



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

**Cosmología Cuántica en la Escala de
Planck**

Tesis Presentada al:

**POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICA
APLICADA**

como requisito parcial para la obtención del grado de:

**MAESTRO EN CIENCIAS FÍSICA
APLICADA**

por

Lic. Carlos Alberto Jano Sánchez

asesorado por

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero

Puebla, Pue.
Noviembre 2020

Título: Cosmología Cuántica en la Escala de Planck

Estudiante: Lic. Carlos Alberto Jano Sánchez

COMITÉ

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Presidente

Dra. Ana Aurelia Aviles López
Secretaria

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Vocal

Dr. Víctor Manuel Vázquez Báez
Suplente

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Asesor

Dedicatoria

A.M.D.G.

Agradecimientos

Se agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado al becar el presente proyecto dentro del programa de Becas Nacionales y con ello contribuir a la formación del autor y desarrollo de esta tesis.

Los autores agradecen al Laboratorio Nacional de Supercómputo del Sureste de México(LNS), perteneciente al padrón de laboratorios nacionales CONACYT, por los recursos computacionales, el apoyo y la asistencia técnica brindados, a través del proyecto No. 202002033C.

Índice general

Agradecimientos	VII
Abstract	XI
Introducción	XIII
0.1. Escala de Planck	XIII
0.2. Descomposición (3+1) o ADM	XIV
0.3. Formulación Hamiltoniana de relatividad general	XV
1. Gravitación Cuántica	1
1.1. Teoría de cuerdas	1
1.2. Gravedad cuántica de lazos	3
1.3. Espuma Cuántica	4
1.4. Fenomenología	4
2. Modelo de Gravedad Cuántica	7
2.1. Métrica FRW	7
2.2. Perturbaciones	9
2.3. Perturbaciones métricas	10
2.4. Campos vectoriales temporaloides y cantidades geométricas	11
2.5. Norma síncrona	13
2.6. Ecuación de Wheeler-Dewitt	16
3. Solución a la ecuación de Wheeler-Dewitt	21

ÍNDICE GENERAL
ÍNDICE GENERAL

3.1. Aproximación por diferencias finitas	21
3.2. Ecuación de Wheeler-Dewitt en diferencias finitas	22
3.3. Solución numérica para el caso general	25
3.4. Solución numérica para el caso $\chi = 0$	27
3.5. Conclusiones	28
A. Programas usados en la solución de la ecuación de Wheeler-Dewitt	31
A.1. Solucionador	31
A.1.1. Caso general	31
A.1.2. Caso con $\chi = 0$	35
A.2. Visualizador	38
B. Componentes de la conexión métrica, tensor de Riemann, tensor de Ricci, y el escalar curvatura	41
B.1. Conexión métrica	41
B.2. Tensor de Riemann	42
B.3. Tensor de Ricci	43
B.4. Escalar de curvatura	44

Abstract

En este trabajo se explora la cuantización canónica de un universo con métrica FRW con perturbaciones inhomogéneas escalares a primer orden en la norma síncrona con la intención de obtener un modelo de gravedad cuántica en la región de la escala de Planck al aproximarse a esta región desde la cosmología cuántica.

Se considera el modelo sin materia, para el cual se obtiene la ecuación de Wheeler-Dewitt y su solución numérica. Dicha aproximación da indicios sobre la dinámica de perturbaciones cuánticas para la gravedad en la escala de Planck.

Introducción

Se considera a la Cosmología como el estudio del universo completo como un sistema a partir de la teoría de la relatividad general. En el modelo cosmologico estándar se considera al universo como un sistema en expansión el cual se originó de una singularidad y tuvo un periodo de expansión acelerada llamado inflación [1]. Por otro lado, la Cosmología Cuántica es un esfuerzo por cuantizar la gravedad al tomar como sistema al universo con diferentes maneras de acercarse a este objetivo [7][8][10], dentro de los que se encuentra la *cosmología cuántica canónica* [10]. Para este enfoque es necesario contar con formulación Hamiltoniana de Relatividad General (Conocida también como formulación (3+1), o formulación ADM) [3][9]. Dentro de este campo se tratan temas como las condiciones iniciales del universo, formación de estructuras, materia oscura, etc. Como ejemplo notable cabe resaltar el estudio de Cosmología Cuántica mediante perturbaciones realizado por J. Halliwell y S. Hawking [12] donde muestra que perturbaciones métricas tensoriales de segundo orden durante el periodo de inflación dan lugar a la formación de estructuras observadas.

0.1. Escala de Planck

La escala de Planck comprende distancias del orden de $l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-35}m$, en esta escala los fenómenos cuánticos de la gravedad toman relevancia [26]. Para esto considere la relación de Heisenberg par una partícula con la masa de Planck $m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$. Para está partícula $\Delta p = m_p \Delta v = m_p c$, lo que implica:

$$\Delta x \Delta p = m_p c \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \Delta x \geq \frac{\hbar}{2cm_p} = \frac{l_p}{2} \quad (2)$$

Por lo tanto los efectos cuánticos para una partícula de la masa de Planck se observan a distancias del orden de la escala de Planck. Adicionalmente esto implica que la densidad de esta partícula es:

$$\rho \geq \frac{m_p}{l_p^3} = \frac{c^5}{\hbar G^2} \approx 10^{96} \text{ kg/m}^3 \quad (3)$$

Que correspondería a la densidad del universo en esas escalas. Sin embargo es una región a la cual no se le ha destinado estudio suficiente desde el enfoque de cosmología cuántica, aunque los esfuerzos realizados han establecido condiciones al modelo de inflación [5][6] y ha sido abordado mayormente en el ámbito del estudio de la gravitación cuántica [14]. El presente trabajo se sitúa en los límites de esta región donde se toman perturbaciones métricas teniendo como fondo un espacio-tiempo homogéneo e isotrópico (FRW) con el fin de tener un modelo de gravitación cuántica haciendo uso del formalismo usado en cosmología cuántica de perturbaciones. Dichas perturbaciones son funciones escalares que dependen del espacio y del tiempo, que al ser introducidas despojan al espacio-tiempo de su homogeneidad e isotropía.

Una vez obtenida la métrica perturbada se procederá a definir los vectores temporaloides y cantidades geométricas relacionadas, en términos de las perturbaciones. Al introducir las perturbaciones resulta necesario fijar una norma para obtener cantidades invariantes bajo transformaciones de coordenadas, para lo cual se ha elegido la norma síncrona. Posteriormente se obtendrá el Lagrangiano y Hamiltoniano canónico de gravedad, y la ecuación de Wheeler-Dewitt. Finalmente se ofrece una aproximación numérica para la ecuación de Wheeler-Dewitt de este sistema.

0.2. Descomposición (3+1) o ADM

En esta sección se presentan brevemente los puntos fundamentales del formalismo ADM [9] que se emplearán posteriormente. Considere una foliación del espacio-tiempo, con métrica [3] $ds^2 = (-N^2 + N_i N^i)dt^2 + 2N_j dt dx^j + h_{ij} dx^i dx^j$, en hipersuperficies tales que en cada una de ellas $t = \text{constante}$, y para cada hipersuperficie existe un campo vectorial n_μ normal a la superficie. A este conjunto de hipersuperficies (*foliación*) se les pueden asociar curvas tangentes a n_μ , que son normales a la foliación. Por lo tanto la parte espacial de la métrica es la 3-métrica intrínseca, ${}^{(3)}h_{ij}(t, x^k) = h_{ij}(t, x^k)$, en las hipersuperficies.

Para entender mejor el papel de N y N^j bajo esta descomposición [3], considere dos hipersuperficies de la foliación: Σ_t y Σ_{t+dt} . $N(t, x^k)$ es la llamada función de lapso y es la diferencia entre el tiempo coordenado t y el tiempo propio τ a lo largo de las curvas normales a la foliación, mientras que el vector de cambio $N^j(t, x^k)$ es la diferencia entre un punto P en Σ_{t+dt} que resulta de seguir a P desde Σ_t mediante una curva perteneciente a una congruencia normal a la foliación, y el punto en Σ_{t+dt} si se hubiera seguido una curva normal a la foliación desde P en Σ_t ; note que si se toman coordenadas comóviles, estas dos clases de curvas son la misma y $N^j = 0$, como sucede en FRW. A continuación se muestra una representación gráfica de estos conceptos:

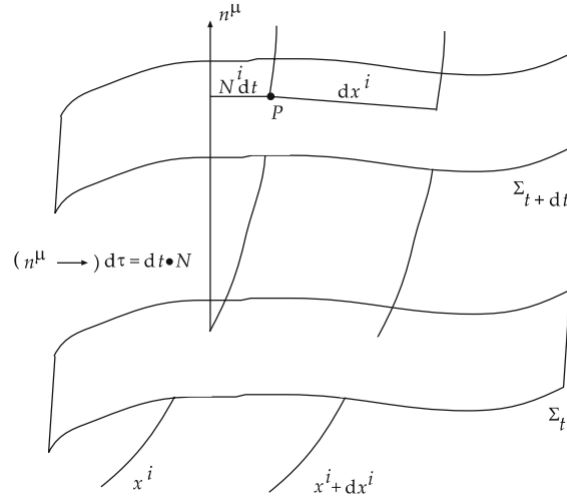


Figura 1: Representación gráfica de la función de lapso y el vector de cambio en una foliación. Imagen propiedad de P.V. Moniz [3]

Aunado a estas cantidades es necesario introducir para esta foliación alguna cantidad relacionada con la curvatura, además de la curvatura interna o intrínseca 3-dimensional ${}^{(3)}R_{jlk}^i(h_{mn})$ para las hipersuperficies, obtenida a partir de la métrica intrínseca h_{mn} . Esta cantidad es llamada curvatura *extrínseca* $K_{ij} = -n_{i;j}$ (el punto y coma denota la derivada covariante con respecto de la métrica 4-dimensional $g_{\mu\nu}$) y describe como se curvan las hipersuperficies con respecto de la variedad del espacio-tiempo en donde están embebidas [3][9], esta cantidad expresada en términos de la función de lapso, el vector de cambio y la 3-métrica es:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left(2D_{(i}N_{j)} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \right) \quad (4)$$

Donde D_i denota la derivada covariante con respecto de h_{ij} .

0.3. Formulación Hamiltoniana de relatividad general

Para el estudio cosmología cuántica es necesario contar con una formulación hamiltoniana [1][3][26] de la relatividad general, la cual hace uso de la descomposición ADM del espacio tiempo. Esta formulación permite la obtención de la ecuación de Wheeler-DeWitt, pieza fundamental para la cosmología cuántica[1].

Partiendo de la acción de Einstein-Hilbert acoplada a materia en la forma de un campo escalar Φ [1] [26]:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int_M \sqrt{-g} R d^4x - \frac{1}{2} \int_M \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} + V(\Phi)) d^4x \quad (5)$$

CAPÍTULO 0 INTRODUCCIÓN

0.3. FORMULACIÓN HAMILTONIANA DE RELATIVIDAD GENERAL

M denota la variedad del espacio tiempo, y la coma en el subíndice denota la derivada parcial de dicha cantidad, a lo largo de este trabajo se utilizan las unidades de Planck ($c = \hbar = G = 1$). Si se toma R en términos de las cantidades usadas en ADM [3]:

$$R = {}^{(3)}R + K_{ij}K^{ij} - K^2 \quad (6)$$

Donde K es la traza de la curvatura extrínseca. Haciendo uso de esta expresión es posible escribir la acción [3] de la siguiente manera:

$$S = \int \mathcal{L} dt = \frac{1}{16\pi} \int N \sqrt{h} \left[K_{ij}K^{ij} - K^2 + {}^{(3)}R \right] dt d^3x - \frac{1}{2} \int N \sqrt{h} (g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} + V(\Phi)) dt d^3x \quad (7)$$

De esta densidad lagrangiana \mathcal{L} los momentos canónicos son:

$$\pi^{ij} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ij}} = -\frac{\sqrt{h}}{16\pi G} \left[K^{(ij)} - h^{ij} K \right] \quad (8)$$

$$\pi_\Phi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = \frac{\sqrt{h}}{N} \left(\dot{\Phi} - N^i \Phi_{,i} \right) \quad (9)$$

$$\pi^0 \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} = 0 \quad (10)$$

$$\pi^i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}_i} = 0 \quad (11)$$

Con los cuales se obtiene [3] el siguiente hamiltoniano:

$$H = \int (N \mathcal{H}_\perp + N_i \mathcal{H}^i) d^3x \quad (12)$$

$$\mathcal{H}^i = -2D_j \pi^{ij} + h^{ij} \Phi_{,j} \pi_\Phi \quad (13)$$

$$\mathcal{H}_\perp = \frac{2\mathcal{K}^2}{\sqrt{h}} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} \bar{\pi}^2 \right) - \frac{\sqrt{h} {}^{(3)}R}{2\mathcal{K}^2} \left(\frac{\pi_\Phi^2}{h} + h^{ij} \Phi_{,i} \Phi_{,j} + 2V \right) \quad (14)$$

Donde $\mathcal{K} = 8\pi$ y $\bar{\pi}$ es la traza de π^{ij} . De manera alternativa, la acción puede tomar la forma siguiente:

$$S = \int \left(\pi^{ij} \dot{h}_{ij} + \pi_\Phi \dot{\Phi} - N \mathcal{H}_\perp - N^i \mathcal{H}_i \right) dt d^3x \quad (15)$$

De (10), (11), y (15) se puede observar [26][27] que (10) y (11) son constricciones primarias; mientras que N y N^i son multiplicadores de Lagrange con \mathcal{H}_\perp y \mathcal{H}^i como

constricciones secundarias, lo que implica [3][26]:

$$\mathcal{H}^i = 0 \tag{16}$$

$$\mathcal{H}_\perp = 0 \tag{17}$$

De estas expresiones, (17) es la *Constricción Hamiltoniana*. Esta constricción al ser promovida a operador como parte de la cuantización canónica da lugar a la ecuación de Wheeler-Dewitt $\mathcal{H}_\perp \varphi = 0$, la cual rige a la función de onda del universo φ [1][26].

Capítulo 1

Gravitación Cuántica

En este capítulo se expondrá brevemente el concepto de gravitación cuántica junto con un recuento de las principales vías que se han tomado para su estudio. El material que aquí se presenta sigue de cerca a Calcagni [14], Rovelli [15], y Carlip [16].

La cuantización de la gravedad de Einstein adolece desde un inicio del problema de su no renormalizabilidad, sin que se haya podido encontrar una solución como teoría cuántica de campo. Esto es en parte debido a su esencia misma, la gravedad ha sido vista por unos como una interacción fundamental y su cuantización se ha abordado como se hiciera en su momento con las otras interacciones fundamentales, otros la han considerado como la cuantización del espacio tiempo, mientras que otros consideran que la naturaleza cuántica de la gravedad reside en la propia naturaleza cuántica del espacio-tiempo tomando este último como emergente de la propia teoría cuántica. De entre estas propuestas, dos han sido las más estudiadas y desarrolladas: la teoría de cuerdas y la gravedad cuántica de bucles (LQG por sus siglas en inglés). Estas dos teorías han sido desarrolladas con enfoques, filosofías, y metodologías distintas; por una parte la teoría de cuerdas nace a partir de los trabajos realizados para ir más allá del modelo estándar de partículas, mientras que LQG es desarrollada desde la relatividad general canónica teniendo como contribución inicial el estudio de la cuantización de sistemas con constricciones por Dirac, de donde se deriva la formulación hamiltoniana de la relatividad general y su cuantización a través de la ecuación de Wheeler-DeWitt, cuyo desarrollo culminó en la formulación de LQG. A esto es necesario añadir que si bien aún no existe un consenso sobre una teoría de la gravitación cuántica, esto no significa que los esfuerzos empleados en su estudio hayan sido infructuosos.

1.1. Teoría de cuerdas

Esta teoría se caracteriza por considerar como ente fundamental a un objeto extendido (cuerda) en vez de utilizar a objetos puntuales. En la formulación inicial de la teoría de la cuerda bosónica por parte de Nambu, Goto, y Polyakov en la cual se obtienen ecuaciones de movimiento para excitaciones fundamentales que son bastante similares a las

CAPÍTULO 1 GRAVITACIÓN CUÁNTICA

1.1. TEORÍA DE CUERDAS

ecuaciones de campo de Einstein y a las ecuaciones de una teoría de norma no-abelianas; la cuantización de estas cuerdas requiere 26 dimensiones con 22 de estas dimensiones compactificadas a escalas no detectables a bajas energías. Sin embargo la cuerda bosónica contiene dos problemas fundamentales: la existencia de campos taquiónicos de norma negativa y la ausencia de fermiones. Estos problemas fueron resueltos al expandir esta teoría a la teoría de supercuerdas por parte de Ramond, Green, Neveu, y Schwarz, la cual es supersimétrica y requiere 6 dimensiones extra que son compactificadas en variedades de Calabi-Yau. El grupo de norma para supercuerdas debe ser $SO(32)$ o $E_8 \times E_8$, lo cual dio lugar a 5 teorías diferentes de supercuerdas: tipo I, tipo IIA, tipo IIB, $SO(32)$ heterótica, y $E_8 \times E_8$ heterótica. Posteriormente se encontró que estas teorías están relacionadas entre sí mediante dualidades, lo cual agrega la necesidad de otra dimensión, y la existencia de objetos dinámicos p -dimensionales espaciales llamados p -branas, las cuales probaron ser de importancia al ser algunas de ellas (Dp -branas) en las teorías tipo I y II soluciones solitónicas de supergravedad e identificadas como generalizaciones de agujeros negros.

Estos descubrimientos reflejaron la posible existencia de una teoría más fundamental en 11 dimensiones, la cual fue conjeturada por Witten quien también la nombro como teoría M; esta teoría tiene como casos límite a las 5 teorías de supercuerdas antes mencionadas y describe objetos 2-dimensionales y 5-dimensionales llamadas M-branas. La relación con gravedad de la teoría de cuerdas se debe a que contiene una partícula sin masa de espín 2 así como partículas de norma y de materia, y que a bajas energías satisfacen las ecuaciones de Einstein acopladas a la materia. Debido a esto la teoría de cuerdas no solo es una de los principales candidatos para ser el formalismo de la gravitación cuántica, sino también es uno de los principales candidatos para la unificación de las fuerzas fundamentales. Dos resultados físicos relevantes en esta teoría con relación al tema presente son los siguientes:

- **Entropía de agujeros negros:**

La formula de Bekenstein-Hawking relaciona la entropía S de un agujero negro con el área A de su horizonte:

$$S = \frac{1}{4} \frac{A}{\hbar G} \quad (1.1)$$

Como repercusión de este resultado se encuentra que existe una relación entre la teoría de cuerdas y la teoría cuántica de campos sobre espacios curvos (también llamada dualidad AdS/CFT).

- **Estructura del espacio-tiempo en la longitud de Planck:**

A distancias cercanas a la longitud de Planck la energía necesaria para poder sondear esas escalas hacen que las cuerdas se comporten efectivamente como objetos extendidos en lugar de partículas haciendo imposible las colisiones entre cuerdas en una región pequeña. Sin embargo al incluir la teoría M, las coordenadas espaciotemporales de la cuerda son reemplazadas por matrices, lo que se considera una reinterpretación de la estructura del espacio-tiempo, donde la variedad continua usual del espacio-tiempo emerge solamente a escalas de distancia mayores, lo que haría manejable el problema a cortas distancias al tener una estructura espaciotemporal diferente.

Sin embargo esta teoría tiene no ha logrado reproducir plenamente a los modelos estándar de partículas y de cosmología, por lo que su aceptación ha disminuido. Al ser una teoría que describe excitaciones sobre algún fondo *fijo*, es posible que no pueda abordar de forma completa el tema de gravedad cuántica, pues podría ser necesario un fondo dinámico para describir escenarios como la evaporación de agujeros negros. Otras críticas, más graves, apuntan a la falta de evidencia experimental que apoye la teoría a pesar de los numerosos intentos por confirmar las predicciones hechas por la teoría, lo cual al compararse con las numerosas confirmaciones del modelo estándar y el nivel de precisión de las mismas, ha producido muchos cuestionamientos sobre su validez o viabilidad, que a pesar de estas deficiencias, continúa siendo para muchos el candidato mas prometedor para la teoría cuántica de la gravitación.

1.2. Gravedad cuántica de lazos

La gravedad cuántica de lazos (LQG) tiene su origen en los desarrollos realizados para cuantizar sistemas con constricciones, que junto con el formalismo ADM dan lugar a la formulación hamiltoniana de relatividad general. Sin embargo la formulación utilizada para LQG no está basada en la métrica, sino en una conexión. Al tomar esta ruta se obtiene una teoría cuántica independiente de un fondo, en comparación con QFT, y que tiene la estructura de otras teorías cuánticas usuales: sus estados forman un espacio de Hilbert y cuenta con un conjunto de operadores, que en el límite clásico coincide con relatividad general. Para esta teoría las variables de campo gravitacional son las holonomías de la conexión (llamadas variables de lazo) y los estados normalizables corresponden físicamente a excitaciones dentro de un bucle o lazo. La base para el espacio de Hilbert consiste en estados de redes de espín, donde estas redes de espín son grafos con representaciones de $SU(2)$, llamadas colores, en sus nodos y vértices.

A diferencia de la teoría de cuerdas, LQG no aborda a la gravedad como una interacción fundamental sino como un efecto de la geometría del espacio-tiempo como sucede en relatividad general, lo cual tiene como consecuencia el que en esta teoría se obtenga una cuantización del propio espacio tiempo. Como resultados físicos relacionados con gravitación cuántica resaltan los siguientes:

- **Cuantos de geometría:**

En esta teoría es posible obtener expresiones explicitas para los operadores de área y volumen de una superficie o región espacial, por lo que sus eigenvalores establecen los valores cuantizados que el aérea y volumen podrían tomar en la escala de Planck. Por ejemplo, el espectro del área esta dado por la siguiente expresión:

$$A_{\vec{j}} = 8\pi\gamma\hbar G \sum_i \sqrt{j_i(j_i + 1)} \quad (1.2)$$

Donde $\vec{j} = (j_1, \dots, j_n)$ es un arreglo de n semienteros que denota los eigenvalores, y γ es un parámetro adimensional llamado *parámetro de Immirzi*, el cual no está determinado por la teoría.

▪ **Entropía de agujeros negros:**

Debido a la existencia del cuanto de geometría y por lo tanto la discretización del espacio en la escala de Planck, el número de microestados del horizonte es finito y se puede obtener con los eigenvalores del área. Se obtiene que la entropía es proporcional al área del horizonte en unidades de Planck, sin embargo no fija la constante de proporcionalidad ya que incluye el parámetro de Immirzi.

Mientras que la cinemática de LQG está formalizada y estudiada, la dinámica (evolución de las redes de espín) y su comportamiento a bajas energías sigue estando en desarrollo y son problemas atacados desde diferentes ángulos, entre estos esfuerzos se encuentran de manera principal la gravedad cuántica algebraica y los desarrollos usando estados coherentes holomórficos ya que han permitido un avance considerable en el entendimiento de estos problemas [16]. Dentro de los desarrollos relativamente recientes de la teoría también se encuentra su reformulación en la forma de la Teoría de Espuma de Espín para estudiar gravedad cuántica. Esta *espuma* se puede pensar como una *hoja de mundo* discreta que es barrida por una red de espín que se transmuta con el tiempo, esta también es una representación del espacio-tiempo cuantizado ya que la amplitud de transición de una red de espín a otra está dada por la suma de discreta ponderada sobre todas las espumas de espín posibles entre las redes de espín inicial y la final.

1.3. Espuma Cuántica

La espuma cuántica (quantum foam en inglés) hace referencia al comportamiento del espacio-tiempo a altas energías en gravedad cuántica, donde a escalas menores a la de Planck la estructura del espacio tiempo se torna más compleja a medida que la escala disminuye. Este fenómeno está presente en el estudio de la gravedad cuántica desde la cuantización canónica de la gravedad hecha por DeWitt al encontrar inconsistencias a altas energías si se consideraba un espacio continuo [17]. Este fenómeno también se presenta en otras formulaciones de gravedad cuántica, como sucede al estudiar la naturaleza cuántica del espacio-tiempo al cuantizar triadas en vez de la métrica [18], con el cuanto de geometría en LQG y en teoría de cuerdas (como se mostró en la sección anterior). Como consecuencia de esto existen propuestas para considerar a la espuma cuántica como un *regulador universal* pues permite regularizar divergencias en teorías cuánticas de campo [19] y la reformulación de la geometrodinámica de Wheeler [20].

1.4. Fenomenología

A pesar de que los efectos cuánticos solo son apreciables a la escala de Planck y esta escala está considerada fuera de nuestro alcance experimental actual, existen maneras indirectas de detectar la influencia de gravedad cuántica en otras observaciones [16][21]. Los modelos de gravitación cuántica sugieren diferencias en el principio de equivalencia de Einstein que pudieran reflejarse en observaciones cosmológicas. La ausencia

de birefringencia en la propagación de rayos cósmicos y rayos gamma polarizados ha confirmado la estructura del cono de luz y la métrica de fondo a una precisión de 10^{-38} , los grados de libertad relacionados con la estructura métrica a este nivel de precisión se restringen a uno escalar (dilatón) y a uno pseudoescalar (axion). El dilatón altera la amplitud de la radiación linealmente polarizada en su propagación cósmica y su variación fraccional esta limitada a 8×10^{-4} por la concordancia entre el espectro de la radiación cósmica de fondo y el espectro de la radiación de cuerpo negro. Por su parte el axion rota la radiación linealmente polarizada durante su propagación en el cosmos y está limitada por la rotación cósmica polarizada uniforme a menos de 0.02 rad y por sus fluctuaciones a 0.02 rad. Dentro de los fenómenos relacionados con diferencias en el principio de equivalencia se encuentran los cambios en el ángulo de dispersión de campos escalares sin masa en presencia de un objeto masivo, los cuales están relacionados con efectos cuánticos [22] e implican que dichas partículas no siguen geodésicas y diferentes partículas se dispersan de forma diferente.

Otro efecto sugerido por las teorías de gravedad cuánticas es la violación local a la simetría de Lorentz. En este sentido se ha intentado observar modificaciones en la dispersión de energía-momento lorentziana local de partículas ultrarelativistas utilizando rayos cósmicos ultraenergéticos, cuya energía es mayor a 10^{18} eV, en especial por el Observatorio Pierre Auger, las cuales han puesto fuertes constricciones a estas dispersiones sin dar señal de nueva física. También en esta dirección se ha propuesto la observación de la dependencia entre el momento y la velocidad del fotón usando ondas electromagnéticas de alta energía, en especial mediante el análisis de la relación entre el tiempo de llegada, el momento fotónico, y el corrimiento al rojo de ráfagas de rayos gamma. A estas propuestas se unen algunos aportes de la gravedad análoga, que hace referencia a una analogía entre la propagación de perturbaciones en un fluido perfecto con la dinámica de campos escalares en un fondo curvo, al considerar un sistema análogo para la radiación de Hawking [23] que se caracteriza por tener relaciones de dispersión modificadas para las perturbaciones linealizadas, asociadas con efectos a altas energías de la estructura del espacio-tiempo emergente, y que a su vez esta relacionado con la violación de la invarianza acústica de Lorentz.

Con la detección de ondas gravitacionales en 2016 por parte de la colaboración LIGO-Virgo se ha abierto otra puerta para la investigación de fenómenos cuánticos relacionados con gravedad, como sucede en la reciente propuesta de objetos mesoscópicos entrelazados (diamantes nanométricos) como detectores de ondas gravitacionales [24]. Esta propuesta no solo podría ayudar a entender el efecto cuántico de la gravedad en el entrelazamiento, sino también revolucionaría la astronomía de ondas gravitacionales al no requerir túneles kilométricos ya que el arreglo experimental podría armarse sobre una mesa.

Capítulo 2

Modelo de Gravedad Cuántica

En este capítulo se elabora un modelo de gravedad cuántica como uno de cosmología cuántica a escalas alrededor a la de Planck. Para esto se utiliza una perturbación a la métrica de FRW sin componente de materia (perturbación puramente gravitacional), con la cual se obtiene la constricción Hamiltoniana y se cuantiza de forma canónica obteniendo la ecuación de Wheeler-DeWitt.

2.1. Métrica FRW

La cosmología relativista tiene como postulados principales el principio cosmológico y el postulado de Weyl [1][2], que establecen que el universo debe ser homogéneo e isotrópico, y el uso de observadores privilegiados (*sustrato*) que yacen en una congruencia de geodésicas temporaloides que divergen de un punto en el pasado (finito o infinito) respectivamente. Esto tiene como consecuencia la existencia de una foliación ortogonal a las geodésicas antes mencionadas, lo que aunado a los requerimientos de homogeneidad e isotropía permiten introducir coordenadas (t, x^1, x^2, x^3) tales que las hipersuperficies de la foliación están dadas a un $t = \text{constante}$ y (x^1, x^2, x^3) son constantes a lo largo de las geodésicas del sustrato (coordenadas comóviles), con las cuales el elemento de línea es de la forma¹:

$$ds^2 = -Ndt^2 + S^2(t)g_{ab}dx^a dx^b \quad (2.1)$$

Donde N es una constante y $S(t)$ es el factor de escala que mide la diferencia en la escala de un conjunto de puntos entre diferentes hipersuperficies. Otra consecuencia del principio cosmológico es el requerimiento de simetría esférica y curvatura constante en las hipersuperficies ya que de no ser así diferentes puntos en una hipersuperficie ya no serían geoméricamente idénticos, y por lo tanto el espacio no sería homogéneo ni isotrópico. Lo anterior implica lo siguiente sobre el tensor de Ricci y el elemento de línea:

¹En esta sección se sigue principalmente a D'Inverno [2], donde se toma $N = 1$ y la signatura $(+,-,-,-)$.

CAPÍTULO 2 MODELO DE GRAVEDAD CUÁNTICA
2.1. MÉTRICA FRW

$$ds^2 = -Ndt^2 + S^2(t) \left[e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (2.2)$$

$$R_{ab} = 2K g_{ab} \quad (2.3)$$

Donde la curvatura K es constante. Para esta métrica las componentes diferentes de cero son:

$$R_{22} = \csc^2 \theta R_{33} = 1 + \frac{1}{2} r e^{-\lambda} \lambda' - e^{-\lambda} \quad (2.4)$$

$$R_{11} = \frac{\lambda'}{r} \quad (2.5)$$

Al tomar en cuenta (2.3) se obtiene $e^{-\lambda} = 1 - Kr^2$, que al sustituirlo en (2.2) se obtiene:

$$ds^2 = -Ndt^2 + S^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (2.6)$$

Para esta expresión K puede ser positiva, negativa o cero. La arbitrariedad de la magnitud de la curvatura puede ser absorbida en r mediante la introducción de la coordenada $\bar{r} = \sqrt{|K|}r$, tomando $K = |K|k \neq 0$. Con esta nueva coordenada la métrica es:

$$ds^2 = -Ndt^2 + \frac{S(t)}{\sqrt{|K|}} \left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (2.7)$$

Esta expresión puede escribirse de forma más concisa incluyendo el caso $K = 0$ y relajando la notación al prescindir de la barra en r :

$$ds^2 = -Ndt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (2.8)$$

$$a(t) = \frac{S(t)}{\sqrt{|K|}} \text{ si } K \neq 0 \quad (2.9)$$

$$a(t) = S(t) \text{ si } K = 0 \quad (2.10)$$

Los valores que puede tomar k son 1, -1, y 0. Cada uno de estos valores establece una geometría para los 3-espacios y afecta la topología de los mismos: en el caso de 1 se obtiene un universo cerrado, mientras que los otros dos casos arrojan universos abiertos siendo el caso de -1 no euclideo. Para el presente trabajo se empleara el caso $k = 0$ que coincide con el espacio euclideo tetradimensional. En este escenario si se toman las coordenadas cartesianas y el tiempo conforme η :

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (2.11)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (2.12)$$

$$z = r \cos \theta \quad (2.13)$$

Se obtiene el elemento de línea:

$$ds^2 = a^2(\eta) (-N^2 d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2.14)$$

2.2. Perturbaciones

Dentro del estudio de la cosmología cuántica se encuentra el uso de perturbaciones [1][10][11], donde se toma como fondo la métrica FRW siguiendo las bases de la cosmología clásica. Sin embargo estos métodos perturbativos estaban orientados al estudio de formación de estructuras [11][12][25], con algunos trabajos enfocados a gravedad [13]. Para el estudio de formación de estructuras las perturbaciones son consideradas sobre el contenido de materia del universo, mientras que en el enfoque de gravedad estas perturbaciones son sobre la métrica. El origen de estas perturbaciones esta basado en la observaciones de fluctuaciones en la radiación de fondo, lo cual indica que en su inicio el universo tuvo fluctuaciones en su contenido de materia [10][11] que tienen como origen fluctuaciones cuánticas [13]. Para esta tesis se sigue el enfoque de gravedad considerando un universo plano homogéneo e isotrópico sin materia con perturbaciones gravitacionales inhomogéneas que, como se verá en las secciones finales, al ser cuantizado resulta en un modelo de gravedad cuántica donde las perturbaciones dominan a pequeñas escalas para después dar lugar a un espacio plano a escalas mayores, debido a esto se considera que este modelo presenta el fenómeno de espuma cuántica.

En las siguientes secciones se tomaran perturbaciones métricas escalares a un fondo FRW con el fin de estudiar fluctuaciones cuánticas a la gravedad mediante la ecuación de Wheeler-Dewitt. Para iniciar dicho estudio, se introduce el concepto de un tensor descompuesto en un fondo y una perturbación.

Sea $\mathbf{T}_0(\eta)$ un tensor que solo depende del tiempo conforme en un espacio-tiempo homogéneo e isotropico. Tomando este tensor como fondo, su perturbación es:

$$\mathbf{T}(\eta, x^i) = \mathbf{T}_0 + \delta\mathbf{T}(\eta, x^i)$$

Note que las perturbaciones dependen tanto del espacio como del tiempo. Cabe resaltar que una vez perturbado el tensor métrico el espacio ya no es homogéneo ni isotropico, y es en las perturbaciones donde tienen origen estos cambios. Para facilitar el análisis de las perturbaciones, es conveniente escribir la anterior expresión cómo sigue:

$$\mathbf{T}(\eta, x^i) = \mathbf{T}_0 + \sum_{a=1}^{\infty} \epsilon^a \delta \mathbf{T}_a(\eta, x^i) \quad (2.15)$$

Donde ϵ es un parámetro pequeño y $\delta \mathbf{T}_a$ es la perturbación de grado a del tensor. En nuestro caso, ϵ es tal que todos los términos de orden superior a uno son despreciables, por lo que el producto de dos perturbaciones son despreciables. Por razones de claridad, la notación en lo subsecuente omitirá expresar ϵ de forma explícita, y dado que solo se tomarán perturbaciones de primer orden también se omitirá el uso de dicho subíndice.

2.3. Perturbaciones métricas

Considere el elemento de línea de FRW con $k = 0$ y usando el tiempo conforme:

$$ds^2 = a^2(\eta) (-N^2 d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Con $a(\eta)$ el parámetro de expansión. Al perturbar esta métrica, dichas perturbaciones se pueden descomponer en partes escalares, vectoriales y tensoriales según su comportamiento ante rotaciones y haciendo uso del Teorema de Helmholtz [25]:

$$g_{00} = -a^2(N^2 + 2\phi(\eta, x^b)) \quad (2.16)$$

$$g_{0i} = a^2 \left(B(\eta, x^b)_{,i} - S_i(\eta, x^b) \right) \quad (2.17)$$

$$g_{ij} = a^2 \left(\delta_{ij} + 2 \left[E(\eta, x^b)_{,ij} - \psi(\eta, x^b) \delta_{ij} + F_{(i,j)}(\eta, x^b) + \frac{1}{2} h_{ij}(\eta, x^b) \right] \right) \quad (2.18)$$

Donde la coma en el subíndice indica derivada parcial (i.e. $\partial_{x^i} f = f_{,i}$). ϕ , ψ , B , E son perturbaciones métricas escalares tales que $B_{,[ij]} = E_{,[ij]} = 0$. S_i y F_i son perturbaciones métricas vectoriales sin divergencia. h_{ij} es una perturbación métrica tensorial sin traza y sin divergencia. Estos cuatro escalares, dos vectores espaciales, y un tensor espacial simétrico contienen los 10 grados de libertad de esta métrica ya que la perturbación tensorial al ser sin traza y sin divergencia contiene cuatro constricciones sobre sus componentes y las perturbaciones vectoriales contienen una restricción cada una al no tener divergencia.

Tomando solo las perturbaciones escalares se tiene:

CAPÍTULO 2 MODELO DE GRAVEDAD CUÁNTICA
2.4. CAMPOS VECTORIALES TEMPORALOIDES Y CANTIDADES
GEOMÉTRICAS

$$g_{00} = -a^2(N^2 + 2\phi(\eta, x^b)) \quad (2.19)$$

$$g_{0i} = a^2 B(\eta, x^b)_{,i} \quad (2.20)$$

$$g_{ij} = a^2 \left(\delta_{ij} + 2 \left[E(\eta, x^b)_{,ij} - \psi(\eta, x^b) \delta_{ij} \right] \right) \quad (2.21)$$

El inverso de la métrica a primer orden es:

$$g^{00} = -a^{-2} (N^{-2} + 2\phi) \quad (2.22)$$

$$g^{0i} = a^{-2} (B_{,i}) \quad (2.23)$$

$$g^{ij} = a^{-2} (\delta^{ij} - 2 [E_{,ij} - \psi \delta^{ij}]) \quad (2.24)$$

Es importante señalar que los índices de las perturbaciones suben y bajan con la parte espacial de la métrica de fondo (i.e. $E_{,i} = \delta^{ij} E_{,j}$). Como puede observarse, tanto la métrica como su adjunto son simétricos y cumplen $g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$ al tomar en cuenta el cambio de notación impuesto a (2.15).

2.4. Campos vectoriales temporaloides y cantidades geométricas

Consideramos un campo vectorial temporaloide como aquel que cumple:

$$n_\mu \propto \partial_{x^\mu} \eta, \quad n^\mu n_\mu = -1$$

En FRW coincide con la 4-velocidad de materia, aunque esto no necesariamente se conserva al ser perturbado, y la expansión del campo es $\theta = 3H$ siendo H el parámetro de Hubble. Al tomar perturbaciones tenemos las siguientes expresiones:

$$(n_\mu) = -a(1 + \phi, 0, 0, 0)$$

$$n^0 = a^{-1}(1 - \phi)$$

$$n^i = -a^{-1} B_{,i}$$

La derivada covariante de n_μ se puede descomponer de la siguiente manera [25]:

$$n_{\mu;\nu} = \frac{1}{3} \theta \mathcal{P}_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} - a_\mu n_\nu$$

CAPÍTULO 2 MODELO DE GRAVEDAD CUÁNTICA
2.4. CAMPOS VECTORIALES TEMPORALOIDES Y CANTIDADES
GEOMÉTRICAS

Donde los elementos de la suma en la expresión anterior son *cantidades geométricas* que describen diferentes aspectos geométricos característicos del espacio-tiempo y que a continuación se definen.

$\mathcal{P}_{\mu\nu}$ es el **proyector ortogonal** a n^μ :

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \quad (2.25)$$

Al aplicar este proyector a un vector se obtiene la parte dicho vector que es ortogonal a n^μ y por lo tanto dentro de una hipersuperficie de la foliación.

La **proporción de expansión total**:

$$\theta = n^\mu_{;\mu} \quad (2.26)$$

Esta cantidad escalar caracteriza la expansión del universo tanto paralela como ortogonal a n^μ .

La **aceleración**:

$$a_\mu = n_{\mu;\nu} n^\nu \quad (2.27)$$

Es el cambio en la expansión en la dirección de n_μ , cuando n_μ solo tiene componente temporal la aceleración esta relacionada con el parámetro de Hubble.

El **shear** (tensor sin traza y simétrico):

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{P}_\mu^\alpha \mathcal{P}_\nu^\beta (n_{\alpha;\beta} + n_{\beta;\alpha}) - \frac{1}{3} \theta \mathcal{P}_{\mu\nu} \quad (2.28)$$

Esta cantidad es un analogo del shear usado en el contexto de hidrodinámica, el cual es asociado con el gradiente de la velocidad de flujo de un liquido.

La **vorticidad** (tensor antisimétrico):

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{P}_\mu^\alpha \mathcal{P}_\nu^\beta (n_{\alpha;\beta} - n_{\beta;\alpha}) \quad (2.29)$$

Este tensor es un análogo de la vorticidad usualmente estudiada en los fluidos, sin embargo en este contexto se refiere a características del espacio-tiempo que pueden observarse como discos de acreción.

En el contexto de ADM, $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ es la 3-métrica inducida en las hipersuperficies espaciales y su derivada de Lie a lo largo de n^μ es la curvatura extrínseca:

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n \mathcal{P}_{\mu\nu} = \mathcal{P}_\nu^\lambda n_{\mu;\lambda} = \frac{1}{3} \theta \mathcal{P}_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \quad (2.30)$$

En términos de las perturbaciones se puede descomponer el shear en su parte escalar σ_{sij} y vectorial σ_{vij} :

$$\sigma_{vij} = -a B_{,(ij)} \quad (2.31)$$

$$\sigma_{sij} = \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \nabla^2 \delta_{ij} \right) a \sigma \quad (2.32)$$

$$\sigma = E' - B \quad (2.33)$$

Con $E' = \partial_\eta E$. Así mismo, la aceleración y expansión en términos de las perturbaciones son:

$$a_i = \phi_{,i} \quad (2.34)$$

$$\theta = \frac{3}{a} \left(\mathcal{H} - \mathcal{H} \phi - \phi' + \frac{1}{3} \nabla^2 \sigma \right) \quad (2.35)$$

Donde $\mathcal{H} = aH$ es el parámetro conforme de Hubble. Por otro lado, la curvatura intrínseca es:

$${}^{(3)}R = \frac{4}{a^2} \nabla^2 \psi \quad (2.36)$$

2.5. Norma síncrona

Considere la siguiente transformación:

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu - \epsilon \xi^\mu$$

Donde ξ^μ se puede separar en su parte escalar (α , β) y vectorial γ^i :

$$(\xi^\mu) = (\alpha, \beta,^i + \gamma^i) \quad (2.37)$$

Bajo esta transformación tomando términos a primer orden, un tensor se transforma de forma activa de la siguiente manera:

CAPÍTULO 2 MODELO DE GRAVEDAD CUÁNTICA
2.5. NORMA SÍNCRONA

$$\tilde{T}^{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\sigma} T^{\rho\sigma}(x) \quad (2.38)$$

$$= (\delta_\rho^\mu - \epsilon \xi_{,\rho}^\mu)(\delta_\sigma^\nu - \epsilon \xi_{,\sigma}^\nu) T^{\rho\sigma}(x) \quad (2.39)$$

$$= T^{\mu\nu}(x) - \epsilon [\xi_{,\rho}^\mu T^{\rho\nu}(x) + \xi_{,\sigma}^\nu T^{\mu\sigma}(x)] \quad (2.40)$$

$$\Rightarrow \tilde{T}^{\mu\nu}(x) = T^{\mu\nu}(x) - \epsilon [\xi_{,\rho}^\mu T^{\rho\nu}(x) + \xi_{,\sigma}^\nu T^{\mu\sigma}(x) - \xi^{\rho} T_{,\rho}^{\mu\nu}] \quad (2.41)$$

$$= T^{\mu\nu}(x) + \epsilon \mathcal{L}_\xi T^{\mu\nu} \quad (2.42)$$

En estas expresiones se uso la notación $T(x)$ en vez de $T(x^\mu)$ para no saturar visualmente las ecuaciones, y en la penultima ecuación se aplicó el teorema de Taylor a primer orden. Aplicando este resultado a (2.15) con una perturbación a primer orden se tiene:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}_0 + \epsilon \delta \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}_0 + \epsilon (\delta \mathbf{T} + \mathcal{L}_\xi \mathbf{T}_0) \quad (2.43)$$

Al tomar esta transformación en la métrica con perturbaciones escalares de primer orden, usando (2.37), se obtienen las transformaciones de las perturbaciones:

$$\tilde{\phi} = \phi + N^2(\mathcal{H}\alpha + \alpha') \quad (2.44)$$

$$\tilde{\psi} = \psi - \mathcal{H}\alpha \quad (2.45)$$

$$\tilde{B} = B - \alpha + \beta' \quad (2.46)$$

$$\tilde{E} = E + \beta \quad (2.47)$$

Para este trabajo se tomara la norma síncrona, en la que el tiempo propio para coordenadas espaciales fijas corresponde al tiempo cósmico en el espacio. Esto implica las siguientes condiciones de norma:

$$\alpha = -a^{-1} \left(\int \frac{a}{N^2} \phi d\eta - C(x^b) \right) \quad (2.48)$$

$$\beta = \int (\alpha - B) d\eta + \hat{C}(x^b) \quad (2.49)$$

$$\gamma^i = 0 \quad (2.50)$$

Donde C y \hat{C} son dos nuevas variables las cuales se fijaran posteriormente. Bajo esta norma las cantidades escalares antes definidas se transforman de la siguiente manera:

$$\tilde{\phi} = 0 \quad (2.51)$$

$$\tilde{B}_{,i} = 0 \quad (2.52)$$

$$\tilde{\psi} = \psi - \alpha \mathcal{H} \quad (2.53)$$

$$\tilde{\sigma} = \tilde{E}' - \tilde{B} = \sigma + \alpha - B \quad (2.54)$$

La métrica transformada y su dual son:

$$\tilde{g}_{00} = -a^2 N^2 \quad (2.55)$$

$$\tilde{g}_{0i} = 0 \quad (2.56)$$

$$\tilde{g}_{ij} = a^2 \left(\delta_{ij} + 2 \left[\tilde{E}_{,ij} - \tilde{\psi} \delta_{ij} \right] \right) \quad (2.57)$$

$$\tilde{g}^{00} = -(aN)^{-2} \quad (2.58)$$

$$\tilde{g}^{0i} = 0 \quad (2.59)$$

$$\tilde{g}^{ij} = a^{-2} \left(\delta^{ij} - 2 \left[\tilde{E},^{ij} - \tilde{\psi} \delta^{ij} \right] \right) \quad (2.60)$$

EL campo vectorial temporal oide transforma como:

$$\tilde{n}_0 = -a \quad (2.61)$$

$$\tilde{n}_i = 0 \quad (2.62)$$

$$\tilde{n}^0 = a^{-1} \quad (2.63)$$

$$\tilde{n}^i = 0 \quad (2.64)$$

Las cantidades geométricas transformadas son:

CAPÍTULO 2 MODELO DE GRAVEDAD CUÁNTICA
2.6. ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT

$$\tilde{\mathcal{P}}_{00} = \tilde{\mathcal{P}}_{0i} = 0 \quad (2.65)$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij} = \tilde{g}_{ij} \quad (2.66)$$

$$\tilde{\omega}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.67)$$

$$\tilde{\sigma}_{00} = \tilde{\sigma}_{0i} = 0 \quad (2.68)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \nabla^2 \delta_{ij} \right) a \tilde{\sigma} \quad (2.69)$$

$$\tilde{K}_{00} = \tilde{K}_{0i} = 0 \quad (2.70)$$

$$\tilde{K}_{ij} = \frac{1}{3} \tilde{\theta} \tilde{g}_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij} \quad (2.71)$$

$$\tilde{\theta} = \frac{3}{a} \left(\mathcal{H} - \tilde{\psi}' + \frac{1}{3} \nabla^2 \tilde{\sigma} \right) \quad (2.72)$$

$$\tilde{a}_0 = \frac{-a'}{a} \quad (2.73)$$

$$\tilde{a}_i = 0 \quad (2.74)$$

$${}^{(3)}\tilde{R} = \frac{4}{a^2} \nabla^2 \tilde{\psi} \quad (2.75)$$

Note que para el caso en que se tome a las perturbaciones como cero se recuperan, como sería intuitivamente esperado, las cantidades que corresponderían a las generadas por la métrica de fondo. Por otro lado, si solo se anulara \tilde{E} obtendríamos un espacio sin shear ni vorticidad, con la curvatura intrínseca dependiente de a y $\tilde{\psi}$, lo cual resultara de importancia en las siguientes secciones.

2.6. Ecuación de Wheeler-Dewitt

Sean:

$$\chi(\eta, x^b) = \nabla^2 \tilde{E} \quad (2.76)$$

$$\mathcal{F}(\eta, x^b) = \chi - 3\tilde{\psi} \quad (2.77)$$

$$I(\eta, x^b) = 2\nabla^2 \tilde{\psi} = \frac{a^2}{2} {}^{(3)}\tilde{R} \quad (2.78)$$

La acción de Einstein-Hilbert $S_G = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} R d\eta d^3x$ en términos de estas nuevas cantidades, usando la notación $\partial_\eta a = a'$, es:

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int \left\{ \frac{2a}{N\sqrt{2\mathcal{F}+1}} [3a''(2\mathcal{F}+1) + 3a'\mathcal{F}' + a(\mathcal{F}'' + N^2 I)] \right\} d\eta d^3x$$

CAPÍTULO 2 MODELO DE GRAVEDAD CUÁNTICA
2.6. ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT

Los detalles de la derivación de esta acción se encuentran en el apéndice B. Esta expresión contiene segundas derivadas temporales, sin embargo es posible obtener la acción con sólo primeras derivadas integrando por partes S_G :

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int \frac{2a}{N\sqrt{2\mathcal{F}+1}} \left[N^2 a I - 3 \frac{a'^2}{a} (2\mathcal{F}+1) - 2a' \mathcal{F}' \right] d\eta d^3x$$

$$+ \frac{1}{16\pi} \int \frac{2a}{N\sqrt{2\mathcal{F}+1}} [a\mathcal{F}' + 3a'(2\mathcal{F}+1)]_0^{\eta_i} d^3x$$

Donde η_i es la cota superior de η en la escala de Planck. Si suponemos que $a\mathcal{F}' + 3a'(2\mathcal{F}+1) = 0$ cuando $\eta = 0$ y $\eta = \eta_i$, entonces:

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int \frac{2a}{N\sqrt{2\mathcal{F}+1}} \left[N^2 a I - 3 \frac{a'^2}{a} (2\mathcal{F}+1) - 2a' \mathcal{F}' \right] d\eta d^3x$$

$$= \int \mathcal{L}_G d\eta d^3x$$

Por lo tanto el Lagrangiano de gravedad es:

$$\mathcal{L}_G = \frac{2a}{16\pi N \sqrt{2\chi - 6\tilde{\psi} + 1}} \left[N^2 a I - 3 \frac{a'^2}{a} (2\chi - 6\tilde{\psi} + 1) - 2a'(\chi' - 3\tilde{\psi}') \right] \quad (2.79)$$

Con este Lagrangiano se obtienen los siguientes momentos:

$$\pi_a = \partial_{a'} \mathcal{L}_G = -\frac{a}{8\pi N \sqrt{2\chi - 6\tilde{\psi} + 1}} \left[2(\chi' - 3\tilde{\psi}') + 6 \frac{a'}{a} (2\chi - 6\tilde{\psi} + 1) \right] \quad (2.80)$$

$$\pi_{\tilde{\psi}} = \partial_{\tilde{\psi}'} \mathcal{L}_G = \frac{3aa'}{4\pi N \sqrt{2\chi - 6\tilde{\psi} + 1}} \quad (2.81)$$

$$\pi_\chi = \partial_{\chi'} \mathcal{L}_G = -\frac{aa'}{4\pi N \sqrt{2\chi - 6\tilde{\psi} + 1}} \quad (2.82)$$

$$\pi_N = \partial_{N'} \mathcal{L}_G = 0 \quad (2.83)$$

$$\lambda = \pi_{\tilde{\psi}} + 3\pi_\chi = 0 \quad (2.84)$$

Donde las ultimas dos ecuaciones son constricciones primarias. De las expresiones anteriores se sigue:

CAPÍTULO 2 MODELO DE GRAVEDAD CUÁNTICA
2.6. ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT

$$a' = \frac{2\pi N(\chi - 3\tilde{\psi} + 1)}{a}(\pi_\chi + \pi_{\tilde{\psi}}) \quad (2.85)$$

$$\chi' - 3\tilde{\psi}' = -\frac{4\pi N(\chi - 3\tilde{\psi} + 1)}{a} \left[\pi_a + \frac{3}{2a}(\pi_\chi + \pi_{\tilde{\psi}})(2\chi - 6\tilde{\psi} + 1) \right] \quad (2.86)$$

Para estas expresiones se toma en cuenta que las perturbaciones son a primer orden, por lo que $\sqrt{2\chi - 6\tilde{\psi} + 1} = \chi - 3\tilde{\psi} + 1$. Con estos elementos se obtiene la densidad Hamiltoniana canónica [27]:

$$H_c = N \left[\frac{2\pi}{a}(\chi - 3\tilde{\psi} + 1)(\pi_\chi + \pi_{\tilde{\psi}})\pi_a + \frac{3\pi}{2a^2}(\pi_\chi + \pi_{\tilde{\psi}})^2(3\chi - 9\tilde{\psi} + 1) - \frac{a^2}{8\pi}I \right]$$

La constricción (2.84) no puede ser usada hasta demostrar que conlleva a inconsistencias en las ecuaciones de movimiento o que genera constricciones secundarias, sin embargo esto no ocurre ya que su bracket de Poisson es:

$$[\lambda, H_c] = \left[\pi_{\tilde{\psi}} + 3\pi_\chi, N \left\{ \frac{2\pi}{a}(\chi - 3\tilde{\psi} + 1)(\pi_\chi + \pi_{\tilde{\psi}})\pi_a + \frac{3\pi}{2a^2}(\pi_\chi + \pi_{\tilde{\psi}})^2(3\chi - 9\tilde{\psi} + 1) - \frac{a^2}{8\pi}I \right\} \right] = 0$$

Ya que la constricción no conlleva a inconsistencias, al usarla se obtiene el siguiente Hamiltoniano:

$$H_c = \frac{4\pi N(\chi - 3\tilde{\psi} + 1)}{3a} \left[\pi_a \pi_{\tilde{\psi}} + \frac{\pi_{\tilde{\psi}}^2}{2a}(2\chi - 6\tilde{\psi} + 1) - \frac{3a^3}{16\pi^2} \nabla^2 \tilde{\psi} \right] = NH$$

Por lo tanto S_G se puede escribir como:

$$S_G = \int \left(\pi_a a' + \pi_{\tilde{\psi}} \tilde{\psi}' + \pi_\chi \chi' - NH \right) d\eta d^3x \quad (2.87)$$

Note que $\chi' = [\chi, H_c] = 0$ implica que χ es constante en el tiempo. De (2.83) se sigue que N es un multiplicador de Lagrange y H es una constricción secundaria [26][27]:

$$H = \frac{4\pi(\chi - 3\tilde{\psi} + 1)}{3a} \left[\pi_a \pi_{\tilde{\psi}} + \frac{\pi_{\tilde{\psi}}^2}{2a}(2\chi - 6\tilde{\psi} + 1) - \frac{3a^3}{16\pi^2} \nabla^2 \tilde{\psi} \right] = 0 \quad (2.88)$$

$$\Rightarrow \pi_a \pi_{\tilde{\psi}} + \frac{\pi_{\tilde{\psi}}^2}{2a}(2\chi - 6\tilde{\psi} + 1) - \frac{3a^3}{16\pi^2} \nabla^2 \tilde{\psi} = 0 \quad (2.89)$$

CAPÍTULO 2 MODELO DE GRAVEDAD CUÁNTICA
2.6. ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT

Es importante resaltar que $(\chi - 3\tilde{\psi} + 1)$ no puede ser cero al tener una métrica no singular y por lo tanto es posible obtener (2.89) a partir de (2.88). Al cuantizar de forma canónica, utilizando un ordenamiento a la Weyl en el segundo término, la última expresión se obtiene la siguiente ecuación de Wheeler-Dewitt para la función de onda del universo $\varphi(a, \tilde{\psi}, \chi)$:

$$(2\chi - 6\tilde{\psi} + 1)\partial_{\tilde{\psi}}^2\varphi - 6\partial_{\tilde{\psi}}\varphi + 2a\partial_a\partial_{\tilde{\psi}}\varphi + \frac{3a^4}{8\pi^2}\nabla^2\tilde{\psi}\varphi = 0 \quad (2.90)$$

Esta ecuación requiere de solución numérica e incluso en ese caso se dificulta tal proceso ya que aunque χ es constante en el tiempo, no es constante en el espacio y esto repercute en la dificultad de computo para la solución de la ecuación de Wheeler-Dewitt como se verá en el siguiente capítulo. Para disminuir la dificultad de computo es posible fijar más la norma al tomar $\hat{C} = \int(B - \alpha)d\eta - E$ en (2.49) y tomando en cuenta (2.47), se tiene $\tilde{E} = 0$. Lo anterior implica que la métrica es diagonal y solo tiene como perturbación a $\tilde{\psi}(\eta, x^b)$.

Bajo estas condiciones la densidad del Hamiltoniano canónico es la siguiente:

$$H_c = \frac{4\pi N\sqrt{1 - 6\tilde{\psi}}}{3a} \left[\pi_a\pi_{\tilde{\psi}} + \frac{\pi_{\tilde{\psi}}^2}{2a}(1 - 6\tilde{\psi}) - \frac{3a^3}{16\pi^2}\nabla^2\tilde{\psi} \right] \quad (2.91)$$

Es de importancia señalar que, dado que la métrica no es singular, $\tilde{\psi} < 1/6$ y tiene que tomarse en cuenta esta cota para subsecuente análisis. Por otra parte, tal y como sucede con (2.88), de (2.91) se desprende la siguiente constricción:

$$\pi_a\pi_{\tilde{\psi}} + \frac{\pi_{\tilde{\psi}}^2}{2a}(1 - 6\tilde{\psi}) - \frac{3a^3}{16\pi^2}\nabla^2\tilde{\psi} = 0 \quad (2.92)$$

Como puede observar, esta ecuación es un caso particular de (2.89) que difiere de este por un grado de libertad. Al cuantizar de forma canónica y tomar un ordenamiento a la Weyl en el segundo término de la constricción, cómo se hizo en el caso general, la expresión anterior se torna en la ecuación de Wheeler-Dewitt:

$$(6\tilde{\psi} - 1)\partial_{\tilde{\psi}}^2\varphi(a, \tilde{\psi}) + 6\partial_{\tilde{\psi}}\varphi(a, \tilde{\psi}) - 2a\partial_a\partial_{\tilde{\psi}}\varphi(a, \tilde{\psi}) - \frac{3}{8\pi^2}a^4\nabla^2\tilde{\psi}\varphi(a, \tilde{\psi}) = 0 \quad (2.93)$$

Donde $\varphi(a, \tilde{\psi})$ es la función de onda del universo. Las ecuaciones (2.90) y (2.93) son de suma importancia pues, debido a la naturaleza de la constricción hamiltoniana (17), cumplen la función que usualmente ocupa la ecuación de Schrodinger [3] para la mecánica

CAPÍTULO 2 MODELO DE GRAVEDAD CUÁNTICA
2.6. ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT

cuántica y rige la dinámica de la función de onda, que en este caso implica la evolución de las perturbaciones cuánticas a la gravedad para sus respectivos casos.

Capítulo 3

Solución a la ecuación de Wheeler-Dewitt

Para resolver las ecuaciones (2.90) y (2.93) resulta necesario usar métodos numéricos, lo cual se hará mediante aproximación por diferencias finitas.

Antes de proceder a presentar brevemente el método de Euler y la solución numérica de estas ecuaciones es necesario resaltar algunas consideraciones. Note primeramente que cada una es en sí un sistema continuo de ecuaciones diferenciales acopladas, esto debido a que $\tilde{\psi}(\eta, x^i)$ es un campo escalar. Debido a estas características y con la finalidad de facilitar el proceso de solución, se han tomado dos suposiciones adicionales: solo se tomará una dimensión espacial y la perturbación se tomará sobre un intervalo espacial finito (debido a que se usara la aproximación por diferencias finitas).

3.1. Aproximación por diferencias finitas

Este método [28] hace uso del teorema de Taylor para obtener aproximaciones discretas para derivadas. Suponga una función f que posee $n + 1$ derivadas continuas en la vecindad de un punto x . El teorema de Taylor establece que para un h suficientemente pequeño, se puede expandir $f(x)$ como:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n + O(h^{n+1}) \quad (3.1)$$

Donde el último termino se dice que es un *término de error* de orden $n + 1$ en h . Por lo tanto, si se discretiza el intervalo $x_0 < x < x_m$ en N pedazos o pasos finitos $x_n = x_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, donde $h = \frac{x_m - x_0}{N}$ es el *tamaño de paso*. Tomando esta partición es posible obtener una aproximación para $f'(x_n)$, para cada x_n en el intervalo:

CAPÍTULO 3 SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT
3.2. ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT EN DIFERENCIAS FINITAS

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.2)$$

Donde hemos despreciado términos del orden de h^2 y superiores. De forma similar es posible obtener una aproximación para $f''(x)$ al tomar un tamaño de paso de $-h$ a partir de x y la expresión para la aproximación de $f'(x)$:

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + O(h^3) \quad (3.3)$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} \quad (3.4)$$

Donde se han ignorado términos mayores a h^2 . En el caso de una ecuación con derivadas parciales, esto puede realizarse con cada una de la las variables, e.g. :

$$g_{,xx}(x, y) + g_{,y}(x, y) = \frac{g(x-h, y) - 2g(x, y) + g(x+h, y)}{h^2} + \frac{g(x, y+k) - g(x, y)}{k}$$

En este ejemplo, h es el tamaño de paso para x , mientras que k es el tamaño de paso para y . Al tener esta aproximación para cada punto discreto dentro de los intervalos del dominio de la solución, es posible construir la solución por pasos si se cuentan con las condiciones iniciales o de frontera.

3.2. Ecuación de Wheeler-Dewitt en diferencias finitas

Considere el termino $\nabla^2 \tilde{\psi}$, al tomar en cuenta las consideraciones adicionales sobre el sistema para facilitar su análisis, este término se torna en una segunda derivada parcial $\nabla^2 \tilde{\psi}(\eta, x) = \tilde{\psi}_{,xx}(\eta, x)$. Aunado a considerar solo una dimensión espacial, también se ha considerado que la perturbación es local, por lo que el dominio espacial de la perturbación es finito y puede discretizarse para obtener una aproximación por diferencias finitas para $\tilde{\psi}_{,xx}(\eta, x)$:

$$\tilde{\psi}_{,xx}(\eta, x) = \frac{\tilde{\psi}(\eta, x-l) - 2\tilde{\psi}(\eta, x) + \tilde{\psi}(\eta, x+l)}{l^2} \quad (3.5)$$

Donde l es el tamaño de paso para x . Esta partición del espacio tiene como consecuencia que el conjunto de ecuaciones (2.90) o (2.93) sea ahora un sistema finito de ecuaciones, una para cada aproximación de $\tilde{\psi}$ en los puntos interiores del intervalo de x .

Con esta información el caso general (2.90) se puede escribir como:

CAPÍTULO 3 SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT
3.2. ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT EN DIFERENCIAS FINITAS

$$\begin{aligned}
(1 + 2\chi_0 - 6\tilde{\psi}_0)\partial_{\tilde{\psi}_0}^2 \varphi - 6\partial_{\tilde{\psi}_0} \varphi + 2a\partial_a \partial_{\tilde{\psi}_0} \varphi + \frac{6}{16\pi^2} \frac{a^4}{l^2} (-2\tilde{\psi}_0 + \tilde{\psi}_1)\varphi &= 0 \\
&\dots \\
(1 + 2\chi_m - 6\tilde{\psi}_m)\partial_{\tilde{\psi}_m}^2 \varphi - 6\partial_{\tilde{\psi}_m} \varphi + 2a\partial_a \partial_{\tilde{\psi}_m} \varphi + \frac{6}{16\pi^2} \frac{a^4}{l^2} (\tilde{\psi}_{m-1} - 2\tilde{\psi}_m + \tilde{\psi}_{m+1})\varphi &= 0 \\
&\dots \\
(1 + 2\chi_L - 6\tilde{\psi}_L)\partial_{\tilde{\psi}_L}^2 \varphi - 6\partial_{\tilde{\psi}_L} \varphi + 2a\partial_a \partial_{\tilde{\psi}_L} \varphi + \frac{6}{16\pi^2} \frac{a^4}{l^2} (-2\tilde{\psi}_L + \tilde{\psi}_{L-1})\varphi &= 0
\end{aligned}$$

Con $\varphi = \varphi(a, \tilde{\psi}_0, \dots, \tilde{\psi}_L, \chi, \dots, \chi_L)$, $\chi_m = \chi(\eta, x_0 + ml)$, y $\tilde{\psi}_m = \tilde{\psi}(\eta, x_0 + ml)$. La suma de todas estas expresiones da como resultado la siguiente ecuación:

$$\sum_{m=0}^L \left[(1 + 2\chi_m - 6\tilde{\psi}_m)\partial_{\tilde{\psi}_m}^2 \varphi - 6\partial_{\tilde{\psi}_m} \varphi + 2a\partial_a \partial_{\tilde{\psi}_m} \varphi \right] - \frac{6}{16\pi^2} \frac{a^4}{l^2} (\tilde{\psi}_0 + \tilde{\psi}_L)\varphi = 0 \quad (3.6)$$

Aproximando por diferencias finitas para $\tilde{\psi}_m$, χ_m y a se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^L \left\{ \frac{1 + 2\chi_{mj} - 6\tilde{\psi}_{mj}}{h_m^2} \left[\varphi(a_n, \tilde{\psi}_{mj} + h_m, \dots) - 2\varphi(a_n, \tilde{\psi}_{mj}, \dots) + \varphi(a_n, \tilde{\psi}_{mj} - h_m, \dots) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{6}{h_m} \left[\varphi(a_n, \tilde{\psi}_{mj} + h_m, \dots) - \varphi(a_n, \tilde{\psi}_{mj}, \dots) \right] + \frac{2a_n}{h_m k} \left[\varphi(a_n + k, \tilde{\psi}_{mj} + h_m, \dots) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \varphi(a_n, \tilde{\psi}_{mj} + h_m, \dots) - \varphi(a_n + k, \tilde{\psi}_{mj}, \dots) + \varphi(a_n, \tilde{\psi}_{mj}, \dots) \right] \right\} - \frac{6}{16\pi^2} \frac{a_n^4}{l^2} (\tilde{\psi}_{0j} + \tilde{\psi}_{Lj})\varphi = 0 \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Donde se toma una discretización en un intervalo finito para las variables χ , $\tilde{\psi}$ y a , con tamaños de paso h_m para χ_m y $\tilde{\psi}_m$, y k para a . Por lo tanto $\chi_{mj} = \chi_{m0} + jh_m$, $\tilde{\psi}_{mj} = \tilde{\psi}_{m0} + jh_m$, $a_n = a_0 + nk$ son puntos en los intervalos $\chi_{m0} < \chi_{mj} < \chi_{mJ}$, $\tilde{\psi}_{m0} < \tilde{\psi}_{mj} < \tilde{\psi}_{mJ}$, $a_0 < a_n < a_N$.

Por otro lado (2.93) toma la forma:

$$\begin{aligned}
(6\tilde{\psi}_0 - 1)\partial_{\tilde{\psi}_0}^2 \varphi + 6\partial_{\tilde{\psi}_0} \varphi - 2a\partial_a \partial_{\tilde{\psi}_0} \varphi - \frac{3}{8\pi^2} \frac{a^4}{l^2} (-2\tilde{\psi}_0 + \tilde{\psi}_1)\varphi &= 0 \\
&\dots \\
(6\tilde{\psi}_m - 1)\partial_{\tilde{\psi}_m}^2 \varphi + 6\partial_{\tilde{\psi}_m} \varphi - 2a\partial_a \partial_{\tilde{\psi}_m} \varphi - \frac{3}{8\pi^2} \frac{a^4}{l^2} (\tilde{\psi}_{m-1} - 2\tilde{\psi}_m + \tilde{\psi}_{m+1})\varphi &= 0 \\
&\dots \\
(6\tilde{\psi}_L - 1)\partial_{\tilde{\psi}_L}^2 \varphi + 6\partial_{\tilde{\psi}_L} \varphi - 2a\partial_a \partial_{\tilde{\psi}_L} \varphi - \frac{3}{8\pi^2} \frac{a^4}{l^2} (-2\tilde{\psi}_L + \tilde{\psi}_{L-1})\varphi &= 0
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 3 SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT
3.2. ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT EN DIFERENCIAS FINITAS

Donde $\varphi = \varphi(a, \tilde{\psi}_0, \dots, \tilde{\psi}_L)$. Como se hizo en el caso general, a suma de todas estas expresiones da como resultado:

$$\sum_{m=0}^L \left[(6\tilde{\psi}_m - 1) \partial_{\tilde{\psi}_m}^2 \varphi + 6 \partial_{\tilde{\psi}_m} \varphi \right] - 2a \partial_a \sum_{m=0}^L \partial_{\tilde{\psi}_m} \varphi + \frac{3}{8\pi^2} \frac{a^4}{l^2} (\tilde{\psi}_0 + \tilde{\psi}_L) \varphi = 0 \quad (3.8)$$

A su vez esta ecuación puede aproximarse por diferencias finitas para cada $\tilde{\psi}_m$ y a , tomando la forma:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^L \left\{ \frac{6\tilde{\psi}_{mj} - 1}{h_m^2} \left[\varphi(a_n, \tilde{\psi}_{mj} + h_m, \dots) - 2\varphi(a_n, \tilde{\psi}_{mj}, \dots) + \varphi(a_n, \tilde{\psi}_{mj} - h_m, \dots) \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{6}{h_m} \left[\varphi(a_n, \tilde{\psi}_{mj} + h_m, \dots) - \varphi(a_n, \tilde{\psi}_{mj}, \dots) \right] - \frac{2a_n}{h_m k} \left[\varphi(a_n + k, \tilde{\psi}_{mj} + h_m, \dots) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \varphi(a_n, \tilde{\psi}_{mj} + h_m, \dots) - \varphi(a_n + k, \tilde{\psi}_{mj}, \dots) + \varphi(a_n, \tilde{\psi}_{mj}, \dots) \right] \right\} + \frac{3}{8\pi^2} \frac{a_n^4}{l^2} (\tilde{\psi}_{0j} + \tilde{\psi}_{Lj}) \varphi = 0 \quad (3.9) \end{aligned}$$

Donde se ha discretizado a a y $\tilde{\psi}_m$ de la misma forma que en el caso general. Finalmente, para poder *armar* una aproximación por pasos son necesarias las condiciones de frontera, las cuales proponemos sean para ambas ecuaciones:

$$\varphi = 0 \quad \text{si} \quad a = 0, \quad a = a_N \quad (3.10)$$

$$\varphi = a \left(e^{-a^2} - e^{-a_N^2} \right) \quad \text{si} \quad \tilde{\psi}_m = 0 \quad (3.11)$$

Otra expresión importante para este análisis es la relación de Heisenberg y para poder usarla en el calculo numérico es necesario expresarla de forma discreta. La relación de Heisenberg entre dos operadores está dada por:

$$\Delta A \Delta B = \sqrt{\left(\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \right) \left(\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2 \right)} \geq \frac{1}{2} | \langle [A, B] \rangle | \quad (3.12)$$

Donde el valor de expectación de un operador $\langle A \rangle$ usando una función de onda normalizada $\varphi(x^b)$ es:

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^* A \varphi d^3x \quad (3.13)$$

Sin embargo en el caso discreto de la solución numérica por diferencias finitas, para obtener una aproximación del valor de expectación de un operador, la expresión anterior

CAPÍTULO 3 SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT
3.3. SOLUCIÓN NUMÉRICA PARA EL CASO GENERAL

se transforma en la siguiente para el caso general:

$$\langle A \rangle \approx \sum_{a=a_0}^{a_N} \sum_{\tilde{\psi}_0=\tilde{\psi}_{00}}^{\tilde{\psi}_{0J}} \cdots \sum_{\tilde{\psi}_L=\tilde{\psi}_{L0}}^{\tilde{\psi}_{LJ}} \sum_{\chi_0=\chi_{00}}^{\tilde{\psi}_{0J}} \cdots \sum_{\chi_L=\chi_{L0}}^{\chi_{LJ}} \left[\varphi^*(a, \tilde{\psi}_0, \dots, \tilde{\psi}_L, \chi_0, \dots, \chi_L) \right. \\ \left. A\varphi(a, \tilde{\psi}_0, \dots, \tilde{\psi}_L, \chi_0, \dots, \chi_L) \right] k \prod_{m=0}^L h_m^2 \quad (3.14)$$

Mientras que para la función de onda en (2.93) se tiene:

$$\langle A \rangle \approx \sum_{a=a_0}^{a_N} \sum_{\tilde{\psi}_0=\tilde{\psi}_{00}}^{\tilde{\psi}_{0J}} \cdots \sum_{\tilde{\psi}_L=\tilde{\psi}_{L0}}^{\tilde{\psi}_{LJ}} \varphi^*(a, \tilde{\psi}_0, \dots, \tilde{\psi}_L) A\varphi(a, \tilde{\psi}_0, \dots, \tilde{\psi}_L) k \prod_{m=0}^L h_m \quad (3.15)$$

3.3. Solución numérica para el caso general

La ecuación (3.7) nos permite armar por pasos una aproximación a la solución de la ecuación (2.90), dados los intervalos para χ_m , $\tilde{\psi}_m$, a y sus tamaños de paso o números máximos de pasos, así como un valor arbitrario para l . Esto puede realizarse de manera computacional, sin embargo puede requerir un alto poder de computo dependiendo de la *resolución* deseada y el tiempo disponible para su calculo ya que el número de puntos a calcular es $J^{2(L+1)}N$ si se toma el mismo numero de pasos para todas las χ_m , $\tilde{\psi}_m$ (e.g. si se toman $J = N = 25$, $L = 2$ es necesario calcular $25^7 \approx 6 \times 10^9$ puntos, que al tomar cortes de dos variables resultan en una *imagen* con una resolución de 25×25 *pixeles*). Es por esta razón que se propuso seguir fijando la norma, pues para el caso con $\chi = 0$ los puntos a calcular solo son $J^{L+1}N$ (esto corresponde a $25^4 = 390625$ puntos tomando $J = N = 25$ y $L = 2$). Sin embargo en esta sección se muestra la solución numérica a baja resolución para el caso general, la cual se obtuvo gracias al apoyo del LNS.

Para esta aproximación a la solución de (2.90) se toman los parámetros $J = N = 25$, $L = 2$, $l = 1$, $a_0 = \chi_{m0} = \tilde{\psi}_{m0} = 0$, $a_N = 1$, $\chi_{mJ} = 1/2$, $\tilde{\psi}_{mJ} = 1/6$. Esta aproximación se realiza mediante un programa desarrollado en python, el cual calcula paso a paso la solución aproximada mediante (3.7), con (3.10) y (3.11) como condiciones de frontera; para con dichos datos obtener la densidad de probabilidad normalizada $\Phi = \varphi^2/|\varphi|$. Dicho programa genera un *array* con tamaño $25 \times 25 \times 25 \times 25 \times 25 \times 25 \times 25$, que es almacenado para posterior análisis gráfica. El análisis gráfico consiste en tomar cortes de este objeto para obtener matrices de tamaño 25×25 , posteriormente se asigna a los elementos de dicha matriz un código de color según su valor y se muestra en imagen un mapa de color para dicha matriz generando así un gráfico para la amplitud de probabilidad.

Estos cortes en Φ son usados para analizar gráficamente la función de manera similar a como se analizaría un objeto en una tomografía, donde es de especial interés la evolución

CAPÍTULO 3 SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT
3.3. SOLUCIÓN NUMÉRICA PARA EL CASO GENERAL

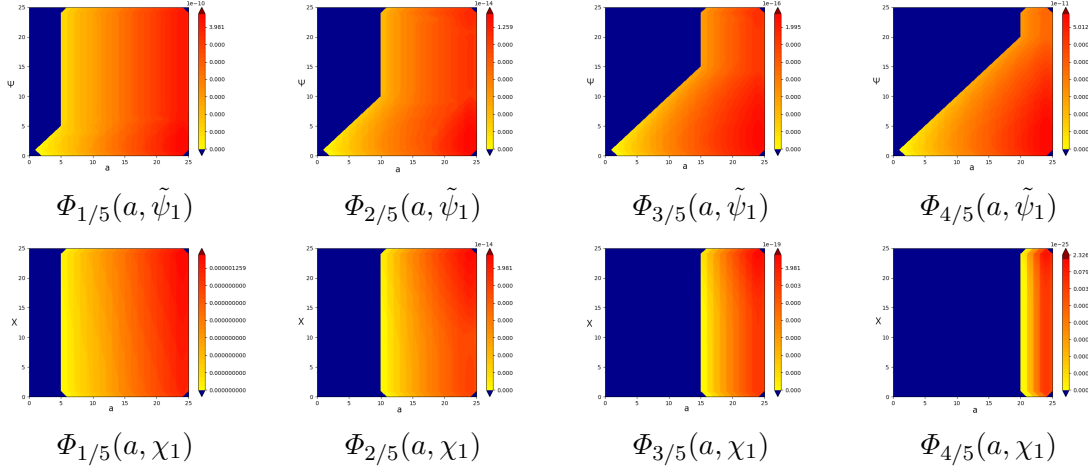


Figura 3.1: Cortes de la densidad de probabilidad Φ para $\tilde{\psi}$ en relación con a , y χ en relación con a . Se usó la notación $\Phi_{n/5}(a, \chi_1) = \Phi(a, \chi_1, \chi_{m \neq 1} = \frac{n}{5}\chi_{mJ}, \tilde{\psi}_m = \frac{n}{5}\tilde{\psi}_{mJ})$.

de las perturbaciones cuánticas con respecto de a . En estas imágenes se puede observar que para valores de a cercanos a cero, los valores de $\tilde{\psi}$ son muy parecidos a los valores de a mientras que χ está restringida a valores mayores; también es posible observar que los máximos de Φ se presentan para cada corte en regiones correspondientes a valores elevados de a , mientras que estos máximos favorecen valores pequeños de $\tilde{\psi}$ y valores elevados de χ . También es evidente la restricción de valores probables de χ conforme incrementa $\tilde{\psi}$, lo cual apunta a que los valores predominantes de $\tilde{\psi}$ son pequeños y estos tienen un mayor efecto sobre Φ que los valores que pudiera tomar χ .

El programa usado para obtener esta solución aproximada también calcula una aproximación para las relaciones de Heisenberg y los valores de expectación para a , χ , $\tilde{\psi}$ usando (3.12) y (3.14):

$$\Delta a \Delta \tilde{\psi} \approx 0,000013454538233446927 \quad (3.16)$$

$$\Delta a \Delta \chi \approx 0,00011436981381034946 \quad (3.17)$$

$$\langle \tilde{\psi} \rangle \approx 0,014467200464702882 \quad (3.18)$$

$$\langle \chi \rangle \approx 0,4345028615109374 \quad (3.19)$$

$$\langle a \rangle \approx 0,959887125594687 \quad (3.20)$$

$$\langle {}^{(3)}\tilde{R} \rangle \approx 1,9197727105432912 \times 10^{-10} \quad (3.21)$$

Para el valor de expectación de ${}^{(3)}\tilde{R}$ se usó (2.75) en diferencias finitas:

$${}^{(3)}\tilde{R} = \frac{4}{a_n^2} \left(\tilde{\psi}_{m-1 j} - 2\tilde{\psi}_{mj} + \tilde{\psi}_{m+1 j} \right) \quad (3.22)$$

CAPÍTULO 3 SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT
3.4. SOLUCIÓN NUMÉRICA PARA EL CASO $\chi = 0$

Estos valores medios están en concordancia con lo observado en el análisis gráfico en cuanto al comportamiento de las perturbaciones y la tendencia de a hacia su valor máximo, aunado a esto el valor esperado de la 3-curvatura es diferente de cero por una cantidad que puede atribuirse al propio error de la aproximación. La calidad de los resultados obtenidos con esta aproximación dependen en gran medida de la resolución, la cual esta relacionada con el tamaño de paso de cada una de las variables y el tamaño de paso o numero de pasos considerados sobre la dimensión espacial. Como se comentó anteriormente, la presencia de χ incrementa considerablemente el peso computacional y restringe la calidad de los resultados al ser necesario usar una baja resolución y una partición mínima de la dimensión espacial. En la siguiente sección se analizara el caso para este sistema donde al fijar la norma se obtiene una ecuación de Wheeler-Dewitt que no depende de χ , para la cual es posible tener una partición mayor del intervalo espacial y obtener una aproximación con mayor resolución.

3.4. Solución numérica para el caso $\chi = 0$

Para este caso se han tomado los parámetros $J = N = 93$, $L = 3$, $l = 1$, $a_0 = \tilde{\psi}_{m0} = 0$, $a_N = 1$, $\tilde{\psi}_{mJ} = 1/6$ para calcular una aproximación a (2.93). Esta elección para $\tilde{\psi}_{mJ}$ esta dada según la expresión (2.91). Al igual que el caso general, el computo de esta aproximación se realiza mediante el uso de un programa ejecutado en los nodos de computo del LNS.

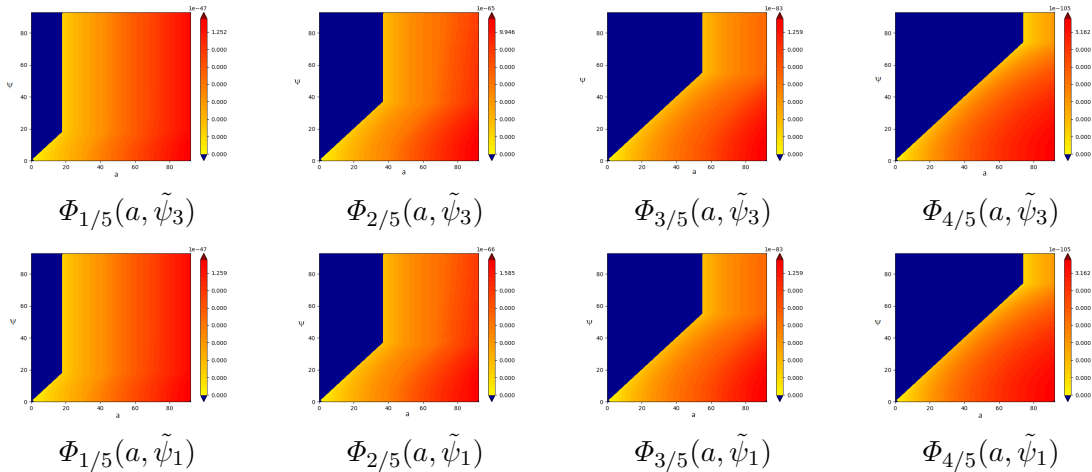


Figura 3.2: Cortes de la densidad de probabilidad Φ para los casos de $\tilde{\psi}$ en la frontera del intervalo espacial (fila superior) y en el interior del intervalo espacial, en relación con a . Se usado la notación $\Phi_{n/5}(a, \tilde{\psi}_1) = \Phi(a, \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_{m \neq 1} = \frac{n}{5} \tilde{\psi}_{mJ})$.

Recordando que para esta aproximación se está tomando una perturbación local y por ende en un intervalo espacial compacto, en la figura anterior se muestran arreglos de estos cortes en los que se puede apreciar las diferencias entre los cortes donde se toman $\tilde{\psi}$ en la frontera y el interior del intervalo temporal, siendo esta diferencia la magnitud máxima del valor de Φ relacionado con la probabilidad de observar ese *estado*. Sin embargo resulta más

importante e interesante que la magnitud de Φ tenga el mismo comportamiento para ambos casos; muestra que es necesario que, para a pequeñas estas deben ser del mismo tamaño que $\tilde{\psi}_m$, y para valores de a cercanos al final de su intervalo los valores pequeños de $\tilde{\psi}_m$ son favorecidos por el máximo de Φ para cortes donde los valores de $\tilde{\psi}_{n \neq m}$ también son cercanos al final de su intervalo. También es posible observar que este ultimo comportamiento se invierte para valores pequeños de $\tilde{\psi}_{n \neq m}$, sin embargo las *probabilidades* de estos máximos en Φ son menores a sus máximos en los casos para $\tilde{\psi}_{n \neq m}$ elevados.

Como parte de los resultados obtenidos con esta aproximación es la relación de Heisenberg entre a y $\tilde{\psi}$. Haciendo uso de (3.12), (3.15) y (3.22) se calcularon los valores de expectación y la relación de Heisenberg entre a y $\tilde{\psi}$ dentro del programa para obtener la solución numérica de la ecuación de Wheeler-Dewitt con el siguiente resultado:

$$\Delta a \Delta \tilde{\psi} \approx 0,000003214259232842661 \quad (3.23)$$

$$\langle \tilde{\psi} \rangle \approx 0,007040533904280762 \quad (3.24)$$

$$\langle a \rangle \approx 0,9783741973339193 \quad (3.25)$$

$$\langle {}^{(3)}\tilde{R} \rangle \approx -1,8621542328705963 \times 10^{-11} \quad (3.26)$$

Al ser $\Delta a \Delta \tilde{\psi}$ diferente de cero pone un limite a la precisión de la *medición* de la perturbación $\tilde{\psi}$ dada la medición de a , mientras que los valores de expectación de estas cantidades refuerzan de manera cuantitativa el análisis de las representaciones gráficas (Figura 3.2). En cuanto al valor esperado de la 3-curvatura, al igual que en el caso general es esencialmente cero, salvo la desviación debida a la aproximación, lo cual refleja una consecuencia de las ecuaciones de campo de Einstein (B.24) sobre la 3-curvatura (2.75). La precisión de estas aproximaciones, como sucede con la propia solución a (2.93), dependerá de la discretización ocupada para la solución.

3.5. Conclusiones

Los resultados de la sección anterior sugieren que bajo este modelo, al considerar la probabilidad de encontrar al universo en dichas configuraciones, las perturbaciones métricas debieron ser del mismo tamaño que a cuando esta es cercana a cero con una tendencia a altos valores para las perturbaciones, $\tilde{\psi}_0$ y $\tilde{\psi}_L$, en la frontera del intervalo espacial (al considerarse perturbaciones locales) en torno al punto donde sucede la perturbación (así como para χ) al considerar valores cercanos al valor máximo de a , mientras que en la vecindad de dicho punto al interior del intervalo la tendencia es a valores pequeños de las perturbaciones para dichos valores de a , lo cual también se refleja en los valores de expectación de estas cantidades. Esto sugiere que para los límites de a en la escala analizada, las perturbaciones cuánticas a la gravedad podrían ser muy pequeñas pero diferentes de cero, lo cual implica que la estructura del espacio tiempo en regiones de la escala de Planck pudiera estar fuertemente afectada por las perturbaciones para después dar lugar a un espacio tiempo más homogéneo e isotrópico (recuperando FRW) conforme se

sale de la región de Planck, lo cual es una *versión* más débil del comportamiento del espacio tiempo dado por las teorías predominantes de gravitación cuántica ya que este modelo, si bien no expresa explícitamente la estructura cuántica del espacio-tiempo como LQG, sí logra establecer la transición de un espacio-tiempo curvo no isotrópico ni homogéneo dentro de la escala de Planck a un espacio con la métrica FRW (con $k=0$) al salir de esa región. Finalmente cabe comentar que aún es necesario garantizar que la escala en que se está trabajando es efectivamente la escala de Planck, lo cual se pretende hacer posteriormente teniendo como base el principio de incertidumbre generalizado. A pesar de este último comentario, el trabajo exploratorio aquí presentado se muestra como un modelo prospecto, si bien sencillo y restringido, de gravedad cuántica en el sentido antes mencionado.

Apéndice A

Programas usados en la solución de la ecuación de Wheeler-Dewitt

En la solución de la ecuación de Wheeler-Dewitt en diferencias finitas (3.7) ó (3.9) se utilizan dos tipos de programas: el solucionador y el visualizador. Estos programas permiten obtener una solución aproximada de (2.90) y (2.93), así como el análisis gráfico de dichas soluciones y fueron utilizados con este propósito en los sistemas de computo del LNS. Para poder utilizar estos códigos es necesario copiarlos a archivos de texto y nombrar dichos archivos con la terminación `.py` (e.g. `solucionador.py`), para la ejecución de programas en python (así como su instalación y configuración) se recomienda seguir la documentación en el sitio <https://wiki.python.org/moin/BeginnersGuide>.

A.1. Solucionador

A.1.1. Caso general

En este programa se calcula una solución aproximada de la ecuación diferencial de Wheeler-Dewitt (2.90) por diferencias finitas (3.7) donde se considera $l = 1$, $L = 2$ y el mismo numero de pasos para χ_m , $\tilde{\psi}_m$ y a_n . El numero de paso, el tamaño del intervalo y las condiciones iniciales o de frontera pueden ser modificados en el programa.

Una vez calculada la solución según los parámetros dados, el programa calcula la relaciones de Hamilton ($\Delta a \Delta \chi$, $\Delta a \Delta \tilde{\psi}$), los valores de expectación ($\langle a \rangle$, $\langle \chi \rangle$, $\langle \tilde{\psi} \rangle$, $\langle {}^{(3)}\tilde{R} \rangle$), y hace 8 cortes a la densidad de probabilidad $\Phi = \varphi^2/|\varphi|$: 4 correspondientes a χ_1 y 4 a $\tilde{\psi}_1$. Estos cortes son guardados en un archivo para su posterior análisis en un arreglo con el siguiente orden:

$$0 \quad \Phi(a, \tilde{\psi}_1, \chi_m = \frac{1}{10}, \tilde{\psi}_{m \neq 1} = \frac{1}{30})$$

$$1 \quad \Phi(a, \tilde{\psi}_1, \chi_m = \frac{2}{10}, \tilde{\psi}_{m \neq 1} = \frac{2}{30})$$

CAPÍTULO A PROGRAMAS USADOS EN LA SOLUCIÓN DE LA
ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT
A.1. SOLUCIONADOR

$$2 \quad \Phi(a, \tilde{\psi}_1, \chi_m = \frac{3}{10}, \tilde{\psi}_{m \neq 1} = \frac{3}{30})$$

$$3 \quad \Phi(a, \tilde{\psi}_1, \chi_m = \frac{4}{10}, \tilde{\psi}_{m \neq 1} = \frac{4}{30})$$

$$4 \quad \Phi(a, \chi_1, \chi_{m \neq 1} = \frac{1}{10}, \tilde{\psi}_m = \frac{1}{30})$$

$$5 \quad \Phi(a, \chi_1, \chi_{m \neq 1} = \frac{2}{10}, \tilde{\psi}_m = \frac{2}{30})$$

$$5 \quad \Phi(a, \chi_1, \chi_{m \neq 1} = \frac{3}{10}, \tilde{\psi}_m = \frac{3}{30})$$

$$7 \quad \Phi(a, \chi_1, \chi_{m \neq 1} = \frac{4}{10}, \tilde{\psi}_m = \frac{4}{30})$$

Código del programa *solucionador* para el caso general:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import json
from matplotlib import cm
from mpl_toolkits import mplot3d

import matplotlib.colors as mcd
import math
import cmath

R=25 #Resolución
mx=1 #Máximo del intervalo para a

xmin = 0
xmax = 1/6
ymin = 0
ymax = 0.5
tmin = 0
tmax = mx

h = (xmax)/R #Tamaño de paso para \psi
J = int((xmax-xmin)/h) #Numero de pasos para \psi
print(J)
x = np.arange(xmin, xmax + h, h)

k = tmax/R #Tamaño de pasos para a
N = int((tmax-tmin)/k) #Numero de pasos para a
print(N)
t = np.arange(tmin, tmax + k, k)

q = (ymax-ymin)/R #Tamaño de pasos para \chi
Q = int((ymax-ymin)/q) #Numero de pasos para \chi
print(Q)
y = np.arange(ymin, ymax + q, q)
```

CAPÍTULO A PROGRAMAS USADOS EN LA SOLUCIÓN DE LA
ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT
A.1. SOLUCIONADOR

```

U = np.zeros([Q+1,Q+1,Q+1,J+1,J+1,J+1, N+1])

#Condiciones de frontera e iniciales (muchos ceros ya estan en el paso anterior)
for n in range(0, N+1):
    for a in range(0,J+1):
        for b in range(0,J+1):
            for c in range(0,J+1):
                for d in range(0,Q+1):
                    for e in range(0,Q+1):
                        for f in range(0,Q+1):

                            if (a==0 or b==0) or c==0 :

                                U[d][c][b][a][n]=t[n]*((np.exp(-(t[n])**2))-np.exp(-(tmax)**2))

ds=0
for n in range(1, N):
    for j in range(1, J):
        for a in range(1, J):
            for b in range(1, J):
                for c in range(1, Q):
                    for d in range(1,Q):
                        for e in range(1,Q):
                            #Esta ecuación corresponde a una sola linea
                            U[e][d][c][b][a][j][n+1]=-h*k*(t[n]**3)*(x[b]+x[j])*U[e][d][c][b
                            ][a][j][n]
                            /(16*math.pi**2)+k*((1+2*y[c]-6*x[j])/h
                            -6-2*t[n]/k)*U[e][d][c][b][a][j+1][n]+(6+2*t[n]/k
                            -(1+2*y[c]-6*x[j])*2/h)*U[e][d][c][b][a][j][n]+(1+2*y[c]-6*x[j])
                            *U[e][d][c][b][a][j-1][n]/h
                            +2*t[n]*U[e][d][c][b][a][j+1][n+1]/k +((1+2*y[d]-6*x[a])/h
                            -6-2*t[n]/k)*U[e][d][c][b][a+1][j][n]+(6+2*t[n]/k
                            -(1+2*y[d]-6*x[a])*2/h)*U[e][d][c][b][a][j][n]+(1+2*y[d]-6*x[a])
                            *U[e][d][c][b][a-1][j][n]/h
                            +2*t[n]*U[e][d][c][b][a+1][j][n+1]/k +((1+2*y[e]-6*x[b])/h
                            -6-2*t[n]/k)*U[e][d][c][b+1][a][j][n]+(6+2*t[n]/k
                            -(1+2*y[e]-6*x[b])*2/h)*U[e][d][c][b][a][j][n]+(1+2*y[e]-6*x[b])
                            *U[e][d][c][b-1][a][j][n]/h
                            +2*t[n]*U[e][d][c][b+1][a][j][n+1]/k )/(6*t[n])

                            ds=ds+(U[e][d][c][b][a][j][n]**2)
print('Solucion generada')

ef=[0,0,0]
ef2=[0,0,0]
ee=[0,0,0]
ee2=[0,0,0]
ea=0

```

CAPÍTULO A PROGRAMAS USADOS EN LA SOLUCIÓN DE LA
ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT
A.1. SOLUCIONADOR

```

ea2=0
er=0
i=0
for n in range(1, N):
    for j in range(1, J):
        for a in range(1, J):
            for b in range(1, J):
                for c in range(1, Q):
                    for d in range(1, Q):
                        for e in range(1, Q):

                            ef[0]=ef[0]+(U[e][d][c][b][a][j][n]**2)*x[j]/ds
                            ef2[0]=ef2[0]+(U[e][d][c][b][a][j][n]**2)*(x[j]**2)/ds

                            ef[1]=ef[1]+(U[e][d][c][b][a][j][n]**2)*x[a]/ds
                            ef2[1]=ef2[1]+(U[e][d][c][b][a][j][n]**2)*(x[a]**2)/ds

                            ef[2]=ef[2]+(U[e][d][c][b][a][j][n]**2)*x[b]/ds
                            ef2[2]=ef2[2]+(U[e][d][c][b][a][j][n]**2)*(x[b]**2)/ds

                            ee[0]=ee[0]+(U[e][d][c][b][a][j][n]**2)*y[c]/ds
                            ee2[0]=ee2[0]+(U[e][d][c][b][a][j][n]**2)*(y[c]**2)/ds

                            ee[1]=ee[1]+(U[e][d][c][b][a][j][n]**2)*y[d]/ds
                            ee2[1]=ee2[1]+(U[e][d][c][b][a][j][n]**2)*(y[d]**2)/ds

                            ee[2]=ee[2]+(U[e][d][c][b][a][j][n]**2)*y[e]/ds
                            ee2[2]=ee2[2]+(U[e][d][c][b][a][j][n]**2)*(y[e]**2)/ds

                            ea=ea+(U[e][d][c][b][a][j][n]**2)*t[n]/ds
                            ea2=ea2+(U[e][d][c][b][a][j][n]**2)*(t[n]**2)/ds
                            er=er
                                +(U[e][d][c][b][a][j][n]**2)*(4*(x[j]-2*x[a]+x[b]))/(t[n]**2))/ds

#Relaciones de Heisenberg y valores de expectación
for l, g in enumerate(ef):
    hfa=cmath.sqrt((ef2[l]-g**2)*(ea2-ea**2))
    print('H(f%d,a)=' %l,hfa)
    print('<f%d>=' %l,g,'paso',g*R/xmax)
for l, g in enumerate(ee):
    hfa=cmath.sqrt((ee2[l]-g**2)*(ea2-ea**2))
    print('H(e%d,a)=' %l,hfa)
    print('<e%d>=' %l,g,'paso',g*R/xmax)
print('<a>=',ea,'paso',ea*R/tmax)
print('<R>=',er)

#Se hacen los cortes y se guardan en un arreglo
cortes=[]
for z in np.arange(1,5):
    U1=np.zeros([J+1, N+1])
    for n in range(1, N):

```

CAPÍTULO A PROGRAMAS USADOS EN LA SOLUCIÓN DE LA
ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT
A.1. SOLUCIONADOR

```

for j in range(1, J):
    #Esta expresión corresponde a una linea
    U1[j][n]=(U[int(R*z/5)][int(R*z/5)][int(R*z/5)][int(R*z/5)][j][int(R*z/5)][n]**2)
    /(ds**k*(h**3)*(q**3))
    cortes.append(U1)
print('Cortes de psi generados')
for z in np.arange(1,5):
    U1=np.zeros([Q+1, N+1])
    for n in range(1, N):
        for j in range(1, Q):
            #Esta expresión corresponde a una linea
            U1[j][n]=(U[int(R*z/5)][j][int(R*z/5)][int(R*z/5)][int(R*z/5)][int(R*z/5)][n]**2)
            /(ds**k*(h**3)*(q**3))
            cortes.append(U1)
print('Cortes de X generados')
U=[] #Se libera espacio en memoria

#Se guardan los cortes en el archivo de nombre 'cortesg.json'
with open('cortesg.json', 'w') as f:
    json.dump(np.array(cortes).tolist(), f)

print('Datos guardados en archivo')

```

A.1.2. Caso con $\chi = 0$

En este programa se calcula una aproximación a la solución de (2.93) por diferencias finitas (3.9). Como en el caso general, se toma $l = 1$ y el mismo numero de pasos e intervalo para todas las $\tilde{\psi}_m$ aunque en este caso $L = 3$. También para este programa el numero de pasos, el tamaño del intervalo, y las condiciones de frontera son modificables.

Una vez calculada la solución según los parámetros dados, el programa calcula la relación de Hamilton entre a y $\tilde{\psi}$ y hace 8 cortes a la densidad de probabilidad $\Phi = \varphi^2/|\varphi|$: 4 correspondientes a $\tilde{\psi}_3$ (frontera) y 4 a $\tilde{\psi}_1$ (bulto). Estos cortes son guardados en un archivo para su posterior análisis. Cabe resaltar que este código fue el utilizado en el equipo de computo del LNS.

Tenga en mente que este programa guarda los cortes ordenados de la siguiente manera según el índice del arreglo:

- 0 $\Phi(a, 1/30, 1/30, 1/30, \tilde{\psi}_3)$
- 1 $\Phi(a, 2/30, 2/30, 2/30, \tilde{\psi}_3)$
- 2 $\Phi(a, 3/30, 3/30, 3/30, \tilde{\psi}_3)$
- 3 $\Phi(a, 4/30, 4/30, 4/30, \tilde{\psi}_3)$
- 4 $\Phi(a, 1/30, \tilde{\psi}_1, 1/30, 1/30)$

CAPÍTULO A PROGRAMAS USADOS EN LA SOLUCIÓN DE LA
ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT
A.1. SOLUCIONADOR

$$5 \quad \Phi(a, 2/30, \tilde{\psi}_1, 2/30, 2/30)$$

$$6 \quad \Phi(a, 3/30, \tilde{\psi}_1, 3/30, 3/30)$$

$$7 \quad \Phi(a, 4/30, \tilde{\psi}_1, 4/30, 4/30)$$

Código del programa *solucionador* para el caso $\chi = 0$:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import json
from matplotlib import cm
from mpl_toolkits import mplot3d
import matplotlib.colors as mcd
import math
import cmath

R = 30 #Resolución
mx = 1 #Máximo del intervalo para a

xmin = 0
xmax = 1/6
tmin = 0
tmax = mx

h = (xmax)/R # Tamaño de paso para \psi
J = int((xmax-xmin)/h) # Numero de pasos \psi
print(J)
x = np.arange(xmin, xmax + h, h)

k = tmax/R # Tamaño de pasos para a
N = int((tmax-tmin)/k) # Numero de pasos para a
print(N)
t = np.arange(tmin, tmax + k, k)

U = np.zeros([J+1,J+1,J+1,J+1, N+1])

#Condiciones de frontera e iniciales (muchos ceros ya estan en el paso anterior)
for n in range(0, N+1):
    for a in range(0,J+1):
        for b in range(0,J+1):
            for c in range(0,J+1):
                for d in range(0,J+1):
                    if (a == 0 or b == 0) or (c == 0 or d == 0):
                        U[d][c][b][a][n]=t[n]*(np.exp(-(t[n])**2))
ds = 0
for n in range(1, N):
    for j in range(1, J):
        for a in range(1, J):
            for b in range(1, J):
                for c in range(1, J):
                    #Esta ecuacion corresponde a una linea
```

CAPÍTULO A PROGRAMAS USADOS EN LA SOLUCIÓN DE LA
ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT
A.1. SOLUCIONADOR

```

U[c][b][a][j][n+1]=((U[c][b][a][j+1][n+1]-((6*x[j]-1)*k)/(2*t[n]
*h))*U[c][b][a][j-1][n]- (1+((-1 + 6*x[j] +
6*h)*k)/(2*t[n]*h))*U[c][b][a][j+1][n]+((t[n]*h + (-1 + 6*x[j] +
3*h)*k)/(t[n]*h))*U[c][b][a][j][n])+U[c][b][a+1][j][n+1]-(((6*x[
a]-1)*k)/(2*t[n]*h)) * U[c][b][a-1][j][n]-(1+((-1 + 6*x[a] +
6*h)*k)/(2*t[n]*h))*U[c][b][a+1][j][n]+((t[n]*h + (-1 + 6*x[a] +
3*h)*k)/(t[n]*h))*U[c][b][a][j][n])+U[c][b+1][a][j][n+1]-(((6*x[
b]-1)*k)/(2*t[n]*h)) * U[c][b-1][a][j][n]-(1+((-1 + 6*x[b] +
6*h)*k)/(2*t[n]*h))*U[c][b+1][a][j][n]+((t[n]*h + (-1 + 6*x[b] +
3*h)*k)/(t[n]*h))*U[c][b][a][j][n])+U[c+1][b][a][j][n+1]-(((6*x[
c]-1)*k)/(2*t[n]*h)) * U[c-1][b][a][j][n]-(1+((-1 + 6*x[c] +
6*h)*k)/(2*t[n]*h))*U[c+1][b][a][j][n]+((t[n]*h + (-1 + 6*x[c] +
3*h)*k)/(t[n]*h))*U[c][b][a][j][n])+3/(8*math.pi**2))*((x[c]+x[j]
) * U[c][b][a][j][n]*h*k)/(2*t[n]) )/4

ds=ds+(U[c][b][a][j][n+1]**2)
print('Solucion generada')

ef = 0
ef2 = 0
ea = 0
ea2 = 0
for n in range(1, N):
    for j in range(1, J):
        for a in range(1, J):
            for b in range(1, J):
                for c in range(1, J):
                    ef = ef+(U[c][b][a][j][n]**2)*x[b]/ds
                    ef2 = ef2+(U[c][b][a][j][n]**2)*(x[b]**2)/ds
                    ea = ea+(U[c][b][a][j][n]**2)*t[n]/ds
                    ea2 = ea2+(U[c][b][a][j][n]**2)*(t[n]**2)/ds
hfa=cmath.sqrt((ef2-ef**2)*(ea2-ea**2))
print('H(\psi,a) =',hfa)# Relación de Heisenberg para \psi y a
print('<\psi>=',ef,'paso',ef*R/xmax)
print('<a>=',ea,'paso',ea*R/tmax)

#Se hacen cortes de la solución y se guardan en un arreglo
cortes = []
for z in np.arange(1,5):
    U1 = np.zeros([J+1, N+1])
    for n in range(1, N):
        for j in range(1, J):
            U1[j][n] = (U[int(R*z/5)][int(R*z/5)][int(R*z/5)][j][n]**2)/(ds*k*(h**4))
    cortes.append(U1)
print('Solucion frontera normalizada')
for z in np.arange(1,5):
    U1 = np.zeros([J+1, N+1])
    for n in range(1, N):
        for j in range(1, J):
            U1[j][n] = (U[int(R*z/5)][j][int(R*z/5)][int(R*z/5)][n]**2)/(ds*k*(h**4))
    cortes.append(U1)
print('Solucion bulto normalizada')

```

CAPÍTULO A PROGRAMAS USADOS EN LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT

A.2. VISUALIZADOR

```
U = [] #se libera el espacio en memoria ocupado por la solución

#Se guardan los cortes seleccionados en el archivo con nombre 'cortes.json'
with open('cortes.json', 'w') as f:
    json.dump(np.array(cortes).tolist(), f)
print('Datos guardados en archivo')
```

A.2. Visualizador

Debido a los recursos de computo necesarios para ejecutar el *solucionador* para altas resoluciones ($R \geq 16$ para el caso general y $R \geq 50$ para el caso con $\chi = 0$), el análisis de los cortes generados se llevó a cabo mediante el programa *visualizador* con el fin de reducir el uso de recursos y tiempo de computo a utilizar.

Este programa llama al archivo que contiene los cortes (en este caso llamado *cortes.json*) y le asigna un arreglo, revisa la forma de los cortes y calcula la resolución usada. Para hacer el análisis gráfico de los cortes se arma un mapa de colores para cada uno de ellos, donde el color esta relacionado a la magnitud de la densidad de probabilidad y por lo tanto genera contornos de color en el corte para una magnitud dada. Estos contornos se determinan según el orden de magnitud entre el mínimo y el máximo del corte. Finalmente el programa grafica el corte según el mapa de color calculado y permite su inspección o guardado.

Código del programa *visualizador*:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import json
from matplotlib import cm
import matplotlib.colors as mcd
import math

with open('cortes.json') as f:
    U = json.load(f)
print('Datos cargados')

print(np.shape(np.array(U[0]))) # Escribe la forma del corte en pantalla
R = len(U[1][1])-1 # Calcula la resolución usada en el corte
print(R) # Escribe la resolución en pantalla
U1 = U[4] # selecciona el corte (indice corre del 0 al 7)

# Establece el numero de niveles, codigo de colores y rango para cada nivel
cut = 30
ma = np.ma.masked_equal(U1,0.0,copy=False)
sc = ma.max()
dc = ma.min()
lg = int(math.log(sc,10))
lg0 = int(math.log(dc,10))
```

CAPÍTULO A PROGRAMAS USADOS EN LA SOLUCIÓN DE LA
ECUACIÓN DE WHEELER-DEWITT
A.2. VISUALIZADOR

```
lp = (lg-lg0)/cut
lc = 1/(cut+1)
pre = np.arange(lg0,lg+lp,lp)
pc = np.flip(np.arange(0,1,lc))
levels = [0]
colorss = []
for g in pre:
    levels.append(10**g)
for c in pc:
    colorss.append((1,c,0))

# Realiza el mapa de colores de acuerdo a la sección anterior y genera la imagen
CS3 = plt.contourf(U1,levels,colors=colorss,extend='both')
CS3.cmap.set_under('darkblue')
CS3.cmap.set_over('darkred')
plt.colorbar()

plt.show()
```

Apéndice B

Componentes de la conexión métrica, tensor de Riemann, tensor de Ricci, y el escalar curvatura

En este apéndice se muestran las componentes diferentes de cero del tensor de Riemann, del tensor de Ricci y los símbolos de Christoffel usando la métrica:

$$\begin{aligned}g_{00} &= -(aN)^2 \\g_{0i} &= 0 \\g_{ij} &= a^2 + 2a^2(\tilde{E}_{,ij} - \tilde{\psi}\delta_{ij}) \\g^{00} &= -(aN)^{-2} \\g^{0i} &= 0 \\g^{ij} &= a^{-2} - 2a^{-2}(\tilde{E}_{,ij} - \tilde{\psi}\delta^{ij})\end{aligned}$$

Donde $a = a(\eta)$, $\tilde{E} = \tilde{E}(\eta, x^i)$, y $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\eta, x^i)$. Durante este apéndice se usa la siguiente notación (parte de la cual también se usa en el resto de este trabajo): los índices repetidos en negritas no implican suma (e.g. $R_{\mathbf{a}\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}} = 0$), $A' = \partial_0 A$, $A_{,ijk} = \partial_i \partial_j \partial_k A$. Los índices griegos corren sobre el espacio-tiempo (i.e. $\mu = 0, 1, 2, 3$) mientras que los índices latinos corren sobre el espacio (i.e. $i = 1, 2, 3$).

B.1. Conexión métrica

Los símbolos de Christoffel en términos de la métrica son:

**CAPÍTULO B COMPONENTES DE LA CONEXIÓN MÉTRICA, TENSOR
DE RIEMANN, TENSOR DE RICCI, Y EL ESCALAR CURVATURA**
B.2. TENSOR DE RIEMANN

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\rho,\nu} + g_{\alpha\nu,\rho} - g_{\nu\rho,\alpha})$$

Sus componentes diferentes de cero son las siguientes:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{a'}{a} \tag{B.1}$$

$$\Gamma_{\mathbf{ii}}^0 = N^{-2} \left(\frac{a'}{a} + \tilde{E}'_{,\mathbf{ii}} - \tilde{\psi}' + 2\frac{a'}{a} [\tilde{E}_{,\mathbf{ii}} - \tilde{\psi}] \right) \tag{B.2}$$

$$\Gamma_{0\mathbf{i}}^{\mathbf{i}} = \Gamma_{\mathbf{i}0}^{\mathbf{i}} = \frac{a'}{a} + \tilde{E}'_{,\mathbf{ii}} - \tilde{\psi}' \tag{B.3}$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \Gamma_{ji}^0 = -N^{-2} \left(2\frac{a'}{a} \tilde{E}_{,ij} + \tilde{E}'_{,ij} \right) \text{ con } i \neq j \tag{B.4}$$

$$\Gamma_{0j}^i = \Gamma_{j0}^i = \tilde{E}'_{,ij} \text{ con } i \neq j \tag{B.5}$$

$$\Gamma_{\mathbf{ii}}^{\mathbf{i}} = \tilde{E}_{,\mathbf{iii}} - \tilde{\psi}_{,\mathbf{i}} \tag{B.6}$$

$$\Gamma_{\mathbf{jj}}^{\mathbf{i}} = \tilde{E}_{,\mathbf{ijj}} + \tilde{\psi}_{,\mathbf{i}} \text{ con } \mathbf{i} \neq \mathbf{j} \tag{B.7}$$

$$\Gamma_{\mathbf{ji}}^{\mathbf{i}} = \Gamma_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{i}} = \tilde{E}_{,\mathbf{ii}\mathbf{j}} - \tilde{\psi}_{,\mathbf{j}} \text{ con } \mathbf{i} \neq \mathbf{j} \tag{B.8}$$

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i = \tilde{E}_{,123} \text{ con } i \neq j \neq k \tag{B.9}$$

B.2. Tensor de Riemann

El tensor de Riemann esta dado por la siguiente expresión en términos de la conexión métrica:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha} \left(\Gamma_{\nu\sigma,\rho}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\rho,\sigma}^{\alpha} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\beta} \Gamma_{\beta\rho}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\rho}^{\beta} \Gamma_{\beta\sigma}^{\alpha} \right)$$

Las componentes diferentes de cero de este tensor son:

$$\begin{aligned} R_{0i0} &= -R_{0i0i} = -R_{i0i0} = R_{i00i} \\ &= a^2 \left(\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} + \tilde{E}''_{,ii} - \tilde{\psi}'' + 2 \left(\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} \right) [\tilde{E}_{,ii} - \tilde{\psi}] + \frac{a'}{a} [\tilde{E}'_{,ii} - \tilde{\psi}'] \right) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} R_{0ij0} &= -R_{0i0j} = -R_{i0j0} = R_{j00i} = -R_{j0i0} = -R_{0j0i} = R_{i00j} = R_{0j0i} \\ &= -a^2 \left(2 \left[\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} \right] \tilde{E}_{,ij} + 3 \frac{a'}{a} \tilde{E}'_{,ij} + \tilde{E}''_{,ij} \right) \text{ con } i \neq j \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} R_{0iij} &= -R_{i0ij} = -R_{0iji} = R_{ij0i} = -R_{ijio} = -R_{jioi} = R_{jii0} = R_{i0ji} \\ &= 4aa' \tilde{E}_{,iij} + a^2 (2\tilde{E}'_{,iij} - \tilde{\psi}'_{,j}) \text{ con } i \neq j \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} R_{ijji} &= -R_{ijij} = -R_{jiji} = R_{jiij} \\ &= -a^2 N^{-2} \left(\frac{a'^2}{a^2} + 2 \frac{a'^2}{a^2} [\tilde{E}_{,ii} + \tilde{E}_{,jj} - 2\tilde{\psi}] + \frac{a'}{a} [\tilde{E}'_{,ii} + \tilde{E}'_{,jj} - 2\tilde{\psi}'] \right. \\ &\quad \left. + N^2 [\tilde{\psi}_{,ii} + \tilde{\psi}_{,jj}] \right) \text{ con } i \neq j \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} R_{jiiik} &= -R_{jikik} = -R_{ijjik} = R_{ikjji} = -R_{ikij} = -R_{kiji} = R_{kiij} = R_{ijki} \\ &= -a^2 N^{-2} \left(\tilde{\psi}_{,jk} N^2 + \frac{a'}{a} \tilde{E}'_{,jk} + 2 \frac{a'^2}{a^2} \tilde{E}_{,jk} \right) \text{ con } i \neq j \neq k \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

B.3. Tensor de Ricci

El tensor de Ricci esta dado por la siguiente expresión:

$$R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\sigma\mu\rho\nu}$$

Sus componentes son las siguientes:

$$R_{00} = - \left(3 \left[\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} \right] + \mathcal{F}'' + \frac{a'}{a} \mathcal{F}' \right) \quad (\text{B.15})$$

$$R_{0i} = R_{i0} = - \left(4 \frac{a'}{a} [\tilde{E}_{,iij} + \tilde{E}_{,ikk}] + 2 [\tilde{E}'_{,iij} + \tilde{E}'_{,ikk} - \tilde{\psi}'_{,i}] \right) \text{ con } i \neq j \neq k \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} R_{ii} &= N^{-2} \left(\frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2} + \tilde{E}''_{,ii} - \tilde{\psi}'' + 2 \left(\frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2} \right) [\tilde{E}_{,ii} - \tilde{\psi}] \right. \\ &\quad \left. + \frac{a'}{a} [\mathcal{F}' + 2\tilde{E}'_{,ii} - 2\tilde{\psi}'] + N^2 [\tilde{\psi}_{,ii} + \nabla^2 \tilde{\psi}] \right) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$R_{ij} = R_{ji} = N^{-2} \left(-\tilde{E}''_{,ij} - 2 \left[\frac{a''}{a} - 3 \frac{a'^2}{a^2} \right] \tilde{E}_{,ij} - 2 \frac{a'}{a} \tilde{E}'_{,ij} + \tilde{\psi}_{,ij} N^2 \right) \quad (\text{B.18})$$

Donde $\mathcal{F} = \nabla^2 \tilde{E} - 3\tilde{\psi}$.

B.4. Escalar de curvatura

A partir del tensor de Ricci, el escalar de curvatura es:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{2}{a^3 N^2} \left(3a'' + a\mathcal{F}'' + 3a'\mathcal{F}' + 2aN^2\nabla^2\tilde{\psi} \right) \quad (\text{B.19})$$

Con el escalar de curvatura y el determinante de la métrica se puede obtener la acción de Einstein-Hilbert. En este caso el determinante de la métrica es:

$$g = -a^2 N^2 \det(g_{ij}) = -a^8 N^2 (1 + 2\mathcal{F}) \quad (\text{B.20})$$

Por lo tanto la acción de Einstein-Hilbert es de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} R d^4x = \int \frac{2a}{N} \sqrt{2\mathcal{F} + 1} \left[3a'' + a\mathcal{F}'' + 3a'\mathcal{F}' + 2aN^2\nabla^2\tilde{\psi} \right] d^4x \\ &= \frac{1}{16\pi} \int \frac{2a}{N\sqrt{2\mathcal{F} + 1}} \left[3a''(2\mathcal{F} + 1) + 3a'\mathcal{F}' + a(\mathcal{F}'' + 2N^2\nabla^2\tilde{\psi}) \right] d^4x \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Si se usa (2.75) en esta expresión se tiene:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \frac{2a}{N\sqrt{2\mathcal{F} + 1}} \left[3a''(2\mathcal{F} + 1) + 3a'\mathcal{F}' + a \left(\mathcal{F}'' + \frac{a^2 N^2}{2} {}^{(3)}R \right) \right] d^4x \quad (\text{B.22})$$

Al tener en tensor y escalar de Ricci también se puede obtener el tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

$$G_{00} = 3\frac{a'^2}{a^2} + 2N^2\nabla^2\tilde{\psi} + 2\frac{a'}{a}\mathcal{F}' \quad (\text{B.23})$$

$$G_{0i} = G_{i0} = 2\tilde{\psi}_{,i} \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \frac{1}{N^2} \left\{ \left[\frac{a'^2}{a^2} - 2\frac{a''}{a} \right] \left[2\tilde{E}_{,ij} + (1 - 2\tilde{\psi})\delta_{ij} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2\frac{a'}{a} \left[\tilde{E}_{,ij} - (\tilde{\psi}' + \mathcal{F}')\delta_{ij} \right] - N^2(\nabla^2\tilde{\psi}\delta_{ij} - \tilde{\psi}_{,ij}) + \tilde{E}''_{,ij} - (\tilde{\psi}'' + \mathcal{F}'')\delta_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Bibliografía

- [1] G. Ellis, R. Maartens, M. MacCallum. *Relativistic Cosmology*. Cambridge University Press. Cambridge. (2012).
- [2] R. D’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Clarendon Press. Oxford. (2008).
- [3] P.V. Moniz. *A Survey of Quantum Cosmology*. Lect. Notes Phys. 803, 13-53. (2010).
- [4] V.F. Mukhanov, H.A. Feldman, R.H. Brandenberger. *Theory of Cosmological Perturbations*. Phys. Rep. 215. No. 5 & 6. (1992).
- [5] R.H. Brandenberger. *Lectures on the Theory of Cosmological Perturbations*. arXiv:hep-th/0306071v1. (2003).
- [6] A. Bedroya et al. *Trans-Planckian censorship and inflationary cosmology*. Phys. Rev. D 101. (2020).
- [7] J. Schwinger. *Quantized Gravitational Field*. Phys. Rev. 130. No. 3. (1963).
- [8] J. Schwinger. *Quantized Gravitational Field II*. Phys. Rev. 132. No. 3. (1963).
- [9] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner. *The dynamics of general relativity*. Gravitation: an introduction to current research (Chap. 7). Edited by Louis Witten. John Wiley & Sons Inc., New York, London. (1962) pp. 227-265.
- [10] G. Calcagni. *Classical and Quantum Cosmology*. Graduate Text in Physics. Springer. Switzerland. (2017).
- [11] A.R. Liddle, D.H. Lyth. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press. Cambridge. (2000).
- [12] J. J. Halliwell, S. W. Hawking. *Origin of structure in the Universe*. Phys Rev. D. Third Series, Vol. 31, No. 8. (1985).
- [13] S. Wada. *Quantum Cosmological Perturbations in Pure Gravity*. Nucl. Phys. B276(1986)729.
- [14] G. Calcagni et al. *Quantum Gravity and Quantum Cosmology*. Lecture Notes in Physics, Vol. 863. Springer. Berlin Heidelberg. (2013).

BIBLIOGRAFÍA
BIBLIOGRAFÍA

- [15] C. Rovelli. *Strings, loops and others: a critical survey of the present approaches to quantum gravity*. Plenary lecture on quantum gravity at the GR15 conference, Poona, India. arXiv:gr-qc/9803024v3. (1998).
- [16] S. Carlip et al. *Quantum Gravity: A Brief History of Ideas and Some Prospects*. arXiv:1507.08194v1 [gr-qc]. (2015).
- [17] B. Schulz. *Review of quantum gravity*. arXiv:1409.7977v1 [gr-qc]. (2014).
- [18] C.J. Isham. *Quantum Geometry*. Quantum Theory of Gravity: Essays in honor of the 60th birthday of Bryce S. DeWitt. Edited by Bryce S. DeWitt. Published by Adam Hilger Ltd., Bristol, England, p.299. (1984).
- [19] L. Crane, L. Smolin. *Spacetime Foam As The Universal Regulator*. Gen Relat Gravit 17, 1209-1216. (1985).
- [20] S.A. Hojman, K. Kuchar, C. Teitelboim. *Geometrodynamics Regained*. Ann. Phys. (N. Y.) 96, 88-135. (1976).
- [21] D.N. Page, C.D. Geilker. *Indirect Evidence for Quantum Gravity*. Phys. Rev. Lett. 47, 979. (1981).
- [22] N.E.J. Bjerrum-Bohr et al. *Bending of Light in Quantum Gravity*. PRL 114, 061301. (2015).
- [23] C.J. Fewster, S. Liberati. *Quantum fields in curved spacetime, semiclassical gravity, quantum gravity phenomenology, and analogue models: parallel session D4*. Gen Relativ Gravit 46:1707. (2014).
- [24] R.J. Marshman et al. *Mesoscopic interference for metric and curvature & gravitational wave detection*. New J. Phys. 22 083012. (2020).
- [25] K. A. Malik, D. Wands. *Cosmological perturbations*. Phys. Rep. 475 (2009) 1-5.
- [26] J.J. Halliwell. *Introductory Lectures on Quantum Cosmology. Proceedings of the Jerusalem Winter School on Quantum Cosmology and Baby Universes*. World Scientific. Singapore. (1991).
- [27] P.A.M Dirac. *Lectures on quantum mechanics*. New York: Belfer Graduate School of Science. Yeshiva University. New York. (1964).
- [28] J. Logan. *Applied Partial Differential Equations*. Springer. Cham. (2015).