



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN MATEMÁTICAS**

EXTENSIONES G -FIBRANTES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

JORGE ALBERTO SÁNCHEZ MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ALEXANDER BYKOV

PUEBLA, PUE.

9 DE DICIEMBRE DE 2016



BUAP

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el(la) C:

JORGE ALBERTO SÁNCHEZ MARTÍNEZ

estudiante del Doctorado en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 17 de noviembre de 2016, con la tesis titulada:

“EXTENSIONES G-FIBRANTES”

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T O
H. Puebla de Z, a 28 de noviembre de 2016

[Handwritten Signature]
DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO
COORDINADOR DEL POSTGRADO
EN MATEMÁTICAS.



DR.FMR/mrv



Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. 111 A,
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Dedicatoria

A Dios, por darme a mi familia y la voluntad y el entendimiento para dar un paso más.

A mi padre Marco Antonio Sánchez Rodríguez, mis hermanos Arturo, Gerardo y Ricardo Sánchez Martínez y mi tía paz, por su amor incondicional.

A mi madre Patricia Martínez Falcon, porque su entereza, solidaridad y amor hacia los suyos representa el mejor de los ejemplos.

A mi esposa Yazmín Hernández Chávez, por su apoyo incondicional, su amor y sus palabras de aliento en momentos difíciles.

En especial a mi hijo Jorgito Sánchez Hernández, porque cuando observo una sonrisa dibujada en su carita, encuentro una razón más para vivir día a día.

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento al Dr. Alexander Bykov por su paciencia, su amistad y su gran apoyo para la conclusión de este trabajo de tesis.

Gracias a los doctores Oleg Okunev, Raúl Escobedo Conde, Fernando Macías Romero, Jacobo Oliveros Oliveros por sus valiosas observaciones para mejorar este trabajo. Gracias también a la Dra. Aura Lucina Kantún Montiel por sus recomendaciones, palabras de aliento y amistad.

A todos mis maestros de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la BUAP, por aportar conocimientos para mi formación profesional.

Al CONACYT, por darme una beca para concluir mis estudios.

Índice general

Introducción	IX
1. Preliminares	1
1.1. G -espacios y G -funciones	1
1.2. Límites inversos y diagramas pull-back en $G-TOP$	7
1.3. G -fibraciones y G -deformaciones	11
1.4. Espacios $G-ANR$ y $G-SSDR$ -mapeos	15
1.5. Cocilindros en $G-TOP$	18
1.6. Productos torcidos y rebanadas	20
2. Extensiones G-fibrantes	23
2.1. Espacios y extensiones G -fibrantes	23
2.2. Propiedades de G -fibraciones y G -fibrantes	26
2.3. $G-ANR$ -resoluciones	34
2.4. Existencia de extensiones G -fibrantes	40
2.5. Extensiones G -fibrantes libres	45
3. Extensiones fibrantes en $Map(G-TOP)$	51
3.1. Fibraciones y deformaciones en $Map(G-TOP)$	52
3.2. Cocilindros en $Map(G-TOP)$	62
3.3. Construcción de una extensión fibrante en $Map(G-TOP)$	70

3.4. Extensiones fibrantes sobre G/H	75
3.5. Productos torcidos como G -fibrantes	85
3.6. Espacios orbitales de espacios G -fibrantes	87
Conclusiones	93
Bibliografía	95

Introducción

La línea de investigación del presente trabajo pertenece a la teoría equi-variante de homotopías. La teoría de homotopías clásica fue generalizada en los trabajos del matemático polaco Karol Borsuk, a partir de 1968. Borsuk había observado que muchos teoremas en la teoría homotópica eran válidos sólo para espacios con un buen comportamiento local, como por ejemplo las variedades, los CW -complejos y los retracts de vecindad absolutos (ANR por sus siglas en inglés), pero fallaban para espacios como los compactos métricos. Para superar esta dificultad, Borsuk consideró compactos métricos encajados en el cubo de Hilbert. A esta nueva teoría se le llama Teoría de shape. Después de los trabajos iniciales de Borsuk, aparecieron varios artículos dedicados a esta nueva rama de la topología, así como diferentes grupos de trabajo en distintas partes de mundo. Otras contribuciones a la teoría de shape fueron hechas por Ralph H. Fox, Jack Segal, Thomas A. Chapman, Yurii M. Smirnov, Kiiti Morita y Sibe Mardesic.

En 1970 S. Mardesic y J. Segal generalizaron la teoría de shape de Borsuk, a espacios compactos de Hausdorff utilizando sistemas inversos. Este nuevo enfoque es más categórico y llevó rápidamente a nuevas generalizaciones.

A finales de los años 70 Edwards y Hastings introdujeron una categoría homotópica de sistemas inversos, a la que denominaron categoría de strong shape. A través de los esfuerzos de varios autores fue definida la categoría de

strong shape para espacios topológicos. Para definir la categoría de strong shape para espacios arbitrarios se necesita un método para asociar con cualquier espacio dado, un sistema inverso de *ANR*'s en la categoría *TOP*. Una forma de hacer esto es por medio del concepto de resolución de un espacio X . F. Cathey utilizó esta idea para definir la categoría de strong shape de espacios métricos compactos [17]. El enfoque propuesto por Cathey se basa en la existencia de extensiones fibrantes para espacios métricos compactos. La construcción implícita de la extensión fibrante de Cathey envuelve el concepto de los así llamados cotelescopios.

El enfoque general del concepto de un objeto fibrante es el siguiente: para una clase dada Σ de morfismos de una categoría \mathcal{C} , un objeto Y de \mathcal{C} es llamado Σ -fibrante si para cada morfismo $s \in \Sigma$, $s: A \rightarrow X$ y cada morfismo $f: A \rightarrow Y$, existe un morfismo $F: X \rightarrow Y$ tal que $F \circ s = f$. Un espacio fibrante en el sentido de Cathey es un objeto Σ -fibrante, donde Σ es la clase de *SSDR*-mapeos en la categoría de espacios metrizables. Una extensión fibrante para un espacio métrico compacto E , es un *SSDR*-mapeo $s: E \rightarrow \tilde{E}$ tal que \tilde{E} es un espacio fibrante.

La teoría equivariante tiene sus fundamentos en los trabajos clásicos del matemático noruego Sophus Lie. En su trabajo, apareció por primera vez el importante concepto matemático de grupo topológico. Un G -espacio en donde G es un grupo topológico fijo es, simplemente un espacio topológico E considerado con una acción del grupo G en E . En la topología equivariante se estudian propiedades topológicas que son invariantes bajo la acción dada del grupo G .

Actualmente la teoría equivariante de homotopías está bien desarrollada gracias a las aportaciones de autores tales como R. Palais, I.M. James, G. Segal, J. Jaworowski, R. Lashof, Yu. M. Smirnov y S. Antonyan; y continúa

desarrollándose de forma activa. Basta mencionar algunos resultados como por ejemplo, S. Antonyan demostró el siguiente:

Teorema 0.0.1. [4, Theorem 1.1] *Si E es un espacio ANR equivariante, entonces el espacio orbital E/G es un ANR, cuando G es un grupo compacto.*

En [15] se construye la categoría equivariante de strong shape para G -espacios metrizable compactos, usando una versión equivariante de los conceptos del cotelescopio y de extensiones fibrantes. También en [8] se demuestra que el espacio cociente G/H es G -fibrante, dado que H es un subgrupo cerrado de un grupo metrizable compacto G . La prueba de esta afirmación se basa en el hecho de que cualquier grupo compacto de Hausdorff es un grupo pro-Lie, es decir, es el límite inverso de algún sistema inverso de grupos compactos de Lie enlazados por epimorfismos continuos.

Recientemente en [9] se prueba que el funtor del producto torcido $G \times_H -$ envía H -fibraciones hacia G -fibraciones, cuando G es un grupo metrizable compacto no necesariamente de Lie y, H es su subgrupo cerrado. Este resultado se aplica al estudio de las G -fibraciones fuertes. Como consecuencia de este estudio tenemos el siguiente

Teorema 0.0.2. [9, Corollary 6.11] *Si F es un espacio H -fibrante, entonces el producto torcido $G \times_H F$ es un espacio G -fibrante, cuando H es un subgrupo grande de un grupo metrizable compacto G .*

En esta tesis vamos a generalizar los Teoremas 0.0.1 y 0.0.2; para ello analizaremos las propiedades de dos funtores:

- El funtor K -orbital $-/K: \mathcal{M}_G \rightarrow \mathcal{M}_{G/K}$, de la categoría de G -espacios metrizable \mathcal{M}_G a la categoría de G/K -espacios metrizable $\mathcal{M}_{G/K}$, que envía cada G -espacio metrizable E al G/K -espacio orbital E/K .

- El funtor del producto torcido $G \times_H - : \mathcal{M}_H \rightarrow \mathcal{M}_G$, de la categoría de H -espacios metrizablees \mathcal{M}_H a la categoría de G -espacios metrizablees \mathcal{M}_G , que envía cada H -espacio metrizable S al producto torcido $G \times_H S$.

El objetivo principal de nuestro trabajo es mostrar que los funtores anteriores preservan extensiones fibrantes, es decir, que:

- Si $s: E \hookrightarrow \tilde{E}$ es cualquier extensión G -fibrante de E , entonces la función inducida $s/K: E/K \hookrightarrow \tilde{E}/K$ es una extensión G/K -fibrante de E/K .
- Si $j: S \hookrightarrow \tilde{S}$ es cualquier extensión H -fibrante de S , entonces la función inducida $G \times_H j: G \times_H S \hookrightarrow G \times_H \tilde{S}$ es una extensión G -fibrante de $G \times_H S$.

Como consecuencia de este estudio obtenemos los siguientes resultados que pueden considerarse una generalización del Teorema 0.0.1 y del Teorema 0.0.2, respectivamente:

- Si E es un espacio G -fibrante, entonces E/K es un espacio G/K -fibrante.
- Si S es un espacio H -fibrante, entonces $G \times_H S$ es un espacio G -fibrante.

Una de las herramientas usadas en la demostración de los resultados principales es, la construcción de una extensión fibrante en las categorías \mathcal{M}_G de G -espacios y G -funciones y, $Map(G\text{-}\mathcal{M})$ de pares de G -funciones.

Con el propósito de mostrar estos resultados se ha estructurado el presente trabajo en tres capítulos, que se describen a continuación en términos generales.

En el primer capítulo establecemos los conceptos preliminares que serán utilizados a lo largo del trabajo. Iniciamos con una breve introducción a

los G -espacios para después presentar otras herramientas, tales como límites inversos y diagramas pull-back. En este capítulo introducimos el concepto de cocilindro equivariante y revisamos algunas de sus principales propiedades.

En el segundo capítulo describimos algunos hechos acerca de G -fibraciones y espacios G -fibrantes; introducimos el concepto de G -resolución para G -espacios y damos una construcción detallada de una extensión G -fibrante para un G -espacio métrico compacto. En el Teorema 2.5.2 presentamos el resultado principal del capítulo y, como aplicación de este, deducimos el Corolario 2.5.3. Adicionalmente en el Capítulo 3 presentamos el Teorema 3.6.5, que es una generalización del Corolario 2.5.3. En el contexto general la afirmación del Teorema 0.0.1 sigue siendo un problema abierto para el caso de espacios G -fibrantes, sin embargo, el Teorema 3.6.5 da una respuesta positiva para el caso de G -espacios compactos con un solo tipo de G -órbitas.

En el tercer capítulo trasladamos varios de los conceptos previamente estudiados a las categorías $Map(G-TOP)$ y $Map(G-\mathcal{M})$, como por ejemplo las ideas de G -fibración, cocilindros y resoluciones equivariantes. De igual manera describimos como se construye una extensión G -fibrante en estas categorías. En el Corolario 3.5.2 presentamos el resultado principal del capítulo el cual es, una consecuencia casi directa del Teorema 3.5.1.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo damos algunas definiciones y resultados básicos, los cuales serán utilizados para comprender los resultados principales de esta tesis. Comenzamos con un desarrollo breve de la teoría de G -espacios y G -funciones. La mayoría de los resultados sobre G -espacios pueden consultarse en [6] y [18].

1.1. G -espacios y G -funciones

A lo largo de esta tesis el símbolo G siempre denotará un grupo topológico, por tal razón comenzamos nuestro estudio describiendo tal concepto. En la mayoría de las ocasiones G será compacto y metrizable.

Definición 1.1.1. *Sea G un espacio con estructura de grupo, decimos que G es un **grupo topológico** si la división $\delta: G \times G \rightarrow G$,*

$$\delta(h, g) = gh^{-1}$$

es una función continua.

Al elemento neutro (o identidad) del grupo G lo denotamos con la letra e .

Como ejemplos importantes de grupos topológicos tenemos los grupos de Lie, que también usaremos en este trabajo.

Definición 1.1.2. *Sea G un grupo topológico. Se dice que G es un **grupo de Lie** si posee una estructura de n -variedad diferencial, tal que las operaciones del grupo son funciones analíticas.*

Observemos que todo grupo de Lie además de ser localmente compacto es metrizable y separable.

Definición 1.1.3. *Sea G un grupo topológico. Un G -espacio es un par $(X, *)$, donde X es un espacio topológico y, $*$: $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto g * x$ es una acción continua, esto es, una función continua que satisface:*

1. $e * x = x$ para cada $x \in X$,
2. $g * (h * x) = (gh) * x$ para cada $g, h \in G$ y $x \in X$.

*En la práctica, se dice simplemente que X es un G -espacio sin especificar la acción y, se escribe gx en lugar de $g * x$.*

Cualquier acción de un grupo G en un espacio X determina una acción de cada subgrupo H de G en X . Formalmente, si $(X, *)$ es un G -espacio entonces $(X, *')$ es un H -espacio, donde la acción $*' : H \times X \rightarrow X$ está dada por $h *' x = h * x$.

Definición 1.1.4. *Una función continua $f: X \rightarrow Y$ entre los G -espacios X y Y es una G -función (o función **equivariante**) si*

$$f(gx) = gf(x), \quad \text{para todo } g \in G \text{ y } x \in X.$$

Si $f : X \rightarrow Y$ es una G -función y además es un homeomorfismo de los espacios topológicos X y Y , entonces es evidente que la función inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ es también una G -función; en este caso diremos que f es un **G -homeomorfismo**. Se dice que los G -espacios X y Y son **G -homeomorfos** (o **G -equivalentes**) si existe un G -homeomorfismo entre ellos, en este caso escribiremos $X \approx Y$.

Es fácil ver que: (a) para cada G -espacio X , la función identidad $id_X : X \rightarrow X$ es una G -función, (b) si $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ son G -funciones, entonces $g \circ f$ es una G -función también. De ello concluimos que los G -espacios y las G -funciones forman una categoría que denotaremos como G - TOP . Trabajaremos también en la categoría G - \mathcal{M} de G -espacios metrizablees y G -funciones.

Sea X un G -espacio, para cada $H \subseteq G$ y cada $A \subseteq X$ se usa la siguiente notación

$$H(A) = \{ha \mid h \in H, a \in A\}.$$

Definición 1.1.5. *Sea X un G -espacio. Un subconjunto A de X se llama **G -invariante** (o **G -invariante**) si $G(A) = A$. En este caso, si además A es cerrado en X , decimos que (X, A) es un **G -par**.*

Si A es un subconjunto invariante de un G -espacio X , entonces podemos considerar a A como un G -espacio, dotado de la acción $(g, a) \mapsto ga$, que es una restricción en A de la acción de G en X . Por lo tanto se dice también que A es un **G -subconjunto** de X . En este caso, el encaje $A \hookrightarrow X$ es una G -función. En general, por un **G -encaje** entendemos una G -función $i : A \rightarrow X$, tal que la correspondencia $a \mapsto i(a)$ realiza un G -homeomorfismo entre A y $i(A)$.

Un G -subconjunto A de un G -espacio X , se llama **G -retracto** si existe una G -función $r : X \rightarrow A$, llamada G -retracción, tal que $r(a) = a$ para

todo $a \in A$. En general se dice que una G -función $r : X \rightarrow Y$ es una G -**retracción**, si existe una G -función $i : Y \rightarrow X$ tal que $r \circ i = id_Y$. En este caso, i es un G -encaje (cerrado cuando X es de Hausdorff) y $A = i(Y)$ es un G -retracto de X .

Definición 1.1.6. Sean X un G -espacio y $x \in X$.

- (a) $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ se llama **grupo de isotropía** de x , y es un subgrupo de G .
- (b) $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$ se llama G -**órbita** de x o simplemente **órbita de x** en X .

A partir de la Definición 1.1.6(b), observamos que la órbita de cualquier punto x es un G -subconjunto de X . Otro ejemplo importante de G -subconjunto de X es el siguiente: sea N un subgrupo normal y cerrado de G . El conjunto de **puntos N -fijos** de X denotado como X^N , se define como $X^N = \{x \in X \mid N \subseteq G_x\}$.

Sea X un G -espacio. Diremos que la acción de G en X es:

- **trivial** si $G_x = G$ para todo $x \in X$, es decir $gx = x$ para todo $x \in X$ y cada $g \in G$
- **libre** si $G_x = \{e\}$ para todo $x \in X$, en este caso se dice también que X es un G -**espacio libre**.

Denotamos por (H) a la clase conjugada del subgrupo H de G , esto es,

$$(H) = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}.$$

Sea X un G -espacio de Hausdorff, $G(x)$ la órbita de $x \in X$ y $H = G_x$. Como los grupos de isotropía de puntos en la misma órbita son conjugados, es decir,

$G_{gx} = gG_xg^{-1}$, para cada $g \in G$ y $x \in X$, entonces $(H) = \{G_y \mid y \in G(x)\}$. Además $G(x)$ es G -equivalente a G/G_y para cada $y \in G(x)$. En particular, $G(x) \approx G/H$.

Por este motivo decimos que (H) es un *tipo de órbita*.

Un G -espacio X tiene **un solo tipo de órbita** (H) , si los grupos de isotropía de todos sus puntos están en la clase (H) , es decir, si $(G_x) = (H)$ para cada punto $x \in X$. En este caso, cada órbita es G -equivalente a G/H .

Para un G -espacio de Hausdorff X , toda acción libre tiene un solo tipo de órbita $(\{e\})$. En este caso, cada órbita es G -equivalente a G .

Proposición 1.1.7. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una G -función, entonces para cada $x \in X$ se cumple $G_x \subseteq G_{f(x)}$.*

En particular, si Y es un G -espacio libre entonces X también lo es.

Dado un G -espacio X , el conjunto de sus G -órbitas se denota por X/G . Sea $\pi_X: X \rightarrow X/G$ la función natural que asocia a cada x su G -órbita $G(x)$. Entonces X/G dotado con la topología cociente se conoce como el **espacio G -orbital** (o simplemente como el espacio orbital) de X . A π_X se le llama **proyección G -orbital** (o simplemente proyección orbital).

Sean X y Y dos G -espacios con proyecciones orbitales π_X y π_Y respectivamente, y sea $f: X \rightarrow Y$ una G -función. Entonces f induce una única función continua $f/G: X/G \rightarrow Y/G$ tal que se cumple $f/G \circ \pi_X = \pi_Y \circ f$. Por supuesto, f/G está definida por $(f/G)(G(x)) = G(f(x))$.

En realidad, es de nuestro interés el siguiente caso más general: Sea N un subgrupo *normal* de G , si X es un G -espacio, entonces el grupo cociente G/N actúa en el espacio N -orbital X/N por medio de la acción \cdot dada por:

$$gN \cdot N(x) = N(gx),$$

es decir, $(X/N, \cdot)$ es un G/N -espacio. Por otro lado, podemos considerar X/N también como un G -espacio con la acción \star definida por $g \star N(x) = gN \cdot N(x) = N(gx)$. Notemos que en el caso particular cuando $N = G$, la acción \star de G en X/G es trivial.

Dado un G -espacio X podemos decir que la proyección N -orbital, $\pi_X : X \rightarrow X/N$ es una G -función ya que $\pi_X(gx) = N(gx) = g \star N(x) = g \star \pi_X(x)$ para todo $x \in X$ y $g \in G$.

Proposición 1.1.8. *Sea N un subgrupo normal de un grupo topológico G . Si $f : X \rightarrow Y$ es una G -función, entonces f induce una única G/N -función $f/N : X/N \rightarrow Y/N$ que hace al siguiente diagrama conmutativo :*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X/N & \xrightarrow{f/N} & Y/N \end{array} \quad (1.1.1)$$

donde π_X y π_Y son las proyecciones N -orbitales. Claramente f/N está definida por $(f/N)(N(x)) = N(f(x))$.

Evidentemente, podemos tratar f/N también como una G -función ya que

$$\begin{aligned} (f/N)(g \star N(x)) &= (f/N)(N(gx)) = N(f(gx)) = N(gf(x)) = \\ &g \star N(f(x)) = g \star (f/N)(N(x)). \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos considerar el diagrama (1.1.1) como un diagrama de G -funciones.

1.2. Límites inversos y diagramas pull-back en $G\text{-TOP}$

Las ideas principales acerca de límites inversos y diagramas pull-back en la categoría TOP pueden consultarse en [19]. A lo largo de esta tesis utilizaremos sucesiones inversas y diagramas pull-back en $G\text{-TOP}$.

Definición 1.2.1. Sea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Una **sucesión inversa** $\mathbf{E} = \{E_i, q_i^j, \mathbb{N}\}$ de G -espacios (denotada también como $\{E_i, q_i^j\}$) consta de

- (1) una familia $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de G -espacios,
- (2) una familia de G -funciones $\{q_i^j : E_j \rightarrow E_i\}_{j \geq i}$ que satisface
 - $q_i^j \circ q_j^k = q_i^k$, para cada terna $i, j, k \in \mathbb{N}$ tal que $i \leq j \leq k$;
 - $q_i^i = id_{E_i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Definición 1.2.2. Sea $\mathbf{E} = \{E_i, q_i^j, \mathbb{N}\}$ una sucesión inversa. Un **cono** sobre \mathbf{E} con vértice E , es una familia de G -funciones $\mathbf{q} = \{q_i : E \rightarrow E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ (denotada también como $\mathbf{q} : E \rightarrow \mathbf{E}$) tal que $q_i^j \circ q_j = q_i$, si $j \geq i$.

Un G -espacio E junto con un cono $\mathbf{q} = \{q_i\} : E \rightarrow \mathbf{E}$ sobre \mathbf{E} , se llama **límite inverso** de \mathbf{E} y se denota como

$$(E, \{q_i\}) = \varprojlim \mathbf{E} = \varprojlim \{E_i, q_i^j\},$$

o simplemente $E = \varprojlim \mathbf{E}$, si el cono \mathbf{q} satisface la siguiente propiedad universal: si $\{f_i : Y \rightarrow E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es un cono sobre \mathbf{E} , entonces existe una única G -función $f : Y \rightarrow E$ tal que $q_i \circ f = f_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

En este caso las G -funciones q_i se llaman **proyecciones** (naturales) del límite inverso $\varprojlim \mathbf{E}$.

De su propiedad universal podemos concluir que el límite es único salvo G -homeomorfismo.

En la categoría $G\text{-TOP}$ el límite inverso existe para cada sucesión inversa, debido a la siguiente descripción explícita: Sea $\mathbf{E} = \{E_i, q_i^j\}$ una sucesión inversa, entonces el espacio

$$E = \{(x_i) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i \mid q_i^{i+1}(x_{i+1}) = x_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}$$

con la **acción diagonal** $*$ **de** G dada por $g*(x_i) = (gx_i)$, es el límite inverso de \mathbf{E} con las proyecciones $q_i : E \rightarrow E_i$ dadas por $q_i((x_k)) = x_i$.

En este caso, observamos que E tiene la topología de subespacio del producto cartesiano $\prod_{i \in \mathbb{N}} E_i$, es decir, los conjuntos de la forma $q_i^{-1}(U)$, donde U es abierto en E_i , forman una subbase de E . De hecho la familia $\{q_i^{-1}(U) \mid U \text{ es abierto en } E_i, i \in \mathbb{N}\}$ forma una *base* de la topología de E ([19, Proposition 2.5.5.]).

Proposición 1.2.3. [10, Lemma 4.10] *Sea N un subgrupo normal y cerrado de un grupo compacto G y sea $\mathbf{E} = \{E_i, q_i^j\}$ una sucesión inversa de G -espacios de Hausdorff. Si $E = \varprojlim \mathbf{E}$ con proyecciones $q_i : E \rightarrow E_i$ entonces,*

$$E/N = \varprojlim \{E_i/N, q_i^j/N\}$$

con proyecciones $q_i/N : E/N \rightarrow E_i/N$.

De nuestro especial interés es el siguiente concepto dado para un grupo G compacto y metrizable.

Definición 1.2.4. *Una **sucesión pro-Lie** de subgrupos de un grupo dado G compacto y metrizable, es una sucesión decreciente $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de subgrupos normales cerrados de G , tales que G/N_i es un grupo de Lie para cada i y $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} N_i = \{e\}$ (y por lo tanto*

$$G = \varprojlim \{G/N_i, \pi_i^{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}},$$

donde $\pi_i^j : G/N_j \rightarrow G/N_i$, $j \geq i$, son las proyecciones naturales).

Es bien sabido que para todo grupo compacto metrizable G existe una sucesión pro-Lie (ver [23]).

La siguiente proposición afirma que si G es compacto y metrizable, entonces cualquier G -espacio es el límite inverso de cierta sucesión inversa.

Proposición 1.2.5. [7, Proposición 5.4] *Sea $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión pro-Lie de subgrupos de un grupo compacto metrizable G . Si E es un G -espacio, entonces*

$$E = \varprojlim \{E/N_i, p_i^j\}_{i \in \mathbb{N}},$$

donde $p_i^j : E/N_j \rightarrow E/N_i$, $j \geq i$ son las proyecciones naturales.

Definición 1.2.6. *Un cuadrado conmutativo de G -funciones*

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (1.2.1)$$

se llama **diagrama pull-back** (o cuadrado universal), si satisface la siguiente propiedad universal: Si X es un G -espacio y $\alpha : X \rightarrow B'$ y $\beta : X \rightarrow E$ son G -funciones tales que $f \circ \alpha = p \circ \beta$, entonces existe una única G -función $h : X \rightarrow E'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \searrow \beta & & & \\ & & E' & \xrightarrow{f'} & E \\ & \searrow \alpha & \downarrow p' & & \downarrow p \\ & & B' & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (1.2.2)$$

(Note: A dotted arrow labeled h points from X to E' in the original diagram.)

Al G -espacio E' (junto con f' y p' llamadas **proyecciones**) se le conoce también como **pull-back** (o producto fibrado) de la triada $B' \xrightarrow{f} B \xleftarrow{p} E$. El pull-back existe para cada triada y, debido a la propiedad universal, es único salvo G -homeomorfismo. Para una triada $B' \xrightarrow{f} B \xleftarrow{p} E$ dada, el pull-back E' puede ser definido de manera explícita como

$$E' = \{(b', x) \in B' \times E \mid f(b') = p(x)\},$$

con la acción diagonal de G . Las proyecciones $f' : E' \rightarrow E$ y $p' : E' \rightarrow B'$ se definen por $f'(b', x) = x$ y $p'(b', x) = b'$.

Proposición 1.2.7. *Sea X un G -espacio y sea $\pi_X : X \rightarrow X/N$ la proyección N -orbital, donde N es un subgrupo normal cerrado de G . Supongamos que $f : B \rightarrow X/N$ es una G/N -función y sea E , junto con las proyecciones $f' : E \rightarrow X$ y $\pi' : E \rightarrow B$, el pull-back de la triada $B \xrightarrow{f} X/N \xleftarrow{\pi_X} X$. Entonces el G/N -espacio B es G/N -homeomorfo al espacio orbital E/N . Más precisamente, se tiene el diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccccc} & & E & \xrightarrow{f'} & X \\ & \swarrow \pi_E & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi_X \\ E/N & \xrightarrow{h} & B & \xrightarrow{f} & X/N \end{array}$$

donde h es un G/N -homeomorfismo. Por lo tanto, podemos identificar B con E/N , π' con π_E y f con f'/N .

Demostración. La función $h : E/N \rightarrow B$ se define por $h(N(y)) = \pi'(y)$. Obviamente h está bien definida: si $N(y) = N(y')$ entonces $y' = ny$ para algún $n \in N$ y $\pi'(y') = \pi'(ny) = n \star \pi'(y) = \pi'(y)$. Por la definición de h tenemos $h \circ \pi_E = \pi'$ y, por consiguiente h es continua (debido a la definición

de la topología cociente en E/N). Además,

$$\begin{aligned} h(gN \cdot N(y)) &= h(N(gy)) = \pi'(gy) = g \star \pi'(y) = (gN) \cdot \pi'(y) \\ &= (gN) \cdot h(N(y)) \end{aligned}$$

es decir, h es una G/N -función (y con ello una G -función). Como π_X es una función sobreyectiva y abierta, π' también lo es, luego es fácil ver que h es abierta y sobreyectiva. Para probar que h es un homeomorfismo hace falta ver que h es inyectiva.

Supongamos que $h(N(y)) = h(N(y'))$. Entonces $\pi'(y) = \pi'(y')$ y con ello (en virtud de la conmutatividad del diagrama pull-back) $\pi_X(f(y)) = \pi_X(f(y'))$, es decir, $f(y)$ y $f(y')$ están en la misma N -órbita de X . Por lo tanto, existe $n \in N$ tal que $f(y') = nf(y)$. Afirmamos que $y' = ny$. Para verlo basta notar que $f(y') = f(ny)$ y $\pi'(y') = \pi'(y) = n\pi'(y) = \pi'(ny)$. Así $N(y') = N(ny) = N(y)$. \square .

1.3. G -fibraciones y G -deformaciones

Por una G -fibración entendemos una versión natural equivariante del concepto de fibración de Hurewicz.

Definición 1.3.1. Sean X y Y G -espacios. Una función continua $F: X \times I \rightarrow Y$ donde $I = [0, 1]$, es llamada una **G -homotopía** si, $F(gx, t) = gF(x, t)$ para todo $g \in G$, $x \in X$ y $t \in I$, es decir, F es una G -función considerando a $X \times I$ como un G -espacio con la acción $g \cdot (x, t) = (gx, t)$.

Si además, para un subconjunto invariante A de X , una G -homotopía $F: X \times I \rightarrow Y$ es tal que $F(a, t) = F(a, 0)$ para toda $a \in A$ y $t \in I$, entonces se dice que F es una G -homotopía **relativa** a A .

Note que para cada $t \in I$ la función $F_t: X \rightarrow Y$, $x \mapsto F(x, t)$ es una G -función. Si para las G -funciones $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ existe una G -homotopía $F: X \times I \rightarrow Y$ tal que $f_0 = F_0$ y $f_1 = F_1$, se dice que f_0 y f_1 son G -**homotópicas** y se escribe $f_0 \simeq f_1$ o $F: f_0 \simeq f_1$. Si además F es relativa a A , escribimos $f_0 \simeq f_1 \text{ rel.} A$.

Definición 1.3.2. Sea (X, A) un G -par. Una G -**deformación fuerte de X en A** , es una G -homotopía $D: X \times I \rightarrow X$ que satisface

- (a) $D(x, 0) = x$ para todo $x \in X$,
- (b) $D(x, 1) \in A$ para todo $x \in X$,
- (c) $D(a, t) = a$ para todo $a \in A$ y $t \in I$.

En este caso, se dice que A es un **retracto por G -deformación fuerte de X** (notemos que la G -función $r: X \rightarrow A$ definida por $r(x) = D(x, 1)$ es una G -retracción). Un G -encaje cerrado $s: A \hookrightarrow X$ se llama G -**SDR-mapeo** si, existe una G -deformación fuerte de X en $s(A)$.

Definición 1.3.3. Una G -función $p: E \rightarrow B$ se llama G -**fibración** si, para cada G -espacio X y cualquier diagrama conmutativo de G -funciones

$$\begin{array}{ccc}
 x & & X \xrightarrow{f} E \\
 \downarrow & & \downarrow \partial_0^X \quad \downarrow p \\
 (x, 0) & & X \times I \xrightarrow{F} B
 \end{array} \tag{1.3.1}$$

existe un relleno $\tilde{F}: X \times I \rightarrow E$, es decir, una G -homotopía $\tilde{F}: X \times I \rightarrow E$ tal que $p\tilde{F} = F$ y $\tilde{F}\partial_0^X = f$.

Si además, se puede escoger un relleno $\tilde{F}: X \times I \rightarrow E$ el cual es una G -homotopía relativa a un subconjunto invariante $A \subseteq X$, siempre y cuando F

sea una G -homotopía relativa a A , vamos a decir que p es una **G -fibración regular**.

En realidad, en la mayor parte de la tesis trabajaremos con G -fibraciones regulares debido al siguiente hecho:

Proposición 1.3.4. [9, Proposition 2.1] *Sea $p: E \rightarrow B$ una G -fibración. Si B es un G -espacio metrizable, entonces p es una G -fibración regular.*

La siguiente proposición destaca una propiedad importante de las G -fibraciones regulares.

Proposición 1.3.5. *Sea $p: E \rightarrow B$ una G -fibración regular. Supongamos que $D: B \times I \rightarrow B$ es una G -deformación fuerte de B en $A \subseteq B$. Entonces existe una G -deformación fuerte $\tilde{D}: E \times I \rightarrow E$ de E en $F = p^{-1}(A)$, tal que $p \circ \tilde{D} = D \circ p \times id_E$, donde $p \times id_E: E \times I \rightarrow B \times I$ se define por $(p \times id_E)(x, t) = (p(x), t)$.*

En particular, si $A \hookrightarrow B$ es un G -SDR-mapeo, el encaje $F \hookrightarrow E$ también lo es.

Demostración. Por definición $D: B \times I \rightarrow B$ satisface las condiciones:

- (a) $D(b, 0) = b$, para todo $b \in B$,
- (b) $D(b, 1) \in A$, para todo $b \in B$,
- (c) $D(a, t) = a$, para todo $a \in A$ y $t \in I$.

Usando la propiedad (a) tenemos el siguiente diagrama conmutativo de G -funciones

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{id_E} & E \\
 \partial_0^E \downarrow & & \downarrow p \\
 E \times I & \xrightarrow{p \times id_I} & B \times I \xrightarrow{D} B
 \end{array} \tag{1.3.2}$$

Para cada $y \in F$, se tiene que $D \circ (p \times id_I)(y, t) = p(y)$ para todo $t \in I$. En efecto, en este caso $p(y) = a$ para algún $a \in A$, y por tanto en virtud de (c), $D(p(y), t) = D(a, t) = a = p(y)$. Esto significa que $D \circ (p \times id_I)$ es una G -homotopía relativa respecto a Y .

Ya que p es una G -fibración regular, existe una G -homotopía relativa $\tilde{D}: E \times I \rightarrow E$ respecto a F , que preserva la conmutatividad del diagrama (1.3.2), en otras palabras, tal que $\tilde{D}(x, 0) = x$, $\tilde{D}(y, t) = y$ y $p \circ \tilde{D}(x, t) = D(p(x), t)$ para todo $x \in E$, $y \in F$ y $t \in I$. En virtud de la propiedad (b) de D , la última igualdad implica que $\tilde{D}(x, 1) \in p^{-1}(D(p(x), 1)) \subseteq p^{-1}(A)$, es decir, $\tilde{D}(x, 1) \in F$ para todo $x \in E$. Claramente \tilde{D} es una G -deformación fuerte de E en F , la cual deseabamos encontrar. \square

Sean G y K dos grupos topológicos, y supongamos que $\alpha : G \rightarrow Aut(K)$, $g \mapsto \alpha_g$ es un homomorfismo, donde $Aut(K)$ es el grupo de automorfismos de K , tal que la correspondiente acción

$$\begin{aligned} G \times K &\rightarrow K \\ (g, k) &\mapsto \alpha_g(k), \end{aligned}$$

de G sobre K es continua, es decir, G actúa en K por medio de automorfismos. Bajo las condiciones de arriba diremos que G y K **están relacionados por** α .

La siguiente proposición nos permite detectar cuando una proyección orbital es una G -fibración.

Proposición 1.3.6. [9, Proposition 5.2] *Sean G y K dos grupos compactos de Lie relacionados por el homomorfismo $\alpha : G \rightarrow Aut(K)$. Sea E un G -espacio izquierdo metrizable dotado también de una acción derecha libre del grupo K , tal que se tiene la relación*

$$g \star (y \cdot k) = (g \star y) \cdot \alpha_g(k), \quad g \in G, \quad k \in K, \quad y \in E$$

(aquí \star y \cdot denotan las acciones G y K respectivamente). Entonces la proyección K -orbital $p: E \rightarrow E/K$ es una G -fibración, donde el espacio K -orbital E/K está considerado como un G -espacio dotado de la acción $g \star yK = (g \star y)K$.

1.4. Espacios G -ANR y G -SSDR-mapeos

En 1930 Borsuk en su tesis doctoral, introdujo y estudió la noción de retracto absoluto (abreviado como AR). Dos años más tarde, definió la noción de retracto absoluto de vecindad (abreviado como ANR). Los espacios ANR forman el entorno natural para la teoría de homotopías. Un estudio detallado de los espacios ANR y ANE puede encontrarse en [20].

En esta sección introducimos la versión equivariante de los espacios ANR y ANE , así como su relación. Un estudio detallado de la teoría equivariante de retracts puede consultarse en [1], [2] y [22].

Definición 1.4.1. Sea X un G -espacio metrizable. Decimos que X es un **G -retracto absoluto de vecindades**, abreviado G -ANR, si para cada G -espacio metrizable Y y todo G -encaje cerrado $i: X \hookrightarrow Y$, existe una vecindad invariante U de $i(X)$ en Y , tal que $i(X)$ es un G -retracto de U .

Si además se puede tomar $U = Y$, decimos que X es un **G -retracto absoluto**, abreviado G -AR.

Definición 1.4.2. Un G -espacio Y se llama **G -extensor absoluto de vecindades**, abreviado G -ANE, si para cada G -par metrizable (X, A) y cualquier G -función $f: A \rightarrow Y$, existe una vecindad invariante U de A en X y una G -función $\bar{f}: U \rightarrow Y$, tal que $\bar{f}|_A = f$.

Si además se puede tomar $U = X$, decimos que Y es un **G -extensor absoluto**, abreviado G -AE.

A partir de la definición previa es claro que, si X es un G - AE entonces X es G - ANE . Por otro lado, en [21, Proposición 6.3] y [1, Theorem 14], respectivamente, se dan las pruebas de las siguientes propiedades importantes:

1. Todo subconjunto abierto invariante de un G - ANE es también G - ANE .
2. Si G es un grupo compacto de Hausdorff y Y es un G -espacio metrizable, entonces Y es un G - $A(N)R$ si y sólo si Y es un G - $A(N)E$.

Cabe mencionar los siguientes dos resultados fundamentales.

Teorema 1.4.3. [4, Theorem 1.1] *Sean G un grupo compacto de Hausdorff y N un subgrupo normal cerrado en G . Si X es un G - $A(N)R$ -espacio, entonces X/N es un G/N - $A(N)R$ -espacio. En particular, X/G es un $A(N)R$ -espacio.*

Proposición 1.4.4. [3, Proposition 5] *Si G es un grupo compacto de Lie y H es un subgrupo cerrado en G , entonces G/H es un G - ANR -espacio (o, equivalentemente, un G - ANE -espacio).*

Definición 1.4.5. *Sea (X, A) un G -par. A se llama un **retracto por G -deformación fuerte shape** de X si, existe un G -encaje cerrado $\alpha: X \hookrightarrow M$ de X en un G - AR -espacio M , que satisface la siguiente condición: Para cualesquiera vecindades invariantes U y V de $\alpha(X)$ y $\alpha(A)$, respectivamente en M , existe una G -homotopía $H: X \times I \rightarrow U$, tal que $H(x, 0) = \alpha(x)$ y $H(x, 1) \in V$, para toda $x \in X$. Además $H(a, t) = \alpha(a)$ para cada $(a, t) \in A \times I$.*

Un G -encaje cerrado de espacios metrizables $s: A \hookrightarrow X$ se llama G - $SSDR$ -**mapeo** si, $s(A)$ es un retracto por G -deformación fuerte shape de X .

Teorema 1.4.6. [8, Theorem 3.1] *Sea $s: A \hookrightarrow X$ un G -encaje cerrado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) *s es un G -SSDR-mapeo.*
- (b) *Para toda G -función $f: A \rightarrow Y$ donde Y es un G -ANR, existe una G -extensión $\bar{f}: X \rightarrow Y$, tal que $\bar{f} \circ s = f$ y, si $\bar{f}_1, \bar{f}_2: X \rightarrow Y$ son dos G -extensiones de f , entonces $\bar{f}_1 \simeq \bar{f}_2$ rel. $s(A)$.*
- (c) *Para cualquier G -fibración $p: E \rightarrow B$ donde E y B son G -ANR-espacios, y cada diagrama conmutativo de G -funciones*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow s & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{F} & B \end{array} \quad (1.4.1)$$

existe un relleno $\tilde{F}: X \rightarrow E$, es decir, una G -función tal que $\tilde{F} \circ s = f$ y $p \circ \tilde{F} = F$.

Corolario 1.4.7. *Sea (X, A) un G -par, entonces*

1. *$X \times 0 \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$ es un G -SSDR-mapeo.*
2. [11, Proposition A.3] *Si el encaje $A \hookrightarrow X$ es un G -SSDR-mapeo, entonces lo es el encaje $X \times \{0, 1\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$.*

Definición 1.4.8. *Una G -función $p: E \rightarrow B$ de G -espacios metrizablees se llama **G -fibración fuerte** si para cada diagrama (1.4.1), donde $s: A \hookrightarrow X$ es un G -SSDR-mapeo, existe una G -función $\tilde{F}: X \rightarrow E$ como relleno del diagrama.*

Claramente de las definiciones tenemos que:

1. Las G -fibraciones fuertes son G -fibraciones.
2. Cada G -fibración de G -ANR's es una G -fibración fuerte.

1.5. Cocilindros en $G\text{-TOP}$

Para un G -espacio dado B , denotemos por B^I el espacio de todas las trayectorias continuas $\omega : I \rightarrow B$ (con la topología compacto-abierta). Claramente B^I es un G -espacio con la acción \cdot dada por $(g \cdot \omega)(t) = g\omega(t)$, $t \in I$. Note que las funciones $\pi_B^0 : B^I \rightarrow B$, $\pi_B^1 : B^I \rightarrow B$ y $\pi_B : B^I \rightarrow B \times B$ definidas por $\pi_B^0(\omega) = \omega(0)$, $\pi_B^1(\omega) = \omega(1)$ y $\pi_B(\omega) = (\omega(0), \omega(1))$, respectivamente, son G -funciones. De hecho en [24, Corolario 1.8.12] se prueba que π_B^0 , π_B^1 y π_B son G -fibraciones para cualquier G -espacio B .

Definición 1.5.1. *Sea $f : B' \rightarrow B$ una G -función. El **cocilindro** de f , denotado por $\text{coCyl}(f)$, es el pull-back de la triada $B' \xrightarrow{f} B \xleftarrow{\pi_B^0} B^I$. Es decir tenemos el diagrama pull-back*

$$\begin{array}{ccc}
 \text{coCyl}(f) & \xrightarrow{\widehat{f}} & B^I \\
 \widehat{\pi}_B^0 \downarrow & & \downarrow \pi_B^0 \\
 B' & \xrightarrow{f} & B
 \end{array} \tag{1.5.1}$$

Explícitamente, $\text{coCyl}(f) = \{(b', \omega_B) \in B' \times B^I \mid f(b') = \omega_B(0)\}$ con las proyecciones $\widehat{\pi}_B^0 : \text{coCyl}(f) \rightarrow B'$, $(b', \omega_B) \mapsto b'$ y $\widehat{f} : \text{coCyl}(f) \rightarrow B^I$, $(b', \omega_B) \mapsto \omega_B$.

Proposición 1.5.2. [12, Proposition 2.1] *Dada una G -función $f : B' \rightarrow B$, consideramos la G -función $p : \text{coCyl}(f) \rightarrow B$ definida por*

$$p((b', \omega)) = \omega(1), \quad (b', \omega) \in \text{coCyl}(f).$$

Entonces la función $\widetilde{p} : \text{coCyl}(f) \rightarrow B \times B'$ definida por $\widetilde{p}(b', \omega) = (\omega(1), b')$

en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{coCyl}(f) & \\
 & \downarrow \tilde{p} & \\
 & B \times B' & \\
 \swarrow p & & \searrow \widehat{\pi}_B^0 \\
 B & & B' \\
 \swarrow \text{pr}_B & & \swarrow \text{pr}_{B'}
 \end{array}$$

es una G -fibración. Además, si B' y B son G -fibrantes, entonces \tilde{p} es una G -fibración fuerte y, por lo tanto $\text{coCyl}(f)$ es un espacio G -fibrante.

Proposición 1.5.3. [15, Proposition 3.1(1)] Si $f: B' \rightarrow B$ es una G -función de G -ANE-espacios, entonces $\text{coCyl}(f)$ es un G -ANE-espacio.

Además, de la Proposición 1.5.2 tenemos que $\widehat{\pi}_B^0$ y p son G -fibraciones ya que son composiciones de G -fibraciones.

Recordemos que para una función dada $f: X \rightarrow Y$ en TOP , una sección de f es una función $s: Y \rightarrow X$ tal que $f \circ s = \text{id}_Y$. La G -fibración $\pi_B^0: B^I \rightarrow B$ tiene la sección $s_B: B \rightarrow B^I$, $b \mapsto c_b$, donde $c_b: I \rightarrow B$ es la trayectoria constante en b , esto es, $c_b(t) = b$ para todo $t \in I$. Más aún, $s_B(B)$ es un retracto por G -deformación fuerte de B^I .

Como el diagrama (1.5.1) es pull-back, tenemos un hecho similar para $\widehat{\pi}_B^0$: la G -función $s_{B'}: B' \rightarrow \text{coCyl}(f)$, $b' \mapsto (b', c_{f(b')})$, es una sección para $\widehat{\pi}_B^0$ mientras que $s_{B'}(B')$ es un retracto por G -deformación fuerte de $\text{coCyl}(f)$, en particular $s_{B'}$ es un G -SDR-mapeo.

Teorema 1.5.4. [15, p. 2031] Toda G -función $f: B' \rightarrow B$ admite la siguiente factorización

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{coCyl}(f) & \\
 p \swarrow & & \nwarrow s_{B'} \\
 B & \xleftarrow{f} & B'
 \end{array}$$

donde:

(a) p es una G -fibración, definida por

$$p(b', \omega) = \omega(1), \quad (b', \omega) \in \text{coCyl}(f)$$

(b) $s_{B'}$ es un G -SDR-mapeo, definido por

$$s_{B'}(b') = (b', c_f(b')), \quad b' \in B'.$$

1.6. Productos torcidos y rebanadas

El concepto de rebanada es una de las principales herramientas utilizadas en el estudio de los G -espacios. Esta idea permite estudiar las propiedades de la acción de G , por medio de las propiedades de la acción de un subgrupo compacto H de G donde la situación, por lo general, es más sencilla. El ejemplo más notable de rebanada se encuentra en el producto torcido, que definiremos a continuación.

Definición 1.6.1. Sea S un H -espacio donde H es un subgrupo cerrado de G . **El producto torcido** $G \times_H S$ es el espacio H -orbital del producto $G \times S$, cuando $G \times S$ se considera como un H -espacio con respecto a la acción $h \cdot (g, s) = (gh^{-1}, hs)$. Los elementos de $G \times_H S$ se denotan por $[g, s]$.

Observamos lo siguiente:

1. $[g, s] = [g', s'] \iff$ existe un $h \in H$ tal que $g' = gh^{-1}$ y $s' = hs$.
2. Podemos considerar $G \times_H S$ como G -espacio con la acción $g' \cdot [g, s] = [g'g, s]$; además para cualquier H -función $f: X \rightarrow Y$, tenemos una G -función inducida

$$G \times_H f: G \times_H X \rightarrow G \times_H Y, \quad [g, x] \mapsto [g, f(x)].$$

Por lo tanto, tenemos un funtor denominado funtor del producto torcido $G \times_H - : H\text{-TOP} \rightarrow G\text{-TOP}$.

3. Para encontrar el grupo de isotropía en un punto del producto torcido es suficiente utilizar puntos de la forma $[e, s]$. En este caso afirmamos que $G_{[e,s]} = H_s$, en efecto ya que $g \in G_{[e,s]} \iff [e, s] = g[e, s] = [g, s]$, lo que significa que para algún $h \in H$, $(h^{-1}, h(s)) = (g, s)$, esto es $g \in H_s$.

Proposición 1.6.2. [6, Ch. II, Proposition 3.2] *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto G y sea X un G -espacio, supongamos que $f: X \rightarrow G/H$ es una G -función. Sea $A = f^{-1}(eH)$, entonces A es invariante bajo H y la función $\varphi: G \times_H A \rightarrow X$ definida por $\varphi[g, a] = ga$ es un G -homeomorfismo.*

Definición 1.6.3. *Sea X un G -espacio con G compacto, H un subgrupo cerrado de G y sea $P \subset X$ una órbita de tipo G/H . Un **tubo alrededor de P** es un G -encaje*

$$\varphi: G \times_H A \rightarrow X$$

sobre una vecindad abierta de P en X , donde A es un H -espacio.

Definición 1.6.4. *Sea X un G -espacio. Sea $x \in S \subset X$ tal que $G_x(S) = S$. Se dice que S es una **rebanada en x** , si la función*

$$G \times_{G_x} S \rightarrow X,$$

que envía $[g, s] \mapsto gs$, es un tubo alrededor de $G(x)$.

Teorema 1.6.5. [6, Ch. II, Theorem 4.2] *Sea X un G -espacio, sea $x \in S \subset X$, y hagamos $H = G_x$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe un tubo $\varphi: G \times_H A \rightarrow X$ alrededor de $G(x)$ tal que $\varphi[e, A] = S$.*

2. S es una rebanada en x .
3. $G(S)$ es una vecindad abierta de $G(x)$ y existe una G -retracción $f: G(S) \rightarrow G(x)$ tal que $f^{-1}(x) = S$.

El siguiente teorema conocido como “Teorema de rebanada ”, asegura la existencia de rebanadas para cada punto de un G -espacio completamente regular, cuando G es un grupo compacto de Lie. Su prueba se debe a Palais.

Teorema 1.6.6. [6, Ch. II, Theorem 5.4] *Existe un tubo alrededor de cualquier órbita de un G -espacio completamente regular, en donde G es un grupo compacto de Lie.*

La siguiente proposición es una caracterización para los G -espacios con un solo tipo de órbitas (H), por medio de productos torcidos.

Proposición 1.6.7. [21, Proposición 5.12] *Sea G un grupo compacto y X un G -espacio con un solo tipo de órbitas (H). Entonces la G -función*

$$\eta: G \times_{N(H)} X^H \rightarrow X$$

dada por $\eta([g, x]) = gx$, es un G -homeomorfismo, donde $N(H)$ es el normalizador de H en G .

Proposición 1.6.8. [21, Proposición 5.13] *Sea G un grupo compacto y H un subgrupo cerrado de G . Entonces para cualquier conjunto H -invariante S se tiene el G -homeomorfismo*

$$(G \times_H S)/G \approx S/H.$$

Capítulo 2

Extensiones G -fibrantes

Con el objeto de presentar uno de los resultados principales de la tesis, el Teorema 2.5.2, en este capítulo describimos inicialmente los conceptos de espacio y extensión G -fibrante. Revisaremos algunas de sus propiedades básicas. En particular destacamos la existencia de extensiones fibrantes, para un grupo G y un G -espacio ambos compactos y metrizable, descrita en el Teorema 2.4.1.

2.1. Espacios y extensiones G -fibrantes

La noción de un espacio G -fibrante puede considerarse como una generalización del concepto de G -ANR. Los espacios y las extensiones G -fibrantes representan la base de nuestro estudio. Un estudio detallado sobre espacios G -fibrantes así como algunas propiedades y ejemplos, pueden consultarse en [8] y [14]. En esta sección trabajaremos en la categoría \mathcal{M}_G .

Definición 2.1.1. *Un G -espacio E se llama **espacio G -fibrante** si, para cada G -SSDR-mapeo $s : A \hookrightarrow X$ y cada G -función $f : A \rightarrow E$, existe una G -función $F : X \rightarrow E$ tal que $F \circ s = f$.*

Notemos que cada espacio G -ANR es un espacio G -fibrante debido al Teorema 1.4.6(b).

Definición 2.1.2. Si un G -SSDR-mapeo $s : E \hookrightarrow \tilde{E}$ es tal que \tilde{E} es un espacio G -fibrante, entonces se dice que s es una **extensión G -fibrante de E** .

Definición 2.1.3. Sea (X, A) un G -par. Una **G -deformación infinita fuerte de X en A** es una G -función $D : X \times [0, \infty) \rightarrow X$ que satisfice:

- (a) $D(x, 0) = x$ para todo $x \in X$,
- (b) $D(a, t) = a$ para todo $a \in A$ y $t \in [0, \infty)$,
- (c) para cada vecindad invariante U de A en X existe un $\lambda \in [0, \infty)$ tal que $D(X \times [\lambda, \infty)) \subseteq U$.

Un G -encaje cerrado $s : A \hookrightarrow X$ se llama un **G -ISDR-mapeo** si, existe una G -deformación infinita fuerte de X en $s(A)$.

Proposición 2.1.4. Si $s : E \hookrightarrow \tilde{E}$ es una extensión G -fibrante de un G -espacio compacto metrizable E , entonces s es un G -ISDR-mapeo.

Demostración. Debemos construir una G -función $\tilde{D} : \tilde{E} \times [0, \infty) \rightarrow \tilde{E}$. Podemos considerar una extensión G -fibrante $i : E \hookrightarrow \hat{E}$ de E para la cual exista una G -deformación infinita D de \hat{E} sobre E (ver por ejemplo [15, Theorem 3.6]). Como \hat{E} y \tilde{E} son G -fibrantes y s e i son G -SSDR-mapeos entonces, existen G -funciones $\varphi : \tilde{E} \rightarrow \hat{E}$ y $\psi : \hat{E} \rightarrow \tilde{E}$ tales que $\varphi \circ s = i$ y $\psi \circ i = s$, respectivamente.

Como $s : E \hookrightarrow \tilde{E}$ es un G -SSDR-mapeo, el encaje $\hat{s} : \tilde{E} \times \{0, 1\} \cup E \times I \hookrightarrow \tilde{E} \times I$ es también un G -SSDR-mapeo por el Corolario 1.4.7(2). Ahora definimos la G -función $h : \tilde{E} \times \{0, 1\} \cup E \times I \rightarrow \tilde{E}$ por $h(\tilde{x}, 0) = id_{\tilde{E}}$, $h(\tilde{x}, 1) =$

$\psi \circ \varphi(\tilde{x})$ y $h(x, t) = s(x)$ para cada $\tilde{x} \in \tilde{E}$, $x \in E$ y $t \in I$, entonces tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} \times \{0, 1\} \cup E \times I & \xrightarrow{h} & \tilde{E} \\ \downarrow \hat{s} & & \\ \tilde{E} \times I & & \end{array}$$

Como \hat{s} es G -SSDR-mapeo y \tilde{E} es G -fibrante, existe una G -homotopía $H: \tilde{E} \times I \rightarrow \tilde{E}$ tal que $H \circ \hat{s} = h$. Por lo tanto, tenemos

$$H: id_{\tilde{E}} \simeq \psi \circ \varphi \quad \text{rel. } s(E). \quad (2.1.1)$$

Ahora definimos $\tilde{D}: \tilde{E} \times [0, \infty) \rightarrow \tilde{E}$ como $\tilde{D}(\tilde{x}, t) = H(\tilde{x}, t)$ para $t \in [0, 1]$ y $\tilde{D}(\tilde{x}, t) = \psi \circ D(\varphi(\tilde{x}), t - 1)$ para $t \in [1, \infty)$.

Claramente \tilde{D} está bien definida:

$$\tilde{D}(\tilde{x}, 1) = H(\tilde{x}, 1) = \psi \circ \varphi(\tilde{x}) \quad \text{y} \quad \tilde{D}(\tilde{x}, 1) = \psi \circ D(\varphi(\tilde{x}), 0) = \psi \circ \varphi(\tilde{x}).$$

Finalmente, verifiquemos que se satisfacen las condiciones de la Definición 2.1.3:

1. $\tilde{D}(\tilde{x}, 0) = H(\tilde{x}, 0) = id_{\tilde{E}}(\tilde{x}) = \tilde{x}$, para todo $\tilde{x} \in \tilde{E}$.
2. Sea V una vecindad de E en \tilde{E} , entonces $\psi^{-1}(V)$ es una vecindad de E en \hat{E} , como $i: E \rightarrow \hat{E}$ es un G -ISDR-mapeo entonces existe $t_0 \geq 0$ tal que $D(\hat{E} \times [0, \infty)) \subset \psi^{-1}(V)$.

Sea $t_1 = t_0 + 1$, entonces para todo $\tilde{x} \in \tilde{E}$ y $t \geq t_1$

$$\tilde{D}(\tilde{x}, t) = \psi \circ D(\varphi(\tilde{x}), t - 1) \subseteq \psi(\psi^{-1}(V)) = V.$$

3. Si $a \in E$ y $t \in [0, 1]$, entonces $\tilde{D}(a, t) = H(a, t) = a$ y si $a \in E$ y $t \in [1, \infty)$, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{D}(a, t) &= \psi \circ D(\varphi(a), t - 1) = \psi \circ D(\varphi(s(a)), t - 1) \\ &= \psi \circ D(i(a), t - 1) = \psi \circ i(a) = s(a) = a. \end{aligned}$$

□

Recordemos que dos espacios X y Y son G -homotópicamente equivalentes, si existen G -funciones $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f \simeq id_X$ y $f \circ g \simeq id_Y$. Así, en vista de la expresión (2.1.1) tenemos la siguiente

Observación 2.1.5. *Cualesquiera dos extensiones G -fibrantes de un G -espacio E son G -homotópicamente equivalentes.*

2.2. Propiedades de G -fibraciones y G -fibrantes

En virtud del Teorema 1.4.6(c) toda G -fibración de espacios G -ANR es una G -fibración fuerte.

De hecho tenemos una afirmación más general probada en [11] (ver también [17, Example (2.2)] para el caso no equivariante).

Proposición 2.2.1. ([11, Proposition A.2]) *Sean E y B espacios G -fibrantes. Cada G -fibración $p: E \rightarrow B$ es una G -fibración fuerte.*

Proposición 2.2.2. *Si $p: E \rightarrow B$ es una G -fibración fuerte tal que B es G -fibrante, entonces E es un espacio G -fibrante.*

Demostración. Sea $s: A \hookrightarrow X$ un G -SSDR-mapeo y sea $f: A \rightarrow E$ una función G -equivariante. Deseamos encontrar una G -función $F: X \rightarrow E$ tal que $F \circ s = f$. Como B es un G -fibrante existe $F': X \rightarrow B$ tal que $F' \circ s = p \circ f$. Ahora, como p es una G -fibración fuerte, existe una función G -equivariante $F: X \rightarrow E$ tal que $p \circ F = F'$ y $F \circ s = f$. □

La siguiente proposición afirma que el límite inverso de una sucesión inversa de espacios G -ANR enlazados por G -fibraciones (fuertes), es un G -fibrante. Al mismo tiempo, las proyecciones del límite son G -fibraciones.

Proposición 2.2.3. *Sea $\mathbf{E} = \{E_i, q_i^j\}$ una sucesión inversa de G -espacios y G -funciones y sea E su límite inverso con las proyecciones $q_i: E \rightarrow E_i$. Si para cada $i \in \mathbb{N}$, $q_i^{i+1}: E_{i+1} \rightarrow E_i$ es una G -fibración (fuerte) de espacios G -ANR, entonces E es un espacio G -fibrante y todas las proyecciones q_i son G -fibraciones (fuertes).*

Demostración. Ya que cada G -fibración entre espacios G -ANR es una G -fibración fuerte (y por otra parte cada G -fibración fuerte es una G -fibración) consideremos sólo el caso de G -fibraciones fuertes.

Dado $i \in \mathbb{N}$, tenemos que probar que para todo diagrama conmutativo de G -funciones

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ s \downarrow & & \downarrow q_i \\ X & \xrightarrow{F_i} & E_i \end{array}$$

donde s es un G -SSDR-mapeo, existe una G -función $F: X \rightarrow E$ que preserva la conmutatividad. Vamos a construir por inducción, las G -funciones $F_j: X \rightarrow E_j$ para $j > i$ como sigue:

si F_j ya está encontrada, definamos F_{j+1} de tal manera que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{q_{j+1} \circ f} & E_{j+1} \\ s \downarrow & \nearrow F_{j+1} & \downarrow q_j^{j+1} \\ X & \xrightarrow{F_j} & E_j \end{array}$$

F_{j+1} existe ya que q_j^{j+1} es una G -fibración fuerte. La familia $\{F_j\}_{j \geq i}$ determina unívocamente una G -función $F: X \rightarrow E$ tal que $q_j \circ F = F_j$ para cada $j \geq i$, en particular, $q_i \circ F = F_i$. Por otro lado, como $q_j \circ f = F_j \circ s = q_j \circ (F \circ s)$ para cada $j \geq i$ tenemos $f = F \circ s$. Así q_i es una G -fibración fuerte.

Por último, ya que E_0 es un G -ANR y por tanto es G -fibrante, entonces E es G -fibrante en virtud de la Proposición 2.2.2. \square

Proposición 2.2.4. ([16, Proposition 2.4]) *Sea*

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

un diagrama pull-back de G -funciones tal que p es una G -fibración (fuerte). Entonces p' también es una G -fibración (fuerte). Además

- (a) *Si E , B y B' son G -fibrantes entonces E' también lo es.*
- (b) *Si E , B y B' son G -ANEs entonces E' también lo es.*

Para un subgrupo normal cerrado N de un grupo G , cada G/N -espacio X puede considerarse como un G -espacio; si $*$ es la acción de G/N en X , entonces la acción \cdot de G en X se define por $g \cdot x = gN * x$. En consecuencia cada G/N -función entre G/N -espacios siempre puede considerarse como una G -función. Por lo tanto tenemos un functor $(G/N)\text{-}\mathcal{M} \rightarrow G\text{-}\mathcal{M}$. Este functor es adjunto derecho del functor N -orbital $-/N: G\text{-}\mathcal{M} \rightarrow (G/N)\text{-}\mathcal{M}$.

Proposición 2.2.5. *Sea N un subgrupo cerrado de un grupo compacto G . Entonces:*

- (a) *Si E es un G/N -ANR, entonces E es un G -ANR.*
- (b) *Si $p: E \rightarrow B$ es una G/N -fibración, entonces p es también una G -fibración.*
- (c) *Si $s: A \rightarrow X$ es un G -SSDR-mapeo, entonces el mapeo inducido*

$$s/N: A/N \rightarrow X/N$$

es un G/N -SSDR-mapeo.

(d) Si E es un espacio G/N -fibrante, entonces E es un espacio G -fibrante.

Demostración. Sea $p: E \rightarrow B$ una G/N -función y sea $s: A \hookrightarrow X$ un G -encaje cerrado. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de G -funciones

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{\quad} & E \\
 & \searrow^{q_A} & & \nearrow_{f/N} & \\
 & & A/N & & \\
 & & \downarrow_{s/N} & & \\
 & & X/N & & \\
 & \nearrow_{q_X} & & \searrow_{F/N} & \\
 X & \xrightarrow{F} & & \xrightarrow{\quad} & B
 \end{array}$$

- (a). Como N actúa trivialmente en E , entonces $E = E/N$ y por lo tanto f/N es la función inducida por f , de modo que s/N y f/N son G/N -funciones. Además consideraremos cada G -ANR-espacio como un G -ANE-espacio. Como E es un G/N -ANE-espacio, entonces para alguna vecindad G/N -invariante U de A/N en X/N , existe una G/N -función $\bar{f}: U \rightarrow E$ tal que $\bar{f}|_{A/N} = f/N$.

Sea $V = q_X^{-1}(U)$, afirmamos que V es una vecindad G -invariante de A en X . En efecto, si $a \in A$ entonces $q_X(a) = q_A(a) = N(a) \in A/N \subset U$, de modo que $a \in q_X^{-1}(U) = V$ y tenemos que $A \subset V$. Además para $g \in G$ y $v \in V$

$$\begin{aligned}
 q_X(gv) &= gq_X(v) = gu, \quad \text{para algún } u \in U \\
 &= gN * u \in U
 \end{aligned}$$

esto último se debe a que U es G/N -invariante. Por lo tanto $gv \in q_X^{-1}(U) = V$.

Por otro lado $(\bar{f} \circ q_X |_V): V \rightarrow E$ es una G -extensión de f , debido a que para cada $a \in A$

$$\begin{aligned} (\bar{f} \circ q_X |_V)(a) &= \bar{f}(q_X |_V(a)) = \bar{f}(N(a)) \\ &= f/N(N(a)) = N(f(a)) = f(a). \end{aligned}$$

Esto significa que E es un G -ANE.

(b). Sea $X = A \times I$ y $s(a) = (a, 0)$. Obviamente, $(A \times I)/N$ puede identificarse con $(A/N) \times I$. Si p es una G/N -fibración, entonces existe un relleno $\bar{F}: (A/N) \times I \rightarrow E$, este es una G/N -función que puede considerarse como G -función. En consecuencia, la G -función $\tilde{F}: A \times I \rightarrow E$, dada por $\tilde{F} = \bar{F} \circ q_X$, es también un relleno del diagrama. Esto prueba que p es una G -fibración.

(c). De acuerdo al Teorema 1.4.6, para probar que s/N es un G/N -SSDR-mapeo, debemos probar que existe un relleno $\bar{F}: X/N \rightarrow E$, bajo la hipótesis de que p es una G/N -fibración de G/N -ANR's espacios.

Por (a) y (b) p es también una G -fibración de G -ANR's y, como s es un G -SSDR-mapeo, existe un relleno $\tilde{F}: X \rightarrow E$ tal que $\tilde{F} \circ s = f$ y $p \circ \tilde{F} = F$. Esta G -función induce una función $\bar{F}: X/N \rightarrow E/N$ tal que $\tilde{F} = \bar{F} \circ q_X$. De modo que \bar{F} es el relleno deseado, pues

$$\bar{F} \circ s/N \circ q_A = \bar{F} \circ q_X \circ s = \tilde{F} \circ s = f = f/N \circ q_A$$

y

$$p \circ \bar{F} \circ q_X = p \circ \tilde{F} = F = F/N \circ q_X,$$

por lo tanto $\bar{F} \circ s/N = f/N$ y $p \circ \bar{F} = F/N$.

(d). Para probar que E es un espacio G -fibrante, supongamos que $s: \hookrightarrow X$ es un G -SSDR-mapeo, entonces por (c) s/N es un G/N -SSDR-

mapeo. Ahora como E es un G/N -fibrante entonces existe una G/N -función $\bar{F}: X/N \rightarrow E$ tal que $\bar{F} \circ s/N = f/N$. Evidentemente \bar{F} puede considerarse como una G -función, con lo cual definimos la G -función $\tilde{F}: X \rightarrow E$ como $\tilde{F} = \bar{F} \circ q_X$, y tenemos que

$$\tilde{F} \circ s = \bar{F} \circ q_X \circ s = \bar{F} \circ s/N \circ q_A = f/N \circ q_A = f$$

por lo tanto E es un espacio G -fibrante. \square

Proposición 2.2.6. [7, Proposición 4.1] *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto G . Entonces:*

- (a) *Si E es G -ANR y G/H es metrizable, entonces E es H -ANR.*
- (b) *Si $p: E \rightarrow B$ es una G -fibración, entonces p es una H -fibración.*
- (c) *Si $s: A \hookrightarrow X$ es un H -SSDR-mapeo y G/H es metrizable, entonces la G -función inducida*

$$G \times_H S: G \times_H A \rightarrow G \times_H X$$

es un G -SSDR-mapeo.

- (d) *Si E es un espacio G -fibrante y G/H es metrizable, entonces E es H -fibrante.*

La condición “ G/H es metrizable” se ha adicionado en las afirmaciones (a), (c) y (d) con el propósito de que el G -espacio $G \times_H X$ sea metrizable, cuando el H -espacio X es metrizable (ver [3, Proposition 3]). De este modo podemos tener un funtor bien definido $G \times_H - : \mathcal{M}_H \rightarrow \mathcal{M}_G$. Observemos que esta restricción no es necesaria para (b).

Proposición 2.2.7. *Sea K un subgrupo normal cerrado de un grupo G y sea $p: E \rightarrow B$ una G -fibración. Entonces la función inducida $p/K: E/K \rightarrow$*

B/K es una G/K -fibración si la proyección K -orbital $\pi_B: B \rightarrow B/K$ es una G -fibración.

Demostración. Dado el diagrama conmutativo de G/K -funciones

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & E/K \\
 \downarrow \partial_0 & & \downarrow p/K \\
 X \times I & \xrightarrow{F} & B/K
 \end{array} \quad (2.2.1)$$

debemos probar que existe una G/K -homotopía $\widehat{F}: X \times I \rightarrow E/K$, tal que $\widehat{F} \circ \partial_0 = f$ y $p/K \circ \widehat{F} = F$.

Consideremos el siguiente diagrama de G -funciones

$$\begin{array}{ccccc}
 & & E & \xleftarrow{f'} & \widetilde{X} \\
 & & \downarrow p & & \downarrow \widetilde{\partial}_0 \\
 B & \xleftarrow{F'} & \widetilde{X} \times I & & \downarrow \pi_{\widetilde{X}} \\
 \downarrow \pi_B & & \downarrow \pi_E & & \downarrow \pi_{\widetilde{X} \times id_I} \\
 & & E/K & \xleftarrow{f} & X \\
 & & \downarrow p/K & & \downarrow \partial_0 \\
 B/K & \xleftarrow{F} & X \times I & &
 \end{array} \quad (2.2.2)$$

donde:

- (a) \widetilde{X} junto con las proyecciones $f': \widetilde{X} \rightarrow E$ y $\pi_{\widetilde{X}}: \widetilde{X} \rightarrow X$ es el pull-back de la triada $X \xrightarrow{f} E/K \xleftarrow{\pi_E} E$,
- (b) las funciones $\partial_0: \widetilde{X} \hookrightarrow \widetilde{X} \times I$ y $(\pi_{\widetilde{X}} \times id_I): \widetilde{X} \times I \rightarrow X \times I$ están definidas por $\widetilde{\partial}_0(\widetilde{x}) = (\widetilde{x}, 0)$ y $\pi_{\widetilde{X}} \times id_I(\widetilde{x}, t) = (\pi_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}), t)$, respectivamente,
- (c) π_E y π_B son claramente las proyecciones K -orbitales,

(d) la G -homotopía $F' : \tilde{X} \times I \rightarrow B$ es un relleno del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X} & \xrightarrow{p \circ f'} & B \\
 \tilde{\partial}_0 \downarrow & & \downarrow \pi_B \\
 \tilde{X} \times I & \xrightarrow{F \circ (\pi_{\tilde{X}} \times id_I)} & B/G
 \end{array} \quad (2.2.3)$$

Este relleno existe ya que π_B es una G -fibración.

Es fácil ver, usando (a)-(c), que el diagrama (2.2.3) es conmutativo ya que

$$\pi_B \circ p \circ f' = p/K \circ \pi_E \circ f' = p/K \circ f \circ \pi_{\tilde{X}} = F \circ \partial_0 \circ \pi_{\tilde{X}} = F \circ (\pi_{\tilde{X}} \times id_I) \circ \tilde{\partial}_0.$$

Como F' es un relleno del diagrama (2.2.3), tenemos $F' \circ \tilde{\partial}_0 = p \circ f'$ y $\pi_B \circ F' = F \circ (\pi_{\tilde{X}} \times id_I)$, lo que implica la conmutatividad del diagrama (2.2.2). Notemos que en este diagrama la proyección $\pi_{\tilde{X}}$ es, en efecto, una proyección K -orbital en virtud de la Proposición 1.2.7 (ya que está inducida por la proyección K -orbital π_E en el diagrama pull-back). Por lo tanto, la función $\pi_{\tilde{X}} \times id_I$ es también una proyección K -orbital. Así, todas las flechas verticales en el diagrama conmutativo (2.2.2) representan proyecciones K -orbitales y, por consiguiente, podemos decir que el cuadrado inferior de dicho diagrama está obtenido del cuadrado superior al aplicar el funtor de proyección K -orbital; en particular, $f = f'/K$, $F = F'/K$ y $\partial_0 = \tilde{\partial}_0/K$.

Como p es una G -fibración, existe una G -homotopía $\tilde{F} : \tilde{X} \times I \rightarrow E$ tal que $p \circ \tilde{F} = F'$ y $\tilde{F} \circ \tilde{\partial}_0 = f'$. De ello, concluimos que $p/K \circ \tilde{F}/K = F'/K$ y $\tilde{F}/K \circ \tilde{\partial}_0/K = f'/K$, o bien, $p/K \circ \tilde{F}/K = F$ y $\tilde{F}/K \circ \partial_0 = f$. En otras palabras, la G/K -función $\hat{F} = \tilde{F}/K : X \times I \rightarrow E/K$ es el relleno deseado del diagrama (2.2.1). \square

2.3. G -ANR-resoluciones

De especial importancia para nuestro trabajo, es el concepto de G -ANR-resolución de un G -espacio compacto. Este concepto es la base de la prueba de la existencia de extensiones G -fibrantes.

Definición 2.3.1. Sea E un G -espacio compacto y sea $\mathbf{E} = \{E_i, q_i^j\}$ una sucesión inversa de G -espacios y G -funciones. Un cono $\mathbf{q} = \{q_i\} : E \rightarrow \mathbf{E}$ (es decir, una familia $\{q_i : E \rightarrow E_i\}$ tal que $q_i^j \circ q^j = q^i$, para $j \geq i$) se llama **G -resolución de E** si:

$$(i) (E, \{q_i\}) = \varprojlim \mathbf{E},$$

(ii) la familia de proyecciones $\{q_i : E \rightarrow E_i\}$ satisface la siguiente condición: para cada i y cualquier vecindad abierta invariante U de $q_i(E)$ en E_i , existe $j \geq i$ tal que $q_i^j(E_j) \subseteq U$.

Cuando todos los G -espacios E_i son G -ANR's, se dirá que $\mathbf{q} : E \rightarrow \mathbf{E}$ es una **G -ANR-resolución de E** .

Veremos que las G -ANR-resoluciones existen para G -espacios compactos metrizable; para ello probaremos la siguiente proposición.

Proposición 2.3.2. Sea E un subconjunto compacto invariante de un G -espacio metrizable M , donde G es un grupo compacto de Hausdorff. Entonces E tiene una base numerable de vecindades $\{W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ abiertas e invariantes en M tales que $W_{i+1} \subseteq W_i$, para cada i .

En otras palabras, el cono $\{u_i\} : E \rightarrow \{W_i, u_i^j\}$ es una G -resolución, donde $u_i : E \hookrightarrow W_i$ y $u_i^j : W_j \hookrightarrow W_i$, para $j \geq i$, son inclusiones.

Demostración. Sea d una métrica invariante en el G -espacio M compatible con su topología; tal métrica existe ya que G es un grupo compacto de Hausdorff (ver [21, Teorema 5.22]). Recordemos que d satisface, por definición, la

siguiente condición: $d(gx, gy) = d(x, y)$ para cada par de puntos $x, y \in M$ y todo $g \in G$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $W_n = \{x \in M \mid d(x, E) < 1/n\}$, en donde $d(x, E) = \inf\{d(x, y) \mid y \in E\}$. Es claro que $\{W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ forma una familia numerable de vecindades abiertas de E en M tales que $W_{i+1} \subseteq W_i$. Como la métrica en M es invariante, W_i es G -invariante para cada i . En efecto, para $g \in G$ y $x \in W_i$, tenemos

$$d(gx, E) = \inf_{y \in E} d(gx, y) = \inf_{y \in E} d(x, g^{-1}y) = d(x, E) < 1/n$$

por lo tanto $gx \in W_i$ para cada i .

Resta probar que para cada vecindad abierta U de E en M , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $W_n \subset U$. Como E es compacto métrico, para la cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U\}$ de E existe $\varepsilon > 0$ (el número de Lebesgue de \mathcal{U}) tal que $B(x, \varepsilon) = \{y \in M \mid d(y, x) < \varepsilon\} \subset U$, para todo punto $x \in E$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$. Ahora, si $y \in W_n$, tenemos $d(y, z) < 1/n$ para algún punto $z \in E$. Por consiguiente, $y \in B(z, 1/n) \subset B(z, \varepsilon) \subset U$ y concluimos que $W_n \subset U$.

Claramente, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} W_i = E$ (si $x \notin E$, entonces $W_i \subset M \setminus \{x\}$ para algún i). Por otro lado, podemos considerar $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} W_i$ como el límite inverso de $\{W_i, u_i^j\}$ de modo que el cono $\{u_i : E \hookrightarrow W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ satisface obviamente la propiedad universal del límite inverso. Así, $\varprojlim \{W_i, u_i^j\} = (E, \{u_i\})$. La condición (ii) de la Definición 2.3.1 se cumple por la misma definición de una base de vecindades. \square

Si en la Proposición 2.3.2, M es un G -ANR, entonces todos los G -subconjuntos W_i son también ANR's ya que son abiertos. Se sabe que cada G -espacio compacto metrizable puede considerarse como un G -subconjunto cerrado de un G -AR-espacio; con ello hemos probado el siguiente resultado (ver también [5, Theorem 1]).

Teorema 2.3.3. *Sea G un grupo compacto de Hausdorff, entonces cada G -espacio compacto metrizable admite una G -ANR-resolución.*

En realidad, en nuestro trabajo estamos interesados en la descripción de resoluciones especiales de G -espacios libres. En la demostración del Teorema 2.3.5, el resultado principal de esta sección, usaremos el siguiente lema simple.

Lema 2.3.4. *Si G es un grupo compacto de Lie, entonces cualquier G -espacio metrizable libre X , puede considerarse como un subconjunto cerrado invariante de algún G -ANR-espacio libre.*

Demostración. El G -espacio X , por ser metrizable, puede considerarse como un subespacio cerrado e invariante de algún G -AR-espacio M (ver [1, Theorem 13]). Como G es un grupo compacto de Lie, por el Teorema 1.6.6 existe un tubo alrededor de cada órbita del G -espacio M . En particular, para cada $x \in X$, la órbita $G(x)$ es un G -retracto de alguna vecindad abierta e invariante U_x de $G(x)$ en M , y por lo tanto el G -espacio U_x es libre ya que $G(x)$ lo es.

Sea $U = \bigcup_{x \in X} U_x$. Entonces U es una vecindad invariante de X en M y la acción de G en U es libre, más aún, ya que U es un subconjunto abierto de un G -AR, entonces es un G -ANR-espacio. Con esto se prueba el lema. \square

Teorema 2.3.5. *Sea G un grupo compacto metrizable y sea $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ cualquier sucesión pro-Lie de subgrupos de G . Si un G -espacio compacto metrizable E es libre, entonces E admite una G -ANR-resolución $\{q_i\} : E \rightarrow \mathbf{E}$, tal que en $\mathbf{E} = \{E_i, q_i^j\}$ cada E_i es un G/N_i -espacio libre.*

Demostración. De acuerdo con la Proposición 1.2.5 podemos representar al espacio E como

$$(E, \{p_i\}) = \varprojlim \{E/N_i, p_i^j\}$$

donde N_i es un subgrupo normal cerrado de G y G/N_i es un grupo compacto de Lie para cada i . Además, como el G -espacio E es libre, cada E/N_i es un G/N_i -espacio libre. Por el Lema 2.3.4, E/N_i puede considerarse como un subconjunto invariante y cerrado de algún G/N_i -ANR-espacio libre U_i el cual, por la Proposición 2.2.5, es claramente un G -ANR-espacio.

Para cada i encontramos una vecindad invariante y abierta V_i de E/N_i en U_i por inducción como sigue: Sea $V_0 = U_0$ y supongamos que V_i está dada. Como V_i es abierto en el G -ANR-espacio U_i , es también un G -ANR (y por lo tanto un G -ANE), de modo que para la G -función

$$E/N_{i+1} \xrightarrow{p_i^{i+1}} E/N_i \hookrightarrow V_i$$

existe una G -extensión $f_i^{i+1}: U \rightarrow V_i$ en una vecindad invariante U de E/N_{i+1} en U_{i+1} . En este caso hacemos $V_{i+1} = U$. De este modo obtenemos la sucesión inversa $\{V_i, f_i^j\}$ con $f_i^j = f_i^{i+1} \circ f_{i+1}^{i+2} \circ \dots \circ f_{j-1}^j$ para $j > i$ y $f_i^i = id_{V_i}$.

Usando la Proposición 2.3.2, obtenemos una colección $\{W_i^{(j)}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ de G -espacios tales que para cada i , la subfamilia $\{W_i^{(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una base de vecindades abiertas e invariantes de E/N_i en V_i , y además $W_i^{(j+1)} \subseteq W_i^{(j)}$ para todo j .

Ahora elegimos una nueva colección de G -espacios $\{Y_i^{(j)}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ por inducción como sigue: Sea $Y_0^{(j)} = W_0^{(j)}$ para todo j , es decir, $\{Y_0^{(j)}\}_{j \in \mathbb{N}} = \{W_0^{(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$. Ahora supongamos que para $i \in \mathbb{N}$, la familia $\{Y_i^{(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ ya está dada. Entonces definimos la familia $\{Y_{i+1}^{(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ haciendo

$$Y_{i+1}^{(j)} = (f_i^{i+1})^{-1}(Y_i^{(j)}) \cap W_{i+1}^{(j)}$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. Así obtenemos la familia $\{Y_i^{(j)}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ de G -espacios que satisface las siguientes condiciones:

(1) para cada $i \in \mathbb{N}$, $\{Y_i^{(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una base vecindades de E/N_i en V_i tal que $Y_i^{(j+1)} \subseteq Y_i^{(j)}$,

(2) $f_i^{i+1}(Y_{i+1}^{(j)}) \subseteq Y_i^{(j)}$ para todos $i, j \in \mathbb{N}$.

Además, cada $Y_i^{(j)}$ como G/N_i -espacio es libre ya que es un subconjunto invariante del G/N_i -espacio libre V_i . Notemos también que de la condición (2) tenemos $f_i^k(Y_k^{(j)}) = f_i^{k-1}(f_{k-1}^k(Y_k^{(j)})) \subseteq f_i^{k-1}(Y_{k-1}^{(j)})$, para $k > i$. Por consiguiente,

$$f_i^k(Y_k^{(j)}) \subseteq f_i^{k-1}(Y_{k-1}^{(j)}) \subseteq f_i^{k-2}(Y_{k-2}^{(j)}) \subseteq \dots \subseteq f_i^i(Y_i^{(j)}) = Y_i^{(j)},$$

y en particular,

$$f_i^j(Y_j^{(j)}) \subseteq Y_i^{(j)} \subseteq Y_i^{(i)}, \quad (2.3.1)$$

para $j \geq i$.

Ahora podemos construir una nueva sucesión inversa $\mathbf{E} = \{E_i, q_i^j\}$ de G -espacios y G -funciones. Para ello, hacemos $E_i = Y_i^{(i)}$, para cada i , y definimos $q_i^j : E_j \rightarrow E_i$ por $q_i^j(z) = f_i^j(z)$, para $j \geq i$ y $z \in E_i$, tomando en cuenta que $f_i^j(E_j) \subseteq E_i$ en virtud de (2.3.1). Sea $(Z, \{q_i\}) = \varprojlim \{E_i, q_i^j\}$ y veamos que de hecho $Z = E$.

Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} E_0 & \xleftarrow{q_0^1} & E_1 & \xleftarrow{\quad} & \dots & \xleftarrow{\quad} & E_i & \xleftarrow{q_i^{i+1}} & E_{i+1} & \xleftarrow{\quad} & \dots \\ \uparrow v_0 & & \uparrow v_1 & & & & \uparrow v_i & & \uparrow v_{i+1} & & \\ E/N_0 & \xleftarrow{p_0^1} & E/N_1 & \xleftarrow{\quad} & \dots & \xleftarrow{\quad} & E/N_i & \xleftarrow{p_i^{i+1}} & E/N_{i+1} & \xleftarrow{\quad} & \dots \end{array} \quad (2.3.2)$$

donde $v_i : E/N_i \hookrightarrow E_i$ son inclusiones. Este diagrama es conmutativo según la definición de f_i^{i+1} y, por consiguiente, de q_i^{i+1} . La familia $\{v_i \circ p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es un cono sobre $\{E_i, q_i^j\}$ y, por la propiedad universal del límite inverso, induce una G -función única $v : E \rightarrow Z$ tal que $q_i \circ v = v_i \circ p_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Como todas las funciones v_i son inyectivas, la función v es inyectiva también. En efecto, si $v(y) = v(y')$, para $y, y' \in E$, entonces

$$p_i(y) = v_i(p_i(y)) = q_i(v(y)) = q_i(v(y')) = v_i(p_i(y')) = p_i(y')$$

para cada i , lo que es posible sólo en el caso $y = y'$.

Veamos ahora que la función v es sobreyectiva. Sea $z \in Z$ y supongamos que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $z_i = q_i(z) \notin v_i(E/N_i) = E/N_i$. Recordemos que $\{Y_i^{(j)}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ es una base vecindades de E/N_i en V_i de modo que $z_i \notin Y_i^{(j)}$ para algún $j > i$. Pero por otro lado, $z_i = q_i^j(q_j(z)) \in q_i^j(E_j) = f_i^j(Y_j^{(j)}) \subseteq Y_i^{(j)}$, según (2.3.1); lo cual es una contradicción. Resulta que para cada i , $z_i = q_i(z) \in E/N_i$. Claramente,

$$p_i^j(z_j) = v_i(p_i^j(z_j)) = q_i^j(v_j(z_j)) = q_i^j(z_j) = q_i(z_i) = z_i$$

es decir, $p_i^j(z_j) = z_i$ cuando $j \geq i$. Por lo tanto, la sucesión $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ determina un único punto $y \in E$ tal que $p_i(y) = z_i$ para todo i . Por consiguiente, $q_i(v(y)) = v_i(p_i(y)) = v_i(z_i) = z_i = q_i(z)$ para todo i , lo que implica que $v(y) = z$. Con ello concluimos que la G -función $v : E \rightarrow Z$ es sobreyectiva y, por lo anterior, es biyectiva. De hecho, v es un homeomorfismo y, por tanto, un G -homeomorfismo ya que E es compacto. Por medio de este G -homeomorfismo podemos identificar E con Z (es decir, asumir que $y \equiv v(y)$) para todo $y \in E$ y escribir $E = Z$.

Finalmente veremos que $\{q_i\} : E \rightarrow \mathbf{E}$ es una G -ANR-resolución de E . Ya hemos probado que $(E, \{q_i\}) = \varprojlim \mathbf{E}$. Ahora supongamos que están dados i y una vecindad abierta e invariante U de $q_i(E)$ en E_i . Se cumple que $q_i(E) = E/N_i$ de modo que $q_i(E) = q_i(v(E)) = v_i(p_i(E)) = v_i(E/N_i) = E/N_i$. Ya que U es de hecho una vecindad abierta de E/N_i en V_i , existe $j \geq i$ tal que $Y_i^{(j)} \subseteq U$. De la expresión (2.3.1) tenemos $q_i^j(E_j) = f_i^j(Y_j^{(j)}) \subseteq Y_i^{(j)} \subseteq U$, con lo cual $\{q_i\}$ satisface la condición (ii) de la Definición 2.3.1.

Por último para cada i , E_i es un G -ANR y libre como un G/N_i -espacio por ser un subconjunto invariante y abierto de V_i . \square

2.4. Existencia de extensiones G -fibrantes

Sea $\mathbf{E} = \{E_i, q_i^j\}$ una sucesión inversa de G -espacios. En vista del Teorema 1.5.4, podemos construir inductivamente un diagrama conmutativo de la siguiente manera: En primer lugar hacemos $\tilde{E}_0 = E_0$ y $s_0 = id_{E_0}$, enseguida factorizamos q_0^1 con lo que obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & coCyl(q_0^1) & \\
 \tilde{q}_0^1 \swarrow & & \searrow s_{E_1} \\
 E_0 & \xleftarrow{q_0^1} & E_1
 \end{array} \tag{2.4.1}$$

donde \tilde{q}_0^1 es un G -fibración y s_{E_1} es un G - SDR -mapeo. Ahora hacemos $\tilde{E}_1 = coCyl(q_0^1)$ y $s_1 = s_{E_1}$, y observamos que debido al diagrama (2.4.1) el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{E}_0 & \xleftarrow{\tilde{q}_0^1} & \tilde{E}_1 \\
 \uparrow s_0=id_{E_0} & & \uparrow s_1 \\
 E_0 & \xleftarrow{q_0^1} & E_1
 \end{array}$$

es conmutativo. Ahora consideramos la G -función $s_1 \circ q_1^2: E_2 \rightarrow \tilde{E}_1$ y nuevamente la factorizamos para obtener el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & coCyl(s_1 \circ q_1^2) & \\
 \tilde{q}_1^2 \swarrow & & \searrow s_{E_2} \\
 \tilde{E}_1 & \xleftarrow{s_1 \circ q_1^2} & E_2
 \end{array} \tag{2.4.2}$$

donde \tilde{q}_1^2 es una G -fibración y s_{E_2} es un G - SDR -mapeo. Entonces al renombrar como $\tilde{E}_2 = coCyl(s_1 \circ q_1^2)$ y $s_2 = s_{E_2}$, por el diagrama (2.4.2) tenemos nuevamente un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{E}_1 & \xleftarrow{\tilde{q}_1^2} & \tilde{E}_2 \\
 \uparrow s_1 & & \uparrow s_2 \\
 E_1 & \xleftarrow{q_1^2} & E_2
 \end{array}$$

En general, supongamos que están dados \tilde{E}_i y $s_i: E_i \rightarrow \tilde{E}_i$, entonces tomamos la G -función $s_i \circ q_i^{i+1}: E_{i+1} \rightarrow \tilde{E}_i$ y la factorizamos como $s_i \circ q_i^{i+1} = \tilde{q}_i^{i+1} \circ s_{E_{i+1}}$, donde $s_{E_{i+1}}: E_{i+1} \rightarrow \text{coCyl}(s_i \circ q_i^{i+1})$ es un G -SDR-mapeo y

$$\tilde{q}_i^{i+1}: \text{coCyl}(s_i \circ q_i^{i+1}) \rightarrow \tilde{E}_i$$

es una G -fibración.

Si hacemos $\tilde{E}_{i+1} = \text{coCyl}(s_i \circ q_i^{i+1})$ y $s_{i+1} = s_{E_{i+1}}$ entonces tenemos que $s_i \circ q_i^{i+1} = \tilde{q}_i^{i+1} \circ s_{i+1}$. Así, hemos construido el diagrama conmutativo de G -funciones

$$\begin{array}{ccccccccccc} \tilde{E}_0 & \xleftarrow{\tilde{q}_0^1} & \tilde{E}_1 & \xleftarrow{\tilde{q}_1^2} & \tilde{E}_2 & \xleftarrow{\dots} & \dots & \xleftarrow{\dots} & \tilde{E}_i & \xleftarrow{\tilde{q}_i^{i+1}} & \tilde{E}_{i+1} & \xleftarrow{\dots} & \dots \\ \uparrow s_0 = id_{E_0} & & \uparrow s_1 & & \uparrow s_2 & & & & \uparrow s_i & & \uparrow s_{i+1} & & \\ E_0 & \xleftarrow{q_0^1} & E_1 & \xleftarrow{q_1^2} & E_2 & \xleftarrow{\dots} & \dots & \xleftarrow{\dots} & E_i & \xleftarrow{q_i^{i+1}} & E_{i+1} & \xleftarrow{\dots} & \dots \end{array}$$

donde \tilde{q}_i^{i+1} es una G -fibración y s_i es un G -SDR-mapeo para cada i .

Denotemos por el símbolo $\mathcal{F}(\mathbf{E})$ el límite inverso de la sucesión inversa $\{\tilde{E}_i, \tilde{q}_i^j\}$, y sea $\{\tilde{q}_i: \mathcal{F}(\mathbf{E}) \rightarrow \tilde{E}_i\}$ la familia de proyecciones correspondientes, es decir,

$$(\mathcal{F}(\mathbf{E}), \{\tilde{q}_i\}) = \varprojlim \{\tilde{E}_i, \tilde{q}_i^j\}.$$

Ahora, sea $(E, \mathbf{q}) = \varprojlim \mathbf{E}$ donde $\mathbf{q} = \{q_i: E \rightarrow E_i\}$. Notemos que la familia $\{s_i \circ q_i: E \rightarrow \tilde{E}_i\}$ es un cono sobre $\{\tilde{E}_i, \tilde{q}_i^j\}$ y, por la propiedad universal del límite inverso, existe una única G -función $s_{\mathbf{q}}: E \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{E})$, tal que

$$\tilde{q}_i \circ s_{\mathbf{q}} = s_i \circ q_i, \quad (2.4.3)$$

para cada $i \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.4.1. *Sea G un grupo compacto metrizable y E un G -espacio compacto y metrizable. Supongamos que $\{q_i\}: E \rightarrow \mathbf{E}$, $\mathbf{E} = \{E_i, q_i^j\}$, es una G -ANR-resolución de E . Entonces:*

- (1) $\mathcal{F}(\mathbf{E})$ es un espacio G -fibrante,
- (2) el G -encaje inducido $s_q: E \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{E})$ es un G -ISDR-mapeo.

Por lo tanto, s_q es una extensión G -fibrante de E .

Demostración.

A partir de ahora denotemos a $\mathcal{F}(\mathbf{E})$ como \tilde{E} y s_q como s , es decir, $\tilde{E} = \mathcal{F}(\mathbf{E})$ y $s = s_q$.

Probemos el inciso (1). Por la Proposición 1.5.3 el G -espacio \tilde{E}_i es un G -ANR para cada i , y como cada \tilde{q}_i^{i+1} es una G -fibración, por la Proposición 2.2.3 \tilde{E} es un espacio G -fibrante.

Para probar el inciso (2), consideremos los G -subconjuntos $X_i = \tilde{q}_i^{-1}(s_i(E_i))$ de \tilde{E} . Notemos que la familia $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tiene las siguientes propiedades:

- (i) $\tilde{E} = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \dots \supseteq X_i \supseteq X_{i+1} \supseteq \dots \supseteq s(E)$,
- (ii) para cada vecindad invariante U de $s(E)$ en \tilde{E} existe un j tal que $X_j \subseteq U$.

Probemos cada una de estas propiedades:

(i) Ya que $s_0 = id_{E_0}$ se cumple que $s_0(E_0) = \tilde{E}_0$, de modo que $X_0 = \tilde{q}_0^{-1}(s_0(E_0)) = \tilde{q}_0^{-1}(\tilde{E}_0) = \tilde{E}$. Por (2.4.3) para cada i , $\tilde{q}_i(s(E)) = s_i(q_i(E))$ y por tanto $s(E) \subseteq \tilde{q}_i^{-1}(s_i(q_i(E))) \subseteq \tilde{q}_i^{-1}(s_i(E_i)) = X_i$.

Dado i , verifiquemos que $X_{i+1} \subseteq X_i$: $\tilde{x} \in \tilde{q}_{i+1}^{-1}(s_{i+1}(E_{i+1})) \Rightarrow \tilde{q}_{i+1}(\tilde{x}) \in s_{i+1}(E_{i+1}) \Rightarrow \tilde{q}_i^{i+1}(\tilde{q}_{i+1}(\tilde{x})) \in \tilde{q}_i^{i+1}(s_{i+1}(E_{i+1})) \Rightarrow \tilde{q}_i(\tilde{x}) \in s_i(q_i^{i+1}(E_{i+1})) \subset s_i(E_i) \Rightarrow \tilde{x} \in \tilde{q}_i^{-1}(s_i(E_i))$, por lo tanto tenemos la inclusión deseada.

(ii) Usando la compacidad de $s(E)$, encontraremos un índice i y una vecindad invariante V de $\tilde{q}_i(s(E))$ en \tilde{E}_i , tal que $\tilde{q}_i^{-1}(V) \subseteq U$.

Para cada $\tilde{x} \in s(E)$ existe un $i_{\tilde{x}}$ y un conjunto abierto $W_{i_{\tilde{x}}}$ en $\tilde{E}_{i_{\tilde{x}}}$, tal que $\tilde{x} \in \tilde{q}_{i_{\tilde{x}}}^{-1}(W_{i_{\tilde{x}}}) \subseteq U$, pues los conjuntos de la forma $\tilde{q}_i^{-1}(W)$, donde W es un abierto en \tilde{E}_i , forman una base de la topología de \tilde{E} .

La familia $\{\tilde{q}_{i_{\tilde{x}}}^{-1}(W_{i_{\tilde{x}}})\}_{\tilde{x} \in s(E)}$ es una cubierta abierta de $s(E)$ y, como $s(E)$ es compacto, existe una subcubierta abierta finita $\{\tilde{q}_{i_k}^{-1}(W_{i_k})\}_{k=1}^m$ que cubre a $s(E)$. Sea $i = \max\{i_k : k = 1, \dots, m\}$ y $W = \bigcup_{k=1}^m (\tilde{q}_{i_k}^i)^{-1}(W_{i_k})$, es claro que W es abierto en \tilde{E}_i . Ahora escribimos

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i^{-1}(W) &= \tilde{q}_i^{-1} \left(\bigcup_{k=1}^m (\tilde{q}_{i_k}^i)^{-1}(W_{i_k}) \right) = \bigcup_{k=1}^m \tilde{q}_i^{-1} \circ (\tilde{q}_{i_k}^i)^{-1}(W_{i_k}) \\ &= \bigcup_{k=1}^m (\tilde{q}_{i_k}^i \circ \tilde{q}_i)^{-1}(W_{i_k}) = \bigcup_{k=1}^m (\tilde{q}_{i_k}^i)^{-1}(W_{i_k}) \end{aligned}$$

por lo tanto $s(E) \subseteq \tilde{q}_i^{-1}(W) \subseteq U$, de modo que W es una vecindad abierta de $\tilde{q}_i(s(E))$. Por otra parte, ya que G es compacto entonces por [21, Proposición 5.3], $\tilde{q}_i(s(E))$ tiene una vecindad invariante V en \tilde{E}_i tal que $V \subseteq W$, lo que implica $\tilde{q}_i^{-1}(V) \subseteq \tilde{q}_i^{-1}(W) \subseteq U$. Por (2.4.3), $s_i(q_i(E)) = \tilde{q}_i(s(E)) \subseteq V$ y con ello $s_i^{-1}(V)$ es una vecindad invariante de $q_i(E)$ en E_i .

Ahora, como $\{q_i\} : E \rightarrow \{E_i, q_i^j\}$ es una G -ANR-resolución de E , existe un $j \geq i$ tal que $q_i^j(E_j) \subseteq s_i^{-1}(V)$, por lo tanto escribimos

$$\begin{aligned} X_j &= \tilde{q}_j^{-1}(s_j(E_j)) \subseteq \tilde{q}_i^{-1}(\tilde{q}_i^j(s_j(E_j))) = \tilde{q}_i^{-1}(s_i(q_i^j(E_j))) \\ &\subseteq \tilde{q}_i^{-1}(s_i(s_i^{-1}(V))) = \tilde{q}_i^{-1}(V) \subseteq U, \end{aligned}$$

con esto probamos la segunda propiedad.

Ahora sea $i \in \mathbb{N}$. Por las Proposiciones 2.2.3 y 1.3.4, $\tilde{q}_i : \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}_i$ es una G -fibración regular. Como $s_i(E_i) \hookrightarrow \tilde{E}_i$ es un G -SDR-mapeo y $X_i = \tilde{q}_i^{-1}(s_i(E_i))$, el encaje $X_i \hookrightarrow \tilde{E}$ es también un G -SDR-mapeo en virtud de la Proposición 1.3.5. En otras palabras, existe una G -deformación fuerte $D_i : \tilde{E} \times I \rightarrow \tilde{E}$ de \tilde{E} en X_i que satisface, según la definición, las siguientes condiciones:

- (a) $D_i(\tilde{x}, 0) = \tilde{x}$, para todo $\tilde{x} \in \tilde{E}$,
- (b) $D_i(\tilde{x}, 1) \in X_i$, para todo $\tilde{x} \in \tilde{E}$,
- (c) $D_i(\tilde{x}, t) = \tilde{x}$, para todo $\tilde{x} \in X_i$ y $t \in I$.

Usaremos la familia de G -deformaciones $\{D_i : \tilde{E} \times I \rightarrow \tilde{E}\}_{i \in \mathbb{N}}$ para definir una función $\tilde{D} : \tilde{E} \times [0, \infty) \rightarrow \tilde{E}$ como sigue:

$$\tilde{D}(\tilde{x}, t) = D_i(D_{i+1}(\tilde{x}, t - i), 1) \quad \text{cuando} \quad t \in [i, i + 1].$$

Veamos que \tilde{D} está bien definida. Supongamos que

$$(\tilde{x}, t) \in (\tilde{E} \times [i - 1, i]) \cap (\tilde{E} \times [i, i + 1]),$$

en particular, $t = i$. Considerando $t \in [i - 1, i]$, según la definición de \tilde{D} tenemos

$$\tilde{D}(\tilde{x}, t) = D_{i-1}(D_i(\tilde{x}, t - (i - 1)), 1) = D_{i-1}(D_i(\tilde{x}, 1), 1) = D_i(\tilde{x}, 1),$$

ya que $D_i(\tilde{x}, 1) \in X_i \subset X_{i-1}$.

Por otro lado, si consideramos que $t \in [i, i + 1]$ entonces

$$\tilde{D}(\tilde{x}, t) = D_i(D_{i+1}(\tilde{x}, 0), 1) = D_i(\tilde{x}, 1),$$

y así \tilde{D} está bien definida. Esto implica que \tilde{D} es continua. En efecto, las restricciones $\tilde{D}|_{\tilde{E} \times [i, i+1]}$ son obviamente continuas y además la familia $\{\tilde{E} \times [i, i+1]\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una cubierta cerrada de $\tilde{E} \times [0, \infty)$; con ello \tilde{D} es continua en virtud de [19, Proposition 2.1.13]. De hecho \tilde{D} es una G -función pues todas las funciones D_i son G -funciones.

Finalmente veamos que \tilde{D} es una G -deformación infinita fuerte de \tilde{E} sobre $s(E)$. En primer lugar $\tilde{D}(\tilde{x}, 0) = D_1(D_2(\tilde{x}, 0), 1) = D_1(\tilde{x}, 1) = \tilde{x}$, para todo $\tilde{x} \in \tilde{E}$. Como $s(E) \subset X_i$ para cada i , tenemos $D_i(\tilde{x}, t) = \tilde{x}$ para todo

$\tilde{x} \in s(E)$ y $t \in I$. Por consiguiente, si $\tilde{x} \in s(E)$ y $t \in [i, i + i]$, entonces $\tilde{D}(\tilde{x}, t) = D_i(D_{i+1}(\tilde{x}, t - i), 1) = D_i(\tilde{x}, 1) = \tilde{x}$, es decir, para todo $t \in [0, \infty)$, $\tilde{D}(\tilde{x}, t) = \tilde{x}$.

Por último, supongamos que U es una vecindad invariante de $s(E)$ en \tilde{E} . Por la propiedad (ii) podemos encontrar un j tal que $X_j \subseteq U$. Sea $(\tilde{x}, t) \in \tilde{E} \times [j, \infty)$. Entonces $t \in [i, i + 1]$ para algún $i \geq j$. Ya que $D_i(\tilde{E} \times \{1\}) = X_i$ (por las condiciones (b) y (c) para D_i), tenemos

$$\tilde{D}(\tilde{x}, t) = D_i(D_{i+1}(\tilde{x}, t - i), 1) \in X_i \subseteq X_j$$

y de ello $\tilde{E} \times [j, \infty) \subseteq X_j \subseteq U$.

En consecuencia \tilde{D} es una G -deformación infinita fuerte de \tilde{E} sobre $s(E)$. En particular, $s: E \rightarrow \tilde{E}$ es un G -ISDR-mapeo. \square

Como cada G -espacio compacto metrizable, en virtud del Teorema 2.3.3, admite una G -ANR-resolución, entonces aplicando el Teorema 2.4.1 tenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.4.2. *Cada G -espacio compacto metrizable E , admite una extensión G -fibrante.*

2.5. Extensiones G -fibrantes libres

Lema 2.5.1. *Sea N un subgrupo normal cerrado de un grupo compacto G tal que el grupo cociente G/N es un grupo de Lie. Supongamos que E es un G/N -espacio libre. Si consideramos E también como un G -espacio (bajo la acción de G vía $G \rightarrow G/N$), entonces para cada subgrupo normal cerrado K de G , la proyección K -orbital $E \rightarrow E/K$ es una G -fibración.*

Demostración. Supongamos primero que $N = \{e\}$, es decir, que E es un G -espacio libre y G es un grupo compacto de Lie. Para probar que $q: E \rightarrow E/K$

es una G -fibración vamos a usar la Proposición 1.3.6. Para cada $g \in G$ sea $\alpha_g : K \rightarrow K$ el automorfismo $k \mapsto gkg^{-1}$. Definamos la acción derecha \cdot de K en E por $y \cdot k = k^{-1}y$, donde $k \in K$ y $y \in E$. Claro que esta acción es libre. Como

$$g(y \cdot k) = gk^{-1}y = (gkg^{-1})^{-1}gy = (gy) \cdot (gkg^{-1}) = (gy) \cdot \alpha_g(k)$$

podemos afirmar que $E \rightarrow E/K$ es una G -fibración en virtud de la Proposición 1.3.6. Notemos que E/K es tanto el espacio K -orbital de E respecto a la acción izquierda dada, como el espacio K -orbital respecto a la acción derecha \cdot , mientras que la acción de G en E/K se define por $g(K(y)) = K(gy)$.

Volvemos al caso general. Recordemos que la acción \cdot de G en E vía $\pi : G \rightarrow G/N$, $g \mapsto gN$, está dada por $g \cdot y = \pi(g)y$. Por lo tanto, las $\pi(K)$ -órbitas de E coinciden con las K -órbitas de E cuando consideramos a E como un G -espacio:

$$K \cdot y = \{k \cdot y \mid k \in K\} = \{\pi(k) \cdot y \mid k \in K\} = \pi(K)(y)$$

para todo $y \in E$. Notemos que $\pi(K) = KN/N$ es un subgrupo normal cerrado de G/N . Así, la proyección K -orbital $E \rightarrow E/K$ (considerando E como un G -espacio) es la proyección KN/N -orbital $E \rightarrow E/(KN/N)$ que es una G/N -fibración según la primera parte de la demostración. Por lo tanto, concluimos que $E \rightarrow E/K$ es una G -fibración de acuerdo con la Proposición 2.2.5(b). \square

Teorema 2.5.2. *Sea G un grupo compacto metrizable y sea E un G -espacio compacto metrizable y libre. Si $s : E \hookrightarrow \tilde{E}$ es cualquier extensión G -fibrante de E , entonces \tilde{E} es un G -espacio libre y, para cada subgrupo normal cerrado K de G , la función inducida $s/K : E/K \hookrightarrow \tilde{E}/K$ es una extensión G/K -fibrante de E/K .*

Demostración. Primero, probaremos la afirmación de nuestro teorema para la extensión G -fibrante $s: E \hookrightarrow \tilde{E}$ dada por el Teorema 2.4.1. En este caso, $\{q_i\}: E \rightarrow \mathbf{E} = \{E_i, q_i^j\}$ es una G -ANR-resolución que satisface el Teorema 2.3.5. En particular, E_i es un G/N_i -espacio libre para todo i mientras que $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es cualquier sucesión pro-Lie de subgrupos de G .

Recordemos que $(\tilde{E}, \{\tilde{q}_i\}) = \varprojlim \{\tilde{E}_i, \tilde{q}_i^j\}$ y el encaje $s: E \hookrightarrow \tilde{E}$ está inducido por los G -SDR-mapeos $s_i: E_i \hookrightarrow \tilde{E}_i$ tales que $s_i \circ q_i^{i+1} = \tilde{q}_i^{i+1} \circ s_{i+1}$ para todo i .

Como cada s_i es un G -SDR-mapeo, existen G -funciones $r_i: \tilde{E}_i \rightarrow E_i$ tales que $r_i \circ s_i = id_{E_i}$ y, según la Proposición 1.1.7, para cada i , \tilde{E}_i es un G/N_i -espacio libre tanto como E_i . Si consideramos a \tilde{E}_i como un G -espacio, los grupos de isotropía de todos sus puntos son iguales a N_i . Sea $z \in \tilde{E}$, entonces (de nuevo por la Proposición 1.1.7) se cumple $G_z \subseteq G_{\tilde{q}_i(z)} = N_i$ para cada i , donde $\tilde{q}_i: \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}_i$ es la proyección natural. Pero $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} N_i = \{e\}$ y, por lo tanto, $G_z = \{e\}$ para cada punto $z \in \tilde{E}$. Así, concluimos que el G -espacio \tilde{E} es libre.

Ahora, para probar que el G/K -espacio \tilde{E}/K es G/K -fibrante, notemos que, según la Proposición 1.2.3,

$$\tilde{E}/K = \varprojlim \{\tilde{E}_i/K, \tilde{q}_i^j/K\}.$$

En virtud del Lema 2.5.1 la proyección K -orbital $\pi_{\tilde{E}_i}: \tilde{E}_i \rightarrow \tilde{E}_i/K$ es una G -fibración para cada i , y como cada \tilde{q}_i^{i+1} es una G -fibración, concluimos, utilizando la Proposición 2.2.7, que \tilde{q}_i^{i+1}/K es una G/K -fibración para cada i . Adicionalmente, cada \tilde{E}_i/K es un G/K -ANR-espacio ya que cada \tilde{E}_i es un G -ANR-espacio (ver [1, Theorem 1]). Por la Proposición 2.2.3, \tilde{E}/K es un espacio G/K -fibrante.

Por último, s/K es un G/K -SSDR-mapeo en virtud de la Proposición 2.2.5(c) ya que s es, por hipótesis, un G -SSDR-mapeo. Con esto probamos

que s/K es una extensión G/K -fibrante de E/K .

En segunda instancia, probaremos nuestro teorema, usando $s: E \hookrightarrow \tilde{E}$, para una extensión G -fibrante de E arbitraria, digamos $s': E \hookrightarrow E'$. Por la Observación 2.1.5 existe una G -equivalencia homotópica $\alpha: E' \rightarrow \tilde{E}$. Sea $\beta: \tilde{E} \rightarrow E'$ un inverso homotópico de α y sea $D: E' \times I \rightarrow E'$ una G -homotopía tal que $D_0 = \beta \circ \alpha$ y $D_1 = id_{E'}$. Notemos que, por la Proposición 1.1.7, E' es un G -espacio libre igual que \tilde{E} debido a la existencia de la G -función $\alpha: E' \rightarrow \tilde{E}$.

Consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & E'/K & \xrightarrow{\alpha/K} & \tilde{E}/K \\ \sigma \downarrow & & & & \\ X & & & & \end{array} \quad (2.5.1)$$

de G/K -funciones en donde σ es un G/K -SSDR-mapeo arbitrario. A fin de mostrar que E'/K es G/K -fibrante, debemos encontrar una G/K -función $\varphi: X \rightarrow E'/K$ tal que $\varphi \circ \sigma = f$.

Notemos que, como \tilde{E}/K es G/K -fibrante, existe una G/K -función $h: X \rightarrow \tilde{E}/K$ tal que $h \circ \sigma = (\alpha/K) \circ f$, en el diagrama (2.5.1). Sean

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{h}} & \tilde{E} \\ \pi_{\tilde{X}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\tilde{E}} \\ X & \xrightarrow{h} & \tilde{E}/K \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{f}} & E' \\ \pi_{\tilde{A}} \downarrow & & \downarrow \pi_{E'} \\ A & \xrightarrow{f} & E'/K \end{array} \quad (2.5.2)$$

los diagramas pull-back de las triadas $X \xrightarrow{h} \tilde{E}/K \xleftarrow{\pi_{\tilde{E}}} \tilde{E}$ y $A \xrightarrow{f} E'/K \xleftarrow{\pi_{E'}} E'$, respectivamente, donde $\pi_{\tilde{E}}$ y $\pi_{E'}$ son las proyecciones G/K -orbitales. Recordemos que, por la Proposición 1.2.7 podemos identificar A y X con \tilde{A}/K y \tilde{X}/K respectivamente y, considerar las proyecciones $\pi_{\tilde{X}}$ y $\pi_{\tilde{A}}$ como

proyecciones G/K -orbitales. Como

$$h \circ (\sigma \circ \pi_{\tilde{A}}) = \alpha/K \circ f \circ \pi_{\tilde{A}} = \alpha/K \circ \pi_{E'} \circ \tilde{f} = \pi_{\tilde{E}} \circ (\alpha \circ \tilde{f})$$

las G -funciones $\alpha \circ \tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{E}$ y $\sigma \circ \pi_{\tilde{A}}: \tilde{A} \rightarrow X$ inducen una única G -función $\tilde{\sigma}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\tilde{h} \circ \tilde{\sigma} = \alpha \circ \tilde{f}$ y $\pi_{\tilde{X}} \circ \tilde{\sigma} = \sigma \circ \pi_{\tilde{A}}$, por la propiedad universal del pull-back aplicado al diagrama izquierdo (2.5.2).

Por lo anterior, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{f}} & E' \\
 & \swarrow \tilde{\sigma} & \downarrow \pi_{\tilde{A}} & & \downarrow \pi_{E'} \\
 \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{h}} & \tilde{E} & & \\
 \downarrow \pi_{\tilde{X}} & & \downarrow \pi_{\tilde{E}} & & \downarrow \pi_{E'} \\
 & & A & \xrightarrow{f} & E'/K \\
 & \swarrow \sigma & \downarrow & & \swarrow \alpha/K \\
 X & \xrightarrow{h} & \tilde{E}/K & &
 \end{array}$$

En este diagrama las flechas verticales son proyecciones K -orbitales y, por consiguiente, podemos escribir $f = \tilde{f}/K$, $h = \tilde{h}/K$ y $\sigma = \tilde{\sigma}/K$. Es fácil ver que $\tilde{\sigma}$ es un G -encaje cerrado al igual que σ . Claramente, podemos asumir, sin pérdida de generalidad que, A y \tilde{A} son subconjuntos cerrados invariantes de X y \tilde{X} respectivamente.

Definimos una G -función $F: \tilde{X} \times 0 \cup \tilde{A} \times I \rightarrow E'$ como sigue: $F(\tilde{x}, 0) = (\beta \circ \tilde{h})(\tilde{x})$ para $(\tilde{x}, 0) \in \tilde{X} \times 0$ y $F(\tilde{a}, t) = D(\tilde{f}(\tilde{a}), t)$ para $(\tilde{a}, t) \in \tilde{A} \times I$. La G -función F está bien definida debido a que para todo $\tilde{a} \in \tilde{A}$ se cumple

$$(\beta \circ \tilde{h})(\tilde{a}) = (\beta \circ \tilde{h})(\tilde{\sigma}(\tilde{a})) = (\beta \circ \alpha \circ \tilde{f})(\tilde{a}) = D(\tilde{f}(\tilde{a}), 0).$$

Por el Corolario 1.4.7 la inclusión $\tilde{X} \times 0 \cup \tilde{A} \times I \hookrightarrow \tilde{X} \times I$ es un G -SSDR-mapeo y, ya que por hipótesis E' es G -fibrante, entonces existe una G -homotopía $\hat{F}: \tilde{X} \times I \rightarrow E'$ tal que $\hat{F}|_{\tilde{X} \times 0 \cup \tilde{A} \times I} = F$.

Sea $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \rightarrow E'$ una G -función dada por $\tilde{\varphi} = \widehat{F}(\tilde{x}, 1)$.

Afirmamos que la G/K -función $\varphi = \tilde{\varphi}/K : X \rightarrow E'/K$ inducida por $\tilde{\varphi}$ es una función que hace conmutativo al diagrama (2.5.1). De verdad, para cada $\tilde{a} \in \tilde{A}$, se cumple

$$\tilde{\varphi} \circ \tilde{\sigma}(\tilde{a}) = \widehat{F}(\tilde{\sigma}(\tilde{a}), 1) = F(\tilde{a}, 1) = D(\tilde{f}(\tilde{a}), 1) = \tilde{f}(\tilde{a}),$$

es decir, $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\sigma} = \tilde{f}$ y, por lo tanto, $\varphi \circ \sigma = \tilde{\varphi}/K \circ \tilde{\sigma}/K = \tilde{f}/K = f$.

Finalmente, por la Proposición 2.2.5(c), $s'/K : E/K \rightarrow E'/K$ es un G/K -SSDR-mapeo y por lo tanto s'/K es una extensión G/K -fibrante. \square

Corolario 2.5.3. *Sea K un subgrupo normal cerrado de un grupo compacto metrizable G . Sea E un G -espacio compacto metrizable y libre. Si E es G -fibrante, entonces E/K es un espacio G/K -fibrante.*

Demostración. Como la G -función identidad $id_E : E \rightarrow E$ es trivialmente un G -SSDR-mapeo, podemos considerar a id_E como una extensión G -fibrante de E . Así, aplicando el Teorema 2.5.2, concluimos que $id_{E/K} : E/K \rightarrow E/K$ es una extensión G/K -fibrante y, en particular, E/K es un espacio G/K -fibrante. \square

Capítulo 3

Extensiones fibrantes en

$Map(G-TOP)$

En este capítulo tratamos con la categoría $Map(G-TOP)$ cuyos objetos son G -funciones y cuyos morfismos $p' \rightarrow p$ son pares (f', f) de G -funciones tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (3.0.1)$$

conmuta. Diremos en este caso que (f, f') es un G -**morfismo**. La categoría $Map(G-\mathcal{M})$ se define de manera similar, pero sus objetos son G -funciones de G -espacios metrizablees.

En estas categorías podemos introducir en un modo natural conceptos análogos a las nociones de G -homotopía, G -retracto, G -fibración, cocilindros equivariantes, entre otros.

3.1. Fibraciones y deformaciones en $Map(G-TOP)$

En esta sección comenzamos definiendo el concepto de G -fibración en la categoría $Map(G-TOP)$ y damos una caracterización de dicho concepto. En particular, destacamos la existencia de extensiones fibrantes en la categoría $Map(G-\mathcal{M})$, dada en el Teorema 3.3.3. Este se utilizará para probar los resultados principales de la tesis, los Teoremas 3.5.1 y 3.6.5.

Sea $\alpha = (f', f) : p' \rightarrow p$ un morfismo representado por el diagrama (3.0.1). Si $A \subset B$ y $F \subset E$ son G -subconjuntos tales que $p(F) \subset A$, entonces se puede considerar la restricción $q : F \rightarrow A$ de p ; en este caso escribimos $q \subset p$. Notemos que $p'(f'^{-1}(F)) \subseteq f^{-1}(A)$. En efecto ya que si $x \in p'(f'^{-1}(F))$ entonces

$$\begin{aligned} f(x) \in f(p'(f'^{-1}(F))) &= p(f'(f'^{-1}(F))) = p(F) \\ \Rightarrow x \in f^{-1}(p(F)) &\subseteq f^{-1}(A). \end{aligned}$$

De modo que podemos considerar la restricción $f'^{-1}(F) \rightarrow f^{-1}(A)$ de p' , la cual denotamos por $\alpha^{-1}(q)$, y escribimos $\alpha^{-1}(q) \subset p'$. Similarmente, si $q' \subset p'$, $q' : F' \rightarrow A'$, entonces $\alpha(q')$ es la restricción $f'(F') \rightarrow f(A')$ de p .

Si un G -morfismo $\sigma = (s', s) : q \rightarrow p$ es tal que s y s' son G -encajes, usaremos la notación $\sigma : q \hookrightarrow p$.

Definición 3.1.1. *Sea $q \subset p$. Por una G -deformación fuerte de p sobre q entendemos un par de G -deformaciones fuertes usuales $D' : E \times I \rightarrow E$ y $D : B \times I \rightarrow B$ de E y B sobre F y A , respectivamente, las cuales forman un morfismo $p \times id_I \rightarrow p$ en $Map(G-TOP)$, esto es, están relacionadas por la igualdad $p \circ D' = D \circ (p \times id_I)$ (donde $p \times id_I : E \times I \rightarrow B \times I$ envía (x, t)*

a $(p(x), t)$.

Sea $\sigma = (s', s) : q \hookrightarrow p$ un morfismo tal que s y s' son G -encajes. Si existe una G -deformación fuerte de p sobre $\sigma(q)$, diremos que $\sigma : q \hookrightarrow p$ es un **G -SDR-morfismo**.

Definición 3.1.2. Un G -morfismo $\alpha : p' \rightarrow p$ se llama **G -fibrado** si, para cualquier G -función $h : X \rightarrow Y$, α tiene la propiedad de levantamiento derecho con respecto al morfismo $\delta_0^h = (\partial_0^X, \partial_0^Y) : h \hookrightarrow h \times id_I$, es decir si está dado el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} h & \longrightarrow & p' \\ \delta_0^h \downarrow & & \downarrow \alpha \\ h \times id_I & \longrightarrow & p \end{array}$$

entonces existe un morfismo $h \times id_I \rightarrow p'$ como relleno.

Definición 3.1.3. Un G -morfismo $\alpha : p' \rightarrow p$ (en $\text{Map}(G\text{-}\mathcal{M})$) se llama **G -fibrado fuertemente** cuando tiene la propiedad de levantamiento derecho con respecto a todos los morfismos $\sigma = (s', s) : h' \rightarrow h$ tales que ambos s y s' son G -SSDR-mapeos, es decir para cada diagrama

$$\begin{array}{ccc} h' & \longrightarrow & p' \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \alpha \\ h & \longrightarrow & p \end{array}$$

existe un morfismo $h \rightarrow p'$ como relleno.

Note que para cualquier G -morfismo dado por el diagrama (3.0.1), siempre

podemos considerar el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 E' & & & & \\
 \swarrow q & & f' & & \\
 & P & \xrightarrow{\hat{f}} & E & \\
 \searrow p' & \downarrow \hat{p} & & \downarrow p & \\
 & B' & \xrightarrow{f} & B &
 \end{array} \tag{3.1.1}$$

donde el cuadrado interno es pull-back, esto es, P (junto con \hat{f} y \hat{p}) es el pull-back de la triada $B' \xrightarrow{f} B \xleftarrow{p} E$. Por supuesto, la G -función q está determinada de manera única por el diagrama (3.0.1).

Utilizando el diagrama (3.1.1) damos una caracterización, en la siguiente proposición, de los morfismos G -fibrados y G -fibrados fuertemente.

Proposición 3.1.4. *Sea $\alpha : p' \rightarrow p$ un G -morfismo dado por el diagrama (3.0.1). Entonces α es un morfismo G -fibrado (fuertemente) si y sólo si las G -funciones f, f' y q en el diagrama (3.1.1) son G -fibraciones (fuertes).*

Demostración. Probaremos sólo el caso en que f, f' y q son G -fibraciones (el caso de G -fibraciones fuertes se prueba análogamente).

(\Leftarrow) Según la Definición 3.1.2, dado el siguiente diagrama conmutativo en $Map(G-TOP)$

$$\begin{array}{ccc}
 v & \xrightarrow{(u',u)} & p' \\
 \downarrow (\partial_0^X, \partial_0^Y) & & \downarrow \alpha=(f',f) \\
 v \times id_I & \xrightarrow{(w',w)} & p
 \end{array} \tag{3.1.2}$$

debemos encontrar un relleno $(g, h) : v \times id_I \rightarrow p'$.

Encontraremos un par de G -funciones $g : X \times I \rightarrow E'$ y $h : Y \times I \rightarrow B'$ de la siguiente forma. En primer lugar, volvemos a escribir el diagrama (3.1.2)

en forma extendida como

$$\begin{array}{ccccc}
 & X & \xrightarrow{u'} & E' & \\
 & \swarrow v & & \swarrow p' & \\
 Y & \xrightarrow{u} & B' & & \\
 \downarrow \partial_0^Y & \downarrow \partial_0^X & \downarrow f & \downarrow f' & \\
 & X \times I & \xrightarrow{w'} & E & \\
 & \swarrow v \times id_I & & \swarrow p & \\
 Y \times I & \xrightarrow{w} & B & &
 \end{array}$$

Además, para el morfismo $\alpha = (f', f)$ consideramos el diagrama asociado (3.1.1). Por hipótesis f , f' y q son G -fibraciones, en particular, para el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{u} & B' \\
 \downarrow \partial_0^Y & & \downarrow f \\
 Y \times I & \xrightarrow{w} & B
 \end{array}$$

existe una G -función $h: Y \times I \rightarrow B'$ tal que $f \circ h = w$ y $h \circ \partial_0^Y = u$.

Para las G -funciones $h \circ (v \times id_I): X \times I \rightarrow B'$ y $w': X \times I \rightarrow E$ el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times I & & & & \\
 \swarrow & & \searrow w' & & \\
 & P & \xrightarrow{\hat{f}} & E & \\
 \downarrow h \circ (v \times id_I) & \downarrow \hat{p} & & \downarrow p & \\
 & B' & \xrightarrow{f} & B &
 \end{array}$$

es conmutativo ya que $f \circ h \circ (v \times id_I) = w \circ (v \times id_I) = p \circ w'$. Entonces por la propiedad universal del pull-back, existe una G -función única $\tilde{h}: X \times I \rightarrow P$ tal que $\hat{p} \circ \tilde{h} = h \circ (v \times id_I)$ y $\hat{f} \circ \tilde{h} = w'$. Utilizando \tilde{h} construimos el siguiente

diagrama de G -funciones

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{u'} & E' \\
 \partial_0^X \downarrow & & \downarrow q \\
 X \times I & \xrightarrow{\tilde{h}} & P
 \end{array} \tag{3.1.3}$$

que es conmutativo debido a $\hat{f} \circ (\tilde{h} \circ \partial_0^X) = w' \circ \partial_0^X = f' \circ u' = \hat{f} \circ (q \circ u')$ y $\hat{p} \circ (\tilde{h} \circ \partial_0^X) = h \circ (v \times id_I) \circ \partial_0^X = h \circ \partial_0^Y \circ v = u \circ v = p' \circ u' = \hat{p} \circ (q \circ u')$ con lo cual $\tilde{h} \circ \partial_0^X = q \circ u'$ (otra vez por la propiedad universal del pull-back).

Como q es una G -fibración, existe una G -función $g: X \times I \rightarrow E'$ tal que $g \circ \partial_0^X = u'$ y $q \circ g = \tilde{h}$.

El par $\tilde{\alpha} = (g, h)$ de G -funciones construidas hasta el momento, forman un morfismo en $Map(G-TOP)$ de $v \times id_I$ a p' , ya que $h \circ (v \times id_I) = \hat{p} \circ \tilde{h} = \hat{p} \circ q \circ g = p' \circ g$.

Finalmente, como $g \circ \partial_0^X = u'$, $h \circ \partial_0^Y = u$, $f \circ h = w$ y $f' \circ g = \hat{f} \circ q \circ g = \hat{f} \circ \tilde{h} = w'$, el morfismo $\tilde{\alpha}$ es el relleno del diagrama (3.1.2). Esto prueba que α es un morfismo G -fibrado.

(\Rightarrow) Para probar que la G -función $q: E' \rightarrow P$ en el diagrama (3.1.1) es una G -fibración supongamos que está dado el diagrama conmutativo (3.1.3) de G -funciones. Debemos encontrar un relleno $\Phi: X \times I \rightarrow E'$ para este diagrama. Construimos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & \xrightarrow{u'} & E' \\
 & \nearrow \partial_0^X & \downarrow \partial_0^X & & \downarrow f' \\
 X \times I & \xrightarrow{\widehat{p} \circ \widetilde{h}} & B' & & \\
 \downarrow \partial_0^{X \times I} & & \downarrow f & & \\
 X \times I & \xrightarrow{\widehat{f} \circ \widetilde{h}} & E & & \\
 \downarrow \partial_0^{X \times I} & & \downarrow p & & \\
 X \times I \times I & \xrightarrow{w} & B & &
 \end{array} \tag{3.1.4}$$

donde $w : X \times I \times I \rightarrow B$ es tal que $w(x, t, \tau) = p \circ \widehat{f} \circ \widetilde{h}(x, t)$. Es fácil ver que el diagrama (3.1.4) es conmutativo y, como $(f', f) : p' \rightarrow p$ es un morfismo fibrado, existe un morfismo $(\Phi, \Psi) : \partial_0^{X \times I} \rightarrow p'$ tal que $(\Phi, \Psi) \circ (\partial_0^X, \partial_0^{X \times I}) = (u', \widehat{p} \circ \widetilde{h})$ y $(f', f) \circ (\Phi, \Psi) = (\widehat{f} \circ \widetilde{h}, w)$. En particular, $\Phi \circ \partial_0^X = u'$. Además, $\widehat{p} \circ (q \circ \Phi) = p' \circ \Phi = \Psi \circ \partial_0^{X \times I} = \widehat{p} \circ \widetilde{h}$ y $\widehat{f} \circ (q \circ \Phi) = f' \circ \Phi = \widehat{f} \circ \widetilde{h}$ lo que implica $q \circ \Phi = \widetilde{h}$ por la propiedad universal del pull-back. Así Φ es un relleno del diagrama (3.1.3).

Ahora vamos a probar que la G -función $f : B' \rightarrow B$ es una G -fibración.

Sea

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{u} & B' \\
 \downarrow \partial_0^X & & \downarrow f \\
 X \times I & \xrightarrow{w} & B
 \end{array} \tag{3.1.5}$$

un diagrama conmutativo. Claramente, podemos extender este diagrama co-

mo sigue:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \emptyset & \xrightarrow{u'} & E' \\
 & \swarrow c' & \downarrow \partial_0^\emptyset & \searrow p' & \downarrow f' \\
 X & \xrightarrow{u} & B' & & \\
 \downarrow \partial_0^X & & \downarrow f & & \\
 & \swarrow c & \emptyset \times I & \xrightarrow{w'} & E \\
 X \times I & \xrightarrow{w} & B & & \downarrow p
 \end{array} \tag{3.1.6}$$

donde \emptyset es el conjunto vacío (por supuesto, $\emptyset \times I = \emptyset$). De nuevo, como $(f', f) : p' \rightarrow p$ es un morfismo fibrado, existe un morfismo (en $\text{Map}(G\text{-TOP})$) $(\tilde{w}', \tilde{w}) : c \rightarrow p'$ tal que $(\tilde{w}', \tilde{w}) \circ (\partial_0^\emptyset, \partial_0^X) = (u', u)$ y $(f', f) \circ (\tilde{w}', \tilde{w}) = (w', w)$. En particular, $\tilde{w} \circ \partial_0^X = u$ y $f \circ \tilde{w} = w$, es decir $\tilde{w} : X \times I \rightarrow B'$ es un relleno del diagrama (3.1.5). Así, f es una G -fibración.

Por último, la G -función $\hat{f} : P \rightarrow E$ en el diagrama (3.1.1) es una G -fibración tanto como f , ya que el cuadrado interno es pull-back. Por consiguiente, f' es también una G -fibración como composición de las G -fibraciones q y \hat{f} . \square

Corolario 3.1.5. *Sea id_* la función identidad de un conjunto puntual $\{*\}$ sobre si mismo (con la acción trivial del grupo G). Entonces para cualquier G -función p tenemos:*

(a) $p \rightarrow id_*$ es un morfismo G -fibrado $\Leftrightarrow p$ es una G -fibración.

(b) $p \rightarrow id_*$ es un morfismo G -fibrado fuertemente $\Leftrightarrow p$ es una G -fibración fuerte de espacios G -fibrantes $\Leftrightarrow p$ es una G -fibración de espacios G -fibrantes.

Demostración. Sea $\alpha = (c_*^E, c_*^B) : p \rightarrow id_*$ un morfismo dado por el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{c_*^E} & * \\
 p \downarrow & & \downarrow id_* \\
 B & \xrightarrow{c_*^B} & *
 \end{array}$$

Para el morfismo α el diagrama conmutativo asociado (3.1.1) tiene la forma

$$\begin{array}{ccccc}
 E & & & & \\
 \swarrow q & & c_*^E & & \\
 & & \searrow & & \\
 & & & & * \\
 \downarrow p & & B & \xrightarrow{c_*^B} & * \\
 & & \downarrow id_B & & \downarrow id_* \\
 & & B & \xrightarrow{c_*^B} & *
 \end{array}$$

(desde luego el cuadrado interno es pull-back).

Por la Proposición 3.1.4, $\alpha = (c_*^E, c_*^B)$ es un morfismo G -fibrado si y sólo si q y c_*^B son G -fibraciones. Como $q = p$ y, además, c_*^B y c_*^E son a priori G -fibraciones, esto prueba (a).

La demostración de (b) es similar, pero adicionalmente hay que observar que las funciones constantes c_*^B y c_*^E son G -fibraciones fuertes si y sólo B y E son espacios G -fibrantes.

Finalmente, por [11, Proposition A.2], si E y B son espacios G -fibrantes, entonces cada G -fibración $E \rightarrow B$ es una G -fibración fuerte. \square

Diremos también que un morfismo $\alpha : p' \rightarrow p$ dado por el diagrama (3.0.1) es G -fibrado regular si las G -funciones q y f (y por lo tanto f') en el diagrama (3.1.1) son G -fibraciones regulares. Por ejemplo, el morfismo G -fibrado α representado por el diagrama (3.0.1) es regular si los G -espacios E , B y B' son metrizablees.

Proposición 3.1.6. *Sea $\alpha = (f', f) : p' \rightarrow p$ un morfismo G -fibrado regular. Supongamos que para alguna restricción $q \subset p$ existe una G -deformación fuerte de p sobre q . Entonces existe una G -deformación fuerte de p' sobre $q' = \alpha^{-1}(q)$.*

Omitimos la prueba de la Proposición 3.1.6 ya que es, en efecto, idéntica a la demostración de su análogo en $G-TOP$, la Proposición 1.3.5.

Proposición 3.1.7. *Supongamos que $\mathbf{p} = \{p_i, \beta_i^j\}$ es una sucesión inversa en $\text{Map}(G\text{-TOP})$ y sea p su límite inverso con las proyecciones $\beta_i : p \rightarrow p_i$, esto es, $(p, \{\beta_i\}) = \lim_{\leftarrow} \mathbf{p}$.*

(i) *Si p_0 es una G -fibración y β_i^{i+1} es un morfismo G -fibrado para cada i , entonces p es una G -fibración y cada β_i es un morfismo G -fibrado.*

(ii) *Si p_0 es una G -fibración fuerte y β_i^{i+1} es un morfismo G -fibrado fuertemente para cada i , entonces p es una G -fibración fuerte y cada β_i es un morfismo G -fibrado fuertemente.*

Demostración.

Probaremos sólo la afirmación (i); la prueba de (ii) es análoga.

Supongamos que está dado el diagrama conmutativo de G -morfismos

$$\begin{array}{ccc}
 h & \xrightarrow{\xi} & p \\
 \delta_0 \downarrow & & \downarrow \beta_i \\
 h \times id_I & \xrightarrow{\varphi_i} & p_i
 \end{array} \tag{3.1.7}$$

Para probar que β_i es un morfismo G -fibrado, debemos encontrar un relleno $\varphi : h \times id_I \rightarrow p$.

Sea $\varphi_k = \beta_k^i \circ \varphi_i$ para cada $k \leq i$. Ahora definiremos por inducción los G -morfismos $\varphi_k : h \times id_I \rightarrow p_k$, para cada $k > i$, tales que $\varphi_k \circ \delta_0 = \beta_k \circ \xi$ y $\beta_k^{k+1} \circ \varphi_{k+1} = \varphi_k$ como sigue. Supongamos que φ_k , $k \geq j$ ya está dada. Entonces definamos $\varphi_{k+1} : h \times id_I \rightarrow p_{k+1}$ como relleno del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 h & \xrightarrow{\beta_{k+1} \circ \xi} & p_{k+1} \\
 \delta_0 \downarrow & & \downarrow \beta_k^{k+1} \\
 h \times id_I & \xrightarrow{\varphi_k} & p_k
 \end{array}$$

Como β_k^{k+1} es un morfismo G -fibrado tal relleno existe. De este modo obtenemos la familia $\mathbf{f} = \{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ requerida. Claramente \mathbf{f} es un cono sobre $\mathbf{p} = \{p_i, \beta_i^j\}$ y por la propiedad universal del límite inverso induce un G -morfismo único $\varphi : h \times id_I \rightarrow p$ tal que $\beta_k \circ \varphi = \varphi_k$ para todo k ; en particular, $\beta_i \circ \varphi = \varphi_i$. Además, $\beta_k \circ (\varphi \circ \delta_0) = (\beta_k \circ \varphi) \circ \delta_0 = \varphi_k \circ \delta_0 = \beta_k \circ \xi$, para todo k , lo que implica la igualdad $\varphi \circ \delta_0 = \xi$. Con ello φ es un relleno del diagrama (3.1.7).

Para demostrar que p es una G -fibración hay que verificar, en virtud del Corolario 3.1.5, que $p \rightarrow id_*$ es un morfismo G -fibrado, es decir, probar que cada diagrama de G -funciones

$$\begin{array}{ccc}
 h & \xrightarrow{\xi} & p \\
 \delta_0 \downarrow & & \downarrow \\
 h \times id_I & \longrightarrow & id_*
 \end{array} \tag{3.1.8}$$

admite un relleno $\tilde{\xi} : h \times id_I \rightarrow p$.

Como p_0 es una G -fibración, es decir $p_0 \rightarrow id_*$ es un morfismo G -fibrado, existe un G -morfismo $\xi_0 : h \times id_I \rightarrow p_0$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 h & \xrightarrow{\xi} & p & \xrightarrow{\beta_0} & p_0 \\
 \delta_0 \downarrow & & & \nearrow \xi_0 & \downarrow \\
 h \times id_I & \longrightarrow & & & id_*
 \end{array} \tag{3.1.9}$$

El G -morfismo $\beta_0 : p \rightarrow p_0$ es un morfismo G -fibrado según la primera parte de la demostración. Por lo tanto, para el diagrama 3.1.9, existe un relleno $\tilde{\xi} : h \times id_I \rightarrow p$. Obviamente $\tilde{\xi}$ es también un relleno del diagrama (3.1.8). \square

3.2. Cocilindros en $Map(G-TOP)$

La noción de cocilindro para un morfismo dado $\alpha = (f', f) : p' \rightarrow p$ se define en $Map(G-TOP)$ a través de la idea de cocilindro, dada en la Definición 1.5.1, para las G -funciones f' y f . Si denotamos por $coCyl(\alpha)$ el cocilindro del morfismo α , entonces este se define como la G -función

$$coCyl(\alpha) : coCyl(f') \rightarrow coCyl(f), \quad (e', \omega') \mapsto (p'(e'), p \circ \omega'). \quad (3.2.1)$$

Observación 3.2.1. Para el morfismo $\alpha = (f', f) : p' \rightarrow p$, tenemos que $coCyl(\alpha)$ es el pull-back de la triada $p' \xrightarrow{\alpha} p \xleftarrow{\pi_p^0} p^I$, es decir, el siguiente diagrama conmutativo es pull-back en $Map(G-TOP)$:

$$\begin{array}{ccc} coCyl(\alpha) & \xrightarrow{\hat{\alpha}=(\hat{f}',\hat{f})} & p^I \\ \downarrow (\hat{\pi}_E^0, \hat{\pi}_B^0)=\hat{\pi}_p^0 & & \downarrow \pi_p^0=(\pi_E^0, \pi_B^0) \\ p' & \xrightarrow{\alpha=(f',f)} & p \end{array} \quad (3.2.2)$$

donde $p^I : E^I \rightarrow B^I$ está dado por $p^I(\omega') = p \circ \omega'$, $\hat{\alpha} = (\hat{f}', \hat{f})$, $\hat{\pi}_p^0 = (\hat{\pi}_E^0, \hat{\pi}_B^0)$.

Demostración. Como primera parte, debemos verificar que el diagrama (3.2.2) es conmutativo, para ello lo escribimos en forma extendida

$$\begin{array}{ccccc} & & coCyl(f') & \xrightarrow{\hat{f}'} & E^I \\ & \swarrow coCyl(\alpha) & \downarrow \hat{\pi}_E^0 & & \downarrow \pi_E^0 \\ coCyl(f) & \xrightarrow{\hat{f}} & B^I & \swarrow p^I & \\ \downarrow \hat{\pi}_B^0 & & \downarrow \pi_B^0 & & \downarrow \pi_E^0 \\ & \swarrow p' & E' & \xrightarrow{f'} & E \\ & & \downarrow p & & \\ B' & \xrightarrow{f} & B & & \end{array} \quad (3.2.3)$$

Ya que por hipótesis se cumplen las igualdades $f \circ p' = p \circ f'$, $f \circ \widehat{\pi}_B^0 = \pi_B^0 \circ \widehat{f}$ y $f' \circ \widehat{\pi}_E^0 = \pi_E^0 \circ \widehat{f}'$, entonces sólo debemos verificar las igualdades

1. $\widehat{f} \circ coCyl(\alpha) = p^I \circ \widehat{f}'$,
2. $\widehat{\pi}_B^0 \circ coCyl(\alpha) = p' \circ \widehat{\pi}_E^0$,
3. $\pi_B^0 \circ p^I = p \circ \pi_E^0$.

En efecto, si $(x', w') \in coCyl(f')$ y $w \in E^I$ entonces:

1. $\widehat{f} \circ coCyl(\alpha)(x', w') = \widehat{f}(p'(x'), p \circ w') = p \circ w' \quad y$
 $p^I \circ \widehat{f}'(x', w') = p^I(w') = p \circ w'$.
2. $\widehat{\pi}_B^0 \circ coCyl(\alpha)(x', w') = \widehat{\pi}_B^0(p'(x'), p \circ w') = p'(x') \quad y$
 $p' \circ \widehat{\pi}_E^0(x', w') = p'(x')$.
3. $\pi_B^0 \circ p^I(w) = \pi_B^0(p \circ w) = p \circ w(0) \quad y$
 $p \circ \pi_E^0(w) = p \circ w(0)$.

Ahora verificaremos que $coCyl(\alpha)$ tiene la propiedad universal del pull-back.

Dado el diagrama conmutativo (3.2.2), sea $Z: S \rightarrow T$ una G -función arbitraria y $h = (h', \widetilde{h}): Z \rightarrow p'$ y $g = (g', \widetilde{g}): Z \rightarrow p^I$ dos morfismos en $Map(G-TOP)$ tales que

$$\alpha \circ h = \pi_p^0 \circ g. \quad (3.2.4)$$

Debemos probar que existe un único morfismo $u = (u', \widetilde{u}): Z \rightarrow coCyl(\alpha)$ tal que $\widehat{\pi}_p^0 \circ u = h$ y $\widehat{\alpha} \circ u = g$.

Usando el diagrama (3.2.3) y la hipótesis dada por la ecuación (3.2.4) observamos que

$$f' \circ h' = \pi_E^0 \circ g' \quad y \quad f \circ \widetilde{h} = \pi_B^0 \circ \widetilde{g},$$

por lo tanto, por la propiedad universal del pull-back en la categoría $G-TOP$, existe un par de G -funciones únicas $u': S \rightarrow coCyl(f')$ y $\tilde{u}: T \rightarrow coCyl(f)$ tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 S & & T \\
 \downarrow h' & \searrow u' & \downarrow \tilde{h} \\
 coCyl(f') & \xrightarrow{\hat{f}'} & E^I \\
 \downarrow \hat{\pi}_E^0 & & \downarrow \pi_E^0 \\
 E' & \xrightarrow{f'} & E
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T & & \\
 \downarrow \tilde{h} & \searrow \tilde{u} & \\
 coCyl(f) & \xrightarrow{\hat{f}} & B^I \\
 \downarrow \hat{\pi}_B^0 & & \downarrow \pi_B^0 \\
 B' & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}
 \tag{3.2.5}$$

Verifiquemos que las G -funciones u' y \tilde{u} forman un morfismo de Z hacia $coCyl(\alpha)$ en $Map(G-TOP)$. De verdad ya que

$$\begin{aligned}
 \hat{f} \circ \tilde{u} \circ Z &= \tilde{g} \circ Z = p^I \circ g' = p^I \circ \hat{f}' \circ u' = \hat{f} \circ coCyl(\alpha) \circ u', \quad y \\
 \hat{\pi}_B^0 \circ \tilde{u} \circ Z &= \tilde{h} \circ Z = p' \circ h' = p' \circ \hat{\pi}_E^0 \circ u' = \hat{\pi}_B^0 \circ coCyl(\alpha) \circ u'.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\tilde{u} \circ Z = coCyl(\alpha) \circ u'$. Ahora podemos escribir $u = (u', \tilde{u}): Z \rightarrow coCyl(\alpha)$ y sólo resta probar que $\hat{\pi}_p^0 \circ u = h$ y $\hat{\alpha} \circ u = g$; pero esto es evidente a partir de los diagramas (3.2.5). \square

Los cocilindros en $Map(G-TOP)$ tienen propiedades que son análogas a las propiedades correspondientes en las categorías TOP y $G-TOP$. Consideraremos algunas de ellas. Recordemos que en la Sección 1.5 definimos dos G -funciones $\pi_E: E^I \rightarrow E \times E$ y $\pi_B: B^I \rightarrow B \times B$, dadas por $\omega_E \mapsto (\omega_E(0), \omega_E(1))$ y $\omega_B \mapsto (\omega_B(0), \omega_B(1))$, respectivamente.

Lema 3.2.2. *Sea $p: E \rightarrow B$ una G -fibración. Entonces el morfismo $\pi_p = (\pi_E, \pi_B): p^I \rightarrow p \times p$ es G -fibrado. Si, más aún, E y B son espacios G -fibrantes, entonces (π_E, π_B) es un morfismo G -fibrado fuertemente.*

Demostración. Probaremos en primer lugar que π_p es un morfismo G -fibrado utilizando la Proposición 3.1.4, para ello consideremos el diagrama conmutativo de G -funciones

$$\begin{array}{ccccc}
 E^I & & & & \\
 \swarrow \bar{p} & & p^I & & \\
 & & W & \longrightarrow & B^I \\
 \searrow \pi_E & & \downarrow & & \downarrow \pi_B \\
 & & E \times E & \xrightarrow{p \times p} & B \times B
 \end{array}$$

donde el cuadrado interno es pull-back, así que

$$W = \{(y_1, y_2, \omega_B) \in E \times E \times B^I \mid \omega_B(0) = p(y_1), \omega_B(1) = p(y_2)\}$$

y la G -función $\bar{p} : E^I \rightarrow W$ se define por $\bar{p}(\omega) = (\omega(0), \omega(1), p \circ \omega)$.

Sea A un G -subconjunto cerrado de un G -espacio X y supongamos que están dados los diagramas conmutativos de G -funciones

$$\begin{array}{ccc}
 X \times \{0, 1\} \cup A \times I & \xrightarrow{h} & E \\
 \downarrow \bar{i} & & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{H} & B
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\tilde{h}} & E^I \\
 \downarrow i & & \downarrow \bar{p} \\
 X & \xrightarrow{\tilde{H}} & W
 \end{array}
 \tag{3.2.6}$$

mutuamente relacionados por las ecuaciones: $\tilde{h}(a)(t) = h(a, t)$ y

$$\tilde{H}(x) = (h(x, 0), h(x, 1), H^*(x)),$$

donde $H^*(x)(t) = H(x, t)$, para $x \in X$, $a \in A$, $t \in I$. Observe que la existencia de un relleno $F : X \times I \rightarrow E$ en el diagrama izquierdo (3.2.6) es equivalente a la existencia de un relleno $F^* : X \rightarrow E^I$ en el diagrama derecho (3.2.6) (F y F^* están relacionadas por $F^*(x)(t) = F(x, t)$).

Ahora sea Z un G -espacio arbitrario. Haciendo $A = Z \times \{0\}$ y $X = Z \times I$ en los diagramas (3.2.6), observamos que un relleno $F : (Z \times I) \times I \rightarrow E$, para el diagrama izquierdo, existe porque p es una G -fibración y la inclusión $\bar{i} : Z \times (I \times \{0, 1\} \cup \{0\} \times I) \hookrightarrow Z \times I \times I$ puede considerarse como la inclusión $(Z \times I) \times \{0\} \hookrightarrow (Z \times I) \times I$ debido al homeomorfismo

$$(I \times I, I \times \{0, 1\} \cup \{0\} \times I) \approx (I \times I, I \times \{0\}).$$

Para probar la segunda parte, cuando se supone que E y B son espacios G -fibrantes, notemos primero que p es una G -fibración fuerte. De modo que existe un relleno $F : X \times I \rightarrow E$ en el diagrama izquierdo (3.2.6) para cada G -SSDR-mapeo $i : A \hookrightarrow X$ (porque \bar{i} es un G -SSDR-mapeo debido al Corolario 1.4.7). Esto implica la existencia de un relleno $F^* : X \rightarrow E^I$ en el diagrama derecho (3.2.6), esto muestra que \bar{p} es una G -fibración fuerte. \square

El siguiente teorema es el análogo del Teorema 1.5.4 para la categoría $Map(G-TOP)$.

Teorema 3.2.3. *Cada morfismo $\alpha = (f', f) : p' \rightarrow p$ en $Map(G-TOP)$ puede factorizarse en una composición $p' \xrightarrow{\sigma_\alpha} coCyl(\alpha) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} p$, representada por el diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc}
 & coCyl(f') & \\
 & \nearrow^{s_{E'}} & \searrow^{p_E} \\
 E' & \xrightarrow{f'} & E \\
 & \downarrow^{coCyl(\alpha)} & \\
 & coCyl(f) & \\
 & \nearrow^{s_{B'}} & \searrow^{p_B} \\
 B' & \xrightarrow{f} & B \\
 & \downarrow^{p'} & \downarrow^p
 \end{array} \tag{3.2.7}$$

donde $\sigma = (s_{E'}, s_{B'})$ es un G -SDR-morfismo y $\tilde{\alpha} = (p_E, p_B)$. Más aún,

- (i) si p y p' son G -fibraciones, entonces el morfismo $\tilde{\alpha}$ es G -fibrado, y por lo tanto la G -función $coCyl(\alpha)$ es una G -fibración;

(ii) si p y p' son G -fibraciones de espacios G -fibrantes, entonces el morfismo $\tilde{\alpha}$ es G -fibrado fuertemente, y por consiguiente la G -función $coCyl(\alpha)$ es una G -fibración de espacios G -fibrantes.

Demostración. Supongamos que α está dado por el diagrama (3.0.1), entonces aplicando el Teorema 1.5.4 a las G -funciones f y f' obtenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
 & coCyl(f') & \\
 s_{E'} \nearrow & & \searrow p_E \\
 E' & \xrightarrow{f'} & E
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & coCyl(f) & \\
 s_{B'} \nearrow & & \searrow p_B \\
 B' & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}
 \quad (3.2.8)$$

donde $p_E(x', \omega_E) = \omega_E(1)$, $s_{E'}(x') = (x', c_{f'(x')})$ para $(x', \omega_E) \in coCyl(f')$ y $p_B(b', \omega_B) = \omega_B(1)$, $s_{B'}(b') = (b', c_{f(b')})$ para $(b', \omega_B) \in coCyl(f)$. Además $s_{E'}$ y $s_{B'}$ son G -SDR-mapeos.

Utilizando (3.2.8) y la G -función $coCyl(\alpha)$, definida en la ecuación (3.2.1), obtenemos el diagrama (3.2.7). Debemos verificar que los pares de G -funciones $\sigma = (s_{E'}, s_{B'})$ y $\tilde{\alpha} = (p_E, p_B)$ forman un morfismo en $Map(G-TOP)$, de p' hacia $coCyl(\alpha)$ y de $coCyl(\alpha)$ hacia p , respectivamente.

En otras palabras, debemos verificar que las siguientes igualdades se satisfacen

$$coCyl(\alpha) \circ s_{E'} = s_{B'} \circ p' \quad y \quad p \circ p_E = p_B \circ coCyl(\alpha).$$

La verificación es directa:

$$\begin{aligned}
 coCyl(\alpha) \circ s_{E'}(x') &= coCyl(\alpha)(x', c_{f'(x')}) = (p'(x'), p \circ c_{f'(x')}) \\
 &= (p'(x'), p \circ f'(x')) \quad y \\
 s_{B'} \circ p'(x') &= (p'(x'), c_{f(p'(x'))}) = (p'(x'), c_{p(f'(x'))}) \\
 &= (p'(x'), p \circ f'(x')),
 \end{aligned}$$

además

$$p \circ p_E(x', \omega_E) = p \circ \omega_E(1) \quad \text{y}$$

$$p_B \circ coCyl(\alpha)(x', \omega_E) = p_B(p'(x'), p \circ \omega_E) = p \circ \omega_E(1).$$

La conmutatividad del diagrama (3.2.7) se sigue de la conmutatividad de (3.2.8). Considerando el morfismo $\widehat{\alpha} = (\widehat{f}', \widehat{f})$, obtenido a partir del diagrama (3.2.2), y el morfismo $\pi_p^1 = (\pi_E^1, \pi_B^1)$ es fácil mostrar que $\widetilde{\alpha} = \pi_p^1 \circ \widehat{\alpha}$.

Ahora probaremos el inciso (i) utilizando la Definición 3.1.2. Entonces dado el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 h & \xrightarrow{\beta} & coCyl(\alpha) \\
 \downarrow \iota = (\partial_X^0, \partial_Y^0) & & \downarrow \widetilde{\alpha} \\
 h \times id_I & \xrightarrow{\gamma} & p
 \end{array} \tag{3.2.9}$$

debemos encontrar un relleno $\widetilde{\gamma}: h \times id_I \rightarrow coCyl(\alpha)$. A partir de los diagramas (3.2.2) y (3.2.9) tenemos que

1. $\pi_p^0 \circ \widehat{\alpha} \circ \beta = \alpha \circ \widehat{\pi}_p^0 \circ \beta$,
2. $\gamma \circ \iota = \widetilde{\alpha} \circ \beta = \pi_p^1 \circ \widehat{\alpha} \circ \beta$.

por lo tanto obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & h & \xrightarrow{\widehat{\alpha} \circ \beta} & p^I \\
 & & \downarrow \widehat{\pi}_p^0 \circ \beta & & \downarrow \pi_p^0 \\
 & & p' & \xrightarrow{\alpha} & p \\
 \iota & & & & \downarrow \pi_p^1 \\
 h \times id_I & \xrightarrow{\gamma} & & & p \\
 & & \nearrow \beta' & &
 \end{array} \tag{3.2.10}$$

La existencia del morfismo β' se debe a que, por hipótesis, p' es una G -fibración, de modo que por el Corolario 3.1.5, sabemos que $p' \rightarrow id_*$ es un

morfismo G -fibrado. Así pues, si consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\iota = (\partial_0^x, \partial_0^y) \quad \begin{array}{ccc} h & \xrightarrow{\widehat{\pi}_p^0 \circ \beta} & p' \\ \downarrow & & \downarrow \\ h \times id_I & \longrightarrow & id_* \end{array}$$

entonces existe $\beta': h \times id_I \rightarrow p'$ tal que $\beta' \circ \iota = \widehat{\pi}_p^0 \circ \beta$.

Ahora por el Lema 3.2.2, podemos encontrar un morfismo $\widetilde{\beta}: h \times id_I \rightarrow p^I$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} h & \xrightarrow{\widehat{\alpha} \circ \beta} & p^I \\ \downarrow \iota & \nearrow \widetilde{\beta} & \downarrow \pi_p = (\pi_p^0, \pi_p^1) = (\pi_E, \pi_B) \\ h \times id_I & \xrightarrow{(\alpha \circ \beta', \gamma)} & p \times p \end{array} \quad (3.2.11)$$

conmuta. Para verificar dicha conmutatividad escribimos los morfismos π_p y $((\alpha \circ \beta') \times \gamma)$ como productos cartesianos, así

$$\begin{aligned} \pi_p \circ \widehat{\alpha} \circ \beta &= (\pi_p^0 \times \pi_p^1) \circ \widehat{\alpha} \circ \beta = \pi_p^0 \circ \widehat{\alpha} \circ \beta \times \pi_p^1 \circ \widehat{\alpha} \circ \beta \\ &= \alpha \circ \widehat{\pi}_p^0 \circ \beta \times \gamma \circ \iota \\ &= \alpha \circ \beta' \circ \iota \times \gamma \circ \iota \\ &= ((\alpha \circ \beta') \times \gamma) \circ \iota \end{aligned}$$

Por la conmutatividad de este diagrama tenemos $\pi_p^0 \circ \widetilde{\beta} = \alpha \circ \beta'$, y por lo tanto $\widetilde{\beta}$ y β' definen un morfismo único $\widetilde{\gamma}: h \times id_I \rightarrow coCyl(\alpha)$ tal que $\widehat{\alpha} \circ \widetilde{\gamma} = \widetilde{\beta}$ y $\widehat{\pi}_p^0 \circ \widetilde{\gamma} = \beta'$ (ver el diagrama (3.2.2)). Puede verificarse fácilmente que $\widetilde{\gamma}$ es el relleno del diagrama (3.2.9). De verdad, $\widehat{\pi}_p^0 \circ \widetilde{\gamma} \circ \iota = \beta' \circ \iota = \widehat{\pi}_p^0 \circ \beta$ y $\widehat{\alpha} \circ \widetilde{\gamma} \circ \iota = \widetilde{\beta} \circ \iota = \widehat{\alpha} \circ \beta$, así que $\widetilde{\gamma} \circ \iota = \beta$. Por otro lado, $\widetilde{\alpha} \circ \widetilde{\gamma} = \pi_p^1 \circ \widehat{\alpha} \circ \widetilde{\gamma} = \pi_p^1 \circ \widetilde{\beta} = \gamma$.

La prueba de la afirmación (ii) es bastante similar. Sólo hay que repetir

el mismo argumento reemplazando el morfismo $\iota : h \hookrightarrow h \times id_I$ en los diagramas (3.2.9), (3.2.10) y (3.2.11) por un par de G -SSDR-mapeos (s, s') . Note también que para la existencia de un morfismo β' en el diagrama (3.2.10), se usa la condición “ p' es una G -fibración fuerte de espacios G -fibrantes”. \square

3.3. Construcción de una extensión fibrante en $Map(G-TOP)$

Definición 3.3.1. *Se dice que un G -morfismo $(s', s) : p \hookrightarrow \tilde{p}$ es una **extensión fibrante en $Map(G-TOP)$** si s y s' son extensiones fibrantes, es decir en el diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} E & \xhookrightarrow{s'} & \tilde{E} \\ p \downarrow & & \downarrow \tilde{p} \\ B & \xhookrightarrow{s} & \tilde{B} \end{array}$$

(a) s y s' son G -SSDR-mapeos y (b) \tilde{E} y \tilde{B} son espacios G -fibrantes.

Claramente cada G -función $p : E \rightarrow B$ de G -espacios compactos metrizables admite una extensión fibrante en $Map(G-TOP)$: si $s' : E \hookrightarrow \tilde{E}$ y $s : B \hookrightarrow \tilde{B}$ son extensiones G -fibrantes de E y B respectivamente (las cuales existen por el Corolario 2.4.2), entonces existe una G -función $\tilde{p} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{B}$ tal que $\tilde{p} \circ s' = s \circ p$ según la definición de un espacio G -fibrante (ya que \tilde{B} es G -fibrante y s' es un G -SSDR-mapeo). Sin embargo, de nuestro interés es una situación cuando \tilde{p} es además una G -fibración (y por lo tanto una G -fibración fuerte en virtud de la Proposición 2.2.1). El Teorema 3.3.3 nos dará unas condiciones para tal situación.

De manera clara, la definición de G -ANR-resolución puede extenderse a

3.3. CONSTRUCCIÓN DE UNA EXTENSIÓN FIBRANTE EN $MAP(G-TOP)$ 71

la categoría $Map(G-TOP)$, o más precisamente, en $Map(G-\mathcal{M})$.

Definición 3.3.2. Sea $p : E \rightarrow B$ una G -función de G -espacios compactos.

Sea $\mathbf{p} = \{p_i, \beta_i^j\}$ una sucesión inversa de G -funciones y G -morfismos, donde

$\beta_i^j = (q_i^j, r_i^j)$ se representa por el diagrama conmutativo de G -funciones

$$\begin{array}{ccc} E_i & \xleftarrow{q_i^j} & E_j \\ p_i \downarrow & & \downarrow p_j \\ B_i & \xleftarrow{r_i^j} & B_j \end{array}$$

Un cono $\{\beta_i\} = \{(q_i, r_i)\} : p \rightarrow \mathbf{p}$ (esto es, una familia de G -morfismos $\{\beta_i = (q_i, r_i) : p \rightarrow p_i\}$ tales que $\beta_i^j \circ \beta_j = \beta_i$ para todo $i \leq j$) se llama una **G -resolución de p** si los conos $\{q_i\} : E \rightarrow \{E_i, q_i^j\}$ y $\{r_i\} : E \rightarrow \{B_i, r_i^j\}$ son G -resoluciones de E y B , respectivamente.

Sea $\mathbf{p} = \{p_i, \beta_i^j\}$ una sucesión inversa de G -funciones y G -morfismos. En vista del Teorema 3.2.3, podemos construir inductivamente un diagrama conmutativo de G -morfismos de la siguiente manera: En primer lugar hacemos $\tilde{p}_0 = p_0$ y $\sigma_0 = id_{p_0}$, enseguida factorizamos β_0^1 con lo que obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & coCyl(\beta_0^1) & \\ \tilde{\beta}_0^1 \swarrow & & \swarrow \sigma_1 \\ p_0 & \xleftarrow{\beta_0^1} & p_1 \end{array} \quad (3.3.1)$$

donde $\sigma_1 = (s_{q_0^1}, s_{r_0^1}) : p_1 \rightarrow coCyl(\beta_0^1)$ es un G -SDR-morfismo y $\tilde{\beta}_0^1 = (\tilde{q}_0^1, \tilde{r}_0^1) : coCyl(\beta_0^1) \rightarrow p_0$. Si hacemos $\tilde{p}_1 = coCyl(\beta_0^1)$ entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{p}_0 & \xleftarrow{\tilde{\beta}_0^1} & \tilde{p}_1 \\ \sigma_0 \uparrow & & \uparrow \sigma_1 \\ p_0 & \xleftarrow{\beta_0^1} & p_1 \end{array} \quad (3.3.2)$$

Ahora factorizamos el morfismo $\sigma_1 \circ \beta_1^2$ con lo que obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{coCyl}(\sigma_1 \circ \beta_1^2) & \\
 \tilde{\beta}_1^2 \swarrow & & \searrow \sigma_2 \\
 \tilde{p}_1 & \xleftarrow{\sigma_1 \circ \beta_1^2} & p_2
 \end{array} \tag{3.3.3}$$

donde $\sigma_2: p_2 \rightarrow \text{coCyl}(\sigma_1 \circ \beta_1^2)$ es un G -SDR-morfismo y $\tilde{\beta}_1^2: \text{coCyl}(\sigma_1 \circ \beta_1^2) \rightarrow \tilde{p}_1$. Si hacemos $\tilde{p}_2 = \text{coCyl}(\sigma_1 \circ \beta_1^2)$ entonces tenemos nuevamente un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{p}_1 & \xleftarrow{\tilde{\beta}_1^2} & \tilde{p}_2 \\
 \sigma_1 \uparrow & & \uparrow \sigma_2 \\
 p_1 & \xleftarrow{\beta_1^2} & p_2
 \end{array} \tag{3.3.4}$$

siguiendo este mismo procedimiento obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 \tilde{p}_0 & \xleftarrow{\tilde{\beta}_0^1} & \tilde{p}_1 & \xleftarrow{\tilde{\beta}_1^2} & \tilde{p}_2 & \leftarrow \dots & \leftarrow \tilde{p}_n & \xleftarrow{\tilde{\beta}_n^{n+1}} & \tilde{p}_{n+1} & \leftarrow \dots \\
 \sigma_0=id \uparrow & & \uparrow \sigma_1 & & \uparrow \sigma_2 & & \uparrow \sigma_n & & \uparrow \sigma_{n+1} & \\
 p_0 & \xleftarrow{\beta_0^1} & p_1 & \xleftarrow{\beta_1^2} & p_2 & \leftarrow \dots & \leftarrow p_n & \xleftarrow{\beta_n^{n+1}} & p_{n+1} & \leftarrow \dots
 \end{array} \tag{3.3.5}$$

donde cada G -morfismo $\sigma_n \circ \beta_n^{n+1}: p_{n+1} \rightarrow \tilde{p}_n$ se factoriza en la composición

$$p_{n+1} \xrightarrow{\sigma_{n+1}} \tilde{p}_{n+1} \xrightarrow{\tilde{\beta}_n^{n+1}} \tilde{p}_n$$

y además σ_{n+1} es un G -SDR-morfismo tal que $\tilde{p}_{n+1} = \text{coCyl}(\sigma_n \circ \beta_n^{n+1})$.

Por lo tanto \mathbf{p} produce la sucesión inversa $\tilde{\mathbf{p}} = \{\tilde{p}_i, \tilde{\beta}_i^j\}$. Denotaremos su límite inverso por $\mathcal{F}(\mathbf{p})$, esto es, $(\mathcal{F}(\mathbf{p}), \{\tilde{\beta}_i\}) = \lim_{\leftarrow} \tilde{\mathbf{p}}$. Ahora supongamos que $(p, \{\beta_i\}) = \lim_{\leftarrow} \mathbf{p}$. Entonces las inclusiones $\{\sigma_i\}$ inducen una inclusión única $\sigma: p \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{p})$ tal que $\tilde{\beta}_i \circ \sigma = \sigma_i \circ \beta_i$ para todo i .

El siguiente teorema, dado en la categoría $Map(G-\mathcal{M})$, es análogo al Teorema 2.4.1.

3.3. CONSTRUCCIÓN DE UNA EXTENSIÓN FIBRANTE EN $\text{MAP}(G\text{-TOP})$ 73

Teorema 3.3.3. *Sea G un grupo compacto metrizable y sea $p : E \rightarrow B$ una G -función de espacios compactos metrizables. Supongamos que $p \rightarrow \mathbf{p} = \{p_i, \beta_i^j\}$ es una G -resolución de p tal que cada p_i es una G -fibración de G -espacios metrizables. Entonces la inclusión inducida $\sigma : p \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{p})$ satisface las siguientes condiciones:*

(1) $\mathcal{F}(\mathbf{p})$ es una G -fibración,

(2) existe una G -deformación infinita fuerte de $\mathcal{F}(\mathbf{p})$ sobre $\sigma(p)$.

Si, más aún, cada p_i es una G -fibración de espacios G -fibrantes (en particular, de G -ANR's), entonces $\mathcal{F}(\mathbf{p})$ es una G -fibración de espacios G -fibrantes.

Demostración. Como todas las G -funciones p_i son G -fibraciones, todas las G -funciones \tilde{p}_i en el diagrama (3.3.5) son G -fibraciones también y los enlaces $\tilde{\beta}_i^{i+1}$ son G -fibrados por el Teorema 3.2.3(i). Esto implica que $\mathcal{F}(\mathbf{p})$ es una G -fibración y cada proyección $\tilde{\beta}_i : \mathcal{F}(\mathbf{p}) \rightarrow \tilde{p}_i$ es G -fibrado por la Proposición 3.1.7. Similarmente, si todas las p_i son G -fibraciones de espacios G -fibrantes entonces, usando el Teorema 3.2.3(ii) y la Proposición 3.1.7, concluimos que $\mathcal{F}(\mathbf{p})$ es también una G -fibración de espacios G -fibrantes.

Para probar la afirmación (2) usamos la notación tomada en la Definición 3.3.2, en particular, los morfismos β_i^j están representados por el diagrama (3.3.1). Supongamos también que las funciones y los morfismos en el diagrama (3.3.5) están dados por $\tilde{p}_i : \tilde{E}_i \rightarrow \tilde{B}_i$, $\tilde{\beta}_i^j = (\tilde{q}_i^j, \tilde{r}_i^j)$, $\sigma_i = (s_i, u_i)$. Sea $\tilde{p} = \mathcal{F}(\mathbf{p}) : \tilde{E} \rightarrow \tilde{B}$ y sean $\tilde{\beta}_i = (\tilde{q}_i, \tilde{r}_i) : \tilde{p} \rightarrow \tilde{p}_i$ las proyecciones. La inclusión $\sigma = (s, u) : p \hookrightarrow \tilde{p}$ consiste de los siguientes encajes $s : E \hookrightarrow \tilde{E}$ y $u : B \hookrightarrow \tilde{B}$.

Por la construcción del diagrama (3.3.5), para cada i , σ_i es un G -SDR-morfismo, esto es, existe una G -deformación fuerte de \tilde{p}_i sobre $\sigma_i(p_i)$ la cual por la Proposición 3.1.6, puede levantarse hacia alguna G -deformación fuerte

(D_i, F_i) :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{E} \times I & \xrightarrow{D_i} & \tilde{E} \\
 \tilde{p} \times id_I \downarrow & & \downarrow \tilde{p} \\
 \tilde{B} \times I & \xrightarrow{F_i} & \tilde{B}
 \end{array} \tag{3.3.6}$$

de \tilde{p} sobre $\tilde{\beta}_i^{-1}(\sigma_i(p_i))$ porque β_i es un morfismo G -fibrado *regular* (recordemos que todos los G -espacios se suponen metrizablees).

En particular, D_i es una G -deformación fuerte de \tilde{E} sobre $X_i = \tilde{q}_i^{-1}(s_i(E_i))$ para todo i . En la demostración del Teorema 2.4.1 ya hemos probado que la familia $\{D_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de las G -deformaciones determina una G -deformación infinita $\tilde{D} : \tilde{E} \times [0, \infty) \rightarrow \tilde{E}$ de \tilde{E} en $s(E)$ dada por

$$\tilde{D}(x, t) = D_i(D_{i+1}(x, t - i), 1), \quad \text{cuando } t \in [i, i + 1].$$

Similarmente, definimos una G -deformación fuerte infinita

$$\tilde{F} : \tilde{B} \times [0, \infty) \rightarrow \tilde{B}$$

de \tilde{B} sobre $u(B)$ por

$$\tilde{F}(x, t) = F_i(F_{i+1}(x, t - i), 1), \quad \text{cuando } t \in [i, i + 1].$$

Es fácil ver que $\tilde{p} \circ \tilde{D} = \tilde{F} \circ (\tilde{p} \times id_{[0, \infty)})$ usando la conmutatividad del diagrama (3.3.6) para cada i . En efecto, supongamos que $x \in \tilde{E}$ y $t \in [0, \infty)$; si $t \in [i, i + 1]$ entonces

$$\begin{aligned}
 \tilde{p} \circ \tilde{D}(x, t) &= \tilde{p} \circ D_i(D_{i+1}(x, t - i), 1) = F_i \circ (\tilde{p} \times id_I)(D_i(x, t - i), 1) \\
 &= F_i \circ (\tilde{p}(D_i(x, t - i)) \times id_I(1)) = F_i(\tilde{p}(D_i(x, t - i)), 1) \\
 &= F_i(F_{i+1} \circ (\tilde{p} \times id_I)(x, t - i), 1) = F_i(F_{i+1}(\tilde{p}(x), t - i), 1)
 \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\tilde{F} \circ (\tilde{p} \times id_{[0, \infty)})(x, t) = \tilde{F}(\tilde{p}(x), t) = F_i(F_{i+1}(\tilde{p}(x), t - i), 1).$$

En consecuencia (\tilde{D}, \tilde{F}) es una G -deformación infinita fuerte de \tilde{p} sobre $\sigma(p)$.

□

3.4. Extensiones fibrantes sobre G/H

El siguiente lema afirma que los funtores del producto torcido y del límite inverso conmutan.

Lema 3.4.1. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto de Hausdorff G y sea $\mathbf{X} = \{X_i, q_i^{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión inversa de H -espacios. Si $X = \varprojlim \{X_i, q_i^j\}$ con proyecciones $q_i: X \rightarrow X_i$ entonces $\{G \times_H X_i, G \times_H q_i^{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión inversa de G -espacios y G -funciones que satisface*

$$G \times_H X = \varprojlim \{G \times_H X_i, G \times_H q_i^{i+1}\}$$

con proyecciones $G \times_H q_i: G \times_H X \rightarrow G \times_H q_i^{i+1}$.

Demostración. Trabajamos en la categoría $G\text{-TOP}_{G/H}$ de G -espacios sobre G/H , cuyos objetos son G -funciones $p: X \rightarrow G/H$ y cuyos morfismos de $p: X \rightarrow G/H$ a $q: Y \rightarrow G/H$ son G -funciones $f: X \rightarrow Y$ tales que $q \circ f = p$.

Se sabe que si G es compacto de Hausdorff y H es un subgrupo cerrado de G , entonces las categorías $H\text{-TOP}$ y $G\text{-TOP}_{G/H}$ son equivalentes (ver [18, Ch. I, p. 33]), por lo tanto el functor $S: H\text{-TOP} \rightarrow G\text{-TOP}_{G/H}$, $X \mapsto p: G \times_H X \rightarrow G/H$, donde $p([g, x]) = gH$, es adjunto por izquierda y por derecha del functor $T: G\text{-TOP}_{G/H} \rightarrow H\text{-TOP}$, $q: Y \rightarrow G/H \mapsto q^{-1}(eH)$. Además para cada par de objetos $X \in H\text{-TOP}$ y $q \in G\text{-TOP}_{G/H}$ existe una biyección entre los conjuntos $H\text{-TOP}(T(q), X)$ y $G\text{-TOP}_{G/H}(q, S(X))$ de H -funciones y G -funciones, respectivamente. En particular, existe una biyección que asocia a cada G -función de la forma $Y \rightarrow G \times_H X$ una H -función de la forma $q^{-1}(eH) \rightarrow X$.

Esta biyección será utilizada para dar la prueba del teorema. Adicionalmente utilizamos el funtor $F: G-TOP_{G/H} \rightarrow G-TOP$, que asocia cada G -función de la forma $q: Y \rightarrow G/H$ con el G -espacio Y , y cada G -función $f: X \rightarrow Y$ entre objetos p y q a ella misma.

Aplicamos el funtor S a los elementos de la sucesión inversa \mathbf{X} , con lo que obtenemos la siguiente sucesión inversa en $G-TOP_{G/H}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 G \times_H X_1 & \xleftarrow{G \times_H q_1^2} & G \times_H X_2 & \xleftarrow{\dots} & G \times_H X_i & \xleftarrow{\dots} & \\
 & \searrow^{t_1} & \searrow^{t_2} & & \searrow^{t_i} & & \\
 & & & & & & G/H
 \end{array} \tag{3.4.1}$$

Deseamos probar que $p: G \times_H X \rightarrow G/H$ junto con $\{G \times_H q_i: G \times_H X \rightarrow G \times_H X_i\}$ es el límite inverso de la sucesión inversa (3.4.1) en $G-TOP_{G/H}$. Para ello, sea $\tilde{p}: Z \rightarrow G/H$ una G -función en donde Z es un G -espacio arbitrario y, sea $\{p_i: Z \rightarrow G \times_H X_i\}$ un cono sobre el diagrama (3.4.1) es decir, que satisface $G \times_H q_i^j \circ p_j = p_i$, para cada $i \leq j$. Además se cumple que $t_i \circ p_i = \tilde{p}$ para cada i .

Por otro lado, como G es compacto y H su subgrupo cerrado, entonces $Z = G \times_H A$ donde $A = \tilde{p}^{-1}(eH)$. Por la biyección dada, para cada G -función p_i se tiene una H -función $\tilde{p}_i: A \rightarrow X_i$, que forma un cono para la sucesión inversa \mathbf{X} . Entonces por la propiedad universal del límite inverso, existe una H -función única $\hat{p}: A \rightarrow X$ tal que $q_i \circ \hat{p} = \tilde{p}_i$ para cada i . Nuevamente utilizando la biyección dada, para la H -función \hat{p} se tiene una G -función $G \times_H \hat{p}: G \times_H A \rightarrow G \times_H X$ que satisface $p \circ G \times_H \hat{p} = \tilde{p}$, además para cada i se cumple

$$G \times_H q_i \circ G \times_H \hat{p} = S(q_i \circ \hat{p}) = S(\tilde{p}_i) = p_i.$$

Puede verificarse fácilmente que la G -función $G \times_H \hat{p}$ es única. Al aplicar el funtor F observamos que existe una G -función única $G \times_H \hat{p}: Z \rightarrow G \times_H X$

que cumple $G \times_H q_i \circ G \times_H \hat{p} = p_i$ para cada i , por lo tanto

$$G \times_H X = \varprojlim \{G \times_H X_i, G \times_H q_i^{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$$

con proyecciones $G \times_H q_i$. \square

Proposición 3.4.2. *Sea $p : E \rightarrow G/H$ una G -función, donde G es un grupo compacto metrizable y H es su subgrupo cerrado. Si E es un G -espacio compacto metrizable, entonces para cualquier sucesión pro-Lie $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de subgrupos de G , existe una G -ANR-resolución $p \rightarrow \mathbf{p} = \{p_i, \alpha_i^j\}$ de p que consiste de las G -fibraciones $p_i : E_i \rightarrow G/HN_i$.*

Si hacemos $S = p^{-1}(eH)$, entonces E puede identificarse con el producto torcido $G \times_H S$ por medio del G -homeomorfismo canónico $G \times_H S \rightarrow E$, dado por $[g, s] \mapsto gs$.

Además podemos considerar el H -espacio S como un subconjunto invariante cerrado de algún H -AR-espacio M (ver por ejemplo, [1]).

Demostración. (De la Proposición 3.4.2) Utilizando la Proposición 2.3.2 ya tenemos el H -espacio S , así como su base de vecindades $\{W_i\}$ en M . Para una sucesión pro-Lie dada $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de subgrupos de G sea $V_i = G \times_H W_i$ y definamos E_i como el espacio N_i -orbital de V_i , esto es, $E_i = V_i/N_i$ para cada i . Note que debido a la elección de $\{W_i\}$ tenemos una sucesión decreciente de G -espacios abiertos $\{V_i\}$ en $G \times_H M$ los cuales forman una base de vecindades de $G \times_H S$ en $G \times_H M$. En efecto, como W_i es abierto en M para cada i , entonces $G \times W_i$ es abierto en $G \times M$ para cada i . Además como cualquier proyección orbital es abierta entonces $G \times_H W_i$ es abierto en $G \times_H M$ para cada i . Sólo resta probar que $\{V_i\}$ es una base de vecindades de $G \times_H S$. Sea U una G -vecindad abierta de $G \times_H S$ en $G \times_H M$ y sea $\pi : G \times_H M \rightarrow G/H$ una G -función dada por $[g, x] \mapsto gH$, entonces $M = \pi^{-1}(eH)$. Sea $\hat{U} = U \cap M$,

entonces \widehat{U} es claramente una H -vecindad abierta de S en M , además se tiene que $G\widehat{U} = U$. De verdad, ya que si tomamos $u \in U$ tal que $\pi(u) = gH$ entonces tenemos

$$\begin{aligned} \pi(g^{-1}u) = eH &\Rightarrow g^{-1}u \in M \Rightarrow g^{-1}u \in U \cap M = \widehat{U} \\ &\Rightarrow u \in g\widehat{U} \subset G\widehat{U} \end{aligned}$$

Por lo tanto $U \subseteq G\widehat{U}$, además la otra inclusión es inmediata. Ahora, como $\{W_i\}$ es un sistema de vecindades de S en M , existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $W_n \subset \widehat{U}$, pero esto implica que

$$V_n = G \times_H W_n \subset G \times_H \widehat{U} = G\widehat{U} \rightarrow V_n \subset U$$

Por la Proposición 2.3.2 tenemos que $S = \varprojlim \{W_i, \iota_i^j\}$, donde ι_i^j son las inclusiones naturales, además por el Lema 3.4.1 se cumple $G \times_H S = \varprojlim \{V_i, G \times_H \iota_i^j\}$.

Por otro lado definimos para $j \geq i$, la G -función $q_i^j : E_j \rightarrow E_i$ por medio de $q_i^j(N_j(v_j)) = N_i(v_j)$, así obtenemos la sucesión inversa $\mathbf{E} = \{E_i, q_i^j\}$.

Afirmación:

$$E = G \times_H S = \varprojlim \mathbf{E} \tag{3.4.2}$$

con las proyecciones naturales $q_i : E \rightarrow E_i$ dadas por $q_i([g, s]) = N_i([g, s])$. En este punto, hacemos un paréntesis para dar una prueba detallada de la última afirmación.

Sea Y un G -espacio y $\{f_i : Y \rightarrow E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de G -funciones que satisface $q_i^j \circ f_j = f_i$ para $j \geq i$. Sea $y \in Y$ y sea para cada i , $f_i(y) = x_i$. Sea $\pi_i : V_i \rightarrow E_i$ la proyección N_i -orbital, entonces como G es compacto y N_i es un subgrupo cerrado de G , π_i es perfecta para cada i .

Como π_i es perfecta y sobreyectiva entonces $\pi_i^{-1}(x_i)$ es compacta y no vacía para cada i , además como $\pi_i^{-1}(x_i) \supseteq \pi_j^{-1}(x_j)$ para $i \leq j$, concluimos

que

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \pi_i^{-1}(x_i) \neq \emptyset$$

Más precisamente, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \pi_i^{-1}(x_i) \subset E$ consta de un solo punto. Sea $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \pi_i^{-1}(x_i)$ entonces $x \in \pi_i^{-1}(x_i)$ para cada i es decir $\pi_i(x) = x_i$ para cada i , por lo tanto

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \pi_i^{-1}(x_i) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \pi_i^{-1}(\pi_i(x))$$

Por otro lado observemos que $\pi_i^{-1}(\pi_i(x)) = N_i(x)$ para cada i , además cada órbita $N_i(x)$ es compacta y como $N_i(x) \supseteq N_j(x)$ para $i \leq j$, se sigue que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} N_i(x)$ es no vacía, más aún, ya que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} N_i = \{e\}$ entonces $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} N_i(x) = \{x\}$.

En conclusión escribimos

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \pi_i^{-1}(x_i) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \pi_i^{-1}(\pi_i(x)) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} N_i(x) = \{x\}$$

Luego podemos definir $f: Y \rightarrow E$ como $f(y) = x$.

Veamos ahora que f es continua. Sea A un subconjunto cerrado de E , entonces

$$f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\pi_i^{-1}(\pi_i(A))) = f_i^{-1}(\pi_i(A))$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Por otro lado, si $y \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} f_i^{-1}(\pi_i(A))$, entonces $f_i(y) \in \pi_i(A)$, lo que significa que $\pi_i^{-1}(f_i(y)) \cap A \neq \emptyset$ para cada $i \in \mathbb{N}$. La familia $(\pi_i^{-1}(f_i(y)) \cap A)_{i \in \mathbb{N}}$ forma una sucesión decreciente de subconjuntos compactos, luego $(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \pi_i^{-1}(f_i(y))) \cap A \neq \emptyset$ y como

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \pi_i^{-1}(f_i(y)) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \pi_i^{-1}(x_i) = \{x\} = f(y),$$

concluimos que $f(y) \in A$, así obtenemos

$$f^{-1}(A) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} f_i^{-1}(\pi_i(A)).$$

Por lo tanto $f^{-1}(A)$ es cerrado ya que, para cada i , π_i es una función cerrada. Esto prueba la continuidad de f . La unicidad de f se verifica fácilmente.

Finalmente se cumple que

$$q_i \circ f(y) = q_i(x) = N_i(x) = \pi_i(x) = x_i = f_i(y).$$

Por lo tanto se cumple la ecuación (3.4.2). Más aún, el mapeo $\{q_i\} : E \rightarrow \mathbf{E}$ es una G -resolución. Para ver esto, observe que para un i dado, la familia $\{V_j/N_i\}_{j \geq i}$ es una base de vecindades abiertas de $q_i(E) = (G \times_H S)/N_i$ en $E_i = V_i/N_i$. De verdad, sea U una G -vecindad abierta de $q_i(E) = (G \times_H S)/N_i$ en $E_i = V_i/N_i$. Debemos probar que existe un n tal que $V_n/N_i \subset U$, para ello consideramos la proyección N_i -orbital $\pi : V_i \rightarrow E_i$. Sea $\widehat{U} = \pi^{-1}(U)$, entonces \widehat{U} es una G -vecindad abierta de $G \times_H S$ en V_i . Como $\{V_i\}$ es una base de vecindades de $G \times_H S$, entonces existe $n \leq i$ tal que $V_n \subset \widehat{U}$ y por lo tanto V_n/N_i es una vecindad abierta de $q_i(E)$ tal que $V_n/N_i \subset U$. Por otro lado tenemos que $V_j/N_i = q_i^j(E_j)$ para $j \geq i$, entonces esto prueba que la condición (2) de la Definición 2.3.1 se cumple para $\{q_i\}$.

Dado que existe un G -homeomorfismo natural (ver por ejemplo, [3, Proposition 2])

$$E_i = (G \times_H W_i)/N_i \rightarrow G/N_i \times_{HN_i/N_i} W_i/(N_i \cap H), \quad (3.4.3)$$

el cual envía $N_i([g, w])$ a $[gN_i, (N_i \cap H)(w)]$, probaremos que cada E_i es un G -ANR. En efecto, cada $W_i/(N_i \cap H)$ es un $H/(N_i \cap H)$ -ANR por [4, Theorem 1.1], debido a que W_i es un H -ANR como H -subconjunto abierto del H -AR-espacio M . Por otra parte, HN_i/N_i es un subgrupo grande (ver por ejemplo [11, Definition 2.4]) de G/N_i ya que G/N_i es de Lie. Además debido a que el grupo $H/(N_i \cap H)$ es isomorfo al subgrupo HN_i/N_i de G/N_i (por medio de la correspondencia $h(N_i \cap H) \mapsto hN_i$), entonces $W_i/(N_i \cap H)$ es un HN_i/N_i -ANR y, por [3, Proposition 8] el producto torcido en la parte

derecha de (3.4.3) es un G/N_i -ANR. En consecuencia $E_i = (G \times_H W_i)/N_i$ es también un G/N_i -ANR y por lo tanto un G -ANR.

Ahora definimos $p_i : E_i \rightarrow G/(HN_i)$ por medio de $p_i(N_i([g, w_i])) = gHN_i$. En otras palabras, p_i es la función de los espacios N_i -orbitales inducida por la función natural $G \times_H W_i \rightarrow G/H$, $[g, w_i] \rightarrow gH$. Obviamente p_i es una G/N_i -función (y por tanto una G -función) tal que $p_i \circ q_i = \bar{\pi}_i \circ p$ y $p_i \circ q_i^j = \bar{\pi}_i^j \circ p_j$ para $j \geq i$, donde $\bar{\pi}_i : G/H \rightarrow G/(HN_i)$ y $\bar{\pi}_i^j : G/(HN_j) \rightarrow G/(HN_i)$ son proyecciones. De verdad, pues para $[g, s] \in E$ podemos escribir

$$p_i \circ q_i([g, s]) = p_i(N_i([g, s])) = gHN_i,$$

y

$$\bar{\pi}_i \circ p([g, s]) = \bar{\pi}_i(gH) = gHN_i.$$

Además para $N_j([g, w_j]) \in E_j$ escribimos

$$p_i \circ q_i^j(N_j([g, w_j])) = p_i(N_i([g, w_j])) = gHN_i,$$

y

$$\bar{\pi}_i^j \circ p_j(N_j([g, w_j])) = \bar{\pi}_i^j(gHN_j) = gHN_i.$$

En consecuencia tenemos los morfismos $\alpha_i = (q_i, \bar{\pi}_i) : p \rightarrow p_i$ y $\alpha_i^j = (q_i^j, \bar{\pi}_i^j) : p_j \rightarrow p_i$.

Por otro lado, para la sucesión pro-Lie dada $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ se cumple que

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (N_i H) = H. \quad (3.4.4)$$

En efecto, si $x \in \bigcap (N_i H)$ entonces $x \in N_i H$ para cada i , y dado que $\{N_i\}$ es decreciente entonces existe $n \in \bigcap N_i$ y $h \in H$ tales que $x = nh$, pero $\bigcap N_i = \{e\}$ por lo que $n = \{e\}$ y $x \in H$, de modo que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (N_i H) \subseteq H$. Además la otra inclusión es inmediata. Utilizando la ecuación (3.4.4) y el

hecho de que G/H es metrizable, entonces por la Proposición 1.2.5 tenemos que

$$(G/H, \{\bar{\pi}_i\}) = \varprojlim \{G/(HN_i), \bar{\pi}_i^j\}$$

y, debido a que $\bar{\pi}_i$ es sobreyectiva para cada i entonces $\{\bar{\pi}_i\} : G/H \rightarrow \{G/(HN_i), \bar{\pi}_i^j\}$ es una G -resolución. Como G/N_i es un grupo de Lie para cada i , todos los espacios cocientes $G/(HN_i)$ son G -ANR's debido a, por ejemplo, [4, Proposition 2.2]. Por lo tanto concluimos que $\{\alpha_i\} : p \rightarrow \{p_i, \alpha_i^j\}$ es una G -ANR-resolución.

Finalmente, cada p_i puede considerarse como una G/N_i -función $E_i \rightarrow (G/N_i)/(HN_i/N_i)$ y, debido a que G/N_i es un grupo compacto de Lie, una G/N_i -fibración (ver por ejemplo, [11, Proposition 3.1]). Así p_i es también una G -fibración por [16, Proposition 2.1(a)]. \square

Teorema 3.4.3. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto metrizable G . Sea $p : E \rightarrow G/H$ una G -función, donde E es un G -espacio compacto metrizable. Entonces E admite una extensión G -fibrante $i : E \hookrightarrow \widehat{E}$ junto con el diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} E & \xhookrightarrow{i} & \widehat{E} \\ & \searrow p & \swarrow \widehat{p} \\ & & G/H \end{array} \tag{3.4.5}$$

donde \widehat{p} es una G -fibración fuerte para la cual existe una G -deformación infinita fuerte $\widehat{D} : \widehat{E} \times [0, \infty) \rightarrow \widehat{E}$ de \widehat{E} en $i(E)$ sobre G/H , esto es, que satisface la igualdad $\widehat{p} \circ \widehat{D}(y, t) = \widehat{p}(y)$ para todo $(y, t) \in \widehat{E} \times [0, \infty)$.

Si $S = p^{-1}(eH)$ y $\widehat{S} = \widehat{p}^{-1}(eH)$, entonces la restricción $\widehat{i} : S \hookrightarrow \widehat{S}$ del encaje i es una extensión H -fibrante de S .

Demostración. Por la Proposición 3.4.2 podemos encontrar una G -ANR-resolución $\mathbf{p} = \{p_i, \alpha_i^j\}$ de p tal que cada p_i es una G -fibración de G -ANR's.

Ahora aplicando el Teorema 3.3.3 tenemos una G -extensión \tilde{p} de p representada por el diagrama conmutativo de G -funciones

$$\begin{array}{ccc} E \hookrightarrow & \tilde{E} & \\ p \downarrow & & \downarrow \tilde{p} \\ G/H \hookrightarrow & \tilde{B} & \end{array} \quad (3.4.6)$$

donde \tilde{p} es una G -fibración fuerte. Más aún, existe una G -deformación infinita fuerte $(\tilde{D}, D) : \tilde{p} \times id_{[0, \infty)} \rightarrow \tilde{p}$ de \tilde{p} en p . Haciendo $\hat{E} = \tilde{p}^{-1}(G/H)$ y $\hat{p} = \tilde{p}|_{\hat{E}}$, obtenemos el diagrama (3.4.5) como una restricción de (3.4.6). Como $D(b, t) = b$ para todo $b \in G/H$ y $t \in [0, \infty)$, tenemos $\tilde{p}\tilde{D}(y, t) = D(\tilde{p}(y), t) = \tilde{p}(y)$ para todo $y \in \hat{E}$ y $t \in [0, \infty)$. Por lo tanto $\tilde{D}(\hat{E} \times [0, \infty)) \subset \hat{E}$, pues en caso contrario deben existir $y_0 \in \hat{E}$ y $t_0 \in [0, \infty)$ tales que $\tilde{D}(y_0, t_0) \notin \hat{E}$, así $\tilde{p} \circ \tilde{D}(y_0, t_0) \notin G/H$, pero por otro lado $\tilde{p} \circ \tilde{D}(y_0, t_0) = \tilde{p}(y_0) \in G/H$, por lo que se tiene una contradicción y por lo tanto debe cumplirse

$$\tilde{D}(\hat{E} \times [0, \infty)) \subset \hat{E},$$

con lo cual podemos definir la G -deformación infinita fuerte deseada \hat{D} como una restricción de \tilde{D} .

Para probar la última afirmación del teorema, primero note que \hat{S} es H -fibrante debido a que la función constante $\hat{S} \rightarrow \{eH\}$, como una restricción de \hat{p} es una H -fibración fuerte, (\hat{p} como G -fibración fuerte, es también una H -fibración fuerte por [8, Proposition 4.1(d)]). Más aún, tenemos $\hat{D}(\hat{S} \times [0, \infty)) \subset \hat{S}$ y por lo tanto la restricción de \hat{D} a $\hat{S} \times [0, \infty)$ nos da una H -deformación infinita fuerte de \hat{S} sobre $i(p^{-1}(eH)) = i(S)$. De modo que $\hat{i} : S \hookrightarrow \hat{S}$ es un H -SSDR-mapeo y por tanto una extensión H -fibrante. \square

Corolario 3.4.4. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo G compacto y metrizable y sea E un G -espacio compacto metrizable. Entonces una G -función*

$p : E \rightarrow G/H$ es una G -fibración fuerte si y sólo si $p^{-1}(eH)$ es un espacio H -fibrante.

Demostración. La parte “sólo si” es obvia (sólo hay que repetir el argumento de la prueba del Teorema 3.4.3 lo que muestra que \widehat{S} es H -fibrante).

Ahora supongamos que $S = p^{-1}(eH)$ es un espacio H -fibrante. Por el Teorema 3.4.3 (y en sus términos), tenemos la extensión H -fibrante $\widehat{i} : S \hookrightarrow \widehat{S}$. Para la función $id_S : S \rightarrow S$, como S es H -fibrante y \widehat{i} es un H -SSDR-mapeo, existe una H -función $\widehat{r} : \widehat{S} \rightarrow S$ tal que $\widehat{r} \circ \widehat{i} = id_S$. Identificando, como es usual, E y \widehat{E} con los productos torcidos $G \times_H S$ y $G \times_H \widehat{S}$, respectivamente, tenemos $i = G \times_H \widehat{i}$ (de verdad, $i([g, s]) = i(gs) = g\widehat{i}(s) = [g, \widehat{i}(s)]$). Como $i = G \times_H \widehat{i}$, entonces para la función $r : \widehat{E} \rightarrow E$, dada por $r = G \times_H \widehat{r}$, tenemos

$$\begin{aligned} r \circ i([g, s]) &= r([g, \widehat{i}(s)]) \\ &= [g, \widehat{r} \circ \widehat{i}(s)] \\ &= [g, s] \end{aligned}$$

por lo tanto $r \circ i = id_E$ y, más aún, $p \circ r = \widehat{p}$ (porque $p \circ r(g\widehat{s}) = p(g\widehat{r}(\widehat{s})) = gH = \widehat{p}(g\widehat{s})$), es decir, r es una G -retracción de \widehat{E} en E sobre G/H . Esto implica que p es una G -fibración fuerte al igual que \widehat{p} . Para verificarlo, dado el siguiente diagrama conmutativo de G -funciones, donde s es un G -SSDR-mapeo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow s & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{F} & G/H \end{array}$$

construimos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & E & \xleftarrow[r]{i} & \widehat{E} \\
 \downarrow s & & \downarrow p & & \\
 X & \xrightarrow{F} & G/H & &
 \end{array}$$

Como \widehat{E} es un espacio G -fibrante y s es un G -SSDR-mapeo, existe una G -función $\widehat{F}: X \rightarrow \widehat{E}$ tal que $\widehat{F} \circ s = i \circ f$. Definimos $\widetilde{F}: X \rightarrow E$ como $\widetilde{F} = r \circ \widehat{F}$, entonces se cumple

$$\widetilde{F} \circ s = r \circ \widehat{F} \circ s = r \circ i \circ f = id_E \circ f = f.$$

Por lo tanto \widetilde{F} es la función buscada. \square

3.5. Productos torcidos como G -fibrantes

Usaremos los resultados de la sección anterior en la prueba del siguiente teorema.

Teorema 3.5.1. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto metrizable G . Si $j: S \hookrightarrow \widetilde{S}$ es una extensión H -fibrante de un H -espacio compacto metrizable S , entonces $G \times_H j: G \times_H S \hookrightarrow G \times_H \widetilde{S}$ es una extensión G -fibrante de $G \times_H S$.*

Demostración. Primero tomaremos una extensión H -fibrante de S para la cual la afirmación del teorema se cumple a priori. Sea $E = G \times_H S$. Claramente, podemos asumir que S es un H -subconjunto de E (por la identificación $s \equiv [e, s] \in E$), así que $E = GS$. Entonces para la proyección natural $p: E \rightarrow G/H$, $gs \mapsto gH$, tenemos $S = p^{-1}(eH)$. Aplicando el Teorema 3.4.3 a p obtenemos la extensión H -fibrante deseada $\widehat{i}: S \hookrightarrow \widehat{S}$, debido a que la

G -función $G \times_H \widehat{i}$ puede identificarse con la extensión G -fibrante $i : E \hookrightarrow \widehat{E}$ dada por este teorema.

Ahora sea $j : S \hookrightarrow \widetilde{S}$ cualquier extensión H -fibrante. Entonces $G \times_H j$ es un G -SSDR-mapeo por [8, Proposition 4.1(c)]. Por lo tanto necesitamos sólo mostrar que $G \times_H \widetilde{S}$ es un espacio G -fibrante. Para esto usaremos la existencia de las H -funciones $\varphi : \widetilde{S} \rightarrow \widehat{S}$ y $\psi : \widehat{S} \rightarrow \widetilde{S}$ tales que $\psi \circ \varphi \simeq id_{\widetilde{S}}$.

Sea $s : A \hookrightarrow X$ un G -SSDR-mapeo y sea $f : A \rightarrow G \times_H \widetilde{S}$ una G -función. Por supuesto, debemos asumir $A \subset X$. Para completar la prueba debemos encontrar una G -función $\widetilde{f} : X \rightarrow G \times_H \widetilde{S}$ para la cual $\widetilde{f} \circ s = f$. Como $\widehat{E} = G \times_H \widehat{S}$ es G -fibrante, hay una G -función $F : X \rightarrow G \times_H \widehat{S}$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & G \times_H \widetilde{S} & \xrightarrow{G \times_H \varphi} & G \times_H \widehat{S} \\ \downarrow s & & & \nearrow F & \\ X & & & & \end{array}$$

conmuta. Haciendo $A' = f^{-1}(\widetilde{S})$ y $X' = F^{-1}(\widehat{S})$ obtenemos el diagrama conmutativo de H -funciones

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{f'} & \widetilde{S} & \xrightarrow{\varphi} & \widehat{S} \\ \downarrow s' & & & \nearrow F' & \\ X' & & & & \end{array}$$

donde f' y s' son las restricciones de f y s en A' y F' es la restricción de F en X' . Verifiquemos que $s(A') \subseteq X'$. Sea $a \in A' = f^{-1}(\widetilde{S})$, entonces $f(a) \in \widetilde{S}$, es decir, $f(a) = [e, \widetilde{s}]$. Entonces escribimos

$$\begin{aligned} F \circ s(a) &= G \times_H \varphi \circ f(a) = G \times_H \varphi([e, \widetilde{s}]) \\ &= [e, \varphi(\widetilde{s})] = [e, \widehat{s}] = \widehat{s}. \end{aligned}$$

por lo tanto $F \circ s(a) = \widehat{s}$, es decir, $s(a) \in F^{-1}(\widehat{s}) \in F^{-1}(\widehat{S}) = X'$.

Ahora para la H -función $\psi \circ F' : X' \rightarrow \widehat{S}$ tenemos

$$(\psi \circ F')|_{A'} = \psi \circ F' \circ s' = \psi \circ \varphi \circ f' \simeq f'.$$

Como \widetilde{S} es un espacio H -fibrante, el H -par (X', A') tiene la propiedad de extensión de homotopías con respecto a \widetilde{S} y por lo tanto f' puede extenderse a alguna H -función $\widetilde{f}' : X' \rightarrow \widetilde{S}$, así que $\widetilde{f}' \circ s' = f'$. Entonces la función $\widetilde{f} = G \times_H \widetilde{f}'$ es la extensión deseada de f . \square

Corolario 3.5.2. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto metrizable G . Sea S un H -espacio compacto metrizable. Si S es un espacio H -fibrante, entonces $G \times_H S$ es un espacio G -fibrante.*

Demostración. Como S es un espacio H -fibrante, la función identidad id_S es trivialmente una extensión H -fibrante de S . Por el Teorema 3.5.1, $G \times id_S = id_{G \times_H S} : G \times_H S \rightarrow G \times_H S$ es una extensión G -fibrante. En particular, $G \times_H S$ es un espacio G -fibrante. \square

3.6. Espacios orbitales de espacios G -fibrantes

Observación 3.6.1. *La propiedad de ser G -fibrante se preserva bajo G -retracciones.*

Verifiquemos la observación anterior. Sea $Y \subseteq Z$ tal que Z es G -fibrante y supongamos que existe una G -retracción $r : Z \rightarrow Y$. Para verificar que Y es G -fibrante, debemos encontrar para cualquier G -SSDR-mapeo $s : A \hookrightarrow X$ y cualquier G -función $f : A \rightarrow Y$, una G -función $\widetilde{f} : X \rightarrow Y$ para la cual $\widetilde{f} \circ s = f$. Para ello consideremos el siguiente diagrama, donde i es una

G -inclusión

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & Y & \hookrightarrow & Z \\ \downarrow s & & & & \\ & & & & X \end{array}$$

Como Z es G -fibrante, para la G -función $i \circ f$ existe una G -función $\bar{f}: X \rightarrow Z$ tal que $\bar{f} \circ s = i \circ f$. Ahora podemos definir $\tilde{f} = r \circ \bar{f}$, de modo que

$$\tilde{f} \circ s = r \circ \bar{f} \circ s = r \circ i \circ f = f,$$

ya que $r \circ i = id_A$. Por lo tanto Y es un espacio G -fibrante.

Lema 3.6.2. *Sea G un grupo compacto metrizable. Si Y es un espacio G -fibrante compacto metrizable y N es un subgrupo normal cerrado de G , entonces el conjunto de puntos N -fijos Y^N es un espacio G/N -fibrante (y por lo tanto es un espacio G -fibrante).*

Demostración. Como N es un subgrupo normal de G se sabe que Y^N es un G -espacio y que Y^N/N es un G/N -espacio, (ver por ejemplo [21, Proposición 2.4(2)]). La acción de N en Y^N es trivial por lo que $Y^N = Y^N/N$, de modo que podemos considerar a Y^N como G/N -espacio. Por [21, Proposición 2.8] Y^N es cerrado en Y y por lo tanto es compacto, de modo que por el Teorema 2.4.1, existe una G/N -deformación infinita fuerte de algún espacio G/N -fibrante $Z \supset Y^N$ en Y^N . Claramente, esta deformación puede considerarse como una G -deformación infinita fuerte y en consecuencia el encaje $s: Y^N \hookrightarrow Z$ es un G -SSDR-mapeo. Por la definición de un espacio G -fibrante existe una G -función $r: Z \rightarrow Y$ tal que $r|_{Y^N} = i$, donde $i: Y^N \hookrightarrow Y$ es un G -encaje natural. En otras palabras el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y^N & \xrightarrow{i} & Y \\ \downarrow s & \nearrow r & \\ & & Z \end{array}$$

conmuta.

Notemos que si $n \in N$ y $z \in Z$, entonces $n \cdot z = N * z = z$, en donde \cdot es la acción de G inducida por la acción $*$ de G/N en Z . De modo que todos los puntos de Z son N -fijos, y por lo tanto,

$$r(z) = r(n \cdot z) = n \cdot r(z).$$

Así $r(Z) \subseteq Y^N$ y en consecuencia podemos ver a r como una composición $i \circ r'$, donde $r': Z \rightarrow Y^N$ es una G -retracción.

Debido a que

$$r'(gN * z) = r'(g \cdot z) = g \cdot r'(z) = gN * r'(z),$$

r' puede considerarse también como una G/N -retracción, de modo que por la Observación 3.6.1 Y^N es G/N -fibrante. \square

Corolario 3.6.3. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto y metrizable G . Si X es un espacio G -fibrante compacto metrizable, entonces X^H es un espacio $N(H)/H$ -fibrante, donde $N(H)$ es el normalizador de H en G .*

Demostración. Por hipótesis $G/N(H)$ es metrizable, entonces por la Proposición 2.2.6(d), el espacio X es $N(H)$ -fibrante. Como H es un subgrupo normal de $N(H)$ y X es compacto, por el Lema 3.6.2, X^H es un espacio $N(H)/H$ -fibrante. \square

Observación 3.6.4. *Sea G un grupo compacto y de Hausdorff y sea X un G -espacio de Hausdorff con un solo tipo de órbitas (H). Entonces $G_x = H$ para todo $x \in X^H$ y además X^H es un $N(H)/H$ -espacio libre.*

Verifiquemos la observación anterior. Sea $x \in X^H$ entonces por definición se cumple $H \subseteq G_x$. Ahora, como X tiene un solo tipo de órbitas (H) entonces G_x y H son conjugados, es decir, existe $g_0 \in G$ tal que

$$g_0 G_x g_0^{-1} = H.$$

En ([21, p. 72]) se prueba que si X es de Hausdorff, entonces las órbitas G_x son cerradas para todo $x \in X$, además como G es compacto entonces por ([21, Proposición 3.5]), tenemos que

$$H = g_0 G_x g_0^{-1} = G_x,$$

así $G_x = H$.

Ya hemos visto que podemos considerar a X^H como un $N(H)/H$ -espacio. Así, para verificar que X^H es $N(H)/H$ -libre supongamos que para $x \in X^H$, existe $\{nH\} \in (N(H)/H)_x$ donde $n \in N(H)$, entonces escribimos

$$nH * x = x \implies n \cdot x = x \implies n \in G_x = H,$$

por lo tanto $N(H) = H$ y en conclusión X^H es $N(H)/H$ -libre.

Teorema 3.6.5. *Sea K un subgrupo normal cerrado de un grupo compacto metrizable G . Sea E un G -espacio compacto metrizable con un solo tipo de G -órbitas. Si E es G -fibrante, entonces E/K es un espacio G/K -fibrante.*

Demostración. Cuando todas las órbitas de E tienen tipo G/H para algún subgrupo cerrado H de G , por la Proposición 1.6.7 podemos considerar a E como el producto torcido $G \times_{N(H)} E^H$.

Vamos a utilizar la siguiente notación: $N = N(H)$ y $L = N(H) \cap K$. Notemos que L es un subgrupo normal cerrado de N . Se tiene el G/K -homeomorfismo:

$$E/K \approx G/K \times_{N/L} E^H/L \tag{3.6.1}$$

Recordemos que, E^H es un N -espacio que también puede considerarse como un N/H -espacio libre con la acción \cdot dada por $nH \cdot y = ny$ para $nH \in N/H$ y $y \in E^H$. Si $\beta : N \rightarrow N/H$ es la proyección natural, podemos decir que N actúa en E^H vía β (ya que $ny = \beta(n) \cdot y$). Como L es un subgrupo normal

cerrado de N , el subgrupo $\beta(L) = LH/H$ de N/H es también normal. Para cada $y \in E^H$ tenemos

$$L(y) = \{ny \mid n \in L\} = \{\beta(n) \cdot y \mid n \in L\} = \beta(L) \cdot y,$$

es decir las órbitas de E^H respecto a las acciones de L y $\beta(L)$ coinciden. Por lo tanto, podemos escribir

$$X = E^H/L = E^H/\beta(L),$$

donde X como E^H/L es un N/L -espacio con la acción $*$ dada por

$$nL * L(y) = L(ny), \quad nL \in N/L, \quad L(y) \in E^H/L, \quad y \in E^H,$$

mientras como $E^H/\beta(L)$ es un $(N/H)/\beta(L)$ -espacio con la acción \star que satisface:

$$(nH)\beta(L) \star (\beta(L) \cdot y) = \beta(L) \cdot (nH \cdot y) = L(ny) = nL * L(y),$$

donde $(nH)\beta(L) \in (N/H)/\beta(L)$ y $\beta(L) \cdot y \in E^H/\beta(L)$. En otras palabras, podemos decir que N/L actúa en E^H vía el homomorfismo

$$\bar{\beta} : N/L \rightarrow (N/H)/\beta(L), \quad nL \mapsto nH\beta(L).$$

Según el Corolario 2.5.3 $X = E^H/\beta(L)$ es $(N/H)/\beta(L)$ -fibrante ya que el N/H -espacio E^H es libre y N/H -fibrante por el Corolario 3.6.3. Por lo tanto $X = E^H/L$ es N/L -fibrante. Ahora, aplicando el Corolario 3.5.2, concluimos que E/K es G/K -fibrante en virtud del G/K -homeomorfismo (3.6.1). \square

Conclusiones

A continuación enlistamos las principales contribuciones de este trabajo de tesis.

El Teorema 2.5.2 prueba que si $s: E \hookrightarrow \tilde{E}$ es una extensión G -fibrante de E , entonces $s/K: E/K \hookrightarrow \tilde{E}/K$ es una extensión G/K -fibrante de E/K , cuando E es un G -espacio compacto, metrizable y libre, G un grupo compacto, metrizable y K es cualquier subgrupo normal cerrado de G . Este teorema es una generalización del resultado presentado en [16, Theorem 5.1], pues en este último, se obtiene el mismo resultado para el caso particular $K = G$.

De igual manera, el Teorema 3.6.5 prueba que si E es G -fibrante, entonces E/K es un espacio G/K -fibrante, cuando E es un G -espacio compacto, metrizable con un solo tipo de G -órbitas, G es un grupo compacto, metrizable y K es cualquier subgrupo normal cerrado de G . Este teorema es una generalización del resultado presentado en [16, Theorem 5.4], pues en este último, se obtiene el mismo resultado para el caso particular $K = G$.

Adicionalmente, en [11, Theorem 5.5] se prueba que la proyección K -orbital $\pi: E \rightarrow E/K$ es una G -fibración fuerte en las condiciones del Teorema 3.6.5 (aún sin la condición de compacidad para E). En esta situación, si suponemos que E/K es un espacio G/K -fibrante entonces usando la Proposición 2.2.5 (d), E/K es un espacio G -fibrante y por tanto, ya que π es

una G -fibración fuerte, concluimos que E es G -fibrante de acuerdo con la Proposición 2.2.2. De este modo, el Teorema 3.6.5 puede reescribirse con una doble implicación de la siguiente manera: *E es G -fibrante si y sólo si E/K es un espacio G/K -fibrante.*

En [9, Corollary 6.11] se afirma que si S es un espacio H -fibrante, entonces el producto torcido $G \times_H S$ es un espacio G -fibrante, cuando H es un subgrupo grande de un grupo compacto metrizable G . El Corolario 3.5.2 prueba este mismo resultado, sin que H sea subgrupo grande de G , pero con la hipótesis adicional de que S sea compacto.

Adicionalmente, en [9, Proposition 6.8(1)] se prueba que si el producto torcido $G \times_H S$ es un espacio G -fibrante, entonces S es un espacio H -fibrante (incluso sin la condición de compacidad para S). De este modo, el Corolario 3.5.2 puede reescribirse con una doble implicación de la siguiente manera: *S es H -fibrante si y sólo si $G \times_H S$ es un espacio G -fibrante.*

Como una consecuencia del Teorema 3.4.3, obtenemos una condición bajo la cual una G -función $p: E \rightarrow G/H$ es una G -fibración fuerte, donde E es un G -espacio compacto, metrizable y H es un subgrupo cerrado de un grupo compacto, metrizable G .

Finalmente algunos resultados principales de la tesis (Teorema 3.4.3, Corolario 3.4.4, Teorema 3.5.1, Corolario 3.5.2) se publicaron en el artículo [13]: A. Bykov, J. A. Sánchez Martínez, *G -fibrant extensions and twisted products*, Topology and its Applications, 201(2016), 157-170.

Bibliografía

- [1] S. Antonyan, *Equivariant embeddings into G -ARs*, Glasnik Mat., 22 (42) (1987), 503-533.
- [2] S. Antonyan, *Retraction properties of an orbit space*, Math. USSR Sbornik, 65 (1990), 305-321.
- [3] S. Antonyan, *Extensorial properties of orbit spaces of proper group actions*, Topology Appl., 98 (1999), 35-46.
- [4] S. Antonyan, *Compact group actions on equivariant absolute neighborhood retracts and their orbit spaces*, Topology Appl., 158 (2011), 141-151.
- [5] S. Antonyan, S. Mardešić, *Equivariant shape*, Fundamenta Mathematicae, 127 (1987), 213-224.
- [6] G. E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Acad. Press, Inc., New York (1972).
- [7] A. Bykov, *Proyecciones orbitales como G -fibraciones aproximativas*, 5^a Gran Semana Nacional de la Matemática, 5GSNM Memorias, BUAP, (2010), 249-266.
- [8] A. Bykov, *The homogeneous space G/H as an equivariant fibrant space*, Topology and its Appl., 157 (2010), 2604-2612.

- [9] A. Bykov, R. Juárez, *G-fibrations and twisted products*, Topology and its Appl., 196(2015) 379-397.
- [10] A. Bykov, A. L. Kantún, *Orbit projections and G-ANR-resolutions*, Glasnik Matemicki, 46(67) (2012), 193-205.
- [11] A. Bykov, A. L. Kantún, *Strong G-fibrations and orbit projections*, Topology and its Appl., 163 (2014), 46-65.
- [12] A. Bykov, B. Morales, *Cotelescopes and derived limits*, Topology and its Appl., 153 (2005), 327-336.
- [13] A. Bykov, J. A. Sánchez, *G-fibrant extensions and twisted products*, Topology and its Appl., 201(2016), 157-170.
- [14] A. Bykov, M. Taxis, *Equivariant fibrant spaces*, Glasnik Mat., 40(60) (2005), 323-331.
- [15] A. Bykov, M. Taxis, *Equivariant strong shape*, Topology and its Appl., 154 (2007), 2026-2039.
- [16] A. Bykov, A. Torres, *Fibrant extensions of free G-spaces*, Topology and its Appl., 159 (2012), 1179-1186.
- [17] F. Cathey, *Strong shape theory*, in: Shape Theory and Geometric Topology, in: Lecture notes in Math., Springer, Berlin, 870 (1981), 216-239.
- [18] T. Dieck, *Transformation groups*, Walter de Gruyter, Berlin-new York, 1987.
- [19] R. Engelking, *General Topology*, PWN, Warszawa (1989).
- [20] S.-T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit (1965).

- [21] S. de Neymet, *Introducción a los grupos topológicos de transformaciones*, Aportaciones Matemáticas, 23, SMM, 2005.
- [22] R. Palais, *The classification of G-spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., 36 (1960).
- [23] L. Pontriagin, *Topological groups*, Gordon and Breach Science Publishers., Switzerland, 1986.
- [24] M. Taxis, *Espacios fibrantes equivariantes y la categoría de Strong Shape equivariante*, Tesis doctoral, BUAP, 2005.

