices tienen la siguiente forma

$$A_{cl} = \begin{pmatrix} -a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad B_{cl} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Al establecer estas definiciones, se está en condiciones de pasar a mostrar el desarrollo de la ley de control propuesta.

---

## 3.2. Propuesta de control

En esta sección se presenta la propuesta de control dividida en dos partes. En la primera parte se expone el control acotado y se realiza la prueba de estabilidad mediante el formalismo de Lyapunov, en la segunda parte se explica la manera en que se usa el procedimiento de posicionamiento dinámico de polos para aumentar el rendimiento del control propuesto.

### 3.2.1. Control acotado con posicionamiento de polos

El control propuesto es considerado no lineal y está inspirado en los trabajos [93], [82] y [92], la forma que tiene está descrita en el siguiente teorema.

**Teorema 3.** *Considere la cadena de integradores descrita por la ecuación (3.1). Sean  $a_j$  los polos del sistema tales que  $0 < a_j < \bar{a}$ , con  $\bar{a}$  siendo también un número real estrictamente positivo conocido a priori, y definiendo*

$$a_j = \frac{a_1}{(\eta + 1)^{j-1}}, \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.7)$$

donde  $\eta \geq 1$ . Entonces, para cualquier condición inicial, el control  $u$  definido por

$$u = -\sigma \sum_{i=1}^n a_{n-i+1} \text{sat}_1(y_i), \quad (3.8)$$

con  $y$  obtenida por el conjunto de relaciones establecidas en la ecuación (3.5), estabiliza global y asintóticamente al sistema descrito por la ecuación (3.1).

La prueba del teorema mostrado arriba es realizada mediante la aplicación del formalismo de Lyapunov, la cual fue utilizada en el capítulo anterior, de la forma como se muestra a continuación

**Prueba 5.** *La matriz  $C$  establecida por las relaciones (3.5) transforma el sistema (3.1) como sigue*

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a_{n-1}y_2 + a_{n-2}y_3 + \dots + a_1y_n + \frac{u}{\sigma}, \\ \dot{y}_2 &= a_{n-2}y_3 + \dots + a_1y_n + \frac{u}{\sigma}, \\ &\vdots \\ \dot{y}_{n-1} &= a_1y_n + \frac{u}{\sigma}, \\ \dot{y}_n &= \frac{u}{\sigma}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde

$$A_y = \begin{pmatrix} 0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_y = \begin{pmatrix} 1/\sigma \\ 1/\sigma \\ \vdots \\ 1/\sigma \\ 1/\sigma \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Suponiendo que  $|y_n| > 1$  se probará que  $y_n$  entra en el intervalo  $[-1, 1]$  en un tiempo finito. Considere la función candidata de Lyapunov  $V_n := \frac{1}{2}y_n^2$ , la derivada con respecto al tiempo de esta función está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= y_n \dot{y}_n = y_n \frac{u}{\sigma} \\ &= -y_n a_1 \text{sat}_1(y_n) - y_n [a_2 \text{sat}_1(y_{n-1}) + \dots + a_n \text{sat}_1(y_1)]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

El decremento de la función de Lyapunov  $V_n$  se mantiene si  $a_1 > \sum_{i=2}^n a_n$ , esto es asegurado por la forma en que ha sido definido en la ecuación (3.7), entonces  $y_n$  necesariamente entra en el intervalo  $[-1, 1]$  en un tiempo finito. Por lo tanto  $V_n$  es estrictamente decreciente si  $|y_n| > 1$ . Esto también quiere decir que  $y_n$  no está saturada, por lo tanto, considerando las ecuaciones (3.9), estas se convierten en

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a_{n-1}y_2 + a_{n-2}y_3 + \dots + a_2y_{n-1} + \underline{a_1y_n} + [-\underline{a_1y_n} - a_2 \text{sat}_1(y_{n-1}) - \dots - a_n \text{sat}_1(y_1)], \\ \dot{y}_2 &= a_{n-2}y_3 + \dots + a_2y_{n-1} + \underline{a_1y_n} \quad + [-\underline{a_1y_n} - a_2 \text{sat}_1(y_{n-1}) - \dots - a_n \text{sat}_1(y_1)], \\ &\vdots \\ \dot{y}_{n-1} &= \underline{a_1y_n} + [-\underline{a_1y_n} - a_2 \text{sat}_1(y_{n-1}) - \dots - a_n \text{sat}_1(y_1)], \\ \dot{y}_n &= -a_1y_n - a_2 \text{sat}_1(y_{n-1}) - \dots - a_n \text{sat}_1(y_1), \end{aligned} \quad (3.12)$$

Usando el razonamiento anterior,  $y_{n-1}$  también entrará en el intervalo  $[-1, 1]$  en un tiempo finito. Por lo tanto, después de algún tiempo, todos los estados  $y_i$  entrarán en el intervalo  $[-1, 1]$  donde el sistema es lineal, en el conjunto de ecuaciones mostradas en (3.12) los términos son removidos sucesivamente, de tal manera que eventualmente se tiene

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

donde los eigenvalores  $\{-a_n, -a_{n-1}, \dots, -a_1\}$  son estrictamente negativos. El sistema es entonces global y asintóticamente estable, lo que termina la prueba.

Con la prueba anterior la estabilización del sistema ha sido demostrada. Es posible aumentar su rendimiento a través de la manipulación de los polos del sistema de la manera que se explica en el siguiente apartado.

### 3.2.2. Posicionamiento dinámico de polos

Se puede observar del desarrollo realizado anteriormente que el valor de los polos  $a_i$  tomados como coeficientes en las funciones de saturación del control, pueden modificar la velocidad de convergencia de los estados del sistema  $y_i$ . En [93] se limitan a calcular estos coeficientes usando un valor dado  $\varepsilon$  manteniéndolos invariantes en el tiempo. La primera propuesta está basada en lo anterior y se mantienen los valores de los límites de saturación iguales a la unidad, mientras la segunda propuesta se enfoca en recalcular el valor de los límites de saturación para aprovechar la no linealidad del sistema. Un problema puede ocurrir si el último estado en converger juega un papel importante en la estabilización del sistema, debido a que el valor de su coeficiente es bastante pequeño y esto hará mas lenta su convergencia.

En el desarrollo planteado a continuación se mantiene el valor de los límites de la saturación y la atención se centra en el cambio de la magnitud de los coeficientes de manera que el tiempo de convergencia pueda ser disminuido. La forma en cómo se logra lo descrito anteriormente se muestra a continuación.

Los coeficientes se definen como en la ecuación (3.7) y satisfacen la condición siguiente

$$\begin{aligned}
 a_1 &> a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n, \\
 a_2 &> a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n, \\
 &\vdots \\
 a_{n-2} &> a_{n-1} + a_n, \\
 a_{n-1} &> a_n.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

la cual es importante pues asegura la estabilidad del sistema.

Cuando el estado  $y_n$  entra en el intervalo  $[-1, 1]$ , el valor de  $a_1$  deja de ser trascendental, la atención se centra ahora en el estado  $y_{n-1}$ , el cual no tiene que satisfacer la primera restricción mostrada en el conjunto de desigualdades (3.14) pero si la segunda. Entonces, con el fin de acelerar la convergencia de los estados  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) y al mismo tiempo cumplir con las restricciones establecidas, los valores  $a_i$  pueden ser reasignados como sigue

$$a_n = a_{n-1}, a_{n-1} = a_{n-2}, \dots, a_3 = a_2, a_2 = a_1. \tag{3.15}$$

Es posible aplicar este mismo procedimiento cuando cada uno de los estados  $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_2$  entran al intervalo  $[-1, 1]$ , al final todas las magnitudes  $a_i$  serán iguales a

---

### 3.3. UN EJEMPLO DE APLICACIÓN: EL CASO DEL TRIPLE INTEGRADOR

---

la magnitud de  $a_1$ , la magnitud de mayor valor. Al aplicar el procedimiento mostrado anteriormente, se obtiene que la velocidad de convergencia del sistema entero es incrementada, y por lo tanto el rendimiento del control mejora.

Es importante notar que este simple procedimiento solo requiere de unas cuantas líneas de programación para verificar cuando el estado  $y_i$  se vuelve lineal y entonces cambiar el valor de los coeficientes. No requiere ningún cálculo adicional, mientras que la segunda propuesta de [93] se basa en un recálculo de los límites de saturación  $(M_{n-1}, M_{n-2}, \dots, M_1)$ , lo que incrementa el tiempo de procesamiento.

Se puede observar que el mejor control propuesto en el artículo de referencia y el presentado aquí son similares. Una diferencia es la forma en la cual los coeficientes son determinados. Sin embargo, la diferencia fundamental en esta propuesta es que el valor de los coeficientes es modificado y se mantienen los límites de la saturación sin violar la condición mostrada en las ecuaciones (3.14) que asegura la estabilidad del sistema.

### 3.3. Un ejemplo de aplicación: el caso del triple integrador

En esta sección se expone un ejemplo de la forma en que es aplicada la propuesta de ley de control para el caso del triple integrador y se hace una comparación con algunas propuestas mostradas en [93]. Para esto, se considera una cadena de tres integradores con un control  $u$  tal que  $|u| \leq 1$  de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad (3.16)$$

entonces, para  $n = 3$ , el sistema de la ecuación (3.16) en lazo cerrado será global y asintóticamente estable si sus matrices de estado  $A_{cl}$  y de control  $B_{cl}$  tienen la forma

$$A_{cl} = \begin{pmatrix} -a_3 & 0 & 0 \\ -a_3 & -a_2 & 0 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad B_{cl} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Para conseguir lo anterior, se hace uso de la transformación lineal  $\mathbf{y} := \frac{1}{\sigma} C \mathbf{x}$ . La matriz de transformación  $C$  se obtiene mediante el conjunto de relaciones (3.5) que para este caso son de la forma

$$\begin{aligned} (\lambda + a_1)(\lambda + a_2)(\lambda + a_3) &= p_0 + p_1\lambda + p_2\lambda^2 + \lambda^3, \\ \mathbf{C}_3 &= B_{cl}, \\ \mathbf{C}_2 &= (A_{cl} + p_2 I) B_{cl}, \\ \mathbf{C}_1 &= (A_{cl}^2 + p_2 A_{cl} + p_1 I) B_{cl}, \end{aligned} \quad (3.18)$$


---

donde  $C$  estará dada por  $C = (\mathbf{C}_1 \ \mathbf{C}_2 \ \mathbf{C}_3)$ . Desarrollando estas ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} p_1 &= a_3 a_2 + a_3 a_1 + a_2 a_1, \\ p_2 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ C &= \begin{pmatrix} a_2 a_1 & a_1 + a_2 & 1 \\ 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Aplicando  $\mathbf{y} := \frac{1}{\sigma} C \mathbf{x}$ , se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sigma} [a_2 a_1 x_1 + (a_1 + a_2) x_2 + x_3], \\ y_2 &= \frac{1}{\sigma} [ \quad \quad \quad a_1 x_2 + x_3], \\ y_3 &= \frac{1}{\sigma} [ \quad \quad \quad x_3], \end{aligned} \quad (3.20)$$

derivando este sistema con respecto al tiempo y tomando en cuenta las relaciones aquí y en la ecuación (3.16), se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a_2 y_2 + a_1 y_3 + \frac{u}{\sigma}, \\ \dot{y}_2 &= \quad \quad \quad a_1 y_3 + \frac{u}{\sigma}, \\ \dot{y}_3 &= \quad \quad \quad \frac{u}{\sigma}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde

$$A_y = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_y = \begin{pmatrix} 1/\sigma \\ 1/\sigma \\ 1/\sigma \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Al sistema (3.21) se aplica un control como el mostrado en la ecuación (3.8), que para  $n = 3$ , toma la forma

$$u = -\sigma [a_3 \text{sat}_1(y_1) + a_2 \text{sat}_1(y_2) + a_1 \text{sat}_1(y_3)]. \quad (3.23)$$

Cuando este control actúa sobre el sistema (3.21), el lazo es cerrado y provoca que cada uno de los estados del sistema se estabilicen en el valor cero, en consecuencia, en algún momento, cada uno de ellos deja de estar saturado en el control. Eventualmente, cuando todos los estados del sistema en el control dejan de estar saturados, el sistema (3.21) toma la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_3 & 0 & 0 \\ -a_3 & -a_2 & 0 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

similar al sistema mostrado en (3.13), donde se observa la matriz de estado  $A_{cl}$  de la ecuación (3.17) que se necesitaba. Entonces los eigenvalores  $\{-a_3, -a_2, -a_1\}$  son estrictamente negativos, por lo que el sistema es global y asintóticamente estable, como se quería al principio.

### 3.3.1. Cálculo de los polos de la cadena de integradores de orden $n = 3$ y uso del posicionamiento dinámico de polos

Para realizar la simulación de este ejemplo se tomaron los valores de  $\eta = 0,62$  y  $a_1 = 1,2$ , y de acuerdo a la ecuación (3.7) se tienen los valores de los polos como sigue

$$a_1 = 1,2, \quad a_2 = 0,741, \quad a_3 = 0,457, \quad (3.25)$$

estos polos o combinaciones de ellos juegan el papel de coeficientes de los estados del sistema  $y_i$  (con  $i = 1, 2, 3$ ) como se puede observar en el sistema (3.20). El aspecto importante aquí es que también juegan el papel de coeficientes de las funciones de saturación en la Ley de control mostrada en la ecuación (3.23), donde pueden incidir en gran medida en la velocidad de convergencia de los estados del sistema  $y_i$ , que es lo que interesa para el procedimiento siguiente.

Con el posicionamiento dinámico de polos se intenta aprovechar esta última característica y aumentar el rendimiento del control. Esto porque puede suceder que el estado del sistema que interesa que converja con mayor rapidez ( $y_1$  por ejemplo), lo haga mas lentamente debido a las restricciones mostradas en las ecuaciones (3.14), necesarias para asegurar la estabilidad del sistema, pero que asignan el valor del polo mas pequeño ( $a_3$ ) como coeficiente de la función de saturación de interés, lo que hace lenta su convergencia con lo que el rendimiento del control se ve mermado.

La idea entonces radica en modificar los valores de los polos del sistema de forma estructurada y respetando estrictamente las restricciones de las ecuaciones (3.14). Así, la propuesta aquí es que este procedimiento se realiza con un programa que verifica los estados del sistema expresados en las ecuaciones (3.20), cuando el estado  $y_3$  entra al intervalo  $[-1, 1]$  deja de estar saturado y el valor de su coeficiente  $a_1$  deja de ser trascendente entonces, respetando la restricción de las ecuaciones (3.14), la siguiente reconfiguración es realizada

$$a_3 = a_2, \quad a_2 = a_1, \quad (3.26)$$

así mismo, cuando el estado  $y_2$  deja de estar saturado, el valor de su coeficiente  $a_2$  deja de ser trascendente, entonces es posible hacer

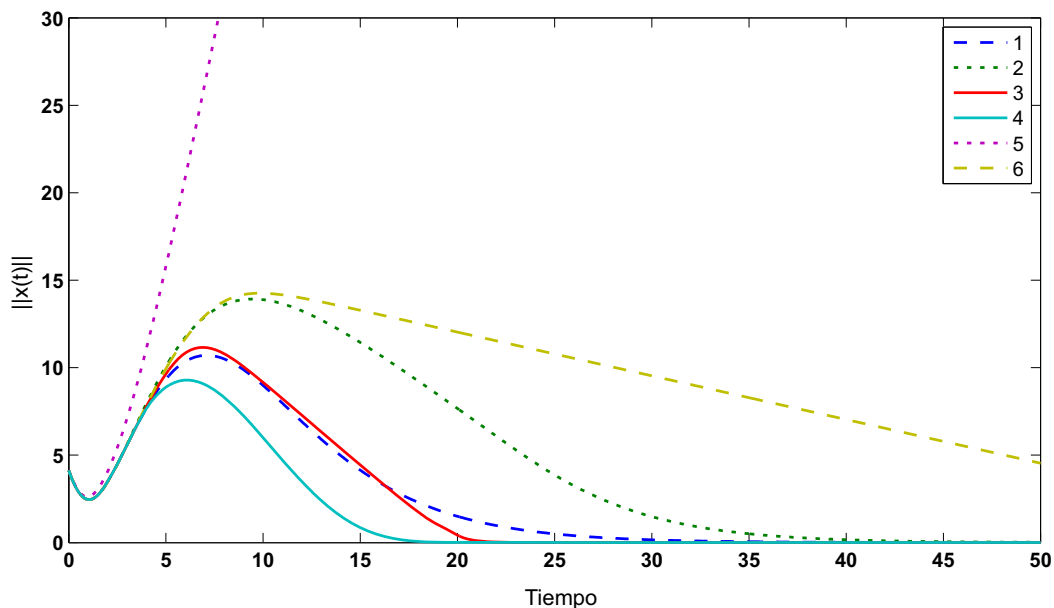


Figura 3.1: Control del integrador de tercer orden. Evolución de  $\|\mathbf{x}(t)\|$  para una condición inicial  $x_0 = (2; -2; 3)^T$ ,  $\varepsilon = 0,618$ ,  $a_1 = 1,2$  y  $\eta = 0,62$ , con posicionamiento dinámico de polos. 1.- [93] (teorema 3), 2.- [93] (teorema 1), 3.- Propuesta, 4.- [112]/[121], 5.- [82], 6.- [92].

$$a_3 = a_1, \tag{3.27}$$

con lo que, al final, todos los coeficientes de los estados en la ley de control tendrán la magnitud de mayor valor, es decir  $a_3 = a_2 = a_1$ , así es posible reducir el tiempo de convergencia para cada estado del sistema.

Para probar la efectividad de esta propuesta, se ha hecho una simulación usando este procedimiento y se ha comparado con varias de las propuestas mostradas en [93]. Los resultados son mostrados en la figura 3.1. El efecto de la propuesta de control mostrada aquí sobre el comportamiento del sistema se puede apreciar en la última parte de su gráfica en la figura referida.

Gráficas que muestran el comportamiento de los estados del sistema triple integrador, así como el accionar de los controles propuestos en la figura 3.1 se muestran en las figuras 3.2-3.7. Para el caso de los estados del sistema,  $x_1$  es la línea de guiones,  $x_2$  es la línea de guiones-puntos y  $x_3$  es la línea continua.

Las figuras 3.2 y 3.3 muestran el comportamiento del sistema y los controles de los teoremas 3 y 1 de [93], respectivamente. Se puede observar que ambos son parecidos en la forma, pero el del teorema 3 requiere de un menor tiempo para la convergencia y la magnitud del control es un poco mayor. El actuar de la propuesta de control descrita en este capítulo junto con el comportamiento de los estados del sistema se muestran en la

### 3.3. UN EJEMPLO DE APLICACIÓN: EL CASO DEL TRIPLE INTEGRADOR

---

figura 3.4. En cuanto a los estados del sistema es parecido a los anteriores, excepto en la parte final de la gráfica donde la convergencia se produce de una manera menos suave, con lo que se reduce el tiempo necesario para esta. En la parte del control se nota como este varía las magnitudes debido al cambio en magnitud de los coeficientes. En la figura 3.5, las gráficas correspondientes a [82] muestran un control no saturado que no actúa suficientemente sobre el sistema y por lo tanto, como se ve en la gráfica de estados,  $x_1$  tiende a converger en un tiempo mayor a 50 segundos con magnitudes casi iguales a 100. Algo parecido ocurre con la propuesta de [92], mostrada en la figura 3.6, aunque el tiempo de convergencia es menor pero mayor a 50 segundos para el estado  $x_1$ , en cuanto al control se nota su saturación y un mayor accionar sobre el sistema. Finalmente, la figura 3.7 muestra el comportamiento de los estados del sistema con el mejor control presentado aquí, todos los estados convergen en menos de 20 segundos gracias a un control saturado que actúa sobre él, el inconveniente radica en la necesidad de gran capacidad de cálculo para este control.

El desarrollo descrito anteriormente muestra la efectividad de la propuesta de control donde se ha conservado los valores de los polos y solo se realiza un reposicionamiento de estos de tal manera que sus magnitudes aumentan con lo que se aumenta la velocidad de convergencia y, por lo tanto, el tiempo de convergencia disminuye. La propuesta de control es probada en simulación y sus resultados comparados con propuestas similares presentadas en [93] donde es posible observar que, en términos de simplicidad en el control y efectividad de este, la propuesta planteada en este capítulo tiene un buen rendimiento y permite pensar que es una opción viable para intentar su implementación práctica así como su utilización parcial en la propuesta de traslación que se desarrollará en el siguiente capítulo.

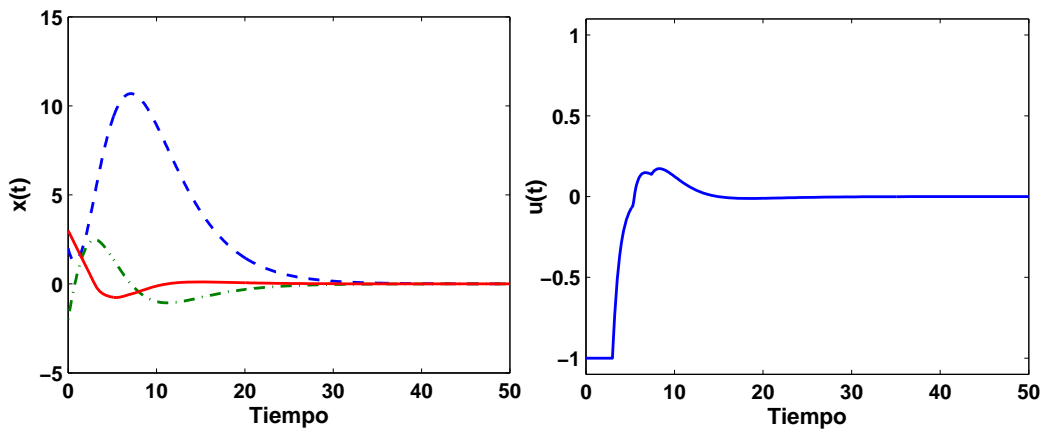


Figura 3.2: Evolución de los estados del sistema y el control propuesto en el teorema 3 de [93].

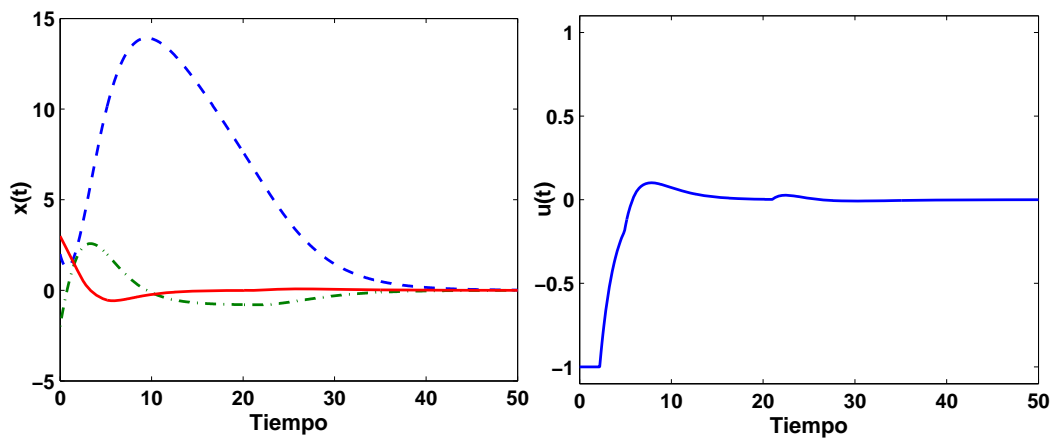


Figura 3.3: Evolución de los estados del sistema y el control propuesto en el teorema 1 de [93].

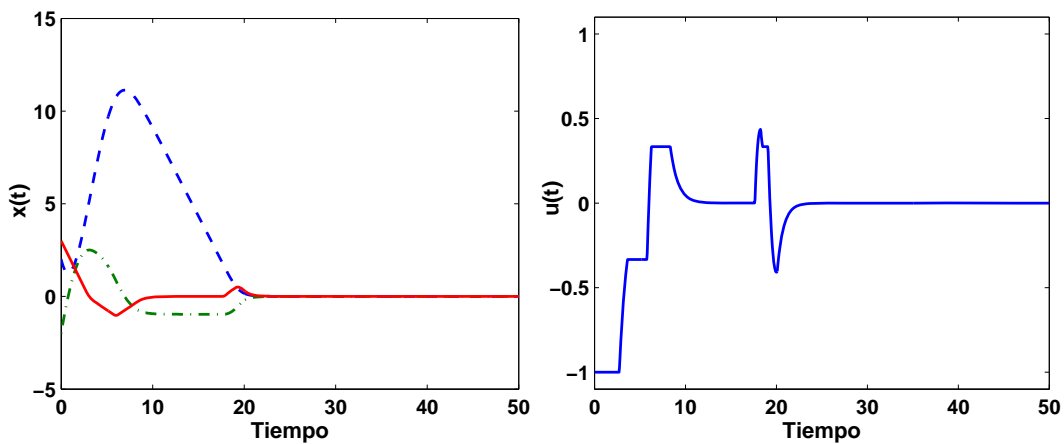


Figura 3.4: Evolución de los estados del sistema y el control propuesto aquí.

### 3.3. UN EJEMPLO DE APLICACIÓN: EL CASO DEL TRIPLE INTEGRADOR

---

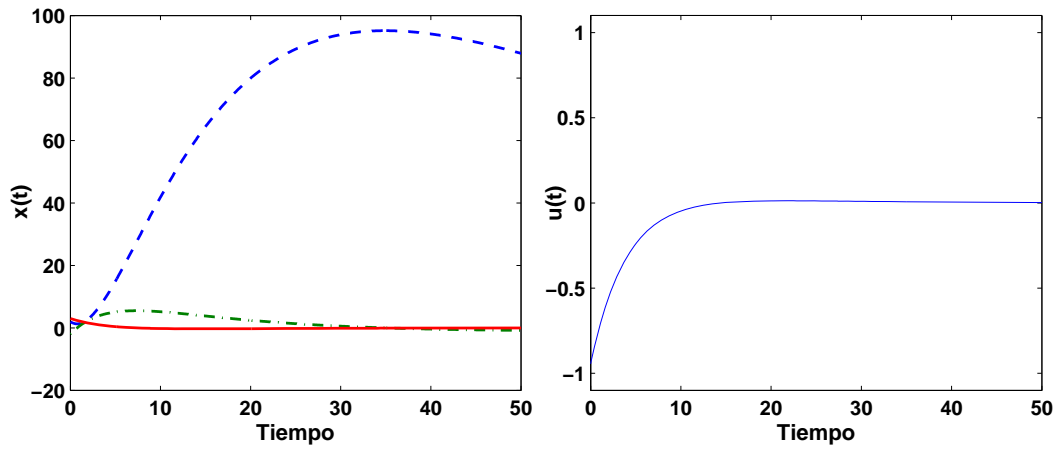


Figura 3.5: Evolución de los estados del sistema y el control propuesto en [82].

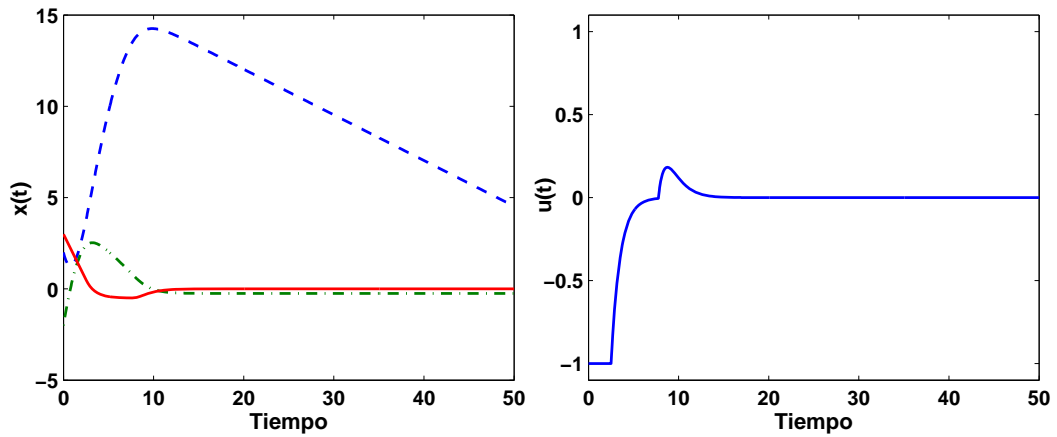


Figura 3.6: Evolución de los estados del sistema y el control propuesto en [92]

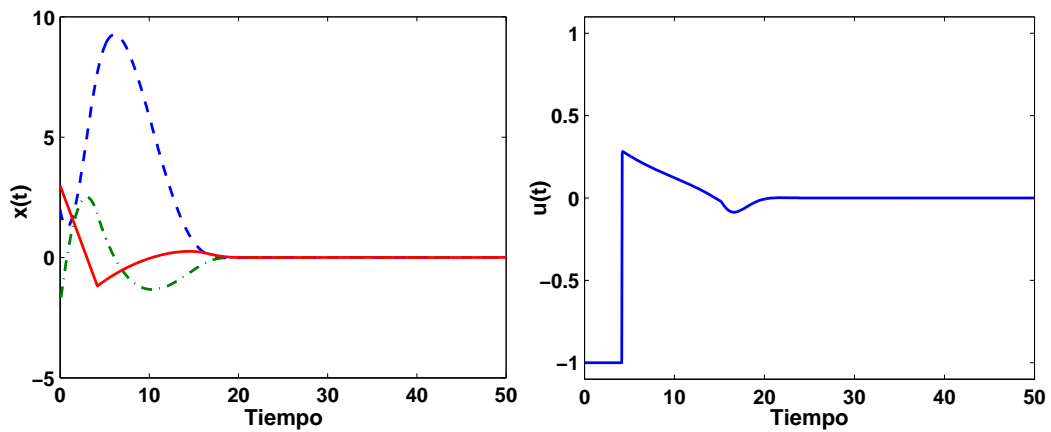


Figura 3.7: Evolución de los estados del sistema y el control propuesto en [112]/[121].



## Capítulo 4

# Diseño del control de traslación para vehículos VTOL

En el capítulo 2 se establecieron dos leyes de control para la estabilización de la orientación o actitud de los vehículos aéreos tipo VTOL. Como se mencionó en el capítulo 1, el modelo de estos vehículos representa dos sistemas en configuración de cascada; el que representa la dinámica de la orientación o actitud y el que representa la dinámica de la traslación. En términos de los sistemas en cascada la dinámica de traslación depende de la dinámica de orientación pero la dinámica de orientación no depende de la de traslación.

En este capítulo se incluye, además de la propuesta de control de posición, una propuesta de control de orientación distinta a las anteriores. El propósito de cambiar el control de orientación es contar con la seguridad de que el rendimiento del control de orientación será suficiente para obtener capacidad de seguimiento de trayectorias para el control de posición que se establecerá más adelante. Esta hace uso de una estrategia basada en la realimentación de estados, además considera disponibles los valores de estos (posición y velocidad angular). En este capítulo se presenta la propuesta de control de posición diseñada para los vehículos aéreos VTOL, en este diseño se toman en cuenta los desarrollos realizados en el capítulo anterior con el fin de tener mayor claridad en la propuesta de control. La dinámica de orientación será primeramente estabilizada a una orientación deseada utilizando la ley de control propuesta aquí, al mismo tiempo los ángulos  $(\phi, \theta)$  serán tomados como entradas de control intermedias para la dinámica de traslación que, junto con la fuerza de sustentación  $\mathbf{T}$ , permitirán la estabilización de la aeronave.

Se mostrará que la dinámica de traslación puede expresarse en la forma de una cadena de integradores, como se describe en el capítulo anterior, y aunque los VTOL son sistema no lineal, con el debido tratamiento, algunas técnicas aplicadas a sistemas lineales pueden ser aplicadas aquí.

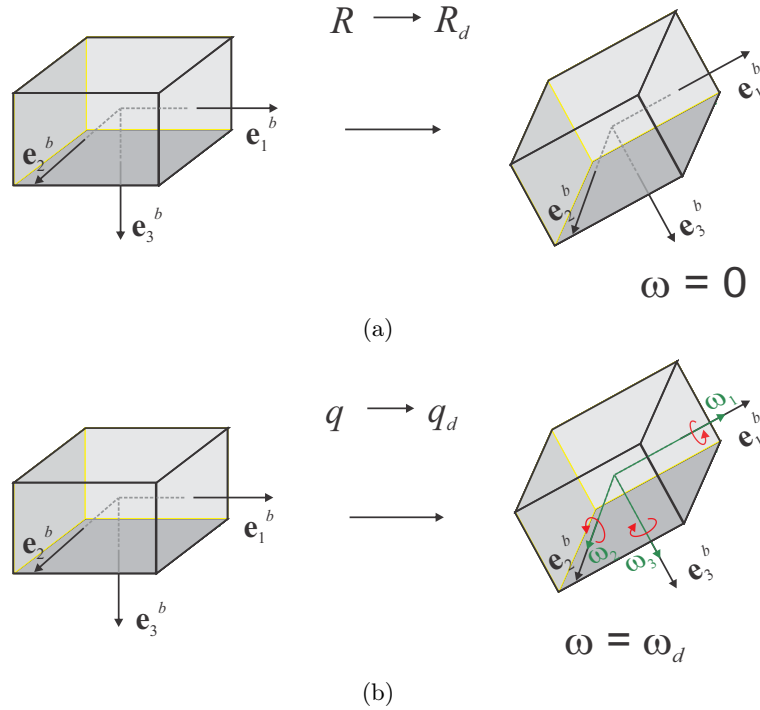


Figura 4.1: En (a) un esquema que muestra lo considerado en las propuestas de control mostradas en el capítulo 2, en (b) la nueva propuesta de control considera la velocidad angular deseada  $\omega_d$  en su estructura.

#### 4.1. Control de orientación

La primera parte del problema es resolver lo referente al control de orientación del vehículo, para esto se propone una combinación de los resultados presentados en [85] con la parte que se refiere a la suma de un torque deseado propuesto en [94], esta última parte se hace con el fin de tener en cuenta las velocidades angulares deseadas en el movimiento rotacional del vehículo, situación que no había sido tomada en cuenta en las propuestas de orientación presentadas en el capítulo 2 (ver figura 4.1), esto permitirá realizar seguimiento de trayectorias de orientación de tal manera que será posible realizar también seguimiento de trayectorias de posición una vez establecido el control de traslación.

Es necesario mencionar que, a diferencia de las propuestas de control de orientación presentadas en el capítulo 2, donde la parte cinemática del modelo matemático de rotación hacía uso de la matriz de rotación  $R$  que depende de los ángulos de Cardán, para la propuesta descrita a continuación se hará uso de las ecuaciones cinemáticas que dependen del cuaternión  $q$  y que han sido descritas en el capítulo 1, las cuales no se habían utilizado anteriormente, y proporcionan la ventaja de eliminar la singularidad que aparece al utilizar el formalismo de ángulos de Cardán, esto no debe causar confusión, pues ambas parametrizaciones describen el movimiento rotacional de forma equivalente. De esta manera, en lugar de utilizar la ecuación (1.95) para la descripción de la cinemática de rotación, en este caso

se hará uso de la ecuación (1.35) desarrollada en el capítulo 1, así, las ecuaciones que serán utilizadas aquí para describir el movimiento rotacional del vehículo cuadrirotor están dadas por

$$\dot{q} = \frac{1}{2}\Xi(q)\boldsymbol{\omega}, \quad (4.1)$$

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Gamma}. \quad (4.2)$$

donde  $q$  representa el cuaternión y como es posible observar de la ecuación (1.35)

$$\Xi(q) = \begin{pmatrix} -\mathbf{q}^T \\ I_3q_0 + M_{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$J$  es la matriz de inercia definida en la ecuación (1.61) y  $\boldsymbol{\omega}$  el vector de velocidad angular del vehículo con respecto al marco de referencia inercial  $\mathbf{E}^f$ . Adicionalmente, es necesario recordar la definición del error de orientación, expresado por la ecuación (1.36), y definir el error de velocidad angular, puesto que ambos serán necesarios en la propuesta descrita abajo, estos estarán dados de la forma siguiente

$$q_e = q \otimes q_d^{-1}, \quad (4.4)$$

$$\boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d, \quad (4.5)$$

donde  $q_d$  define la orientación deseada y  $\boldsymbol{\omega}_d$  el vector de velocidad angular deseada.

El objetivo principal, antes de pasar al diseño del control de traslación, es diseñar una ley de control de orientación tal que las entradas  $\boldsymbol{\Gamma}_j$  con  $j \in (1, 2, 3)$  cumplan

$$q \rightarrow q_d \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\omega} \rightarrow \boldsymbol{\omega}_d \quad (4.6)$$

y además se cumpla la relación

$$\dot{q}_d = \frac{1}{2}\Xi(q)\boldsymbol{\omega}_d. \quad (4.7)$$

Entonces se tiene la siguiente propuesta de control de orientación

**Proposición 1** *Considere la dinámica rotacional de los vehículos VTOL descrita por las ecuaciones (4.1)-(4.2) con las siguientes entradas de control acotadas  $\boldsymbol{\Gamma} = (\boldsymbol{\Gamma}_1 \quad \boldsymbol{\Gamma}_2 \quad \boldsymbol{\Gamma}_3)^T$  tales que*

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}_s + \boldsymbol{\Gamma}_d, \quad (4.8)$$

con

$$\Gamma_{s_j} = -\text{sat}_{\bar{\Gamma}_j} \left( \frac{\kappa \omega_{e_j}}{\rho_j} + \kappa q_{e_j} \right), \quad (4.9)$$

donde  $j \in \{1, 2, 3\}$  con  $\text{sat}_{\bar{\Gamma}_j}$  funciones de saturación definidas en (2.8).  $\bar{\Gamma}_j$  representa las cotas físicas del torque  $\Gamma_{s_j}$ ,  $\kappa$  es un parámetro real tal que  $0 < \kappa < \min_j \bar{\Gamma}_j / 2$ .  $\rho_j$  son parámetros reales estrictamente positivos.  $\omega_e$  y  $q_e$  representan el error de velocidad angular y orientación entre la velocidad angular actual y la deseada y entre la orientación actual y la deseada, respectivamente. El término  $\Gamma_d$  tiene la siguiente forma

$$\Gamma_d = J\dot{\omega}_d + \omega_d \times J\omega_d, \quad (4.10)$$

donde  $J$  es la matriz de inercia del vehículo y  $\omega_d$  se calcula tomando en cuenta la ecuación (1.28) a partir de

$$\begin{pmatrix} \omega_{1_d} \\ \omega_{2_d} \\ \omega_{3_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{cos}\phi & \text{cos}\theta \text{sen}\phi \\ 0 & -\text{sen}\phi & \text{cos}\theta \text{cos}\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_d \\ \dot{\theta}_d \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

con  $\dot{\phi}_d$  y  $\dot{\theta}_d$  la derivada de los ángulos deseados  $\phi_d$  y  $\theta_d$  definidos más adelante en el control de traslación.

Entonces las entradas de control de la ecuación (4.8) estabilizan global y asintóticamente el vehículo al origen ( $q_0 = \pm 1$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$  y  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_d$ ).

**Observación 5** Se debe mencionar que el control de orientación descrito anteriormente continúa estabilizando el sistema a una magnitud igual a cero para las variables  $q_e$  y  $\omega_e$ . Sin embargo, debido a la forma matemática de estas variables, lo que ocurre físicamente es que estas variables representan la diferencia entre el valor real y el valor deseado, de tal manera que, cuando las magnitudes de estas variables tienden a cero, en realidad el sistema aéreo tiende a los valores deseados establecidos previamente. Si el control de orientación es lo suficientemente eficiente, se tiene entonces condiciones necesarias para conseguir capacidades de seguimiento de trayectorias de orientación.

A continuación se muestra la prueba de estabilidad del control de orientación propuesto arriba.

**Prueba 6.** La ecuación dinámica para el error de seguimiento de velocidad angular se puede establecer tomando en cuenta la ecuación (4.2) y que  $\omega_e = \omega - \omega_d$ , se obtiene lo siguiente

$$J\dot{\omega}_e = -(\omega_e + \omega_d) \times J(\omega_e + \omega_d) - J\dot{\omega}_d + \Gamma \quad (4.12)$$

Se puede mostrar que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \omega_e^T J \omega_e \right) = \omega_e^T (\mathbf{\Gamma} - J \dot{\omega}_d - \omega_d \times J \omega_d) - \underbrace{\omega_e^T (\omega_e \times J \omega_e)}_{=0} - \underbrace{\omega_e^T (\omega_e \times J \omega_d) - \omega_e^T (\omega_d \times J \omega_e)}_{=-\omega_e^T (\omega_d \times J + J \omega_d \times) \omega_e = 0} \quad (4.13)$$

puesto que  $J = J^T > 0$  y entonces  $(\omega_d \times J + J \omega_d \times)$  es una matriz antisimétrica.

Considere la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \omega_e^T J \omega_e, \quad (4.14)$$

derivando esta función con respecto del tiempo se obtiene

$$\dot{V} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \omega_e^T J \omega_e \right) = \omega_e^T (\mathbf{\Gamma} - J \dot{\omega}_d - \omega_d \times J \omega_d), \quad (4.15)$$

sustituyendo  $\mathbf{\Gamma}$ , se tiene que

$$\dot{V} = \omega_e^T (\mathbf{\Gamma}_s + J \dot{\omega}_d + \omega_d \times J \omega_d - J \dot{\omega}_d - \omega_d \times J \omega_d), \quad (4.16)$$

entonces

$$\dot{V} = \omega_e^T \mathbf{\Gamma}_s = \underbrace{\omega_{e_1} \Gamma_{s_1}}_{\dot{V}_1} + \underbrace{\omega_{e_2} \Gamma_{s_2}}_{\dot{V}_2} + \underbrace{\omega_{e_3} \Gamma_{s_3}}_{\dot{V}_3}. \quad (4.17)$$

$\dot{V}$  es la suma de tres términos  $\dot{V}_1$ ,  $\dot{V}_2$  y  $\dot{V}_3$ , analizando  $\dot{V}_j$  para  $j \in \{1, 2, 3\}$  de las ecuaciones (4.9) y (4.17)

$$\dot{V}_j = -\omega_{e_j} \text{sat}_{\bar{\Gamma}_j} \left( \frac{\kappa \omega_{e_j}}{\rho_j} + \kappa q_{e_j} \right). \quad (4.18)$$

Sea  $\Phi_j := \{\omega_{e_j} : |\omega_{e_j}| \leq \rho_j + \varepsilon\}$  para algún  $\varepsilon > 0$ . Fuera de  $\Phi_j$ , de la condición del cuaternión  $|q_{e_i}| \leq 1$ , se sigue que  $|\kappa \omega_{e_j} / \rho_j + \kappa q_{e_j}| \geq \kappa \varepsilon / \rho_j$  y que  $\kappa \omega_{e_j} / \rho_j + \kappa q_{e_j}$  y  $\omega_{e_j}$  tienen el mismo signo. Por lo tanto

$$\dot{V}_j = -\omega_{e_j} \text{sat}_{\bar{\Gamma}_j} \left( \frac{\kappa \omega_{e_j}}{\rho_j} + \kappa q_{e_j} \right) \leq -\frac{\kappa \varepsilon}{\rho_j} |\omega_{e_j}| < -\frac{\kappa \varepsilon (\rho_j + \varepsilon)}{\rho_j} < -\kappa \varepsilon < 0. \quad (4.19)$$

Consecuentemente,  $\omega_{e_j}$  entra en  $\Phi_j$  en un tiempo finito y permanece ahí. Durante este tiempo, el cuaternión no puede diverger debido a que es estructuralmente unitario y por lo tanto acotado.

Una vez en  $\Phi_j$ , consideremos la nueva función de Lyapunov  $W$  definida por

$$W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_e^T J \boldsymbol{\omega}_e + \kappa ((1 - q_{e0})^2 + \mathbf{q}_e^T \mathbf{q}_e) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_e^T J \boldsymbol{\omega}_e + 2\kappa(1 - q_{e0}), \quad (4.20)$$

puesto que  $J$  es definida positiva, la función  $W$  es definida positiva, radialmente no acotada y es de clase  $C^2$ . La derivada de la ecuación (4.20) después de considerar las ecuaciones (4.13) y (1.86) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \boldsymbol{\omega}_e^T J \dot{\boldsymbol{\omega}}_e - 2\kappa \dot{q}_{e0} = \boldsymbol{\omega}_e^T (\boldsymbol{\Gamma} - J \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \boldsymbol{\omega}_d \times J \boldsymbol{\omega}_d) + \kappa \mathbf{q}_e^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_e \\ &= \underbrace{\omega_{e1} \Gamma_{s1} + \kappa q_{e1} \omega_{e1}}_{\dot{W}_1} + \underbrace{\omega_{e2} \Gamma_{s2} + \kappa q_{e2} \omega_{e2}}_{\dot{W}_2} + \underbrace{\omega_{e3} \Gamma_{s3} + \kappa q_{e3} \omega_{e3}}_{\dot{W}_3}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Al igual que en  $\dot{V}$ ,  $\dot{W}$  es la suma de tres términos  $\dot{W}_1$ ,  $\dot{W}_2$  y  $\dot{W}_3$ , analizando  $\dot{W}_j$  para  $j \in \{1, 2, 3\}$ , uno obtiene de  $\Gamma_j$  en las ecuaciones (4.9) y (4.17)

$$\dot{W}_j = -\omega_{ej} \text{sat}_{\bar{\Gamma}_j} \left( \frac{\kappa \omega_{ej}}{\rho_j} + \kappa q_{ej} \right) + \kappa q_{ej} \omega_{ej}. \quad (4.22)$$

En  $\Phi_j$ , uno tiene

$$\left| \frac{\kappa \omega_{ej}}{\rho_j} + \kappa q_{ej} \right| \leq 2\kappa + \frac{\kappa \varepsilon}{\rho_j}, \quad (4.23)$$

tomando  $\varepsilon$  suficientemente pequeño y usando la suposición que  $2\kappa < \bar{\Gamma}_j$ ,

$$\left| \frac{\kappa \omega_{ej}}{\rho_j} + \kappa q_{ej} \right| \leq \bar{\Gamma}_j, \quad (4.24)$$

consecuentemente, la función de saturación opera en una región lineal

$$\Gamma_j = -\frac{\kappa}{\rho_j} [\omega_{ej} + \rho_j q_{ej}], \quad (4.25)$$

como resultado, la ecuación (4.22) se convierte en

$$\dot{W}_j = -\frac{\kappa}{\rho_j} \omega_{ej}^2, \quad (4.26)$$

por lo tanto, la ecuación (4.21) se convierte en

$$\dot{W} = \dot{W}_1 + \dot{W}_2 + \dot{W}_3 = -\kappa \left( \frac{\omega_{e1}^2}{\rho_1} + \frac{\omega_{e2}^2}{\rho_2} + \frac{\omega_{e3}^2}{\rho_3} \right) \leq 0. \quad (4.27)$$

Para completar la prueba, el principio de invarianza de LaSalle es invocado. Todas las trayectorias convergen al conjunto invariante más grande  $\bar{\Omega}$  en  $\Omega$  donde

$$\Omega = \{(q_e, \boldsymbol{\omega}_e) : \dot{W} = 0\} = \{(q_e, \boldsymbol{\omega}_e) : \boldsymbol{\omega}_e = 0\}. \quad (4.28)$$

En el conjunto invariante,  $J\dot{\boldsymbol{\omega}}_e = -\kappa[q_{e1} \ q_{e2} \ q_{e3}]^T = -\kappa\mathbf{q}_e = 0$ . Por lo tanto para permanecer en  $\bar{\Omega}$ , uno debe satisfacer  $\mathbf{q}_e = 0$  y  $q_{e0} = \pm 1$  de la condición de normalidad. En realidad, los puntos  $(q_{e0} = \pm 1, \mathbf{q}_e = 0, \boldsymbol{\omega}_e = 0)$  corresponden, respectivamente, a un mínimo ( $W = 0$ ) y a un máximo local ( $W = 4$ ) de la función de Lyapunov (4.20). Consecuentemente,  $\dot{W} = 0$  en este punto de equilibrio. Si en  $t_0 = 0$  el sistema en lazo cerrado se encuentra en el máximo local, este permanecerá en este punto para  $t > t_0$ . Sin embargo, si en  $t_0$  el sistema en lazo cerrado está lejos de este punto de equilibrio, y puesto que  $\dot{W} < 0$  fuera de los dos puntos de equilibrio, el estado del sistema convergerá al punto de equilibrio  $(q_{e0} = 1, \mathbf{q}_e = 0, \boldsymbol{\omega}_e = 0)$  y permanecerá ahí en lo subsecuente, puesto que en este punto  $W = \dot{W} = 0$ . Esto finaliza la prueba de la estabilidad asintótica casi global.

Con lo anterior se asegura la estabilidad de la propuesta de control de orientación ha utilizarse en esta parte del trabajo de tesis. Es importante tener un referente en simulación de la efectividad de esta propuesta para contar con una aproximación del comportamiento de dicho control. A continuación se muestran los resultados obtenidos con estas pruebas.

#### 4.1.1. Resultados en simulación

Con el fin de probar la efectividad del control propuesto anteriormente, fueron realizadas pruebas en simulación utilizando la herramienta MATLAB/Simulink mostrada en el capítulo 1. Para ello, se establecieron condiciones iniciales de la situación simulada las cuales son descritas a continuación

Para la trayectoria rotacional de referencia, se consideran las siguientes magnitudes para las componentes de la velocidad angular

- $\omega_{1_d}$  - una senoidal de amplitud 5 y frecuencia 5 rad/s
- $\omega_{2_d}$  - constante de -1.7 rad/s
- $\omega_{3_d}$  - una senoidal de amplitud 3 y frecuencia 2 rad/s

La posición angular inicial de referencia se estableció en

$$\phi = 190^\circ, \quad \theta = 80^\circ, \quad \psi = -270^\circ. \quad (4.29)$$

Para la trayectoria real, se consideraron las siguientes condiciones iniciales

$$\omega_1 = 2 \text{ m/s}, \quad \omega_2 = -5 \text{ m/s}, \quad \omega_3 = 3 \text{ m/s}. \quad (4.30)$$

$$\phi = 0^\circ, \quad \theta = 0^\circ, \quad \psi = 0^\circ. \quad (4.31)$$

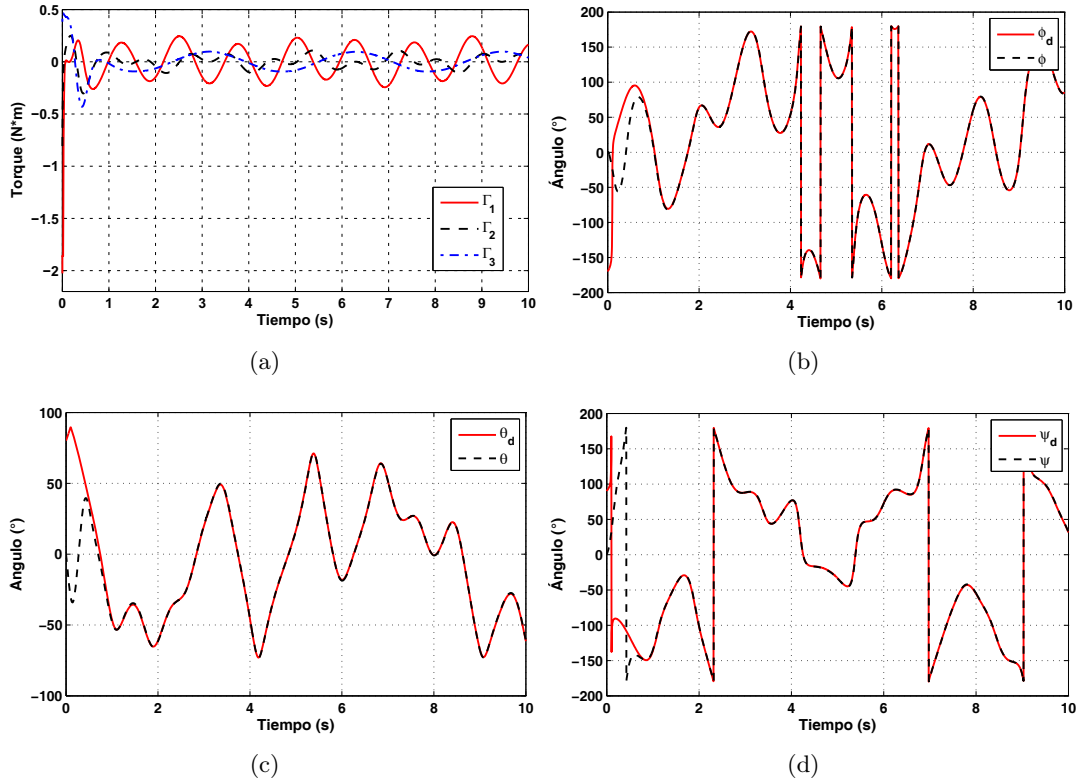


Figura 4.2: Comportamiento de los torques de control  $\Gamma_{(1,2,3)}$  y de la orientación en términos de ángulos de Cardán.

La prueba en simulación se realizó para un tiempo de 10 segundos, considerando que la dinámica del vehículo VTOL es muy rápida y es necesario un control de respuesta inmediata para ser útil en este tipo de sistemas. La figura 4.2 muestra gráficas del comportamiento de los torques de control y para cada uno de los ángulos de orientación ( $\phi, \theta, \psi$ ). La primera gráfica muestra los valores necesarios de los torques de control para hacer posible alcanzar los valores deseados, en los primeros instantes, los torque son utilizados para conseguir la posición angular necesaria y disminuir la inercia del vehículo debida a las condiciones iniciales del movimiento, posteriormente se puede apreciar que estos valores tienen comportamientos sinusoidales, que corresponden a los valores deseados para la velocidad angular, los cuales son tomados muy en cuenta en la propuesta de control de orientación y que, además, determinan la posición de vehículo aéreo en el espacio. Es de señalarse que, a pesar de que el control utiliza el cuaternión para la estabilización, es posible mostrar el comportamiento de la posición angular mediante los ángulos de Cardán, que es más sencillo de entender, esto se presenta en las tres gráficas restantes de la figura 4.2 comparados con sus valores deseados, es posible observar que la orientación deseada se alcanza en un tiempo poco mayor a un segundo y muestra la efectividad del control propuesto. La figura 4.3 muestra un conjunto de gráficas del comportamiento de la posición angular desde el punto de vista del cuaternión, aquí se puede observar el componente escalar  $q_0$  y los tres componentes vectoriales  $[q_x \ q_y \ q_z]^T$ , cada uno de ellos comparados con los valores

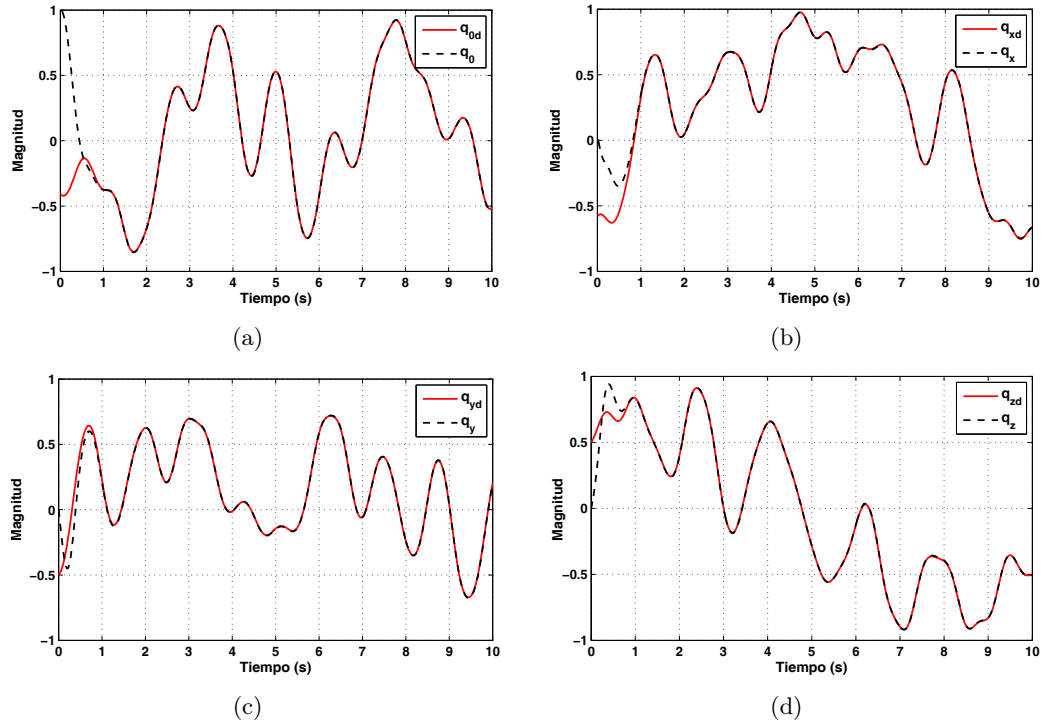


Figura 4.3: Comportamiento de la orientación en términos de cuaterniones.

deseados, cuyos valores son alcanzados en poco más de un segundo, lo que concuerda con la figura anterior. Finalmente, la figura 4.4 muestra el comportamiento, para cada una de las componentes, de la velocidad angular, es posible observar que al inicio las velocidades parten de las magnitudes previamente establecidas, el control es capaz de llevar el valor real al deseado en el tiempo ya mencionado.

## 4.2. Diseño del control de posición

La segunda parte del problema se refiere a la estabilización de la posición de los vehículos VTOL al origen de coordenadas del marco de referencia inercial. Para atacar esta dificultad, se diseña una ley de control de traslación tomando en cuenta las ecuaciones que describen la dinámica traslacional de este tipo de vehículos aéreos, y la propuesta de control de sistemas denominados cadenas de integradores mostrado en el capítulo 3. El procedimiento para obtener la ley de control de traslación comienza con manipular matemáticamente las ecuaciones (1.99)-(1.100) hasta llevarlas a formas de cadenas de integradores, en este punto se pueden establecer leyes de control como las propuestas para esos sistema. A continuación se desarrolla tal procedimiento.

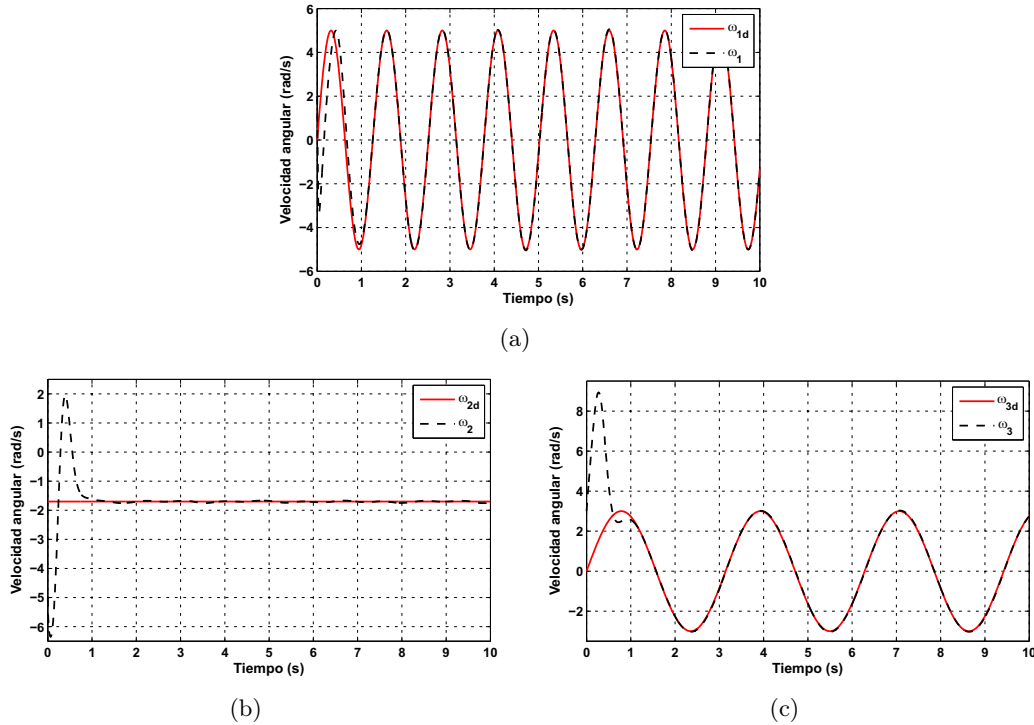


Figura 4.4: Comportamiento de las velocidades angulares, se muestran las trayectorias de referencia y real bajo el control de orientación propuesto.

#### 4.2.1. Ecuaciones del movimiento traslacional

En el capítulo 1 han sido obtenidas las ecuaciones (1.99)-(1.100) que describen el movimiento de traslación de los vehículos tipo VTOL, que serán utilizadas para diseñar la ley de control de posición, por claridad se presentan a continuación

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}, \quad (4.32)$$

$$m\dot{\mathbf{v}} = -m\mathbf{g} + R^T(\mathbf{F} + \mathbf{F}_{ab}) \quad (4.33)$$

la ecuación (4.33) se puede expresar más específicamente como en (2.33)

$$m\dot{\mathbf{v}} = -m\mathbf{g} + R^T(\cdot) \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{ab_x} \\ F_{ab_y} \\ F_{ab_z} \end{pmatrix} \right], \quad (4.34)$$

donde  $(F_{ab_x} \ F_{ab_y} \ F_{ab_z})^T$  recordemos que representan las componentes en cada uno de los ejes de las fuerzas adicionales con respecto al marco de referencia en el centro de masa del vehículo, y se componen de las fuerzas de arrastre, fuerzas producto de la dinámica del vehículo, la fricción de las hélices, corrientes de aire, etc. que pueden afectar al sistema

y que se deben a su interacción con el medio ambiente. Para propósitos de diseño del control, estas fuerzas no serán tomadas en cuenta y se considerarán como perturbaciones del sistema, con esto en consideración, el modelo (4.32)-(4.34) se puede llevar a una forma mas sencilla de trabajar, así una representación en componentes vectoriales tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{T}{m}\text{sen}\theta \\ \frac{T}{m}\text{sen}\phi \cos\theta \\ \frac{T}{m}\cos\phi \cos\theta - g \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

este último sistema de ecuaciones se puede llevar a una forma adecuada para describir el movimiento en cada una de las coordenadas, con lo que se obtienen 3 dobles integradores de la forma

$$\Sigma_x \begin{cases} \dot{p}_1 = p_2 \\ \dot{p}_2 = -\frac{T}{m}\text{sen}\theta \end{cases} \quad (4.37)$$

$$\Sigma_y \begin{cases} \dot{p}_3 = p_4 \\ \dot{p}_4 = \frac{T}{m}\text{sen}\phi \cos\theta \end{cases} \quad (4.38)$$

$$\Sigma_z \begin{cases} \dot{p}_5 = p_6 \\ \dot{p}_6 = \frac{T}{m}\cos\phi \cos\theta - g \end{cases} \quad (4.39)$$

donde  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = (x, v_x, y, v_y, z, v_z)$  es el estado del subsistema que representa la dinámica de traslación. Entonces  $\phi$  y  $\theta$  serán considerados controles virtuales [55], [122], que en conjunto con  $T$  controlarán los subsistemas (4.37)-(4.39). En principio, suponga que existe un control que lleva a  $\phi$  y  $\theta$  a ángulos deseados dados por

$$\begin{aligned} \phi_d &:= \arctan\left(\frac{r_2}{r_3 + g}\right), \\ \theta_d &:= \arcsen\left(\frac{-r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + (r_3 + g)^2}}\right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

donde  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  se definirán posteriormente. Note que para  $\phi_d$  y  $\theta_d$  representados en (4.40) se pueden definir las siguientes funciones trigonométricas

$$\begin{aligned}
 \text{sen } \phi_d &= \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + (r_3 + g)^2}}, \\
 \text{cos } \phi_d &= \frac{r_3 + g}{\sqrt{r_2^2 + (r_3 + g)^2}}, \\
 \text{sen } \theta_d &= \frac{-r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + (r_3 + g)^2}}, \\
 \text{cos } \theta_d &= \frac{\sqrt{r_2^2 + (r_3 + g)^2}}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + (r_3 + g)^2}},
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

de esta manera, la entrada de control  $T$  dada de la forma

$$T = m\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + (r_3 + g)^2}, \tag{4.42}$$

y considerando que  $\phi = \phi_d$  y  $\theta = \theta_d$ , esto transforma los subsistemas (4.37)-(4.39) en

$$\Sigma_x \begin{cases} \dot{p}_1 = p_2, \\ \dot{p}_2 = r_1, \end{cases} \tag{4.43}$$

$$\Sigma_y \begin{cases} \dot{p}_3 = p_4, \\ \dot{p}_4 = r_2, \end{cases} \tag{4.44}$$

$$\Sigma_z \begin{cases} \dot{p}_5 = p_6, \\ \dot{p}_6 = r_3. \end{cases} \tag{4.45}$$

Los ángulos deseados  $\phi_d$  y  $\theta_d$  serán alcanzados por el sistema utilizando la ley de control de orientación de la Proposición 1 mostrada anteriormente. Note que  $T$  será siempre positiva, además deberá cumplirse que  $T \geq mg$ , a fin de compensar el peso de la aeronave y mantener la sustentación de esta.

#### 4.2.2. Control de posición

Ahora se tiene un conjunto de tres cadenas de integradores de orden dos, a partir de esto, se puede usar la propuesta para la estabilización de cadena de integradores presentada en el Teorema 3 del capítulo anterior para proponer la ley de control de posición.

Puesto que las cadenas de integradores (4.43), (4.44) y (4.45) tienen la misma forma, se puede proponer un control para cada una de ellas de la forma mostrada en (3.8), la propuesta de ley de control es establecida en el siguiente lema.

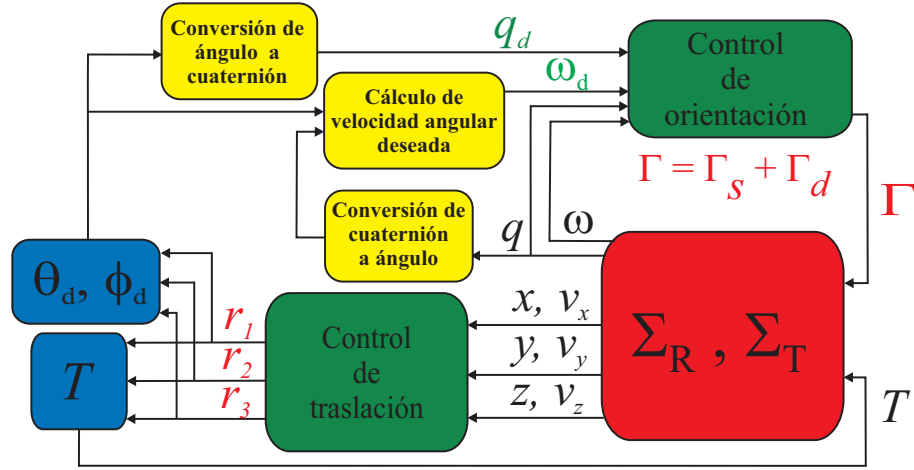


Figura 4.5: Esquema completo del sistema y el control.

**Lema 1** Considere la dinámica del sistema expresado por las ecuaciones (4.43)-(4.45), y considere las leyes de control con entradas acotadas

$$\begin{aligned}
 r_1 &:= -\sigma_1 \left\{ a_2 \text{sat}_{M_1} \left[ \frac{1}{\sigma_1} (a_1 p_1 + p_2) \right] + a_1 \text{sat}_{M_1} \left[ \frac{1}{\sigma_1} (p_2) \right] \right\}, \\
 r_2 &:= -\sigma_2 \left\{ b_2 \text{sat}_{M_1} \left[ \frac{1}{\sigma_2} (b_1 p_3 + p_4) \right] + b_1 \text{sat}_{M_1} \left[ \frac{1}{\sigma_2} (p_4) \right] \right\}, \\
 r_3 &:= -\sigma_3 \left\{ c_2 \text{sat}_{M_1} \left[ \frac{1}{\sigma_3} (c_1 p_5 + p_6) \right] + c_1 \text{sat}_{M_1} \left[ \frac{1}{\sigma_3} (p_6) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

donde  $\text{sat}_{M_1}(\cdot)$  está definida en (2.8), con  $M_1 = 1$ .  $a_{(1,2)}, b_{(1,2)}, c_{(1,2)} > 0$  son parámetros de sintonización definidos como en la ecuación (3.7) y los  $\sigma_i$  están dados por

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \bar{r}_1 / (a_1 + a_2), \\
 \sigma_2 &= \bar{r}_2 / (b_1 + b_2), \\
 \sigma_3 &= \bar{r}_3 / (c_1 + c_2),
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Entonces las leyes de control (4.46) estabilizan exponencialmente los sistemas (4.43)-(4.45) a los puntos de origen  $(p_1, p_2) = (0, 0)$ ,  $(p_3, p_4) = (0, 0)$  y  $(p_5, p_6) = (0, 0)$ .

Para probar la estabilidad del sistema de control anterior, solo se tiene que seguir un procedimiento similar al expuesto para la prueba del Teorema 3 del capítulo anterior, para el caso en que  $n = 2$ . Con el fin de mostrar de forma sencilla el resultado completo de este desarrollo, en la figura 4.5 se muestra un esquema gráfico del sistema dinámico y los controles propuestos de forma acoplada.

### 4.2.3. Resultados en simulación

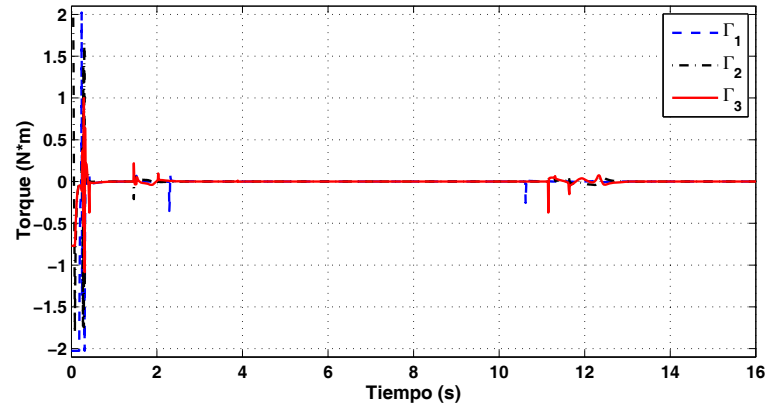
Como antes, para probar la efectividad de las leyes de control de estabilización de posición implementadas para los sistemas VTOL, nuevamente se hicieron pruebas en simulación para la mini nave aérea de cuatro rotores, utilizando el simulador construido en MATLAB/Simulink. Los valores de los parámetros del modelo utilizado en la simulación son:  $m = 400gr$ ,  $\max|\Gamma_{1,2}| = 2,02N \cdot m$ ,  $\max|\Gamma_3| = 0,75N \cdot m$ ,  $\max|T| = 7N$ . Además se usaron los valores  $\bar{r}_1 = \bar{r}_2 = \bar{r}_3 = 4$ ,  $a_1 = b_1 = c_1 = 2,5$  y  $a_2 = b_2 = c_2 = 2,4$ .

El escenario simulado representa una situación física en la cual el cuadrirotor ha sido perturbado por una corriente de aire que lo ha puesto en las siguientes condiciones iniciales:

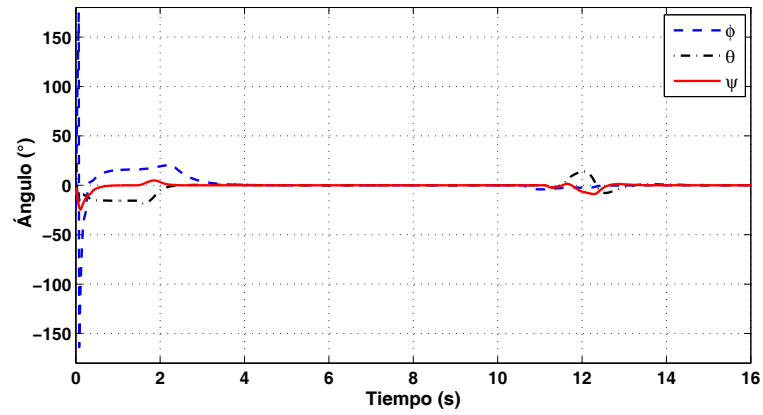
$$\begin{aligned} \phi(t_0) &= -25^\circ, & \theta(t_0) &= 30^\circ, & \psi(t_0) &= -10^\circ, \\ \omega_1(t_0) &= 55 \frac{rad}{s}, & \omega_2(t_0) &= -30 \frac{rad}{s}, & \omega_3(t_0) &= 8 \frac{rad}{s}, \\ x(t_0) &= 3 m, & y(t_0) &= -5 m, & z(t_0) &= 4 m, \\ v_x(t_0) &= 5 \frac{m}{s}, & v_y(t_0) &= 7 \frac{m}{s}, & v_z(t_0) &= -4 \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

Las gráficas en la figura 4.6 muestran el comportamiento de los torques de control  $\Gamma_{1,2,3}$  aplicados para estabilizar la aeronave, reduciendo la inercia de las condiciones iniciales, y luego orientarla de tal forma que alcance la posición del origen de coordenadas, es posible observar que los valores no rebasan las cotas establecidas previamente y que en la realidad se consideran para evitar daños en los actuadores. Así mismo se observa como alrededor del segundo 2 y 12 los torques actúan primero para orientar la aeronave con el fin de alcanzar la posición en el origen de coordenadas y luego para frenar el movimiento una vez que la posición final ha sido alcanzada. En la segunda gráfica se muestran los valores de los ángulos de Cardán que igualmente son llevados a los valores necesarios para lograr el movimiento de traslación adecuado, en los primeros 4 segundos, y luego para detener el movimiento, una vez que la posición es alcanzada, alrededor del segundo 12. La última gráfica muestra el comportamiento de la velocidad angular, la cual corrobora la dinámica descrita anteriormente. Se debe reiterar que, aunque la simulación del movimiento se realiza utilizando el cuaternión, aquí se muestran los ángulos de Cardán para tener una mejor comprensión del fenómeno y se prescinde de mostrar el cuaternión.

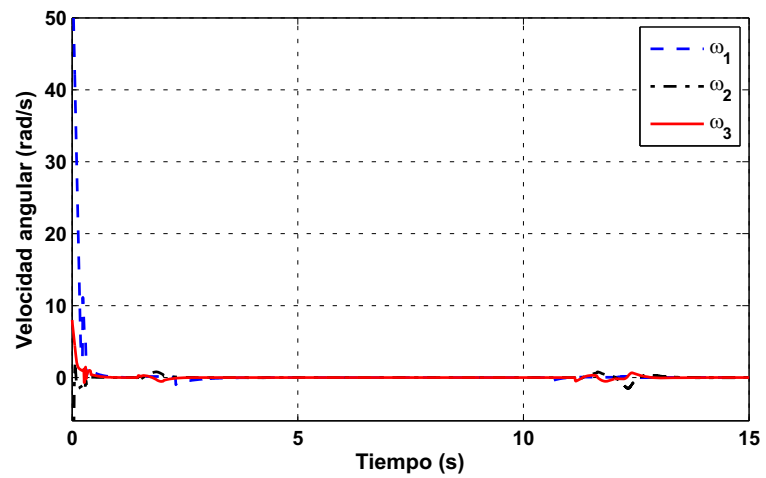
La figura 4.7 muestra, en la primera gráfica, la fuerza de sustentación y control de traslación  $T$ . Aquí nuevamente es posible observar cómo el valor de  $T$  no sobrepasa la cota establecida y tiene que mantenerse poco más de un segundo en su valor máximo para el proceso de estabilización de la nave, donde se tiene que reducir la inercia debido a las condiciones iniciales y luego contribuir para llevar a la aeronave al origen de coordenadas, también se observa su variación para detener el movimiento una vez que se alcanzó la posición final, cerca del minuto 12, como se mostró en la figura anterior. La segunda gráfica muestra el comportamiento del vehículo en su movimiento de traslación para cada uno de los ejes de coordenadas. Al principio es notorio que el punto de partida está en los valores establecidos así como el desplazamiento debido a la inercia de las condiciones iniciales. Así mismo llama la atención que el movimiento hacia el punto de equilibrio se lleva a cabo de forma constante. Al segundo 12 es cuando alcanza los valores de estabilización y se puede



(a)

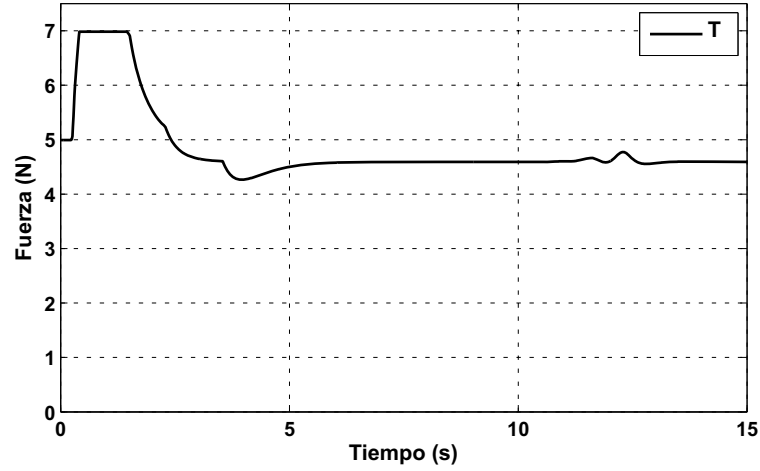


(b)

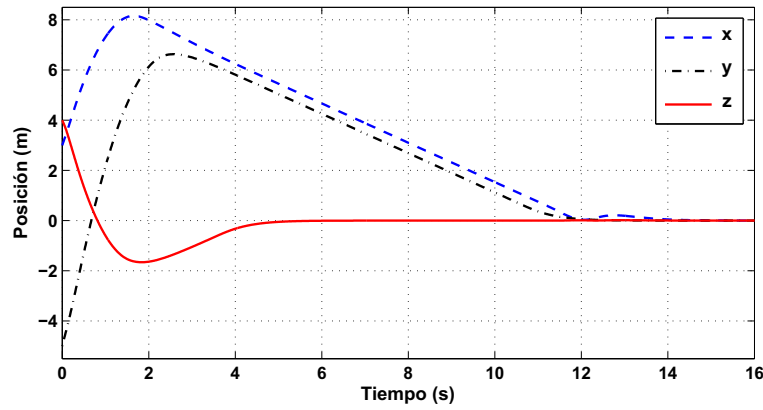


(c)

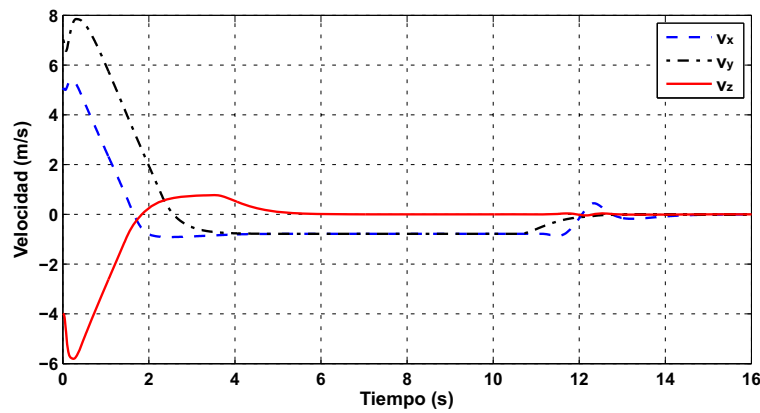
Figura 4.6: Resultados de los torques de control, los ángulos de Cardán y las velocidades angulares.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.7: Resultados del control  $T$ , la posición y la velocidad lineales.

### 4.3. CONSIDERACIÓN PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS DE POSICIÓN

---

apreciar una perturbación que se supone es por la maniobra para frenar el movimiento. La gráfica final muestra la evolución de las velocidades del vehículo, la forma que presenta corrobora la dinámica del movimiento descrita anteriormente. Se puede observar que el control cumple su función de estabilizar al sistema en el origen de coordenadas manteniendo constante el valor de  $T$  para conservar la sustentación de la aeronave.

Se debe mencionar que el control de posición descrito anteriormente tienen la capacidad de estabilizar la posición de un vehículo tipo VTOL en el origen de coordenadas de un marco de referencia inercial, es decir, en un punto particular en el espacio. Sin embargo, es posible hacer alguna consideración para extender el alcance de este control y dotarlo de la capacidad de realizar seguimiento de trayectorias, definidas previamente, en el espacio tridimensional, lo cual sería de gran utilidad si se piensa en aplicaciones prácticas. A continuación se muestra como es posible realizar lo anterior.

### 4.3. Consideración para seguimiento de trayectorias de posición

Tomando en cuenta el rendimiento y la estructura que conforma el control de orientación mostrado arriba en el presente capítulo, ahora es posible pensar en una ley de control para seguimiento de trayectorias de posición, observando precisamente la forma que tiene el control de orientación, el cual toma en cuenta los errores de posición y velocidad angulares, entonces considerando los errores de posición y velocidad para el movimiento lineal, es posible definir lo siguiente

$$p_e = p - p_d. \quad (4.48)$$

De esta manera, realizando todo el desarrollo anterior para movimiento de traslación, las ecuaciones (4.43)-(4.45) que describen el movimiento de traslación se pueden reformular como sigue

$$\Sigma_x \begin{cases} \dot{p}_{e1} = p_{e2}, \\ \dot{p}_{e2} = r_1, \end{cases} \quad (4.49)$$

$$\Sigma_y \begin{cases} \dot{p}_{e3} = p_{e4}, \\ \dot{p}_{e4} = r_2, \end{cases} \quad (4.50)$$

$$\Sigma_z \begin{cases} \dot{p}_{e5} = p_{e6}, \\ \dot{p}_{e6} = r_3. \end{cases} \quad (4.51)$$

donde  $p_e = (p_{e1}, p_{e2}, p_{e3}, p_{e4}, p_{e5}, p_{e6}) = (x - x_d, v_x - v_{x_d}, y - y_d, v_y - v_{y_d}, z - z_d, v_z - v_{z_d})$ . De esta manera, se tiene que la propuesta de control para seguimiento de trayectorias se puede enunciar como sigue.

**Lema 2** *Considere la dinámica del sistema expresado por las ecuaciones (4.49)-(4.51), y considere las leyes de control con entradas acotadas*

$$\begin{aligned}
 r_1 &:= -\sigma_1 \left\{ a_2 \text{sat}_{M_1} \left[ \frac{1}{\sigma_1} (a_1 p_{e_1} + p_{e_2}) \right] + a_1 \text{sat}_{M_1} \left[ \frac{1}{\sigma_1} (p_{e_2}) \right] \right\}, \\
 r_2 &:= -\sigma_2 \left\{ b_2 \text{sat}_{M_1} \left[ \frac{1}{\sigma_2} (b_1 p_{e_3} + p_{e_4}) \right] + b_1 \text{sat}_{M_1} \left[ \frac{1}{\sigma_2} (p_{e_4}) \right] \right\}, \\
 r_3 &:= -\sigma_3 \left\{ c_2 \text{sat}_{M_1} \left[ \frac{1}{\sigma_3} (c_1 p_{e_5} + p_{e_6}) \right] + c_1 \text{sat}_{M_1} \left[ \frac{1}{\sigma_3} (p_{e_6}) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

donde  $\text{sat}_{M_1}(\cdot)$  está definida en (2.8), con  $M_1 = 1$ .  $a_{(1,2)}, b_{(1,2)}, c_{(1,2)} > 0$  son parámetros de sintonización definidos como en la ecuación (3.7) y los  $\sigma_i$  están dados por

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \bar{r}_1 / (a_1 + a_2), \\
 \sigma_2 &= \bar{r}_2 / (b_1 + b_2), \\
 \sigma_3 &= \bar{r}_3 / (c_1 + c_2),
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Entonces las leyes de control (4.52) estabilizan exponencialmente a los sistemas (4.49)-(4.51) a los puntos de origen  $(p_{e_1}, p_{e_2}) = (0, 0)$ ,  $(p_{e_3}, p_{e_4}) = (0, 0)$  y  $(p_{e_5}, p_{e_6}) = (0, 0)$ .

Nuevamente, para probar la estabilidad del sistema de control anterior, se debe seguir un procedimiento similar para la prueba del Teorema 3 del capítulo anterior.

Se debe observar que, como sucede para el control de orientación mostrado en este capítulo, el control de seguimiento de trayectorias de posición mostrado anteriormente, estabiliza la posición del vehículo aéreo en una magnitud de cero para los estados  $p_{e_j}$  con  $j \in (1, 2, \dots, 6)$ . Sin embargo, debido a la forma matemática en que estos estados están definidos,  $p_e = p - p_d$ , donde el valor de error es la diferencia entre el valor real y el valor deseado, lo que ocurre físicamente cuando esta diferencia es cero es que el valor real es igual al valor deseado, es decir, el valor real del estado alcanza el valor deseado para él, con lo que se consigue que los estados alcancen valores definidos previamente, que bien puede ser un punto o bien una trayectoria definidos en el espacio tridimensional.

Como antes, es necesario realizar pruebas en simulación para corroborar que el comportamiento del VTOL sea como se espera, así como el rendimiento del control propuesto, los resultados obtenidos se muestran a continuación.

### 4.3.1. Resultados en simulación

De nuevo, con el fin de probar la efectividad de la modificación de la ley de control de traslación para su adaptación a seguimiento de trayectorias en el espacio, han sido realizadas pruebas en simulación donde las siguientes condiciones iniciales han sido tomadas en consideración.

### 4.3. CONSIDERACIÓN PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS DE POSICIÓN

Las condiciones iniciales de posición y velocidad tanto para el movimiento lineal como para el movimiento rotacional del vehículo aéreo se establecieron con los siguientes valores

$$x = 3 \text{ m}, \quad y = -5 \text{ m}, \quad z = 4 \text{ m}. \quad (4.54)$$

$$v_x = 5 \text{ m/s}, \quad v_y = 7 \text{ m/s}, \quad v_z = -4 \text{ m/s}. \quad (4.55)$$

$$\phi = -25^\circ, \quad \theta = 30^\circ, \quad \psi = -10^\circ. \quad (4.56)$$

$$\omega_x = 55 \text{ rad/s}, \quad \omega_y = -30 \text{ rad/s}, \quad \omega_z = 8 \text{ rad/s}. \quad (4.57)$$

Las magnitudes de los parámetros del modelo utilizado en la simulación son

- $m = 400gr$
- $\max|\Gamma_{1,2}| = 2,02N \cdot m,$
- $\max|\Gamma_3| = 0,75N \cdot m,$
- $\max|T| = 7N.$
- $\bar{r}_1 = \bar{r}_2 = \bar{r}_3 = 4$
- $a_1 = 1,7, b_1 = c_1 = 2,1$
- $a_2 = 1,6, b_2 = c_2 = 2,0.$

La trayectoria deseada que debe seguir el vehículo aéreo en esta prueba para cada uno de los ejes del marco de referencia inercial ha sido definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x_d &= 2 \cos(2\pi(0,1)t), \\ y_d &= 2 \text{ sen}(2\pi(0,1)t), \\ z_d &= (0,2)t. \end{aligned} \quad (4.58)$$

La primera gráfica de la figura 4.8 muestra el comportamiento de los torques de control necesarios para llevar a cabo el seguimiento de la trayectoria deseada descrita anteriormente, es posible observar como en los primeros cuatro segundos, el accionar de los torques es utilizado para estabilizar a la aeronave y reducir la inercia debido a las condiciones iniciales, luego se utilizan para llevar al vehículo a los valores deseados y finalmente, a partir del segundo 10 se observa un comportamiento regular en todos los torques que es debido a la regularidad de las funciones que definen los valores de la posición deseada, en este caso, las funciones trigonométricas seno y coseno definidas en la ecuación (4.58). En la segunda gráfica mostrada en la figura, se puede observar las posiciones angulares necesarias para que la aeronave pueda realizar el movimiento de seguimiento de la trayectoria deseada, en correspondencia a los torques mostrados anteriormente, en los primeros segundos se nota

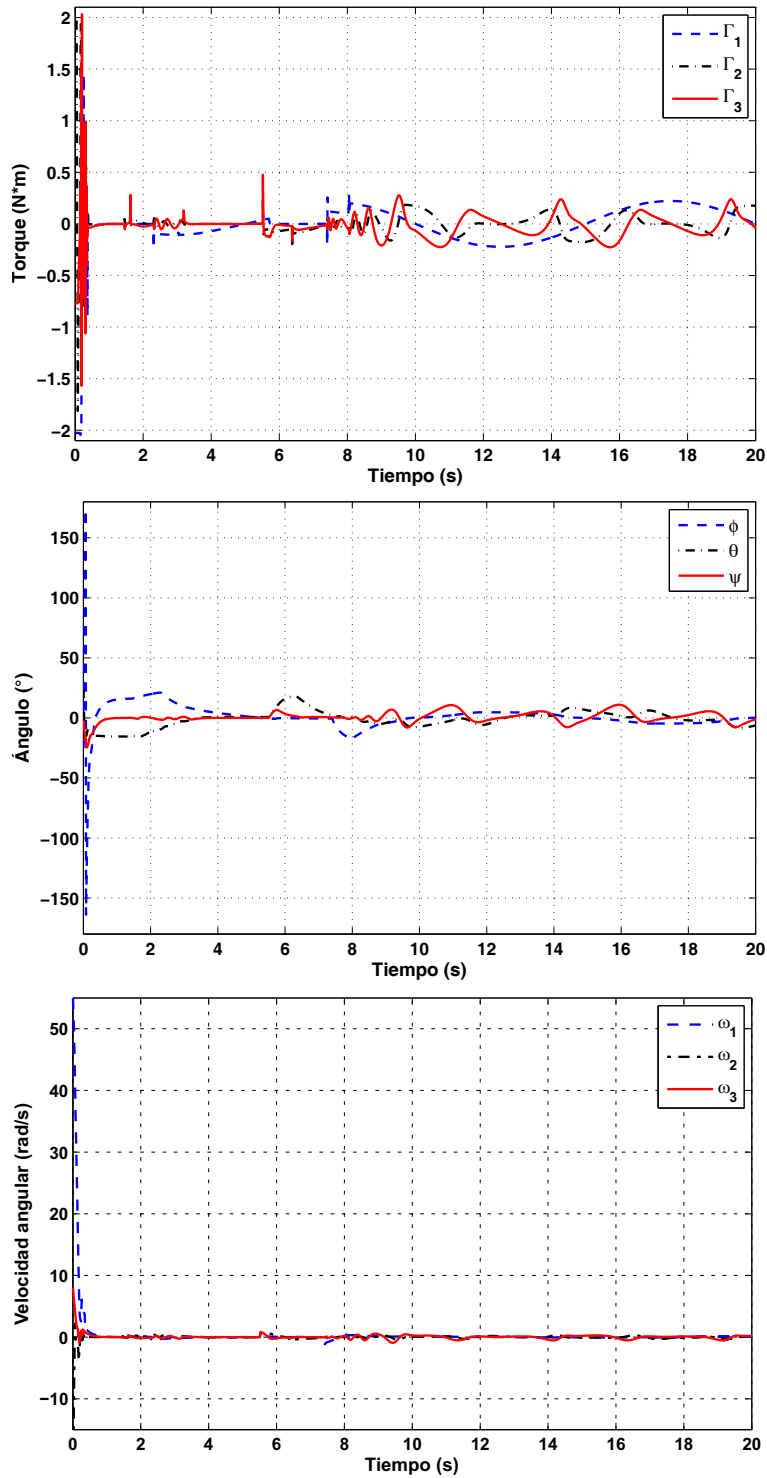


Figura 4.8: Comportamiento de los torques de control, los ángulos de Cardán y las velocidades angulares para el caso de seguimiento de trayectorias en el espacio.

### 4.3. CONSIDERACIÓN PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS DE POSICIÓN

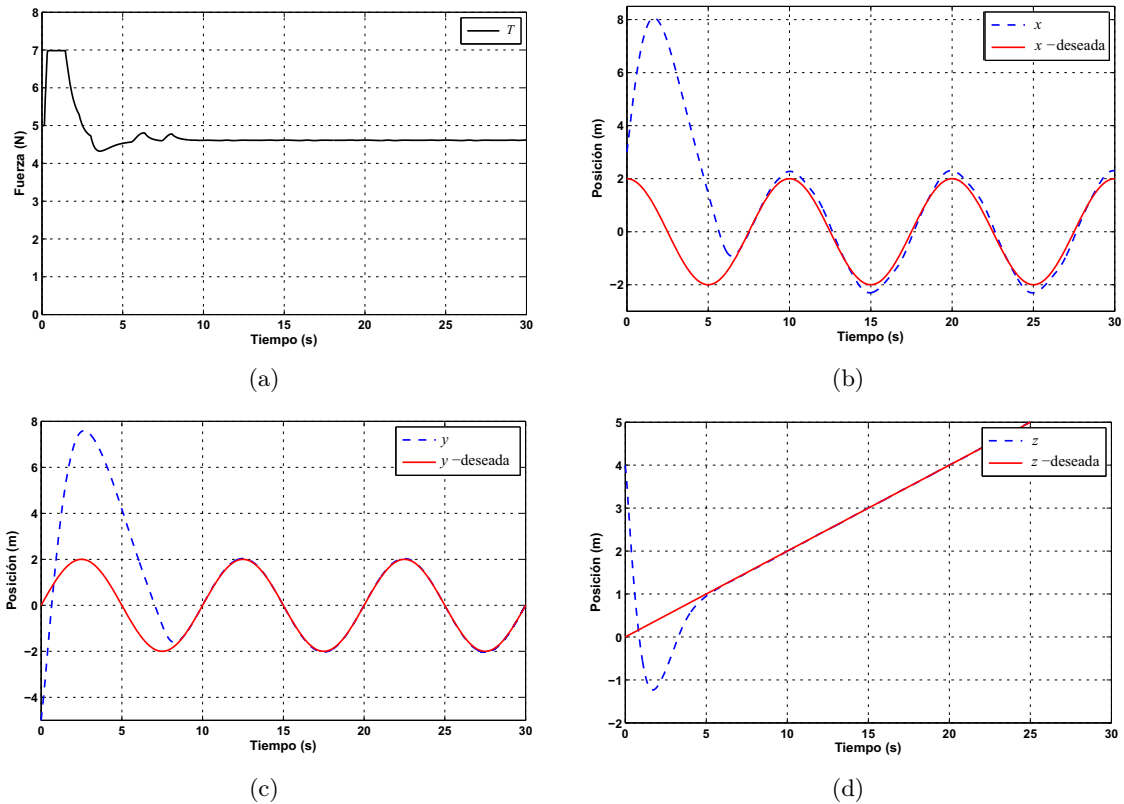


Figura 4.9: Comportamiento de la fuerza de sustentación  $T$  y de las componentes de posición para el caso de seguimiento de trayectorias en el espacio comparadas con los valores deseados.

una posición angular utilizada para disminuir la inercia del vehículo, posteriormente, la posición se ocupa para llevar el vehículo a la trayectoria deseada y a partir del segundo 10 se logra apreciar un movimiento regular necesario para alcanzar la trayectoria deseada definida con las funciones regulares mencionadas anteriormente. La última gráfica muestra el comportamiento de la velocidad angular, se observa que los valores, a excepción de la parte final, no se separan demasiado del valor cero, es decir, para el movimiento deseado no es necesario una velocidad angular significativa en ninguno de los ejes.

En la figura 4.9 se puede apreciar el comportamiento de la fuerza de sustentación  $T$  que al mismo tiempo es una de las entradas de control, así como las posiciones lineales para cada uno de los ejes. En cuanto al comportamiento de  $T$  es posible notar que, como ocurre con los torques, al inicio del movimiento alcanza su valor máximo definido y lo mantiene por un periodo de tiempo necesario para disminuir la inercia de las condiciones iniciales, unos segundos después sus valores son utilizados para que el VTOL alcance la trayectoria deseada. Es importante notar que, a partir del segundo 10, la magnitud de  $T$  casi es constante, lo que quiere decir que los movimientos en el plano  $x - y$  se realizan casi exclusivamente con los movimientos angulares, es decir, mediante el uso de los torque  $\Gamma_{1,2,3}$ , mientras que  $T$  se ocupa de la sustentación y lograr el empuje necesario para alcanzar el valor  $z_d$ , el cual aumenta con el tiempo, como se observa en las ecuaciones (4.58). Las tres

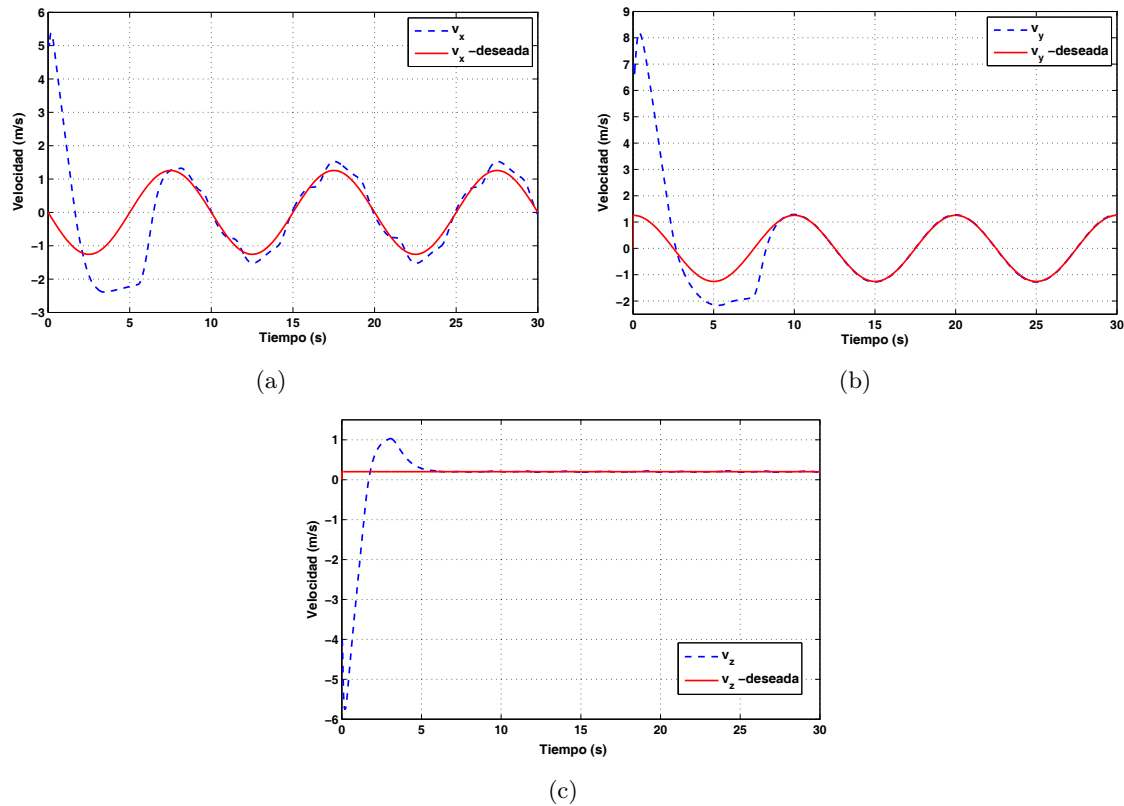


Figura 4.10: Comportamiento de las componentes de velocidad para el caso de seguimiento de trayectorias en el espacio comparadas con los valores deseados.

gráficas restantes de la figura 4.9, muestran las posiciones, en los tres ejes, comparadas con los valores deseados, es posible observar que las posiciones en los ejes  $y$  y  $z$  son alcanzadas sin mayor problema después de ocho segundos, como se verifica en las figuras anteriores. Sin embargo, la posición en el eje  $x$  muestra un pequeño error para lograr el valor deseado en varias secciones de la gráfica, el origen de este no ha sido identificado.

La figura 4.10 muestra el comportamiento de las velocidades en cada uno de los ejes comparados con sus valores deseados, es claro para los casos  $v_y$  y  $v_z$  que el objetivo de seguimiento se cumple satisfactoriamente poco antes de diez segundos. Sin embargo, el caso para  $v_x$  muestra un error que puede ser considerable para el seguimiento de trayectorias de posición, este no pudo ser corregido en este trabajo.

Finalmente, la figura 4.11 muestra una gráfica de la evolución de la posición del vehículo en el espacio tridimensional, es notorio el desfase provocado por el error entre el valor real y el valor deseado en el eje  $X$ . Sin embargo, a pesar de este detalle, en general el control es capaz de acercar notablemente los valores de posición a los valores deseados. Es un trabajo futuro eliminar el error mostrado en estas figuras.

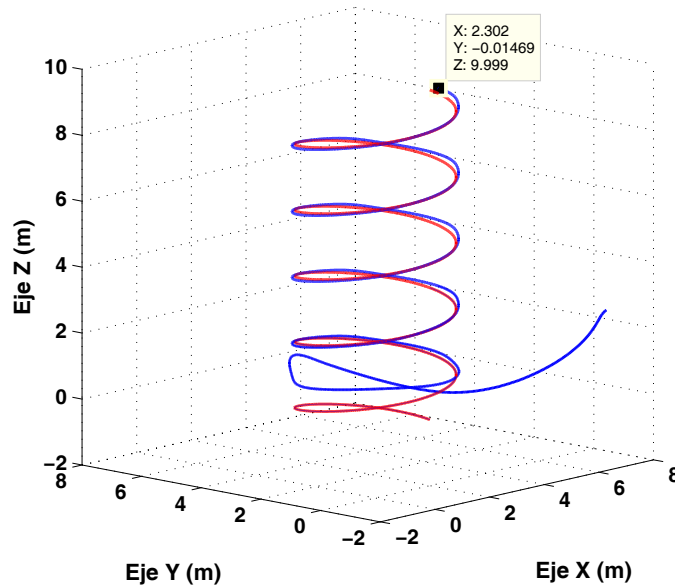


Figura 4.11: Vista del comportamiento de la posición del vehículo en 3D comparada con la posición deseada

#### 4.4. Resultados experimentales

<sup>1</sup>En esta sección se muestran los resultados experimentales obtenidos con un modelo cuadricóptero desarrollado en el Laboratorio de Control Avanzado de la Facultad de Ciencias de la Electrónica por un grupo de estudiantes de maestría dirigidos por el Dr. J. Fermi Guerrero Castellanos. Una amplia reseña de los detalles técnicos sobre la construcción del vehículo están disponibles para consulta en el Apéndice B.

Es necesario mencionar que todas las pruebas han sido realizadas a campo abierto con lo que las perturbaciones en este ambiente son considerables y ponen a prueba las capacidades tanto del control, como de los elementos sensores y estructurales que integran el vehículo cuadricóptero. adicionalmente, y no menos importante, es que en estas pruebas el elemento utilizado para localizar la posición del vehículo es una unidad que utiliza el sistema GPS, la cual tiene un margen de error de  $\pm \frac{1}{2}m$ , que comparado con las dimensiones del vehículo, en realidad es considerable, por lo que un punto en el espacio, bajo estas condiciones, en realidad es una esfera de aproximadamente un metro de diámetro. Los parámetros que caracterizan al prototipo utilizado en estas pruebas se proporcionan en la tabla 4.1. La figura 4.12 muestra una fotografía del mini helicóptero de cuatro rotores, en vuelo estacionario a una altura aproximada de 1 m, utilizado para realizar las pruebas en tiempo real.

Entonces, la primera prueba experimental consistió en estabilizar al vehículo al punto  $p_d = (0, 0, 1,4m)$ , punto expresado en el sistema de referencia inercial. Note que de manera

<sup>1</sup>Los resultados mostrados en esta sección fueron reportados en el trabajo de tesis de maestría [123]

Tabla 4.1: Parámetros del mini helicóptero.

Parámetros	Descripción	Valor	Unidades
$m$	Masa	1.490	Kg
$d$	Distancia	.277	m
$J_\phi$	Componente inercial X	0.0343	$Kg \cdot m^2$
$J_\theta$	Componente inercial Y	0.0343	$Kg \cdot m^2$
$J_\psi$	Componente inercial Z	0.0529	$Kg \cdot m^2$
$b$	Cte. de proporcionalidad	8548	$N/s$
$k$	Cte. de proporcionalidad	1898	$N \cdot m/s$



Figura 4.12: Vuelo estacionario del mini helicóptero de cuatro motores.

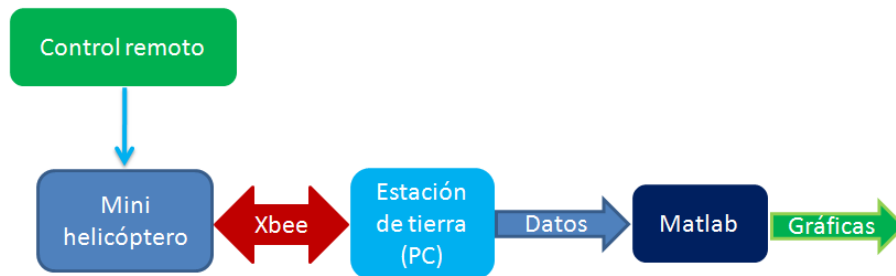


Figura 4.13: Procedimiento de pruebas

intencional se decidió este punto el cual representa una altura baja ya que es aquí donde se presenta una gran perturbación debido a la turbulencia generada por los rotores y, que a la vez es una altura segura para realizar un aterrizaje de emergencia sin riesgo a dañar el vehículo, con esto se pretende probar la robustez de la ley de control de orientación propuesto en este capítulo. En la figura 4.13 es mostrado esquemáticamente el procedimiento seguido para la realización de esta pruebas al cuadrirotor.

Los resultados experimentales de esta primera prueba son mostrados en las figuras 4.14 y 4.15. En estas se muestra el comportamiento del sistema en una prueba de 60 segundos en los cuales se comienza con el despegue hasta un punto deseado, manteniéndose a una altura determinada durante unos 40 segundos, para finalmente volver al punto de origen. En la primera gráfica de la figura 4.14 muestra la evolución de los torques de control para mantener la posición del vehículo en el punto deseado, se puede observar que sus valores tienen una variación constante para mantener el sistema estable sin desplazamiento lateral. La segunda gráfica muestra el comportamiento de la posición angular, se puede observar que los ángulos de alabeo  $\phi$  y cabeceo  $\theta$  se mantienen aproximadamente alrededor del valor cero con el fin de mantener la posición en el punto deseado, se observa que el ángulo de guiñada  $\psi$  esta lejos del origen, sin embargo esto no afecta la posición en el espacio. La tercera gráfica muestra el comportamiento de la velocidad angular, que se puede observar corresponde a los torques en los movimientos.

La figura 4.15 muestra el comportamiento de la entrada de control adicional, la fuerza de sustentación  $T$ , aquí se puede observar que la fuerza se mantiene alrededor del valor 14.5, que es el necesario para mantener en vuelo al vehículo y en las coordenadas del punto deseado. Se debe notar que el valor de la fuerza  $T$  corresponde al peso del vehículo, como se verifica de la tabla 4.1. La última gráfica en esta figura muestra la altura alcanzada, alrededor de 1.5 metros sobre el piso, es posible apreciar que la posición tiene una variación de unos 50 centímetros alrededor del valor deseado, sin embargo debe considerarse que las pruebas se realizaron utilizando un sistema GPS para posición y el resultado entra en el rango de error del dispositivo, además de las características propias en el funcionamiento de los sensores y los actuadores del sistema.

Los siguientes resultados fueron obtenidos de la segunda prueba de la ley de control, se observa el comportamiento del sistema durante 90 segundos, el movimiento comienza con el despegue para luego ubicarse en un punto en el espacio, finalmente retorna al punto

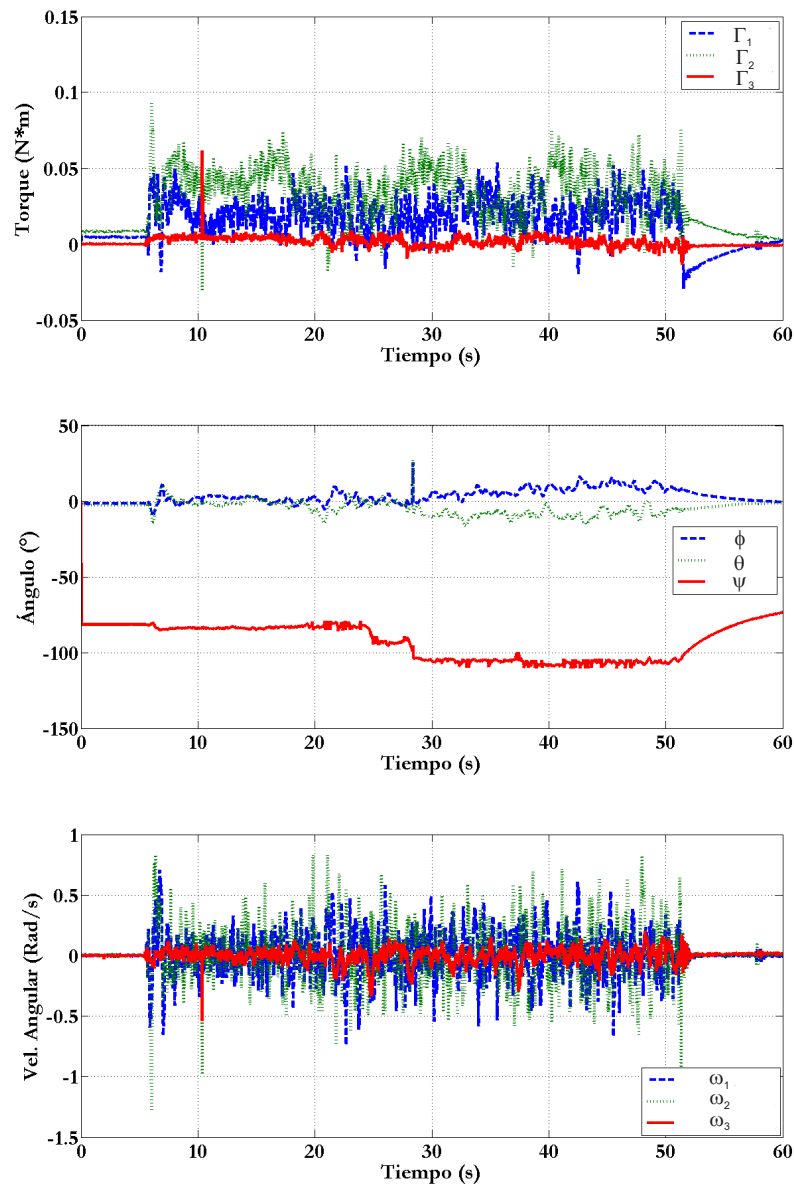


Figura 4.14: Resultados del control de torques  $\Gamma_{(1,2,3)}$ , los ángulos de Cardán y las velocidades angulares.

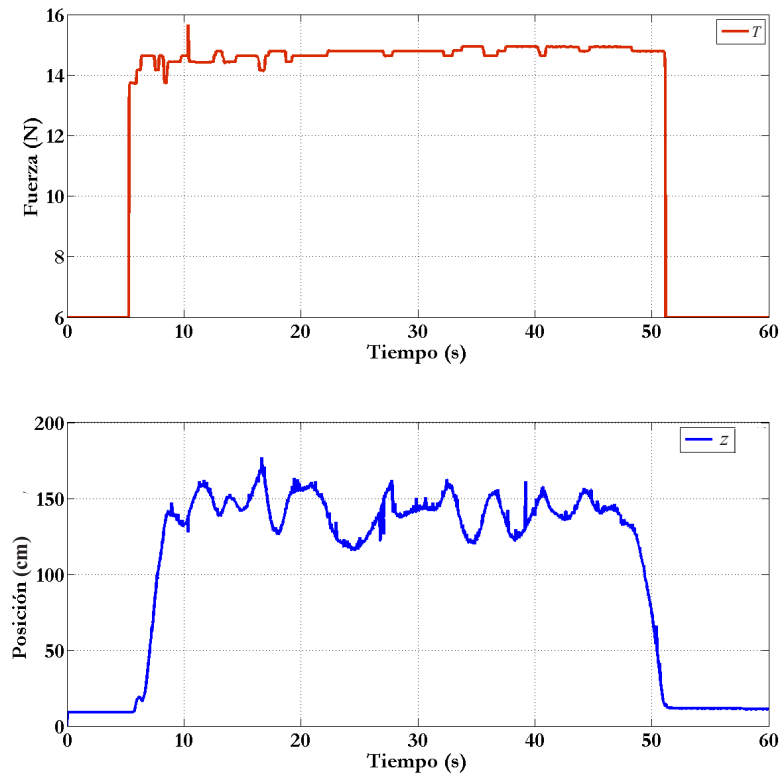


Figura 4.15: Resultados del control de sustentación  $T$  y la evolución de la posición en el eje  $z$ .

de origen. En la figura 4.16 se presentan gráficas que muestran la evolución de los torques de control así como la evolución de las variables correspondientes a los ángulos de Cardán y la velocidad angular. En cuanto a la gráfica de torques, se puede observar la evolución de estos, que son los que dirigen el movimiento angular del vehículo aéreo, con el fin de alcanzar una posición en el espacio previamente determinada. Es posible observar que los valores parten de cero y terminan en el mismo valor cuando termina la prueba, la variación entre estos valores corresponden al cambio en los ángulos para posicionar al vehículo en el punto deseado considerando que el sistema GPS utilizado para localizar la posición tiene un considerable error comparado con las dimensiones de la aeronave. Las dos gráficas siguientes muestran el comportamiento angular, en cuanto a la evolución de los ángulos, como de las velocidades angulares, las medidas son proporcionadas por una unidad IMU en el centro de masa del vehículo. Estas posiciones angulares son las provocadas por los torques y que son necesarias para llevar al vehículo a la posición deseada, y en principio es correspondiente con la gráfica de velocidades angulares de la última gráfica, también se puede notar una anomalía en el comportamiento del ángulo de guiñada, sin embargo, esto no afecta el rendimiento del control. Ambas gráficas comienzan con sus valores en cero y terminan de la misma manera.

El control de sustentación (empuje)  $T$ , la posición y velocidad lineales alcanzadas,

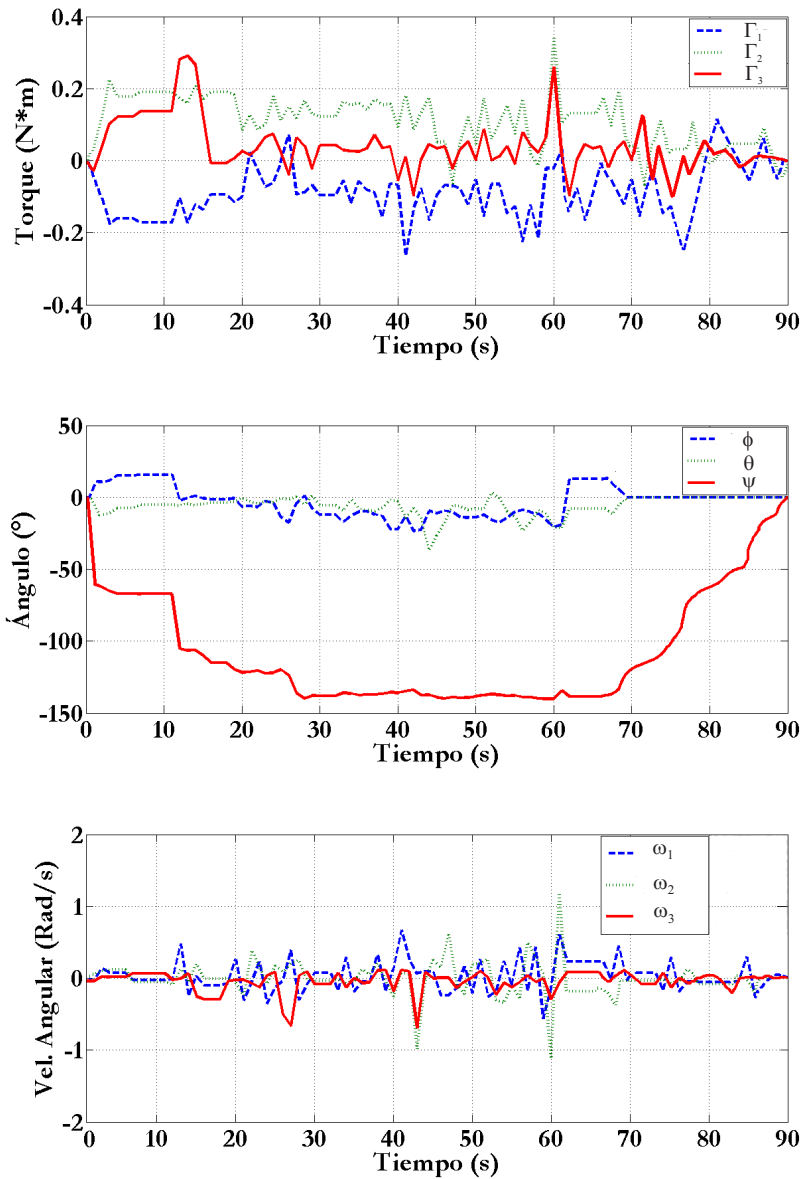


Figura 4.16: Resultados del control de torques  $\Gamma_{(1,2,3)}$ , los ángulos de Cardán y las velocidades angulares.

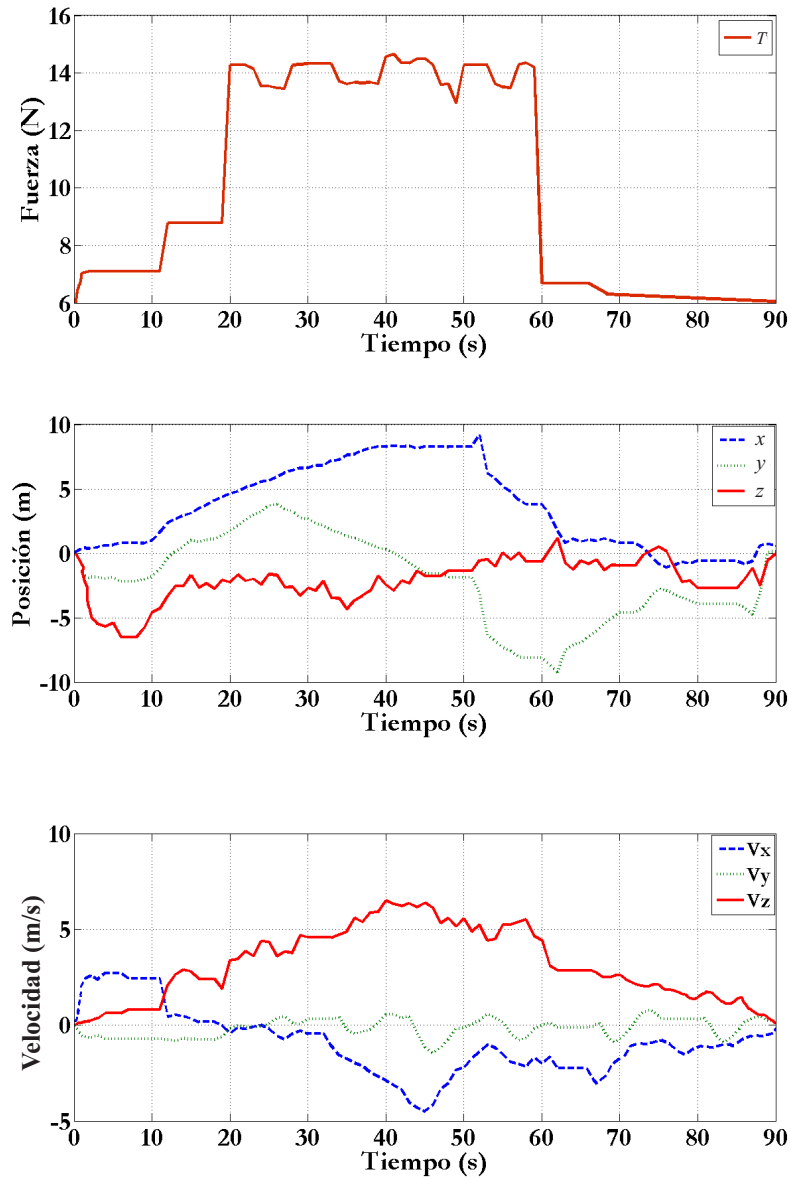


Figura 4.17: Resultados del control de sustentación  $T$ , la posición en el espacio y las velocidades lineales.

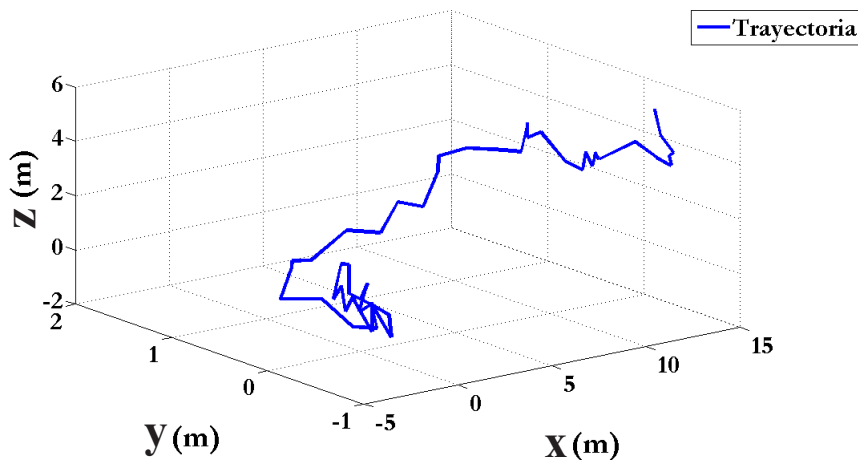


Figura 4.18: Gráfica de la evolución de la posición del vehículo aéreo en 3D.

respectivamente, se muestran en las gráficas de la figura 4.17. En cuanto al control de sustentación, se nota el aumento en su magnitud con el fin de elevar la nave y luego mantenerla en sustentación entre el segundo 20 y el 60, aproximadamente. La gráfica de posición en el espacio, muestra variaciones en los ejes  $x$  y  $y$  propios de la dinámica de la aeronave, en el eje  $z$  el movimiento se da en valores positivos, pues la aeronave considera su punto de origen en el piso, por lo que no puede tomar valores negativos, solo al final la gráfica muestra esta anomalía, sin embargo se considera un error en la medida del sensor, al final, todos los valores de posición tienden al origen de coordenadas, como era de esperarse. La tercera gráfica muestra el comportamiento de las velocidades según las medidas proporcionadas por el GPS, en general se muestra una correspondencia con la gráfica anterior. La figura 4.18, muestra gráficamente la evolución parcial de la posición del cuadricóptero en el espacio de tres dimensiones.

Para concluir, se muestran los resultados obtenidos de la tercera prueba experimental de la ley de control que consiste en partir del origen de coordenadas, seguir una trayectoria para alcanzar cuatro puntos adicionales en el espacio y volver al origen, formando un cuadrado en el espacio, todo esto en un lapso de 110 segundos. En la figura 4.19 se muestran gráficas de la evolución correspondientes a los torques de control, además del comportamiento de los ángulos de Cardán y las velocidades angulares. Los datos son obtenidos del sistema IMU y corresponden a los torques aplicados para producir los ángulos necesarios para el movimiento de traslación. La segunda gráfica muestra el comportamiento del movimiento angular, es posible observar como los valores de los ángulos  $\phi$  y  $\theta$  no varían ampliamente, solo lo necesario para lograr la traslación del vehículo a los puntos deseados, también se observa una anomalía en el ángulo  $\psi$ , que en principio no afecta el movimiento de la aeronave y bien puede tratarse de un error en la medición del sensor. En cuanto a las velocidades angulares, mostradas en la última gráfica, están relacionadas con los torques, se puede observar una gran actividad por parte del vehículo para mantener la estabilidad de la posición angular y alcanzar los valores deseados de la posición en el espacio.

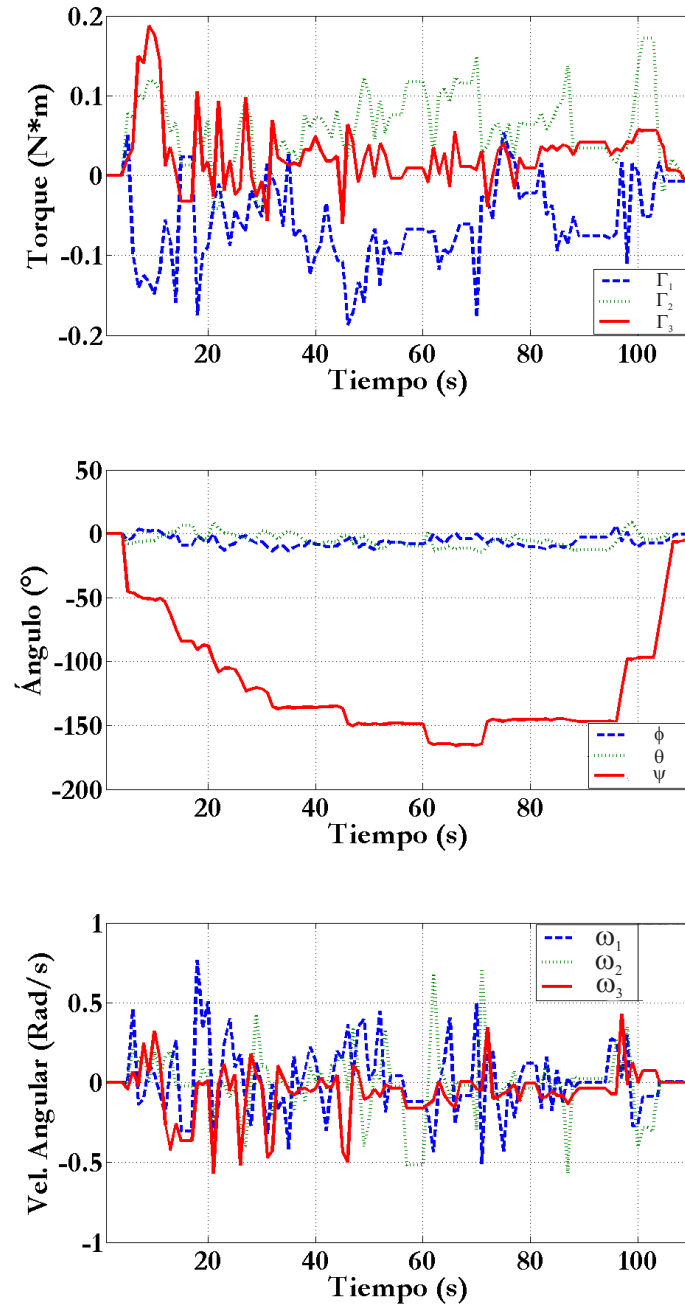


Figura 4.19: Resultados del control de torques  $\Gamma_{(1,2,3)}$ , los ángulos de Cardán y las velocidades angulares del experimento 3.

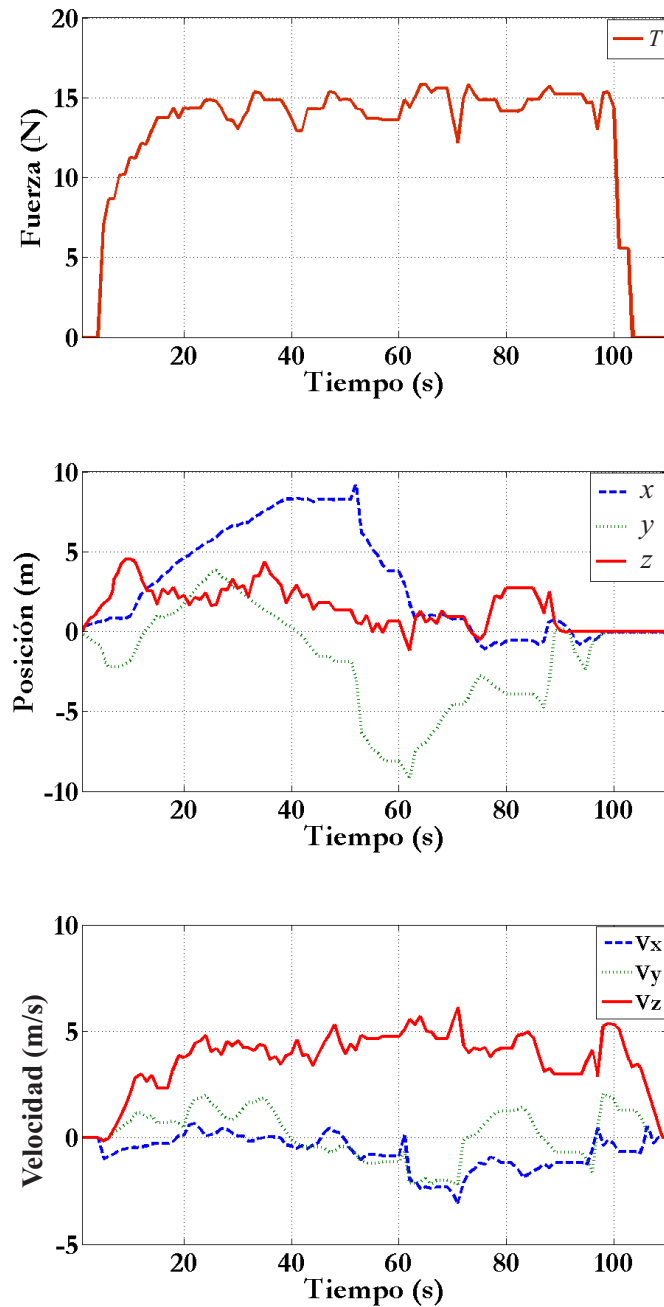


Figura 4.20: Resultados del control de sustentación  $T$ , la posición en el espacio y las velocidades lineales para el experimento 3.

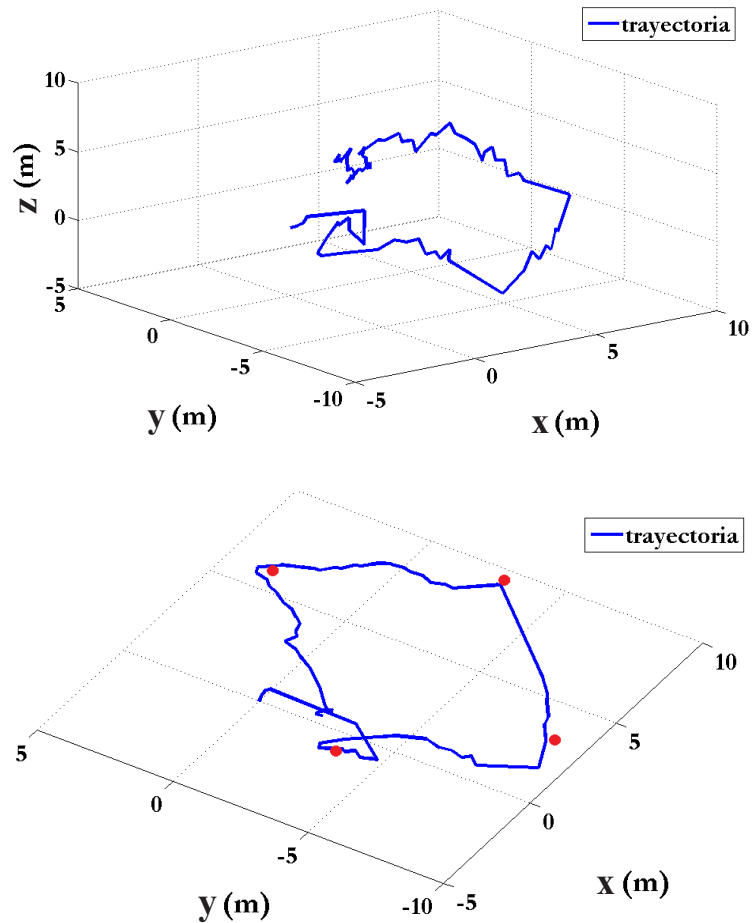


Figura 4.21: Resultados del control en tiempo real del movimiento del vehículo en 3D y los puntos de posición deseados vistos en el plano  $x - y$ , para el experimento 3.

La figura 4.20 muestra gráficas del comportamiento del control de sustentación (empuje), así como de las variables posición y velocidad lineales, respectivamente. En cuanto a la fuerza  $T$ , se observa el incremento en su magnitud hasta lograr la sustentación del vehículo, así como variaciones que junto con el movimiento angular, producen la traslación del VTOL, la magnitud se mantiene alrededor de  $15N$ , en correspondencia con la masa definida en la tabla 4.1. En la segunda gráfica es posible observar como las posiciones en cada uno de los ejes varían de tal manera que el vehículo pueda alcanzar los valores deseados, en el caso de los valores en los ejes  $x$  y  $y$ , se observa una variación importante, pues en ambos casos se alejan del origen de coordenadas, para el caso del eje  $z$ , los valores permanecen alrededor de  $2.5$  m, pues la altura no varía cuando se trata de alcanzar los puntos mencionados, a excepción del error introducido por el sistema GPS utilizado. La gráfica de velocidad se corresponde con los valores de la posición.

Finalmente, la figura 4.21 muestra una gráfica de la trayectoria del vehículo en el espacio de tres dimensiones, desde el inicio en el punto de origen hasta el punto que alcanza al

final de la trayectoria, como antes, el hecho de no tocar exactamente el mismo punto del inicio se debe principalmente al error del sistema GPS utilizado, y no necesariamente a errores en el control. Adicionalmente, se ha incluido una gráfica en dos dimensiones, donde se aprecian los puntos deseados y los valores correspondientes para los ejes  $x$  y  $y$ , en el caso del valor en el eje  $z$ , este fue el mismo para todos los puntos.

Con esto se da por terminado el trabajo de tesis. En este, se propusieron leyes de control, las cuales fueron probadas utilizando el formalismo de Lyapunov, adicionalmente, se probaron en simulación para tener una aproximación a su comportamiento real, por último, y que es una aporte importante de este trabajo, es que las leyes propuestas para el movimiento del VTOL fueron probadas experimentalmente en tiempo real utilizando un vehículo aéreo cuadrirotor construido para tal fin. Es claro que los resultados en simulación y en tiempo real no presentan el mismo comportamiento o el mismo rendimiento, sin embargo, esto se debe en gran medida a las características de funcionamiento de los elementos electrónicos y de sensores, así como la precisión del sistema GPS utilizado para determinar la posición, que no obstante de ser bastante útil, para aplicaciones de control de mini naves aéreas, no debe ser utilizada exclusivamente en aplicaciones de precisión.

## Capítulo 5

# Conclusiones

De lo expuesto anteriormente, se pueden establecer las siguientes conclusiones para cada uno de los capítulos presentados en este trabajo de tesis.

Capítulo 1:

- Se consiguió establecer y justificar teóricamente un modelo matemático que describe el movimiento de los vehículos VTOL, que han sido tratados en este trabajo.

Capítulo 2:

- Se ha logrado diseñar dos leyes de control de orientación inspirados en la naturaleza, en particular en las características de vuelo de insectos, tomando en consideración un paradigma distinto al control de vuelo convencional.
- Además, las leyes de control propuestas son simples, basadas en una mayor cantidad de información obtenida mediante un mayor número de sensores y no en procesos de cálculo, con lo que se reduce el costo computacional.
- En cada una de las propuestas de ley de control, su estabilidad ha sido probada utilizando el formalismo de Lyapunov, con lo que se asegura su correcto funcionamiento.
- Como una forma de corroborar lo anterior, también se consiguió construir un simulador computacional utilizando la herramienta Simulink/Matlab con la finalidad de realizar pruebas en simulación de cada propuesta de control de orientación, los resultados muestran el buen rendimiento de las propuesta de control.
- Constituye uno de los aportes fundamentales de este trabajo, la posibilidad de probar experimentalmente las propuestas de control en sistemas reales. En este trabajo se muestran pruebas en tiempo real para los controles de orientación propuestos en este capítulo utilizando uno de los vehículos cuadrirotor construidos en el Laboratorio de Control Avanzado de la FCE-BUAP cuyos resultados muestran la efectividad de estos controles.

## CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

---

- Los resultados obtenidos en este capítulo constituyen el contenido del artículo publicado en la revista de investigación *Micromachines* que lleva por título “Biomimetic-Based Output Feedback for Attitude Stabilization of Rigid Bodies: Real-Time Experimentation on a Quadrotor” (ver [107]), el cual constituye un requisito parcial para la obtención del grado académico.

### Capítulo 3:

- Con el fin de proponer una ley de control de traslación efectiva, se consiguió aumentar el rendimiento de sistemas de control denominados Cadena de integradores, mediante un proceso dinámico de posicionamiento de polos, parte de este resultado ha sido utilizado para la propuesta de traslación.
- El resultado obtenido en este capítulo ha sido comparado con resultados de trabajos previos importantes, con lo cual se considera su publicación futura.

### Capítulo 4:

- Se logró el diseño de una ley de control de orientación adicional con un alto rendimiento capaz de realizar seguimiento de trayectorias de orientación y que sirve de base para la propuesta de ley de control de traslación.
- Se consiguió diseñar una ley de control de posición la cual utiliza los sistemas de cadenas de integradores en su funcionamiento.
- Adicionalmente, tomando en consideración la estructura de la última propuesta de control de orientación, se logró proponer una modificación a la ley de control de traslación para extender sus capacidades al seguimiento de trayectorias en el espacio.
- Se ha logrado establecer un conjunto de leyes de control, de orientación y traslación, que por sus características pueden ser utilizadas en una amplia gama de vehículos aéreos o, mediante algunas modificaciones, incluso en vehículos terrestres, submarinos u otros sistemas que necesiten ser orientados o moverse en direcciones específicas.
- La estabilidad de estas propuestas de control han sido probada utilizando de igual manera el formalismo de Lyapunov, lo que asegura su correcto funcionamiento.
- De la misma forma, el simulador computacional basado en Simulink/Matlab se utilizó para realizar pruebas en simulación de cada propuesta de control presentada aquí, los resultados aseguran el buen rendimiento del control.
- Como antes, fue posible probar experimentalmente las propuestas de control en un sistema real. Pruebas en tiempo real para los controles de orientación y traslación han sido realizadas utilizando un segundo vehículo cuadrirotor construido igualmente en el Laboratorio de Control Avanzado de la FCE-BUAP cuyos resultados muestran el buen desempeño de estos controles.
- Los resultados obtenidos de este capítulo también constituyen el contenido para una publicación adicional futura.

## Apéndice A

# Diseño de Simulador

Con el fin de contar con una herramienta virtual donde realizar pruebas del desempeño de las propuestas de control en este trabajo de tesis, se desarrollo un simulador utilizando la aplicación MATLAB/Simulink. Esta aplicación permite configurar mediante un ambiente gráfico, los modelos matemáticos que describen el comportamiento del sistema a estudiar, de una manera amigable al usuario, y cuenta con una buena cantidad de herramientas adicionales que permiten la introducción de elementos necesarios para la completa manipulación y observación del sistema a trabajar, dando como resultado una herramienta capaz de describir el posible comportamiento del sistema estudiado bajo la acción de distintos factores y mostrarlos de forma gráfica. Mediante la utilización de diagramas a bloques han sido representados los modelos matemáticos utilizados en este trabajo, las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema están expresadas en estos diagramas de tal manera que el vehículo se comporta según la descripción de estas, en cada instante de tiempo. De la misma manera, se utilizan bloques para introducir los controles, tanto de orientación como de traslación, que han sido analizados. Adicionalmente, esta aplicación cuenta con una librería denominada V-Realm builder, la cual permite desarrollar una animación del sistema real y mostrar en imagen el comportamiento del sistema simulado, lo cual proporciona información valiosa sobre el rendimiento de los controles probados de esta manera, sin necesidad de poner en riesgo el dispositivo real, lo cual supone un ahorro considerable de recursos.

### A.1. Presentación de resultados

La forma en cómo la herramienta MATLAB/Simulink presenta los resultados de las simulaciones realizadas se puede observar en la figura A.1, en estas gráficas se muestra la información de tal y cómo evolucionan las variables de estado del sistema durante la simulación, dando una idea de la forma en cómo se comportaría en una situación real en condiciones determinadas, al mismo tiempo, se puede observar, de la misma manera, el rendimiento de las propuestas de control probadas en esta situación y es posible ajustar algunos parámetros para mejorar su desempeño, lo cual proporciona una forma de asegurar que las propuestas funcionen de mejor manera cuando se tengan que realizar las pruebas

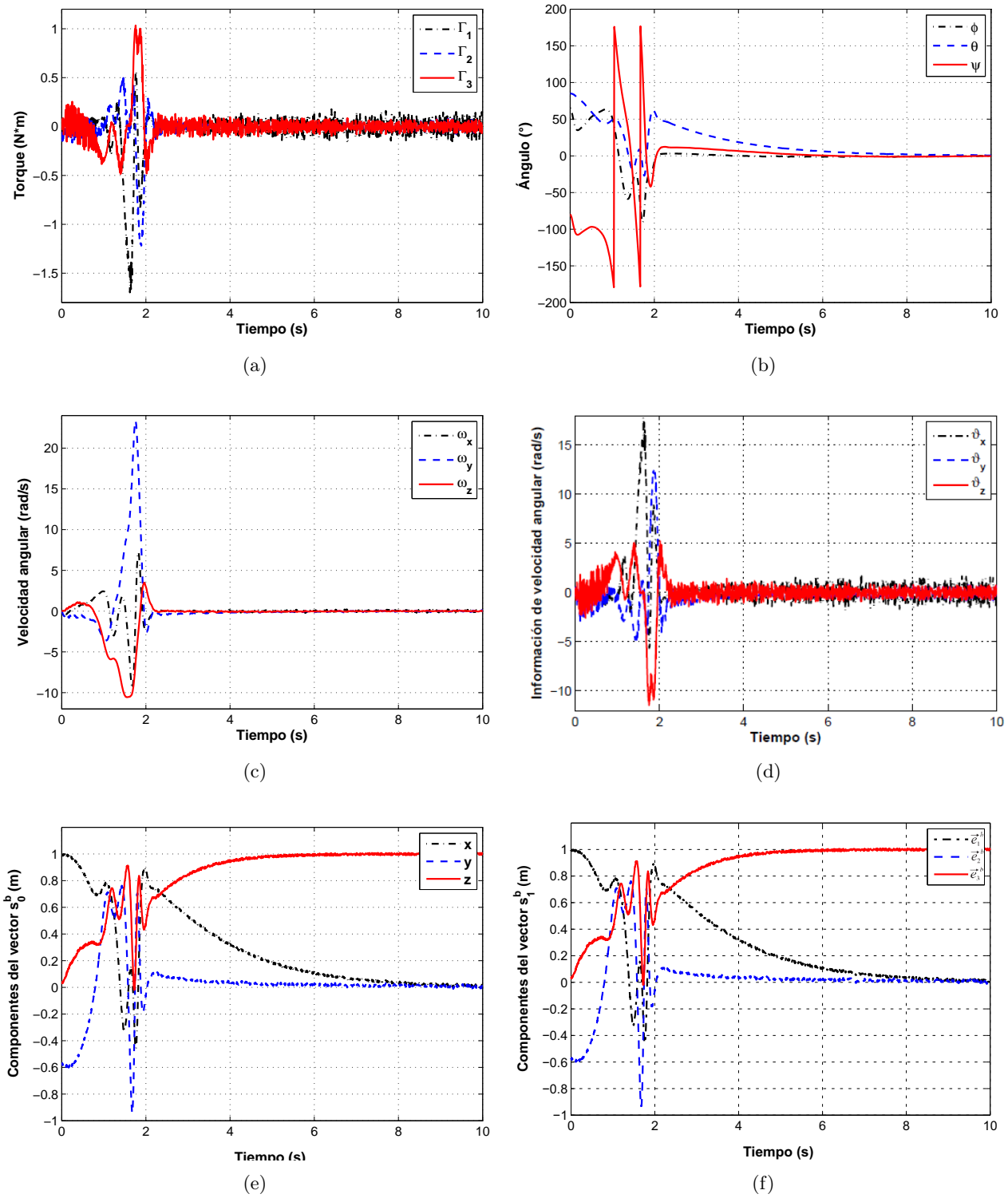


Figura A.1: Ejemplos de cómo son presentados los resultados en simulación usando MATLAB/Simulink.

en situaciones reales. En el inciso (a) se puede observar el desempeño de los torques de control para estabilizar el sistema en los valores requeridos, el resto de los incisos muestran los valores de las variables de estado del sistema, tales como posiciones y velocidades, tanto para el movimiento rotacional como el movimiento traslacional en situaciones que serán descritos en capítulos subsiguientes.

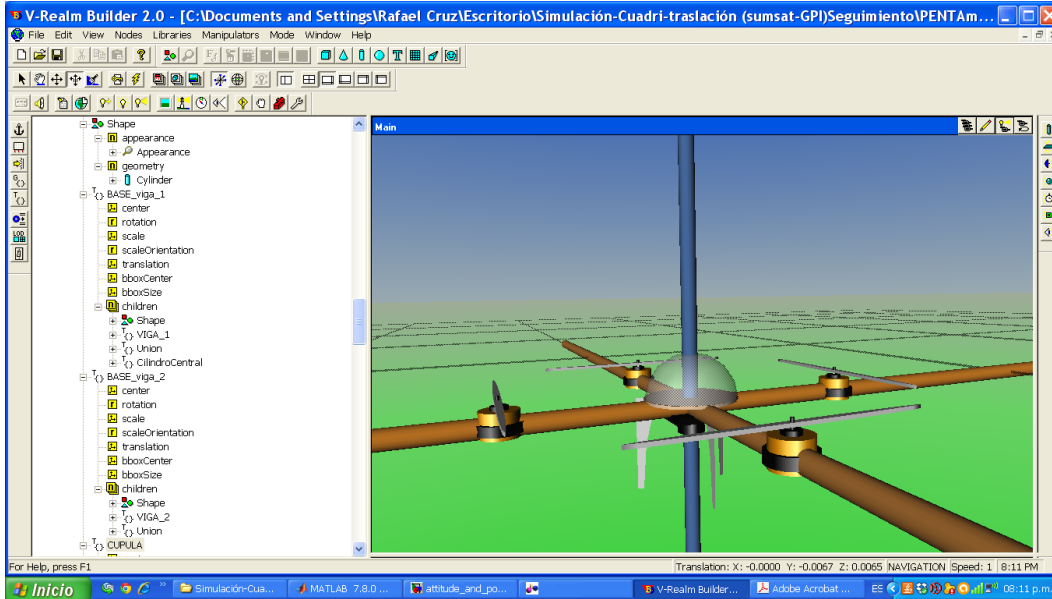
En general, las gráficas proporcionan la información de cada uno de los parámetros o variables que se necesitan conocer para la correcta interpretación de resultados, de esta manera es posible verificar de forma rápida el efecto que tiene en el comportamiento del sistema la variación en el valor de los parámetros que pueden ser manipulados con el fin de mejorar el rendimiento del control. Finalmente, los resultados pueden ser mostrados con la calidad suficiente para su análisis.

## A.2. Animación

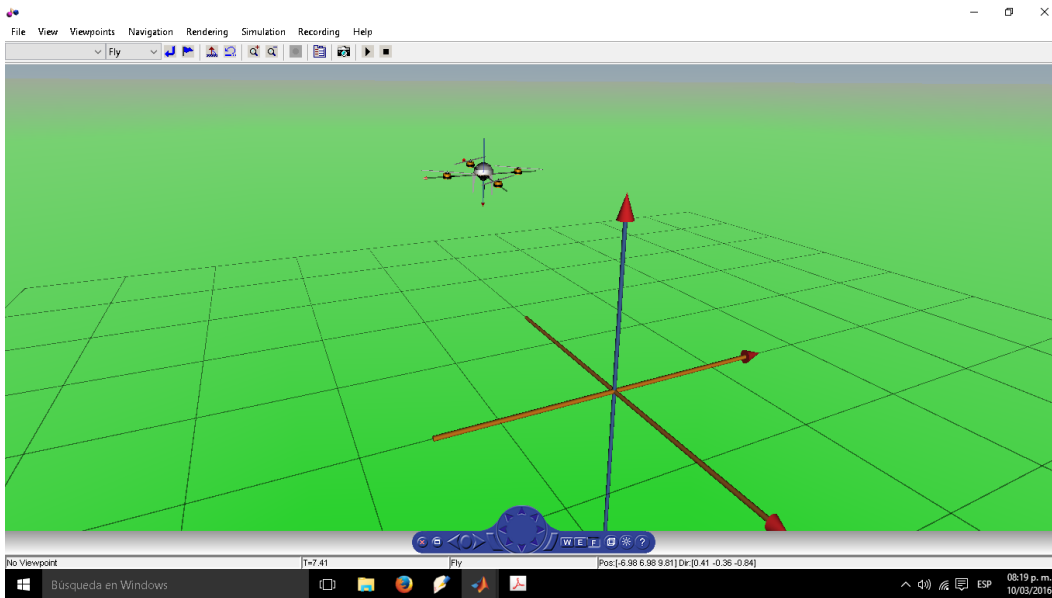
La aplicación V-Realm builder tiene el propósito de crear imágenes en tres dimensiones mediante la combinación de figuras geométricas básicas, las cuales pueden ser manipuladas en varias de sus características, como son dimensiones, posición, orientación, color, etc., estas figuras pueden ser vinculadas o no unas con otras para lograr efectos deseados en la animación. En la figura A.2 se puede observar una imagen muestra del vehículo Cuadrirotor virtual que se implementó en esta aplicación, así como una vista de cómo se observa una vez que se utiliza en Simulink, lo anterior se realiza con el fin de lograr visualizar del comportamiento del sistema bajo las condiciones establecidas para la simulación, es decir, observar el movimiento del vehículo determinado por el modelo matemático presentado anteriormente, así como el efecto que tienen los controles propuestos, su rendimiento y cómo varían estos bajo modificaciones en los valores de sus parámetros, así como también los efectos producidos por perturbaciones o alguna otra condición particular de interés. Todo esto es posible gracias a una característica importante con que cuenta esta aplicación, esta consiste en que el movimiento de los objetos creados con ella pueden ser vinculados con los diagramas a bloques diseñados en Simulink, con lo cual se puede observar el movimiento de los objetos dependiendo totalmente de las ecuaciones del modelo establecido, al mismo tiempo que es posible agregar más características a la simulación, como pueden ser la consideración de perturbaciones adicionales o la manipulación del objeto con dispositivos de control manual como joystick o algún otro elemento.

Adicionalmente, se hace uso de una animación creada para presentar algunos resultados de [16], esto es por la capacidad de esta para trazar la trayectoria realizada por el vehículo, característica con que todavía no cuenta V-Realm builder de MATLAB. La figura A.3 muestra un ejemplo de la característica mencionada, la cual fue presentada en el trabajo de tesis [124].

## APÉNDICE A. DISEÑO DE SIMULADOR



(a)



(b)

Figura A.2: Animación de un Cuadrirotor realizado en V-Realm builder y en (b) una vista de como se observa al vincularse con el diagrama a bloques de Simulink.

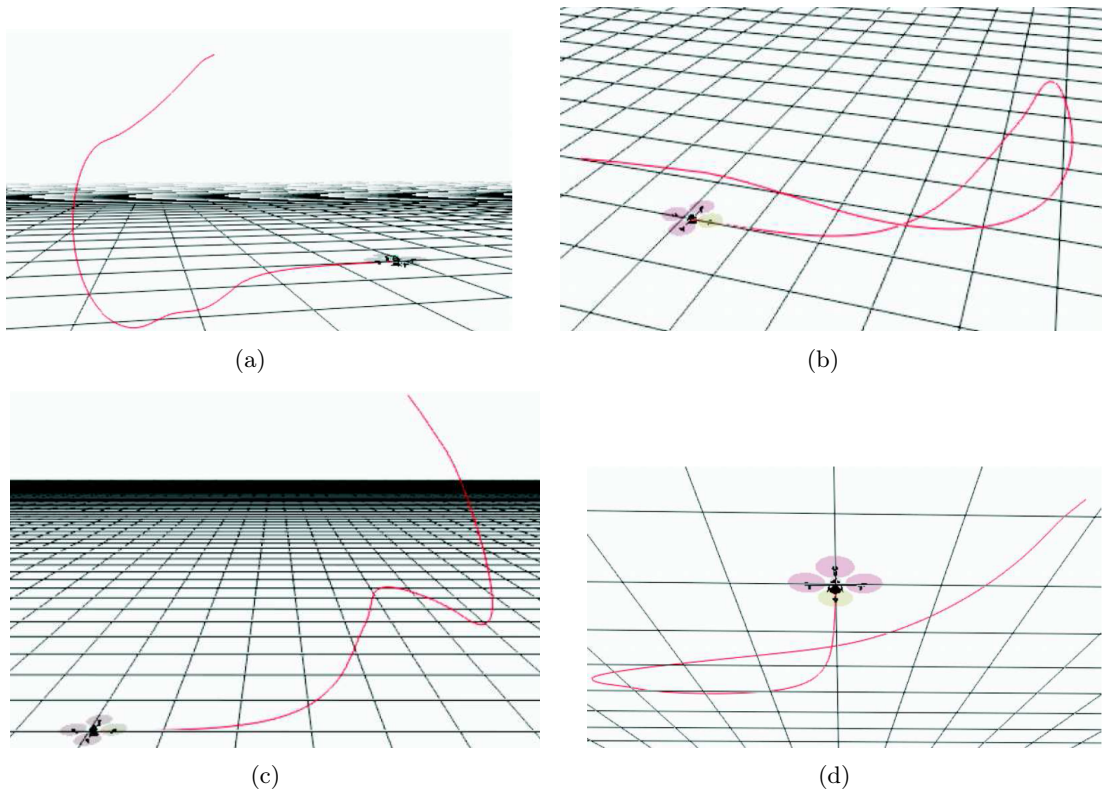


Figura A.3: Última parte de una trayectoria de aeronave vista desde distintas perspectivas.



## Apéndice B

# Características técnicas del vehículo cuadirotor

<sup>1</sup>En este Apéndice se describen los componentes básicos de la plataforma experimental desarrollada en el Laboratorio de Control Avanzado, la Figura B.3 muestra el vehículo aéreo desarrollado con el propósito de realizar pruebas de propuestas de control.

### B.1. Sistema VTOL

En la Figura B.1 se observa el diagrama a bloques del sistema completo.

El sistema aéreo es un mini helicóptero cuadirotor constituido por la plataforma experimental, motores, variadores, hélices, sistema inercial (AHRS) y la FPGA que se encarga del procesamiento del control propuesto.

#### B.1.1. Descripción de la plataforma experimental

El prototipo se basa en una estructura mecánica en forma de cruz de fibra de carbono y cuenta con un amplio espacio para la instalación de los componentes electrónicos, de control y comunicaciones, incluida una cámara de video. Los elementos que componen la plataforma experimental se muestran en la tabla B.1 y en la Fig. B.4 se muestra la plataforma experimental.

En Fig. B.5 se observa un esquema gráfico completo del sistema y la ley de control acoplados; la ley de control es ejecutada en una tarjeta Pipistrello Spartan 6 FPGA LX45-3 de la compañía Saanlima Electrónica en el cual se implementó un microprocesador embebido (MicroBlaze). Se usa un Sistema de Referencia de Actitud y Rumbo (*AHRS* por sus siglas en inglés Attitude and Heading Reference System) y un GPS. Los datos de los sensores inerciales y GPS se fusionan mediante un filtro extendido de Kalman, que permite

---

<sup>1</sup>El contenido de este apéndice está tomado en su mayoría del capítulo 5 del trabajo de tesis de maestría [123].

APÉNDICE B. CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DEL VEHÍCULO CUADRIROTOR

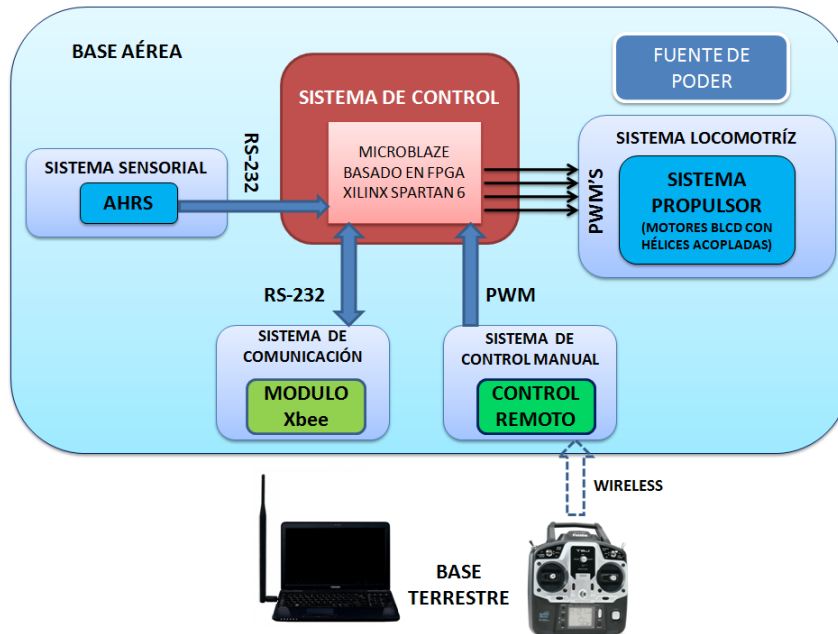


Figura B.1: Diagrama a bloques del sistema.

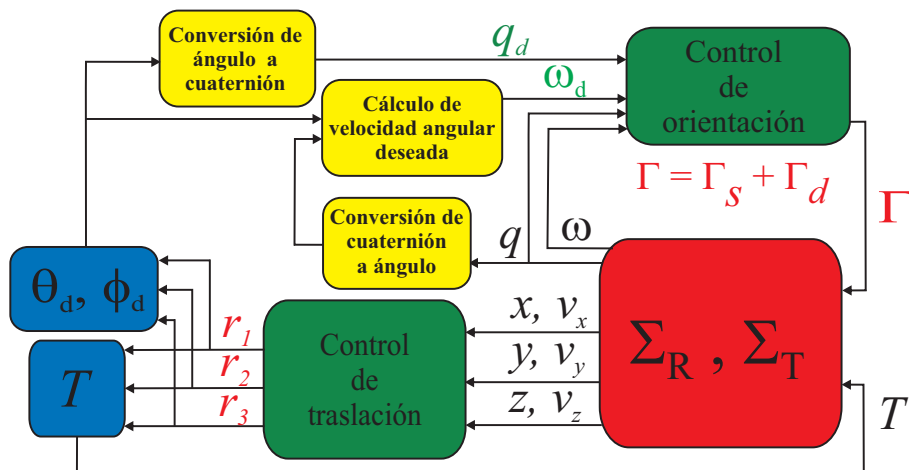


Figura B.2: Esquema completo del sistema y el control.



Figura B.3: Mini helicóptero de cuatro rotores.

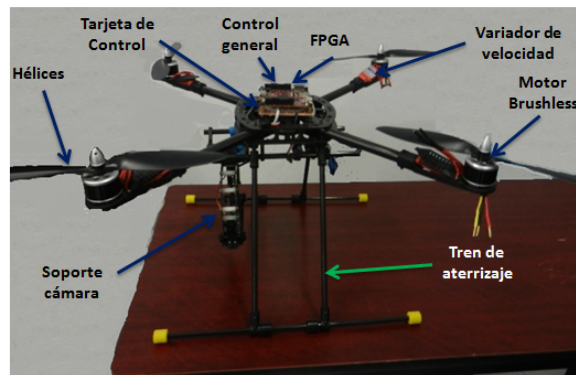


Figura B.4: Partes principales del mini helicóptero de cuatro rotores.

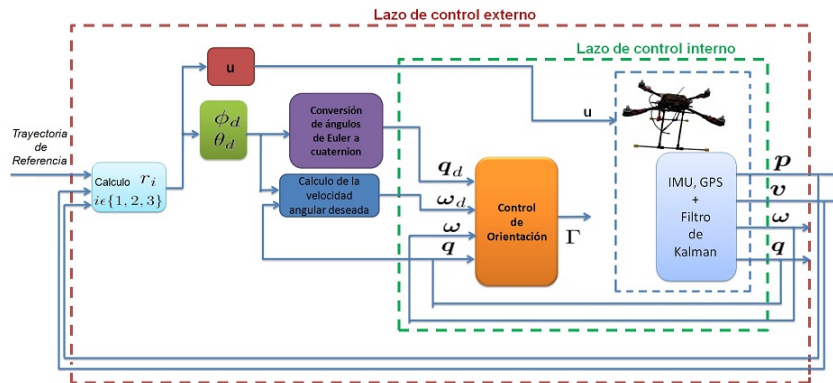


Figura B.5: Esquema completo del sistema y el control.

obtener una buena estimación de la actitud, posición y velocidad en un sistema de referencia local NED (Norte, Este y Hacia abajo). La calidad de esta estimación es primordial ya que estos datos son utilizados directamente por las leyes de control.

El sistema de navegación estima las variables de estado a una tasa de transmisión de 100Hz. Se utiliza un módulo Xbee vinculado con una estación en tierra (PC) por un puerto serial para el intercambio de los datos. Se tienen cuatro módulos de potencia que se utilizan para accionar los motores por medio de una señal PWM cuya frecuencia se fija a 500 Hz. La fuente de alimentación de todo el sistema es dada por una batería de Polímero de Litio (LiPo) de 11,1 voltios.

### B.1.2. Estructura mecánica del mini helicóptero de cuatro motores

Se adquirió una estructura nueva para el desarrollo del mini helicóptero de cuatro rotores debido a las dimensiones y peso; la cual está diseñada de fibra de carbono. Fue ensamblada por el grupo de control puesto que no se contó con los medios para diseñar una estructura propia. Las características del mini helicóptero se observan en la tabla B.1. La bandeja de la batería puede acomodar una amplia gama de tamaños de la misma para que pueda estar seguro de obtener el tiempo de vuelo que desee. En una batería de 3S 2100mAh se puede esperar cerca de 8 minutos de vuelo por carga.

## B.2. Diseño e implementación de la tarjeta de control de vuelo

A continuación se describe el diseño de la tarjeta que interconectará todos los dispositivos que se utilizaron para el control del mini helicóptero de cuatro motores. Para lo cual se tomó en cuenta como dimensiones ( $100mm \times 85mm$ ) y un peso de ( $10grs$ ),

por lo que para cumplir con las características se hizo una tarjeta en doble capa para los componentes electrónicos, que se interconecta con la tarjeta del FPGA, y otra tarjeta exclusivamente para la alimentación del control del vehículo.

Se utilizó el programa *EAGLE*, de las siglas en Inglés (*Easily Applicable Graphical Layout Editor*) que es un programa de diseño de diagramas, circuitos impresos y tarjetas de circuito impreso PCB's de las siglas en Inglés (*Printed Circuit Board*). Muy ocupado alrededor del mundo de los proyectos electrónicos DiY, debido a que muchas versiones de este programa tienen una licencia Freeware y gran cantidad de bibliotecas de componentes alrededor de la red.

Entre los componentes que conforman la tarjeta tenemos:

- Integrado MAX3232CP
- Cinco capacitores cerámicos de  $0,1\mu f$  a 50V
- Circuito integrado 7805T
- XBEE-PRO
- FPGA Spartan 6
- Pines de conexión
- Resistencia de  $1k\Omega$
- Diodo 1N4148

En las figuras que se muestran a continuación podemos ver el diseño de la placa de doble capa Fig.B.6, la placa que es la alimentación y por último la placa completa en sus dos vistas Fig. B.7.

### B.3. Tarjeta de desarrollo Pipistrello

Pipistrello es una placa de desarrollo con un FPGA Xilinx Spartan 6 LX45-3, diseñada por Saanlima Electrónica; es un kit de la familia Xilinx que viene con un catalogo de IP cores, que incluye microprocesador soft MB, incluye el Software Development Kit (SDK) basado en el entorno "Eclipse" para escribir y depurar código. El diseño demanda periféricos que se diseñarán en el entorno Embedded Development Kit (EDK) y los ya incluidos hacen que la tarjeta sea ideal para la implementación en el cuadrirrotor, así como en el apartado del FPGA las principales características de la misma.

Se eligió en particular esta tarjeta debido al peso, tamaño, velocidad, puertos, número de entradas y salidas, capacidad de memoria, etc. A continuación veremos algunas de las características del dispositivo.

- Spartan 6 FPGA con 6 puertos, E/S generales (GPIO): 91 FPGA GPIO y 8 EZ-USB FX2 GPIO

## APÉNDICE B. CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DEL VEHÍCULO CUADRIROTOR

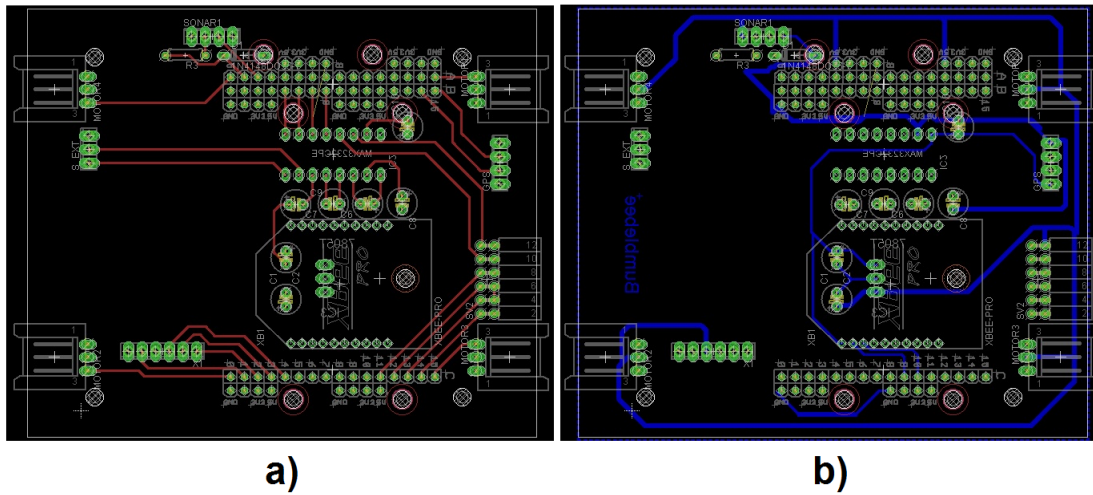


Figura B.6: Vista de la cara superior e inferior de la placa de la tarjeta: a)Vista superior, b)Vista inferior.

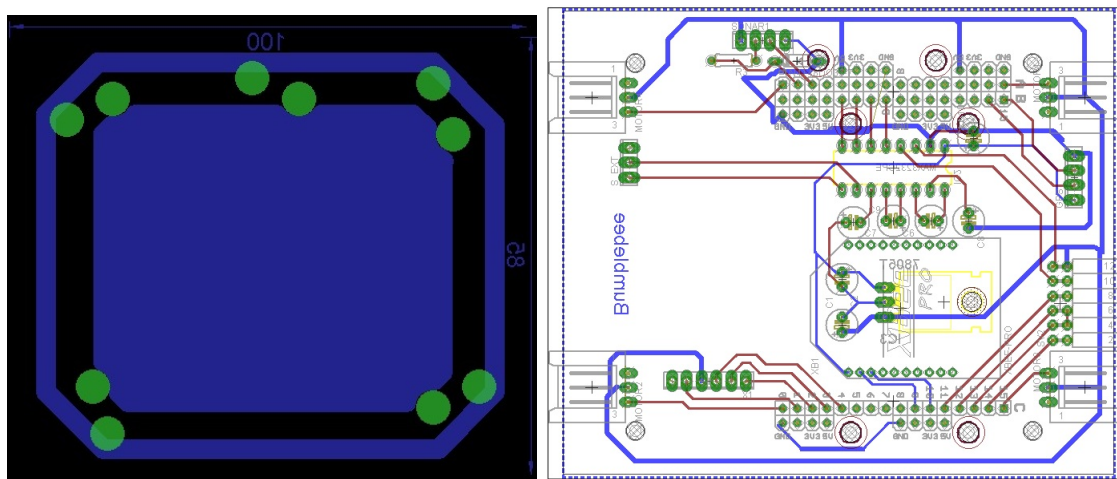


Figura B.7: Placa de alimentación y tarjeta completa.

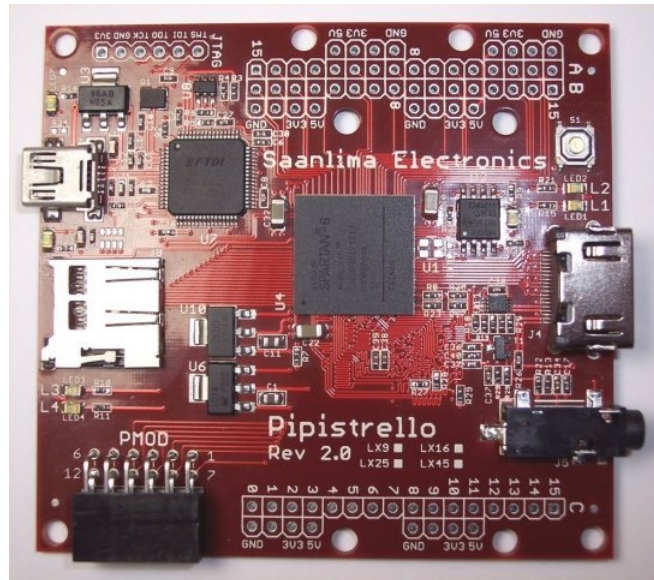


Figura B.8: Tarjeta Pipistrello FPGA SPARTAN 6.

- Velocidad (480 Mbit/s) Interfaz USB por conector Mini-USB (tipo B)
- La tarjeta tiene 48 E/S disponibles, 128 Mbytes DDR2 SDRAM y 400 MHz de frecuencia de reloj
- Ancho de bus 16 bits y hasta 24 MBytes/seg por USB
- Fuente de alimentación externa entre 1.2V a 3.3V y 300mA a 800mA
- Configuración de la FPGA/programación a través de USB
- Interfaz HDMI completo utilizando un tipo de 19-pin conector HDMI.
- Interfaz PMOD: Conector PMOD doble fila que permite el uso de una amplia gama de dispositivos PMOD y posee 10 E/S.
- Socket MicroSD para memoria ampliable flash (SDHC) estándar y de alta capacidad (compatibilidad con el modo SPI requerido)
- 128 Kbit EEPROM (puede ser usado para almacenar el firmware EZ-USB)

En la Fig. B.8 se muestra la tarjeta de desarrollo de desarrollo *Pipistrello*.

## B.4. Sistema de navegacion asistido por GPS 3DM-GX3-45

El Sistema de navegación es un sistema de alto rendimiento que combina sensores inerciales *MEMS* entre los cuales está un Sistema de Referencia de Actitud y Rumbo

## APÉNDICE B. CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DEL VEHÍCULO CUADRIROTOR



Figura B.9: Unidad de Medición (AHRS).

(*AHRS* por sus siglas en inglés Attitude and Heading Reference System), un receptor integrado *GPS* de alta sensibilidad, y un *Filtro extendido de Kalman* para generar una posición óptima, velocidad y actitud estimadas. Esta combinación de tecnologías da un mejor rendimiento de la salida *GPS* a corto plazo; sostiene el rendimiento de la actitud de *G*, y proporciona una mayor tasa de datos de *PVA* que el *GPS* típico y los sensores *AHRS* por separado.

La elección de la Unidad de medición *GPS 3DM-GX3-45* mostrada en la Fig. B.9 y cuyas características se dan en la tabla B.2, se hizo en base a su tamaño, rango de medida y bajo consumo de potencia.

- Posición exacta, velocidad y actitud estimados.
- Frecuencia de muestreo de alta velocidad y salidas de datos flexible.
- Alto rendimiento bajo vibración y alta gravedad.
- Pequeño y ligero del tipo industrial GPS/INS.

Esta unidad utiliza girómetros triaxiales para seguir la orientación dinámica y acelerómetros junto con magnetómetros triaxiales para seguir la orientación estática; el microprocesador incorporado contiene un algoritmo de filtrado empotrado, el cual mezcla en tiempo real las señales estáticas y respuestas dinámicas de los sensores lo que provee una rápida respuesta contra vibraciones y movimientos rápidos, eliminando así el desvío en la orientación medida. Esta provee compensación de temperatura completa para los sensores que la conforman, asegurando así un correcto funcionamiento sobre un amplio rango de temperaturas. La Fig. B.10 muestra un diagrama a bloques de los dispositivos que conforman.

La Unidad de medición proporciona la orientación de su sistema coordenado con respecto al sistema coordenado NED (Norte, Este, Dirección al centro de la tierra) mostrado en la Fig. B.11.

Si se orienta al sistema local coordenado de la Unidad de medición dado en la Fig. B.12, de tal forma que su eje *Z* esté apuntando hacia abajo a través del centro de la Tierra, su eje *X* esté apuntando al Norte y su eje *Y* esté apuntando al Este; se tendrá

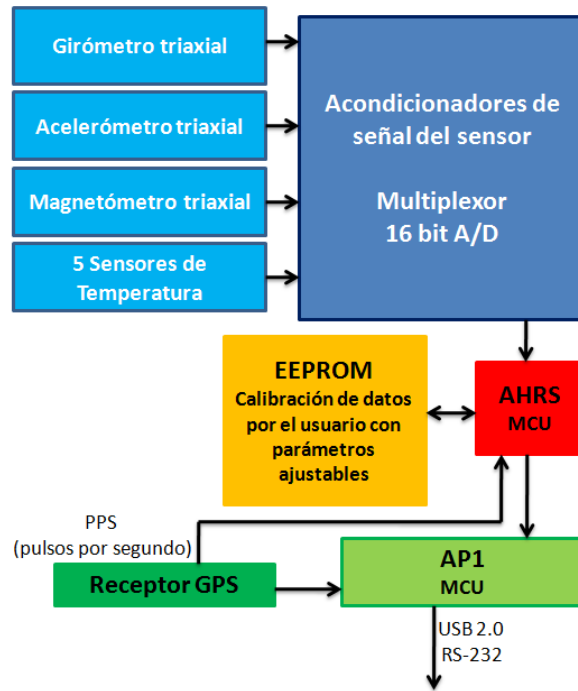


Figura B.10: Dispositivos que conforman el sistema de navegación.

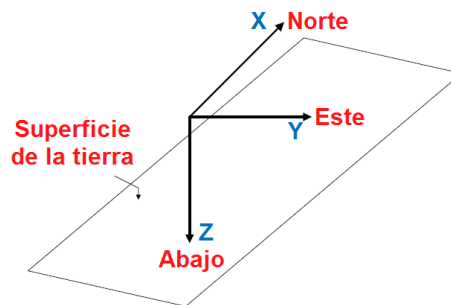


Figura B.11: Sistema coordenado terrestre.

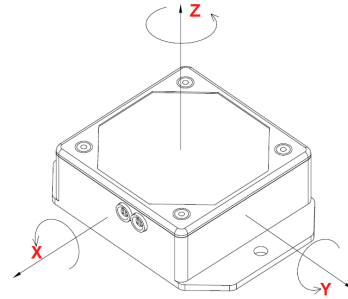


Figura B.12: Sistema local coordenado de la Unidad de medición.

entonces a la Unidad de medición alineada con el sistema coordenado de la Tierra. A tal orientación, la Unidad de medición estará proporcionando el llamado “cuaternión identidad” ( $q = [\pm 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ), lo cual significa que los ángulos de Pitch, Roll y Yaw son igual a cero. Si se comienza a rotar a la Unidad de medición, se empezarán a obtener ángulos distintos de cero.

La información de orientación proporcionada por la Unidad de medición correspondiente al cuaternión giro-estabilizado con vectores, es entregada en una cadena de 31 bytes, cada vez que la computadora huésped se lo pide mediante un comando específico. Dichos bytes son enviados vía protocolo RS-232 ó RS-485 al dispositivo donde serán procesados posteriormente. Para tal enlace se emplea el formato de 8 bits de datos y un bit de parada, los cuales son enviados a una velocidad de 75,000 baudios a través de las señales Tx y Rx respectivamente.

### Recepción de información de orientación de la AHRS

La información de orientación del cuadrirotor proporcionada por la AHRS llega al microprocesador cada vez que éste se lo pide, para ello la co-sentencia encargada de dicha tarea envía un comando específico a la AHRS y espera a que ésta le conteste con un determinado número de bytes dependiendo de la información orientación solicitada mediante dicho comando. La estructura de control empleada para estabilizar la orientación del cuadrirotor, dada por la ecuación (B.1), utiliza al cuaternión de error  $q_e$  y a las componentes de velocidad angular  $\omega_i$  para hacer el cálculo de los torques de control  $\Gamma(\phi, \theta, \psi)$ . El cuaternión de error  $q_e$  se obtiene a partir de la multiplicación entre los cuaterniones de referencia  $q_d$  y medido  $q_m$ , tal como lo establece la ecuación que se muestra a continuación.

$$q_e = q \otimes q_d^{-1} \tag{B.1}$$

Es por ello que para adquirir el cuaternión medido  $q_m$  y las componentes de velocidad angular  $\omega_i$ , dicha tarea envía el comando 0x0C a la AHRS, a lo cual ésta responde con la

información de orientación correspondiente al Cuaternión giro-estabilizado con vectores. Tal información es entregada en una cadena de 31 bytes.

La información concerniente a cada elemento del cuaternión y a cada vector, está representada en un entero con signo de 16 bits conformado por los bytes MSB y LSB . Por lo tanto se debe concatenar dicha información y multiplicarla por un determinado factor para dimensionarla a las unidades requeridas, tal proceso se describe en la Fig. B.13.

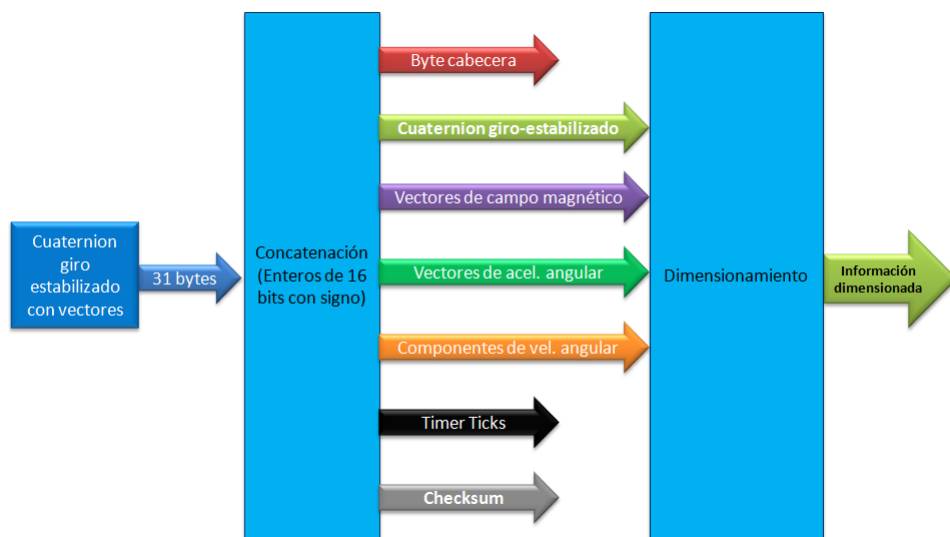


Figura B.13: Recepción, concatenación y dimensionamiento de la información de orientación recibida.

## B.5. Sistema de propulsión

El sistema de propulsión está compuesto por cuatro motores sin escobillas de corriente directa *Brushless* (BLDC) y los variadores de velocidad. Estos motores son conmutados electrónicamente. Los motores BLDC son un tipo de motor síncrono, esto significa que el campo magnético generado por el estator y el campo magnético generado por el rotor gira a la misma frecuencia, por lo que no experimentan el “resbalón” que se presenta normalmente en los motores de inducción. En nuestro caso ocuparemos el brushless (BLDC) Hobbylord ST2812 Motor 930KV.

### B.5.1. Motores brushless

Los motores síncronos tal como los motores BLDC, están conformados por el estator o carcasa y una parte móvil que es el rotor. El rotor es donde se encuentran los imanes permanentes y en el estator van dispuestos los bobinados de hilo conductor. La imagen refleja una sección de uno de estos motores en donde puede verse la disposición de los bobinados y los imanes permanentes (que en este caso son de neodimio). Los diversos tipos de máquinas trifásicas de CA, en su mayoría tienen el mismo tipo de estator, es el rotor el cual es diferente.

En este tipo de motor la corriente eléctrica pasa directamente por los bobinados del estator o carcasa, esta corriente eléctrica genera un campo electromagnético que interacciona con el campo magnético creado por los imanes permanentes del rotor, haciendo que aparezca una fuerza que hace girar al rotor y por lo tanto al eje del motor.

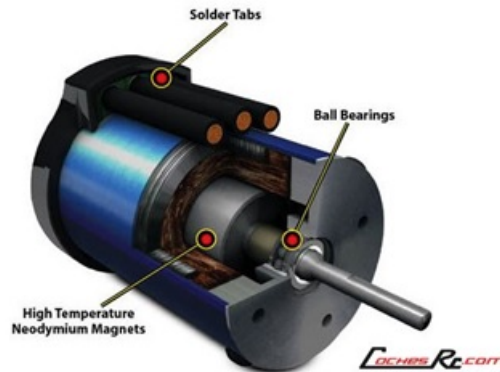


Figura B.14: Motor brushless (BLDC).

El variador electrónico controlará que el rotor gire sea cual sea su posición; lo que hace básicamente es ver en qué posición se encuentra el rotor en cada momento, para hacer que la corriente que le llegue sea la adecuada para provocar el movimiento de rotación que le corresponde. Esto es posible gracias a unos sensores en el motor, o también mediante la respuesta obtenida, o mejor dicho, observación de cómo se comporta la corriente del motor. Por este motivo, los variadores empleados en este tipo de motores son algo más complicados que los utilizados en brushed, ya que deben analizar la respuesta y los datos de funcionamiento del motor según están teniendo lugar, es decir, en tiempo real.

En la Fig. B.15 se muestra la interfaz gráfica diseñada en el software MATLAB Simulink para obtener del Sistema de Referencia de Actitud y Rumbo (AHRS) los datos de LLH, altura, empuje, cuaterniones, ángulos de Euler, velocidad angular, torques de control.

## APÉNDICE B. CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DEL VEHÍCULO CUADRIROTOR

Tabla B.1: Características del mini helicóptero.

Descripción de la plataforma experimental	
Distancia entre ejes:	550mm
Altura:	305mm
Peso:	1490 gramos
Capacidad de carga:	200-500gramos
Batería:	11.1V 3300mAh

Tabla B.2: Características de la IMU *3DM-GX3-45*.

Características	
Rango de orientación	Escala completa de $360^\circ$ para los tres ejes
Rango de velocidad angular	$\pm 360^\circ/s$ (max)
Resolución del convertidor A/D	12 bits
Resolución de los ángulos de orientación	$< 0,1^\circ$
Voltaje de alimentación	5.2 a 12 VCD
Peso	40 grs.

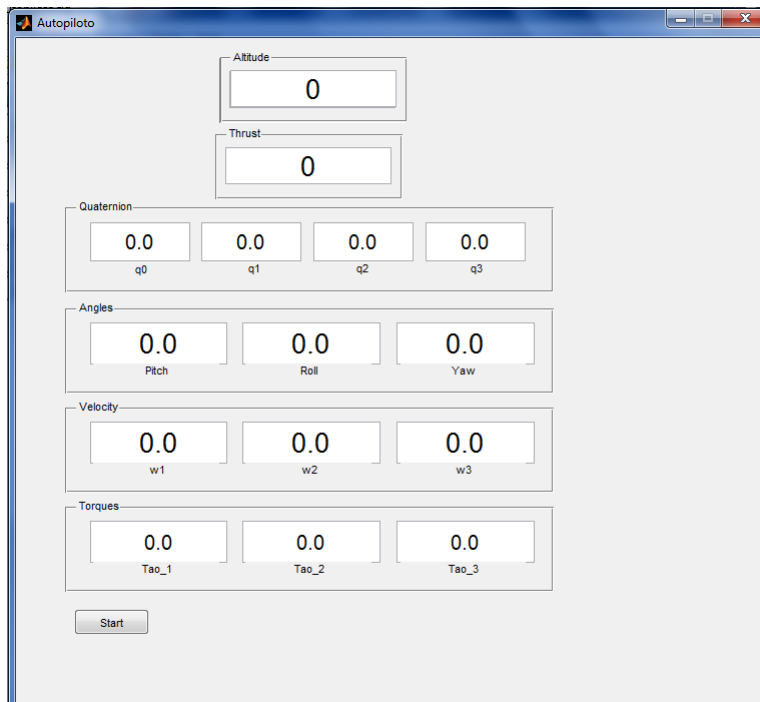


Figura B.15: Interfaz gráfica.

## Apéndice C

# Teoría de estabilidad de Liapunov

### C.1. Concepto de punto de equilibrio

<sup>1</sup> Una definición general de punto de equilibrio válida para sistemas lineales y no-lineales, se puede expresar como aquel estado  $\mathbf{x}_e$  que una vez alcanzado por el sistema, éste permanece allí todo el tiempo futuro, a menos que el sistema fuese perturbado, en cuyo caso puede ocurrir que el sistema tenga la tendencia de regresar a él en algún tiempo o por el contrario alejarse rápidamente de allí, siéndole imposible volver en un tiempo finito de manera «libre», es decir, solo podría volver al aplicársele algunas «fuerzas de control». Esto sucede debido a las enormes diferencias que pueden existir entre un tipo de estado de equilibrio y otro y que serán brevemente abordadas en ésta sección para el caso libre, pero que fácilmente puede ser adaptadas para sistemas autónomos.

Para un sistema no-lineal libre la ecuación de estado depende explícitamente del tiempo, esto es,  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  y una solución debe tomar en cuenta no solo una condición inicial  $\mathbf{x}_0$  sino también un tiempo inicial  $t_0$ , es decir,  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ ; el tiempo es un parámetro explícito que influye en los valores de la rapidez de cambio de las variables dinámicas de manera que, lo que es válido para cierta condición inicial en un momento dado, puede no serlo en otro momento ya que la propia condición inicial puede haber cambiado y no se puede partir de ella en un momento posterior; así que, el retrato fase para un sistema libre no permanece invariante con el tiempo, podemos decir, si se me permite usar la expresión, que el retrato fase «envejece», deja de ser una fotografía para convertirse en una película y solo podríamos analizar configuraciones instantáneas; esto ocurre por ejemplo en sistemas disipativos, en cambio en sistemas estacionarios, el retrato fase es invariante en el tiempo. La consecuencia de esto es que estados de equilibrio estables pueden volverse inestables al transcurrir el tiempo y viceversa.

Aún así se espera que la rapidez de cambio del vector de estado,  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$  sea muy pequeña cuando se está muy cerca de algún punto de equilibrio y aunque esto no sea completamente cierto para algunos tipos de puntos de equilibrio (sobre todo porque el tiempo influye en la configuración de esa región), sí debe ocurrir que exactamente sobre él ésta rapidez de cambio es cero, es decir,  $\dot{\mathbf{x}} = 0$ , por lo que, aplicando la ec. de estado

---

<sup>1</sup>Este Apéndice fue tomado del Apéndice B de [125].

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  en esos puntos debe ocurrir que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = 0$  como queda establecido en la siguiente definición [126]:

**Definición 2 . Punto de equilibrio (o estado de equilibrio).** Se dice que el estado  $\mathbf{x}_e$  es un punto de equilibrio del sistema no-lineal libre

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(t_0; \mathbf{x}_0, t_0) &= \mathbf{x}_0\end{aligned}\tag{C.1}$$

si  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = 0 \quad \forall t \geq t_0$ .

Vemos que el punto de equilibrio es de hecho una solución de la ec. de estado para cuando  $\dot{\mathbf{x}} = 0$ , por lo que también es llamado «solución de equilibrio» o «punto crítico». Una característica distintiva de los sistemas dinámicos no-lineales es que, a diferencia de los sistemas lineales, poseen varios puntos de equilibrio cada uno con características topológicas propias.

## C.2. Conceptos de estabilidad

El que un sistema esté en un estado de equilibrio no significa que tiene una fuerte tendencia de permanecer allí en cualesquiera circunstancias. El equilibrio puede ser alterado por diversas razones y la forma en que un sistema responderá cuando sea ligeramente desviado de un estado de equilibrio puede ser muy diversa y definirá el tipo de estabilidad presente, el cual puede determinarse observando cómo se comportan las soluciones cerca de dicho punto; esos tipos de estados de equilibrio serán definidos en esta sección.

El concepto de estabilidad queda entonces vinculado a la idea de la mayor o menor capacidad de un sistema de volver al equilibrio después de que éste haya sido alterado por las razones que sean. Conocer la estabilidad (o inestabilidad) de los estados de equilibrio de un sistema dinámico ha sido objeto de estudio de tantos matemáticos, físicos y astrónomos a lo largo de la historia. Un problema de gran interés fue precisamente averiguar las condiciones de estabilidad de las órbitas planetarias del sistema solar. Los trabajos de Kepler acerca del movimiento de un cuerpo en un campo de fuerzas central, que después fue generalizado como «el problema de estabilidad de N-cuerpos»; el teorema de Bertrand que establece las condiciones para la estabilidad de órbitas cerradas cuando el potencial de atracción es de una forma inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (problema de Kepler) o de la forma de la ley de Hooke; fueron trabajos muy importantes en ese sentido<sup>2</sup>. Sin embargo, era preciso tener principios más generales acerca de la estabilidad del movimiento mecánico.

Fue Torricelli uno de los primeros en establecer formalmente el llamado *principio de la energía total mínima*, según el cual un sistema de cuerpos estuvo en un estado de

---

<sup>2</sup>Ver Goldstein. Mecánica Clásica. Cap.3, secc.10.7 y cap.11. También Landau y Lifschitz. Mechanics. Cap. III, secc. 14 y 15.

equilibrio «estable» si estuvo en un estado de energía total mínima (localmente). En otras palabras, *si la razón de cambio  $dE(x(t))/dt$  de la energía  $E(x)$  de un sistema físico aislado es negativa para todo estado posible  $\mathbf{x}$ , excepto para un estado de equilibrio particular  $\mathbf{x}_e$ , entonces la energía decrecerá continuamente hasta asumir finalmente su valor mínimo  $E(\mathbf{x}_e)$  y  $\mathbf{x}_e$  será un estado de equilibrio estable.* Laplace y Lagrange mostraron que si el sistema era conservativo (esto es, que la energía total se conserva, por lo que  $E = E(\mathbf{x})$ ), entonces un estado en el que la energía cinética fuera cero y la energía potencial mínima, era un estado de equilibrio estable. Muchos otros mostraron que el principio de energía total mínima era válido también cuando el sistema fuese disipativo, esto es, cuando la energía total decrece mientras el sistema se mueve a lo largo de alguna trayectoria del espacio fase, en cuyo caso  $E = E(\mathbf{x}(t), t)$ <sup>3</sup>, por lo que un sistema disipativo que sea levemente perturbado de su estado de equilibrio siempre regresará a él.

En 1892 se publica la tesis doctoral del matemático ruso A.M. Liapunov que en la traducción francesa de 1907 es titulada “*El problema general de la estabilidad del movimiento*”, en la que estudia ciertos problemas planteados por Henri Poincaré acerca de la determinación de configuraciones estables de cuerpos fluidos en rotación. Liapunov desarrolla lo que hoy se conoce como “*segundo método*” o “*método directo*” y que tiene que ver con el análisis de la estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales sin conocer la forma explícita de dichas soluciones<sup>4</sup>. Parte del mismo principio de energía mínima, pero las condiciones que establece para la estabilidad, son independientes del concepto físico de energía; así, no es exactamente la «función energía» la que debe alcanzar su mínimo valor en un estado de equilibrio como condición para que éste sea estable, sino que lo mismo ocurrirá si existe, en general, cualquier otra función, llamada hoy «*función de Liapunov*»  $V(\mathbf{x}, t)$ , que satisfaga condiciones similares en dicho estado. En algunos casos es suficiente, pero no siempre es necesario, tomar  $V = E$ . Más adelante analizaremos las propiedades que deben cumplir las funciones de Liapunov para ser de «tipo energía».

Ésta generalización matemática de Liapunov, al desprenderse del concepto físico de energía, es al mismo tiempo una generalización al estudio de sistemas dinámicos que trascienden el ámbito de lo puramente mecánico y permite analizar los problemas de estabilidad de sistemas de tipo químico, biológico o social, por ejemplo, con las mismas herramientas. El llamado segundo método permite el estudio cualitativo de la estabilidad de un estado de equilibrio y constituye el punto de partida para estudios cuantitativos cuando consideramos la forma explícita de las soluciones y su comportamiento ante perturbaciones.

Es necesario, primeramente, establecer el concepto de estabilidad en el sentido de Liapunov [127], [126], [128], [129] y los diversos tipos de estabilidad que puede presentar un estado de equilibrio.

**Definición 3 . Estabilidad.** *Un estado de equilibrio  $\mathbf{x}_e$  del Sistema no lineal (C.1), es estable si para toda  $\varepsilon$ -vecindad de  $\mathbf{x}_e$ , existe otra  $\delta$ -vecindad, tal que si  $\mathbf{x}_0$  está dentro de*

<sup>3</sup>Según la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt} E(\mathbf{x}) = \frac{dE(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \frac{dE}{d\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}$$

y

$$\frac{d}{dt} E(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial E}{\partial t}$$

<sup>4</sup>El llamado “primer método” de Liapunov trata los problemas de estabilidad conociendo explícitamente las soluciones de una ecuación diferencial.

$S(\mathbf{x}_e, \delta)$ , entonces  $\mathbf{x}(t)$  está dentro de  $S(\mathbf{x}_e, \varepsilon)$  para todo  $t \geq t_0$ .

En otras palabras, para todo número real  $\varepsilon > 0$  existe un número real  $\delta(\varepsilon, t_0)$  \

$$\text{si } \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < \delta \quad \text{entonces} \quad \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{x}_e\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

Si ésta condición no se cumple, el estado es inestable.

En la Figura (C.1) se ilustra ésta definición. Vemos que éste concepto de estabilidad es un concepto *local*, de hecho lo que establece es la dependencia continua de la solución respecto a las condiciones iniciales *en la vecindad del punto de equilibrio*; de manera que, toda solución que inicia en una  $\delta$ -vecindad de  $\mathbf{x}_e$ , permanece en una  $\varepsilon$ -vecindad de  $\mathbf{x}_e$  todo el tiempo futuro. Sin embargo, no podemos afirmar *a priori* que la situación será igual escogiendo un  $\delta$  demasiado grande y solo podemos afirmar su validéz para vecindades de  $\mathbf{x}_e$ .

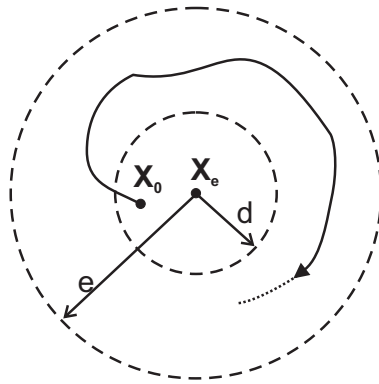


Figura C.1: Definición de estabilidad en el sentido de Liapunov.

Por otro lado, como vemos, el  $\delta$  escogido puede depender no solo del  $\varepsilon$  dado, sino del tiempo «inicial» del movimiento estudiado, es decir, dado un  $\varepsilon$ , el conjunto de condiciones iniciales que permiten a las soluciones permanecer en dicha  $\varepsilon$ -vecindad puede ir cambiando al transcurrir el tiempo y si por ejemplo  $\delta$  fuera disminuyendo con el tiempo, cada vez habrían menos condiciones iniciales que hagan posible que las soluciones permanezcan en la  $\varepsilon$ -vecindad, con lo que el punto de equilibrio se estaría volviendo menos estable al transcurrir el tiempo. Al contrario, el punto de equilibrio podría volverse más estable si  $\delta$  creciera con el tiempo. Ésto sugiere un tipo especial de estabilidad que es definida a continuación [126]:

**Definición 4 . Estabilidad uniforme.** El estado de equilibrio  $\mathbf{x}_e$  del Sistema no-lineal (C.1), es llamado punto de equilibrio uniformemente estable (en  $t$ ), si el número  $\delta$  de la definición anterior puede ser escogido sin depender de  $t_0$ .

Ésta definición recoge el hecho de que el punto de equilibrio no se vuelve menos (o más) estable al transcurrir el tiempo, por lo que la  $\delta$ -vecindad permanece fija en el tiempo.

En la mayoría de las aplicaciones prácticas, uno está interesado que las soluciones no solo se mantengan en una  $\varepsilon$ -vecindad de  $\mathbf{x}_e$  todo el tiempo, sino que el sistema tenga una mayor estabilidad y con el tiempo regrese al estado de equilibrio aún después de haber sufrido una pequeña perturbación. Ésto lo establece la siguiente definición [127], [126], [128]:

**Definición 5 . Estabilidad asintótica.** Un estado de equilibrio  $\mathbf{x}_e$  del Sistema no-lineal (C.1), es asintóticamente estable si

i) es estable y

ii) todo movimiento que inicia suficientemente cerca de  $\mathbf{x}_e$ , converge a  $\mathbf{x}_e$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , es decir, existe un número real  $r(t_0) > 0$  \

$$\text{si } \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < r \text{ entonces } \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{x}_e\| = 0$$

En otras palabras, podemos decir que siempre podremos encontrar un tiempo  $T$  para cada solución que inicia dentro de  $S(\mathbf{x}_e, r)$  a partir del cual la solución cae dentro de una región  $S(\mathbf{x}_e, \nu)$ , para cualquier  $\nu$  escogido por mas pequeño que sea. Esto es,  $\forall \nu > 0 \exists T(\nu, \mathbf{x}_0, t_0)$  \

$$\text{si } \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < r \text{ entonces } \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{x}_e\| < \nu \quad \forall t \geq t_0 + T$$

La Figura (C.2) ilustra ésta definición. De nuevo observamos que la estabilidad asintótica es también un concepto local, pues no podemos afirmar su validéz para  $r$  demasiado grande.

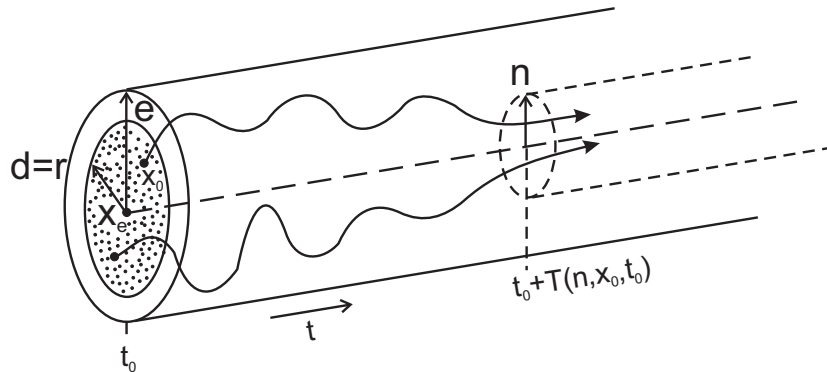


Figura C.2: Definición de estabilidad asintótica.

El conjunto de condiciones iniciales  $S(\mathbf{x}_e, r(t_0))$  que convergen al punto de equilibrio es llamado *dominio de atracción* o *región de atracción* de  $\mathbf{x}_e$  en  $t_0$ . Para los sistemas autónomos ésta región es invariante en el tiempo.

Es importante anotar que la definición de estabilidad asintótica establece explícitamente en (i) el requisito de que el punto debe ser estable en el sentido de la Definición 3, debido a que existen sistemas que aún cumpliendo (ii) no implican la estabilidad del punto de equilibrio.

Volviendo a la Fig. C.2, podemos intuir fácilmente que algunas trayectorias pueden converger a  $\mathbf{x}_e$  más rápido que otras, dependiendo de la condición inicial de la cual parte cada una; particularmente, aquellas que inician más lejos de  $\mathbf{x}_e$ , cerca de la frontera de  $S(\mathbf{x}_e, r)$ , pueden ser más lentas; en general, para cada trayectoria que inicia en  $S(\mathbf{x}_e, r)$ , habrá un  $T$  a partir del cual dicha trayectoria cae en una  $\nu$ -vecindad fijada, es por eso que  $T$  depende de  $\mathbf{x}_0$ . De hecho, si un sistema lineal libre es asintóticamente estable, ocurre que para una condición inicial más cerca de  $\mathbf{x}_e$  que otra, es decir,  $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_e\| < \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\|$ , implica que  $T(\nu, \mathbf{x}_1, t_0) < T(\nu, \mathbf{x}_0, t_0)$  para algún  $\nu$  y  $t_0$  dado.

De esta manera se puede decir que de los movimientos que inician a la misma distancia de  $\mathbf{x}_e$ , ninguno permanecerá a una distancia de  $\mathbf{x}_e$  mayor que  $\nu$  para intervalos de tiempo arbitrariamente largos. Así que, si de alguna manera podemos establecer una región de condiciones iniciales con radio  $r(t_0)$  para la cual todas las soluciones que inicia allí convergieran a  $\mathbf{x}_e$  con rapidez similar, en el sentido de que todas se encontrarán dentro de una  $\nu$ -vecindad de  $\mathbf{x}_e$  a partir de un tiempo  $T$ <sup>5</sup>, entonces habría uniformidad respecto de la condición inicial y  $T$  ya no dependería de  $x_0$ , pero sí en cambio de  $r(t_0)$ , esto es,  $T(\nu, r(t_0), t_0)$ . Éste tipo de estabilidad asintótica equivalente es recogida en la siguiente definición [127]:

**Definición 6** *Un estado de equilibrio  $x_e$  del Sistema no-lineal (C.1), se dice que es equiasintóticamente estable si*

*i) es estable y*

*ii) todo movimiento que inicia suficientemente cerca de  $\mathbf{x}_e$  converge a  $\mathbf{x}_e$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , uniformemente en  $\mathbf{x}_0$ . Es decir,  $T$  de la Definición 5 es de la forma  $T(\nu, r(t_0), t_0)$ . En otras palabras,  $\forall \nu > 0 \quad \exists T(\nu, r(t_0), t_0) \setminus$*

$$si \quad \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_e\| < r \quad entonces \quad \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_i, t_0) - \mathbf{x}_e\| < \nu \quad \forall \mathbf{x}_i \in S(\mathbf{x}_e, r) \quad y \quad t \geq t_0 + T$$

De manera análoga a la Definición 4 podemos estar interesados en analizar la uniformidad de la estabilidad asintótica en  $t$ , es decir, que para una región de condiciones iniciales  $S(\mathbf{x}_e, r)$  y un  $T$  escogidos éstos no varíen con el tiempo y provoquen que el estado de equilibrio se vuelva más o menos asintóticamente estable al transcurrir el tiempo. Ésto queda establecido en la siguiente definición [127]:

**Definición 7 . Estabilidad asintótica uniforme.** *Un estado de equilibrio  $\mathbf{x}_e$  del Sistema no-lineal (C.1), es asintótica y uniformemente estable si*

*i)  $\mathbf{x}_e$  es un estado de equilibrio asintóticamente estable*

*ii) el número  $r > 0$  y  $T$  de la Definición 5 que definen una región de condiciones iniciales  $S(\mathbf{x}_e, r)$  y una rapidez de convergencia, pueden ser escogidas sin depender de  $t_0$ .*

Adicionalmente tenemos [127]:

---

<sup>5</sup>más bien escogemos un único  $T$  que satisface ésto para una región de radio  $r$  dado.

**Definición 8** *El estado de equilibrio  $\mathbf{x}_e$  será equiasintótica y uniformemente estable si es asintótica y uniformemente estable y además es uniforme en  $\mathbf{x}_0$ . Esto es,  $r$  no depende de  $t_0$  y  $T$  no depende de  $t_0$  ni de  $\mathbf{x}_0$ , es decir,  $T(\nu, r)$ .*

Todas éstas definiciones son aplicables localmente. Ya hemos dicho que el concepto mismo de estabilidad (Definición 3) es un concepto local y exige que las soluciones, al menos aquellas que inician cerca de  $\mathbf{x}_e$ , deben estar acotadas <sup>6</sup> para poder permanecer dentro de cierta región de  $\mathbf{x}_e$  todo el tiempo futuro y dependiendo del tamaño  $\varepsilon$  de la región donde toleremos que las soluciones estén acotadas, será el tamaño  $r$  de la región de condiciones iniciales que lo satisface (la cual puede además cambiar con el tiempo); pero este proceso no puede seguir ininterrumpidamente, pues como la definición de estabilidad no exige que dichas soluciones se acerquen al estado  $\mathbf{x}_e$  al transcurrir el tiempo, sino solo que se mantengan en cierta región de él indefinidamente, carece de sentido hablar de estabilidad de  $\mathbf{x}_e$  cuando las soluciones permanecen acotadas en una región  $\varepsilon$  extremadamente grande. No podemos conformarnos con el hecho de que las soluciones permanezcan en una región tan extensa y debe, desde luego, exigirse que los movimientos que inician lejos de  $\mathbf{x}_e$  se acerquen a  $\mathbf{x}_e$  y se mantengan al menos en una pequeña  $\varepsilon$ -vecindad de él todo el tiempo futuro; lo que sí es deseable es que la región de condiciones iniciales que satisface esto sea extensa ( $r$  arbitrariamente grande). Así que, es posible hablar de estabilidad «extensa» o incluso «global», en el sentido de que los movimientos que inician muy lejos de  $\mathbf{x}_e$  se acercan y permanecen todo el tiempo muy cerca de  $\mathbf{x}_e$ , para un conjunto muy extenso de condiciones iniciales o que incluso abarca todo  $\mathfrak{R}^n$  (como ocurre particularmente en algunos sistemas lineales). O mejor aún, podemos estar interesados en averiguar si la convergencia de todo movimiento no se detiene en la  $\varepsilon$ -vecindad sino que continúa incluso hasta alcanzar  $\mathbf{x}_e$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Éstos tipos de estabilidad se expresan como sigue [127]:

**Definición 9 . Estabilidad asintótica extensa.** *Un estado de equilibrio  $x_e$  del Sistema no-lineal (C.1), es asintóticamente estable extensamente si*

*i) es estable y*

*ii) todo movimiento que inicia en la bola  $S(\mathbf{x}_e, r)$  con  $r(t_0)$  arbitrariamente grande (pero no infinito), converge a  $\mathbf{x}_e$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esto es,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{x}_e\| = 0 \quad \forall \mathbf{x}_0 \in S(\mathbf{x}_e, r)$$

*con  $r$  arbitrariamente grande.*

**Definición 10 . Estabilidad asintótica global.** *Un estado de equilibrio  $\mathbf{x}_e$  del Sistema no-lineal (C.1), es asintóticamente estable globalmente si*

*i) es estable y*

*ii) todo movimiento converge a  $\mathbf{x}_e$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esto es,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{x}_e\| = 0 \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \mathfrak{R}^n$$

---

<sup>6</sup>Por solución acotada debe entenderse que para cada  $x_0$  y  $t_0$  existe algún número real  $m(x_0, t_0)$  tal que  $\|x(t; x_0, t_0)\| \leq m \quad \forall t \geq t_0$ .

Es necesario recordar aquí la importancia de que la condición (i) sea satisfecha, pues como se vio en el ejemplo de la Definición 5, que se cumpla (ii) no implica necesariamente estabilidad del punto de equilibrio.

Adicionalmente, podemos tener el caso en que la estabilidad asintótica extensa sea uniforme en  $t$ , en cuyo caso  $r$  no depende de  $t_0$  y  $S(\mathbf{x}_e, r)$  permanecerá fija en el tiempo. Por otro lado, también puede darse el caso de una convergencia uniforme en  $\mathbf{x}_0$ , por lo que tendríamos una estabilidad equiasintótica extensa o global, según el caso; asimismo puede ocurrir una combinación de estos dos casos (uniformidad en  $t$  y en  $\mathbf{x}_0$ , como ocurre en muchos sistemas lineales).

Es evidente que en los sistemas autónomos (libre +estacionario),  $\delta, r$  y  $T$  de las definiciones anteriores no dependen de  $t_0$  y permanecen invariantes en el tiempo (junto con el retrato fase del sistema dinámico). Algo similar ocurrirá también si la función  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  es periódica en  $t$ .

Los conceptos de estabilidad están entonces muy relacionados con los conceptos de convergencia a un punto. A los diversos tipos de ella le corresponden diversos tipos de estabilidad. En los sistemas estocásticos no se sabe con certeza si tal convergencia ocurrirá y se usan términos como «estabilidad probable», «estabilidad promedio», «casi seguramente estable», etc.

## Apéndice D

# Cuaterniones y sus operaciones

Los cuaterniones fueron descubiertos por William Rowan Hamilton en 1843, estos son una extensión de los números reales, similar a la de los números complejos. Mientras que los números complejos son una extensión de los reales por la adición de la unidad imaginaria  $i$ , tal que  $i^2 = -1$ , los cuaterniones son una extensión generada de manera análoga añadiendo las unidades imaginarias  $i$ ,  $j$  y  $k$  a los números reales y tal que  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ . Esto se puede resumir en la siguiente tabla de multiplicación, la Tabla de Caley

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	1

$1, i, j, k$ , son las bases de las componentes de un cuaternión.

### D.1. Representación de los cuaterniones

#### D.1.1. Vectorial

Un cuaternión se puede expresar como el conjunto

$$H = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}, \quad (\text{D.1})$$

entonces un cuaternión es un número de la forma  $a + bi + cj + dk$ , donde  $a, b, c$  y  $d$  son números reales unívocamente determinados por cada cuaternión.

Análogamente, un cuaternión puede expresarse como el producto interno (componente a componente) de dos vectores, de los cuales uno es el de las componentes  $\check{x} = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ ,

y el otro el de las bases  $[1, i, j, k]$ . En este caso, el elemento  $a_1$  que forma la componente real se anota aparte, y para el producto interno se consideran solamente las tres bases  $i, j, k$

$$x = (a_1, \check{x}) = (a_1, [a_2, a_3, a_4]). \quad (\text{D.2})$$

Esta representación tiene algunas ventajas que se pueden ver en algunas operaciones como el producto de cuaterniones.

### D.1.2. Matricial

Además hay, al menos, dos maneras de representar cuaterniones con matrices.

- Usando matrices complejas de  $2 \times 2$

$$\begin{pmatrix} a - di & -b + ci \\ b - ci & a + di \end{pmatrix}. \quad (\text{D.3})$$

Donde el conjunto de todas las matrices anteriores se designa mediante  $U(2)$ , donde se ve que el determinante es igual a  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ . Una propiedad interesante de esta representación es que todos los números complejos son matrices que sólo tienen componentes reales.

- Usando matrices reales de  $4 \times 4$

$$\begin{pmatrix} a & -b & d & -c \\ b & a & -c & -d \\ -d & c & a & -b \\ c & d & b & a \end{pmatrix} \quad (\text{D.4})$$

## D.2. Aritmética básica de cuaterniones

Definimos la suma y producto entre cuaterniones mediante la aritmética usual de las matrices y de los números complejos. Puede comprobarse que el conjunto  $H$ , junto con estas operaciones, satisface todas las propiedades de un campo con excepción de que el producto no es conmutativo.

Sean dos cuaterniones dados por

$$a = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k \quad (\text{D.5})$$

$$b = b_1 + b_2i + b_3j + b_4k. \quad (\text{D.6})$$

### D.2.1. Adición de cuaterniones

La adición se realiza análogamente a como se hace con los números complejos, es decir, término a término

$$a + b = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i + (a_3 + b_3)j + (a_4 + b_4)k. \quad (\text{D.7})$$

### D.2.2. Resta de cuaterniones

La resta de cuaterniones se realiza de forma análoga a la suma

$$a - b = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)i + (a_3 - b_3)j + (a_4 - b_4)k. \quad (\text{D.8})$$

### D.2.3. Multiplicación de cuaterniones

Para multiplicar cuaterniones hemos de tener en cuenta el álgebra que hay detrás de las 3 unidades imaginarias, usando la fórmula de Hamilton

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (\text{D.9})$$

De donde se extraerán el resto de identidades para poder operar la multiplicación, que son:

$$i * i = j * j = k * k = -1 \quad (\text{D.10})$$

$$i * j = k, \quad (\text{D.11})$$

$$j * i = -k \quad (\text{D.12})$$

$$j * k = i, \quad (\text{D.13})$$

$$k * j = -i \quad (\text{D.14})$$

$$k * i = j, \quad (\text{D.15})$$

$$i * k = -j \quad (\text{D.16})$$

Como puede verse, resulta evidente que la multiplicación no deba ser conmutativa. La multiplicación se realiza componente a componente, y está dado en su forma completa por

$$a \otimes b = (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4) + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)i \\ + (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2)j + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)k. \quad (\text{D.17})$$

Una forma ligeramente más reducida puede ser

$$a \otimes b = (a, \check{a}) \otimes (b, \check{b}), \quad (\text{D.18})$$

$$a \otimes b = (ab - \check{a} \cdot \check{b}, a\check{b} + \check{a}b + \check{a} \times \check{b}). \quad (\text{D.19})$$

El producto entre cuaterniones es asociativo, pero no conmutativo.

#### D.2.4. Conjugación de cuaterniones

- El conjugado de un cuaternión  $x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k$  está dado por  $\bar{x} = x_1 - x_2i - x_3j - x_4k$ . Matricialmente esto corresponde a la operación de transposición de cualquiera de sus representaciones matriciales.

- El valor absoluto de un cuaternión  $x$  está dado por

$$\|x\| = \sqrt{x\bar{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}. \quad (\text{D.20})$$

Matricialmente, esta medida coincide con la raíz cuadrada del determinante de la matriz que representa al cuaternión. Esta medida cumple una propiedad similar al módulo de un número complejo  $|zw| = |w||z|$  para cualesquiera cuaterniones  $z$  y  $w$ .

#### D.2.5. División de cuaterniones

Usando la forma del inverso, es posible escribir el cociente de dos cuaterniones como

$$\frac{a}{b} = \frac{a\bar{b}}{\|b\|^2}. \quad (\text{D.21})$$

El inverso multiplicativo de un cuaternión  $x$ , distinto de cero, está dado por

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{x\bar{x}} = \frac{\bar{x}}{\|x\|^2}, \quad (\text{D.22})$$

el cual es el mismo patrón que cumplen los números complejos.

#### D.2.6. Exponenciación de cuaterniones

La exponenciación de números cuaterniónicos, al igual que sucede con los complejos, está relacionada con funciones trigonométricas. Dado un cuaternión escrito en forma canónica  $q = a + bi + cj + dk$  se exponenciación resulta ser

$$e^q = e^{a+bi+cj+dk} = e^a \left( \cos\sqrt{b^2 + c^2 + d^2} + \frac{\text{sen}\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}(bi + cj + dk) \right) \quad (\text{D.23})$$

### D.2.7. Normalización de un cuaternión

Se considera la Norma de un cuaternión, a la raíz cuadrada de la suma de sus cuatro componentes al cuadrado. Cuando ésta es 1, se dice que el cuaternión está normalizado. Si no lo es, el cuaternión puede normalizarse dividiendo cada una de sus 4 componentes por dicha norma.

### D.2.8. Aplicaciones del cuaternión

Los cuaterniones no son únicamente una curiosidad algebraica, tienen diversas aplicaciones que van desde la teoría de números, en donde pueden utilizarse para probar resultados como el teorema dado por Lagrange que dice que todo número natural  $n$  puede expresarse como la suma de cuatro cuadrados perfectos, hasta aplicaciones físicas dentro de la mecánica clásica, del electromagnetismo, teoría de la relatividad y mecánica cuántica, entre otras.

Los cuaterniones en mecánica clásica representan rotaciones en el espacio, se utilizan a menudo en gráficos por computadora (y en el análisis geométrico asociado) para representar la orientación de un objeto en un espacio tridimensional. Las ventajas son: conforman una representación no singular (comparada con, por ejemplo, los ángulos de Euler), más compacta y más rápida que las matrices.



# Bibliografía

- [1] Canudas de Wit, B. Siciliano, and G. Bastin. *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag, 1997.
- [2] NTN24. Ataque con dron de E. U. mata a líder de Al Qaeda en Yemen. In <https://www.youtube.com/watch?v=vNBfNnpDyCY>, mayo, 2015.
- [3] Sputnik Mundo. Made in Russia: diseñan nuevo dron capaz de volar hasta 8 horas consecutivas. In <http://mundo.sputniknews.com/prensa/20160506/1059380276/innovador-dron-ruso.html>, mayo, 2016.
- [4] Sputnik Mundo. Drones, la máquina asesina de los globalizadores. In <http://mundo.sputniknews.com/firmas/20151022/1052789098.html>, octubre, 2015.
- [5] Sputnik Mundo. Drones, un crimen contra la humanidad. In <http://mundo.sputniknews.com/radio-que-pasa/20151020/1052739523/Drones-Obama-humanidad-EEUU.html>, octubre, 2015.
- [6] RT. Operador de drones de E. U. a RT: A Washington "no le preocupa a quién mata". In <https://actualidad.rt.com/actualidad/188814-operador-drones-rt-eeuu-indiferencia-quien-matar?fb-comment-id=903411433028551-903468116356216+f3e389e29dd2744>, octubre, 2015.
- [7] Sputnik Mundo. La gigantesca fábrica de refugiados. In <http://mundo.sputniknews.com/firmas/20150625/1038681759.html>, julio, 2015.
- [8] euronews. Irán se niega a devolver el avión teledirigido a E. U. In <https://www.youtube.com/watch?v=6zYrqKPLxkU>, diciembre, 2011.
- [9] HispanTV. Irán captura otro "drone" de E. U. en su espacio aéreo. In <https://www.youtube.com/watch?v=gNBK64xIb20>, diciembre, 2012.
- [10] Sputnik Mundo. Rusia desarrolla drones para sus submarinos de quinta generación. In <http://mundo.sputniknews.com/rusia/20160318/1057778119/rusia-drones-submarinos.html>, abril, 2016.
- [11] Sputnik Mundo. El Pentágono contempla ataques submarinos rápidos. In <http://mundo.sputniknews.com/america-del-norte/20160521/1059922898/pentagono-ataques-submarinos.html>, mayo, 2016.

- [12] Sputnik Mundo. La aviación de EU prevé siete millones de drones para 2020. In <http://mundo.sputniknews.com/fuerzasarmadas/20160325/1058036402/eeuu-aumenta-numero-de-drones.html>, marzo, 2016.
- [13] Sputnik Mundo. E. U. concibe elaborar drones en los portaviones. In <http://mundo.sputniknews.com/america-del-norte/20160426/1059066704/robots-eeuu-drones.html>, abril, 2016.
- [14] Sputnik Mundo. Se desata la siguiente carrera aérea entre Rusia y E. U. In <http://mundo.sputniknews.com/tecnologia/20160303/1057336283/desatarse-siguiente-carrera-aerea-rusia-eeuu.html>, marzo, 2016.
- [15] Sputnik Mundo. Rusia crea un 'cañón microondas' contra drones y armas de alta precisión. In <http://mundo.sputniknews.com/industriamilitar/20150615/1038331948.html>, julio, 2015.
- [16] J. F. Guerrero Castellanos. *Estimation de l'attitude et commande bornee en attitude d'un corps rigide : application a un mini helicoptere a quatre rotors*. Tesis doctoral, UJF-INPG, Grenoble, Francia, 2008.
- [17] Sputnik Mundo. Las extravagancias tecnológicas marcan los desfiles del sambódromo en Río de Janeiro. In <http://mundo.sputniknews.com/americalatina/20160209/1056581447/rio-de-janeiro-sambodromo.html>, febrero, 2016.
- [18] Sputnik Mundo. Pescando con un dron. In <http://mundo.sputniknews.com/videoclub/20150908/1041199681.html>, septiembre, 2015.
- [19] J. Maclean. Drone fishing for tuna. In <https://www.youtube.com/watch?v=8sdUZqOoAq4>, abril, 2016.
- [20] One. Carreras de drones: arranca la liga mundial del deporte del futuro. In <https://www.youtube.com/watch?v=7mbqiHQ1G9o>, enero, 2016.
- [21] emol.TECNOLOGIA. Un joven de 15 años ganó la primera carrera mundial de drones. In <http://www.emol.com/noticias/Tecnologia/2016/03/14/792875/Un-joven-de-15-anos-gano-la-primera-carrera-mundial-de-drones.html>, mayo, 2016.
- [22] Sputnik Mundo. Google utilizará drones para entregar pedidos en 2017. In <http://mundo.sputniknews.com/mundo/20151103/1053215911/google-utilizara-drones-reparto.html>, noviembre, 2015.
- [23] Sputnik Mundo. Abre sus puertas el primer Dron Café del mundo. In <http://mundo.sputniknews.com/increible/20160426/1059063198/cafe-dron-holanda.html>, abril, 2016.

- [24] Publimetro TV. Usarán drones para supervisión de redes de telefonía móvil en toda la zona norte. In <http://www.publimetrotv.co/publimetrotv/noticias/chile/usaran-drones-para-supervision-de-redes-de-telefonía-movil-en-toda-la/2016-05-08/172510.html>, mayo, 2016.
- [25] Sputnik Mundo. El segundo sarcófago de Chernóbil, a vista de dron. In <http://mundo.sputniknews.com/video/20151208/1054596879/chernobil-reactor-dron.html>, diciembre, 2015.
- [26] Sputnik Mundo. El búnker militar más grande de la URSS. In <http://mundo.sputniknews.com/video/20150929/1051877786/bunker-militar-urss.html>, septiembre, 2015.
- [27] Sputnik Mundo. Un dron captó el derrumbamiento de un edificio durante el terremoto en Taiwán. In <http://mundo.sputniknews.com/video/20160208/1056529220/dron-derrubamiento-terremoto-taiwan.html>, febrero, 2016.
- [28] Sputnik Mundo. El Ministerio de Emergencias ruso triplicó su flota de drones en 2015. In <http://mundo.sputniknews.com/rusia/20160210/1056632921/rusia-emergencia-dron.html>, febrero, 2016.
- [29] TU Delft. Ambulance drone. In <https://www.youtube.com/watch?v=y-rEI4bezWc>, octubre, 2014.
- [30] Associated Press. Más estados de EEUU analizan usar drones para abatir tráfico. In <http://www.mundomaxpr.com/mas-estados-eeuu-analizan-usar-drones-abatir-trafico-n903055>, marzo, 2016.
- [31] La Jornada. Drones de Washington vigilan la frontera. In <http://www.jornada.unam.mx/2016/04/05/politica/016n2pol>, abril, 2016.
- [32] La Jornada. Drones para mejorar la agricultura en México y Australia. In <http://www.jornada.unam.mx/ultimas/2015/10/02/drones-y-sensores-los-auxiliares-agricolas-en-australia-3140.html>, octubre, 2015.
- [33] TomoNews. BioCarbon Engineering: ex-NASA engineer to plant one billion trees with drones. In <https://www.youtube.com/watch?v=0IY-pl-jHSY>, mayo, 2016.
- [34] Sputnik Mundo. Se estrena en Colombia documental con imágenes de la naturaleza nunca antes registradas. In <http://mundo.sputniknews.com/cultura/20150912/1051344751.html>, septiembre, 2015.
- [35] La pizarra del DT. Los drones llegaron al fútbol para quedarse. In <http://www.lapizarradeldt.com/2015/02/los-drones-llegaron-al-futbol-para.html>, 2015.
- [36] Sputnik Mundo. Enrique Iglesias se corta los dedos al tratar de atrapar un dron en un escenario en México. In <http://mundo.sputniknews.com/cultura/20150531/1037889022.html>, julio, 2015.

- [37] cienciaexplora. Reproducen un dolmen en 3d gracias a un dron. In <http://www.cienciaexplora.com/sinc/reproducen-un-dolmen-en-3d-gracias-a-un-dron-2015090400213.html>, septiembrel, 2014.
- [38] ToDRONE. Drones para conocer mejor a las ballenas grises. In <http://www.todrone.com/drones-conocer-mejor-ballenas-grises/>, june, 2015.
- [39] cienciaybiologia. Drones alemanes para salvar a Bambi. In <http://cienciaybiologia.com/salvando-bambi-con-drones-alemanes/>, abril, 2014.
- [40] Sputnik Mundo. Vestigio del Cámbrico en el corazón de Siberia. In <http://mundo.sputniknews.com/videoclub/20150725/1039577140.html>, julio, 2015.
- [41] Sputnik Mundo. Revolución arquitectónica: los drones pueden construir puentes. In <http://mundo.sputniknews.com/tecnologia/20150922/1051671986.html>, septiembre, 2015.
- [42] Sputnik Mundo.
- [43] ToDRONE. Tendencias de inversión en drones para 2016. In <http://www.todrone.com/tendencias-inversion-drones-2016/>, mayo, 2016.
- [44] Sputnik Mundo. Los drones civiles crean cada vez más problemas, alertan medios. In <http://mundo.sputniknews.com/seguridad/20150811/1040236565.html>, agosto, 2015.
- [45] La Jornada. Drones, "amenaza" para seguridad de la aviación civil: IATA. In <http://www.jornada.unam.mx/ultimas/2016/02/15/drones-amenaza-para-la-seguridad-de-la-aviacion-civil-iata-4995.html>, febrero, 2016.
- [46] Sputnik Mundo. La Fuerza Aérea de brasil pone límites al uso de los drones en su espacio aéreo. In <http://mundo.sputniknews.com/video/20151208/1054596879/chernobil-reactor-dron.html>, diciembre, 2015.
- [47] Ma. La Civita, G. Papageorgiou, W. C. Messner, and T. Kanade. Design and flight testing of an hinf controller for a robotic helicopter. *AIAA Journal of Guidance and Control and Dynamics*, 29(2):485–494, 2006.
- [48] S. Bouabdallah, A. Noth, and R. Siegwart. PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor. *International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 3:2451–2456, 2004.
- [49] M. Osteron and R. Babuska. Design of gain-scheduling mechanism for flight control laws by using fuzzy clustering. *Control Engineering Practice*, 14(7):769–781, 2006.
- [50] T. J. Koo and S. Sastry. Output tracking control design of a helicopter model based on approximate linearization. In *En IEEE/CDC*, Florida, USA, 1998.
- [51] P. Castillo, A. Dzul, and R. Lozano. Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft. *IEEE transactions on Control Sytems Technology*, 12(4):510–516, 2004.

- [52] L. Sang-hyun, H. K. Seung, and K Youdan. Trajectory tracking control of quadrotor uav. In *11<sup>rd</sup> International Conference on Control, Automation and Systems*, 2011.
- [53] E. N. Johnson and S. K. Kannan. Adaptive trajectory control for autonomous helicopter. *IAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 28(3):524–538, 2008.
- [54] J. Reiner, G. J. Balas, and Garrard W. L. Robust dynamic inversion for control of highly maneuverable aircraft. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 18(1):18–24, 1995.
- [55] R. Olfati-Saber. *Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles*. PhD. Tesis Report, MIT, USA, 2001.
- [56] S. Zhao, W. Dong, and J. A. Farrell. Quaternion-based trajectory tracking control of VTOL-UAVs using command filtered backstepping. In *American Control Conference*, pages 1018–1023, 2013.
- [57] K. D. Do and J. Paxman. Global tracking control of quadrotor VTOL aircraft in three dimensional space. In *Australian Control Conference*, pages 26–33, 2013.
- [58] G. Haisheng and L. Jinkun. Sliding mode control for vtol aircraft based on high-gain observer. In *Second International Conference on Instrumentation & Measurement, Computer, Communication and Control*, pages 305–309, 2012.
- [59] M. Mohammadi and A. M. Shahri. Modelling and decentralized adaptive tracking control of a quadrotor UAV. In *International Conference on Robotics and Mechatronics*, pages 293–300, 2013.
- [60] P. Castaldi, N. Mimmo, R. Naldi, and L. Marconi. Robust trajectory tracking for underactuated vtol aerial vehicles: extended for adaptive disturbance compensation. In *19th World Congress The International Federation of Automatic Control*, pages 3184–3189, 2014.
- [61] D. Chwa. Fuzzy adaptive output feedback tracking control of vtol aircraft with uncertain input coupling and input-dependent disturbances. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 23(5):1505–1518, 2015.
- [62] A. Hably and N. Marchand. Global stabilization of a four rotor helicopter with bounded inputs. In *En 2007 IEEE International conference on Intelligent Robots and Systems*, San Diego, California, USA, 2007.
- [63] R. Naldi, M. Furci, R. G. Sanfelice, and L. Marconi. Robust global trajectory tracking for underactuated VTOL aerial vehicles using inner-outer loop control paradigms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 1–16, 2015.
- [64] D. E. Alexander and S. Vogel. *Nature's Flyers: Birds, Insects and the Biomechanics of Flight*. The Johns Hopkins University Press: Baltimore, MD, USA, 2004.
- [65] D. Campolo, G. Barbera, L. Schenato, L. Pi, X. Deng, and E. Guglielmelli. Attitude stabilization of a biologically inspired robotic housefly via dynamic multimodal attitude estimation. *Adv. Robot*, 23:955–977, 2009.

- [66] R. Dudley. *The Biomechanics of Insect Flight: Form, Function, Evolution*. Princeton University Press: Princeton, NJ, USA, 2002.
- [67] R. Zbikowski. Sensor-rich feedback control: A new paradigm for flight control inspired by insect agility. *IEEE Instrum. Meas. Mag.*, 7:19–26, 2004.
- [68] P. E. Crouch. Spacecraft attitude control and stabilization: Applications of geometric control theory to rigid body models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(4):321–331, 1991.
- [69] C. Byrnes and A. Isidori. On the attitude stabilization of rigid spacecraft. *Automatica*, 27:87–95, 1991.
- [70] J.T. Wen and K. Kreutz-Delgado. The attitude control problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(11):1148–1162, 1991.
- [71] O. Fjellstad and T. Fossen. Quaternion feedback regulation of underwater vehicles. In *Proceedings of 3rd IEEE Conference on Control Application*, pages 24–26, 1994.
- [72] S. M. Joshi, A. G. Kelkar, and J. T. Wen. Robust attitude stabilization of spacecraft using nonlinear quaternion feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(10):1800–1803, 1995.
- [73] C. Belta. On controlling aircraft and underwater vehicles. In *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation ICRA'04*, 2004.
- [74] A. Tayebi. Unit quaternion-based output feedback for the attitude tracking problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(6):1516–1520, 2008.
- [75] R. Schlanbusch, A. Loria, and P. J. Nicklasson. On the stability and stabilization of quaternion equilibria of rigid bodies. *Automatica*, 48:3135–3141, 2012.
- [76] C. G. Mayhew, R. G. Sanfelice, and A. R. Teel. On path-lifting mechanisms and unwinding in quaternion-based attitude control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58:1179–1191, 2013.
- [77] M. D. Shuster. A survey of attitude representations. *Journal of the astronautical sciences*, 41(4):439–517, 1993.
- [78] J. L. Crassidis, F. L. Markley, and Y. Cheng. Survey of nonlinear attitude estimation methods. *J. Guid. Control Dyn.*, 30:12–28, 2007.
- [79] R. Mahony, T. Hamel, and J. M. Pflimlin. Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53:1203–1218, 2008.
- [80] P. Martin and E. Salaun. Design and implementation of a low-cost observer-based attitude and heading reference system. *Control Eng. Pract.*, 18:712–722, 2010.
- [81] J. F. Guerrero-Castellanos, H. Madrigal-Sastre, S. Durand, L. Torres, and G. A. Muños Hernández. A robust nonlinear observer for real-time attitude estimation using low-cost MEMS inertial sensors. *Sensors*, 13:15138–15158, 2013.

- [82] H. J. Sussmann, E. D. Sontag, and Y. Yang. A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 39(12):2411–2425, 1994.
- [83] T. Hu and Z. Lin. *Control systems with actuator saturation: Analysis and design*. Birkhauser, 2001.
- [84] E. D. Sontag. An algebraic approach to bounded controllability of linear systems. *International Journal of Control*, 39:181–188, 1988.
- [85] J. F. Guerrero-Castellanos, N. Marchand, S. Lesecq, and J. Delamare. Bounded attitude stabilization: Real-time application on four-rotor helicopter. In *Proceedings of IFAC World Congress*, pages 3167–3173, Seoul, Korea, 2008.
- [86] P. Pounds and R. Mahony. Design principles of large quadrotors for practical applications. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA*, 2009.
- [87] T. Dierks and S. Jagannathan. Output feedback control of a quadrotor UAV using neural network. *IEEE Transactions on neural networks*, 21(1):50–66, 2010.
- [88] J. F. Guerrero-Castellanos, N. Marchand, S. Hably, S. Lesecq, and J. Delamare. Bounded attitude control of rigid bodies: Real-time experimentation to a quadrotor mini helicopter. *Control Engineering Practice*, 19:790–797, 2011.
- [89] Z. Zamudio, R. Lozano, J. Torres, and J. L. Rullan-Lara. Vision based stabilization of a quadrotor using nested saturation control approach. In *15th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*, 2011.
- [90] T. Fernando, J. Chandiramani, T. Lee, and H. Gutierrez. Robust adaptive geometric tracking control on  $SO(3)$  with an application to the attitude dynamics of a quadrotor UAV. In *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC/ECC)*, pages 7380–7385, Orlando, FL, USA., 2011.
- [91] J. R. Córdova-Alarcón, E. Vicente-Vivas, and H. Rodríguez-Cortés. Nonlinear attitude control for a picosatellite driven by reaction wheels. *Research in Computing Science*, 36(1?):661–670, 2008.
- [92] A.R. Teel. Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Systems & Control Letters*, 18:165–171, 1992.
- [93] N. Marchand and A. Hably. Global stabilization of multiple integrators with bounded controls. *Automatica*, 41(12):2147–2152, 2005.
- [94] E. N. Córdova-Alarcon, E. Vicente-Vivas, and H. Rodríguez-Cortés. Nonlinear attitude control for a picosatellite. *Researching in Computing Science*, 32(2):661–670, 2008.
- [95] R. C. Nelson. *Flight Stability and Automatic Control, second edition*. McGraw-Hill Science Engineering, Boston, USA, 1998.

- [96] T. Magnusson. *Attitude control of a hexarotor*. Tesis, Linköpings universitet, Sweden, 2014.
- [97] R. Mahony and T. Hamel. Robust trajectory tracking for a scale model autonomous helicopter. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 14:1035–1059, 2004.
- [98] C. G. Mayhew, R. G. Sanfelice, and A. R. Teel. Quaternion-based hybrid control for robust global attitude tracking. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(11):2555–2566, 2011.
- [99] A. Tayebi and S. McGilvray. Attitude stabilization of a vtol quadrotor aircraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(3):562–571, 2006.
- [100] J. Stewart. *Calculus seventh edition*. Brooks Cole Cengage Learning, 2012.
- [101] A. Bloch. *Nonholonomic Mechanics and control*. Springer-Verlang, Germany, 2003.
- [102] G. Benettin, J. Henrard, and S. Kukšin. *Hamiltonian Dynamics Theory and Applications*. Springer-Verlang: Berlin, Germany, 2005.
- [103] R. Kelly, R. Ortega, A. Ailon, and A. Loria. Global regulation of flexible joint robots using approximate differentiation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(6):1222–1224, 1994.
- [104] R. Kristiansen, A. Loria, A. Chaillet, and P. J. Nicklasson. Spacecraft relative rotation tracking without angular velocity measurements. *Automatica*, 45(3):750–756, 2009.
- [105] P. Castillo, P. García, R. Lozano, and P. Albertos. Modelado y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 4(1):41–57, 2007.
- [106] P. Pounds, R. Mahony, P. Hynes, and J. Roberts. Design of a four-rotor aerial robot. In *Proceedings of Australian Conference on Robotics and Automation*, 2002.
- [107] J. F. Guerrero-Castellanos, H. Rifaï, N. Marchand, R. Cruz-José, S. Mohammed, W. F. Guerrero-Sánchez, and G. Mino-Aguilar. Biomimetic-based output feedback for attitude stabilization of rigid bodies: real-time experimentation on a quadrotor. *Micromachines*, 6:993–1022, 2015.
- [108] A. Saberi, J. Han, and A. A. Stoorvogel. *Control of linear systems with regulation and input constraints*. Springer Verlag, London, UK,, 2000.
- [109] D. S. Bernstein and A. N. Michel. *Special issue on Saturating Actuators, volume 5*. Int. J. of Robust and Nonlinear Control, 1995.
- [110] K. J. Åström and L. Rundquist. Integrator windup and how to avoid it. *Proc. American Control conference*, pages 1693–1698, 1989.
- [111] M. V. Kothare, P. J. Campo, M. Morari, and C. N. Nett. A unified framework for the study of antiwindup designs. *Automatica*, 30(12):1869–1883, 1994.

- [112] A. Megretski.  $L_2$  bibo output feedback stabilization with saturated control. *Proc. 13th IFAC World Congress*, D:435–440, 1996.
- [113] Z. Lin and A. Saberi. Semiglobal exponential stabilization of linear systems subject to input saturation via linear feedbacks. *Systems & Control Letters*, 21(3):225–239, 1993.
- [114] A.R. Teel. Semi-global stabilizability of linear null controllable system with input nonlinearities. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 40(1):96–100, 1995.
- [115] A. Saberi, Z. Lin, and A. R. Teel. Control of linear system with saturating actuators. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 41(3):368–378, 1996.
- [116] H. J. Sussmann and Y. Yang. On the stabilizability of multiple integrators by means of bounded feedback controls. *Proc. IEEE Conference on Decision and Control*, pages 70–73, 1991.
- [117] F. Grognaud, Sepulchre R., and Bastin G. Improved performance of low-gain designs for bounded control of linear systems. *Automatica*, 38(10):1777–1782, 2002.
- [118] Z. Lin. Global stabilization and restricted tracking for linear systems subject to input and measurement saturation—a chain of integrators case. *Proc. American Control Conference*, 4:2488–2492, 1995.
- [119] V. G. Rao and Bernstein D. S. Naive control of the double integrator. *IEEE Control Systems Magazine*, 21:86–97, 2001.
- [120] E. N. Johnson and S. K. Kannan. Nested saturation with guaranteed real poles. In *Proc. American Control Conference*, Denver, Colorado, USA, 2003.
- [121] Z. Lin. Global control of linear systems with saturating actuators. *Automatica*, 34(7):897–905, 1998.
- [122] A. Zavala, I. Fantoni, and R. Lozano. Global stabilization of a pvtol aircraft model with bounded inputs. *International Journal of Control*, 18(76):1833–1844, 1989.
- [123] J. L. Tenorio-García. *Control de posición en tiempo real de un mini helicóptero de cuatro motores*. Tesis de maestría, FCE-BUAP, Puebla, México, 2014.
- [124] R. Cruz-José. *Estabilización global de la posición de un mini helicóptero con cinco rotores utilizando entradas de control acotadas*. Tesis de maestría, FCFM-BUAP, Puebla, México, 2009.
- [125] G. Denis-Sánchez. *Dinámica de un brazo mecánico subactuado con dos articulaciones giratorias*. Tesis Licenciatura, FCFM-BUAP, Puebla, México, 2006.
- [126] S. Sastry. *Nonlinear Systems: Analysis and Control*. Springer, New York, 1999.
- [127] R. Kalman and J. Bertram. Control system analysis and design via the second method of Lyapunov. *I Continuous-Time Systems. Journal of Basic Engineering.*, 1960.

- [128] A. N. Tikhonov, A. B. Vasileva, and A. G. Sveshnikov. *Diferential equations*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1985.
- [129] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics 2. Springer-Verlag, N.Y., 1990.