BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

"ANÁLISIS DE SISTEMAS DINÁMICOS DESCRIBIENDO RELATIVIDAD GENERAL EN TRES DIMENSIONES"

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

M.C. Jaime Manuel Cabrera

ASESOR(ES):

Dr. Alberto Escalante Hernández

Puebla, México

Marzo 2016

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Instituto de Física "Luis Rivera Terrazas"

ANÁLISIS DE SISTEMAS DINÁMICOS DESCRIBIENDO RELATIVIDAD GENERAL EN TRES DIMENSIONES

Tesis presentada por

Jaime Manuel Cabrera

para obtener el grado de

Doctor en Ciencias
(Física)

Dirigida por
Dr. Alberto Escalante Hernández

Puebla, México
Marzo 2016

Agradecimientos

Deseo agradecer al Dr. Alberto Escalante Hernández, quien supo orientarme de la mejor manera posible y sobre todo por su gran paciencia a lo largo de todo este trabajo. A CONACYT por el apoyo económico otorgado a lo largo del Doctorado. Adicionalmente, agradezco todo el apoyo que me brindó el personal del IFUAP. También a todos y cada uno de aquellos que contribuyeron en mi formación académica, les digo MUCHAS GRACIAS.

Esta tesis se la dedico a mis padres, quienes me motivaron y me apoyaron para poder lograr mis metas. Quisiera expresarle mi gratitud a Suhail, por su paciencia y su cariño, a la Mosa, Pitipou, Einstein y Luna, por el amor incondicional y el tiempo que pasaron junto a mí durante mi formación profesional. También quiero darle las gracias a mi amigo Hugo quien me apoyó moralmente y me brindo su amistad incondicionalmente.

Gracias a Irving, Eladio, Jacob y al inolvidable Iván, gracias a cada uno por la amistad sincera que me brindaron.

Resumen

En este trabajo de tesis, se realiza el análisis Hamiltoniano de la acción exótica y de la teoría de Bonzom-Livine para gravedad en tres dimensiones. En el análisis, se determinan las simetrías de las teorías y se construyen los paréntesis de Dirac. Adicionalmente, se desarrolla el análisis simpléctico de Faddeev-Jackiw de las teorías bajo estudio, se encuentran los paréntesis generalizados de Faddeev-Jackiw y se demuestra la equivalencia de dichos paréntesis con los paréntesis de Dirac, en estos casos. Finalmente, se muestra que todos los resultados encontrados por el método de Dirac pueden obtenerse con el formalismo de Faddeev-Jackiw siendo éste más corto y práctico que el de Dirac.

Abstract

In this work, the Hamiltonian analysis for the exotic action and the Bonzom-Livine theory describing gravity in three dimensions is performed. We present the symmetries of the theories under study and the Dirac brackets are constructed. In addition, by using the symplectic framework of Faddeev-Jackiw all the relevant Dirac's results are reproduced; we prove that the Dirac brackets and the generalized Faddeev-Jackiw brackets coincide with each other, and we show that the symplectic method is more economic than Dirac's one.

Publicaciones

- Alberto Escalante and J. Manuel-Cabrera, *Hamiltonian dynamics of an exotic action for gravity in three dimensions*, Ann. Phys. 343, 27-39, (2014).
- Alberto Escalante and J. Manuel-Cabrera, *Faddeev–Jackiw quantization of an Abelian and non-Abelian exotic action for gravity in three dimensions*, Ann. Phys. 361, 585–604, (2015).
- Alberto Escalante and J. Manuel-Cabrera, *Hamiltonian Dynamics and Faddeev-Jackiw quantization of 3D gravity with a Barbero-Immirzi like parameter*, submitted to JHEP, (2015).

Contenido

Capítulo 1

Introducción

Uno de los grandes retos de la física actual es encontrar la formulación de una teoría cuántica de la gravedad, es decir, encontrar una teoría que logre la unificación de Relatividad General y la mecánica cuántica de una manera consistente. A pesar de que la mecánica cuántica y la Relatividad General [RG] son dificilmente compatibles debido a que tienen formulaciones conceptuales y matemáticas muy diferentes. Las pasadas dos décadas han sido de intensa investigación teórica con la intención de aclarar el camino y poder así obtener una teoría cuántica de la gravitación. Mucho del trabajo desarrollado en esas dos décadas, ha sido enfocado al entendimiento de las simetrías que están presentes en una teoría singular, tanto a nivel clásico como a nivel cuántico. Ejemplos de teorías singulares son; la teoría de RG, el modelo estándar de la física de partículas, teoría de cuerdas y la teoría de Yang-Mills. El estudio de las teorías singulares[1] es de mucha importancia, dado que en los casos más interesantes, llega a presentar una simetría muy relevante llamada simetría de norma, la cual nos da una clase de equivalencia entre estados físicos. Para el estudio a nivel clásico y cuántico de una teoría singular, tenemos a la mano un formalismo muy poderoso llamado el formalismo de Dirac [1–3]. Mucho de los grandes logros que se han dado en el entendimiento de la física de partículas, se debe al análisis de Dirac, puesto que nos ha dado un panorama general de cómo es la evolución dinámica de los grados de libertad tanto a nivel clásico como a nivel cuántico, particularmente hablando de los grados de libertad de la interacción electromagnética, electrodébil y de la interacción fuerte [4]. Por otro lado, también dentro del contexto de gravedad encontramos grandes avances que han permitido entender clásicamente la evolución dinámica de los grados de libertad del campo gravitacional, un ejemplo de ello se puede encontrar en la formulación llamada

[1] Una teoría singular es aquella en la cual la matriz dada por $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^m}$ es igual a cero.

ADM debida a Arnowitt-Deser-Misner [5], donde los grados de libertad son los asociados a la 3-métrica del espacio y su momento canónicamente conjugado. De la formulación *ADM* uno obtiene información física relevante como es: el campo gravitacional tiene dos grados de libertad físicos por punto del espacio, las transformaciones de norma son los difeomorfismos y el Hamiltoniano extendido es una combinación lineal de restricciones. Sin embargo, al querer realizar la cuantización, uno encuentra varios problemas debido a que la no linealidad del campo gravitacional se manifiesta en las restricciones, y resolver dichas restricciones en esta formulación, la cual es una parte importante para cuantizar la teoría, hasta la fecha no ha sido posible [6].

Por otra parte, debido a las complicaciones que uno encuentra en la formulación *ADM* y tomando en cuenta el éxito que se encuentra en las teorías de norma, nace la intención de reformular la RG como una teoría de conexiones análoga a la teoría de Yang-Mills, es decir, una teoría donde la variable de configuración sea una conexión en vez de la 3-métrica que se usa en la formulación *ADM*. Esta formulación es conocida como Palatini [7], donde las variables de campo ahora son una tétrada y una conexión (llamada conexión de espín) valuada en el álgebra del grupo $SO(3,1)$. Dichas variables proporcionan las ecuaciones de movimiento del campo gravitacional. La formulación de Palatini tiene la ventaja de que ahora la RG puede verse como una teoría de conexiones, sin embargo, al realizar el análisis hamiltoniano uno encuentra restricciones de primera y segunda clase, y como sabemos, la presencia de restricciones de segunda clase nos lleva a generalizar el paréntesis de Poisson al de Dirac. Este hecho hace que dicha formulación sea tediosa, dado que las restricciones de segunda clase no tienen una estructura sencilla y es por ello que se inicia la búsqueda de otra formulación la cuál simplifique el análisis hamiltoniano tal como lo podemos ver en las referencias [8–19]. De esta manera, nace en los 80's la formulación de Ashtekar donde ahora la variable dinámica es una conexión valuada en $SL(2,C)$ [8]. Una de las ventajas de la formulación de Ashtekar, es que se elimina el término de potencial que está presente en la restricción Hamiltoniana de la formulación ADM. En efecto, las restricciones en la formulación de Ashtekar son polinomiales, sin embargo, la simplicidad de las restricciones se ve opacada debido a que dicha formulación describe RG compleja, y si se quiere extraer los grados de libertad reales de RG, uno tiene que imponer condiciones de realidad sobre las variables del espacio fase de la teoría. Cabe mencionar, que dichas condiciones de realidad dificultan el tratamiento cuántico de la teoría. Después de los trabajos de Ashtekar, vinieron trabajos como los de Samuel [13], Capovilla-Dell-Jacobson-Mason [18], donde ahora se trabaja con la formulación autodual de RG, sin embargo, dichas formulaciones siguen describiendo RG compleja. El panorama de la formulación Hamiltoniana de RG en términos de una conexión real se vio aclarado hasta los años 90's, cuando Barbero [16] desarrolla la formulación Hamiltoniana de RG empleando una conexión real valuada en el grupo $SO(3)$. Cabe mencionar que en la formulación de Barbero para RG Lorentziana la no polinomialidad de la restricción Hamiltoniana se hace nuevamente presente, para el caso de RG Euclideana las restricciones mantienen su sencillez y estructura polinomial. Un año más tarde de que Barbero presentara su formulación, Holst [17] encuentra a nivel Lagrangiano una acción que incluye los casos ADM, Ashtekar y Barbero, dicha acción depende de un parámetro llamado parámetro de Barbero-Immirzi, y dependiendo de los valores que tome dicho parámetro se pueden obtener las diversas formulaciones de RG previamente citadas.

Por otra parte, debido a las complicaciones que se encuentran en los diversos análisis Hamiltonianos de RG, nace la inquietud de analizar a la teoría gravitacional en dimensiones menores a cuatro. Por ejemplo RG en tres dimensiones, esto con el objetivo de que parte de lo aprendido y desarrollado en el caso 3D, se pueda aplicar o extender para el caso de gravedad en 4D.

Los trabajos sobre gravedad en 3D se remontan hasta alrededor de 1963, cuando Staruszkiewicz expone que los efectos geométricos globales no triviales en la teoría tridimensional de Einstein se manifiestan aún en las circunstancias más simples, incluyendo espacio-tiempos que albergan como fuentes de curvatura a una masa puntual. Tomando la constante cosmológica igual a cero, un espacio tiempo como el descrito será plano salvo a lo largo de la línea de mundo de la partícula. Si el espacio-tiempo es estático, fácilmente pueden encontrarse coordenadas para las cuales cada una de las secciones espaciales con $t = constante$ son idénticas. Esas secciones espaciales serán planas en todos lados excepto en un punto, que es donde se aloja la partícula; Staruszkiewicz, fue el primero en exponer estos argumentos geométricos, mostrando así que el espacio-tiempo tridimensional producido por una masa puntual se obtiene removiendo una porción (cuña) del espacio de Minkowski e identificando puntos opuestos de la cuña [20]. Los siguientes veinte años hubo más trabajos sobre gravedad en 3D, sobre todo con los trabajos de A. Schwarz[2], Deser, Jackiw, 't Hoof [3] y Witten [21–26]. Respecto a este punto, en [26] Witten mostró que la acción de Palatini con un grupo de estructura $SO(2,1)$ y sin constante cosmológica es equivalente a la teoría de Chern-Simons [CS] definida con el grupo de Poincaré $ISO(2,1)$. Por otra parte, para el caso en el cual la constante cosmológica es distinta de cero, se encuentra que la acción de Palatini con un grupo de estructura

[2]A. Schwartz [21] utilizo el caso Abeliano de la teoría de Chern-Simons para construir la función de partición de una lagrangiana cuadrática degenerada y muestra que el invariante de Ray-Singer puede interpretarse como una función de partición de una funcional cuadrática degenerada.

[3]Los argumentos mencionados por Staruszkiewicz fueron extendidos por Deser, Jackiw y 't Hooft, quienes resolvieron explícitamente las ecuaciones de campo en tres dimensiones con constante cosmológica igual a cero y un número arbitrario de fuentes puntuales, mostrando que la porción que se remueve en cada partícula, es proporcional a la masa de la misma.

$SO(2,1)$ es equivalente a la teoría de CS basada en el grupo $SO(3,1)$ si la constante cosmológica es negativa, y se tiene a CS basada en el grupo $SO(2,2)$ si la constante cosmológica es positiva[4]. Sin embargo, apesar de la equivalencia entre la acción de Palatini y la acción de CS, se puede apreciar una diferencia en ambas acciones. Dicha diferencia radica en que en la teoría de Palatini la triada está restringida a ser invertible, mientras que en CS tal restricción no existe. De hecho podemos pensar que la teoría de CS es una extensión de gravedad en 3D o podemos decir que gravedad en 3D es una versión restringida de la teoría de CS [27]. Además del resultado encontrado por Witten previamente comentado, también se da otro resultado importante. Witten presenta una acción alterna a la acción de Palatini con constante cosmológica para gravedad en 3D, la denominada "acción exótica" [26]. La acción exótica es una acción que depende de la triada y de una conexión valuada en el grupo $SO(2,1)$. Esta reproduce las mismas ecuaciones de movimiento que la acción de Palatini con constante cosmológica. Sin embargo, a pesar de que la acción de Palatini y la acción exótica comparten las mismas ecuaciones de movimiento, esto no es una condición suficiente para concluir que son equivalentes. En efecto, en la literatura podemos encontrar varios ejemplos en los cuales dos acciones diferentes que reproducen las mismas ecuaciones de movimiento, no son necesariamente equivalentes sea a nivel clásico que a nivel cuántico. Un ejemplo muy sencillo de lo comentado anteriormente lo podemos encontrar en [28]. Allí se realiza el análisis canónico de una acción alterna a la acción convencional que describe el campo electromagnético propuesta en [29]. La variación de la acción alterna conduce a las mismas ecuaciones de Maxwell, sin embargo, al realizar el análisis Hamiltoniano de la acción alterna se encuentra que la estructura simpléctica no coincide con la conocida en la teoría de Maxwell. Además, la simetría de norma y simetrías tales como paridad, estan ausentes. En otras palabras, la teoría alterna no es una teoría de norma, no es invariante bajo paridad y el número de grados de libertad físicos es cuatro y no dos como corresponde a la teoría de Maxwell.

De esta manera, a pesar de que la acción de Palatini y la acción exótica comparten las mismas ecuaciones de movimiento, se necesita hacer un análisis detallado de ambas acciones para saber hasta que punto son equivalentes; cabe mencionar que en [26, 30] existe un análisis de la acción exótica tanto a nivel Lagrangiano como a nivel Hamiltoniano, sin embargo, estos análisis son parciales. Es decir, el análisis Hamiltoniano realizado en [26, 30] está hecho en el espacio fase reducido, esto significa que solo se le asocian momentos canónicos conjugados a aquellas variables que aparecen en la acción con una derivada temporal. El precio a pagar por trabajar con el espacio

[4]Estos modelos son teorías cuánticas de campos exactamente solubles en tres dimensiones, con observables dados por invariantes topológicos (invariantes de nudos) de la variedad tridimensional [26].

fase reducido se ve reflejado en muchos casos en el no poder conocer la forma completa y correcta de las restricciones, por ejemplo, podemos considerar el artículo de Peldán [31] en el que realiza el análisis Hamiltoniano de la acción de Palatini en 4D. En dicho análisis, se obtienen restricciones de segunda y primera clase, sin embargo, al realizar el álgebra de constricciones, dicha álgebra no se encuentra con la estructura correcta que las restricciones deben tener [32], es decir, el resultado entre el paréntesis de Poisson entre las restricciones de primera clase, debe ser lineal en restricciones de primera clase y cuadrático en las restricciones de segunda clase [1]. Como podemos ver, en el artículo de Peldán esta regla de el álgebra de restricciones no se satisface y creemos que esto se debe a que se trabaja en el espacio fase reducido. Debido a que en [30] también se trabajó para la acción exótica en el espacio fase reducido, como parte de este trabajo de tesis se realiza el análisis Hamiltoniano siguiendo todos y cada uno de los pasos del formalismo de Dirac, a esta forma de trabajar le llamaremos el formalismo de Dirac estricto. El formalismo de Dirac estricto, tiene la ventaja de que podemos conocer la estructura completa de las restricciones definidas en todo el espacio fase, por otra parte, estas restricciones con estructura completa también nos ayudará a encontrar la correcta simetría de norma definida en todo el espacio fase. El formalismo ha sido aplicado la teoría de Stüeckelberg en dimensiones extra [33], la acción de Palatini en 3D [34], la teoría de Chern-Simons y Pontryagin [35], entre muchos otros sistemas [36–38]. De esta manera, mediante el uso del formalismo de Dirac estricto analizaremos a la acción exótica y encontraremos la estructura completa de las restricciones definidas en el espacio fase completo. También, discutiremos las diferencias entre la acción de Palatini y la acción exótica a nivel clásico. En particular, encontraremos que a pesar de que ambas acciones comparten las mismas ecuaciones de movimiento, las correspondientes estructuras simplécticas serán diferentes y esto es un indicio de que a nivel cuántico las dos acciones no serán equivalentes.

Por otra parte, ya se comentó anteriormente que la acción de Holst contiene los casos de ADM, Ashtekar y Barbero, dependiendo del valor que tome el parámetro de Barbero-Immirzi. Respecto a este punto, cabe mencionar que también se encuentra en la literatura una acción equivalente a la acción de Holst para el caso 3D, dicha acción se conoce como " acción de Bonzom-Livine [BL] " [39]. En efecto, la acción de BL describe un conjunto de acciones que comparten las mismas ecuaciones de movimiento con la acción de Palatini con constante cosmológica y la acción exótica, sin embargo, la acción de BL depende de un parámetro tipo Barbero-Immirzi, de hecho, si uno a nivel Hamiltoniano fija parcialmente la norma, uno puede reducir la acción de BL a la representación de Ashtekar en 3D [27]. Es decir, la acción de BL puede ser escrita en términos de una conexión valuada en el grupo $SO(3)$ y dicha conexión será el equivalente a la conexión de Ashtekar en 3D.

Debido a que en los trabajos [27, 39] se estudia la acción de BL en el espacio fase reducido, en este trabajo de tesis también estudiamos a la acción de BL usando el formalismo de Dirac estricto. En particular, estaremos interesados en encontrar las restricciones completas definidas en el espacio fase, además compararemos los resultados obtenidos para la acción de BL con los de Palatini y la acción exótica. Dicha comparación es muy importante, debido a que las tres acciones comparten las mismas ecuaciones de movimiento pero como veremos, son acciones diferentes una de otra.

Por otra parte, a pesar de que el formalismo de Dirac estricto nos da una descripción completa del sistema bajo estudio, su implementación es un trabajo extenso y complicado. Además, si no se llegan a desarrollar todos los pasos o se omite alguno de ellos, los resultados obtenidos podrián ser no concluyentes como se puede observar en los trabajos [27, 39, 40]. Por lo tanto, debido a estas complicaciones es necesario usar un esquema alternativo que nos pudiera dar una descripción completa del sistema. En este sentido, existe un enfoque diferente para estudiar canónicamente sistemas singulares, dicho enfoque se conoce como el formalismo de Faddeev-Jackiw [FJ] [41, 42]. El formalismo de FJ es un método simpléctico, donde los grados de libertad son identificados con las variables simplécticas, dichas variables son utilizadas para construir un tensor simpléctico, y la matriz asociada a dicho tensor, nos permitirá conocer información relevante de la teoría. Cabe mencionar, que en el formalismo de FJ no es necesario hacer la difícil clasificación de las restricciones como lo es hecho en el formalismo de Dirac. En el esquema de FJ, todas las restricciones están en el mismo estatus. En adición, con el método de FJ tambien podemos identificar la simetría de norma fundamental y al identificar los corchetes generalizados de FJ estos coinciden con los paréntesis de Dirac. Por lo tanto, toda la información obtenida en el método de Dirac, puede ser obtenida usando el formalismo de FJ, la ventaja que encontraremos en FJ, es su "economía" respecto al de Dirac. El formalismo de FJ se ha aplicado a sistemas como teorías con dimensiones extra [33], QCD [43], la teoría de Wess-Zumino [44], super gravedad en (1+1) dimensiones [45], la teoría de Chern-Simons Abeliana [46], la teoría de Maxweell en 3D con un término topológico [46], la teoría electromagnética [47], la teoría de YM [48] y varios sistemas más [49]. Se puede observar en todos los trabajos citados anteriormente, que el formalismo de FJ es un enfoque elegante y alternativo para estudiar teorías de norma.

Debido a la explicado anteriormente, en esta tesis también se realiza el análisis de FJ para la acción exótica y la acción de BL. En particular, mediante la implementación del formalismo de FJ se reproducen los resultados encontrados en el método de Dirac.

La tesis se organiza de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se presentan todos los elementos necesarios del formalismo de Cartan, que nos ayudará a escribir la acción de Einstein-Hilbert en el formalismo de primer orden. En el capítulo 3 se presentan las ideas básicas del método de Dirac-Bergman para desarrollar el formalismo Hamiltoniano de sistemas singulares. En el capítulo 4 se realizará el análisis Hamiltoniano de la acción exótica en tres dimensiones. En nuestro análisis se obtendrá el conjunto completo de restricciones y se clasificarán en primera y segunda clase, se realizará el conteo de grados de libertad físicos, se hallarán las transformaciones de norma y al final calcularemos los paréntesis de Dirac de esta teoría. En el capítulo 5 se realizará el análisis Hamiltoniano de la ación propuesta por BL. En nuestro análsis se obtendrá el conjunto completo de restricciones y se clasificarán en primera y segunda clase, se realizará el conteo de grados de libertad físicos, se hallarán las transformaciones de norma y al final calcularemos los paréntesis de Dirac. En el capítulo 6 se presentan las ideas básicas del formalismo de FJ para estudiar sistemas singulares. En el capítulo 7 se realizará el análisis de FJ de la ación exótica. En nuestro análisis se obtendrá el conjunto completo de restricciones, se realizará el conteo de grados de libertad físicos, se hallarán las transformaciones de norma y al final calcularemos los paréntesis generalizados de FJ. Además, demostraremos que si en el formalismo de Dirac no se fija la norma y las restricciones de segunda clase son eliminadas mediante los corchetes de Dirac, entonces, es posible reproducir la estructura completa de los corchetes de Dirac utilizando en FJ el espacio de configuración como variables simplécticas. Por otra parte, si en el método de Dirac realizamos el análisis fijando la norma y construimos los correspondientes corchetes de Dirac, entonces, en el formalismo de FJ es posible reproducir los resultados obtenidos en el método Dirac, pero ahora se trabaja utilizando las coordenadas de el espacio fase como variables simplécticas. Finalmente, se demuestra la equivalencia entre los corchetes de Dirac con los corchetes generalizados de FJ. En el capítulo 8 se implementará el formalismo de FJ para analizar la acción de BL y su análogo Abeliano. En nuestro análisis reproduciremos los resultados obtenidos en el capítulo 5, se demuestra la equivalencia entre los corchetes de Dirac y los paréntesis generalizados de FJ. En el capítulo 9 se presentan las conclusiones.

Capítulo 2

Relatividad General

2.1 Relatividad General en el formalismo de Einstein

La Teoría de la RG explica los fenómenos gravitacionales como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. En su formulación original dada por Einstein en 1915, se hace uso del aparato matemático de la geometría de Riemann. En esta formulación, el objeto principal es el tensor métrico, del cual todas las propiedades geométricas del espacio son deducibles [50].

El principio físico clave tras la RG es el Principio de Equivalencia. Para enunciar este principio necesitamos primero definir qué entendemos por un marco de referencia Lorentziano. Este no es más que la generalización relativista del marco de referencia inercial newtoniano. Así, un **marco de referencia Lorentziano** es aquel en el que la velocidad de la luz toma su valor estándar, y los rayos de luz, al igual que las líneas de mundo de las partículas de prueba, son rectos [51]. El **Principio de equivalencia** afirma que, en cada punto del espacio-tiempo, es siempre posible introducir un marco de referencia Lorentziano local tal que en él las leyes de la física toman la misma forma que en Relatividad especial. Fue este principio el que motivó a Einstein a utilizar una variedad diferenciable como punto de partida. Una **variedad diferenciable** es en pocas palabras, un espacio topológico localmente homeomórfico a $\Re^n$. El homeomorfismo local nos permite introducir coordenadas en una vecindad de un punto; éstas no son más que una aplicación entre una vecindad abierta de la variedad y una vecindad abierta de $\Re^n$. Es claro que este mapeo es en gran medida arbitrario, salvo por los requerimientos de continuidad y diferenciabilidad; luego, existen infinitas maneras posibles de introducir coordenadas en una vecindad de un punto de la variedad. Por supuesto, ninguna cantidad físicamente relevante puede enterarse de algún cambio realizado en las coordenadas de la vecindad. Esto significa que todas las cantidades con sentido físico deben ser invariantes bajo el grupo de transformaciones generales de coordenadas. Por lo tanto, nuestra descripción de la variedad debe usar objetos geométricos como vectores, tensores y formas diferenciales, los cuales son independientes de las coordenadas elegidas. En la geometría de Riemann, las propiedades métricas del espacio-tiempo están contenidas en el tensor métrico $g_{\mu\nu}$: este provee de un medio para calcular el producto punto entre dos vectores A y B, denotado por $A \cdot B$. Las componentes coordenadas de este tensor correponden al producto punto entre los vectores de la base coordenada

$$g_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \cdot \partial_\nu. \tag{2.1}$$

El conocer el tensor métrico permite entre otras cosas, hacer el cálculo del producto punto entre dos vectores cualesquiera a través de $A \cdot B = A^\mu B^\nu (\partial_\mu \cdot \partial_\nu) = A^\mu B^\nu g_{\mu\nu}$[1]. Un producto punto induce naturalmente una **norma** en el espacio, lo cual justifica el nombre de *métrica* dada a este tensor. Las propiedades métricas del espacio nos hablan de longitudes, áreas, volúmenes, etc. En cambio, las propiedades invariantes de escala tales como formas y ángulos corresponden a la estructura afín del espacio [2] [52]. Estas se hallan contenidas en la conexión afín $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$, la cual nos permite trasladar un vector paralelamente a lo largo de una curva. Esta traslación paralela, a su vez nos permite definir una derivada covariante D_μ en la variedad. Para tener una derivada necesitamos un modo de comparar vectores en puntos cercanos de la variedad. Sin embargo, esto no puede ser hecho directamente, dado que vectores en puntos distintos pertenecen a espacios tangentes distintos. Esto puede ser visto más claramente notando que la matriz $(\partial x'^\mu / \partial x^\nu)$, que media el cambio en las componentes de un vector bajo una transformación general de coordenadas, es una función de punto. Así, dos vectores $V^\mu(x)$ y $V^\mu(x+dx)$ en $x+dx$ hasta x, donde es posible compararlo con $V^\mu(x)$. Esta traslación es prescrita según la ley [52]

$$V_\parallel{}^\lambda(x+dx;x) = V^\lambda(x+dx) + dx^\mu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V^\nu(x). \tag{2.2}$$

De esta manera, el vector trasladado paralelamente desde $x+dx$ hasta x, que denotamos por $V_\parallel{}^\lambda(x+dx;x)$, es obtenido a partir de la acción de la *matriz* $dx^\mu \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ sobre el vector en x, $V^\nu(x)$. Es importante notar que la conexión afín define la noción de transporte paralelo en una variedad; dos conexiones afines distintas definirán, en general, nociones de transporte paralelo distintas. La **derivada covariante** de V^λ con respecto a la conexión $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, denotada por $D_\mu V^\lambda$, queda definida a

[1] Aquí representamos los indices griegos para la variedad base con $\mu, \nu = 0,1,2,3$.

[2] Por un lado, la propiedad afín define la noción de transporte paralelo, mientras que la noción de distancia y de cómo son medidas las distancias en la variedad son descritas por la propiedad métrica.

través de la ecuación

$$
\begin{aligned}
dx^\mu D_\mu V^\lambda &= V_{\parallel}{}^{\lambda}(x+dx;x) - V^\lambda(x), \\
&= V^\lambda(x+dx) + dx^\mu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V^\nu(x) - V^\lambda(x), \\
&= dx^\mu [\partial_\mu V^\lambda(x) + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V^\nu(x)], \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

esto es

$$D_\mu V^\lambda \equiv \partial_\mu V^\lambda(x) + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V^\nu(x). \qquad (2.4)$$

Para que esta derivada transforme tensorialmente bajo el grupo de transformaciones generales de coordenadas, es necesario exigir que la conexión afín $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ cambie de acuerdo a

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\Gamma^\gamma_{\rho\sigma} - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}. \qquad (2.5)$$

Como vemos, las componentes de la conexión afín transforman de modo no tensorial (o inhomogéneo) bajo el grupo de transformaciones generales de coordenadas. En general, una variedad admite un gran número de conexiones que satisfagan (2.5). En la geometría de Riemann, sin embargo, y por lo tanto también en RG, una de entre todas estas es elegida a partir de los requerimientos

$$
\begin{aligned}
\Gamma^\lambda_{\mu\nu} &= \Gamma^\lambda_{\nu\mu}, \qquad (2.6) \\
D_\alpha g_{\mu\nu} &= 0. \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

La primera de estas ecuaciones expresa la anulación del **tensor de torsión**[3]

$$T^\lambda_{\mu\nu} \equiv \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}, \quad \Leftrightarrow [D_\mu, D_\nu] f = 0. \qquad (2.8)$$

La ecuación (2.7) es conocida como compatibilidad métrica, y expresa la preservación del producto interno entre dos vectores bajo transporte paralelo. Esto quiere decir que la magnitud de un vector es preservada al ser transportado paralelamente, así como también el ángulo entre dos vectores. La conexión que cumple con estos requerimientos es conocida como conexión de Christoffel,

[3] f es un escalar.

y puede ser escrita en términos del tensor métrico y sus derivadas en la forma

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \tag{2.9}$$

En general, la conexión es el objeto matemático que nos permite cuantificar la curvatura de una variedad. Una de las manifestaciones de la curvatura viene dada por la no conmutatividad de las derivadas covariantes D_μ. La medida de la falta de conmutatividad de dos derivadas covariantes D_μ y D_ν es dada por su conmutador $[D_\mu, D_\nu] = D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu$. Usando la definición (2.4) podemos calcular la acción del conmutador de dos derivadas covariantes sobre un vector V^ρ. Esta resulta ser

$$[D_\mu, D_\nu] V^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} V^\sigma - T^{\lambda}_{\mu\nu} D_\lambda V^\rho, \tag{2.10}$$

donde $T^{\lambda}_{\mu\nu}$ es el tensor de torsión (el cual se anula para la conexión de Christoffel), y $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ es conocido como el tensor de curvatura de Riemann

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}. \tag{2.11}$$

El tensor de Riemann contiene toda la información acerca de la curvatura de la variedad. Hay otros dos tensores que son muy útiles y que pueden construirse a partir del tensor de Riemann, uno es el tensor de Ricci [4]

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}, \tag{2.12}$$

el otro es, la traza del tensor de Ricci, que puede interpretarse como una medida escalar de la curvatura, y se conoce como curvatura escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{2.13}$$

[4]La unicidad del tensor de Ricci proviene de las simetrías del tensor de curvatura de Riemann. De su definición como conmutador de dos derivadas covariantes, es evidente que $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = -R^\rho{}_{\sigma\nu\mu}$. Cuando la conexión de Christoffel es utilizada, tenemos las simetrías adicionales $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$, y $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$, y $R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0$. Esto significa que el tensor de Riemann "métrico" (es decir, aquel derivado de la conexión de Christoffel) puede ser visualizado como una matriz simétrica $R_{[\rho\sigma][\mu\nu]}$, donde los pares antisimétricos $[\rho\sigma]$ y $[\mu\nu]$ son considerados como índices individuales. Por lo tanto, la única contracción posible es entre el primer y el segundo par de índices, estando todas las demás relacionadas con ella por un signo.

Notemos que una variedad puede ser curva y no obstante el tensor de Ricci ser nulo; en cambio, si alguna componente del tensor de Riemann es distinta de cero, esto indica inequívocamente la presencia de curvatura. A modo de ejemplo, consideremos una esfera de radio a, la cual parametrizamos con los ángulos θ y φ de las coordenadas esféricas. La métrica en este espacio es

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{2.14}$$

Las únicas componentes no nulas de la conexión de Christoffel son

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\theta}_{\varphi\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \tag{2.15}$$

en tanto que una componente representativa del tensor de Riemann (todas las demás pueden obtenerse a partir de ella por simetrías) es

$$R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi} = a^2\sin^2\theta. \tag{2.16}$$

Esta componente no nula es un reflejo de la curvatura de la esfera. La curvatura escalar de Ricci es $R = \frac{2}{a^2}$. Su signo corresponde a nuestra concepción intuitiva de que una esfera tiene curvatura "positiva". Notemos también que, a medida que $a \to \infty$, la curvatura escalar de Ricci se hace cada vez más pequeña. Esto también se corresponde con nuestra noción intuitiva de que una esfera de radio muy grande se ve localmente casi plana: nuestro propio planeta es el mejor ejemplo.

De acuerdo a Einstein, la distribución de materia y energía en el universo determinan la geometría de éste. Citando a Misner, Thorne y Wheeler [51], podemos decir que *el espacio actúa sobre la materia, diciéndole como moverse. A su vez, la materia reacciona sobre el espacio, diciéndole como curvarse*. Es decir, la teoría de la gravitación de Einstein se puede ver como una teoría geométrica con dinámica o geometrodinámica.

Las ecuaciones de campo de Einstein nos proveen del vínculo cuantitativo entre materia y geometría. Ellas pueden ser obtenidas a partir de un principio variacional, aunque no fue éste el método usado por Einstein mismo para deducirlas. En noviembre de 1915, y en forma casi simultánea con el artículo definitivo de Einstein, el matemático alemán David Hilbert propuso un funcional de acción que permite deducir las ecuaciones de campo. Esta es la **acción de Einstein-Hilbert** [50]

$$S_{EH}^{(4)} = \int d^4x \sqrt{-g} R, \tag{2.17}$$

donde $g = det(g_{\mu\nu})$ es el determinante del tensor métrico. Si adoptamos el punto de vista de Einstein, entonces la métrica es el único campo fundamental y esta acción resulta ser un funcional de la métrica y sus derivadas. Además, el lagrangiano $L_{EH}^4 = \sqrt{-g}R$ es una densidad tensorial de peso $+1$, de modo que la acción es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas. De todos los escalares de curvatura (ejemplos: $R, R_\nu^\mu R_\mu^\nu, R_{\mu\nu}^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}^{\mu\nu}$, etc.) que pueden formarse en cuatro dimensiones, Hilbert eligió la curvatura escalar de Ricci "R", dado que es el único lineal en la segunda derivada de $g_{\mu\nu}$ y nos provee ecuaciones de segundo orden para la métrica[5]. El requerimiento de que esta acción sea estacionaria frente a variaciones infinitesimales $\delta g_{\mu\nu}$ en la métrica nos conduce a las **ecuaciones de campo de Einstein** (en el vacío)

$$R_{\nu\mu} - \frac{1}{2} g_{\nu\mu} R = 0. \tag{2.18}$$

Hasta aquí vemos que la RG, está formulada usando tensores escritos en bases coordenadas y la conexión de Christoffel. Fue necesario poner el tensor de torsión idénticamente igual a cero, lo cual fue hecho sin más justificación que la de poder obtener una conexión afín en términos de la métrica. Esto equivale a reducir las características afines de un espacio a propiedades puramente métricas. En general, paralelismo y metricidad pueden ser considerados como nociones independientes [52]. Así, resulta interesante buscar una formulación de RG en donde esta independencia sea tomada en cuenta. Este formalismo existe, y es conocido como método de Palatini. En las secciones siguientes veremos este enfoque, este nos permite escribir RG en términos de tétradas y conexiones.

2.2 El Vielbein y el grupo de Lorentz

Consideremos el espacio-tiempo como una variedad suave D-dimensional, denotada por M. Para cada punto $x \in$ M existe un espacio tangente D-dimensional plano T_x, Lorentziano, con signatura

[5]Para obtener una ecuación diferencial de segundo orden (y no más) en los potenciales gravitatorios, $G_{\nu\mu} = R_{\nu\mu} - \frac{1}{2} g_{\nu\mu} R$ tiene que ser lineal en el tensor de Riemann. Contracciones del tipo $R_{\mu\rho} R_\nu{}^\rho$ ó $R_{\mu\rho\lambda\sigma} R_\nu{}^{\rho\lambda\sigma}$ darían lugar a ecuaciones diferenciales de orden más alto que 2. En 1938, el físico húngaro Cornelius Lanczos (1893-1977) demostró que la variación del Lagrangiano de Gauss-Bonnet, $\mathfrak{L} = \sqrt{g}(R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda})$, también da lugar a ecuaciones diferenciales de segundo orden. Sin embargo, en cuatro dimensiones el término de Gauss-Bonnet es un termino topológico (es la característica de Euler cuadrimensional) y por lo tanto no contribuye a las ecuaciones de movimiento. La acción que consideró Lanczos sí contribuye a la dinámica en 5 o más dimensiones.

$(-,+,...,+)$. Este espacio tangente T_x es una buena aproximación de la variedad M en un conjunto abierto de el entorno de x. Esto quiere decir que hay una forma de representar los tensores de M mediante tensores en T_x, y viceversa. La relación precisa entre los espacios de tensores en M y en T_x es un isomorfismo representado por medio de un mapeo lineal e [52].

El isomorfismo entre M y la colección $\{T_x\}$ puede realizarse mediante una transformación entre alguna base coordenada ortonormal de coordenadas z^I en el espacio de Minkowski T_x y un sistema local de coordenadas x^μ en una vecindad abierta de x, el cual se puede realizar como la transformación

$$\frac{\partial z^I}{\partial x^\mu} = e_\mu{}^I. \tag{2.19}$$

Esto es suficiente para definir su acción sobre un conjunto completo de vectores tal como la separación de coordenadas dx^μ entre dos puntos infinitesimalmente cercanos en M. La separación correspondiente dz^I en T_x está expresada como

$$dz^I = e_\mu{}^I(x)dx^\mu. \tag{2.20}$$

La familia $\{e_\mu{}^I, I = 1,...,D = dimM\}$ define un sistema ortonormal local en M, tambien llamado " forma de soldadura ", " marco móvil " o simplemente " vielbein[6] ". La definición (2.20) implica que $e_\mu{}^I$ se transforma como un vector covariante bajo difeomorfismos en M y como un vector contravariante bajo rotaciones de Lorentz locales de T_x. Se tiene una correspondencia uno a uno entre vectores y se puede extender a tensores en M y en T_x. Si $\prod$ es un tensor con componentes $\Pi^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(x)$ en M, entonces los tensores correspondietes en el espacio tangente T_x son

$$P^{I_1I_2\cdots I_n}(x) = e_{\mu_1}{}^{I_1}(x)\cdots e_{\mu_n}{}^{I_n}(x)\Pi^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(x). \tag{2.21}$$

La métrica Lorentziana definida en el espacio de Minkowski puede usarse para inducir una métrica en M a través del isomorfismo $e_\mu{}^I$. La longitud de arco en T_x, $ds^2 = \eta_{IJ}dz^I dz^J$, puede también expresarse como $\eta_{IJ}e_\mu{}^I e_\nu{}^J dx^\mu dx^\nu$, donde la métrica en M es identificada como

$$g_{\mu\nu} = e_\mu{}^I(x)e_\nu{}^J(x)\eta_{IJ}. \tag{2.22}$$

Aquí $e_\mu{}^I(x)$ determina la métrica, así como todas las propiedades de la métrica del espacio-

[6]La ecuación (2.20) recibe el nombre de 1-forma vielbein, la palabra vielbien proviene del alemán y significa "muchas piernas". En cuatro dimensiones es llamado vierbein, lo cual corresponde a "cuatro piernas".

tiempo estan contenidas en el vielbein. Lo contrario, sin embargo, no es cierto; dada una métrica $g_{\mu\nu}$, existe una infinidad de maneras de elegir el vielbein correspondiente a diferentes elecciones de un sistema local ortonormal que puede usarse como base para el espacio tangente de vectores al punto T_x. Podemos rotar el vielbien por una transformación de Lorentz y esta transformación no tendría alguna influencia desde el punto de vista de la variedad. Bajo una transformación de Lorentz, el vielbien se transforma como

$$e_\mu{}^I \rightarrow e'_\mu{}^I = \Lambda_J{}^I e_\mu{}^J, \tag{2.23}$$

donde la matriz $\Lambda(x) \in SO(D-1,1)$.

De esta forma, la ec.(2.22) viene dada por

$$e'_\mu{}^I e'_\nu{}^J \eta_{IJ} = e_\mu{}^K e_\nu{}^L (\Lambda_K{}^I \Lambda_L{}^J), \tag{2.24}$$

donde vemos que la ec.(2.24) se satisface si se cumple la condición

$$\Lambda_K{}^I \Lambda_L{}^J \eta_{IJ} = \eta_{KL}. \tag{2.25}$$

La métrica $g_{\mu\nu}(x)$ claramente permanece sin cambios por esta transformación. Esto quiere decir, que en particular hay muchos más componentes en $e_\mu{}^I$ que en $g_{\mu\nu}$. De hecho, el vielbien tiene D^2 componentes independientes, mientras que la métrica tiene $\frac{D(D+1)}{2}$.

La colección de espacios tangentes para cada punto de la variedad define el grupo de simetrías del espacio tangente para cada punto de M, dotando de ese modo a la variedad con una estructura denominada haz fibrado[7]. Con el fin de definir un operador de derivada en la variedad, una conexión es requerida de manera que la estructura diferencial permanece invariante bajo la ley transformaciones de Lorentz locales que actúan de forma independiente en cada punto del espacio-tiempo. Esta conexión es la conexión de Lorentz, también llamada **conexión de espín** en la literatura, pero el término conexión de Lorentz es más apropiado. La palabra espín es debido al hecho de que $A_\mu{}^I{}_J$ surge de forma natural en la discusión de espinores, que llevan una representación especial del grupo de rotaciones en el espacio tangente [52].

El grupo $SO(D-1,1)$ actua de forma independientemente en los tensores de Lorentz para cada punto T_x. Esto se debe a que las matrices Λ son funciones de x. Para poder definir una derivada

[7]Un haz fibrado es un espacio topológico que localmente se ve como el producto directo de dos espacios topológicos.

de un tensor ϕ^I en T_x, uno esperaría tener una definición de $D\phi^I$ que sea un tensor del mismo rango y naturaleza que ϕ^I. Esto es lo que ocurre en todas las teorías de norma: uno tiene que introducir una conexión con el fin de compensar el hecho de que el grupo de norma actúa de forma independiente en los puntos cercanos. En este caso, el campo de norma es la conexión de Lorentz, $A_{\mu J}^{I}$. Supongamos que el campo $\phi^I(x)$ se transforma bajo el grupo de Lorentz, $SO(D-1,1)$, la derivada covariante es

$$D_\mu \phi^I = \partial_\mu \phi^I(x) + A^I{}_{J\mu}\phi^J(x), \tag{2.26}$$

se define de modo que se transforme como un vector de Lorentz en x. Esto requiere que bajo la transformación de rotación $SO(D-1,1)$, $\Lambda_K{}^I(x)$, la conexión se transforme como [52]

$$A^I{}_{J\mu}(x) \to A'^I{}_{J\mu} = \Lambda_K{}^I(x)\Lambda_J{}^L(x)A^K{}_{L\mu}(x) + \Lambda_L{}^I(x)\partial_\mu \Lambda_J{}^L(x), \tag{2.27}$$

donde $\Lambda_J{}^L = \eta_{IJ}\eta^{KL}\Lambda^I{}_K$ es la inversa de $\Lambda^J{}_L$. La conexión $A^I{}_{J\mu}$ define el transporte paralelo de el tensor de Lorentz en el espacio tangente, entre dos puntos próximos T_x y T_{x+dx}. El transporte paralelo del campo vectorial ϕ^I de $x+dx$ a x, es un vector $\phi_\parallel{}^I(x)$, definido como

$$\begin{aligned}\phi_\parallel{}^I &\equiv \phi^I(x+dx) + dx^\mu A^I{}_{J\mu}\phi^J(x), \\ &= \phi^I(x) + dx^\mu[\partial_\mu\phi^I(x) + A^I{}_{J\mu}\phi^J(x)], \\ &=: \phi^I(x) + dx^\mu D_\mu \phi^I(x).\end{aligned} \tag{2.28}$$

La derivada covariante D_μ mide el cambio en el tensor producido por el transporte paralelo entre puntos próximos

$$\begin{aligned}dx^\mu D_\mu &= \phi_\parallel{}^I(x) - \phi^I(x), \\ &= dx^\mu[\partial_\mu + A^I{}_{J\mu}\phi^J(x)].\end{aligned} \tag{2.29}$$

De esta manera, las propiedades afines de espacio se encuentran en los componentes $A^I{}_{J\mu}$, que son totalmente arbitrarios e independiente de la métrica. Podemos encontrar cierta similitud entre la noción de paralelismo dada en (2.29) y para los vectores cuyas componentes son dados en una base coordenada. Estas dos definiciones son independientes ya que se refieren a objetos en diferentes espacios, pero podrían estar relacionados via el isomorfismo local entre la base de la variedad y el espacio tangente, proporcionada por $e_\mu{}^I$.

2.3 Grupo SO(D-1,1) y tensores invariantes

El grupo $SO(D-1,1)$ tiene dos tensores invariantes, la métrica de Minkowski, η_{IJ}, y el tensor de Levi-Civita totalmente antisimétrico, $\varepsilon_{I_1 I_2 \ldots I_D}$. Estos tensores están definidos por la estructura algebraica del grupo de Lorentz y por lo tanto, son los mismos en cada espacio tangente. Consecuentemente, éstos deben ser constantes a través de la variedad $M : d\eta_{IJ} = 0 = d\varepsilon_{I_1 I_2 \cdots I_D}$. Además, como son invariantes deben también ser constantes covariantemente

$$d\eta_{IJ} = D\eta_{IJ} = 0, \tag{2.30}$$

$$d\varepsilon_{I_1 I_2 \cdots I_D} = D\varepsilon_{I_1 I_2 \ldots I_D} = 0. \tag{2.31}$$

donde

$$D\eta_{IJ} = d\eta_{IJ} - A^K{}_J \eta_{IK} - A^K{}_I \eta_{KJ}. \tag{2.32}$$

Esto implica que la conexión de espín satisface las siguientes identidades

$$\eta_{IK} A^K{}_J = -\eta_{KJ} A^K{}_I, \tag{2.33}$$

$$\varepsilon_{J_1 I_2 \cdots I_D} A^{J_1}{}_{I_1} + \varepsilon_{I_1 J_2 \cdots I_D} A^{J_2}{}_{I_2} + \cdots + \varepsilon_{I_1 I_2 \cdots J_D} A^{J_D}{}_{I_D} = 0. \tag{2.34}$$

Notemos que la relación (2.34) restringe a la conexión de espín a ser antisimétrica en sus índices de Lorentz, $A_{IJ} = -A_{JI}$.

2.4 Ecuaciones de estructura: Curvatura y Torsión

Se define la **2-forma de torsión** T^I como la derivada covariante de la 1-forma vielbein,

$$T^I = De^I = de^I + A^I{}_J e^J, \tag{2.35}$$

la cual involucra tanto el vielbein como a la conexión de espín. Consideremos ahora la derivada exterior covariante de la 2-forma de torsión

$$DT^I = DDe^I = d(De^I) + A^I{}_J De^J, \tag{2.36}$$

después de un simple cálculo se muestra que

$$DT^I = (dA^I_J + A^I{}_K A^K{}_J)e^J, \tag{2.37}$$

donde el factor entre paréntesis es definido como la **2-forma de curvatura**

$$R^I{}_J = dA^I{}_J + A^I{}_K A^K{}_J. \tag{2.38}$$

Las ecuaciones (2.35) y (2.38) definiendo la 2-forma de curvatura y la 2-forma de torsión, respectivamente, son llamadas ecuaciones de estructura debido a que éstas describen la estructura geométrica de la variedad M. Es directo ver que estas 2-formas satisfacen las siguientes identidades de Bianchi

$$DT^I = R^I{}_J e^J, \tag{2.39}$$
$$DR^I{}_J = 0. \tag{2.40}$$

La elección de los nombres torsión y curvatura para T^I y $R^I{}_J$ tienen su justificación, y se puede ver de la siguiente manera. Escribamos las ecuaciones (2.35) y (2.38) en términos de sus componentes en la base coordenada $\{\partial_\mu\}$

$$T^I = \frac{1}{2}T^I_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{2.41}$$
$$R^I{}_J = \frac{1}{2}R^I{}_{J\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{2.42}$$

donde

$$T^I{}_{\mu\nu} = D_\mu e^I_\nu - D_\nu e^I_\mu = \partial_\mu e^I_\nu - \partial_\nu e^I_\mu + A^I{}_{J\mu}e^J_\nu - A^I{}_{J\nu}e^J_\mu, \tag{2.43}$$
$$R^I{}_{J\mu\nu} = \partial_\mu A^I{}_{J\nu} - \partial_\nu A^I{}_{J\mu} + A^I{}_{K\mu}A^K{}_{J\nu} - A^I{}_{K\nu}A^K{}_{J\mu}. \tag{2.44}$$

Luego haciendo uso de la matriz de cambio de base e^μ_I y su inversa e^I_ν, es posible escribir lo siguiente

$$T^K{}_{\mu\nu} = e^K_I T^I{}_{\mu\nu}, \tag{2.45}$$
$$R^L{}_{M\mu\nu} = e^L_I e^J_M R^I{}_{b\mu\nu}. \tag{2.46}$$

De esta manera, podemos encontrar una relación entre estas componentes con la definición más familiar de los tensores de torsión y curvatura del cálculo tensorial, dados por

$$T^K{}_{\mu\nu} = \Gamma^K{}_{\mu\nu} - \Gamma^K{}_{\nu\mu}, \tag{2.47}$$

$$R^L{}_{M\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^L{}_{\nu M} - \partial_\nu \Gamma^L{}_{\mu M} + \Gamma^L{}_{\mu N}\Gamma^N{}_{\nu M} - \Gamma^L{}_{\nu N}\Gamma^N{}_{\mu M}. \tag{2.48}$$

En efecto, comparando (2.46) con (2.48) vemos que la identificación

$$\Gamma^K{}_{\mu\nu} = e^K_I(\partial_\mu e^I_\nu + A^I{}_{J\mu} e^J_\nu), \tag{2.49}$$

nos permite igualar el tensor de torsión $T^K{}_{\mu\nu}$ con las componentes de la base coordenada $\{\partial_\mu\}$ de la 2-forma torsión T^I. Además, si reemplazamos (2.49) en la expresión del tensor de curvatura (2.48), es posible mostrar que dicho tensor corresponde exactamente a las componenetes coordenadas de la 2-forma curvatura R^I_J.

Es interesante notar que la expresión (2.49) se puede rescribir en la forma

$$\nabla_\mu e^I_\nu = \partial_\mu e^I_\nu + A^I{}_{J\mu} e^J_\nu - \Gamma^K{}_{\mu\nu} e^I_K = 0. \tag{2.50}$$

es decir, la identificación (2.49) equivale a exigir la anulación de la derivada covariante del vielbein.

2.5 Acción de Palatini

Habiendo introducido los objetos geométricos con los que contamos para describir localmente la geometría del espacio-tiempo, pasamos ahora a escribir un principio de acción que nos permita escribir RG en términos de tétradas y conexiones. La acción de Einstein-Hilbert (2.17) en cuatro dimensiones puede ser escrita en términos de estos campos sencillamente como [6]

$$S^{(4)}{}_P = \frac{1}{4}\int \varepsilon_{IJKL} R^{IJ} e^K e^L, \tag{2.51}$$

La acción (2.51) se conoce en la literatura como la acción de Palatini.

Aquí la conexión de espín aparece a través de la curvatura R^{IJ}, en tanto que el vierbein entra explícitamente. Debemos recordar que la conexión A^I_J transforma de modo no tensorial bajo transformaciones locales de Lorentz, de manera que su inclusión en la acción debe siempre hacerse en combinaciones que resulten tensoriales, como ocurre con R^{IJ}. Para comprobar la equivalencia de (2.51) con la acción de Einstein-Hilbert (2.17) sólo hace falta escribir explícitamente las bases de formas diferenciales en la curvatura y el vierbein. Así

$$\varepsilon_{IJKL} R^{IJ} e^K e^L = \varepsilon_{IJKL} R^{IJ}_{\rho\sigma} e^K_\mu e^L_\nu dx^\rho dx^\sigma dx^\mu dx^\nu. \tag{2.52}$$

Usando el vierbein para transformar los índices latinos de la curvatura en índices griegos (es decir, escribiendo sus componentes sobre la base ortonormal $\{e_I\}$ en términos de sus componentes sobre la base coordenada $\{\partial_\mu\}$, obtenemos

$$\varepsilon_{IJKL}R^{IJ}e^K e^L = \varepsilon_{IJKL}R^{\kappa\lambda}_{\rho\sigma}e^I_\kappa e^J_\lambda e^K_\mu e^L_\nu dx^\rho dx^\sigma dx^\mu dx^\nu, \tag{2.53}$$

usando el siguiente resultado [6]

$$\varepsilon_{IJKL}e^I_\kappa e^J_\lambda e^K_\mu e^L_\nu = \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}det(e^I_\mu) = \sqrt{-g}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}, \tag{2.54}$$

donde (2.54) se sigue de tomar el determinante en ambos lados de la relación $e^I_\mu e^J_\nu \eta_{IJ} = g_{\mu\nu}$. Luego

$$\varepsilon_{IJKL}R^{IJ}e^K e^L = \sqrt{-g}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}R^{\kappa\lambda}_{\rho\sigma}dx^\rho dx^\sigma dx^\mu dx^\nu, \tag{2.55}$$

Por otro lado, es claro que

$$dx^\rho dx^\sigma dx^\mu dx^\nu = \varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu}dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu}d^4x, \tag{2.56}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{IJKL}R^{IJ}e^K e^L &= \sqrt{-g}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}R^{\kappa\lambda}_{\rho\sigma}\varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu}d^4x,, \\
&= \sqrt{-g}\delta^{\rho\sigma\mu\nu}_{\kappa\lambda\mu\nu}R^{\kappa\lambda}_{\rho\sigma}d^4x, \\
&= 2\sqrt{-g}\delta^{\rho\sigma}_{\kappa\lambda}R^{\kappa\lambda}_{\rho\sigma}d^4x, \\
&= 4\sqrt{-g}R^{\rho\sigma}_{\rho\sigma}d^4x, \\
&= 4\sqrt{-g}Rd^4x.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Es decir

$$\frac{1}{4}\int \varepsilon_{IJKL}R^{IJ}e^K e^L = \int \sqrt{-g}Rd^4x. \tag{2.58}$$

Este cálculo muestra la relación entre la acción de Einstein-Hilbert y la acción de Palatini (2.17).

2.6 Ecuaciones de movimiento de la acción de Palatini

Para obtener las ecuaciones de movimiento debemos realizar la variación de la acción suponiendo que δe^I y δA^{IJ} son variaciones infinitesimales, así se tiene que

$$\begin{aligned}\delta S^{(4)}{}_P &= \int \varepsilon_{IJKL}(\delta R^{IJ} e^K e^L + R^{IJ}\delta e^K e^L + R^{IJ} e^K \delta e^L),\\ &= \int \varepsilon_{IJKL}(\delta R^{IJ} e^K e^L + 2R^{IJ} e^K \delta e^L).\end{aligned} \tag{2.59}$$

A continuación, se expresa δR^{IJ} en función de δA^{IJ}. De la definición de la 2-forma de curvatura podemos escribir

$$\begin{aligned}\delta R^{IJ} &= \delta(dA^{IJ} + A^I{}_K A^{KJ}),\\ &= \delta A^{IJ} + \delta A^I{}_K A^{KJ} + A^I{}_K \delta A^{KJ},\\ &= D(\delta A^{IJ}).\end{aligned} \tag{2.60}$$

Así

$$\begin{aligned}\int \varepsilon_{IJKL}(\delta R^{IJ}) e^K e^L &= \int \varepsilon_{IJKL} D(\delta A^{IJ}) e^K e^L,\\ &= \int \varepsilon_{IJKL} D(\delta A^{IJ} e^K e^L) - \int \varepsilon_{IJKL}(\delta A^{IJ}) D(e^K e^L).\end{aligned} \tag{2.61}$$

usando (2.31) y el hecho de el primer término de (2.61) corresponde a un término de frontera y puede despreciarse exigiendo que la variación de la conexión A^{IJ} se anule en la frontera del espacio-tiempo. Podemos escribir la ec.(2.61) de la siguiente forma

$$\int \varepsilon_{IJKL}(\delta R^{IJ}) e^K e^L = \int d(\varepsilon_{IJKL}\delta A^{IJ} e^K e^L) - \int \varepsilon_{IJKL}\delta A^{IJ} D(e^K e^L). \tag{2.62}$$

De esta manera, la expresión anterior se puede escribir como (módulo término de borde)

$$\begin{aligned}\int \varepsilon_{IJKL}(\delta R^{IJ}) e^K e^L &= -\int \varepsilon_{IJKL}(\delta A^{IJ}) D(e^K e^L),\\ &= -2\int \varepsilon_{IJKL}(\delta A^{IJ}) De^K e^L,\\ &= -2\int \varepsilon_{IJKL}(\delta A^{IJ}) T^K e^L.\end{aligned} \tag{2.63}$$

Consideremos ahora el segundo término de la integral (2.59)

$$\int \varepsilon_{IJKL} R^{IJ} \delta(e^K e^L) = 2 \int \varepsilon_{IJKL} R^{IJ} (\delta e^K) e^L. \tag{2.64}$$

Reemplazando (2.63)y (2.64) en (2.59), tenemos que $(\delta S_{EH} = 0)$ implica lo siguiente

$$-2 \int \varepsilon_{IJKL} (\delta A^{IJ}) T^K e^L + 2 \int \varepsilon_{IJKL} R^{IJ} (\delta e^K) e^L = 0. \tag{2.65}$$

Como las variables δA^{IJ} y δe^K son arbitrarias e independientes, tenemos que

$$\varepsilon_{IJKL} R^{IJ} e^K = 0, \tag{2.66}$$

$$\varepsilon_{IJKL} T^K e^L = 0. \tag{2.67}$$

La primera de estas ecuaciones es equivalente a las ecuaciones de campo de Einstein (2.18). La segunda ecuación expresa la anulación de la torsión,

$$T^I = de^I + A^I{}_J e^J = 0, \tag{2.68}$$

la cual se puede resolver para la conexción de espín $A^I{}_J$, y así ésta es escrita en función del vierbein y sus derivadas.

2.6.1 Grupo de Poincaré

Uno de los ejemplos más simples de una teoría de norma para gravedad, es obtenida considerando al grupo de Poincaré. Los generadores de dicho grupo vienen expresados por

$$\tilde{\mathbf{T}}_{\bar{I}} = (\mathbb{P}_I, \mathbb{J}_{IJ}), \tag{2.69}$$

donde $\mathbb{P}_I$ corresponde a los generadores de traslaciones y $\mathbb{J}_{IJ} = -\mathbb{J}_{JI}$ son los generadores del grupo de Lorentz. Los generadores del grupo de Poincaré satisfacen el álgebra de Lie:

$$\left[\mathbb{J}_{IJ},\mathbb{J}_{KL}\right] = \eta_{KJ}\mathbb{J}_{IL}-\eta_{KI}\mathbb{J}_{JL}+\eta_{LJ}\mathbb{J}_{KI}-\eta_{LI}\mathbb{J}_{KJ}, \tag{2.70}$$

$$\left[\mathbb{J}_{IJ},\mathbb{P}_{K}\right] = \eta_{JK}\mathbb{P}_{I}-\eta_{IK}\mathbb{P}_{J}, \tag{2.71}$$

$$\left[\mathbb{P}_{I},\mathbb{P}_{J}\right] = 0. \tag{2.72}$$

En este caso la teoría tiene dos campos de norma, la conexión A^{IJ} y el vielbein e^{I}. Por otra parte, al definir un nueva conexión $\mathfrak{A}$, como función de $\{e^{I},A^{IJ}\}$, esta puede ser escrita como la 1-forma de conexión [53]

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_{\bar{I}}\tilde{\mathbf{T}}^{\bar{I}}=e^{I}\mathbb{P}_{I}+\frac{1}{2}A^{IJ}\mathbb{J}_{IJ}. \tag{2.73}$$

Análogamente es posible escribir la 2-forma intensidad de campo asociada a la 1-forma de conexión $\mathfrak{A}$ como

$$F = d\mathfrak{A}+\mathfrak{A}^{2}, \tag{2.74}$$

$$F = F^{\bar{I}}\tilde{\mathbf{T}}_{\bar{I}}=T^{I}\mathbb{P}_{I}+\frac{1}{2}R^{IJ}\mathbb{J}_{IJ}. \tag{2.75}$$

Es importante notar que en este contexto, la torsión es interpretada como la intensidad de campo relacionada a las traslaciones y que la curvatura está relacionada con la intensidad de campo de las transformaciones de Lorentz. Notemos además que las expresiones explicitas para la torsión y la curvatura dadas en términos de los potenciales de norma son obtenidas como una consecuencia directa de las relaciones de conmutación del álgebra de Poincaré. Este formalismo muestra explicitamente, la estrecha relación existente entre la estructura geométrica de la variedad y la estructura algebraica del grupo de simetría fundamental [54]. Por otra parte, si deseamos saber como transforma la 1-forma conexión $\mathfrak{A}$ bajo el grupo de Poincaré, es necesario recordar que la ley de transformación depende de como sea exponenciado el grupo. Sea la exponenciación

$$U=e^{-\lambda}=e^{-\lambda^{I}T_{I}}. \tag{2.76}$$

Sabemos que para conservar la invariancia de la teoría, se debe definir una derivada covariante, donde la derivada covariante "D" actúa sobre un elemento λ del álgebra como

$$D\lambda = d\lambda + [\mathfrak{A}, \lambda], \tag{2.77}$$

donde $\mathfrak{A}$ transforma bajo el grupo como

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^{'} = U\mathfrak{A}U^{-1} + UdU^{-1}. \tag{2.78}$$

Luego haciendo uso de la ecuación (2.76) es posible mostrar que

$$\mathfrak{A}^{'} = \mathfrak{A} + d\lambda + \left[\mathfrak{A}, \lambda\right], \tag{2.79}$$

de modo que la 1-forma de conexión transforma como

$$\delta\mathfrak{A} = D\lambda. \tag{2.80}$$

Consideremos ahora el parámetro de la transformación, el cual se puede escribir como

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda^{\bar{I}}\tilde{\mathbf{T}}_{\bar{I}} = \lambda^{I}\mathbb{P}_{I} + \frac{1}{2}\lambda^{IJ}\mathbb{J}_{IJ}, \\ &= \lambda^{I}\mathbb{P}_{I} + \frac{1}{2}\lambda^{IJ}\mathbb{J}_{IJ}. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Luego, si introducimos (2.81) y usando la derivada covariante dada por la ecuación (2.77) en (2.80), del lado derecho de (2.80) se tiene

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{A} &= (d\lambda^{I} + A^{I}_{J}\lambda^{J} + e_{K}\lambda^{KI})\mathbb{P}_{I} + \frac{1}{2}(d\lambda^{IJ} + A^{IK}\lambda_{K}{}^{J} + A^{JK}\lambda^{I}{}_{K})\mathbb{J}_{IJ} \\ &= (D\lambda^{I} + e_{K}\lambda^{KI})\mathbb{P}_{I} + \frac{1}{2}D\lambda^{IJ}\mathbb{J}_{IJ}. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Del lado izquierdo de la ecuación (2.80), obtenemos la siguiente expresión a partir de (2.73)

$$\delta\mathfrak{A} = \delta e^{I}\mathbb{P}_{I} + \frac{1}{2}\delta A^{IJ}\mathbb{J}_{IJ}, \tag{2.83}$$

comparando (2.82) y (2.83), podemos observar que las componentes e^{I} y A^{IJ} tienen las siguientes leyes de transformación

$$\begin{aligned} \delta e^I &= D\lambda^I + e_K\lambda^{KI}, && (2.84)\\ \delta A^{IJ} &= d\lambda^{IJ} + A^{IK}\lambda_K{}^J + A^{JK}\lambda^I{}_K. && (2.85) \end{aligned}$$

De manera que bajo traslaciones se tiene que

$$\begin{aligned} \delta e^I &= D\lambda^I, && (2.86)\\ \delta A^{IJ} &= 0, && (2.87) \end{aligned}$$

y bajo rotaciones de Lorentz

$$\begin{aligned} \delta e^I &= e_K\lambda^{KI}, && (2.88)\\ \delta A^{IJ} &= D\lambda^{IJ}. && (2.89) \end{aligned}$$

El siguiente paso consiste en estudiar la invariancia de la acción de Palatini bajo las leyes de transformación encontradas para el grupo de Poincaré. La invariancia de una acción gravitacional bajo algún grupo de simetría permitiría describir gravedad como una teoría de norma. No obstante, veremos a continuación que la acción de EH 4-dimensional no es invariante bajo traslaciones locales de Poincaré [53], [54].

Ahora veremos si la acción de Palatini en 4D es invariante bajo las transformaciones (2.87)-(2.89). La acción de Palatini en cuatro dimensiones esta expresada por

$$S^{(4)}{}_P = \int \varepsilon_{IJKL} R^{IJ} e^K e^L, \tag{2.90}$$

es, por construcción, invariante bajo transformaciones generales de coordenadas y bajo transformaciones de Lorentz. Sin embargo, mostraremos a continuación que esta acción no es invariante bajo traslaciones locales de Poincaré. Consideremos la variación de la acción (2.90)

$$\begin{aligned} \delta_{tlP} S^{(4)}{}_P &= \delta \int \varepsilon_{IJKL} R^{IJ} e^K e^L,\\ &= \int d(\varepsilon_{IJKL}\delta A^{IJ} e^K e^L) - 2\int \varepsilon_{IJKL}\delta A^{IJ} T^K e^L + \int \varepsilon_{IJKL} R^{IJ}\delta e^K e^L. && (2.91) \end{aligned}$$

donde $\delta_{tlP} = \delta_{traslaciones-locales-de-Poincaré}$.

Luego, puesto que bajo traslaciones locales de Poincaré, el vierbein y la conexión transforman como

$$\begin{aligned} \delta e^I &= D\lambda^I, \\ \delta A^{IJ} &= 0, \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \delta_{tlP} S^{(4)}{}_P &= 2\int \varepsilon_{IJKL} R^{IJ} e^K D\lambda^L, \\ &= 2\int D(\varepsilon_{IJKL} R^{IJ} e^K \lambda^L) + 2\int \varepsilon_{IJKL} R^{IJ} T^K \lambda^L, \end{aligned} \tag{2.92}$$

donde hemos hecho uso de la identidad de Bianchi $DR^{IJ} = 0$. Luego, salvo términos de borde, tenemos que

$$\delta_{tlP} S^{(4)}{}_P = 2\int \varepsilon_{IJKL} R^{IJ} T^K \lambda^L \neq 0. \tag{2.93}$$

No obstante, T^I no es invariante bajo traslaciones locales de Poincaré. En efecto es posible mostrar que

$$\delta T^I = \delta(De^I) = D(\delta e^I) = DD\lambda^I = R^{IJ}\lambda_J \neq 0. \tag{2.94}$$

Podemos observar que la acción de Palatini en 4D no es invariante ante traslaciones locales de Poincaré.

Para concluir con esta sección, se analiza la invariancia de la acción de Palatini en 3D dimensiones bajo traslaciones locales de Poincaré. Bajo traslaciones locales de Poincaré se tiene

$$
\begin{aligned}
\delta_{tlP}S_P^{(3)} &= \delta \int \varepsilon_{IJK}R^{IJ}e^K, \\
&= \int \varepsilon_{IJK}(\delta R^{IJ})e^K + \int \varepsilon_{IJK}R^{IJ}\delta e^K, \\
&= \int \varepsilon_{IJK}d(\delta A^{IJ}e^K) - \int \varepsilon_{IJK}\delta A^{IJ}De^K + \int \varepsilon_{IJK}R^{IJ}\delta e^K, \\
&= \int \varepsilon_{IJK}R^{IJ}D\lambda^K. \qquad (2.95)
\end{aligned}
$$

lo cual se puede reescribir como

$$
\delta_{tlP}S_P^{(3)} = \int \varepsilon_{IJK}d(R^{IJ}\lambda^K) + \int \varepsilon_{IJK}DR^{IJ}\lambda^K. \qquad (2.96)
$$

Luego, salvo un término de frontera y haciendo uso de la identidad de Bianchi $DR^{IJ} = 0$, se muestra finalmente la invarianza de la acción 3-dimensional bajo traslaciones locales de Poincaré,

$$
\delta_{tlP}S_P^{(3)} = 0. \qquad (2.97)
$$

Puesto que dicha acción es, por construcción, invariante bajo transformaciones de Lorentz se tiene que en 3 dimensiones es posible escribir una acción para gravedad invariante bajo el grupo de Poincaré.

Capítulo 3

Algoritmo de Dirac-Bergmann

3.1 Sistemas singulares clásicos

En este capítulo se explicara el concepto de singularidad en el formalismo Lagrangiano. También, se introducen algunas nociones básicas, tales como las restricciones que emergen debido a la singularidad en la Hessiana y la definicíon del momento canónico. Comenzaremos nuestro análisis de sistemas con constricciones utilizando el pricipio de mínima acción. De acuerdo con el principio de mínima acción, un sistema físico puede ser descrito por una función L que depende de las posiciones y velocidades

$$L = L(q(t), \dot{q}(t)). \tag{3.1}$$

La abreviación $q(t)$ y $\dot{q}(t)$ representa el conjunto de todas las posiciones $q(t) = \{q^i(t)\}$ y velocidades $\dot{q}(t) = \{\dot{q}^i(t)\}$, con $i = 1, \ldots, N$. El movimiento real del sistema clásico entre dos puntos dados, es aquel que hace que la acción

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t)), \tag{3.2}$$

sea estacionaria bajo variaciones infinitesimales $\delta q^i(t)$ [55] . Suponiendo que los puntos iniciales y finales son fijos durante la variación, i.e. $\delta q^i(t_2) = \delta q^i(t_1) = 0$, se obtienen las ecuaciones de movimiento para la trayectoria clásica

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0. \tag{3.3}$$

Las ecuaciones de movimiento (3.3) pueden ser reescritas como

$$\ddot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}. \tag{3.4}$$

Al escribir las ecuaciones de movimiento de esta manera, podemos observar que las aceleraciones $\ddot{q}^i$ pueden ser expresedas de forma única por las posiciones q^i y las velocidades $\dot{q}^i$ si y sólo si la matriz Hessiana

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}, \tag{3.5}$$

es invertible. En otras palabras, su determinante no debe ser cero

$$det H_{ij} \neq 0. \tag{3.6}$$

3.2 Restricciones primarias

Ya que estamos interesados en la formulación Hamiltoniana de la teoría, tenemos que llevar a cabo la transformación de Legendre de la Lagrangiana. El momento canónico esta definido como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \tag{3.7}$$

En el caso de que el determinante de la Hessiana (3.6) sea cero, algunas de las aceleraciones no podrán ser determinadas a partir de las velocidades y posiciones. Esto significa, que algunas de las variables no son del todo independientes, como consecuencia, en un sistema singular no podemos despejar todas las velocidades en función de los momentos y las posiciones [55]. Esto da lugar a la existencia de **R** relaciones entre las posiciones y los momentos

$$\phi_r(q,p) = 0, \qquad r = 1, \ldots, \mathbf{R}. \tag{3.8}$$

En particular, si se tienen $\mathbf{R}'$ ecuaciones independientes de la forma (3.8), implica que $\mathbf{R}'$ $p's$ no se pueden escribir en términos de las $\dot{q}'s$. Por lo tanto, el rango de (3.5) es $(N - \mathbf{R}')$[1]. Estas

[1]N es el número de grados de libertad del sistema, donde $i = 1, \ldots, N$.

condiciones (3.8), que obviamente, no se obtubieron de las ecuaciones de movimiento, se llaman restriciones primarias. Estas restriciones primarias se obtienen de la estructura de la Lagrangiana y de la definición de los momentos (3.7). La constriciones (3.8), obtenidas mediante la deficición de los momentos, no son necesariamente independientes, por lo que en general $\mathbf{R}' \leq \mathbf{R}$. Por otra parte, debemos asegurarnos de haber encontrado todas las restricciones primarias. La manera para hacerlo es mediante el cálculo de el rango de la matriz Hessiana, $N - \mathbf{R}'$, donde $\mathbf{R}'$ es el número de restricciones primarias independientes que se esperan. Se debe tener en cuenta, que las $\phi_{r'}$'s, restricciones independientes, no tienen por qué venir dadas diractamente de (3.7) como las ϕ_r's, si no que pueden presentarse como combinaciones lineales de estas últimas. Por lo tanto se deben calcular los vectores nulos de matriz Hessiana, los cuales, por definición, forman una base de la nulidad de $H_{\mu\nu}$. Así, si V_μ son los vectores nulos[2] (con V_μ^α sus componentes), y ϕ_α son las restricciones primarias encontradas, entonces las restricciones primarias independientes están dadas por

$$\Phi_\mu = V_\mu^\alpha \phi_\alpha. \tag{3.9}$$

Por simplicidad, se supone que el rango de la matriz Hessiana, $N - \mathbf{R}'$, es constante en el espacio $(q, \dot{q})$, de modo que el número de restricciones primarias $\mathbf{R}'$ no varía, y que las ecuaciones (3.8) definen una subvariedad $2N - \mathbf{R}'$ en el espacio fase.

3.3 Ecuaciones débiles y fuertes

Se define el concepto de igual débil, el cual se representa con el símbolo " $\approx$ ". Dos funciones F y G, se dicen débilmente iguales, si lo son en la subvariedad definida por las restricciones primarias, $\phi_r = 0$, lo cual se escribe como

$$F \approx G. \tag{3.10}$$

En particular, ϕ_r, i.e. el valor númerico de las restricciones es cero, aunque no se anula idénticamente en todo el espacio fase, por lo que su paréntesis de Poisson no tiene por qué ser cero. Se debe tener en cuenta, que para utilizar estas expresiones, primero se debe realizar la operación del paréntesis y al final ocupar las restricciones [55].

Una manera formal de definir ecuaciones débiles y fuertes, es la siguiente:

[2]El espacio nulo o nulidad de una matriz W_{ij}, es el conjunto de vectores V_k^i linealmente independientes, tales que, $V_k^i W_{ij} = 0$, k=1,...,K. Donde K es la dimensión del espacio nulo.

Definición: Una funciónal F del espacio fase, es débilmente igual a cero, si

$$F \approx 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad F\mid_{\sum_1} = 0, \tag{3.11}$$

donde $\sum_1$ es la subvariedad definida por las restricciones primarias (3.8). Por otra parte, se dice fuertemenete igual a cero si,

$$F = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad F\mid_{\sum_1} = 0, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial q^i}, \frac{\partial F}{\partial P_i}\right)\mid_{\sum_1} = 0. \tag{3.12}$$

con $\left(\frac{\partial F}{\partial q^i}, \frac{\partial F}{\partial P_i}\right)\mid_{\sum_1} = 0$, el conjunto formado por todas las derivadas parciales de F con respecto a las variables canónicas, evaluadas en $\sum_1$.

Para finalizar esta sección, podemos observar, que una función que es débilmente cero puede ser escrita como una combinación lineal de restricciones, i.e. $G \approx 0 \Leftrightarrow G = g^r \phi_r$, con g^r alguna función del espacio fase [55].

3.4 Condiciones sobre las funciones de restricción

Existe una ambigüedad en la forma de representar una superficie dada por (3.8). Por lo tanto se necesita imponer condiciones en la elección de las funciones ϕ_r, que representan la superficie de restricciones primarias, para que sean consistentes con el formalismo hamiltoniano. A éstas condiciones se les conoce como, *condiciones de regularidad*. Lo comentado anteriormente se puede entender mejor de la siguiente manera, uno esperaría que dada una restricción de la forma $f_r := \phi_r(q,p) \approx 0$, o cualquier función de esta, por ejemplo, f^2, $\sqrt{f}$, etc. sigua siendo cero en la subvariedad definida por ϕ_r y por lo tanto sigan siendo restricciones. Sin embargo, para que estas funciones definan una subvariedad de dimensión $\mathbf{R}'$ constante, es necesario que el rango de la matriz jacobiana [55]

$$J = \frac{\partial(\phi_1, \ldots, \phi_{\mathbf{R}'})}{\partial(\{q^i\}, \{p_i\})}, \tag{3.13}$$

sea constante e igual $\mathbf{R}'$. Por ejemplo, para el caso en que se tenga $(f_r)^2$ no forman una variedad de dimensión $\mathbf{R}'$, lo cual puede mostrarse [3] verificando que el rango de la matriz jacobiana ya no es $\mathbf{R}'$. Por lo tanto, resulta natural imponer la condición de que las restricciones $\phi_{r'}$, al formar una subvariedad, el rango de (3.10) sea constante e igual a $\mathbf{R}'$, con $\mathbf{R}'$ el número de restricciones independientes. La subvariedad de dimensión $2N-\mathbf{R}'$ que definen las restricciones $\phi_r = 0$ puede ser cubierta por conjuntos abiertos, en cada uno de los cuales pueden clasificarse localmente en restricciones independientes $\phi_{r'} = 0$ con $(r^{'} = 1,\ldots,\mathbf{R}')$ tales que $\frac{\partial(\phi_1,\ldots,\phi_{\mathbf{R}'})}{\partial(\{q^i\},\{p_i\})}$ tiene rango $\mathbf{R}'$, y las dependientes, $\phi_{\underline{r}'} = 0$ con $(\underline{r}^{'} = \mathbf{R}'+1,\ldots,R)$, que satisfacen como consecuencia las primeras. La condición de regularidad juega un papel importante en la construcción del formalimso Hamiltoniano.

3.5 El Hamiltoniano canónico

La transición a la formulación de la mecánica Hamiltoniana es dada por la transformación de Legendre

$$H(q(t),p(t)) = p_i(t)\dot{q}^i(t) - L(q(t),\dot{q}^i(t)). \tag{3.14}$$

La función de Hamilton no es una función de las velocidades. Esto puede verse de la siguinte, manera:

$$\begin{aligned} dH &= d(p_i q^i) - dL, \\ &= \dot{q}^i dp_i + p_i dq^i - \frac{\partial L}{\partial q^i}dq^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}d\dot{q}^i \\ &= \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}dq^i, \end{aligned} \tag{3.15}$$

donde se utilizó la definición de los momentos (3.7) de la segunda a la tercera línea. Se puede observar que los diferenciales de velocidad desaparecen, sólo los diferenciales de las posiciones y momentos se quedan. Como consecuencia de ello, la función de Hamilton no puede ser una función de las velocidades. Usando (3.11), se puede escribir la acción como

$$A = \int dt[p_i(t)\dot{q}^i(t) - H(p(t),q(t))]. \tag{3.16}$$

[3] Por ejemplo, los elementos matriz de esta matriz ϕ_r, serán $\frac{\partial(f_r)^2}{\partial(q^i,p_i)} = 2f_r\frac{\partial(\phi_r)^2}{\partial(q^i,p_i)} \approx 0$, con lo que el rango de la matriz jacobiana ya no será $\mathbf{R}'$

Recordemos que las restricciones en el formalismo de Lagrange son tomadas en cuenta a través del acoplamiento de multiplicadores de Lagrange $\lambda^r(t)$

$$L(q^i(t), \dot{q}^i) + \lambda^r(t)\phi_r(q(t), \dot{q}(t)). \tag{3.17}$$

Esto también se puede hacer dentro de la formulación de Hamilton. Por lo tanto, si llevamos a cabo la transformación de Legendre y acoplamos las restricciones primarias (3.8) de manera análoga a (3.17), la acción (3.16) toma la forma

$$A = \int dt[p_i(t)\dot{q}^i(t) - H(p(t), q(t)) - \lambda^r\phi_r(p(t), q(t))]. \tag{3.18}$$

La variación de la acción (3.18) está dada por

$$\begin{aligned}
\delta A &= \int dt\left[p_i\dot{q}^i - H(q,p) - \lambda^r\phi_r(q,p)\right], \\
&= \int dt\left[\delta p_i\dot{q}^i + p_i\delta\dot{q}^i - \delta H - \delta\lambda^r\phi_r - \lambda^r\delta\phi_r\right], \\
&= \int dt\left[\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} - \lambda_r\frac{\partial \phi_r}{\partial q^i}\right)\delta q^i + \left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} - \lambda_r\frac{\partial \phi_r}{\partial p_i}\right)\delta p_i - \phi_r\delta\lambda^r\right]. \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

La trayectoria clásica es obtenida mediante el pricipio de mínima acción, por lo tanto, para variaciones arbitrarias de δq^i, δp_i y $\delta\lambda^r$, sujetas a la condición $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$, se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}
\dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \lambda^r\frac{\partial \phi_r}{\partial q^i}, & (3.20)\\
\dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda^r\frac{\partial \phi_r}{\partial p_i}, & (3.21)\\
\phi_r &= 0. & (3.22)
\end{aligned}$$

La dos primeras ecuaciones son las ecuaciones de movimiento de Hamilton y la tercera es el conjunto de constricciones primarias. Podemos observar que la teoría es invariante bajo la transformación $H \to H + \mu^r\phi_r$, esto daría lugar a una redefinición de los multiplicadores $\lambda^r \to \lambda^r + \mu^r$.

Definiendo los corchetes de Poisson de dos funciones $F(q,p)$ y $G(q,p)$ del espacio fase como

$$\{F,G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i}\frac{\partial F}{\partial p_i}, \tag{3.23}$$

podemos escribir las ecuaciones de movimento de Hamilton (3.20)-(3.21) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \{p_i, H\} + \lambda^r\{p_i, \phi_r\} \qquad (3.24)\\ \dot{q}^i &= \{q^i, H\} + \lambda^r\{q^i, \phi_r\}. \qquad (3.25) \end{aligned}$$

Para un función general del espacio fase $F(q,p)$ la ecuación de movimiento queda expresada por

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} \\ &= \frac{\partial F}{\partial p_i}\left(-\frac{\partial H}{\partial q^i} - \lambda^r\frac{\partial \phi_r}{\partial q^i}\right) + \frac{\partial F}{\partial q^i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda^r\frac{\partial \phi_r}{\partial p_i}\right) \\ &= \{F,H\} + \lambda^r\{F,\phi_r\}. \qquad (3.26) \end{aligned}$$

Si definimos el Hamiltoniano primario mediante

$$H_p = H + \lambda^r\phi_r, \tag{3.27}$$

podemos ver que la ecuación de movimiento para la función F se puede expresar como

$$\dot{F} \approx \{F, H_p\}. \tag{3.28}$$

Podemos ulilizar la igualdad "debil" en la ecuación (3.26), es decir, restringida a la superficie de constricción. Por otra parte, El Hamiltoniano primario H_p contiene, hasta el momento, toda la información del sistema.

3.6 Condiciones de consistencia y restricciones secundarias

Para obtener resultados razonables se tienen que imponer ciertas condiciones de consistencia, cuando el sistema evoluciona en el tiempo, este no tiene que salir de la subvariedad definida por las restricciones. En otras palabras, la evolución del sistema debe preservar las constricciones en el tiempo, es decir que las funciones $\dot{\phi}_r \approx 0$. Esto se puede escribir matemáticamente como [55]

$$\dot{\phi}_r = \{\phi_r, H\} + \lambda^s\{\phi_r, \phi_s\} \approx 0. \tag{3.29}$$

La ecuación anterior se puede considerar como un sistema de ecuaciones lineales no homogéneas para los multiplicadores de Lagrange λ^s, la posibilidad de hallar los multiplicadores de Lagrange depende de las característica de $\{\phi_r, H\}$ y $P_{rs} = \{\phi_r, \phi_s\}$, es decir, se tienen los siguientes casos

1. $\{\phi_r, H\} \neq 0$, $detP_{rs} \neq 0$.

Todos los multiplicadores se pueden despejar $\lambda^s \approx -P^{sr}\{\phi_r, H\}$.

2. $\{\phi_r, H\} \neq 0$, $detP_{rs} \approx 0$. Para poder conocer cuantos multiplicadores pueden ser determinados en este paso, se calcula el rango de P_{rs} que es denotado por E, mientras que la nulidad de P_{rs} la cual es $\mathbf{R}' - E$ nos da la información de el número de multiplicadores de Lagrange que quedarán indeterminados, de modo que habrá funciones arbitrarias en las ecuaciones de movimiento. Si los vectores nulos $V^r_{(\rho)}$ $((\rho) = 1, \ldots, \mathbf{R}' - E)$ que por definición satisfacen

$$\{\phi_r, \phi_s\}V^r_{(\rho)} \approx 0, \tag{3.30}$$

multiplicando ambos lados de (3.29) por $V^r_{(\rho)}$, se obtiene

$$\phi sec_\rho = \dot{\phi}_r V^r_{(\rho)} \approx \{\phi_r, H\}V^r_{(\rho)} + \lambda^s\{\phi_r, \phi_s\}V^r_{(\rho)} \quad \approx \quad \{\phi_r, H\}V^r_{(\rho)}. \tag{3.31}$$

Para cada vector nulo estas ecuaciones podrán producir condiciones en las variables del espacio fase que son independientes de las restriciones primarias. Estas (ρ) relaciones, implican (ρ) constricciones adicionales en la teoría, a las cuales se les llama restricciones secundarias.

Debido a las condiciones de consistencia, también se requiere que las constricciones secundarias sean preservadas en el tiempo, esto implica repetir los mismos pasos anteriores aplicados a las constricciones secundarias, esto se hace con el fin de verificar si aparecen constricciones terciarias, o que se puedan determinar multiplicadores de Lagrange asociados a las constricciones primarias y secundarias, este proceso termina después de un número finito de pasos.

3.7 Restricciones de primera y segunda clase

De acuerdo a Dirac [32], es posible distinguir dos tipos de funciones en el espacio fase. Por lo tanto, se debe tener una defición clara sobre este punto.

Definición: Una función es llamada de primera clase si el corchete de Poisson de dicha función con todas las restricciones es débilmente igual a cero

$$\{F, \phi_r\} \approx 0. \tag{3.32}$$

en otro caso, la función F es llamada de segunda clase. Si F es de primera clase, entonces $\{F, \phi_\mu\}$ tiene que ser fuertemente igual a alguna combinación lineal de $\phi' s$, debido a que cualquier funcional que es débilmente cero en el presente análisis es fuertemente igual a una combinación lineal $\phi' s$ pues que son las únicas cantidades independientes que son débilmente cero. Así,

$$\{F, \phi_\mu\} = f_\mu^\rho \phi_\rho. \tag{3.33}$$

La importancia de la separación de las restricciones entre primera y segunda clase, es debido a que las primeras serán las generadoras de las transformaciones de norma y las segundas permitirán construir el Paréntesis de Dirac, que en las teorías que presentan este tipo restricciones vendrá a reemplazar el paréntesis de Poisson a la hora de calcular la evolución dinámica del sistema. La forma de hacer la separación de las restricciones se lleva a cabo de la siguiente manera: se construye la matriz C de dimensión $J \times J$ cuyas entradas estan dadas por $C_{r,s} = \{\phi_r, \phi_s\}$, donde J es el número total de restricciones primarias y secundarias, terciarias, etc. si el $detC \approx 0$, entonces el espacio nulo de C es J-T y proporciona la información de el número de restricciones de primera clase [4]. Así, como en el caso de la identificación correcta de las restricciones primarias independientes, que no venian dadas directamente de la definición de los momentos, para poder calcular las restricciones independientes de primera clase, se calculan los vectores nulos de la matriz formada entre todas las restricciones encontradas, primarias, secundarias, terciarias, etc., y se contraen dichas restricciones con los vectores nulos, para poder identificar la forma correcta de las restricciones de primera clase. Debido a que la separación relevante para las restricciones es aquella que las distingue entre de primera y segunda clase, conviene introducir una notación que tome en cuenta este hecho. Nosotros denotaremos las restricciones de primera clase por la letra griega γ y las de segunda clase por χ.

3.8 Transformaciones de norma y restricciones de primera clase

Estudiaremos las propiedades de la ecuación de movimiento de alguna variable dinámica para entender el rol de las restricciones de primera clase γ_a. La evolución de la varibles dinámica F si no

[4] T es el rango de C

depende explicitamente del tiempo, viene dada por

$$\dot{F} = \{F,H\} + \eta^a\{F,\gamma_a\}. \tag{3.34}$$

Los multiplicadores η^a en la ecuación de movimiento anterior son completamente arbitrarios, esto quiere decir que se tiene una arbitrariedad en la elección de las funciones η^a, podemos esperar que la solución a las ecuaciones de moviemiento contenga funciones arbitrarias del tiempo. Esta arbitrariedad no puede tener ningún significado físico, debido a que la mecánica clásica es una teoría determinista, por lo que dos estados que comparten las mismas condiciones iniciales no deben de ser físicamente diferentes, se dirá que estos sistemas son equivalentes de norma [32].

Consideremos 2 funciones del espacio fase F_η y $F_{\eta'}$ con 2 multipladores diferentes η y $\eta^{'}$ que parten del mismo estado inicial F_0. Expandiendo el valor de F para un intervalo de tiempo pequeño

$$F(t) = F(0) + \frac{dF}{dt}\mid_{t=0} t + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dt^2}\mid_{t=0} t^2 + ..., \tag{3.35}$$

insertando la ecuación de movimiento (3.34) en (3.35), se obtiene

$$F(t) = F(0) + (\{F,H\} + \eta^a\{F,\gamma_a\})t + ..., \tag{3.36}$$

ya que los coeficietes μ^a son completamente arbitrarios, se puede elegir diferentes valores para esos coeficientes y obtener valores diferentes para (3.36), siendo la diferencia de la forma

$$F_\eta - F_{\eta'} \approx (\eta^a - \eta^{'a})t\{F,\gamma\}, \tag{3.37}$$

para un tiempo infinitesimal δt, la diferencia es dada por

$$\delta F = \varepsilon^a\{F,\gamma_a\}, \tag{3.38}$$

donde $\varepsilon^a = (\eta^a - \eta^{'a})t$. El cambio $F(\delta t)$ no es físico, ya que el estado de un sistema no puede depender de la elección arbitraria de los coeficientes, además, ambos valores de la variable $F(\delta t)$ corresponden al mismo estado físico. Por lo tanto, podemos concluir que la tramsformación infinitesimal generada por la función $\varepsilon^a\gamma_a$ relaciona descripciones equivalentes de una mismo estado físico. Este tipo de transformaciones se le denomina de norma, entonces podemos inferir que las restricciones de primare clase γ_a son las generadoras de las transformaciones de norma de la teoría.

Para finalizar esta sección, se mencionará brevemente el concepto de Hamiltoniano extendido y acción extendida. Dirac conjeturó que todas las constricciones de primera clase eran generadores de transformaciones de norma, y propuso por lo tanto, escribir las ecuaciones dinámicas utilizando un Hamiltoniano que contenga las contricicones de primera y segunda clase, al Hamiltoniano el cual hace esta distinción se le conoce como Hamiltoniano extendido. Entonces, el Hamiltoniano extendido se define como

$$H_E = H^{'} + v^m \gamma_m, \tag{3.39}$$

donde $H^{'}$ se define de la siguiente manera

$$H' = H_C + U^m \chi_m. \tag{3.40}$$

Usando esta función Hamiltoniana, la ecuación de movimiento queda expresada por

$$\dot{F} = \{F, H_E\}. \tag{3.41}$$

Para las variables dinámicas invariantes de norma, i.e. variables tales cuyo corchete de Poisson con los generadores de norma γ_a es débilmente cero, la evolución dinámica dada por H_p, $H^{'}$ y H_E es la misma. Para alguna otra variable, es necesario usar H_E, que considera toda la libertad de norma del sistema. La necesidad de un Hamiltoniano extendido no es algo que se deduzca de la formulación Lagrangiana, pues el Hamiltoniano primario genera las ecuaciones de movimiento $(3.20) - (3.21)$ que, por construcción, equivalen a las ecuaciones de Lagrange (3.3). La introducción del Hamiltoniano extendido es entonces una nueva característica del formalismo Hamiltoniano que incluye de forma manifiesta la invariancia de norma. Por otra parte, podemos observar, que las ecuaciones de movimiento (3.41) se puede obtener a partir de la acción

$$S_E(q,p,v,U) = \int (p_n \dot{q}^n - H_C - v_a \gamma^a - U^r \chi_r) dt = \int (p_n \dot{q}^n - H_E) dt, \tag{3.42}$$

la cual se llamará acción extendida que, a diferencia de A dada por (3.2), ya contiene toda la información del sistema. Las ecuaciones de movimiento quedan dadas por

$$\dot{F} = \{F, H_E\}. \tag{3.43}$$

y

$$\phi_a = \gamma_a \approx 0, \tag{3.44}$$

$$\phi_r = \chi_r \approx 0. \tag{3.45}$$

3.9 Grados de libertad

Una vez identificadas las restricciones de primera y segunda clase, se puede llevar a acabo el conteo de los grados de libertad.

Definición: Los grados de libertad de un sistema son el número de variables físicas independientes necesarias para describir al sistema.

En los cursos de mecánica clásica elemental, se realiza el conteo de los grados de libertad de la siguiente manera, al número de coordenadas generalizadas se le resta el número de restricciones independientes. Tomando como punto de partida esto, se puede escribir que el número de grados de libertad es

$$GL = \frac{1}{2}\Big[NVD - 2NFC - NSC\Big]. \tag{3.46}$$

Donde NVD=número de variables dinámicas, NFC=número de restricciones de primera clase y NSC= número de restriciones de segunda clase. El factor $\frac{1}{2}$ es para compensar el hecho de que usualmente los grados de libertad se refieren a las coordenadas generalizadas q^i, al considerar todas las variables canónicas también se considera a los momentos generalizados p_i. El 2 que acompaña al número de restricciones de primera clase es debido a su doble rol, tanto de restricciones como el ser generadores de transformaciones de norma [55].

3.10 Corchetes de Dirac

Definimos el corchete de Dirac entre dos funciones F y G del espacio fase como [55]

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \{F, \chi_\mu\}\Delta^{\mu\nu}\{\chi_\nu, G\}, \tag{3.47}$$

con $\{,\}$ el paréntesis de Poisson y $\Delta^{\mu\nu}$ es la inversa de la matriz formada por el corchete de Poisson entre las restricciones de segunda clase, que esta dada por $\Delta_{\mu\nu} = \{\chi_\mu, \chi_\nu\}$, donde χ_μ son las restriciones de segunda clase.

El corchete de Dirac satisface las siguientes identidades algebraicas:

(1) $\{F,G\}_D = -\{G,D\}_D$ (antisimetría),

(2) $\{c_1F_1 + c_2F_2, G\}_D = c_1\{F_1,G\}_D + c_2\{F_2,G\}_D$ (Linealidad),

(3) $\{c,F\}_D = 0$ (c=constante),

(4) $\{F,\{G,H\}_D\}_D + \{G,\{H,F\}_D\}_D + \{H,\{F,G\}_D\}_D = 0$ (identidad de Jacobi),

(5) $\{FG,H\}_D = F\{G,H\}_D + \{F,H\}_D G$ (Producto),

(6) $\{F,G\}_D = \{F,G\}$(G de primera clase y F arbitraria),

(7) $\{\chi_\mu, F\}_D = 0$, $\forall F$.

Podemos observar que debido a las propiedas de los corchetes de Dirac, las ecuaciones de movimiento (3.43) se pueden reescribir como

$$\dot{F} = \{F, H_E\}_D. \tag{3.48}$$

Después de realizar la separación de las restricciones entre de primera y segunda clase, se generalizó el paréntesis de Poisson al paréntesis de Dirac, en términos de la cual se pueden escribir las ecuaciones más relevantes del formalismo (como la ecuacione (3.48)). Las restriciones de segunda clase pasan a convertirse en identidades para algunas variables canónicas en términos de otras. Por otra parte, es esta estructura del paréntesis de Dirac es la que se promoverá a conmutador a la hora de intentar cuantizar la teoría [2, 3].

3.11 Observables

La descripción de un sistema mediante un conjunto de variables cuya evolución dinámica depende de parámetros arbitrarios es, claramente, ambigua y, por lo tanto, insatisfactoria. Es necesario, entonces, definir funciones O cuya evolución esté libre de ambigüedades, lo cual ocurrirá si su corchete de Dirac con las restricciones es débilmente nulo:

$$\{O, \gamma_a\}_D \approx 0. \tag{3.49}$$

Estas funciones se denominan observables, es decir, son invariantes ante transformaciones de norma y su evolución está completamente determinada. Si se describe un sistema mediante observables únicamente, los valores iniciales de estos permiten conocer su evolución sin ninguna ambigüedad [55].

Capítulo 4

Análisis Hamiltoniano de la acción exótica

Como se ha comentado en el capítulo anterior, los sistemas singulares tienen un rol muy importante en la física. El caso más interesante de teoría singular, se da cuando el sistema bajo estudio presenta una simetría llamada simetría de norma. Ejemplos de teorías de norma relevantes en la física podemos citar a la teoría del campo electromagnético, la teoría de Yang-Mills, la teoría del campo gravitacional, la teoría de supercuerdas, etc., [55]. En este capítulo, se hará un análisis detallado de la acción exótica. Como se ha comentado en la introducción, la acción que describe gravedad usando como variables dinámicas el vielbein y la conexión se conoce como la acción de Palatini, en tres dimensiones dicha acción esta relacionada con la acción de Chern-Simons, esta relación fue estudiada por Witten y reportado en [26], mostrando que la acción de Palatini sin constante cosmológica y la acción de Chern-Simons[1] son equivalentes. Cabe mencionar, que en el análisis realizado por Witten en [26] a la acción exótica, propone que dicha acción sea invariante ante cierto tipo de transformaciones, rotaciones y traslaciones, que en princpio son obtenidas para la acción de Palatini con constante cosmológica, sin embargo, la simetría fundamental de norma no fue identificada, por lo tanto, parte del análisis realizado en este capítulo, es la obtención de las transformaciones de norma correcta para los campos (e^I, A^{IJ}) así como también para sus respectivos momentos canónicos, ya que no se encuentra reportado en la literatura. Por otra parte, también se realiza el cálculo de los grados de libertad, los corchetes de Dirac, etc,. Toda esta información se obtiene mediante la implementación del formalismo de Dirac estricto.

[1]con un grupo de estructura $ISO(2,1)$.

4.1 Análisis Hamiltoniano de la acción exótica en tres dimensiones

La acción exótica en tres dimensiones está dada por

$$S[e,A]_{exotic} = \frac{1}{2}\int_M A^{IJ}\wedge dA_{IJ} + \frac{2}{3}A^{IK}\wedge A_{KL}\wedge A^L{}_I + \int_M \frac{\Lambda}{2} e_I \wedge De^I, \tag{4.1}$$

donde $A^{IJ} = A_\mu{}^{IJ}dx^\mu$ es la conexión que toma valores en el algebra de Lie del grupo $SO(2,1)$ y e^I corresponde al campo de triada o campo gravitacional (ver [26, 30] para más detalles al respecto), $\mu,\nu = 0,1,2$ son los índices de espacio tiempo, x^μ son las coordenadas que etiquetan los puntos de la variedad tridimensional M e $I,J = 0,1,2$ son los índices internos que pueden ser bajados y subidos por la métrica interna Lorentziana $\eta_{IJ} = (-1,1,1)$, y la derivada covariante de la conexión esta dada por, $D_aA_b{}^{IJ} = \partial_aA_b{}^{IJ} + A_a{}^{IK}A_{bK}{}^J + A_a{}^{JK}A_b{}^I{}_K$ y $F^{IJ}{}_{ab} = \partial_aA_b{}^{IJ} - \partial_bA_a{}^{IJ} + A_a{}^{IK}A_{bK}{}^J - A_b{}^{IK}A_{aK}{}^J$ es la dos forma de curvatura.

La acción exótica se puede ver como el acoplamiento de dos términos toplógicos, el término de Chern-Simons (el primer término a la izquierda de (4.1)) y el término topológico de Nieh-Yang [54]. Más adelante vamos a encontrar una analogía entre el término de Nieh-Yang y el problema de Landau [56].

La ecuaciones de movimiento que se obtienen de (4.1) estan dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\delta S[A,e]_{exotic}}{\delta A_\alpha{}^{IJ}} &: \quad \varepsilon^{\alpha\mu\nu}R_{IJ\mu\nu}[A] - \Lambda\varepsilon^{\alpha\mu\nu}e_{I\mu}e_{J\nu} = 0, \\ \frac{\delta S[A,e]_{exotic}}{\delta e_{I\alpha}} &: \quad \Lambda\varepsilon^{\alpha\mu\nu}D_\mu e^I{}_\nu = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

La primera ecuación de movimiento expresa las ecuaciones de Einstein en el formalismo de primer orden y la segunda hace referencia a la condición de no torsión. Si se contrae las ecuaciónes de movimiento con la inversa de la triada e_I^d, esto implica que el espacio-tiempo tiene una curvatura constante igual a 6Λ.

Por otra parte, se comentó anteriormente, que el método de Dirac estricto es aquel en el cual se considera a todos los campos que definen a la teoría como dinámicos. Es importante remarcar, que por lo general el análisis hamiltoniano de cualquier teoría se lleva a cabo teniendo en cuenta sólo aquellas variables dinámicas que apararecen en la densidad Lagrangiana con derivada temporal [26, 27, 39]. Sin embargo, el precio a pagar por el desarrollo del análisis en un espacio fase reducido es que no podemos conocer la estructura completa de la restricciones, el álgebra y las transformaciones de norma definidas en el espacio fase completo [26, 27, 39]. Por lo tanto, es necesario realizar un análisis Hamiltoniano completo de cualquier acción con el fin de obtener todas las simetrías relevantes de la teoría.

De esta manera, realizando la descomposición 2+1 del espacio tiempo, suponiendo que la variedad del espacio tiempo es de la forma $M^3 = \Sigma \times R$, donde Σ corresponde a la superficie de Cauchy y R representa un parámetro de evolución, se puede escribir la acción (4.1) como

$$S[e,A]_{exotic} = \int_M \varepsilon^{0ab} \left[\frac{1}{2} A_0{}^{IJ} F_{IJab} + \frac{1}{2} A_b{}^{IJ} \dot{A}_{aIJ} + \frac{\Lambda}{2} e_{Ib} \dot{e}^I{}_a + \Lambda e^I{}_a D_b e_{I0} - \frac{\Lambda}{2} A_0{}^{IJ} e_{aI} e_{bJ} \right] dx^3, \quad (4.3)$$

donde se puede identificar la siguiente densidad Lagrangiana

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\varepsilon^{0ab} A_0{}^{IJ} F_{IJab} + \frac{1}{2}\varepsilon^{0ab} A_b{}^{IJ} \dot{A}_{aIJ} + \frac{\Lambda}{2}\varepsilon^{0ab} e_{Ib} \dot{e}^I{}_a + \Lambda \varepsilon^{0ab} e^I{}_a D_b e_{I0} - \frac{\Lambda}{2}\varepsilon^{0ab} A_0{}^{IJ} e_{aI} e_{bJ}. \quad (4.4)$$

El conjunto de variables dinámicas de la acción (4.1) son $(e^I{}_\alpha, A_\alpha{}^{IJ})$ y sus respectivos momentos canónicos $(\Pi^\alpha{}_I, \Pi^\alpha{}_{IJ})$. Los momentos canónicos están dados por

$$\Pi^\alpha{}_{IJ} = \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \dot{A}_\alpha{}^{IJ}}, \qquad \Pi^\alpha{}_I = \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \dot{e}^I{}_\alpha}. \quad (4.5)$$

Los elementos de la matriz Hessiana

$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu e^I_\alpha)\partial(\partial_\mu e^I_\beta)}, \quad \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu e^I_\alpha)\partial(\partial_\mu A_\beta{}^{IJ})}, \quad \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha{}^{IJ})\partial(\partial_\mu A_\beta{}^{IJ})}, \quad (4.6)$$

es una matriz de dimensión 18×18. Y debido a que sólo aparecen primeras derivadas de $e^I{}_a$ y $A_a{}^{IJ}$ con respecto al parámetro de evolución, x^0, y no aparecen derivadas $e^I{}_0$ y $A_0{}^{IJ}$ con respecto a este parámetro puede verse que la Hessiana es la matriz cero, y cuya nulidad es 18, por lo tanto se esperan 18 restricciones primarias independientes. De la definición (4.5) se pueden identificar las siguientes 18 restricciones primarias

$$\begin{aligned}
\phi_I{}^0 &:= \Pi_I{}^0 \approx 0, \\
\phi_I{}^a &:= \Pi_I{}^a - \frac{\Lambda}{2}\varepsilon^{0ab} e_{Ib} \approx 0, \\
\phi_{IJ}{}^0 &:= \Pi_{IJ}{}^0 \approx 0, \\
\phi_{IJ}{}^a &:= \Pi_{IJ}{}^a - \frac{\varepsilon^{0ab}}{2} A_{bIJ} \approx 0.
\end{aligned} \quad (4.7)$$

De estas 18 restricciones primarias encontradas, y en el caso de ser las correctas deben satisfacer las condiciones de regularidad, para lo cual basta con comprobar que el rango de la matriz Jacobiana es constante en toda la subvariedad definida por las restricciones; en efecto, después de realizar los cálculos se ve que el rango es constante, por lo que estas restricciones son las correctas.

El Hamiltoniano canónico tiene la siguente estructura

$$H_c = \int dx^2 \left[-\frac{1}{2} A_0{}^{IJ} \varepsilon^{0ab} F_{abIJ} + \frac{A_0{}^{IJ}}{2} [e_{Ia} \Pi_J{}^a - e_{Ja} \Pi_I{}^a] - 2e^I{}_0 D_a \Pi_I{}^a \right], \tag{4.8}$$

y el Hamiltoniano primario se define como

$$H_P = H_c + \int dx^2 \left[\lambda^I{}_\alpha \phi_I{}^\alpha + \lambda^{IJ}{}_\alpha \phi_{IJ}{}^\alpha \right], \tag{4.9}$$

donde $\lambda^I{}_\alpha, \lambda^{IJ}{}_\alpha$ son los multiplicadores de Lagrange y $(\phi_I{}^\alpha, \phi_{IJ}{}^\alpha)$ las restricciones primarias dadas por (4.7). El paréntesis de Poisson entre las variables canónicas de la teoría es dado por

$$\begin{aligned} \{e_\alpha{}^I(x), \Pi^\beta{}_J(y)\} &= \delta^\beta{}_\alpha \delta^I{}_J \delta^2(x-y), \\ \{A_\alpha{}^{IJ}(x), \Pi^\beta{}_{KL}(y)\} &= \frac{1}{2} \delta^\beta{}_\alpha \left(\delta^I{}_K \delta^J{}_L - \delta^I{}_L \delta^J{}_K \right) \delta^2(x-y). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Debido a que las restricciones deben preservarse en el tiempo, como ya se explicó en el capítulo (3), se imponen las relaciones de consistencia, a partir de las cuales se podrán encontrar las restricciones secundarias

De esta manera, primero calculamos el rango de la matriz G, formada por los corchetes de Poisson entre las constricciones primarias (4.7) que nos dará la información de cuantos multiplicadores de Lagrange se van a poder determinar y la nulidad corresponde al número de restricciones secundarias esperadas. La matriz G tiene la siguiente estructura

$$\mathrm{G} = \begin{array}{c} \\ \phi_I{}^0(x) \\ \phi_I{}^a(x) \\ \phi_{IJ}{}^0(x) \\ \phi_{IJ}{}^a(x) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \phi_K{}^0(y) & \phi_K{}^b(y) & \phi_{KL}{}^0(y) & \phi_{KL}{}^b(y) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \{\phi_I{}^0(x), \phi_K{}^0(y)\} & \{\phi_I{}^0(x), \phi_K{}^b(y)\} & \{\phi_I{}^0(x), \phi_{KL}{}^0(y)\} & \{\phi_I{}^0(x), \phi_{KL}{}^b(y)\} \\ \{\phi_I{}^a(x), \phi_K{}^0(y)\} & \{\phi_I{}^a(x), \phi_K{}^b(y)\} & \{\phi_I{}^a(x), \phi_{KL}{}^0(y)\} & \{\phi_I{}^a(x), \phi_{KL}{}^b(y)\} \\ \{\phi_{IJ}{}^0(x), \phi_K{}^0(y)\} & \{\phi_{IJ}{}^0(x), \phi_K{}^b(y)\} & \{\phi_{IJ}{}^0(x), \phi_{KL}{}^0(y)\} & \{\phi_{IJ}{}^a(x), \phi_{KL}{}^b(y)\} \\ \{\phi_{IJ}{}^a(x), \phi_K{}^0(y)\} & \{\phi_{IJ}{}^a(x), \phi_K{}^b(y)\} & \{\phi_{IJ}{}^a(x), \phi_{KL}{}^0(y)\} & \{\phi_{IJ}{}^a(x), \phi_{KL}{}^b(y)\} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\times \delta^2(x-y), \tag{4.11}$$

donde los elementos de la matriz G, que son diferentes de cero, estan dados por

$$\begin{aligned}\{\phi_I{}^a(x),\phi_K{}^b(y)\} &= -\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IK}\delta^2(x-y),\\ \{\phi_{IJ}{}^a(x),\phi_{KL}{}^b(y)\} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0ab}\left(\eta_{IL}\eta_{JK}-\eta_{IK}\eta_{JL}\right)\delta^2(x-y),\end{aligned} \tag{4.12}$$

El rango de la matriz G[2] es 12 y la nulidad 6, por lo tanto se esperan 6 vectores nulos. Utilizando los vecotres nulos y las condiciones de consistencia, se obtienen las siguientes 6 constricciones secundarias

$$\begin{aligned}\gamma^0{}_I &= \Pi_I{}^0\approx 0,\\ \gamma^0{}_{IJ} &= \Pi_{IJ}{}^0\approx 0,\\ \dot{\phi}^0{}_{IJ} &= \{\phi_{IJ}{}^0(x),H_P\}\approx 0 \quad\Rightarrow\quad \psi_{IJ}:=\frac{1}{2}[\varepsilon^{0ab}F_{IJab}+e_{Ja}\Pi_I{}^a-e_{Ia}\Pi_J{}^a]\approx 0,\\ \dot{\phi}^0{}_I &= \{\phi_I{}^0(x),H_P\}\approx 0 \quad\Rightarrow\quad \psi_I:=2D_a\Pi_I{}^a\approx 0,\end{aligned} \tag{4.13}$$

y los 12 multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_I{}^a &= \{\phi_I{}^a,H_P\}\approx 0\Rightarrow -\Lambda\varepsilon^{0ab}(\lambda_b{}^I+D_be_0{}^I)\approx 0,\\ \dot{\phi}_{IJ}{}^a &= \{\phi_{IJ}{}^a,H_P\}\approx 0\Rightarrow \varepsilon^{0ab}(\lambda_b{}^{IJ}-D_bA_0{}^{IJ})\approx 0.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Debido a que la teoría presenta restricciones secundarias, se calcula el Hamiltoniano secundario H_s, sumándole al Hamiltoniano primario una combinación lineal de las restricciones secundarias, y se calculan las relaciones de consistencia sobre éstas. Puede verse que esta teoría ya no presenta restricciones terciarias, por lo que el número total de restricciones obtenidas es; 18 restricciones primarias + 6 restricciones secundarias = 24 restricciones.

4.2 Restriciones de primera y segunda clase

Una vez calculadas todas las restriciones de la teoría, se procede a clasificarlas, recordando que la clasificación importante entre ellas es aquella que distingue las de primera clase (generadoras de las transformaciones de norma) de las de segunda clase (que permitirán construir el paréntesis e Dirac). Para llevar a cabo esta clasificación hay que calcular el corchete de Poisson entre todas las

[2] G es una matriz de dimensión 18×18

restricciones, las cuales son las entradas de la matriz W de dimensión 24×24 dada por ,

$$
W = \begin{array}{c} \\ \phi_I{}^\mu(x) \\ \phi_{IJ}{}^\mu(x) \\ \psi_I(x) \\ \psi_{IJ}(x) \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \phi_K{}^\nu(y) & \phi_{KL}{}^\nu(y) & \psi_K(y) & \psi_{KL}(y) \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\{\phi_I{}^\mu(x), \phi_K{}^\nu(y)\} & \{\phi_I{}^\mu(x), \phi_{KL}{}^\nu(y)\} & \{\phi_I{}^\mu(x), \psi_K(y)\} & \{\phi_I{}^\mu(x), \psi_{KL}(y)\} \\
\{\phi_{IJ}{}^\mu(x), \phi_K{}^\nu(y)\} & \{\phi_{IJ}{}^\mu(x), \phi_{KL}{}^\nu(y)\} & \{\phi_{IJ}{}^\mu(x), \psi_K(y)\} & \{\phi_{IJ}{}^\mu(x), \psi_{KL}(y)\} \\
\{\psi_I(x), \phi_K{}^\nu(y)\} & \{\psi_I(x), \phi_{KL}{}^\nu(y)\} & \{\psi_I(x), \psi_K(y)\} & \{\psi_I(x), \psi_{KL}(y)\} \\
\{\psi_{IJ}(x), \phi_K{}^\nu(y)\} & \{\psi_{IJ}(x), \phi_{KL}{}^\nu(y)\} & \{\psi_{IJ}(x), \psi_{KL}(y)\} & \{\psi_{IJ}(x), \psi_{KL}(y)\}
\end{pmatrix}
\end{array}
\delta^2(x-y), \tag{4.15}
$$

Donde se uso la siguiente abreviación en la notación de la matriz (4.15), $\phi_I{}^\mu = (\phi_I{}^0, \phi_I{}^a)$ y $\phi_{IJ}{}^\mu = (\phi_{IJ}{}^0, \phi_{IJ}{}^a)$. La componentes de la matriz W que son diferentes de cero, estan dadas por

$$
\begin{aligned}
\{\phi_I{}^a(x), \phi_J{}^b(y)\} &= -\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\delta^2(x-y), \\
\{\phi_I{}^a(x), \psi_J(y)\} &= -\Lambda\varepsilon^{0ab}\left[\eta_{IJ}\partial_b\delta^2(x-y) - A_{bIJ}\delta^2(x-y)\right], \\
\{\phi_{IJ}{}^a(x), \phi_{KL}{}^b(y)\} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0ab}\left[\eta_{IL}\eta_{JK} - \eta_{IK}\eta_{JL}\right]\delta^2(x-y), \\
\{\phi_{IJ}{}^a(x), \psi_K(y)\} &= \left[\Pi_I^a\eta_{JK} - \Pi_J^a\eta_{IK}\right]\delta^2(x-y), \\
\{\phi_{IJ}{}^a(x), \psi_{KL}(y)\} &= \frac{\varepsilon^{0ac}}{2}[A_{cIL}\eta_{JK} - A_{cJL}\eta_{IK} - A_{cKJ}\eta_{IL} + A_{cKI}\eta_{JL} \\
&\quad +(\eta_{IK}\eta_{JL} - \eta_{IL}\eta_{JK})\partial_c]\delta^2(x-y), \\
\{\psi_I(x), \psi_{KL}(y)\} &= \partial_a\delta^2(x-y)\left[\eta_{IK}\Pi_L^a - \eta_{IL}\Pi_K^a\right] + \delta^2(x-y)\left[A_{aLI}\Pi_K^a - A_{aKI}\Pi_L^a\right], \\
\{\psi_{IJ}(x), \psi_{KL}(y)\} &= \frac{1}{4}\left[\eta_{IK}(\Pi_L^a e_{Ja} - \Pi_J^a e_{La}) + \eta_{JL}(\Pi_K^a e_{Ia} - \Pi_I^a e_{Ka}) + \eta_{KJ}(\Pi_I^a e_{La} - \Pi_L^a e_{Ia})\right. \\
&\quad \left. +\eta_{IL}(\Pi_J^a e_{Ka} - \Pi_K^a e_{Ja})\right]\delta^2(x-y).
\end{aligned}
$$

La matriz W tiene rango=12 y 12 vectores nulos, lo cual implica que hay 12 restricciones de primera clase y 12 de segunda clase. Usando la contracción de los vectores nulos con (4.7) y (4.13), podemos identificar las 12 constricciones de primera clase

$$
\begin{aligned}
\gamma^0{}_I &= \Pi_I{}^0 \approx 0, \\
\gamma^0{}_{IJ} &= \Pi_{IJ}{}^0 \approx 0, \\
\gamma_I &= -2D_a\Pi_I{}^a + D_a\chi^a{}_I + \Lambda e^J{}_a\chi_{IJ}{}^a, \\
\gamma_{IJ} &= D_a\phi^a{}_{IJ} + \frac{\varepsilon^{0ab}}{2}F_{IJab} + \frac{1}{2}[\Pi_I{}^a e_{Ja} - \Pi_J{}^a e_{Ia}],
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

del rango de la matriz W, formada por los corchetes de Poisson (4.11) entre todas las restricicones, se obtiene la información del número de restricciones de segunda clase, en este caso se esperan 12 restricciones de segunda clase que estan dadas por,

$$
\begin{aligned}
\chi_I{}^a &= \Pi_I{}^a - \frac{\Lambda}{2}\varepsilon^{0ab}e_{Ib} \approx 0, \\
\chi_{IJ}{}^a &= \Pi_{IJ}{}^a - \frac{\varepsilon^{0ab}}{2}A_{bIJ} \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

Es importante señalar que estas constricciones no estan reportadas en la literatura, y la estructura completa de las restricciones definidas en el espacio fase completo es relevante para conocer de forma correcta las transformaciones de norma en la teoría. Toda esta información es únicamente posible, mediante la implementacion del formalismo estricto de Dirac. De hecho, se puede consultar la estructura de las restricciones reportadas en [26] y la estructura de las restricciones (4.16). Podemos ver que en [26] solo hay restricciones de primera clase y la estructura de esas restricciones difiere de la encontrada en (4.16).

El álgebra de las restricciones esta dada por

$$
\begin{aligned}
\{\chi_I{}^a(x), \chi_J{}^b(y)\} &= -\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\delta^2(x-y), \\
\{\chi_I{}^a(x), \gamma_J(y)\} &= \Lambda\chi_{IJ}{}^a\delta^2(x-y) \approx 0, \\
\{\chi_I{}^a(x), \gamma_{JN}(y)\} &= \frac{1}{2}\left[\eta_{IJ}\chi_N{}^a - \eta_{IN}\chi_J{}^a\right]\delta^2(x-y) \approx 0, \\
\{\chi_{IJ}{}^a(x), \gamma_L(y)\} &= \frac{1}{2}\left[\eta_{IL}\chi_J^a - \eta_{JL}\chi_I^a\right]\delta^2(x-y) \approx 0, \\
\{\chi_{IJ}{}^a(x), \gamma_{KL}(y)\} &= \frac{1}{2}\left[\chi_{IL}^a\eta_{KJ} - \chi_{JL}^a\eta_{KI} + \chi_{KI}^a\eta_{LJ} - \chi_{KJ}^a\eta_{LI}\right]\delta^2(x-y) \approx 0, \\
\{\chi_{IJ}{}^a(x), \chi_{KL}{}^b(y)\} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0ab}\left[\eta_{IL}\eta_{JK} - \eta_{IK}\eta_{JL}\right]\delta^2(x-y), \\
\{\gamma_I(x), \gamma_J(y)\} &= \Lambda\gamma_{IJ}\delta^2(x-y) \approx 0, \qquad (4.18) \\
\{\gamma_I(x), \gamma_{KL}(y)\} &= \frac{1}{2}\left[\gamma_K\eta_{IL} - \gamma_L\eta_{IK}\right]\delta^2(x-y) \approx 0, \qquad (4.19) \\
\{\gamma_{IJ}(x), \gamma_{KL}(y)\} &= -\frac{1}{2}\left[\gamma_{IL}\eta_{JK} - \gamma_{IK}\eta_{JL} + \gamma_{JK}\eta_{IL} - \gamma_{JL}\eta_{IK}\right]\delta^2(x-y) \approx 0. \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

Podemos observar que el álgebra de las constricciones de primera clase forman un álgebra cerrada, y no se necesitan condiciones sobre las ε^{IJK} para que el álgebra cierre, este resultado es diferente a lo que sucede en la formulación de Palatini [34]. En efecto, en la formulación de la teoría de Palatini el álgebra es cerrada si las constantes de estrutura ε^{IJK} son las del grupo $SO(2,1)$ [34]. Debido al paréntesis (4.18), el álgebra de las restricciones no forma un álgebra de Poincaré $ISO(2,1)$, sin embargo, es un álgebra de Poincaré Λ-deformada y el grupo interno de la acción exótica es $SO(2,1)$. Por otra parte, podemos observar que las restricciones de la acción de Palatini sin constante cosmológica forman un álgebra de Poincaré $ISO(2,1)$ [34, 57, 58] y el grupo de interno es $SO(2,1)$; en la acción exótica, el valor de la constante cosmológica no puede ser cero, la razón de esto se verá más adelante.

4.3 Corchetes de Dirac

Una véz identificadas las restricciones de segunda clase, podemos construir los corchetes de Dirac. Para poder construir los paréntesis de Dirac, se necesita construir la siguiente matriz, donde las entradas de la matriz estan dadas por los corchetes de Poisson entre las contricciones de segunda clase

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda\eta_{IJ} & 0 & 0 \\ \Lambda\eta_{IJ} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left[\eta_{IL}\eta_{JK} - \eta_{IK}\eta_{JL}\right] \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\left[\eta_{IL}\eta_{JK} - \eta_{IK}\eta_{JL}\right] & 0 \end{pmatrix} \varepsilon^{0ab}\delta^2(x-y), \tag{4.21}$$

la inversa de la matriz (4.21) esta dada por

$$C^{-1}{}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\Lambda}\eta^{IJ} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\Lambda}\eta^{IJ} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\left[\eta^{IL}\eta^{JK} - \eta^{IK}\eta^{JL}\right] \\ 0 & 0 & 2\left[\eta^{IL}\eta^{JK} - \eta^{IK}\eta^{JL}\right] & 0 \end{pmatrix} \varepsilon_{0ab}\delta^2(x-y) \tag{4.22}$$

haciendo uso de la definición del paréntesis de Dirac dadas en (3.47), los corchetes de Dirac de la teoría estan dados por

$$\begin{aligned} \{e^I{}_a(x), \Pi^b{}_J(y)\}_D &= \{e^I{}_a(x), \Pi^b{}_J(y)\}_P + \int dudv \{e^I{}_a(x), \zeta^\alpha(u)\} C^{-1}{}_{\alpha\beta}(u,v) \{\zeta^\beta(v), \Pi^b{}_J(y)\}, \\ &= \frac{1}{2}\delta^b{}_a \delta^I{}_J \delta^2(x-y), \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}\{e^I{}_a(x), e^J{}_b(y)\}_D &= \{e^I{}_a(x), e^J{}_b(y)\}_P + \int dudv \{e^I{}_a(x), \zeta^\alpha(u)\} C^{-1}{}_{\alpha\beta}(u,v) \{\zeta^\beta(v), e^J{}_b(y)\}, \\ &= \frac{1}{\Lambda} \eta^{IJ} \varepsilon_{0ab} \delta^2(x-y), \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}\{\Pi^a{}_I(x), \Pi^b{}_J(y)\}_D &= \{\Pi^a{}_I(x), \Pi^b{}_J(y)\}_P + \int dudv \{\Pi^a{}_I(x), \zeta^\alpha(u)\} C^{-1}{}_{\alpha\beta}(u,v) \{\zeta^\beta(v), \Pi^b{}_J(y)\}, \\ &= \frac{\Lambda}{4} \eta_{IJ} \varepsilon^{0ab} \delta^2(x-y), \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}\{A^{IJ}{}_a(x), \Pi^b{}_{LN}(y)\}_D &= \{A^{IJ}{}_a(x), \Pi^b{}_{LN}(y)\}_P + \int dudv \{A^{IJ}{}_a(x), \zeta^\alpha(u)\} C^{-1}{}_{\alpha\beta}(u,v) \{\zeta^\beta(v), \Pi^b{}_{LN}(y)\}, \\ &= \frac{1}{4} \delta^b{}_a \left[\delta^I{}_L \delta^J{}_N - \delta^I{}_N \delta^J{}_L\right] \delta^2(x-y), \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}\{A^{IJ}{}_a(x), A^{LN}{}_b(y)\}_D &= \{A^{IJ}{}_a(x), A^{LN}{}_b(y)\}_P + \int dudv \{A^{IJ}{}_a(x), \zeta^\alpha(u)\} C^{-1}{}_{\alpha\beta}(u,v) \{\zeta^\beta(v), A^{LN}{}_b(y)\}, \\ &= \frac{1}{2} \left[\eta^{IL} \eta^{JN} - \eta^{IN} \eta^{JL}\right] \varepsilon_{0ab} \delta^2(x-y), \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}\{\Pi^a{}_{IJ}(x), \Pi^b{}_{LN}(y)\}_D &= \{\Pi^a{}_{IJ}(x), \Pi^b{}_{LN}(y)\}_P + \int dudv \{\Pi^a{}_{IJ}(x), \zeta^\alpha(u)\} C^{-1}{}_{\alpha\beta}(u,v) \{\zeta^\beta(v), \Pi^b{}_{LN}(y)\}, \\ &= \frac{1}{8} \left[\eta_{IL} \eta_{JN} - \eta_{IN} \eta_{JL}\right] \varepsilon^{0ab} \delta^2(x-y). \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}\{e^I{}_a(x), A^{LN}{}_b(y)\}_D &= \{e^I{}_a(x), , A^{LN}{}_b(y)\}_P + \int dudv \{e^I{}_a(x), \zeta^\alpha(u)\} C^{-1}{}_{\alpha\beta}(u,v) \{\zeta^\beta(v), , A^{LN}{}_b(y)\}, \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}\{e^I{}_a(x), \Pi^b{}_{LN}(y)\}_D &= \{e^I{}_a(x), \Pi^b{}_{LN}(y)\}_P + \int dudv \{e^I{}_a(x), \zeta^\alpha(u)\} C^{-1}{}_{\alpha\beta}(u,v) \{\zeta^\beta(v), \Pi^b{}_{LN}(y)\}, \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}\{A^{IJ}{}_a(x), \Pi^b{}_L(y)\}_D &= \{A^{IJ}{}_a(x), \Pi^b{}_L(y)\}_P + \int dudv \{A^{IJ}{}_a(x), \zeta^\alpha(u)\} C^{-1}{}_{\alpha\beta}(u,v)\{\zeta^\beta(v), \Pi^b{}_L(y)\}, \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.31}$$

Es importante señalar que los campos e, A y sus momentos canónicos asociados, tienen una estructura no conmutativa a nivel de los corchetes de Dirac, y la constante cosmológica no puede ser valuada en cero, debido a que surge una singularidad en alguno de los corchtes de Dirac (4.24). Por otro lado, el análisis realizado a la acción de Palatini reportado en [34], revela que los corchetes de Dirac entre los campos e and A presenta una estructura conmutativa y la constante cosmológica valuada en cero no presenta algun inconveniente. Estos resultados muestran diferencias entre la acción de Palatini y la acción exótica a nivel clásico.

Por otro lado, podemos encontrar cierta analogía entre el término de Nieh-Yang actuando como un tipo de "campo magnético", con el problema de Landau. De hecho, para una partícula cargada y de masa m confinada por un potencial cuadrático y que se mueve en un campo magnético uniforme, la Lagrangiana es dada por [56]

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}_a^2 + \frac{B}{2}\varepsilon_{ab}\dot{x}^a x^b - \frac{K}{2}x_a^2, \tag{4.32}$$

donde B es el campo magnético y K es una constante. La acción (4.32) no es singular y el análisis Hamiltoniano es fácil de realizar. Debido a que la acción no es singular, se puede elegir el valor de B o K igual a cero sin ningún problema. Sin embargo, al tomar el límite $m \to 0$ el sistema se convierte en un sistema singular y despues de realizar el análisis de Dirac de (4.32) en ese límite, se determina que el sistema presenta restriciones de segunda clase, y las coordenadas son no conmutativas a nivel de los corchetes de Dirac; donde los corchetes de Dirac estan dados por $\{x^a, x^b\}_D = -\frac{\varepsilon^{ab}}{B}$, por lo tanto, para esta teoría B no puede ser cero; de hecho, el espectro de energía depende de un factor $\frac{1}{B}$ [56]. De esta manera, en analogía con la acción (4.32), en la acción exótica, el término de Nieh-Yang es un tipo de "campo magnético" (ver el término $\frac{\Lambda}{2}\varepsilon^{0ab}\dot{e}_a^I e_{Ib}$ de (4.4)), es decir, la constante cosmológica se puede ver como un tipo de "campo magnético" B y el campo e como la coordenada no conmutativa (ver (4.24)). También, el término de Chern-Simons puede tratarse de la misma manera, el término de Chern-Simons es no conmutativo en la conexión A (ver (4.27)) y el término de Nieh-Yang es no conmutativo en el campo e.

Por lo tanto, podemos llegar a la conclusión, de que para un sistema singular, no es correcto fijar parámetros de manera totalmente arbitraria sin haber realizado un análisis detallado. Para llevar a cabo el análisis a un sistema singular con parámetros arbitrarios, primero, se debe realizar el análisis mediante el formalismo de Dirac, y después, se puede estudiar el comportamiento tomando los diversos límites de los parámetros. La acción exótica (4.1) es un sistema singular y el análisis realizado indica que la constante cosmológica no puede ser cero.

A partir del análisis realizado a la acción exótica se encontro que, los corchetes de Dirac para las variables dinámicas que definen a la acción exótica y la acción de Palatini con constante cosmológica son diferentes. A continuación, se menciona de manera breve algunas diferencias entre la acción exótica y la acción de Palatini con constante cosmológica:

La acción exótica

- La estructura de los corchetes de Dirac entre las variables dinámicas, es no conmutativa.
- La constante cosmológica no puede ser valuada en cero.

La acción de Palatini

- La estructura de los corchetes de Dirac entre las variables dinámicas, es conmutativa.
- La constante cosmológica puede ser valuada en cero.

4.4 Acción extendida y Hamiltoniano extendido

La identificación de las restricciones permite identificar la acción extendida. Usando las constricciones de primera clase (4.16), las constricciones de segunda clase (4.17), y los multiplicadores de Lagrange (4.14) podemos determinar que la acción extentida tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} S_E[e^I{}_\alpha, A^{IJ}{}_\alpha, \Pi^\alpha{}_I, \Pi^\alpha{}_{IJ}, u_0{}^I, u_0{}^{IJ}, u^I, u^{IJ}, v_a{}^I, v_a{}^{IJ}] &= \int_M \left[\dot{e}^I{}_\alpha \Pi^\alpha{}_I + \dot{A}^{IJ}{}_\alpha \Pi^\alpha{}_{IJ} \right. \\ \left. - H' - u_0{}^I \gamma_I{}^0 - u_0{}^{IJ}\gamma_{IJ}{}^0 - u^I\gamma_I - u^{IJ}\gamma_{IJ} - v_a{}^I \chi_I{}^a - v_a{}^{IJ}\chi_{IJ}{}^a\right] dx^3, \end{aligned} \tag{4.33}$$

donde $H^{'}$ es una combinación lineal de restricciones de primera clase

$$H^{'} = \int \left[e_0{}^I \gamma_I - A_0{}^{IJ}\gamma_{IJ}\right] dx^2, \tag{4.34}$$

y $u_0{}^I, u_0{}^{IJ}, u^I, u^{IJ}, v_a{}^I, v_a{}^{IJ}$ son los multiplicadores de Lagrange que hacen que se cumplan las restriciones. De la acción extendida (4.33) podemos identificar el Hamiltoniano extendido dado como

$$H_E = H^{'} + \int \left[u_0{}^I \gamma^0{}_I + u_0{}^{IJ}\gamma^0{}_{IJ} + u^I\gamma_I + u^{IJ}\gamma_{IJ}\right] dx^2. \tag{4.35}$$

Es importante señalar, que la teoría analizada, tiene un Hamiltoniano extendido que es una combinación de restricciones de primera clase, esto refleja la covarianza general de la teoría, tal como pasa en RG[3] en 4D. Una vez encontradas la acción y hamiltoniana extendida, siguiendo con el análisis, se calcularán las transformaciones de norma. Las transformaciones de norma son fundamentales para la identificación de las observables físicas [55]; para encontrar dichas transformaciones se usará el formalismo de Castellani [59], el cual permite definir el generador de estas transformaciones en términos de las restricciones de primera clase de la siguiente manera

$$G = \int_{\Sigma} \left[D_0 \varepsilon^I{}_0 \gamma^0{}_I + D_0 \varepsilon_0{}^{IJ} \gamma^0{}_{IJ} + \varepsilon^I \gamma_I + \varepsilon^{IJ} \gamma_{IJ} \right]. \tag{4.36}$$

Así, las transformaciones de norma en el espacio fase, que dejan covariantes las ecuaciones de movimiento y a la acción extendida, están dadas por

$$\begin{aligned}
\delta_0 e^I{}_0 &= D_0 \varepsilon^I{}_0, \\
\delta_0 e^I{}_a &= D_a \varepsilon^I + \varepsilon^{IJ} e_{aJ}, \\
\delta_0 A_0{}^{IJ} &= D_0 \varepsilon_0{}^{IJ}, \\
\delta_0 A_a{}^{IJ} &= \frac{\Lambda}{2} \left[e^J{}_a \varepsilon^I - e^I{}_a \varepsilon^J \right] - D_a \varepsilon^{IJ}, \\
\delta_0 \Pi^0{}_I &= 0, \\
\delta_0 \Pi^a{}_I &= \frac{\Lambda}{2} \varepsilon^{0ab} \partial_b \varepsilon_I + \Lambda \varepsilon^J \Pi^a{}_{IJ} - \varepsilon^J{}_I \Pi^a_J, \\
\delta_0 \Pi^0{}_{IJ} &= -\varepsilon_I{}^L \Pi^0{}_{LJ} + \varepsilon_J{}^L \Pi^0{}_{LI}, \\
\delta_0 \Pi^a{}_{IJ} &= \frac{1}{2} \left[\varepsilon_I \Pi^a{}_J - \varepsilon_J \Pi^a{}_I \right] + \left[\varepsilon_J{}^L \Pi^a_{IL} - \varepsilon_I{}^L \Pi^a_{JL} \right] + \frac{1}{2} \varepsilon^{0ba} \partial_b \varepsilon_{IJ}.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

En el capítulo 2, sección 2.6.1, se obtuvieron las leyes de transformación locales para el grupo de Poincaré para la campos (e^I, A^{IJ}) que estan expresadas por las ecuaciones (2.84) y (2.85). Podemos observar que los campos no transforman bajo el grupo de Poincaré sino más bien bajo una transformación Λ-deformada del grupo de Poincaré, esto puede verse apartir de (4.37) donde podemos observar que bajo traslaciones locales de Poincaré la conexión A^{IJ} no transforma como (2.85). Por otra parte, las transformaciones de norma para la acción exótica estan dadas por (4.37) y no corresponden a los difeomorfismos, pero estas son transformaciones deformadas Λ-$ISO(2,1)$ [58]. Sin embargo, es bien sabido que esta teoría es covariante bajo difeomorfismos [53]; por lo que cabe hacer la pregunta: ¿Cómo pueden ser rescatados los difeomorfismos en estas transformaciones ?, la

[3] Esta es una característica que tiene con RG, y en general con todas las teorías independientes del espacio-tiempo de fondo y covariantes bajo difeomorfismos.

respuesta está en redefinir los parámetros de norma de manera conveniente como, $\varepsilon_0{}^I = \varepsilon^I = \xi^\rho e^I{}_\rho$, $\varepsilon_0{}^{IJ} = \varepsilon^{IJ} = -\xi^\rho A_\rho{}^{IJ}$, las transformaciones de norma (4.37) toman la siguiente forma

$$\begin{aligned} e'^I{}_\alpha &\rightarrow e^I{}_\alpha + \mathfrak{L}_\xi e^I{}_\alpha + \xi^\rho \left[D_\alpha e^I{}_\rho - D_\rho e^I{}_\alpha\right], \\ A'_\alpha{}^{IJ} &\rightarrow A_\alpha{}^{IJ} + \mathfrak{L}_\xi A_\alpha{}^{IJ} + \xi^\rho \left[R^{IJ}{}_{\alpha\rho} - \frac{\Lambda}{2}(e^I{}_\alpha e^J{}_\rho - e^J{}_\alpha e^I{}_\rho)\right], \end{aligned} \tag{4.38}$$

que corresponden a los difeomorfismos, los cuales a su vez son una simetría interna de la teoría. Con la identificación corrrecta de las restricciones, se puede llevar a cabo el conteo de los grados de libertad, el número de variables que es 36 $(e^I{}_\alpha, A_\alpha{}^{IJ}, \Pi^\alpha{}_I, \Pi^\alpha{}_{IJ})$, se encontrarón 12 constricciones de primera clase $(\gamma_I{}^0, \gamma_{IJ}{}^0, \gamma_I, \gamma_{IJ})$ y 12 constricciones de segunda clase $(\chi_I{}^a, \chi_{IJ}{}^a)$ y se puede concluir que la acción exótica en tres dimensiones, no tiene grados de libertad locales por punto, lo cual define una teoría topológica, con todos estos resultados obtenidos, terminamos nuestro análisis detallado de la acción exótica.

Capítulo 5

Análisis Hamiltoniano de la acción de Bonzom-Livine

Como se ha comentado en la introducción, Holst introdujo una acción la cual depende de un parámetro, el parámetro de Barbero-Immirzi [17] , el cual lo llamaraemos de ahora en adelante el parámetro γ. En efecto, dependiendo de los valores que dicho parámetro tome, uno puede obtener los diferentes escenarios que se encuentran en gravedad canónica. Respecto a este punto, para el caso 3D existe una acción la cual es equivalente a la acción de Holst. Dicha acción es conocida como la acción de Bonzom-Livine. La acción de BL está formada por la acción de Palatini más la acción exótica acompañada del parámetro γ, de esta manera, la acción de BL da un conjunto de acciones que reproducen las mismas ecuaciones de movimiento que la acción exótica y la acción de Palatini. Cabe mencionar que en [39] se ha realizado un análisis canónico de la acción de BL, sin embargo, dicho análisis se ha hecho usando el formalismo de Dirac reducido. De esta manera, en esta sección vamos a desarrollar un análisis detallado de la acción de BL mediante el formalismo de Dirac estricto. En general, estamos interesados en conocer la estructura completa de las restricciones y conocer como es la estructura simpléctica de los corchetes de Dirac, así, con este análisis podremos ver cuales son las diferencias entre las acciones de Palatini, exótica y la de BL, dado que las tres acciones conducen a las mismas ecuaciones de movimiento.

5.1 Acción de Bonzom-Livine

El proposito de este capítulo es conocer la forma detallada de las restricciones y todo lo que conlleva la implementación del formalismo de Dirac estricto a la acción propuesta por Bonzom-

Livine BL.

Como se mencionó en la introucción, gravedad en tres dimensiones puede escribirse como una teoría de Chern-Simons [25, 26, 39, 60]. En el artículo desarrollado por Bonzom y Livine [39], proponen trabajar con el grupo $G = SU(2)$ para describir gravedad Euclideana y la teoría es formulada en términos de la triada y la conexión, estas variables estan representadas por uno-formas valuadas en el algebra de Lie $\mathfrak{g}$[1], donde los índices internos son contraidos con la metrica de Killing δ_{IJ}[2] en $\mathfrak{g}$. La acción para gravedad en 3D con constante cosmológica Λ esta dada por la expresión

$$S'_{Palatini}[A,e] = \int \left[2e_I \wedge F^I[A] + s\frac{|\Lambda|}{3}\varepsilon_{IJK} e^I \wedge e^J \wedge e^K \right], \tag{5.1}$$

las ecuaciones de movimiento de la acción (5.1) estan dadas por

$$\begin{aligned} d_A e^I &= 0, \\ F^I + \frac{\Lambda}{2}\varepsilon^I{}_{JK} e^J e^K &= 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

La acción (5.1) es invariante bajo transformaciones de $SU(2)$ y los campos (e, A) transforman como

$$\begin{aligned} e &\rightarrow geg^{-1}, \\ A &\rightarrow gAg^{-1} + gdg^{-1}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

con g$\in SU(2)$. La acción (5.1) es también invariante bajo traslaciones

$$\begin{aligned} \delta A^I &= \Lambda \varepsilon^I{}_{JK} e^J \theta^K, \\ \delta e^I &= d_A \theta^I. \end{aligned} \tag{5.4}$$

La simetrías mencionadas anteriormente, pueden combinarse en una sola simetría mediante la ampliación del grupo de rotación G a un grupo $\widetilde{G}$. Esta idea es la clave para reescribir gravedad 3D como una teoría de Chern-Simons para el grupo $\widetilde{G}$ [39]. El grupo $\widetilde{G}$ puede ser $SO(4)$, $ISO(3)$

[1] $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie del grupo G.

[2] donde $i, j = 1, 2, 3$, son los índices del grupo SU(2).

o $SO(3,1)$ dependiendo si el valor de la constante cosmológica es positiva, cero o negativa. Los generados del álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[\mathbf{J}_I,\mathbf{J}_J]=\varepsilon_{IK}{}^{K}\mathbf{J}_K \qquad [\mathbf{J}_I,\mathbf{K}_J]=\varepsilon_{IJ}{}^{K}\mathbf{K}_K \qquad [\,\mathbf{K}_I,\mathbf{K}_J]=s\varepsilon_{IJ}{}^{K}\mathbf{J}_K, \tag{5.5}$$

donde $s=-1,0,1$ es el signo de la constante cosmológica. El siguiente paso es definir una nueva conexión para el grupo $\widetilde{G}$, dada por $\widetilde{A}=A^I\mathbf{J}_I+\sqrt{|\,\Lambda\,|}e^I\mathbf{K}_I$ [3]. Para construir la acción de Chern-Simons, se necesita elegir una forma bilineal invariante no degenerada en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$

$$\langle\mathbf{J}_I,\mathbf{K}_J\rangle=\delta_{IJ}, \qquad \langle\mathbf{J}_I,\mathbf{J}_J\rangle=\langle\mathbf{K}_I,\mathbf{K}_J\rangle=0. \tag{5.6}$$

Entonces, para el caso en el cual la constante cosmológica es diferente de cero, la acción (5.1) puede escribirse como una acción de Chern-Simons

$$S'[\widetilde{A}]=S'_{Palatini}[A,e]=\frac{1}{\sqrt{|\Lambda|}}\int_M\varepsilon^{\mu\nu\rho}\left(\left\langle\widetilde{A}_\mu,\partial_\nu\widetilde{A}_\rho\right\rangle+\frac{1}{3}\left\langle\widetilde{A}_\mu,[\widetilde{A}_\nu,\widetilde{A}_\rho]\right\rangle\right). \tag{5.7}$$

Si se desea obtener el caso de la formulación de Palatini sin constante cosmológica, entonces, se elige $s=0$ y $\sqrt{|\,\Lambda\,|}=1$ en la acción (5.7) junto con las expresiones (5.5)-(5.6).

Por otra parte, si $\Lambda\neq 0$ existe otra forma bilineal invariante no degenerada dada por

$$(\mathbf{J}_I,\mathbf{J}_J)=\delta_{IJ} \qquad (\mathbf{K}_I,\mathbf{K}_J)=s\delta_{IJ} \qquad (\mathbf{J}_I,\mathbf{K}_J)=0, \tag{5.8}$$

en este caso, se obtiene la siguiente acción de Chern-Simons

$$\tilde{S}_{Exótica}[\widetilde{A}]=\frac{1}{\sqrt{|\Lambda|}}\int_M\varepsilon^{\mu\nu\rho}\left(\left(\widetilde{A}_\mu,\partial_\nu\widetilde{A}_\rho\right)+\frac{1}{3}\left(\widetilde{A}_\mu,[\widetilde{A}_\nu,\widetilde{A}_\rho]\right)\right), \tag{5.9}$$

escribiendo la acción (5.9) en términos de los campos (e,A) y utilizando las expresiones (5.5) y (5.7) se obtiene

[3] $\mathbf{J}_I$ son los generadores de rotaciónes y $\mathbf{K}_I$ los generadores de traslaciones.

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}_{Exótica}[A,e] &= \frac{1}{\sqrt{|\Lambda|}}\left[\int_M A^I \wedge dA_I + \frac{1}{3}\varepsilon_{IJK}A^I \wedge A^J \wedge A^K\right] \\
&\quad + s\sqrt{|\Lambda|}\int_M e^I \wedge d_A e_I,
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

donde, $A^I = A_\mu{}^I dx^\mu$ es la conexión valuada en el álgebra de Lie $SU(2)$ para el caso de gravedad Euclideana y e^i corresponde a la triada, $\mu,\nu = 0,1,2$ son los índices de espacio tiempo, x^μ son las coordenadas que etiquetan los puntos de la variedad en tres dimensiones del espacio tiempo M y $I,J = 0,1,2$ son los indices internos que pueden subirse o bajarse con la métrica $\eta_{IJ} = (1,1,1)$. Donde $(d_A v)^I = dv^I + [A,v]^I = dv^I + \varepsilon^I{}_{JK}A^J \wedge v^K$ y $F^I = dA^I + \frac{1}{2}\varepsilon^I{}_{JK}A^J \wedge A^K$.

La acción de BL esta definida como la combinación lineal de la acción (5.1) y la acción (5.10) mediante un parámetro γ, que puede pensarse como un parámetro tipo Barbero-Immirzi análogo al parámetro de que aparece en la acción de Holst en el caso 4D [17].

Por lo tanto, la acción de BL esta dada por [39]

$$
S_\gamma[A,e] = S'_{Palatini}[A,e] + \frac{1}{\gamma}\widetilde{S}_{Exótica}[A,e],
\tag{5.11}
$$

a partir de la acción (5.11) se obtiene una familia de teorías clásicamente equivalentes a gravedad en 3D en el sentido de que la acción de Palatini y BL comparten las mismas ecuaciones de movimiento, esto puede verse de la variación de la acción (5.11), donde las ecuaciones de movimiento estan dadas por

$$
\frac{\delta S_\gamma[A,e]}{\delta e_{\mu I}}: \qquad \varepsilon^{\mu\nu\rho}\left[F^I{}_{\nu\rho}[A] + s\frac{|\Lambda|}{2}\varepsilon^I{}_{JK}e_\nu{}^J e_\rho{}^K\right] + s\frac{\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}\varepsilon^{\mu\nu\rho}d_A e^I{}_\rho = 0,
\tag{5.12}
$$

$$
\frac{\delta S_\gamma[A,e]}{\delta A_{\mu I}}: \qquad \varepsilon^{\mu\nu\rho}d_A e^I{}_\rho + \frac{1}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\left[F^I{}_{\nu\rho}[A] + s\frac{|\Lambda|}{2}\varepsilon^I{}_{JK}e_\nu{}^J e_\rho{}^K\right] = 0.
\tag{5.13}
$$

Las ecuaciones de movimiento (5.12) y (5.24) son equivalentes a las ecuaciones de Einstein. Debido a que se desea realizar el análisis Hamiltoniano, se procede a hacer la descomposición 2+1 del espacio-tiempo de la acción (5.11), suponiendo que la variedad del espacio tiempo es de la forma $M^3 = \Sigma \times R$, donde Σ corresponde a la superficie de Cauchy y R representa un parámetro de evolución, la acción (5.11) adquiere la siguiente estructura

$$
\begin{aligned}
S_{\gamma}[e,A] &= \int d^3x \Bigg[2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}(e_0{}^I + \frac{1}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}}A_0{}^I)(F^J{}_{ab} + s\frac{|\Lambda|}{2}\varepsilon^J{}_{KL}e_a^K e_b^L) + 2\varepsilon^{0ab}\eta_{ij}D_a e_b{}^I(A_0^J + s\frac{\sqrt{\Lambda}}{\gamma}e_0^J) \\
&+ 2\varepsilon^{0ab}\eta_{ij}(e_b^I\partial_0 A_a^J + \frac{1}{2\gamma\sqrt{|\Lambda|}}A_b^I\partial_0 A_a^J + s\frac{\sqrt{|\Lambda|}}{2\gamma}e_b^I\partial_0 e_a^J)\Bigg], \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

donde se puede identificar la siguiente densidad Lagrangiana

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= 2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}(e_0{}^I + \frac{1}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}}A_0{}^I)(F^J{}_{ab} + s\frac{|\Lambda|}{2}\varepsilon^J{}_{KL}e_a^K e_b^L) + 2\varepsilon^{0ab}\eta_{ij}D_a e_b{}^I(A_0^J + s\frac{\sqrt{\Lambda}}{\gamma}e_0^J) \\
&+ 2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}(e_b^I\partial_0 A_a^J + \frac{1}{2\gamma\sqrt{|\Lambda|}}A_b^I\partial_0 A_a^J + s\frac{\sqrt{|\Lambda|}}{2\gamma}e_b^I\partial_0 e_a^J). \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

El conjunto de variables dinámicas de la acción (5.11) son $(e^I{}_\alpha, A^I{}_\alpha)$ y sus respectivos momentos canónicos. Los momentos canónicos $(\pi^\alpha{}_I, \Pi^\alpha{}_I)$. Los momentos canónicos estan dados por

$$
\Pi^\alpha{}_I = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{A}_\alpha{}^I}, \qquad \pi^\alpha{}_I = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{e}^I{}_\alpha}. \qquad (5.16)
$$

Los elementos de la matriz Hessiana son

$$
\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu e_\alpha^I)\partial(\partial_\mu e_\beta^I)}, \quad \frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu e_\alpha^I)\partial(\partial_\mu A_\beta{}^I)}, \quad \frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha{}^I)\partial(\partial_\mu A_\beta{}^I)}, \qquad (5.17)
$$

son idénticamente cero, entonces, se espera encontrar 18 constricciones primarias. De la definición de los momentos (8.33) se pueden identificar las siguientes 18 restricciones primarias

$$
\begin{aligned}
\phi_I{}^0 &:= \pi_I{}^0 \approx 0, \\
\phi_I{}^a &:= \pi_I{}^a - s\frac{\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}e_b{}^J \approx 0, \\
\Phi_I{}^0 &:= \Pi_I{}^0 \approx 0, \\
\Phi_I{}^a &:= \Pi_I{}^a - 2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}(e_b{}^J + \frac{1}{2\gamma\sqrt{|\Lambda|}}A_b{}^J) \approx 0. \qquad (5.18)
\end{aligned}
$$

El Hamiltoniano canónico esta expresado por

$$
H_c = \int dx^2 \left[-2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}D_a e^I{}_b(A_0^I + s\frac{\sqrt{\Lambda}}{\gamma}e_0^I) - 2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}(e_0{}^I + \frac{1}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}}A_0{}^I)(F^J{}_{ab} + s\frac{|\Lambda|}{2}\varepsilon^J{}_{KL}e_a^K e^L{}_b) \right], \qquad (5.19)
$$

y el Hamitltoniano primario viene expresado por

$$H_P = H_c + \int dx^2 \left[\lambda^I{}_\alpha \phi_I{}^\alpha + \xi^I{}_\alpha \Phi_I{}^\alpha\right], \tag{5.20}$$

donde $\lambda^I{}_\alpha, \xi^I{}_\alpha$ son los multiplicadores de Lagrange que hacen que se cumplan las restriciones. Los corchetes de Poisson de la teoría están dados por

$$\begin{aligned} \{e_\alpha{}^I(x), \pi^\beta{}_J(y)\} &= \delta^\beta{}_\alpha \delta^I{}_J \delta^2(x-y) \\ \{A_\alpha{}^I(x), \Pi^\beta{}_J(y)\} &= \delta^\beta{}_\alpha \delta^I{}_J \delta^2(x-y), \end{aligned} \tag{5.21}$$

El cálculo del rango de la matriz G, formada por los corchetes de Poisson entre las contricciones primarias (5.18) nos da la información de cuantos multiplicadores de Lagrange se van a poder determinar y la nulidad corresponde al número de restricciones secundarias esperadas, la matriz G se contruye de la siguiente manera

$$\mathrm{G} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \phi_J{}^\nu(y) & \Phi_J{}^\nu(y) \end{array} \\ \begin{array}{c} \phi_I{}^\mu(x) \\ \Phi_I{}^\mu(x) \end{array} & \begin{pmatrix} \{\phi_I{}^\mu(x), \phi_J{}^\nu(y)\} & \{\phi_I{}^\mu(x), \Phi_J{}^\nu(y)\} \\ \{\Phi_I{}^\mu(x), \phi_J{}^\nu(y)\} & \{\Phi_I{}^\mu(x), \Phi_J{}^\nu(y)\} \end{pmatrix} \end{array} \delta^2(x-y), \tag{5.22}$$

donde se uso la siguiente abreviación en la notación de la matriz (5.22), $\phi_I{}^\mu = (\phi_I{}^0, \phi_I{}^a)$ y $\Phi_I{}^\mu = (\Phi_I{}^0, \Phi_I{}^a)$.

donde, las entradas de la matriz G, estan dadas por

$$\begin{aligned} \{\phi_I{}^a(x), \phi_J{}^b(y)\} &= -2s\frac{\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\delta^2(x-y), \\ \{\phi_I{}^a(x), \Phi_J{}^b(y)\} &= -2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\delta^2(x-y), \\ \{\Phi_I{}^a(x), \Phi_J{}^b(y)\} &= -2\frac{1}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}}\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\delta^2(x-y), \end{aligned} \tag{5.23}$$

El rango de la matriz G[4] es 12 y la nulidad 6, por lo tanto se esperan 6 vectores nulos. Utilizando los vecotres nulos y las condiciones de consistencia, se obtienen las siguientes 6 constricciones

[4]G es una matriz de dimensión 18×18

secundarias

$$
\begin{aligned}
\gamma_I{}^0 &= \pi_I{}^0 \approx 0, \\
\gamma_I{}^0 &= \Pi_I{}^0 \approx 0, \\
\dot{\phi}_I{}^0 &= \{\phi_I{}^0(x), H_P\} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_I := 2\varepsilon^{0ab}\left[s\frac{\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}D_a e_{Ib} + (F_{Iab} + \frac{s\,|\Lambda|}{2}\varepsilon_{IJK}e^J{}_a e^K{}_b)\right] \approx 0, \\
\dot{\Phi}_I{}^0 &= \{\Phi_I{}^0(x), H_P\} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi_I := 2\varepsilon^{0ab}\left[D_a e_{Ib} + \frac{1}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}}(F_{Iab} + \frac{s\,|\Lambda|}{2}\varepsilon_{IJK}e^J{}_a e^K{}_b)\right] \approx 0
\end{aligned} \tag{5.24}
$$

y los 12 multiplicadores de Lagrange

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi}_I{}^a &= \{\phi_I{}^a, H_P\} \approx 0 \Rightarrow 2\varepsilon^{0ab}\frac{s-\gamma^2}{\gamma}\sqrt{|\Lambda|}(-\lambda_{bI} + D_b e_{0I} + \varepsilon_{LIM}e_b^M A_0^L) \approx 0, \\
\dot{\Phi}_I{}^a &= \{\Phi_I{}^a, H_P\} \approx 0 \Rightarrow 2\varepsilon^{0ab}\frac{s-\gamma^2}{\gamma^2}(-\xi_{bI} + D_b A_{0I} + s\,|\Lambda|\,\varepsilon_{LIM}e_b^M e_0^L) \approx 0.
\end{aligned} \tag{5.25}
$$

Debido a que la teoría presenta restricciones secundarias, se calcula hamiltoniano secundario H_s, sumándole al primario (5.20) una combinación lineal de las restricciones secundarias, y se calculan las relaciones de consistencia sobre éstas. Puede verse que esta teoría ya no presenta restricciones terciarias, por lo que el número total de restricciones obtenidas es; 18 restricciones primarias + 6 restricciones secundarias = 24 restricciones.

5.2 Restriciones de primera y segunda clase

Una vez calculadas todas las restriciones de la teoría, se procede a clasificarlas, recordando que la clasificación importante entre ellas es aquella que distingue las de primera clase (generadoras de las transformaciones de norma) de las de segunda clase (que permitirán construir el paréntesis de Dirac). Para llevar a cabo esta separación hay que calcular el corchete de Poisson entre todas las restricciones, las cuales son las entradas de la matriz $\mathbf{W}$ de dimensión 24×24

$$
\mathbf{W} = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \phi_J{}^\nu(y) & \Phi_J{}^\nu(y) & \psi_J(y) & \Psi_J(y) \end{array} \\
\begin{array}{c} \phi_I^\mu(x) \\ \Phi_I^\mu(x) \\ \psi_I(x) \\ \Psi_I(x) \end{array} &
\begin{pmatrix}
\{\phi_I^\mu(x), \phi_J^\nu(y)\} & \{\phi_I^\mu(x), \Phi_J^\nu(y)\} & \{\phi_I^\mu(x), \psi_J(y)\} & \{\phi_I^\mu(x), \Psi_J(y)\} \\
\{\Phi_I^\mu(x), \phi_J^\nu(y)\} & \{\Phi_I^\mu(x), \Phi_J^\nu(y)\} & \{\Phi_I^\mu(x), \psi_J(y)\} & \{\Phi_I^\mu(x), \Psi_J(y)\} \\
\{\psi_I(x), \phi_J{}^\nu(y)\} & \{\psi_I(x), \Phi_J^\nu(y)\} & \{\psi_I(x), \psi_J(y)\} & \{\psi_I(x), \Psi_J(y)\} \\
\{\Psi_I(x), \phi_J^\nu(y)\} & \{\Psi_I(x), \Phi_J^\nu(y)\} & \{\Psi_I(x), \psi_J(y)\} & \{\Psi_I(x), \Psi_J(y)\}
\end{pmatrix}
\end{array} \delta^2(x-y), \tag{5.26}
$$

Donde se uso la siguiente abreviación en la notación de la matriz (5.26), $\phi_I{}^{\mu} = (\phi_I{}^0, \phi_I{}^a)$ y $\Phi_I{}^{\mu} = (\Phi_I{}^0, \Phi_I{}^a)$.

La forma explícita de los elementos de la matriz **W**, están dados por

$$
\begin{aligned}
\{\phi_I{}^a(x), \phi_J{}^b(y)\} &= -2s\frac{\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\delta^2(x-y), \\
\{\phi_I{}^a(x), \Phi_J(y)\} &= -2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\delta^2(x-y), \\
\{\phi_I{}^a(x), \psi_J(y)\} &= -2\varepsilon^{0ab}\left[\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}\eta_{IJ}\partial_b - \varepsilon_{IJK}(\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}A^K{}_b + s\,|\,\Lambda\,|\,e^K{}_b)\right]\delta^2(x-y), \\
\{\phi_I{}^a(x), \Psi_J(y)\} &= -2\varepsilon^{0ab}\left[\eta_{IJ}\partial_b - \varepsilon_{IJK}(A^K{}_b + \frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}e^K{}_b)\right]\delta^2(x-y), \\
\{\Phi_I{}^a(x), \Phi_J{}^b(y)\} &= -2\frac{1}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}}\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\delta^2(x-y), \\
\{\Phi_I{}^a(x), \psi_J(y)\} &= -2\varepsilon^{0ab}\left[\eta_{IJ}\partial_b - \varepsilon_{IJK}(A^K{}_b + \frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}e^K{}_b)\right]\delta^2(x-y), \\
\{\Phi_I{}^a(x), \Psi_J(y)\} &= -2\varepsilon^{0ab}\left[\frac{1}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}}\eta_{IJ}\partial_b - \varepsilon_{IJK}(\frac{1}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}}A^K{}_b + e^K{}_b)\right]\delta^2(x-y). \\
\{\psi_I(x), \psi_J(y)\} &= 0, \\
\{\Psi_I(x), \Psi_J(y)\} &= 0, \\
\{\psi_I(x), \Psi_J(y)\} &= 0.
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

La matriz **W** tiene rango=12 y 12 vectores nulos, lo cual implica que hay 12 restricciones de primera clase y 12 de segunda clase. Usando la contracción de los vectores nulos con (5.18) y (5.24), podemos identificar las 12 constricicones de primera clase

$$
\begin{aligned}
\gamma^0{}_I &= \pi_I{}^0 \approx 0, \\
\Gamma^0{}_I &= \Pi_I{}^0 \approx 0, \\
\gamma_I &= D_a\phi_I{}^a - s\,|\,\Lambda\,|\,\varepsilon_I{}^J{}_K e^K{}_a\Phi_J{}^a + 2\varepsilon^{0ab}s\frac{\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}D_a e_{Ib} + 2\varepsilon^{0ab}(F_{Iab} + \frac{s\,|\,\Lambda\,|}{2}\varepsilon_{IJK}e^J{}_a e^K{}_b), \\
\Gamma_I &= D_a\Phi_I{}^a - \varepsilon_I{}^J{}_K e^K{}_a\phi_J{}^a + 2\varepsilon^{0ab}D_a e_{Ib} + 2\varepsilon^{0ab}\frac{1}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}}(F_{Iab} + \frac{s\,|\,\Lambda\,|}{2}\varepsilon_{IJK}e^J{}_a e^K{}_b),
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

a partir del rango de la matriz **W**, formada por los corchetes de Poisson (5.27) entre todas las restricicones se obtiene la información del número de restricciones de segunda clase, en este caso se esperan 12 restricciones de segunda clase que estan dadas por

$$
\begin{aligned}
\chi_I{}^a &= \pi_I{}^a - s\frac{\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}e_b{}^J \approx 0, \\
\Xi_I{}^a &= \Pi_I{}^a - 2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}(e_b{}^J + \frac{1}{2\gamma\sqrt{|\Lambda|}}A_b{}^J) \approx 0.
\end{aligned} \tag{5.29}
$$

Es importante señalar que todos los resulatdos obtenidos en esta sección son reportados en [66] y forman parte de la contribucción de este trabajo. Cabe mencionar que la estructura completa de las restricciones definidas en el espacio fase completo es relevante, por una parte, para conocer la simetría de norma fundamental, por otra, al querer comparar los formalismos de Dirac y FJ, es necesario realizar el análisis canónico en todo el espacio fase, esto será aclarado en las secciones siguientes.

Una vez teniendo identificadas todas las restricciones, procederemos a calcular el álgebra entre ellas. El álgebra de las restricciones está dada por

$$
\begin{aligned}
\{\chi_I{}^a(x), \chi_J{}^b(y)\} &= -2s\frac{\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\delta^2(x-y), \\
\{\chi_I{}^a(x), \Xi_J{}^b(y)\} &= -2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\delta^2(x-y), \\
\{\Xi_I{}^a(x), \Xi_J{}^b(y)\} &= -2\frac{1}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}}\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\delta^2(x-y), \\
\{\chi_I{}^a(x), \gamma_J(y)\} &= s\,|\,\Lambda\,|\,\varepsilon_{IJ}{}^K\Phi^a{}_K\delta^2(x-y) \approx 0, \\
\{\Xi_I{}^a(x), \gamma_J(y)\} &= \varepsilon_{IJ}{}^K\phi^a{}_K\delta^2(x-y) \approx 0, \\
\{\chi_I{}^a(x), \Gamma_J(y)\} &= \varepsilon_{IJ}\phi^a_K\delta^2(x-y) \approx 0, \\
\{\Xi_I{}^a(x), \Gamma_J(y)\} &= \varepsilon_{IJK}\Phi^{ka}\delta^2(x-y) \approx 0, \\
\{\gamma_I(x), \gamma_J(y)\} &= s\,|\,\Lambda\,|\,\varepsilon_{IJK}\Gamma^K\delta^2(x-y) \approx 0, \\
\{\Gamma_I(x), \Gamma_J(y)\} &= \varepsilon_{IJK}\Gamma^K\delta^2(x-y) \approx 0, \\
\{\gamma_I(x), \Gamma_J(y)\} &= \varepsilon_{IJK}\gamma^K\delta^2(x-y) \approx 0.
\end{aligned} \tag{5.30}
$$

Podemos observar que el álgebra de las contricciones de primera clase forman un álgebra cerrada. En la formulación de la teoría de Palatini, es necesario que las constantes de estrutura ε_{IJK} sean las del grupo $SO(2,1)$ en el caso de trabajar con un espacio Lorentziano para que el álgebra de las restricciones cierre [34]. El álgebra de (5.30) no forma un álgebra $ISO(3)$, sin embargo, es un álgebra de Lie. Por otra parte, podemos observar que la acción de BL sin constante cosmológica forma un álgebra $ISO(3)$.

5.3 Corchetes de Dirac

Una véz identificadas las restricciones de segunda clase, podemos construir los corchetes de Dirac. Para poder construir los paréntesis de Dirac, se necesita una matriz, donde las entradas estan dadas por los corchetes de Poisson entre las contricciones de segunda clase, es decir

$$[C_{(\alpha\beta)}(x,x')]^{ab}{}_{IJ} = -2 \begin{pmatrix} \frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma} & 1 \\ 1 & \frac{1}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}} \end{pmatrix} \eta_{IJ}\varepsilon^{0ab}\delta^2(x-x'), \tag{5.31}$$

la inversa de la matriz (5.31) es

$$[C^{-1}{}_{(\alpha\beta)}(x,x')]^{IJ}{}_{ba} = \frac{\gamma^2}{2(s-\gamma^2)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}} & -1 \\ -1 & \frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma} \end{pmatrix} \eta^{IJ}\varepsilon_{0ba}\delta^2(x-x'). \tag{5.32}$$

Los corchetes de Dirac de la teoría estan dados por

$$\{e^I{}_a(x), \pi^b{}_J(y)\}_D = \frac{s}{2(s-\gamma^2)}\delta^b{}_a\delta^I{}_J\delta^2(x-y), \tag{5.33}$$

$$\{e^I{}_a(x), e^J{}_b(y)\}_D = \frac{1}{2\sqrt{|\Lambda|}}\frac{\gamma}{(s-\gamma^2)}\eta^{IJ}\varepsilon_{0ab}\delta^2(x-y), \tag{5.34}$$

$$\{\pi^a{}_I(x), \pi^b{}_J(y)\}_D = \frac{s^2}{2\gamma}\frac{\sqrt{|\Lambda|}}{(s-\gamma^2)}\eta_{IJ}\varepsilon^{0ab}\delta^2(x-y), \tag{5.35}$$

$$\{A^I{}_a(x), \Pi^b{}_J(y)\}_D = \frac{s-2\gamma^2}{2(s-\gamma^2)}\delta^b{}_a\delta^I{}_J\delta^2(x-y), \tag{5.36}$$

$$\{A^I{}_a(x), A^J{}_b(y)\}_D = \frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{2}\frac{\gamma}{s-\gamma^2}\eta^{IJ}\varepsilon_{0ab}\delta^2(x-y), \tag{5.37}$$

$$\{\Pi^a{}_I(x), \Pi^b{}_J(y)\}_D = \frac{s}{2\gamma\sqrt{|\Lambda|}}\frac{1}{(s-\gamma^2)}\eta_{IJ}\varepsilon^{0ab}\delta^2(x-y), \tag{5.38}$$

$$\{A^I{}_a(x), e^J{}_b(y)\}_D = \frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{(\gamma^2 - s)}\eta^{IJ}\varepsilon_{0ab}\delta^2(x-y), \tag{5.39}$$

$$\{e^I{}_a(x), \Pi^b{}_J(y)\}_D = \frac{1}{2\sqrt{|\Lambda|}}\frac{\gamma}{(s-\gamma^2)}\delta^b{}_a\delta^I{}_J\delta^2(x-y), \tag{5.40}$$

$$\{A^I{}_a(x), \pi^b{}_J(y)\}_D = -\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{2}\frac{\gamma}{(s-\gamma^2)}\delta^b{}_a\delta^I{}_J\delta^2(x-y), \tag{5.41}$$

$$\{\pi^a{}_I(x), \Pi^b{}_J(y)\}_D = \frac{1}{2}\frac{s}{(s-\gamma^2)}\eta_{IJ}\varepsilon^{0ab}\delta^2(x-y), \tag{5.42}$$

podemos observar que los corchetes de Dirac dependen de las constantes (s,γ) y pueden repoducir direfentes escenarios dependiendo del valor de esas constantes. Por ejemplo, si tomamos el limite $\gamma \to \infty$ en los corchetes de Dirac (5.23)-(5.32), se puede recuperar la estructura de los corchetes de Dirac de la acción de Palatini reportado en [34]. Es importante señalar que para BL los campos e, A y sus momentos canónicos asociados, tienen una estructura no conmutativa a nivel de los corchetes de Dirac, y la constante cosmológica puede ser valuada en cero, por otra parte, la estructura de los corchetes de Dirac para la accion de Palatini reportada en [34] muesta que los corchetes de Dirac son conmuativos y el valor de la constante cosmologica puede ser tomada igual a cero.

5.4 Acción extendida y Hamiltoniano extendido

La identificación de las restricciones permite identificar la acción extendida. Usando las constricciones de primera clase (5.28), las constricciones de segunda clase (5.29), y los multiplicadores de Lagrange (5.25) podemos determinar que la acción extentida tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} S_E[e^I{}_\alpha, A^I{}_\alpha, \pi^\alpha{}_I, \Pi^\alpha{}_I, u_0{}^I, w_0{}^I, u^I, w^I, v_a{}^I, z_a{}^I] &= \int_M \big[\dot{e}^I{}_\alpha\pi^\alpha{}_I + \dot{A}^I{}_\alpha\Pi^\alpha{}_I \\ -H' - u_0{}^I\gamma_I{}^0 - w_0{}^I\Gamma_I{}^0 - u^I\gamma_I - w^I\Gamma_I - \bar{v}_a{}^I\chi_I{}^a - \bar{z}_a{}^I\Xi_I{}^a\big]\,dx^3, \end{aligned} \tag{5.43}$$

donde H' es una combinación lineal de restricciones de primera clase

$$H' = \int \left[-e_0{}^I\gamma_I - A_0{}^I\Gamma_I\right] dx^2, \tag{5.44}$$

y ${u_0}^I, {w_0}^I, u^I, w^I, \bar{v_a}^I, \bar{z_a}^I$ son los multiplicadores de Lagrange que hacen que se cumplan las restricciones. De la acción extendida (5.43) podemos identificar el Hamiltoniano extendido dado por

$$H_E = H^{'} + \int \left[{u_0}^I \gamma^0{}_I + {w_0}^I \Gamma^0{}_I + u^I \gamma_I + w^I \Gamma_I \right] dx^2. \tag{5.45}$$

Es importante señalar, que la teoría analizada, tiene un Hamiltoniano extendido que es una combinación de restricciones de primera clase, esto refleja la covarianza general de la teoría, tal como pasa en RG.

Una vez encontradas la acción y hamiltoniana extendida, siguiendo con el análisis, se calcularán las transformaciones de norma. De esta manera, tal como en el capítulo anterior, usaremos el formalismo de Castellani [59] para definir el siguiente generador.

$$G = \int_\Sigma \left[D_0 \varepsilon^I{}_0 \gamma^0{}_I + D_0 {\tau_0}^I \Gamma^0{}_I + \varepsilon^I \gamma_I + \tau^I \Gamma_I \right]. \tag{5.46}$$

Así, las transformaciones de norma en el espacio fase estan dadas por

$$\begin{aligned}
\delta_0 e^I{}_0 &= D_0 \varepsilon^I{}_0, \\
\delta_0 e^I{}_a &= -D_a \varepsilon^I + \varepsilon^I{}_{JK} {e_a}^K \tau^J, \\
\delta_0 {A_0}^I &= D_0 {\tau_0}^I, \\
\delta_0 {A_a}^I &= -D_a \tau^I + s \mid \Lambda \mid \varepsilon^I{}_{JK} e^K{}_a \varepsilon^J, \\
\delta_0 \pi^0{}_I &= 0, \\
\delta_0 \pi^a{}_I &= -\Omega \varepsilon^{0ab} D_b \varepsilon_I + {\varepsilon_{IJ}}^K \pi^a{}_K \tau^J + s \mid \Lambda \mid {\varepsilon_{IJ}}^K \Xi^a{}_K, \\
\delta_0 \Pi^0{}_I &= -{\varepsilon_{IJ}}^K (\pi^0{}_K \varepsilon^J - \Pi^0{}_K \tau^J), \\
\delta_0 \Pi^a{}_I &= -2\varepsilon^{0ab} D_b \varepsilon_I + {\varepsilon_{IJ}}^K \chi^a{}_K \varepsilon^J - \frac{1}{\gamma \sqrt{\mid \Lambda \mid}} \varepsilon^{0ab} D_b \tau_I + {\varepsilon_{IJ}}^K \Xi^a{}_K \tau^J \\
&\quad + 2\varepsilon^{0ab} \varepsilon_{IJK} e^K{}_b \tau^J + \Omega \varepsilon^{0ab} \varepsilon_{IJK} e^K_b \varepsilon^J.
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Las transformaciones de norma para la acción de BL dadas por (5.47) no corresponden a los difeomorfismos, pero estas son transformaciones $\mid \Lambda \mid$ deformadas para el grupo Euclideano $ISO(3)$. Sin embargo, es bien sabido que esta teoría es covariante bajo difeomorfismos [53]; por lo que cabe hacer la pregunta: ¿cómo pueden ser rescatados los difeomorfismos en estas transformaciones ?, la respuesta está en redefinir los parámetros de norma de manera conveniente como, $\varepsilon_0{}^I = -\varepsilon^I = \xi^\rho e^I{}_\rho$, $\tau_0{}^I = -\tau^I = \xi^\rho A_\rho{}^I$, las transformaciones de norma (5.47) toman la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
e'^I{}_\alpha &\rightarrow e^I{}_\alpha + \mathfrak{L}_\xi e^I{}_\alpha + \xi^\rho \left[D_\alpha e^I{}_\rho - D_\rho e^I{}_\alpha\right], \\
A'_\alpha{}^I &\rightarrow A_\alpha{}^I + \mathfrak{L}_\xi A_\alpha{}^I + \xi^\rho \left[\partial_\alpha A^I_\rho - \partial_\rho A^I{}_\alpha + \varepsilon_{IJK} A^J{}_\alpha A^K{}_\rho + s \mid \Lambda \mid \varepsilon^I{}_{JK} e^J{}_\alpha e^K{}_\rho\right],
\end{aligned} \tag{5.48}
$$

que corresponden a los difeomorfismos, los cuales a su vez son una simetría interna de la teoría. Con la identificacion corrrecta de las restricciones, se puede llevar a cabo el conteo de los grados de libertad, el número de variables es 36 $(e^I{}_\alpha, A_\alpha{}^I, \pi^\alpha{}_I, \Pi^\alpha{}_I)$, se encontraron 12 constricciones de primera clase $(\gamma_I{}^0, \Gamma_I{}^0, \gamma_I, \Gamma_I)$ y 12 constricciones de segunda clase $(\chi_I{}^a, \Xi_I{}^a)$ y se puede concluir que la acción de BL en tres dimensiones, no tiene grados de libertad locales por punto, lo cual define una teoría topológica. Como podemos observar en esta sección y en la anterior, el formalismo de Dirac estricto es un método poderoso, pero muy largo de desarollar. De esta manera, en los siguientes capítulos mostraremos un método alternativo conocido como el método de Faddeev-Jackiw, y los resulatdos que se obtuvieron en los capítulos 4 y 5 se pueden obtener por medio de dicho método.

Capítulo 6

Formalismo de Faddeev-Jackiw para sistemas singulares

Como se menciono en el capítulo 2, el estudio de la dinámica Hamiltoniana para sistemas singulares fue desarrollada por Dirac-Bergmann [32], la manera de proceder en el formalismo de Dirac de manera estricta, se puede resumir en los siguientes pasos:

- Se asigna a todas las variables dinámicas su momento canonicamente conjugado.
- Se identifican todas las restricciones primarias independientes.
- El Hamiltoniano canónico y primario son identificados.
- Las relaciones de consistencia son consideradas identificando restricciones secundarias, terciarias, etc., hasta que el formalismo cierre.
- Todas las restricciones son clasificadas como restricciones de primera y segunda clase.
- Las restricciones de segunda clase son eliminadas introduciendo el paréntesis de Dirac.
- Con las restricciones de primera clase se construye un generador de transformaciones de norma. Dicho generador nos debe decir como transforman todos los campos en el espacio fase.

El formalismo de FJ [41] permite analizar sistemas singulares desde un enfoque más accesible y sencillo que el algoritmo de Dirac-Bergman, en el formalismo de FJ no existe la clasificación de restricciones primarias o secundarias, así como de primera o segunda clase, sin embargo, llevar acabo todos estos pasos, muchas veces resulta tedioso, aunque totalmente necesario. El formalismo de [FJ] es un método simpléctico en el cual toda la información relevante va a estar codificada en la denominada matriz simpléctica y los modos ceros asociados a dicha matriz nos permiten determinar las transformaciones de norma [42]. Esta matriz también nos va a permitir determinar las restricciones que existen en la teoría, pero desde un punto de vista más flexible y económico. En resumen, la información relevante (grados de libertad, transformaciones de norma, etc.,) que se obtiene mediante el esquema de la Dirac, también puede ser obtenida por medio del formalismo de FJ.

A continuación, se enlistan algunos modelos analizados en la literatura mediante el formalismo de FJ

- Sistemas con dimensiones extra [33].
- QCD [43].
- La teoría de Wess-Zumino [44].
- Super gravedad en 2D dimensiones [45].
- Teoría de Chern-Simons Abeliano, teoría de Maxwell en 3D con un término topológico [46].
- Teoría electromagnética [47].
- Teoría de Yangs-Mills [48].
- Entre muchos otros más [49].

6.1 Formalismo de Faddeev-Jackiw

El formalismo de FJ es un formalismo que se aplica a Lagrangianos de primer orden en las velocidades generalizadas [1]. Es importante mencionar que se puede reescribir una Lagrangiana de orden cuadrático en las velocidades a una de primer orden [62].

Una Lagrangiana de segundo orden en las velocidades puede convertirse a una de primer orden en las velocidades mediante la transformación de Legendre que se usa para poder pasar a la descripción Hamiltoniana

$$L = p_i \dot{q}^i - H(q,p). \tag{6.1}$$

[1]se puede aplicar el formalismo de FJ a Lagrangianas con ordenes más altos en las velocidades generalizadas [61].

La Lagrangiana (6.1) puede escribirse como

$$L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_i & q^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{p}_i \\ \dot{q}^i \end{pmatrix} - H(q,p). \tag{6.2}$$

Mediante la introducción de coordenadas arbitrarias para el espacio fase $\underline{\xi}^{\mu}(\mu = 1,2,...2N)$ dadas explicitamente por

$$\underline{\xi}^{\mu} = \begin{cases} q^{\mu} & \mu = 1,...,N, \\ p_{\mu-N} & \mu = N+1,...,2N, \end{cases}$$

en (6.2), la Lagrangiana queda expresada como

$$L = \frac{1}{2}\underline{\xi}^{\mu} f^{(0)}_{\mu\nu}(\dot{\underline{\xi}}^{\nu})^{T} - V(\underline{\xi}) = a_{\nu}\dot{\underline{\xi}}^{\nu} - V(\underline{\xi}), \tag{6.3}$$

donde $f^{(0)}_{\mu\nu}$ es la matriz simpléctica de dimensión $2N \times 2N$. El primer término de la derecha de la ecuación (6.3), $a_{\nu}\dot{\underline{\xi}}^{\nu}$ es llamado uno forma canónica y a_{ν} son sus componentes, $V(\underline{\xi})$ es llamado el potencial simpléctico. En la ecuación (6.3) $a = a_{\nu}d\underline{\xi}^{\nu}$ es lineal en $\underline{\xi}$ y $f^{(0)}_{\mu\nu}$ es constante, pero también pueden considerarse situaciones más generales donde $f^{(0)}_{\mu\nu}$ no sea constante como se verá mas adelante en las teorías analizadas en esta tesis.

En el método de FJ, dada una Lagrangiana que se pueda escribir en la forma

$$\mathscr{L} = a_{\mu}(\xi)\dot{\xi}^{\mu} - V(\xi), \tag{6.4}$$

y considerando a ξ^{μ} como variables simplécticas, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange quedan expresadas por

$$f^{(0)}_{\mu\nu}\dot{\xi}^{\nu} = \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{\mu}}, \tag{6.5}$$

donde

$$f^{(0)}_{\mu\nu}(x,y) = \frac{\delta a_{\nu}(y)}{\delta \xi^{\mu}(x)} - \frac{\delta a_{\mu}(x)}{\delta \xi^{\nu}(y)}. \tag{6.6}$$

La matriz $f^{(0)}_{\mu\nu}$ es llamada matriz simpléctica. Si $f^{(0)}_{\mu\nu}$ es invertible, se puede resolver (6.8) para las velocidades $\dot{\xi}^{\mu}$, es decir

$$\dot{\xi}^{\mu} = [f^{(0)}_{\mu\nu}]^{-1}\frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{\nu}}. \tag{6.7}$$

Por otra parte, podemos notar que el Hamiltoniano correspondiente a la Lagrangiana (6.7) es $V^0(\xi)$. La evolución dinámica de ξ, se puede escribir como

$$\dot{\xi}^{\mu} = \{V^0, \xi^{\mu}\} = \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{\nu}}\{\xi^{\nu}, \xi^{\mu}\}. \tag{6.8}$$

Así, mediante (6.7) y (6.8) se pueden definir los corchetes de FJ como

$$\{\xi^{\nu}, \xi^{\mu}\} = [f^{(0)}_{\mu\nu}]^{-1}. \tag{6.9}$$

Sin embargo, cuando $f^{(0)}{}_{\mu\nu}$ no es invertible, esto significa que el sistema es singular y por lo tanto existiran constricciones. La forma de estudiar sistemas con restricciones usando una forma alternativa al formalismo de Dirac, fue desarrollando una extensión del trabajo original propuesto por FJ, dicha extensión fue realizada por Barcelos Neto y Wotzasek [46]. La manera de identificar y estudiar los sistemas singulares en el formalismo simpléctico es llevada acabo de la siguiente manera. Debido a que $f^{(0)}{}_{\mu\nu}$ es singular, entonces tendrá nulidad y un rango. Si el rango de $f^{(0)}_{\mu\nu}$ es R ($R < D$), entonces $f^{(0)}{}_{\mu\nu}$ tendrá (D-R) modos ceros $(v^{\alpha})^T$, $(\alpha = 1, ..., D-R)$. Así, si contraemos la ecuación (6.5) con los vectores nulos, encontraremos las siguientes (D-R) restricciones dadas por

$$\Omega^{(0)}_{\alpha} = (v^{\alpha})^T_i \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{i}} = 0. \tag{6.10}$$

El siguiente paso es utilizar condiciones de consistencia sobre las restricciones (6.10) de manera añaloga a lo que se hace en el formalismo de Dirac

$$\dot{\Omega}^{(0)}_{\alpha} = \frac{\partial \Omega^{(0)}_{\alpha}}{\partial \xi^{i}}\dot{\xi}^{i} = 0. \tag{6.11}$$

Por otro lado, combinando (6.8) con (6.11)

$$\begin{cases} f_{ij}^{(0)}\dot{\xi}^j = \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^i}, \\ \frac{\partial \Omega^{(0)}}{\xi^i}\dot{\xi}^i = 0, \end{cases} \tag{6.12}$$

y escribiendo la ecuación (6.12) en forma matricial, es decir

$$f_{kj}^{(1)}\dot{\xi}^j = Z_k(\xi), \tag{6.13}$$

donde

$$f_{kj}^{(1)} = \begin{pmatrix} f_{ij}^{(0)} \\ \frac{\Omega^{(0)}}{\partial \xi^i} \end{pmatrix}, \tag{6.14}$$

y

$$Z_k(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^i} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.15}$$

Los modos cero $(v^{(1)})_k^T$ de (6.14), nos ayudan a determinar si el sistema presenta nuevas constricciones. Para conocer si el sistema tiene más constricciones se procede de la siguiente manera, multiplicando (6.13) por los modos cero $(v^{(1)})_k^T$, esto puede dar lugar a las siguientes restricciones [63]

$$(v^{(1)})_k^T Z_k = 0. \tag{6.16}$$

Debido a que las restricciones (6.10) se deben cumplir, éstas se sustituyen en (6.16), es decir

$$\Omega^{(1)} = (v^{(1)})_k^T Z_k \mid_{\Omega^{(0)}=0} = 0. \tag{6.17}$$

Esta sustitución garantiza que la constricción obtenida ya no aparecerá en el siguiente cálculo. En el caso general, la ecuación (6.16) es una igualdad. Sin embargo, si la ecuación (6.16) no es una identidad, se tiene que es una constricción secundaria.

Similarmente, introduciendo la condición de consistencia

$$\dot{\Omega}^{(1)} = \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial \xi^i} \dot{\xi}^i = 0, \tag{6.18}$$

combinada con la ecuación (6.12) y (6.18) se construye un nuevo grupo de ecuaciones lineales. Con ayuda de este grupo de ecuaciones se puede detectar paso a paso si existen más constricciones, el proceso finaliza cuando ya no encuentran más constricciones y esto sucede cuando las relaciones (6.17) son identicamente cero o una igualdad[2].

Una vez encontradas todas las restricciones, estas se introducen mediante multiplicadores de Lagrange en la ecuación (6.4)

$$\mathscr{L}^{(n)} = a_i^{(n)} \dot{\xi}^{(n)i} + \Omega_\alpha \dot{\lambda}^\alpha - V^{(n)}(\xi). \tag{6.19}$$

Por lo tanto, se puede considerar a los multiplicadores de Lagrange λ^α como variables simplécticas, como consecuencia, el conjunto de variables simplécticas se amplia. Por lo tanto, una vez incluidos los multiplicadores de Lagrange, se procede a calcular la matriz simpléctica de la ecuación (6.19) por medio de la Ec.(6.6). En consecuencia, se obtiene la n-enésima matriz simpléctica

$$\widetilde{f}_{ij}^{(n)}(x,y) = \begin{pmatrix} \widetilde{f} & (\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}) \\ -(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi})^T & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.20}$$

y se puede conocer si es singular o no. Si no es singular, se puede calcular la inversa de (6.20) y se términa el procedimiento. Sin embargo, si es singular, y como se han determinaron todas las restricciones, se debe fijar la norma para poder invertir la matriz simpléctica[3]. De esta manera, en el formalismo de FJ se tiene los siguientes puntos.

1. Las condiciones de consistencia de las restricciones no pueden dar nuevas restricciones, por lo tanto el proceso de producción de las restricicones se termina en unos pocos pasos. Se introducen todas las restricciones obtenidas en el Lagrangiano simpléctico de la siguiente manera.
   $L^{(n)} = a_i^{(n)} \dot{\xi}^{(n)i} + \Omega_\alpha \dot{\lambda}^\alpha - V^{(n)}(\xi)$. En este caso, si la matriz simpléctica asociada a $L^{(n)}$ no es singular, termina el formalismo.

[2]En el sentido de la ecuación (6.17).

[3]Las condiciones de norma se introducen como restricciones junto con sus respectivos multiplicadores de Lagrange.

2. Las condiciones de consistencia de las restricciones no pueden dar nuevas restricciones. Sin embargo, la matriz simpléctica asociada a $L^{(n)}$ sigue siendo singular. Entonces, se necesita fijar la norma para garantizar la invertibilidad de la matriz simpléctica [63].

3. Las condiciones de consistencia no pueden dar nuevas restricciones, aún después de fijar el norma como en el caso 2, el sistema sigue siendo singular, entonces, se imponen nuevos campos auxiliares análogos al formalismo BRST[4], en este caso, las restricciones que se obtienen, no son independientes a diferencia de los casos 1 y 2, donde las restricciones si son independientes [63].

La importancia de invertir la matriz simpléctica radica en que las entradas de dicha matriz, generan los corchetes de FJ y estos, coinciden con los paréntesis de Dirac. La implementación del formalismo de FJ, se podrá observar de forma más clara cuando se aplique a las acciones estudiadas en los capítulos anteriores.

6.2 Transformaciones de Norma

Una vez encontradas todas las restriciones y verificando que la matriz simpléctica del sistema sigue siendo singular, se puede determinar las transformaciones de norma de la teoría de la siguiente manera

$$\mathscr{L}^{(1)} = \bar{a}_i^{(0)} \dot{\hat{\xi}}^{(0)i} + \dot{\gamma}^{\alpha} \Phi_{\alpha}^{(0)} - V^{(1)}. \tag{6.21}$$

La Lagrangiana dada por (6.21) es ligeramente diferente a la Lagrangiana expresada mediante (6.19). En la Lagrangiana (6.21), el conjunto de variables $\widehat{\xi}^{(0)i}$ no toman en cuenta a los multiplicadores de Lagrange γ^{α} como variables simplécticas y $\Phi_{\alpha}^{(0)}$ son todas las restricciones encontradas en la teoría, por otra parte, podemos observar que la Lagrangiana dada por (6.19) si toma en cuenta a los multiplicadores de Lagrange como variables simplecticas a diferencia de la Lagrangiana expresada por 6.21. Utlizando el conjunto $\widehat{\xi}^{(0)i}$ se construye una matriz no singular, que denotaremos como $\overline{f} = \frac{\partial \bar{a}_j}{\partial \widehat{\xi}^i} - \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \widehat{\xi}^j}$. Por otra parte, se construye una matriz simplectica que contenga a $\overline{f}$ y la información de las restricciones encontradas [64]

[4] La idea básica de este método consiste en extender el espacio de fase del problema promoviendo los multiplicadores de Lagrange a nivel de coordenadas e introduciendo nuevas variables canónicas, que se denominan fantasmas, con estadística opuesta a las ya existentes.

$$\mathfrak{f}_{ij}^{(1)}(x,y) = \begin{pmatrix} \bar{f} & (\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \hat{\xi}}) \\ -(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \hat{\xi}})^T & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.22}$$

donde $\bar{f}$ es una matriz de dimensión $(N-M \times N-M)$, $(i = 1, ..., N-M)$[5] y $\frac{\partial \Omega}{\partial \hat{\xi}}$ representa una matriz de dimensión $(N-M \times M)$ definida como

$$\left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \hat{\xi}}\right)_{i\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial \hat{\xi}^1} & \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial \hat{\xi}^1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_M^{(0)}}{\partial \hat{\xi}^1} \\ \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial \hat{\xi}^2} & \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial \hat{\xi}^2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_M^{(0)}}{\partial \hat{\xi}^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial \hat{\xi}^{N-M}} & \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial \hat{\xi}^{N-M}} & \cdots & \frac{\partial \Phi_M^{(0)}}{\partial \hat{\xi}^{N-M}} \end{pmatrix}. \tag{6.23}$$

La matriz simpléctica (6.22) tiene M modos ceros y tienen la siguiente estructa

$$v_{i\alpha} = \begin{pmatrix} -(\bar{f}_{ij})(\frac{\partial \Phi_\alpha^{(0)}}{\partial \hat{\xi}^j}) \\ -1_{(\alpha)} \end{pmatrix}, \tag{6.24}$$

donde el primer elemento de (6.24) tiene dimensión $(N-M \times 1)$ y el último elemento es una columna de $(M \times 1)$ ceros excepto en la α-enésima entrada [64]

$$1^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.25}$$

De esta manera, las transformaciones de norma estan dadas por

[5] N es el número de variables al inicio de el análsis y M $(\alpha = 1, ..., M)$ es el número de restricciones encontradas al final del análisis

$$
\begin{aligned}
\delta\widehat{\xi}^{i} &= -(\overline{f}_{ij})^{-1}\frac{\Phi_{\alpha}^{(0)}}{\partial\widehat{\xi}^{j}}\varepsilon^{\alpha} \\
\delta\gamma^{\alpha} &= -\varepsilon^{\alpha}.
\end{aligned}
\tag{6.26}
$$

6.3 Grados de libertad

En el formalismo de Faddeev-Jackiw, el conteo de los grados de libertad se realiza de la siguiente manera:

$$G.L. = Nvd - Nr. \tag{6.27}$$

Donde, Nvd= Número de variables dinámicas y Nr= Número de restricciones. En el caso de los sistemas que presenten simetría de norma, despues de haber elegido las condiciones de norma adecuadas para poder invertir la matriz simpléctica y poder obtener los corchetes generalizados de FJ, las condiciones de norma son tomadas en cuenta como restricciones junto con las restricciones previamente encontradas en la teoría para poder realizar el cálculo de los grados de libertad.

Capítulo 7

Formalismo de Faddeev-Jackiw aplicado a la acción exótica

En este capítulo se lleva a cabo el análisis de FJ para un par de acciones; la primera acción que se analiza es la versión "Abeliana" de la acción exótica en tres dimensiones, que se estudio en el capítulo 4 usando el formalismo de Dirac. La segunda acción, es la acción exótica para gravedad (caso no Abeliano). De hecho, para la teoría Abeliana se va a demostrar que si en el formalismo de Dirac[1] se realiza el análisis sin fijar la norma y se eliminan sólo a las restricciones de segunda clase, entonces es posible reproducir los resultados de Dirac trabajando con el método de FJ en el espacio de configuración como variables simplécticas. Por otra parte, si en el formalismo de Dirac se realiza el análisis fijando la norma, y se construyen los correspondientes corchetes de Dirac, es posible reproducir en el esquema de FJ los resultados obtenidos en el formalismo de Dirac, esto se logra seleccionando al espacio fase como variables simplécticas. Además, también se demostrará la equivalencia de los corchetes de Dirac con los paréntesis generalizados de FJ.

7.1 Caso Abeliano de la acción exótica

Podemos observar que apartir de la acción

$$\begin{aligned} S^{Exotic}[A,e] &= \int_M A^I \wedge dA_I + \frac{1}{3}\varepsilon_{IJK} A^I \wedge A^J \wedge A^K \\ &\quad + \Lambda \int_M e^I \wedge d_A e_J, \end{aligned} \tag{7.1}$$

[1]El análisis mediante el formalismo de Dirac del caso Abeliano de la acción exótica se incluye en el apéndice A.

es posible encontrar la versión Abeliana[2] de la acción exótica y que esta expresada por

$$\mathscr{L} = \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\left(A^I_\mu F_{I\nu\lambda} + \Lambda e^I_\mu(\partial_\nu e_{I\lambda} - \partial_\lambda e_{I\nu})\right), \tag{7.2}$$

donde, A^I_μ es el conjunto de tres potenciales de norma valuados en el grupo $U(1)$, e^I_μ es la triada y $F^I_{\nu\lambda} = \partial_\nu A^I_\lambda - \partial_\lambda A^I_\nu$ es el campo de fuerza. Se procederá a realizar el análisis de (7.2) mediante el formalismo de FJ.

Se realiza la descomposición 2+1 y se identifica a la Lagrangiana simpléctica de orden cero[3], dada por

$$\mathscr{L}^{(0)} = \frac{1}{2}\varepsilon^{0ab}(A^I_b\dot{A}_{aI} + \Lambda e^I_b\dot{e}_{aI}) - V^{(0)}, \tag{7.3}$$

donde $V^{(0)} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{0ab}(A^I_0 F_{abI} + 2\Lambda e^I_0\partial_a e_{bI})$. Las correspondientes ecuaciones de movimiento simplécticas son [41]

$$f^{(0)}_{ab}\dot{\xi}^b = \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^a}, \tag{7.4}$$

la matriz simpléctica $f^{(0)}_{ab}$ tiene la siguiente estructura

$$f^{(0)}_{ab}(x,y) = \frac{\delta a_b(y)}{\delta \xi^a(x)} - \frac{\delta a_a(x)}{\delta \xi^b(y)}, \tag{7.5}$$

De la densidad Lagrangiana (7.2) se puede identificar las siguientes variables simplécticas $\xi^{(0)a}(x) = \{e^I_a, e^I_0, A^I_a, A^I_0\}$ y las componentes de la uno forma simpléctica son $a^{(0)}{}_a(x) = \{\frac{1}{2}\Lambda\varepsilon^{0ab}e_{Ib}, 0, \frac{1}{2}\varepsilon^{0ab}A_{Ib}, 0\}$. Donde, $\xi^{(0)a}$ y $a^{(0)}{}_a$ representan el conjunto de variables simplécticas. Es importante comentar, que en el formalismo de FJ, se tiene la libertad de elegir a las variables simplécticas; se puede elegir a las variables de configuración o a las variables del espacio fase. La libertad que ofrece el formalismo de FJ para elegir variables simplécticas, permite poder relacionarlo con las diferentes estructuras que se pueden obtener en los corchetes de Dirac[4]. Como primer paso, hacia la implementación del formalismo de FJ, se reproduciran los resultados encontrados en el apéndice A, donde se realizó el análisis de Dirac a la Lagrangiana (7.1) (caso Abeliano).También se calcularon los corchetes de

[2]Para el caso Abeliano las constantes de estructura que aparecen en (7.1) son cero, $\varepsilon_{IJK} = 0$.

[3]La frase orden cero hace referencia a la Langrangiana inicial con la que se empieza el análisis, en donde aun no se han calculado las restricicones de la teoría y por lo tanto no se ha incorporado esa información en la Lagraniana inicial.

[4]Si se eligen las variables del espacio de configuración como variables simplécticas, los corchetes de FJ que se obtienen son equivalentes a los corchetes de Dirac cuando no se fija la norma en el algoritmo de Dirac, por otro lado, si se elije como variables simplécticas al espacio fase, los corchetes de FJ son equivalentes a los corchetes de Dirac, pero ahora se debe fijar la norma en el algoritmo de Dirac.

Dirac y las restricciones de segunda clase son elimindas mantienendo las restricciones de primera clase.

Usando estas variables simplécticas, se construye la matriz simpléctica (7.5), que tiene la siguiente estructura

$$f_{ab}^{(0)}(x,y) = \begin{pmatrix} f_{e_a^I,e_b^J} & f_{e_a^I,e_0^J} & f_{e_a^I,A_b^J} & f_{e_a^I,A_0^J} \\ f_{e_0^I,e_b^J} & f_{e_0^I,e_0^J} & f_{e_0^I,A_b^J} & f_{e_0^I,A_0^J} \\ f_{A_a^I,e_b^J} & f_{A_a^I,e_0^J} & f_{A_a^I,A_b^J} & f_{A_a^I,A_0^J} \\ f_{A_0^I,e_b^J} & f_{A_0^I,e_0^J} & f_{A_0^I,A_b^J} & f_{A_0^I,A_0^J} \end{pmatrix},$$

donde las entradas de la matriz anterior estan dadas por

$$f_{ab}^{(0)}(x,y) = \begin{pmatrix} -\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y). \tag{7.6}$$

Se puede observar que la matriz es singular. Esto significa, que existen restricciones en la teoría. La manera de calcular las restricicones presentes en la teoría, es mediante los modos cero de la matriz (7.6). Los modos cero asociados a (7.6) son $(v_a^{(0)})_1^T = (0, v^{e_0^I}, 0, 0)$ y $(v_a^{(0)})_2^T = (0, 0, 0, v^{A_0^I})$, donde $v^{e_0^I}$ y $v^{A_0^I}$ son funciones arbitrarias. Usando los modos cero, la matriz simpléctica $f_{ab}^{(0)}$ y el potencial simpléctico $V^{(0)}$ se obtienen las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} \Omega_I^{(0)} &= \int d^2x (v^{(0)})_a^T(x) \frac{\delta}{\delta\xi^{(0)a}(x)} \int d^2y V^{(0)}(\xi) \\ &= \int d^2x v^{e_0^I}(x) [-\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\partial_a e_b{}^J] \to [-\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\partial_a e_b{}^J] = 0, \end{aligned} \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned} \beta_I^{(0)} &= \int d^2x (v^{(0)})_a^T(x) \frac{\delta}{\delta\xi^{(0)a}(x)} \int d^2y V^{(0)}(\xi) \\ &= \int d^2x v^{A_0}(x) [-\frac{1}{2}\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}F^J{}_{ab}] \to [-\frac{1}{2}\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}F^J{}_{ab}] = 0. \end{aligned} \tag{7.8}$$

A continuación, se debe determinar si existen más restricciones, para esto, se escribe el siguiente sistema de ecuaciones [65]

$$f_{kb}^{(1)}\dot{\xi}^b = Z_k(\xi), \tag{7.9}$$

donde

$$Z_k(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.10}$$

y

$$f^{(1)}_{kb} = \begin{pmatrix} f^{(0)}_{ab} \\ \frac{\partial \Omega^{(0)}}{\partial \xi^a} \\ \frac{\partial \beta^{(0)}}{\partial \xi^a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\partial_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\partial_a & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y). \tag{7.11}$$

Los modos cero asociados a la matriz (7.11) son $(v^{(1)})^T_1 = (\partial_a v^\lambda, v^{e^I_0}, 0, 0, v^\lambda, 0)$ y $(v^{(1)})^T_2 = (0, 0, \partial_a v^\alpha, v^{A^I_0}, 0, v^\alpha)$. Estos modos cero, se utilizan con el fin de obtener más restricciones. De hecho se multiplica cada modo cero por (7.10)

$$(v^{(1)})^T_k Z_k = 0, \tag{7.12}$$

donde $k = 1, 2$ y se puede observar que (7.12) da una igualdad, entonces, según el formalismo de FJ ya no se espera encontrar más restricciones [65].

Ahora, se construye una nueva Lagrangiana simpléctica que contenga la información de las constricciones obtenidas hasta el momento (7.7) y (7.9). La manera de introducir las restricciones, es mediante los multiplicadores de Lagrange, por lo tanto, introduciendo $e^I_0 = \dot{\lambda}^I$ y $A^I_0 = \dot{\theta}^I$ como multiplicadores de Lagrange asociados a las constricciones, se obtiene la siguiente Lagrangiana

$$\mathscr{L}^{(1)} = \frac{1}{2}\varepsilon^{0ab}A_{bI}\dot{A}^I_a + \frac{\Lambda}{2}\varepsilon^{0ab}e_{bI}\dot{e}^I_a + (\Lambda\varepsilon^{0ab}\partial_a e_{bI})\dot{\lambda}^I + (\varepsilon^{0ab}\partial_a A_{bI})\dot{\theta}^I - V^{(1)}, \tag{7.13}$$

donde $V^{(1)} = V^{(0)} \mid_{\Omega^{(0)}_I = 0, \beta^{(0)}_I = 0} = 0$, el potencial simpléctico es igual a cero, lo que refleja la covarianza general de la teoría, justo como ocurre en RG. De esta manera, de (7.13) se puede identificar las nuevas variables simplécticas $\xi^{(1)a}(x) = \{e^I_a, \lambda^I, A^I_a, \theta^I\}$ y las nuevas componentes de la uno-forma simpléctica son $a^{(1)}{}_a(x) = \{\frac{1}{2}\Lambda\varepsilon^{0ab}e_{Ib}, \Lambda\varepsilon^{0ab}\partial_a e_{bI}, \frac{1}{2}\varepsilon^{0ab}A_{Ib}, \varepsilon^{0ab}\partial_a A_{jI}\}$. Por lo tanto, mediante el uso de las nuevas variables simplécticas y las uno-formas, podemos calcular la siguiente matriz simpléctica

$$f^{(1)}_{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} -\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & -\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\partial_b & 0 & 0 \\ \Lambda\varepsilon^{0ba}\eta_{IJ}\partial_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & -\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\partial_b \\ 0 & 0 & \varepsilon^{0ba}\eta_{IJ}\partial_a & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y), \tag{7.14}$$

La matriz (7.14) es singular. Sin embargo, como ya se mencionó, ya no existen más constricciones, la no invertibilidad de (7.14) significa que la teoría tiene simetría de norma. Por lo tanto, se deben elegir condiciones de norma para poder invertir la matriz simpléctica. Eligiendo las siguientes condiciones de norma

$$\begin{aligned} e^I_0 &= 0, \\ A^I_0 &= 0, \end{aligned} \tag{7.15}$$

esto significa que λ^I y θ^I son constantes. Incorporando estas condiciones de norma, mediante los multiplicadores de Lagrange ϕ_I y α_I a la Lagrangiana (7.13), se construye un nuevo Lagrangiano simpléctico

$$\mathscr{L}^{(2)} = \frac{1}{2}\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}A^I_b\partial_0 A^J_a + \frac{1}{2}\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}e^I_b\partial_0 e^J_a + (\Omega^{(0)}_I + \phi_I)\dot{\lambda}^I + (\beta^{(0)}_I + \alpha_I)\dot{\theta}^I, \tag{7.16}$$

Se puede identificar el siguiente conjunto de variables simplécticas $\xi^{(2)a}(x) = \{e^I_a, \lambda^I, A^I_a, \theta^I, \phi_I, \alpha_I\}$ y la uno-forma es dada por $a^{(2)}{}_a(x) = \{\frac{1}{2}\Lambda\varepsilon^{0ab}e_{Ib}, \Omega^{(0)}_I + \phi_I, \frac{1}{2}\varepsilon^{0ab}A_{Ib}, \beta^{(0)}_I + \alpha_I, 0, 0\}$. Usando este nuevo conjunto de varibles simplécticas, se construye la siguiente matriz simpléctica

$$f^{(2)}_{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} -\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & \Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\partial_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda\varepsilon^{0ba}\eta_{IJ}\partial_a & 0 & 0 & 0 & -\delta^J{}_I & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & \varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\partial_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{0ba}\eta_{IJ}\partial_a & 0 & 0 & -\delta^J{}_I \\ 0 & \delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^I{}_J & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y) \tag{7.17}$$

Se puede observar que $f^{(2)}_{ab}$ no es singular, por lo tanto, la matriz es invertible. La inversa de la matriz (7.17) esta dada por

$$[f^{(2)}_{ab}(x,y)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Lambda}\varepsilon_{0ab}\eta^{IJ} & 0 & 0 & 0 & \delta^I_J\partial_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^I_J & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{0ab}\eta^{IJ} & 0 & 0 & \delta^I_J\partial_a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^I_J \\ \delta^J_I\partial_b & -\delta^J_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^J_I\partial_b & -\delta^J_I & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y). \tag{7.18}$$

Por lo tanto, de (7.18) es posible identificar los siguientes corchetes generalizadas de FJ

$$\{\xi^{(2)}_a(x), \xi^{(2)}_b(y)\}_{FD} = [f^{(2)}_{ab}(x,y)]^{-1}, \tag{7.19}$$

se obtienen los siguientes corchetes generalizados

$$\{e^I_a(x), e^J_b(y)\}_{FD} = [f^{(2)}_{11}(x,y)]^{-1} = \frac{1}{\Lambda}\varepsilon_{0ab}\eta^{IJ}\delta^2(x-y), \tag{7.20}$$

$$\{A^I_a(x), A^J_b(y)\}_{FD} = [f^{(2)}_{33}(x,y)]^{-1} = \varepsilon_{0ab}\eta^{IJ}\delta^2(x-y), \tag{7.21}$$

$$\{e^I_a(x), \phi_J(y)\}_{FD} = [f^{(2)}_{15}(x,y)]^{-1} = \delta^I_J\partial_a\delta^2(x-y), \tag{7.22}$$

$$\{A^I_a(x), \alpha_J(y)\}_{FD} = [f^{(2)}_{36}(x,y)]^{-1} = \delta^I_J\partial_a\delta^2(x-y), \tag{7.23}$$

$$\{\lambda^I(x), \phi_J(y)\}_{FD} = [f^{(2)}_{25}(x,y)]^{-1} = \delta^I_J\delta^2(x-y), \tag{7.24}$$

$$\{\theta^I(x), \alpha_J(y)\}_{FD} = [f^{(2)}_{46}(x,y)]^{-1} = \delta^I_J\delta^2(x-y). \tag{7.25}$$

Se puede observar que los corchetes de FJ son equivalentes a los paréntesis de Dirac dados en el apéndice A. De hecho, si se considera a los corchetes de Dirac (B.18)-(B.23) y las restricciones de segunda clase (B.13) como identidades fuertes, entonces los corchetes de Dirac, coinciden con los corchetes de FJ que se acaban de calcular.

Por otra parte, las transformaciones de norma de la teoría en el contexto de FJ se obtienen de la siguiente manera. Se demostró en (7.12) que el sistema ya no presenta más restricciones, entonces, una vez determinadas todas las restricciones de la teoría, los modos cero de la matriz (7.14) permiten determinar las transformaciones de norma. Para poder calcular las transformaciones de norma, se debe rescribir la Lagrangiana (7.13) de la siguiente forma

$$\mathscr{L}^{(1)} = \bar{a}_a^{(0)}\dot{\bar{\xi}}^{(0)a} + \dot{\gamma}^\alpha \Phi_\alpha^{(0)} - V^{(1)},$$

donde el conjunto de variables simplécticas esta dado por $\bar{\xi}^{(0)a} = (e_a^I, A_a^I)$, $\gamma^\alpha = (\gamma^1 = \lambda^I, \gamma^2 = \theta^I)$ son los multiplicadores de Lagrange y $\Phi_\alpha^{(0)} = (\Phi_1^{(0)} = \Omega_I^{(0)}, \Phi_2^{(0)} = \beta_I^{(0)})$ son las restricciones encontradas en la teoría. Usando estas variables simplécticas, se construye una matriz no singular, que denotaremos como $\bar{f}_{ab} = \frac{\partial \bar{a}_b}{\partial \xi^a} - \frac{\partial \bar{a}_a}{\partial \xi^b}$, donde las uno-formas simplécticas estan dadas por $(\bar{a}_a = (\frac{1}{2}\Lambda\varepsilon^{0ab}e_{Ib}, \frac{1}{2}\varepsilon^{0ab}A_{Ib})$. Por consiguiente, se construye la matriz simpléctica en términos de las $\bar{\xi}'s$ y las constricciones

$$\mathfrak{f}_{ab}^{(1)}(x,y) = \begin{pmatrix} \bar{f} & (\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \xi}) \\ -(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \xi})^T & 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \xi}\right)_{i\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial \xi^2} & \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial \xi^3} & \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial \xi^4} & \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial \xi^4} \end{pmatrix}.$$

Se observa que la matriz $\mathfrak{f}_{ab}^{(1)}$ tiene modos cero y tienen la siguiente estructura [64]

$$v_{i\alpha} = \begin{pmatrix} (\bar{f}_{ab})(\frac{\partial \Phi_\alpha^{(0)}}{\partial \xi^b}) \\ 1_{(\alpha)} \end{pmatrix}. \tag{7.26}$$

En el caso de teorías de norma, la matriz simpléctica no sera invertible, sin embargo, los vectores nulos de la matriz simpléctica son los generadores de la simetría de norma del sistema. Las transformaciones de norma de la teoría, están dadas por (6.31) y (6.32).

Usando (7.26) se calculan los modos cero de la matriz (7.14) y se obtiene $(\mathrm{w}^{(1)})_1^T = (\partial_a \varepsilon^I, \varepsilon^I, 0, 0)$

y $(\mathrm{w}^{(1)})_2^T = (0,0,\partial_a \zeta^I, \zeta^I)$. Las transformaciones de norma son

$$\begin{aligned}\delta e_a^I &= \partial_a \varepsilon^I,\\ \delta e_0^I &= \dot{\varepsilon}^I,\\ \delta A_a^I &= \partial_a \zeta^I,\\ \delta A_0^I &= \dot{\zeta}^I,\end{aligned} \tag{7.27}$$

donde ε y ζ forman un conjunto de parámetros infinitesimales. Las transformaciones de norma (7.27) coinciden con lo encontrado en el formalismo de Dirac. Siguiendo con el análsis de FJ del sistema, ahora trabajaremos con la siguiente fijación de la norma

$$\begin{aligned}\partial^a e_a^I &= 0,\\ \partial^a A_a^I &= 0.\end{aligned} \tag{7.28}$$

Utilizando esta norma junto con sus respectivos multiplicadores de Lagrange, ρ_I y γ_I, el Lagrangiano simpléctico (7.13) es dado por

$$\mathscr{L}^{(2)} = \varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}A_b^I\partial_0 A_a^J + \Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}e_b^I\partial_0 e_a^J + \Omega_I^{(0)}\dot{\lambda}^I + \partial^a e_a^I\dot{\rho}_I + \beta_I^{(0)}\dot{\theta}^I + \partial^a A_a^I\dot{\gamma}_I,$$

las nuevas variables simplécticas son $\xi^{(2)i}(x) = \{e_a^I, \lambda^I, A_a^I, \theta^I, \rho_I, \gamma_I\}$ y la uno-forma $a^{(2)}{}_a(x) = \{\frac{1}{2}\Lambda\varepsilon^{0ab}e_{Ib}, \Omega_I^{(0)}, \frac{1}{2}\varepsilon^{0ab}A_{Ib}, \beta_I^{(0)}, \partial^a e_a^I, \partial^a A_a^I\}$. Usando las nuevas variables simplécticas, la matriz simpléctica que se obtiene es

$$f_{ab}^{(2)}(x,y) = \begin{pmatrix} -\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & \Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\partial_b & 0 & 0 & -\delta_I^J\partial^a & 0\\ \Lambda\varepsilon^{0ba}\eta_{IJ}\partial_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & \varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\partial_b & 0 & -\delta_I^J\partial^a\\ 0 & 0 & \varepsilon^{0ba}\eta_{IJ}\partial_a & 0 & 0 & 0\\ -\delta_J^I\partial^b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\delta_J^I\partial^b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^2(x-y),$$

Se puede observar la matriz $f_{ab}^{(2)}$, es no singular, y por lo tanto invertible. La inversa de $f_{ab}^{(2)}$ está dada por

$$[f^{(2)}_{ab}(x,y)]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{ab}\frac{\eta^{IJ}}{\Lambda}\frac{\partial^b}{\nabla^2} & 0 & 0 & -\delta^J_I\frac{\partial_a}{\nabla^2} & 0 \\ \varepsilon_{ba}\frac{\eta^{IJ}}{\Lambda}\frac{\partial^a}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & -\delta^J_I\frac{1}{\nabla^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{ab}\eta^{IJ}\frac{\partial^b}{\nabla^2} & 0 & -\delta^J_I\frac{\partial_a}{\nabla^2} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{ba}\eta^{IJ}\frac{\partial^a}{\nabla^2} & 0 & 0 & -\delta^J_I\frac{1}{\nabla^2} \\ -\delta^I_J\frac{\partial_b}{\nabla^2} & \delta^I_J\frac{1}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta^I_J\frac{\partial_b}{\nabla^2} & \delta^I_J\frac{1}{\nabla^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^2(x-y) \tag{7.29}$$

De esta manera, se identifican de (7.29) los siguientes corchetes de FJ

$$\begin{aligned} \{e^I_a(x),\lambda^J(y)\}_{FD} &= \frac{1}{\Lambda}\varepsilon_{0ab}\eta^{IJ}\frac{\partial^b}{\nabla^2}\delta^2(x-y), \\ \{e^I_a(x),\rho_J(y)\}_{FD} &= -\delta^J_I\frac{1}{\nabla^2}\delta^2(x-y), \\ \{A^I_a(x),\theta^J(y)\}_{FD} &= \varepsilon_{0ab}\eta^{IJ}\frac{\partial^b}{\nabla^2}\delta^2(x-y), \\ \{A^I_a(x),\gamma_J(y)\}_{FD} &= -\delta^J_I\frac{\partial_a}{\nabla^2}\delta^2(x-y). \end{aligned}$$

En particular de (7.29) se obtiene $\{e^I_a(x),e^J_b(y)\}_{FD}=0$ y $\{A^I_a(x),A^J_b(y)\}_{FD}=0$, donde coinciden con los corchetes de Dirac dados por (C.5) y (C.8). Es importante comentar, que al elegir las normas (7.28) no es posible obtener todos los corchetes de Dirac dados por (C.4) a (C.9). Este hecho es debido a que el algoritmo de Dirac, al fijar la norma se elige una configuración particular de los campos, en particular, se elige la configuración de los momentos canónicos, y este hecho no permite en el esquema de FJ obtener el conjunto completo de corchetes, debido a que se utilizan como variables simplécticas al espacio de configuración y no se toman en cuenta a los momentos. Para poder obtener todos los corchetes de Dirac desde (C.4) hasta (C.9), en el formalismo de FJ, es necesario trabajar con el espacio fase como variables simplécticas.

Para términar esta sección, se lleva a cabo el conteo de grados de libertad. Como se ha mencionado, en el formalismo de FJ no es necesario clasificar las restricciones en primera clase o segunda clase, ya que las constricciones que se determinan en el formalismo de FJ tienen el mismo estatus. Por lo tanto, el conteo de los grados de libertdad se realiza de la siguiente manera, el número de variables dinámicas es igual a 12 (e^I_a, A^I_a) y 12 restricciones independientes ($\Omega^{(0)}_I, \beta^{(0)}_I, e^I_0, A^I_0$), entonces, G.L=Número de variables dinámicas $-$ Número de restricicones $= 12-12=0$. Por lo tanto, se llega a la conclusión de que la acción exótica Abeliana tiene cero grados de libertad, por lo tanto, es una teoría topológica[5].

7.2 Coordenadas canónicas como variables simplécticas

En esta sección, se análiza la densidad Lagrangiana de la acción (7.1), por medio del formalismo de FJ, pero se trabaja con el espacio fase como variables simplécticas. A partir de (7.3) se puede identificar a los momentos canónicos conjugados $(\pi_I^\alpha, p_I^\alpha)$ de (A_α^I, e_α^I) dados por

$$\begin{aligned} \pi_I^a &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0ab}A_{bI}, \\ p_I^a &= \frac{\Lambda}{2}\varepsilon^{0ab}e_{bI}. \end{aligned} \tag{7.30}$$

Usando los momentos canónicos en la Lagrangiana (7.3), se obtiene el siguiente Lagrangiano simpléctico

$$\mathscr{L}^{(0)} = \pi_I^a\dot{A}_a^I + p_I^a\dot{e}_a^I - V^{(0)}, \tag{7.31}$$

donde $V^{(0)} = -2A_0^I\partial_a\pi_I^a - 2e_0^I\partial_a p_I^a$. Además, se puede identificar el siguiente conjunto de variables simplécticas $\xi^{(0)a}(x) = \{e_a^I, p_I^a, e_0^I, A_a^I, \pi_I^a, A_0^I\}$ y las componentes de la uno-forma simplécticas son $a^{(0)}{}_a(x) = \{p_I^a, 0, 0, \pi_I^a, 0, 0\}$. Usando estas variables simplécticas, la matriz simpléctica es

$$f_{ab}^{(0)}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^a{}_b\delta^J{}_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta^b{}_a\delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^a{}_b\delta^J{}_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^a{}_b\delta^I{}_J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^2(x-y). \tag{7.32}$$

Se observa que la matriz (7.32) es singular, esto significa que en el sistema existen restricciones. La manera de obtener estas restricciones es con los modos cero de la matriz (7.32), los modos cero estan dados por $(v_a^{(0)})_1^T = (0,0,v^{e_0^I},0,0,0)$ y $(v_a^{(0)})_2^T = (0,0,0,0,0,v^{A_0^I})$, donde $v^{e_0^I}$ y $v^{A_0^I}$ son funciones arbitrarias. De esta manera, al igual que el análisis realizado en la sección pasada, mediante

[5] Entendiéndose como aquella que no tiene grados de libertad locales por punto.

el uso de estos modos cero se obtienen las siguientes restricciones

$$\begin{aligned}\Omega_I^{(0)} &= \int d^2x (v^{(0)})_a^T(x) \frac{\delta}{\delta \xi^{(0)a}(x)} \int d^2y V^{(0)}(\xi) \\ &= \int d^2x v^{e_0^I}(x)[-2\partial_a p_I^a] \rightarrow [-2\partial_a p_I^a] = 0, \end{aligned} \tag{7.33}$$

y

$$\begin{aligned}\Theta_I^{(0)} &= \int d^2x (v^{(0)})_a^T(x) \frac{\delta}{\delta \xi^{(0)a}(x)} \int d^2y V^{(0)}(\xi) \\ &= \int d^2x v^{A_0}(x)[-2\partial_a \pi_I^a] \rightarrow [-2\partial_a \pi_I^a] = 0. \end{aligned} \tag{7.34}$$

Se observa, que las constricciones obtenidas (7.33) y (7.34), corresponden a las constricciones secundarias calculadas en el formalismo de Dirac (B.9).

Se debe determinar si existen más constricciones en la teoría, para hacer esto, se procede de la siguiente manera [65]

$$f_{kb}^{(1)} \dot{\xi}^b = Z_k(\xi), \tag{7.35}$$

donde

$$Z_k(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.36}$$

y

$$f_{kb}^{(1)} = \begin{pmatrix} f_{ab}^{(0)} \\ \frac{\partial \Omega^{(0)}}{\partial \xi^a} \\ \frac{\partial \Theta^{(0)}}{\partial \xi^a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^a{}_b \delta^J{}_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta^b{}_a \delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^a{}_b \delta^J{}_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^b{}_a \delta^J{}_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\partial_b \delta^J{}_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\partial_b \delta^J{}_I & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y). \tag{7.37}$$

La matriz (7.37) tiene los siguientes modos cero, $(v^{(1)})_1^T = (2\partial_a v^\lambda, 0, v^{e_0^I}, 0, 0, 0, v^\lambda, 0)$ y $(v^{(1)})_2^T = (0, 0, 0, 2\partial_a v^\alpha, 0, v^{A_0^I}, 0, v^\alpha)$. La contracción de los modos cero $(v^{(1)})_k$ con (7.36) nos permite determinar si existen más restricciones, esto es

$$(v^{(1)})^T_k Z_k \mid_{\Omega^{(0)},\Theta_I^{(0)}=0} = 0, \tag{7.38}$$

con $k = 1,2$. Se observa que la ec.(7.38) es una igualdad, entonces, la teoría no presenta más restricciones.

Se construye una nueva Lagrangiana simpléctica, que contiene la información de las restricciones que se han calculado, los multiplicadores de Lagrange λ^I y ρ^I permiten introducir las restricciones (7.33) y (7.34)

$$\mathscr{L}^{(1)} = \pi_I^a \dot{A}_a^I + p_I^a \dot{e}_a^I + \Omega_I^{(0)} \dot{\lambda}^I + \Theta_I^{(0)} \dot{\rho}^I - V^{(1)} \tag{7.39}$$

el potencial simpléctico $V^{(1)} = V^{(0)} \mid_{\Omega_I^{(0)},\Theta_I^{(0)}=0} = 0$ es cero. Se puede identificar de la Lagrangiana (7.39) las siguientes variables simplécticas $\xi^{(1)a}(x) = \{e_a^I, p_I^a, \lambda^I, A_a^I, \pi_I^a, \rho^I\}$ y la uno-forma simpléctica $a^{(1)}{}_a(x) = \{p_I^a, 0, \partial_a p_I^a, \pi_I^a 0, \partial_a \pi_I^a\}$. Utilizando el nuevo conjunto de variables simplécticas, se construye la siguiente matriz

$$f_{ab}^{(1)}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^a{}_b \delta^J{}_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta^b{}_a \delta^I{}_J & 0 & -2\delta^I{}_J \partial_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\delta^J{}_I \partial_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^a{}_b \delta^J{}_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^b{}_a \delta^I{}_J & 0 & -2\delta^I{}_J \partial_a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\delta^J{}_I \partial_b & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y). \tag{7.40}$$

Se puede observar que $f_{ab}^{(1)}$ es una matriz singular. Sin embargo, no existen más constricciones, la singularidad de la matriz (7.40) significa que la teoría presenta simetría de norma. Para poder invertir la matriz (7.40), es necesario elegir condiciones de norma, se eligen como condiciones de norma a $\partial^a e_a^I = 0$ y $\partial^a A_a^I = 0$. Incorporando estas condiciones de norma, mediante los multiplicadores de Lagrange ϕ_I y θ_I a la Lagrangiana (7.39), se construye una nueva Lagrangiana simpléctica

$$\mathscr{L}^{(2)} = \pi_I^a \dot{A}_a^I + p_I^a \dot{e}_a^I + (2\partial_a p_I^a)\dot{\lambda}^I + (2\partial_a \pi_I^a)\dot{\rho}^I + (\partial^a e_a^I)\dot{\phi}_I + (\partial^a A_a^I)\dot{\theta}_I. \tag{7.41}$$

de (7.41) se puede identificar, a las nuevas variables simplécticas $\xi^{(2)i}(x) = \{e_a^I, p_I^a, \lambda^I, A_a^I, \pi_I^a, \rho^I, \phi_I, \theta_I\}$

y la uno-forma simpléctica $a^{(2)}{}_a(x) = \{p_I^a, 0, 2\partial_a p_I^a, \pi_I^a, 0, 2\partial_a \pi_I^a, \partial^a e_a^I, \partial^a A_a^I\}$. Se construye la siguiente matriz a partir de las nuevas variables simplécticas

$$f_{ab}^{(2)}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^a{}_b\delta^J{}_I & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^J{}_I\partial_a & 0 \\ \delta^b{}_a\delta^I{}_J & 0 & -2\delta^I{}_J\partial_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\delta^J{}_I\partial_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^a{}_b\delta^J{}_I & 0 & 0 & -\delta^J{}_I\partial_a \\ 0 & 0 & 0 & \delta^b{}_a\delta^I{}_J & 0 & -2\delta^I{}_J\partial_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\delta^J{}_I\partial_b & 0 & 0 & 0 \\ -\delta^I{}_J\partial_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta^I{}_J\partial_b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y) \tag{7.42}$$

La matriz simpléctica (7.42) es no singular y su inversa está dada por

$$[f_{ab}^{(2)}(x,y)]^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta^I{}_J(\delta^b{}_a - \frac{\partial_a\partial^b}{\nabla^2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^I{}_J\frac{\partial_a}{\nabla^2} & 0 \\ -\delta^J{}_I(\delta^a{}_b - \frac{\partial_b\partial^a}{\nabla^2}) & 0 & -\frac{1}{2}\delta^J{}_I\frac{\partial^a}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\delta^I{}_J\frac{\partial^b}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^I{}_J\frac{1}{2}\frac{1}{\nabla^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^I{}_J(\delta^b{}_a - \frac{\partial_a\partial^b}{\nabla^2}) & 0 & 0 & -\delta^I{}_J\frac{\partial_a}{\nabla^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\delta^J{}_I(\delta^a{}_b - \frac{\partial_b\partial^a}{\nabla^2}) & 0 & -\frac{1}{2}\delta^J{}_I\frac{\partial^a}{\nabla^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\delta^I{}_J\frac{\partial^b}{\nabla^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\delta^I{}_J\frac{1}{\nabla^2} \\ -\delta^J{}_I\frac{\partial_b}{\nabla^2} & 0 & \frac{1}{2}\delta^J{}_I\frac{1}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta^J{}_I\frac{\partial_b}{\nabla^2} & 0 & \frac{1}{2}\delta^J{}_I\frac{1}{\nabla^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta(x-y), \tag{7.43}$$

de (7.43), se puede identificar los corchetes de FJ, que están dados por

$$\{\xi_a^{(2)}(x), \xi_b^{(2)}(y)\}_{FD} = [f_{ab}^{(2)}(x,y)]^{-1}. \tag{7.44}$$

Los corchetes de FJ entre las variables simplécticas, están expresados por

$$\{e_a^I(x), p_J^b(y)\}_{FD} = \delta^I{}_J(\delta^b{}_a - \frac{\partial_a\partial^b}{\nabla^2})\delta(x-y), \tag{7.45}$$

$$\{A_a^I(x), \pi_J^b(y)\}_{FD} = \delta^I{}_J(\delta^b{}_a - \frac{\partial_a\partial^b}{\nabla^2})\delta(x-y), \tag{7.46}$$

$$\{e_a^I(x), e_b^J(y)\}_{FD} = 0, \tag{7.47}$$

$$\{A^I_a(x), A^J_b(y)\}_{FD} = 0, \tag{7.48}$$

$$\{p^a_I(x), p^b_J(y)\}_{FD} = 0, \tag{7.49}$$

$$\{\pi^a_I(x), \pi^b_J(y)\}_{FD} = 0, \tag{7.50}$$

$$\{p^a_I(x), \lambda^J(y)\}_{FD} = -\frac{1}{2}\delta^J_I \frac{\partial^a}{\nabla^2}\delta(x-y), \tag{7.51}$$

$$\{\pi^a_I(x), \rho^J(y)\}_{FD} = -\frac{1}{2}\delta^J_I \frac{\partial^a}{\nabla^2}\delta(x-y), \tag{7.52}$$

$$\{\lambda^I(x), \phi_J(y)\}_{FD} = -\frac{1}{2}\delta^I_J \frac{1}{\nabla^2}\delta(x-y), \tag{7.53}$$

$$\{\rho^I(x), \theta_J(y)\}_{FD} = \frac{1}{2}\delta^I_J \frac{1}{\nabla^2}\delta(x-y), \tag{7.54}$$

$$\{e^I_a(x), \phi_J(y)\}_{FD} = -\delta^I_J \frac{\partial_a}{\nabla^2}\delta(x-y). \tag{7.55}$$

$$\{A^I_a(x), \theta_J(y)\}_{FD} = -\delta^I_J \frac{\partial_a}{\nabla^2}\delta(x-y). \tag{7.56}$$

De esta manera, se puede observar que los corchetes de FJ coinciden con los corchetes de Dirac que se calcularon en el apéndice C (ver apéndice D) expresados por (C.4) a (C.9).

Por lo tanto, se finaliza está sección con algunos comentarios. Se reproducen los resultados obtenidos por el método de Dirac desde un enfoque diferente; esto es, mediante el formalismo de FJ. En particular, el formalismo de FJ permite obtener las restricicones de la teoría y se demostró que los corchetes de Dirac son iguales.

7.3 Caso no Abeliano de la acción exótica

En esta sección, se realiza el análisis de la acción exótica, caso no Abeliano. A partir de la acción (7.1), se puede identificar la siguiente Lagrangiana simpléctica

$$\mathscr{L}^{(0)} = \varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}A^I_b\partial_0 A^J_a + \Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}e^I_b\partial_0 e^J_a - V^{(0)}, \tag{7.57}$$

donde el potencial simpléctico es dado por $V^{(0)} = -2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\left[F^J{}_{ab} + \frac{\Lambda}{2}\varepsilon^J{}_{KL}e^K_a e^L_b\right]A_0{}^I - 2\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}D_a e_b{}^I e^J_0$. Se puede observar, que a partir de (7.57) la identificación de las variables simplécticas $\xi^{(0)a}(x) = \{e^I_a, e^I_0, A^I_a, A^I_0\}$ y la uno-forma simpléctica $a^{(0)}{}_a(x) = \{\Lambda\varepsilon^{0ab}e_{Ib}, 0, \varepsilon^{0ab}A_{Ib}, 0\}$. Utilizando las variables simplécticas y las componentes de la uno forma simpléctica, se construye la siguiente matriz

$$f^{(0)}_{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} -2\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^2(x-y), \tag{7.58}$$

donde se observa que la matriz (7.58) es singular, esto signfica, que existen restricciones. Al calcular los modos cero de la matriz (7.58) se obtiene $\widetilde{v}^{(0)}_k = (0, v^{e^I_0}(x), 0, 0)$ y $\widetilde{w}^{(0)}_k = (0,0,0,w^{A^I_0}(x))$, donde $v^{A^I_0}$ y $v^{e^I_0}$ son funciones arbitrarias. Tal y como se ha analizado en las secciones anteriores, se contraen los vectores nulos con la variación del potencial simpléctico, y se obtienen las siguientes restricciones

$$\begin{aligned}
\Omega^{(0)}_I &= \int d^2x(\widetilde{v}^{(0)})^T_a(x)\frac{\delta}{\delta\xi^{(0)a}(x)}\int d^2yV^{(0)}(\xi) \\
&= \int d^2xv^{e^I_0}(x)\left[-2\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}D_a e_b{}^J\right] \rightarrow \left[-2\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}D_a e_b{}^J\right] = 0, \\
\beta^{(0)}_I &= \int d^2x(\widetilde{w}^{(0)})^T_a(x)\frac{\delta}{\delta\xi^{(0)a}(x)}\int d^2yV^{(0)}(\xi) \\
&= \int d^2xw^{A_0}(x)\left[-2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\left[F^J{}_{ab} + \frac{\Lambda}{2}\varepsilon^J{}_{KL}e^K_a e^L_b\right]\right] \rightarrow \left[-2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\left[F^J{}_{ab} + \frac{\Lambda}{2}\varepsilon^J{}_{KL}e^K_a e^L_b\right]\right] = 0,
\end{aligned}$$

se puede identificar, a las siguientes constricciones

$$\Omega^{(0)}_I = 2\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}D_a e_b{}^J = 0,$$

$$\beta^{(0)}_I = 2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\left[F^J{}_{ab} + \frac{\Lambda}{2}\varepsilon^J{}_{KL}e^K_a e^L_b\right] = 0.$$

Cabe decir, que las constricciones encontradas mediante el formalismo de FJ corresponden a las constricciones secundarias calculadas con el método de Dirac (ver 4 capítulo y ec.(4.13))

$$f^{(1)}_{kb}\dot{\xi}^b = Z_k(\xi), \tag{7.59}$$

los modos cero de (7.59), son expresados por

$$
\begin{aligned}
(v^{(1)})_1^T &= (\partial_a v^{\lambda} + \varepsilon^I{}_{JK} A_a^J v^{\lambda} + \varepsilon^I{}_{JK} e_a^K v^{\beta}, v^{e_0^I}, 0, 0, v^{\lambda}, v^{\beta}),\\
(v^{(1)})_2^T &= (0, 0, \partial_a v^{\beta} + \varepsilon^I{}_{JK} A_a^J v^{\beta} + \Lambda \varepsilon^I{}_{JK} e_a^K v^{\lambda}, v^{A_0^I}, v^{\lambda}, v^{\beta}).
\end{aligned} \tag{7.60}
$$

Es fácil mostrar que los modos cero (7.60) no conducen a más restricciones. Ahora, se construye una nueva Lagrangiana que incorpore la información de las restricciones que se acaban de calcular, esto se hace de la siguiente manera, se introducen los multiplicadores de Lagrange λ^I, θ^I asociados a las constricciones $\Omega_I^{(0)}$ and $\beta_I^{(0)}$ en la Lagrangiana (7.57), entonces se obtiene la siguiente Lagrangiana a primer orden

$$
\mathscr{L}^{(1)} = \varepsilon^{0ab} \eta_{IJ} A_b^I \partial_0 A_a^J + \Lambda \varepsilon^{0ab} \eta_{IJ} e_b^I \partial_0 e_a^J + (\Omega_I^{(0)}) \dot{\lambda}^I + (\beta_I^{(0)}) \dot{\theta}^I - V^{(1)}. \tag{7.61}
$$

Podemos observar, que el potencial simpléctico $V^{(1)} = V^{(0)} \mid_{\Omega_I^{(0)}=0, \beta_I^{(0)}=0} = 0$, esto refleja, que la teoría presenta covarianza general, justo como Relatividad general.
Partiendo de (7.61), se identifica al nuevo conjunto de variables simplécticas $\xi^{(1)a}(x) = \{e_a^I, \lambda^I, A_a^I, \theta^I, \}$ y la uno-forma simpléctica $a^{(1)}{}_a(x) = \{\Lambda \varepsilon^{0ab} e_{Ib}, \Omega_I^{(0)}, \varepsilon^{0ab} A_{Ib}, \beta_I^{(0)}\}$. Mediante la implementación del nuevo conjunto de variables simplécticas, se obtiene la siguiente matriz,

$$
f_{ab}^{(1)}(x,y) =
$$

$$
\begin{pmatrix}
-2\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & -2\Lambda\varepsilon^{0ab}(\eta_{IJ}\partial_b + \varepsilon_{IJK}A_b^K) & 0 & -2\Lambda\varepsilon^{0ab}\varepsilon_{IJK}e_b^K \\
2\Lambda\varepsilon^{0ba}(\eta_{IJ}\partial_a - \varepsilon_{IJK}A_a^K) & 0 & -2\Lambda\varepsilon^{0ba}\varepsilon_{IJK}e_a^K & 0 \\
0 & -2\Lambda\varepsilon^{0ab}\varepsilon_{IJK}e_b^K & -2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & -2\varepsilon^{0ab}(\eta_{IJ}\partial_b + \varepsilon_{IJK}A_b^K) \\
-2\Lambda\varepsilon^{0ba}\varepsilon_{IJK}e_a^K & 0 & 2\varepsilon^{0ba}(\eta_{IJ}\partial_a - \varepsilon_{IJK}A_a^K) & 0
\end{pmatrix} \delta^2(x-y), \tag{7.62}
$$

La matriz $f_{ab}^{(1)}$ es singular y además el sistema no presenta más restricciones, por lo tanto, la no invertibilidad de (7.62) significa que el sistema tiene simetría de norma. Eligiendo las condiciones de norma temporal

$$
\begin{aligned}
A_0^I(x) &= 0,\\
e_0^I(x) &= 0,
\end{aligned}
$$

introduciendo estas condiciones mediante los multiplicadores de Lagrange ϕ_I, α_I en la Lagrangiana

(7.61), entonces se obtiene una nueva Lagrangiana simpléctica,

$$\mathscr{L}^{(2)} = \varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}A_b^I\partial_0 A_a^J + \Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}e_b^I\partial_0 e_a^J + (\Omega_I^{(0)} + \phi_I)\dot{\lambda}^I + (\beta_I^{(0)} + \alpha_I)\dot{\theta}^I. \tag{7.63}$$

Se identifica a partir de (7.63), el nuevo conjunto de variables simplécticas $\xi^{(2)a}(x) = \{e_a^I, \lambda^I, A_a^I, \theta^I, \phi_I, \alpha_I\}$ y la uno-forma simpléctica $a^{(2)}{}_a(x) = \{\Lambda\varepsilon^{0ab}e_{Ib}, \Omega_I^{(0)} + \phi_I, \varepsilon^{0ab}A_{Ib}, \beta_I^{(0)} + \alpha_I, 0, 0\}$. Usando el nuevo conjunto de variables simplécticas, se obtiene la siguiente matriz

$$f_{ab}^{(2)}(x,y) =$$

$$\begin{pmatrix} -2\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & -2\Lambda\varepsilon^{0ab}(\eta_{IJ}\partial_b + \varepsilon_{IJK}A_b^K) & 0 & -2\Lambda\varepsilon^{0ab}\varepsilon_{IJK}e_b^K & 0 & 0 \\ 2\Lambda\varepsilon^{0ba}(\eta_{IJ}\partial_a - \varepsilon_{IJK}A_a^K) & 0 & -2\Lambda\varepsilon^{0ba}\varepsilon_{IJK}e_a^K & 0 & -\delta_I^J & 0 \\ 0 & -2\Lambda\varepsilon^{0ab}\varepsilon_{IJK}e_b^K & -2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & -2\varepsilon^{0ab}(\eta_{IJ}\partial_b + \varepsilon_{IJK}A_b^K) & 0 & 0 \\ -2\Lambda\varepsilon^{0ba}\varepsilon_{IJK}e_a^K & 0 & 2\varepsilon^{0ba}(\eta_{IJ}\partial_a - \varepsilon_{IJK}A_a^K) & 0 & 0 & -\delta_I^J \\ 0 & \delta_J^I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_J^I & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y), \tag{7.64}$$

la matriz $f_{ab}^{(2)}$ no es singular, por lo tanto, se puede calcular la inversa, dicha inversa está dada por

$$[f_{ab}^{(2)}(x,y)]^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\Lambda}\varepsilon_{0ab}\eta^{IJ} & 0 & 0 & 0 & -(\delta_J^I\partial_a + \varepsilon^I{}_{JK}A_a^K) & -\varepsilon^I{}_{JK}e_a^K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_I^J & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{0ab}\frac{1}{2}\eta^{IJ} & 0 & -\Lambda\varepsilon^I{}_{JK}e_a^K & -(\delta_J^I\partial_a + \varepsilon^I{}_{JK}A_a^K) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_I^J \\ (\delta_I^J\partial_b - \varepsilon_I{}^J{}_K A_b^K) & -\delta_J^I & -\Lambda\varepsilon_I{}^J{}_K e_b^K & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_I{}^J{}_K e_b^K & 0 & (\delta_I^J\partial_b - \varepsilon_I{}^J{}_K A_b^K) & -\delta_J^I & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y), \tag{7.65}$$

de la matriz inversa(7.65) es posible identificar los corchetes de FJ, que estarán dados por las entradas de la matriz (7.65)

$$\begin{aligned} \{e_a^I(x), e_b^J(y)\}_{FD} &= \frac{1}{2\Lambda}\varepsilon_{0ab}\eta^{IJ}\delta^2(x-y), \\ \{A_a^I(x), A_b^J(y)\}_{FD} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{0ab}\eta^{IJ}\delta^2(x-y), \\ \{e_a^I(x), \phi_J(y)\}_{FD} &= (\delta_J^I\partial_a - \varepsilon^I{}_{JK}A_a^K)\delta^2(x-y), \\ \{A_a^I(x), \alpha_J(y)\}_{FD} &= (\delta_J^I\partial_a - \varepsilon^I{}_{JK}A_a^K)\delta^2(x-y), \\ \{e_a^I(x), \alpha_J(y)\}_{FD} &= -\varepsilon^I{}_{JK}e_a^K\delta^2(x-y), \\ \{A_a^I(x), \phi_J(y)\}_{FD} &= -\Lambda\varepsilon^I{}_{JK}e_a^K\delta^2(x-y), \\ \{\lambda^I(x), \phi_J(y)\}_{FD} &= \delta_I^J\delta^2(x-y), \\ \{\theta^I(x), \alpha_J(y)\}_{FD} &= \delta_I^J\delta^2(x-y). \end{aligned} \tag{7.66}$$

Es importante señalar, que los corchetes de FJ coinciden con los que se obtienen mediante el formalismo de Dirac y estan reportados en [66](capítulo 3, ec. (66)). Estos resultados también son parte de la contribución de esta tesis y los resulatdos fueron publicados en [66]. Por otra parte, si se introducen los momentos

$$
\begin{aligned}
p^a_I &= \Lambda \varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}e^J_b, \\
\pi^a_I &= \varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}A^J_b,
\end{aligned}
\tag{7.67}
$$

los corchetes de (7.66) adquieren la siguiente estructura,

$$
\begin{aligned}
\{e^I_a(x), e^J_b(y)\}_{FD} &= \frac{1}{2\Lambda}\varepsilon_{0ab}\eta^{IJ}\delta^2(x-y), \\
\{A^I_a(x), A^b_J(y)\}_{FD} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{0ab}\eta^{IJ}\delta^2(x-y), \\
\{e^I_a(x), p^b_J(y)\}_{FD} &= \frac{1}{2}\delta^b_a\delta^I_J\delta^2(x-y), \\
\{A^I_a(x), \pi^b_J(y)\}_{FD} &= \frac{1}{2}\delta^b_a\delta^I_J\delta^2(x-y), \\
\{p^a_J(x), p^b_J(y)\}_{FD} &= \frac{\Lambda}{2}\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\delta^2(x-y), \\
\{\pi^a_I(x), \pi^b_J(y)\}_{FD} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\delta^2(x-y).
\end{aligned}
\tag{7.68}
$$

Se puede notar, que los corchetes de FJ, coinciden con todos los corchetes de Dirac reportados en [66].

Con toda la información que se ha obtenido, se puede realizar el conteo de los grados de libertad, el número de variables dinámicas es 12 (e^I_a, A^I_a) y 12 restricciones dadas por el conjunto $(\Omega^{(0)}_I, \beta^{(0)}_I, A^I_0, e^I_0)$, al realizar el conteo, se puede observar que la teoría tiene cero grados de libertad. Por otra parte, ya para concluir esta sección, se calcularán las transformaciones de norma de la teoría, para obtener las transformaciones de norma se calculan los modos cero de la matriz (7.62), donde los modos están dados por,

$$
\begin{aligned}
(w^{(1)})^T_1 &= (\partial_a\varepsilon^I + \varepsilon^I{}_{JK}A^J_a\varepsilon^K + \varepsilon^I{}_{JK}e^K_a\zeta^J, \varepsilon^I, 0, \zeta^I), \\
(w^{(1)})^T_2 &= (0, \varepsilon^I, \partial_a\zeta^I + \varepsilon^I{}_{JK}A^J_a\zeta^K + \Lambda\varepsilon^I{}_{JK}e^K_a\varepsilon^J, \zeta^I).
\end{aligned}
$$

De acuerdo al formalismo de FJ, los modos cero, $(w^{(1)})^T_1$ y $(w^{(1)})^T_2$ son lo generadores de la transformación infinitesimas de la acción (7.57), y están dados por

$$
\begin{aligned}
\delta e^I_a(x) &= D_a\varepsilon^I + \varepsilon^I{}_{JK} e^K_a \zeta^J, \\
\delta e^I_0(x) &= \partial_0 \varepsilon^I, \\
\delta A^I_a(x) &= D_a\zeta^I + \Lambda\varepsilon^I{}_{JK} e^K_a \varepsilon^J, \\
\delta A^I_0(x) &= \partial_0 \zeta^I.
\end{aligned}
$$

Se llega a la conclusión de que el formalismo de FJ es un método alternativo al algoritmo de Dirac para analizar sistemas singulares. Por otra, el enfoque de FJ tiene la ventaja de evitar la clasificación de las restricciones, esto es importante, ya que muchas veces en el análisis de Dirac, la clasificación de las restricciones es una tarea muy complicada, cabe mencionar que los resultados obtenidos en este capítulo fueron publicados en [67] y es una parte de la contribución de esta tesis.

Capítulo 8

Formalismo de Faddeev-Jackiw aplicado a la acción de Bonzom-Livine

En este capítulo se lleva a cabo el análisis de FJ para una par de acciones; la primera acción que se analiza es la versión "Abeliana" de la acción de Bonzom-Livine. La segunda acción, es la acción de Bonzom-Livine (caso no Abeliano). De hecho, para la teoría Abeliana se va a demostrar que si en el formalismo de Dirac[1] se realiza el análisis sin fijar la norma y se eliminan sólo a las restricciones de segunda clase, entonces es posible reproducir los resultados de Dirac, trabajando con el método de FJ en el espacio de configuración como variables simplécticas. Por otra parte, si en el formalismo de Dirac se realiza el análisis fijando la norma, y se construye los correspondientes corchetes de Dirac, es posible reproducir en el esquema de FJ los resultados obtenidos en el formalismo de Dirac, esto se logra, seleccionando al espacio fase como variables simplécticas. También se demostrará la equivalencia de los corchetes de Dirac con los paréntesis generalizados de FJ.

8.1 Caso Abeliano de la acción BL

En esta sección se estudiará la acción (8.1) que representa la versión Abeliana de (5.11) mediante el formalismo de FJ, en esta sección se trabajará en el espacio de configuración, donde las variables simplécticas están dadas por (A^I_α, e^I_α)

[1]El análisis mediante el formalismo de Dirac del caso Abeliano, de la acción de BL se incluye en el apéndice D.

$$
\begin{aligned}
S^{Abeliana}[A,e] &= \int 2e^I \wedge F_I[A] + \frac{1}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}}\int A^I \wedge dA_I + \frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma} e^I \wedge de_I \\
&= \int \varepsilon^{0ab}\left[\left(\frac{A^I{}_0}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}} + e^I{}_0\right)F_{abI} + \left(\frac{A^I{}_b}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}} + e^I{}_b\right)\dot{A}_{aI} + \left(\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}e^I{}_0 + A^I{}_0\right)T_{abI}\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}e^I{}_b + A^I{}_b\right)\dot{e}_{aI}\right]. \qquad (8.1)
\end{aligned}
$$

La densidad Lagrangiana correspondiente a la acción Abeliana de Bonzom-Livine [BL] (8.1) es dada por

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \varepsilon^{0ab}\left[\left(\frac{A^I_0}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}} + e^I_0\right)F_{abI} + \left(\frac{A^I_b}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}} + e^I_b\right)\dot{A}_{aI} + \left(\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}e^I_0 + A^I_0\right)T_{abI}\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}e^I_b + A^I_b\right)\dot{e}_{aI}\right]. \qquad (8.2)
\end{aligned}
$$

Se utilizara la siguiente convención respecto a la metrica $\delta_{\mu\nu}$=$diag(1,1,1)$ y ε_{012}=$\varepsilon^{012}=1$. $F_{abI} = \partial_a A_{bI} - \partial_b A_{aI}$ y $T_{abI} = \partial_a e_{bI} - \partial_b e_{aI}$.

La densidad Lagrangiana puede escribirse de la siguiente manera

$$
\mathscr{L}^{(0)} = \varepsilon^{0ab}\left[\left(\frac{A^I_b}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}} + e^I_b\right)\dot{A}_{aI} + \left(\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}e^I_b + A^I_b\right)\dot{e}_{aI}\right] - V^{(0)}, \qquad (8.3)
$$

donde el super índice $^{(0)}$ en la Lagrangiana, hace referencia a la Lagrangiana inicial, es decir, la Lagrangiana con la que se empieza el análisis, i.e., tambien puede entenderse de la siguiente manera, como aquella Lagrangiana donde aun no se ha introducido la información de las restricciones presentes en el sistema. El potencial simpléctico está dado por

$$
V^{(0)} = -\varepsilon^{0ab}\left[\left(\frac{A^I_0}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}} + e^I_0\right)F_{abI} + \left(\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}e^I_0 + A^I_0\right)T_{abI}\right]. \qquad (8.4)
$$

La correspondiente ecuación de movimiento simpléctica es

$$
f^{(0)}_{ab}\dot{\xi}^b = \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^a}, \qquad (8.5)
$$

donde $f^{(0)}_{ab}(x,y) = \frac{\delta a_b(y)}{\delta \xi^a(x)} - \frac{\delta a_a(x)}{\delta \xi^b(y)}$. El comjunto de variables simplécticas esta dado por

$$\xi^{(0)a}(x) = \{e^I_a, e^I_0, A^I_a, A^I_0\}, \tag{8.6}$$

y las componentes de la uno forma simpléctica $a^{(0)}{}_a$ son

$$a^{(0)}{}_a(x) = \{\varepsilon^{0ab}(\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}e_{Ib} + A_{Ij+b}), 0, \varepsilon^{0ab}(\frac{1}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}}A_{Ib} + e_{Ib}), 0\}. \tag{8.7}$$

Una vez identificada la uno forma simpléctica, se puede construir la siguiente matriz simpléctica

$$f^{(0)}_{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} -2\varepsilon^{0ab}\Omega\delta_{IJ} & 0 & -2\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ} & 0 & -2\varepsilon^{0ab}\beta\delta_{IJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y), \tag{8.8}$$

Podemos observar que la matriz (8.8) es singular. Esto significa que en el sistema existen restricciones. Los modos cero de la matriz (8.8) están dados por $(v^{(0)}_a)^T_1 = (0, v^{e^I_0}, 0, 0)$ y $(v^{(0)}_a)^T_2 = (0,0,0,v^{A^I_0})$, donde $v^{e^I_0}$ y $v^{A^I_0}$ son funciones arbitrarias. De acuerdo al formalismo de FJ [**?**], los modos cero de la matriz (8.8) sirven para encontrar las restricciones de la teoría

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^2x (v^{(0)})^T_a(x) \frac{\delta}{\delta \xi^{(0)a}(x)} \int d^2y V^{(0)}(\xi), \\ &= \int d^2x v^{e^I_0}(x)\varepsilon^{0ab}[F_{abI} + \Omega T_{abI}], \\ &= \int d^2x v^{e^I_0}(x)\Omega^{(0)}_I. \end{aligned} \tag{8.9}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^2x (v^{(0)})^T_a(x) \frac{\delta}{\delta \xi^{(0)a}(x)} \int d^2y V^{(0)}(\xi), \\ &= \int d^2x v^{A_0}(x)\varepsilon^{0ab}[\beta F_{abI} + T_{abI}], \\ &= \int d^2x v^{A_0}(x)\beta^{(0)}_I. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Se puede observar que las constricciones (8.9,8.10) obtenidas mediante el formalismo de FJ, son iguales a las restricciones secundarias obtenidas mediante el algoritmo de Dirac [68]. Se utiliza el método modificado de Faddeev-Jackiw para calcular si existen más restricciones en la teoría [63,65].

Usando la condición de consistencia análoga al formalismo de Dirac-Bergmann [32]

$$\dot{\Omega}_I^{(0)} = \frac{\partial \Omega_I^{(0)}}{\partial \xi^a} \dot{\xi}^a = 0, \tag{8.11}$$

para deducir nuevas restricciones.

Combinando (8.5) con (8.11),se tiene

$$\begin{cases} f_{ab}^{(0)} \dot{\xi}^b = \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^a}, \\ \frac{\partial \Omega^{(0)}}{\xi^a} \dot{\xi}^a = 0. \end{cases} \tag{8.12}$$

Se puede reformular (8.12) como

$$f_{kb}^{(1)} \dot{\xi}^b = Z_k(\xi), \tag{8.13}$$

donde

$$f_{kb}^{(1)} = \begin{pmatrix} f_{ab}^{(0)} \\ \frac{\partial \Omega^{(0)}}{\partial \xi^a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\Omega\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ} & 0 & 2\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ} & 0 & -2\beta\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\Omega\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ}\partial_a & 0 & 2\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ}\partial_a & 0 \\ 2\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ}\partial_a & 0 & 2\beta\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ}\partial_a & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y), \tag{8.14}$$

y

$$Z_k(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^a} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8.15}$$

Se puede obervar que la matriz $(f_{kb}^{(1)})$ de (8.15) no es una matriz cuadrada, pero tiene modos linealmente independientes $(v^{(1)})_1^T = (\partial_a v^\lambda, v^{e_0^I}, 0, 0, v^\lambda, 0)$ y $(v^{(1)})_2^T = (0, 0, \partial_a v^\alpha, v^{A_0^I}, 0, v^\alpha)$. La Multiplicación de $(f_{kb}^{(1)})$ por $(v^{(1)})_k^T$ da cero, ya que $(v^{(1)})_k^T$ es un vector nulo de la matriz (8.14). Multiplicando de nuevo el modo cero $(v^{(1)})_k^T$ por ambos lados de la ecuación (8.15), nos conduce a más restricciones

$$(v^{(1)})_k^T Z_k = 0. \tag{8.16}$$

Sustituyendo $\Omega^{(0)} = 0$ en la ecuación (8.16), se obtiene

$$(v^{(1)})^T_k Z_k \mid_{\Omega^{(0)}=0} = 0, \tag{8.17}$$

Tal sustitución garantiza que las restricciones obtenidas no aparecerán en el siguiente cálculo. Si la ecuación (8.17) es una identidad, entonces, no existen más restricciones. Sin embargo, si la ecuación (8.17) no es una identidad, se tiene

$$\Omega^{(1)} = (v^{(1)})^T_k Z_k = 0, \tag{8.18}$$

que es una constricción secundaria en el formalismo de FJ. De manera similar, se introduce la condición de consistencia

$$\dot{\Omega}^{(1)} = \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial \xi^a} \dot{\xi}^a = 0, \tag{8.19}$$

Con la ayuda de estas ecuaciones uno detecta paso a paso si hay más restricciones, donde el proceso finaliza, hasta que no haya nuevas restricciones y se obtenga la identidad como en el caso de la ecuación (8.17). Se prueba que la ecuación (8.17) en el modelo que se está analizando es una identidad, esto quiere decir, que no hay nuevas restricciones y el procedimiento de implementar la condición de consistencia para obtener nuevas restricciones finaliza.

Luego, en el siguiente paso, se introducen las restricicones (8.9)(8.10) mediante los los multiplicadores de Lagrange (λ^I, ρ^I), en la Lagrangiana (8.3) para construir una nueva

$$\mathscr{L}^{(1)} = \varepsilon^{0ab}\left[\left(\frac{A^I_b}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}} + e^I_b\right)\dot{A}_{aI} + \left(\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma} e^I_b + A^I_b\right)\dot{e}_{aI}\right] + \Omega^{(0)}_I \dot{\lambda}^I + \beta^{(0)}_I \dot{\rho}^I - V^{(1)}, \tag{8.20}$$

donde $V^{(1)} = V^{(0)} \mid_{\Omega^{(0)}_I = 2\varepsilon^{0ab}(\partial_a A_{bI} + \Omega\partial_a e_{bI}) = 0, \beta^{(0)}_I = 2\varepsilon^{0ab}(\beta\partial_a A_{bI} + \partial_a e_{bI}) = 0} = 0$, el potencial simpléctico en la etapa final de las iteraciones reflejan la covarianza general de la teoría, al igual que en RG.

También se considera λ^I y ρ^I como variables simplécticas. Las variables simplécticas a primer orden y las componentes de la nueva uno forma simpléctica están dados por

$$\begin{aligned}
\xi^{(1)a}(x) &= \{e^I_a, \lambda^I, A^I_a, \rho^I\}, \\
a^{(1)}{}_a(x) &= \{\varepsilon^{0ab}(\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma} e_{Ib} + A_{Ij}), 2\varepsilon^{0ab}(\partial_a A_{bI} + \Omega\partial_a e_{bI}), \varepsilon^{0ab}(\frac{1}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}} A_{Ib} + e_{Ib}), 2\varepsilon^{0ab}(\beta\partial_a A_{bI} + \partial_a e_{bI})\}.
\end{aligned} \tag{8.21}$$

La forma explicita de la nueva matriz simpléctica es

$$f^{(1)}_{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} -2\varepsilon^{0ab}\Omega\delta_{IJ} & -2\varepsilon^{0ab}\Omega\delta_{IJ}\partial_b & -2\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ} & -2\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ}\partial_b \\ 2\varepsilon^{oba}\Omega\delta_{IJ}\partial_a & 0 & 2\varepsilon^{oba}\delta_{IJ}\partial_a & 0 \\ -2\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ} & -2\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ}\partial_b & -2\varepsilon^{0ab}\beta\delta_{IJ} & -2\varepsilon^{0ab}\beta\delta_{IJ}\partial_b \\ 2\varepsilon^{oba}\delta_{IJ}\partial_a & 0 & 2\varepsilon^{oba}\beta\delta_{IJ}\partial_a & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y). \quad (8.22)$$

La matriz (8.22) es todavía singular. Además, no existe la posibilidad de obtener nuevas restricciones, debido a que $V^{(1)} = 0$. Por lo tanto debidos a las consideraciones hechas en el capítulo 6 pag. 73, este sistema presenta simetría de norma. Debido a que el sistema presenta simetría de norma, se tiene que que elegir alguna condición de norma para poder invertir la matriz simpléctica (8.22). Se elige la siguiente norma $e^I_0 = 0$ y $A^I_0 = 0$, para lo cual se introducen los siguientes multiplicadores de Lagrange ϕ_I y θ_I para construir una nueva Lagrangiana

$$\mathscr{L}^{(2)} = \varepsilon^{0ab}\left[\left(\frac{A^I_b}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}} + e^I_b\right)\dot{A}_{aI} + \left(\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}e^I_b + A^I_b\right)\dot{e}_{aI}\right] + (\Omega^{(0)}_I + \theta_I)\dot{\lambda}^I + (\beta^{(0)}_I + \alpha_I)\dot{\rho}^I. \quad (8.23)$$

Las variables simplécticas de segundo orden y las componentes de la nueva uno forma simpléctica "a" están dadas por

$$\begin{aligned} \xi^{(2)i}(x) &= \{e^I_a, \lambda^I, \theta_I, A^I_a, \rho^I, \alpha_I\}, \\ a^{(2)}{}_a(x) &= \{\varepsilon^{0ab}(\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}e_{Ib} + A_{Ib}), 2\varepsilon^{0ab}(\partial_a A_{bI} + \Omega\partial_a e_{bI}) + \theta_I, 0, \varepsilon^{0ab}(\frac{A_{Ib}}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}} + e_{Ib}), \\ &\quad 2\varepsilon^{0ab}(\beta\partial_a A_{bI} + \partial_a e_{bI}) + \alpha_I, 0\}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

A partir de la información contenida en (8.24), se obtiene la nueva matriz simpléctica

$$f^{(2)}_{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} -2\varepsilon^{0ab}\Omega\delta_{IJ} & \varepsilon^{0ab}\Omega\delta_{IJ}\partial_b & 0 & -2\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ} & 2\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ}\partial_b & 0 \\ 2\Omega\varepsilon^{oba}\delta_{IJ}\partial_a & 0 & -\delta^J{}_I & 2\varepsilon^{oba}\delta_{IJ}\partial_a & 0 & 0 \\ 0 & \delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ} & 2\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ}\partial_b & 0 & -2\varepsilon^{0ab}\beta\delta_{IJ} & 2\varepsilon^{0ij\beta\delta_{IJ}}\partial_b & 0 \\ 2\varepsilon^{oba}\delta_{IJ}\partial_b & 0 & 0 & 2\varepsilon^{oba}\beta\delta_{IJ}\partial_a & 0 & -\delta^J{}_I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^I{}_b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta^2(x-y), \tag{8.25}$$

las derivadas parciales se deben tomar respecto a la variable x. Despues de realizar un cálculo tedioso para determinar si la matriz (8.25) es o no singular, se llega al resultado de que la matriz (8.25) es no singular, y entonces podemos deducir la matriz inversa, la cual está dada por

$$[f^{(2)}_{ab}(x,y)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2(\beta\Omega-1)}\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ} & 0 & \delta^I_J\partial_a & -\frac{1}{2(\beta\Omega-1)}\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 \\ \delta^J_I\partial_a & -\delta^J_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2(\beta\Omega-1)}\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ} & 0 & 0 & \frac{\Omega}{2(\beta\Omega-1)}\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ} & 0 & \delta^I_J\partial_a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^I_J \\ 0 & 0 & 0 & \delta^J_I\partial_a & -\delta^J_I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta^2(x-y). \tag{8.26}$$

Por lo tanto, a partir de (8.26) es posible identificar los siguientes corchetes generalizados de FJ [41]

$$
\begin{aligned}
\{e_a^I(x), e_b^J(y)\}_{FD} &= [f_{11}^{(2)}(x,y)]^{-1} = \frac{\beta}{2(\Omega\beta-1)}\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ}\delta^2(x-y) = \frac{\gamma}{2\sqrt{|\Lambda|}(s-\gamma^2)}\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ}\delta^2(x-y),\\
\{A_a^I(x), A_b^J(y)\}_{FD} &= [f_{44}^{(2)}(x,y)]^{-1} = \frac{\Omega}{2(\Omega\beta-1)}\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ}\delta^2(x-y) = \frac{s\sqrt{|\Lambda|}\gamma}{2(s-\gamma^2)}\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ}\delta^2(x-y),\\
\{A_a^I(x), e_b^J(y)\}_{FD} &= [f_{41}^{(2)}(x,y)]^{-1} = \frac{1}{2(1-\Omega\beta)}\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ}\delta^2(x-y) = -\frac{\gamma^2}{2(s-\gamma^2)}\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ}\delta^2(x-y).
\end{aligned}
\tag{8.27}
$$

Donde Ω y β son definidos como

$$
\Omega = \frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}, \qquad \beta = \frac{1}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}}.
$$

Es importante comentar, que los corchetes generalizados de FJ coinciden con los obtenidos por medio del formalismo de Dirac que se encuentran en el apéndice D. Hasta este punto, se tienen los corchetes generalizados de FJ solamente entre las variables del espacio de configuraciones, por lo tanto, no se tiene aun la estructura completa de los corchetes que se obtienen mediante el formalismo de Dirac. Entonces para poder solucionar esto, y poder obtener apartir de los corchetes generalizados de FJ toda la estructura de los corchetes que se obtienen mediante el formalismo de Dirac, se procede de la siguiente manera, si hacemos una redefinición de los campos mediante la introducción de los momentos dados de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
p_I^a &= \varepsilon^{0ab}(A_{bI} + \Omega e_{bI}),\\
\pi_I^a &= \varepsilon^{0ab}(e_{bI} + \beta A_{bI}).
\end{aligned}
\tag{8.28}
$$

Los corchetes generalizados de FJ (8.27) nos sirven de base para obtener la siguiente estructura

$$
\begin{aligned}
\{e^I_a(x), p^b_J(y)\}_{FD} &= \frac{1}{2}\delta^b_a\delta^I_J\delta^2(x-y),\\
\{p^a_J(x), p^b_J(y)\}_{FD} &= \frac{\Omega}{2}\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ}\delta^2(x-y),\\
\{A^I_a(x), \pi^b_J(y)\}_{FD} &= \frac{1}{2}\delta^b_a\delta^I_J\delta^2(x-y),\\
\{pi^a_I(x), \pi^b_J(y)\}_{FD} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ}\delta^2(x-y),\\
\{\pi^a_I(x), \pi^b_J(y)\}_{FD} &= \frac{\beta}{2}\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ}\delta^2(x-y).
\end{aligned}
\tag{8.29}
$$

8.2 Coordenadas canónicas como variables simplécticas

En está sección se estudiara la acción (8.1) mediante el formalismo de FJ, pero ahora se trabajara con variables del espacio fase como variables simplécticas [63]. De esta manera, a partir de la ecuación $(\pi^\alpha_I, p^\alpha_I)$ se puede identificar a los momentos canónicos conjugados de (A^I_α, e^I_α)

$$
\begin{aligned}
S^{Abelian}[A,e] &= \int 2e^I \wedge F_I[A] + \frac{1}{\sqrt{|\Lambda|}}\int A^I \wedge dA_I + s\sqrt{|\Lambda|}e^I \wedge de_I\\
&= \int \varepsilon^{0ab}\left[\left(\frac{A^I{}_0}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}} + e^I{}_0\right)F_{abI} + \left(\frac{A^I{}_b}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}} + e^I{}_b\right)\dot{A}_{aI} + \left(\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}e^I{}_0 + A^I{}_0\right)T_{abI}\right.\\
&\quad \left. + \left(\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}e^I{}_b + A^I{}_b\right)\dot{e}_{aI}\right].
\end{aligned}
$$

La densidad Lagrangiana del modelo abeliano de [BL] esta dada por

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \varepsilon^{0ab}\left[\left(\frac{A^I_0}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}} + e^I_0\right)F_{abI} + \left(\frac{A^I_b}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}} + e^I_b\right)\dot{A}_{aI} + \left(\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}e^I_0 + A^I_0\right)T_{abI}\right.\\
&\quad \left. + \left(\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}e^I_b + A^I_b\right)\dot{e}_{aI}\right].
\end{aligned}
\tag{8.30}
$$

Se utiliza la siguiente convención $\delta_{\mu\nu}{=}diag(1,1,1)$ y $\varepsilon_{012}{=}\varepsilon^{012} = 1$. $F_{abI} = \partial_a A_{bI} - \partial_b A_{aI}$ y $T_{abI} = \partial_a e_{bI} - \partial_b e_{aI}$.

La densidad Lagrangiana es reescrita de la siguiente manera

$$\mathscr{L}^{(0)} = \varepsilon^{0ab}\left[\left(\frac{A^I_b}{\gamma\sqrt{|\,\Lambda\,|}} + e^I_b\right)\dot{A}_{aI} + \left(\frac{s\sqrt{|\,\Lambda\,|}}{\gamma}e^I_b + A^I_b\right)\dot{e}_{aI}\right] - V^{(0)}, \tag{8.31}$$

donde el super índice $^{(0)}$ significa, que es la lagrangiana inicial dada por (8.30) y solo se ha reescrito de manera conveniente para la implementación del formalismo de FJ. El potencial simpléctico está dado por

$$V^{(0)} = -\varepsilon^{0ab}\left[\left(\frac{A^I_0}{\gamma\sqrt{|\,\Lambda\,|}} + e^I_0\right)F_{abI} + \left(\frac{s\sqrt{|\,\Lambda\,|}}{\gamma}e^I_0 + A^I_0\right)T_{abI}\right]. \tag{8.32}$$

Los momentos canónicos son obetnidos a partir de

$$\Pi^{\alpha}{}_I = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{A}_{\alpha}{}^I}, \qquad \pi^{\alpha}{}_I = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{e}^I{}_{\alpha}}.$$

la forma explicita de los momentos canónicos son

$$\begin{aligned} p^a_I &= \varepsilon^{0ab}(A_{bI} + \Omega e_{bI}), \\ \pi^a_I &= \varepsilon^{0ab}(e_{bI} + \beta A_{bI}). \end{aligned} \tag{8.33}$$

De las ecuaciones 8.33 se despejan $(A^I_{\alpha}, e^I_{\alpha})$ y se reescriben dichas cantidades en términos de los momentos canónicos

$$\begin{aligned} \varepsilon^{0ab}e_{bI} &= \frac{s}{s-\gamma^2}(\beta p^a_J - \pi^a_J), \\ \varepsilon^{0ab}A_{bI} &= \frac{s}{s-\gamma^2}(\Omega\pi^a_J - p^a_J). \end{aligned} \tag{8.34}$$

Entonces, se tiene

$$\pi^a_I\dot{A}^I_a + p^a_I\dot{e}^I_a - \mathscr{L} = -2A^I_0\partial_a\pi^a_I - 2e^I_0\partial_a p^a_I. \tag{8.35}$$

Por lo tanto, la densidad Lagrangiana de orden cero es

$$\mathscr{L}^{(0)} = \pi^a_I \dot{A}^I_a + p^a_I \dot{e}^I_a - V^{(0)}. \tag{8.36}$$

El potencial simpléctic $V^{(0)}$ está expresado como

$$V^{(0)} = -2A^I_0 \partial_a \pi^a_I - 2e^I_0 \partial_a p^a_I. \tag{8.37}$$

Una véz identificados, la densidad Lagrangiana y el potencial simpléctico, el siguiente paso es escribir la correspondiente ecuación de movimiento simpléctica que está dada por

$$f^{(0)}_{ab} \dot{\xi}^b = \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^a}. \tag{8.38}$$

donde $f^{(0)}_{ab}(x,y) = \frac{\delta a_b(y)}{\delta \xi^a(x)} - \frac{\delta a_a(x)}{\delta \xi^b(y)}$. El conjunto de variables simplécticas provenientes de la Lagrangiana a orden cero (8.36), son

$$\xi^{(0)a}(x) = \{e^I_a, p^a_I, e^I_0, A^I_a, \pi^a_I, A^I_0\}. \tag{8.39}$$

Las componentes de la uno forma simpléctica son

$$a^{(0)}{}_a(x) = \{p^a_I, 0, 0, \pi^a_I, 0, 0\}. \tag{8.40}$$

Una véz identificadas las variables simplécticas y las componentes de la uno forma, se calcula la matriz simpléctica (8.38), dicha matriz tiene la siguiente forma

$$f^{(0)}_{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^a{}_b \delta^J{}_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta^b{}_a \delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^a{}_b \delta^J{}_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^a{}_b \delta^I{}_J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y), \tag{8.41}$$

Se observa que la matriz (8.41) es singular. Los modos cero de la matriz (8.41) son $(v^{(0)}_a)^T_1 =$

$(0,0,v^{e_0^I},0,0,0)$ y $(v_a^{(0)})_2^T = (0,0,0,0,0,v^{A_0^I})$, donde $v^{e_0^I}$ y $v^{A_0^I}$ son funciones arbitrarias. De acuerdo con el método de FJ [63], los modos cero sirven para poder obtener las contricciones primarias de la teoría

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^2x (v^{(0)})_a^T(x) \frac{\delta}{\delta\xi^{(0)i}(x)} \int d^2y V^{(0)}(\xi), \\ &= \int d^2x v^{e_0^I}(x)[-2\partial_a p_I^a], \\ &\to \Omega_I^{(0)} := -2\partial_a p_I^a = 0, \end{aligned} \tag{8.42}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^2x (v^{(0)})_a^T(x) \frac{\delta}{\delta\xi^{(0)i}(x)} \int d^2y V^{(0)}(\xi), \\ &= \int d^2x v^{A_0}(x)[-2\partial_a \pi_I^a], \\ &\to \Theta_I^{(0)} := -2\partial_a \pi_I^a = 0, \end{aligned} \tag{8.43}$$

se puede observar que las restricciones (8.42) y (8.43), son iguales a las restricciones secundarias obtenidas mediante el formalismo de Dirac.

Se utiliza el formalismo modificado de FJ para determinar si el sistema presenta más restricciones [63, 65]. Usando la condición de consistencia descrita en [63] análoga al metodo Dirac-Bergmann [32]

$$\dot{\Omega}_I^{(0)} = \frac{\partial \Omega_I^{(0)}}{\partial \xi^a} \dot{\xi}^a = 0, \tag{8.44}$$

para deducir nuevas constricciones.

Combinando la ecuación (8.38) con la ecuación (8.44), se obtiene

$$\begin{cases} f_{ab}^{(0)} \dot{\xi}^b = \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^a}, \\ \frac{\partial \Omega^{(0)}}{\xi^a} \dot{\xi}^a = 0. \end{cases} \tag{8.45}$$

Se puede reformular la ecuación (8.45) como

$$f_{cd}^{(1)} \dot{\xi}^d = Z_c(\xi), \tag{8.46}$$

donde la matriz simpléctica está dada por

$$f^{(1)}_{cd} = \begin{pmatrix} f^{(0)}_{ab} \\ \frac{\partial \Omega^{(0)}}{\partial \xi^a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^a{}_b\delta^J{}_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta^b{}_a\delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^a{}_b\delta^J{}_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^b{}_a\delta^J{}_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\partial_b\delta^J{}_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\partial_b\delta^J{}_I & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y), \tag{8.47}$$

y

$$Z_c(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^a} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8.48}$$

los modos cero de la matriz $(f^{(1)}_{kj})$ están dados por $(v^{(1)})^T_1 = (2\partial_a v^\lambda, 0, v^{e^I_0}, 0, 0, 0, v^\lambda, 0)$ y $(v^{(1)})^T_2 = (0, 0, 0, 2\partial_a v^\alpha, 0, v^{A^I_0}, 0, v^\alpha)$. Estos modos cero, se utilizan con el fin de obtener más restricciones. De hecho, para realizar el cálculo de la siguiente restricción se utiliza la contracción de cada modo cero con la matriz dada por (8.48) [65]

$$(v^{(1)})^T_c Z_c = 0. \tag{8.49}$$

Sustituyendo $\Omega^{(0)} = 0$ en la ecuación (8.49), se obtiene

$$(v^{(1)})^T_c Z_c \mid_{\Omega^{(0)}=0} = 0. \tag{8.50}$$

Tal sustitución garantiza que las restricciones obtenidas no aparecerán en el siguiente cálculo. Si la ecuación (8.49) es una igualdad, entonces, no existen más restricciones. Sin embargo, si la ecuación (8.49) no es una igualdad, se tiene

$$\Omega^{(1)} = (v^{(1)})^T_c Z_c = 0, \tag{8.51}$$

en el formalismo de FJ la restricción (8.51) se le conoce como restricción secuendaria. De manera similar, se introduce la condición de consistencia

$$\dot{\Omega}^{(1)} = \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial \xi^a}\dot{\xi}^a = 0. \tag{8.52}$$

Con la ayuda de estas ecuaciones uno detecta paso a paso si hay más restricciones, donde el proceso finaliza, hasta que no haya nuevas restricciones y se obtenga la igualdad como en el caso de la ecuación (8.49). Se prueba que la ecuación (8.49) en el modelo que se está analizando es una igualdad, esto quiere decir, que no hay nuevas restricciones y el procedimiento de implementar la condición de consistencia para obtener nuevas restricciones finaliza.

Luego, en el siguiente paso, se introducen las restricicones (8.42),(8.43) mediante los multiplicadores Lagrange (λ^I, ρ^I) en la Lagrangiana (8.36) para construir una nueva Lagrangiana

$$\mathscr{L}^{(1)} = \pi_I^a \dot{A}_a^I + p_I^a \dot{e}_a^I + (2\partial_a p_I^a)\dot{\lambda}^I + (2\partial_a \pi_I^a)\dot{\rho}^I - V^{(1)}, \tag{8.53}$$

donde $V^{(1)} = V^{(0)} \mid_{\partial_a \pi_I^a = 0, \partial_a p_I^a = 0} = 0$, el potencial simplćtico en la etapa final de las iteraciones reflejan la covarianza general de la teoría, al igual que en RG.

De acuerdo al formalimos de FJ, se deben considerar a λ^I y ρ^I como variables simplécticas. Las variables simplécticas a primer orden y las componentes de la nueva uno forma simpléctica están dados por

$$\begin{aligned} \xi^{(1)a}(x) &= \{e_a^I, p_I^a, \lambda^I, A_a^I, \pi_I^a, \rho^I\}, \\ a^{(1)}{}_a(x) &= \{p_I^a, 0, 2\partial_a p_I^a, \pi_I^a, 0, 2\partial_a \pi_I^a\}. \end{aligned} \tag{8.54}$$

La estructura de la nueva matriz simpléctica es

$$f_{ab}^{(1)}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^a{}_b \delta^J{}_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta^b{}_a \delta^I{}_J & 0 & -2\delta^I{}_J \partial_a^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\delta^J{}_I \partial_b^x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^a{}_b \delta^J{}_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^b{}_a \delta^I{}_J & 0 & -2\delta^I{}_J \partial_a^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\delta^J{}_I \partial_b^x & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y), \tag{8.55}$$

la matriz (8.55) es aún singular. Además, no existe la posibilidad de obtener nueva restricciones, debido a que $V^{(1)} = 0$. Por lo tanto este sistema presenta simetría de norma. Debido a que el sistema presenta simetría de norma, se tiene que que elegir alguna condición de norma para poder invertir la matriz simpléctica (8.55). Se elige la siguiente norma $\partial^a e^I_a = 0$ y $\partial^a A^I_a = 0$, para lo cual se introducen los siguientes multiplicadores de Lagrange ϕ_I y θ_I para construir una nueva Lagrangiana

$$\mathscr{L}^{(2)} = \pi^a_I \dot{A}^I_a + p^a_I \dot{e}^I_a + (2\partial_a p^a_I)\dot{\lambda}^I + (2\partial_a \pi^a_I)\dot{\rho}^I + (\partial^a e^I_a)\dot{\phi}_I + (\partial^a A^I_a)\dot{\theta}_I. \tag{8.56}$$

Las variables simplécticas de segundo orden y las componentes de la nueva uno forma simpléctica están dadas por

$$\begin{aligned} \xi^{(2)a}(x) &= \{e^I_a, p^a_I, \lambda^I, \phi_I, A^I_a, \pi^a_I, \rho^I, \theta_I\}, \\ a^{(2)}{}_a(x) &= \{p^a_I, 0, 2\partial_a p^a_I, \partial^a e^I_a, \pi^a_I, 0, 2\partial_a \pi^a_I, \partial^a A^I_a\}. \end{aligned} \tag{8.57}$$

A partir de la información contenida en (8.57), se construye la nueva matriz simpléctica

$$f^{(2)}_{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^a{}_b\delta^J{}_I & 0 & -\delta^J{}_I\partial^x_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta^b{}_a\delta^I{}_J & 0 & -2\delta^I{}_J\partial^x_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\delta^J{}_I\partial^x_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta^I{}_J\partial^x_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^a{}_b\delta^J{}_I & 0 & -\delta^J{}_I\partial^x_a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^b{}_a\delta^I{}_J & 0 & -2\delta^I{}_J\partial^x_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\delta^J{}_I\partial^x_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^I{}_J\partial^x_b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times\, \delta^2(x-y). \tag{8.58}$$

Las derivadas parciales se deben tomar respecto a la variable x. Despues de realizar un cálculo algo tedioso para determinar si la matriz (8.58) es o no singular, se llega al resultado de que La matriz (8.58) es no singular, y entonces podemos deducir la matriz inversa, la cual está dada por

$$[f_{ab}^{(2)}(x,y)]^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix}
0 & \delta^I{}_J(\delta^b{}_a - \frac{\partial_a\partial^b}{\nabla^2}) & 0 & -\delta^I{}_J\frac{\partial_a}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\delta^J{}_I(\delta^a{}_b - \frac{\partial_b\partial^a}{\nabla^2}) & 0 & -\frac{1}{2}\delta^J{}_I\frac{\partial^a}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{2}\delta^I{}_J\frac{\partial^b}{\nabla^2} & 0 & -\delta^I{}_J\frac{1}{2}\frac{1}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\delta^J{}_I\frac{\partial_b}{\nabla^2} & 0 & \frac{1}{2}\delta^J{}_I\frac{1}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^I{}_J(\delta^b{}_a - \frac{\partial_a\partial^b}{\nabla^2}) & 0 & -\delta^I{}_J\frac{\partial_a}{\nabla^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^J{}_I(\delta^a{}_b - \frac{\partial_b\partial^a}{\nabla^2}) & 0 & -\frac{1}{2}\delta^J{}_I\frac{\partial^a}{\nabla^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\delta^I{}_J\frac{\partial^b}{\nabla^2} & 0 & -\frac{1}{2}\delta^I{}_J\frac{1}{\nabla^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^J{}_I\frac{\partial_b}{\nabla^2} & 0 & \frac{1}{2}\delta^J{}_I\frac{1}{\nabla^2} & 0
\end{pmatrix}$$

$$\times\,\delta^2(x-y). \tag{8.59}$$

Por lo tanto, a partir de (8.59), es posible identificar los siguientes corchetes generalizados de FJ [41]

$$\{\xi_a^{(2)}(x), \xi_b^{(2)}(y)\}_{FD} = [f_{ab}^{(2)}(x,y)]^{-1}. \tag{8.60}$$

Los corchetes de FJ entre las variables simplécticas, son

$$\{e_a^I(x), p_J^b(y)\}_{FD} = [f_{12}^{(2)}(x,y)]^{-1} = \delta^I{}_J(\delta^b{}_a - \frac{\partial_a\partial^b}{\nabla^2})\delta(x-y), \tag{8.61}$$

$$\{A_a^I(x), \pi_J^b(y)\}_{FD} = [f_{56}^{(2)}(x,y)]^{-1} = \delta^I{}_J(\delta^b{}_a - \frac{\partial_a\partial^b}{\nabla^2})\delta(x-y), \tag{8.62}$$

$$\{e_a^I(x), e_b^J(y)\}_{FD} = [f_{11}^{(2)}(x,y)]^{-1} = 0, \tag{8.63}$$

$$\{A_a^I(x), A_b^J(y)\}_{FD} = [f_{55}^{(2)}(x,y)]^{-1} = 0, \tag{8.64}$$

$$\{p_I^a(x), p_J^b(y)\}_{FD} = [f_{22}^{(2)}(x,y)]^{-1} = 0, \tag{8.65}$$

$$\{\pi_I^a(x), \pi_J^b(y)\}_{FD} = [f_{66}^{(2)}(x,y)]^{-1} = 0, \tag{8.66}$$

$$\{p_I^a(x), \lambda^J(y)\}_{FD} = [f_{23}^{(2)}(x,y)]^{-1} = -\frac{1}{2}\delta_I^J \frac{\partial^a}{\nabla^2}\delta(x-y), \tag{8.67}$$

$$\{\pi_I^a(x), \rho^J(y)\}_{FD} = [f_{67}^{(2)}(x,y)]^{-1} = -\frac{1}{2}\delta_I^J \frac{\partial^a}{\nabla^2}\delta(x-y), \tag{8.68}$$

$$\{\lambda^I(x), \phi_J(y)\}_{FD} = [f_{34}^{(2)}(x,y)]^{-1} = -\frac{1}{2}\delta_J^I \frac{1}{\nabla^2}\delta(x-y), \tag{8.69}$$

$$\{\rho^I(x), \theta_J(y)\}_{FD} = [f_{78}^{(2)}(x,y)]^{-1} = -\frac{1}{2}\delta_J^I \frac{1}{\nabla^2}\delta(x-y), \tag{8.70}$$

$$\{e_a^I(x), \phi_J(y)\}_{FD} = [f_{14}^{(2)}(x,y)]^{-1} = -\delta_J^I \frac{\partial_a}{\nabla^2}\delta(x-y). \tag{8.71}$$

$$\{A_a^I(x), \theta_J(y)\}_{FD} = [f_{58}^{(2)}(x,y)]^{-1} = -\delta_J^I \frac{\partial_a}{\nabla^2}\delta(x-y). \tag{8.72}$$

El resto de los corchetes generalizados de FJ son cero. Comparando (8.61)-(8.66) con el resultado obtenido mediante el método de Dirac (ver apéndice E), se obtiene

$$\{e_a^I(x), p_J^b(y)\}_{FD} = [f_{12}^{(2)}(x,y)]^{-1} = \delta^I{}_J(\delta^b{}_a - \frac{\partial_a\partial^b}{\nabla^2})\delta(x-y) = \{e_a^I(x), p_J^b(y)\}_D, \tag{8.73}$$

$$\{e_a^I(x), e_b^J(y)\}_{FD} = [f_{11}^{(2)}(x,y)]^{-1} = 0 = \{e_a^I(x), e_b^J(y)\}_D, \tag{8.74}$$

$$\{p_I^a(x), p_J^b(y)\}_{FD} = [f_{22}^{(2)}(x,y)]^{-1} = 0 = \{p_I^a(x), p_J^b(y)\}_D. \tag{8.75}$$

$$\{A_a^I(x), \pi_J^b(y)\}_{FD} = [f_{56}^{(2)}(x,y)]^{-1} = \delta^I{}_J(\delta^b{}_a - \frac{\partial_a\partial^b}{\nabla^2})\delta(x-y) = \{A_a^I(x), \pi_J^b(y)\}_D, \tag{8.76}$$

$$\{A_a^I(x), A_b^J(y)\}_{FD} = [f_{55}^{(2)}(x,y)]^{-1} = 0 = \{A_a^I(x), A_b^J(y)\}_D, \tag{8.77}$$

$$\{\pi_I^a(x), \pi_J^b(y)\}_{FD} = [f_{66}^{(2)}(x,y)]^{-1} = 0 = \{\pi_I^a(x), \pi_J^b(y)\}_D. \tag{8.78}$$

8.3 Caso no Abeliano de la acción BL

En este capítulo se realizará el análisis de la acción de BL dada por (5.11) mediante el formalismo de FJ.

La acción propuesta por BL es dada por (5.11) [39]

$$S_\gamma[A,e] = S'[A,e] + \frac{1}{\gamma}\widetilde{S}[A,e]. \tag{8.79}$$

Al realizar la descomposición del espacio tiempo de la acción (8.79), se puede identificar la siguiente densidad Lagrangiana de orden cero dada por

$$\mathscr{L}^{(0)} = 2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}e_b^I\dot{A}_a^J + \beta\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}A_b^I\dot{A}_a^J + \Omega\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}e_b^I\dot{e}_a^J - V^{(0)}, \tag{8.80}$$

donde

$$V^{(0)} = -2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\left[(e_0^I + \beta A_0^I)(F_{ab}^J + s\frac{|\Lambda|}{2}\varepsilon^J{}_{KL}e_a^K e_b^L) + (\Omega e_0^I + A_0^I)D_a e_b^J\right]. \tag{8.81}$$

Se definen los siguientes parámetros Ω y β

$$\Omega = \frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma}, \qquad \beta = \frac{1}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}}. \tag{8.82}$$

Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange obtenidas de (8.80) son

$$f^{(0)}_{ab}\dot{\xi}^b = \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^a}, \tag{8.83}$$

donde la matriz simpléctica $f^{(0)}_{ab}$ tiene la siguiente estructura

$$f^{(0)}_{ab}(x,y) = \frac{\delta \mathrm{a}_b(y)}{\delta \xi^a(x)} - \frac{\delta \mathrm{a}_a(x)}{\delta \xi^b(y)}. \tag{8.84}$$

Se puede observar, que de la Lagrangiana (8.80) es posible identificar las siguientes variables simplécticas $\xi^{(0)a}(x) = \{e^I_a, e^I_0, A^I_a, A^I_0\}$ y las componentes de la 1-forma son $\mathrm{a}^{(0)}{}_a(x) = \{\Omega\varepsilon^{0ab}e_{bI}, 0, 2\varepsilon^{0ab}e_{bI} + \beta\varepsilon^{0ab}A_{bI}, 0\}$.

El conjunto de variables simplécticas es representado por $\xi^{(0)a}$ y las componentes de la 1-forma simpléctica $\mathrm{a}^{(0)}{}_a$. Es importante comentar, que en el formalismo de FJ, se tiene la libertad de elegir como variables simplécticas a las variables de configuración o a las variables del espacio fase. La elección del conjunto de variables simplécticas, ya sea del espacio de configuración o del espacio fase, conlleva a la construcción de diferentes corchetes en el formalismo de FJ y para establecer la equivalencia con los corchetes de Dirac, se debe tener en cuenta algunas consideraciones que se mencionarán más adelante de esta sección.

Cómo se mencionó anteriormente, se debe tener en cuenta algunas consideraciones para establecer la equivalencia entre los formalismos de FJ y Dirac. Por ejemplo, si se seleccionan a las variables del espacio de configuración como variables simplécticas en el formalismo de FJ, entonces, en el formalismo de Dirac se deben eliminar las restricciones de segunda clase, manteniendo solo las restricciones de primera clase, esto equivale en el algoritmo de Dirac a no fijar la norma, al hacer esto, se puede demostrar que los corchetes de Dirac coinciden con los obtenidos en el método de FJ. Por lo tanto, usando el conjunto de variables simplécticas, la matriz (8.84) tiene la forma

$$f_{ab}^{(0)}(x,y) = \begin{pmatrix} f_{e_a^I,e_b^J} & f_{e_a^I,e_0^J} & f_{e_a^I,A_b^J} & f_{e_a^I,A_0^J} \\ f_{e_0^I,e_b^J} & f_{e_0^I,e_0^J} & f_{e_0^I,A_b^J} & f_{e_0^I,A_0^J} \\ f_{A_a^I,e_b^J} & f_{A_a^I,e_0^J} & f_{A_a^I,A_b^J} & f_{A_a^I,A_0^J} \\ f_{A_0^I,e_b^J} & f_{A_0^I,e_0^J} & f_{A_0^I,A_b^J} & f_{A_0^I,A_0^J} \end{pmatrix} \delta^2(x-y),$$

desarollando las componentes de la matriz anterior, se obtiene

$$f_{ab}^{(0)}(x,y) = \begin{pmatrix} -2\Omega\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & 0 & -2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & 0 & -2\beta\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y), \qquad (8.85)$$

la matriz simpléctica $f_{ab}^{(0)}$, representa una matriz singular de dimensión $[18\times 18]$. El hecho de que la matriz (8.85) sea singular, implica que en el sistema existen constricciones. Para determinar las restricciones, se necesita calcular los modos cero de la matriz (8.85), donde, los modos cero están dados por $(v_a^{(0)})_1^T = (0, v^{e_0^I}, 0, 0)$ y $(v_a^{(0)})_2^T = (0,0,0,v^{A_0^I})$. $v^{e_0^I}$ y $v^{A_0^I}$ son funciones arbitrarias. Usando los modos cero y el potencial simpléctico $V^{(0)}$ se obtienen las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} \Omega_I^{(0)} &= \int d^2x (v^{(0)})_a^T(x) \frac{\delta}{\delta\xi^{(0)a}(x)} \int d^2y V^{(0)}(\xi), \\ &= -\int d^2x v^{e_0^I}(x) 2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}[(F^J{}_{ab} + s\frac{|\Lambda|}{2}\varepsilon^J{}_{KL}e_a^K e_b^L) + \Omega D_a e^J{}_b], \\ &\to -2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\left[(F^J{}_{ab} + s\frac{|\Lambda|}{2}\varepsilon^J{}_{KL}e_a^K e_b^L) + \Omega D_a e^J{}_b\right] = 0, \end{aligned} \qquad (8.86)$$

$$\begin{aligned} \beta_I^{(0)} &= \int d^2x (v^{(0)})_a^T(x) \frac{\delta}{\delta\xi^{(0)a}(x)} \int d^2y V^{(0)}(\xi), \\ &= -\int d^2x v^{A_0^I}(x) 2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\left[\beta(F^J{}_{ab} + s\frac{|\Lambda|}{2}\varepsilon^J{}_{KL}e_a^K e_b^L) + D_a e^J{}_b\right], \\ &\to -2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\left[\beta(F^J{}_{ab} + s\frac{|\Lambda|}{2}\varepsilon^J{}_{KL}e_a^K e_b^L) + D_a e^J{}_b\right] = 0, \end{aligned} \qquad (8.87)$$

por lo tanto, se identifican las siguientes constricciones

$$\Omega_I^{(0)} = 2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\left[(F^J{}_{ab} + s\frac{|\Lambda|}{2}\varepsilon^J{}_{KL}e_a^K e_b^L) + \Omega D_a e^J{}_b\right] = 0,$$

$$\beta_I^{(0)} = 2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\left[\beta(F^J{}_{ab} + s\frac{|\Lambda|}{2}\varepsilon^J{}_{KL}e_a^K e_b^L) + D_a e^J{}_b\right] = 0,$$

estas restrcciones corresponden a las restricciones secundarias encontradas mediante el método de Dirac y que se calcularon en el capítulo 5.

Es sencillo demostrar que el sistema ya no presenta más constricciones. Para realizar esto, se construye la siguiente matriz que nos permitirá determinar si en el sistema existen más constricciones [63]

$$f_{cb}^{(1)}\dot{\xi}^b = Z_c(\xi), \tag{8.88}$$

donde

$$Z_c(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8.89}$$

y

$$f_{cb}^{(1)} = \begin{pmatrix} f_{ab}^{(0)} \\ \frac{\partial \Omega^{(0)}}{\partial \xi^b} \\ \frac{\partial \beta^{(0)}}{\partial \xi^b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\Omega\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & 0 & -2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & 0 & -2\beta\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\varepsilon^{0ab}(\Omega\eta_{IJ}\partial_a - \varepsilon_{IJK}(\Omega A_a^K + s\mid\Lambda\mid e_a^K)) & 0 & 2\varepsilon^{0ab}(\eta_{IJ}\partial_a - \varepsilon_{IJK}(A_a^K + \Omega e_a^K)) & 0 \\ 2\varepsilon^{0ab}(\eta_{IJ}\partial_a - \varepsilon_{IJK}(A_a^K + \Omega e_a^K)) & 0 & 2\varepsilon^{0ab}(\beta\eta_{IJ}\partial_a - \varepsilon_{IJK}(\beta A_a^K + e_a^K)) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times\, \delta^2(x-y). \tag{8.90}$$

Los modos cero de la matriz (8.90)

$$\begin{aligned} (v^{(1)})_1^T &= (\delta_J^I\partial_a v^\lambda + \varepsilon^I{}_{KJ}A_a^K v^\lambda, \delta_J^I v^{e_0^I}, -s\mid\Lambda\mid\varepsilon^I{}_{JK}e_a^K, 0, \delta_J^I v^\lambda, 0), \\ (v^{(1)})_2^T &= (-\varepsilon^I{}_{JK}e_a^K, 0, \delta_J^I\partial_a v^\beta + \varepsilon^I{}_{KJ}A_a^K v^\beta, \delta_J^I v^{A_0^I}, 0, \delta_J^I v^\beta). \end{aligned}$$

Estos modos cero son usados para obtener otras restricciones. Esto se realiza, mediante el cálculo de la siguiente contracción [63]

$$(v^{(1)})^T_c Z_c = 0, \tag{8.91}$$

donde $c = 1,2$, se obtiene de (8.91) una igualdad, por lo tanto, en el formalismo de [FJ] no aparecen más restricciones.

Ahora, vamos a construir un nuevo Lagrangiano simpléctico que contiene la información de las restricciones obtenidas en (8.86) y (8.87). La forma en la que las restricciones se deben introducir para construir la nueva lagrangiana es mediante los multiplicadores de Lagrange $e^I_0 = \dot{\lambda}^I$ y $A^I_0 = \dot{\theta}^I$, donde, la nueva lagrangiana tiene la siguiente estructura

$$\mathscr{L}^{(1)} = 2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}e^I_b\dot{A}^J_a + \beta\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}A^I_b\dot{A}^J_a + \Omega\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}e^I_b\dot{e}^J_a + \Omega^{(0)}_I\dot{\lambda}^I + \beta^{(0)}_I\dot{\theta}^I - V^{(1)}, \tag{8.92}$$

podemos observar que el potencial simpléctico $V^{(1)} = V^{(0)} \mid_{\Omega^{(0)}_I=0,\beta^{(0)}_I=0} = 0$, esto refleja, que la teoría presenta covarianza general, justo como en RG. De la ecuación (8.92) se puede identificar las siguientes nuevas variables simplécticas $\xi^{(1)a}(x) = \{e^I_a, \lambda^I, A^I_a, \theta^I\}$ y la 1-forma $\mathrm{a}^{(0)}{}_a(x) = \{\Omega\varepsilon^{0ab}e_{bI}, \Omega^{(0)}_I, 2\varepsilon^{0ab}e_{bI} + \beta\varepsilon^{0ab}A_{bI}, \beta^{(0)}_I\}$. Utilizando las nuevas variables simplécticas y la nueva 1-forma, se calcula la siguiente matriz simpléctica

$$f^{(1)}_{ab}(x,y) =$$

$$\begin{pmatrix} -2\eta_{IJ} & -2(\Omega\eta_{IJ}\partial_b + \varepsilon_{IJK}(\Omega A^K_b + s\mid\Lambda\mid e^K_b)) & -2\eta_{IJ} & -2(\eta_{IJ}\partial_b + \varepsilon_{IJK}(A^K_b + \Omega e^K_b)) \\ -2(\Omega\eta_{IJ}\partial_a - \varepsilon_{IJK}(\Omega A^K_I + s\mid\Lambda\mid e^K_a)) & 0 & -2(\Omega\eta_{IJ}\partial_a - \varepsilon_{IJK}(A^K_I + \Omega e^K_a)) & 0 \\ -2\eta_{IJ} & -2(\eta_{IJ}\partial_b + \varepsilon_{IJK}(A^K_b + \Omega e^K_b)) & -2\beta\eta_{IJ} & -2(\beta\eta_{IJ}\partial_b + \varepsilon_{IJK}(\beta A^K_b + e^K_b)) \\ -2(\eta_{IJ}\partial_a - \varepsilon_{IJK}(A^K_a + \Omega e^K_a)) & 0 & -2(\beta\eta_{IJ}\partial_a - \varepsilon_{IJK}(\beta A^K_a + e^K_a)) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times\, \varepsilon^{0ab}\delta^2(x-y). \tag{8.93}$$

La matriz simpléctica $f^{(1)}_{ab}$ representa una matriz singular de $[18\times 18]$. Donde las filas y columnas llevan el siguiente orden $(e^I_a, \lambda^I, A^I_a, \theta^I)$. Por otra parte, se comento que no se encontraron más restricciones en la teoría, por lo tanto, la no invertibilidad de (8.93), esto significa que la teoría presenta simetría de norma. Por lo tanto, se elige la siguiente fijación de norma como restricciones

$$
\begin{aligned}
A_0^I(x) &= 0, \\
e_0^I(x) &= 0,
\end{aligned} \tag{8.94}
$$

por otra parte, se introducen los multiplicadores ϕ_I y α_I, asociados a las fijaciones de noma (8.94), para construir una nueva lagrangiana simpléctica. La nueva lagrangiana simpléctica está dada por

$$
\mathscr{L}^{(2)} = 2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}e_b^I\dot{A}_a^J + \beta\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}A_b^I\dot{A}_a^J + \Omega\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}e_b^I\dot{e}_a^J + (\Omega_I^{(0)} + \phi_I)\dot{\lambda}^I + (\beta_I^{(0)} + \alpha_I)\dot{\theta}^I, \tag{8.95}
$$

por lo tanto, podemos identificar el nuevo conjunto de variables simplécticas $\xi^{(2)a}(x) = \{e_a^I, \lambda^I, A_a^I, \theta^I, \phi_I, \alpha_I\}$ y la 1-forma simpléctica $\mathrm{a}^{(0)}{}_a(x) = \{\Omega\varepsilon^{0ab}e_{bI}, \Omega_I^{(0)} + \phi_I, 2\varepsilon^{0ab}e_{bI} + \beta\varepsilon^{0ab}A_{bI}, \beta_I^{(0)} + \alpha_I, 0, 0\}$. Utilizando las nuevas variables simplécticas se construye la siguente matriz simpléctica, que está dada por

$$
f_{ab}^{(2)}(x,y) =
$$

$$
\begin{pmatrix}
-2\Omega\eta_{IJ} & -2(\Omega\eta_{IJ}\partial_b + \varepsilon_{IJK}(\Omega A_b^K + s\mid\Lambda\mid e_b^K)) & 0 & -2\eta_{IJ} & -2(\eta_{IJ}\partial_b + \varepsilon_{IJK}(A_b^K + \Omega e_b^K)) & 0 \\
-2(\Omega\eta_{IJ}\partial_a - \varepsilon_{IJK}(\Omega A_I^K + s\mid\Lambda\mid e_a^K)) & 0 & -\delta_I^J & -2(\Omega\eta_{IJ}\partial_a - \varepsilon_{IJK}(A_I^K + \Omega e_a^K)) & 0 & 0 \\
0 & \delta_J^I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2\eta_{IJ} & -2(\eta_{IJ}\partial_b + \varepsilon_{IJK}(A_b^K + \Omega e_b^K)) & 0 & -2\beta\eta_{IJ} & -2(\beta\eta_{IJ}\partial_b + \varepsilon_{IJK}(\beta A_b^K + e_b^K)) & 0 \\
-2(\eta_{IJ}\partial_a - \varepsilon_{IJK}(A_a^K + \Omega e_a^K)) & 0 & 0 & -2(\beta\eta_{IJ}\partial_a - \varepsilon_{IJK}(\beta A_a^K + e_a^K)) & 0 & -\delta_I^J \\
0 & 0 & 0 & 0 & \delta_J^I & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\times\,\varepsilon^{0ab}\delta^2(x-y). \tag{8.96}
$$

La matriz simpléctica $f_{ab}^{(2)}$ representa una matriz no singular de $[24\times 24]$, por lo tanto, la matriz es invertible. Donde las filas y columnas tienen el siguente orden $(e_a^I, \lambda^I, A_a^I, \theta^I, \phi_I, \alpha_I)$. La matriz inversa de (8.96), está dada por

$$
[f_{ab}^{(2)}(x,y)]^{-1} =
$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2\sqrt{|\Lambda|}(s-\gamma^2)}\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ} & 0 & \delta^I_J\partial_a - \varepsilon^I{}_{JK}A^K_a & -\frac{\gamma^2}{2(s-\gamma^2)}\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ} & 0 & -\varepsilon^I{}_{JK}e^K_a \\ 0 & 0 & \delta^J_I & 0 & 0 & 0 \\ \delta^J_I\partial_b - \varepsilon_I{}^J{}_K A^K_b & -\delta^I_J & 0 & -s\mid\Lambda\mid\varepsilon_I{}^J{}_K e^K_b & 0 & 0 \\ -\frac{\gamma^2}{2(s-\gamma^2)}\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ} & 0 & -s\mid\Lambda\mid\varepsilon^I{}_{JK}e^K_a & \frac{s\gamma\sqrt{|\Lambda|}}{2(s-\gamma^2)}\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ} & 0 & \delta^I_J\partial_a - \varepsilon^I{}_{JK}A^K_a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^J_I \\ -\varepsilon_I{}^J{}_K e^K_b & 0 & 0 & \delta^J_I\partial_b - \varepsilon_I{}^J{}_K A^K_b & -\delta^I_J & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y). \tag{8.97}$$

por lo tanto, apartir de (8.97) es posible identificar los corchetes generalizados de FJ, que están dados por

$$\begin{aligned}
\{e^I_a(x), e^J_b(y)\}_{FD} &= \frac{\gamma}{2\sqrt{\mid\Lambda\mid}(s-\gamma^2)}\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ}\delta^2(x-y), \\
\{A^I_a(x), e^J_b(y)\}_{FD} &= -\frac{\gamma^2}{2(s-\gamma^2)}\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ}\delta^2(x-y), \\
\{A^I_a(x), A^J_b(y)\}_{FD} &= \frac{s\sqrt{\mid\Lambda\mid}\gamma}{2(s-\gamma^2)}\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ}\delta^2(x-y), \\
\{e^I_a(x), \phi_J(y)\}_{FD} &= (\delta^I_J\partial_a - \varepsilon^I{}_{JK}A^K_a)\delta^2(x-y), \\
\{A^I_a(x), \alpha_J(y)\}_{FD} &= (\delta^I_J\partial_a - \varepsilon^I{}_{JK}A^K_a)\delta^2(x-y), \\
\{e^I_a(x), \alpha_J(y)\}_{FD} &= -\varepsilon^I{}_{JK}e^K_a, \\
\{A^I_a(x), \phi_J(y)\}_{FD} &= -s\mid\Lambda\mid\varepsilon^I{}_{JK}e^K_a, \\
\{\lambda^I(x), \phi_J(y)\}_{FD} &= \delta^J_I\delta^2(x-y), \\
\{\theta^I(x), \alpha_J(y)\}_{FD} &= \delta^J_I\delta^2(x-y).
\end{aligned} \tag{8.98}$$

Es importante comentar, que los corchetes generalizados de FJ coinciden con los obtenidos por medio del formalismo de Dirac, presentado en el capítulo 5. Por otra parte, si se introducen los momentos, que están dados por

$$\begin{aligned}
\pi_I{}^a &= s\frac{\sqrt{\mid\Lambda\mid}}{\gamma}\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}e_b{}^J, \\
\Pi_I{}^a &= 2\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}(e_b{}^J + \frac{1}{2\gamma\sqrt{\mid\Lambda\mid}}A_b{}^J).
\end{aligned} \tag{8.99}$$

los corchetes generalizados de FJ (8.98), tienen la siguiente estructura

$$\begin{aligned}
\{e^I{}_a(x),\pi^b{}_J(y)\}_{FD} &= \frac{s}{2(s-\gamma^2)}\delta^b{}_a\delta^I{}_J\delta^2(x-y),\\
\{e^I{}_a(x),e^J{}_b(y)\}_D &= \frac{1}{2\sqrt{|\Lambda|}}\frac{\gamma}{s-\gamma^2}\eta^{IJ}\varepsilon_{0ab}\delta^2(x-y),\\
\{\pi^a{}_I(x),\pi^b{}_J(y)\}_D &= \frac{s^2}{2\gamma}\frac{\sqrt{|\Lambda|}}{s-\gamma^2}\eta_{IJ}\varepsilon^{0ab}\delta^2(x-y),\\
\{A^I{}_a(x),\Pi^b{}_J(y)\}_D &= \frac{s-2\gamma^2}{2(s-\gamma^2)}\delta^b{}_a\delta^I{}_J\delta^2(x-y),\\
\{A^I{}_a(x),A^J{}_b(y)\}_D &= \frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{2}\frac{\gamma}{s-\gamma^2}\eta^{IJ}\varepsilon_{0ab}\delta^2(x-y),\\
\{\Pi^a{}_I(x),\Pi^b{}_J(y)\}_D &= \frac{s}{2\gamma\sqrt{|\Lambda|}}\frac{1}{s-\gamma^2}\eta_{IJ}\varepsilon^{0ab}\delta^2(x-y),\\
\{A^I{}_a(x),e^J{}_b(y)\}_D &= \frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\gamma^2-s}\eta^{IJ}\varepsilon_{0ab}\delta^2(x-y),\\
\{e^I{}_a(x),\Pi^b{}_J(y)\}_D &= \frac{1}{2\sqrt{|\Lambda|}}\frac{\gamma}{s-\gamma^2}\delta^b{}_a\delta^I{}_J\delta^2(x-y),\\
\{A^I{}_a(x),\pi^b{}_J(y)\}_D &= -\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{2}\frac{\gamma}{s-\gamma^2}\delta^b{}_a\delta^I{}_J\delta^2(x-y),\\
\{\pi^a{}_I(x),\Pi^b{}_J(y)\}_D &= \frac{1}{2}\frac{s}{s-\gamma^2}\eta_{IJ}\varepsilon^{0ab}\delta^2(x-y).
\end{aligned} \tag{8.100}$$

Se puede observar que los corchetes generalizados de FJ (8.100), coinciden con todos los corchetes de Dirac que se obtuvieron en el capítulo 5.

Una vez obtenida todas las restricciones de la teoría, es posible realizar el conteo de los grados de libertad del sistema, esto se realiza de la siguiente manera; el número de variables dinámicas (e^I_a, A^I_a) es igual a 12, el número de constricciones $(\Omega^{(0)}_I, \beta^{(0)}_I, A^I_0, e^I_0)$ es igual a 12, al realizar la diferencia entre el número de variables dinámicas y el número de restricciones, el conteo de los grados de libertad es igual a cero.

Para concluir este capítulo, se realizará el cálculo de la transformación de norma de la teoría, para esto, se calculan los modos cero de la matriz (8.93), donde, los modos cero están dados por

$$\begin{aligned}
(w^{(1)})^T_1 &= (-\delta^I_J\partial_a\delta^2(x-y)-\varepsilon^I{}_{JK}A^K_a\delta^2(x-y), \delta^I_J\delta^2(x-y), -\Lambda\varepsilon^I{}_{JK}e^K_a\delta^2(x-y), 0),\\
(w^{(1)})^T_2 &= (-\varepsilon^I{}_{JK}e^K_a\delta^2(x-y), 0, -\delta^I_J\partial_a\delta^2(x-y)-\varepsilon^I{}_{JK}A^K_a\delta^2(x-y), \delta^I_J\delta^2(x-y)).
\end{aligned}$$

De acuerdo con el formalismo de FJ [64], los modos cero $(w^{(1)})^T_1$ y $(w^{(1)})^T_2$ son los generadores de las transformaciones de norma infinitesimales de (8.80) y están dadas por

$$
\begin{aligned}
\delta e^I_a(x) &= -D_a\varepsilon^I + \varepsilon^I{}_{JK} e^K_a \tau^J, \\
\delta e^I_0(x) &= \partial_0 \varepsilon^I, \\
\delta A^I_a(x) &= -D_a\tau^I + s \mid \Lambda \mid \varepsilon^I{}_{JK} e^K_a \varepsilon^J, \\
\delta A^I_0(x) &= \partial_0 \zeta^I.
\end{aligned} \tag{8.101}
$$

De este modo, al usar el formalismo de FJ, se ha podido calcular las transformaciones de norma. Dichas transformaciones de norma (8.101), se calcularon en el capítulo 5, mediante el formalismo de Dirac.

Capítulo 9

Conclusiones

En este trabajo, se realizó el análisis Hamiltoniano detallado de la acción exótica y de la acción de Bonzom-Livine, por otra parte, se implemento un formalismo alterno al método de Dirac para analizar las acciones para la teoría de relatividad general 3D con constante cosmológica antes mencionadas, y se mostró que mediante del formalismo de FJ es posible reproducir la información obtenida en el método de Dirac. En el análisis realizado de la acción exótica y de la acción de BL mediante el formalismo de Dirac estricto, debido a que el estudio de ambas acciones se realizó en el espacio fase completo, las teorías presentan un conjunto de restricciones de primera y segunda clase, y fue identificada la estructura completa de dichas restricciones. Cabe mencionar que encontrar la forma de las restricciones de primera y segunda clase es una tarea muy complicada y tediosa. Una vez hecha la clasificación de las restricciones y encontrado la forma completa de ellas, se determinaron las correspondientes transformaciones de norma: para la acción exótica se encuentra la transformación Λ-deformada de Poincaré Λ-$ISO(2,1)$ y en el caso de la acción de BL la transformación Λ-deformada para el grupo Euclideano Λ-$ISO(3)$; los difeomorfismos son obtenidos de la simetría de norma fundamental. Por otra parte, también se obtienen los corchetes de Dirac para cada una de las teorías mencionadas anteriormente, donde mostramos que la estructura de los corchetes de Dirac de la acción exótica son no conmutativos y que el valor de la constante cosmológica no puede ser evaluada en cero debido a que da lugar a una singularidad a nivel de los corchetes de Dirac. Lo mencionado previamente puede relacionarse con algo análogo al del problema de Landau, donde se puede identificar a la cosntante cosmológica como un tipo de campo magnético y el campo "e[1]" con la coordenada no conmutativa. Además, es importante mencionar que la acción exótica difiere de la teoría de Palatini; en la teoría de Palatini los corchetes de Dirac presentan una

[1]El campo relacionado con la triada.

estructura conmutativa entre las variables dinámicas y la constante cosmológica puede ser valuada en cero sin presentar algun tipo de singularidad como puede verse en [34]. Por otra parte, el análisis realizado a la acción de BL, como ya se mencionó, tiene las mismas ecuaciones de movimiento que la acción de Palatini, sin embargo, al igual que la acción exótica, después de haber realizado el formalismo de Dirac estricto, se encuentra que los corchetes de Dirac entre las variables dinámicas "A" y "e" son no conmutativo. Es importante mencionar que un análisis previo de la acción de BL desde el punto de vista de el espacio fase reducido en [39], no discute la simetría de norma fundamental ni tampoco se obtienen las restricciones completas. De esta manera se hace énfasis en que es necesario realizar un análisis de forma correcta y completa mediante el formalismo de Dirac estricto.

El formalismo de Dirac estricto nos da una descripción completa del sistema bajo estudio, su implementación es un trabajo extenso y complicado. Claramente se deben desarrollar todos los pasos de otro modo, los resultados obtenidos no son concluyentes. Por lo tanto, debido a estas complicaciones es conveniente usar un esquema alternativo que nos de una descripción completa del sistema. En este sentido, en esta tesis se utilizó el formalismo de FJ para analizar a la acción exótica y a la acción de BL; por completez se incluyeron también una versión Abeliana de las acciones mencionadas anteriormente. Se calcularon los grados de libertad, las transformaciones de norma de cada una de las acciones y sus respectivos corchetes generalizados de FJ, encontrando que la información obtenida coincide con los resultados que se obtienen mediante el formalismo de Dirac estricto. Cabe mencionar que parte de los resultados obtenidos ya se encuentran publicados en [66, 67]. Para establacer la equivalencia entre los corchetes de FJ y los paréntesis de Dirac, se observa que si en el formalismo de Dirac no se fija la norma y las restricciones de segunda clase son eliminadas mediante los corchetes de Dirac, entonces, es posible reproducir la estructura completa de los corchetes de Dirac utilizando en FJ el espacio de configuración como variables simplécticas. Por otra parte, si en el método de Dirac realizamos el análisis fijando la norma y construimos los correspondientes corchetes de Dirac, entonces, en el formalismo de FJ es posible reproducir los resultados obtenidos en el método Dirac, pero ahora lo hacemos utilizando coordenadas de el espacio fase como variables simplécticas. Con la implementación del formalismo de FJ se establecio la manera de obtener la estructura completa de los corchetes generalizados de FJ y que son totalmente equivalentes con los corchetes de Dirac. Es importante mencionar lo anterior, ya que en la literatura no se da una forma clara de como obtener toda la estructura completa de los corchetes de Dirac mediante el formalismo de FJ. En este sentido nuestro trabajo muestra cómo obtener mediante el método de FJ los resultados que se esperan en el formalismo de Dirac.

Apéndice A

Variedades Diferenciables y Campos Tensoriales

En este apéndice se van a introducir los conceptos y nomenclaturas básicas referentes a variedades, espacios topológicos y formas diferenciales que fueron utlizados en esta tesis [52].

Los espacios topológicos son la estructura más general con la que podemos trabajar y constituyen la forma más simple que debe tener una variedad, es decir, una variedad debe tener al menos la estructura de un espacio topológico. A veces tenemos la idea de que todos los espacios con los que trabajamos están equipados con una métrica, sin embargo este no es siempre el caso, de hecho, los espacios métricos forman un subconjunto de las variedades y las variedades forman un subconjunto de los espacios topológicos.

De forma abstracta un espacio topológico es un conjunto X con una colección adecuada τ de subconjuntos (llamados abiertos), donde adecuada significa que la colección de subconjuntos abiertos satisfacen los siguientes axiomas:

i El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto total X pertenecen a τ.

ii La unión arbitraria de abiertos también pertenece a τ.

iii La intersección finita de abiertos es también elemento de τ.

A.1 Variedades Diferenciables

En esta sección se expondrán nocionnes básicas referentes a variedades diferenciables. El contenido de esta sección sigue principalmente [52] y [69]. Desde un punto de vista intuitivo, podemos decir que una variedad diferencial es un espacio topológico localmente homeomorfo [1] a $\Re^m$. Es importante la aclaración que el homeomorfismo es local ya que puede suceder que dos variedades sean localmente homeomorfas y, sin embargo, no lo sean globalmente. Un ejemplo de estos es la esfera S^2 inmersa en $\Re^3$, que es localmente homeomorfa a $\Re^2$ pero no globalmente ya que S^2 es compacto y R^2 no lo es. Este homeomorfismo local entre una variedad y Re^m permite asignar a cada punto de la variedad un conunto de m números llamdos coordenadas locales.

Cuando M no es globalmente homeomórfica a $\Re^m$, puede ser necesario introducir varias coordenadas locales. Por lo tanto, es posible que aun punto de la variedad le corresponda varias coordenadas locales. se requiere que la transición de una coordenada a la otra sea suave. Este requerimiento permite desarrollar el cálculo usual en una variedad. Es de crucial importancia notar que la elección de las coordenadas es completamente arbitraria, aparte de los requerimientos básicos de continuidad y diferenciabilidad. Esto se corresponde muy bien con los principios de la Teoría General de la Relatividad, como veremos más adelante.

Definición 1. M es una variedad diferenciable m-dimensional si [52]

1. M es un espacio topológico

2. M tiene una familia de pares $\{(U_i, \varphi_i)\}$, donde $\{U_i\}$ es una familia de abiertos que cubren M, o sea, $\bigcup_i U_i = M$. φ_i es un homeomorfismo de U_i es un abierto de U_i' de $\Re^m$.

3. Dados U_i y U_j tales que $U_i \bigcap U_j \neq \emptyset$, el mapa $\psi_{ij} = \varphi_i \varphi_j^{-1}$ de $\varphi_j(U_i \bigcap U_j)$ a $\varphi_i(U_i \bigcap U_j)$ es C^∞(infinitamente diferenciable).

Al par (U_i, φ_i) se llama **carta** mientras que toda la familia (U_i, φ_i) se llama **atlas**. A los abiertos U_i se les denomina **entorno coordenado**, mientras que a las funciones φ_i se les denomina **función de las coordenadas** o simplemente **coordenadas**. Las φ_i son representadas por m funciones $\{x^1(p), \ldots, x^m(p)\}$ y a esta familia también se le denomina **coordenada** del punto p. Generalmente se denomina coordenada x para referir al punto cuyas coordenadas son $\{x^1, \ldots, x^m\}$ a menos que se usen varios sistemas de coordenadas. De (ii) de la definición 1 se puede decir que M es localmente euclídea. En cada entorno de coordenadas U_i, M se ve como un abierto de $\Re^m$ cuyos elementos son $\{x^1, \ldots, x^m\}$.

[1] Sean X y Y dos espacios topológicos. Un mapeo f: X $\to$ Y es un homeomorfismo si es continuo y tiene un inverso f^{-1}: Y $\to$ X que también es continuo. Si existe un homeomorfismo entre X y Y, se dice que X es homeomórfico a Y y viceversa. El homeomorfismo f: X $\to$ Y es local cuando $x \in X, \exists U$ abierto tal que $x \in U$ y f:U$\to$f(U) es un homememorfismo entre U y $f(U)$ [52]

Si U_i y Uj son tales que $U_i \bigcap U_j \neq \emptyset$, entonces dos sistemas coordenados son asignados a un punto $p \in U_i \bigcap U_j$, entonces (iii) de la definición 1 asegura que la transición de un sistema de coordenadas a otro es suave (C^∞). El mapa φ_i asigna m al mismo punto p y siendo la transición de x a y como $x^\mu = x^\mu(y)$, dada por m funciones de m variables. La trasnformación de coordenadas $x^\mu = x^\mu(y)$ es de la forma explícita del mapa $\psi_{ij} = \varphi_i \varphi_j^{-1}$. Entonces, la diferenciabilidad queda definida en el sentido usual de cálculo en $\Re^m$: la transformacion de coordenadas es diferenciable si cada funcion $x^\mu(y)$ es diferenciable respecto a cada variable y^ν. De manera, arbitraria, las coordenadas usadas variarán de manera suave. Si la unión de dos atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ y $\{(U_j, \varphi_j)\}$ es otra vez un atlas, entonces esos dos atlas se dicen que son **compatibles**. La compatibilidad es una relación de equivalencia y estas clases de equivalencia reciben el nombre de estructura diferenciable. Se dice también que dos atlas mutuamente compatibles definen la misma estructura diferenciable en M.

Se puede considerar también variedade con borde. Si un espacio topológico M puede ser cubierto por una familia de abiertos U_i, siendo cada U_i homeomorfo a un abierto del conjunto $H^m = \{(x^1, \ldots, x^m) \in \Re^m \mid x^m \geq 0\}$, M se dice que es una **variedad con borde**.

A.2 Vectores y Tensores en Variedades

Sea $f : M \to N$ un mapa de una variedad M de dimensión m a otra variedad N de dimensión n. Si se toma en $p \in M$, una carta (U, φ) y sobre N la carta (V, ϕ) tal que $p \in U$ y $f(p) \in V$, entonces se obtendrá la siguiente representación de coordenadas

$$\phi f \varphi^{-1} : \Re^m \to \Re^n. \tag{A.1}$$

Si se escribe $\varphi(p) = \{x^\mu\}$ y $\phi(f(p)) = \{y^\nu\}$, $y = \phi f \varphi^{-1}$ es una función vector valuada de m variables. Si $y = \phi f \varphi^{-1}$, o simplemente $y^\nu = f^\nu(x^\mu)$, es C^∞ respecto a cada x^μ se dice que f es diferenciable en p o en $x = \phi(p)$. Uno puede probar, usando la definición 1, que la diferenciabilidad de f es independiente del sistema de coordenada escogido tanto para la variedad M como para la variedd N.

Definición 2. Si $\phi f \varphi^{-1}$ es C^∞, es invetibles y su inversa también C^∞ entonces f es un **difeomorfismo** y se dice que M es difeomorfa a N y viceversa, denotado por $M \cong N$. f se dice que es un **difeormorfismo local** si $\forall p \in M$, $\exists U, V$ abiertos tales que $p \in U \subset N$ con f: U$\rightarrow$ V un difeomorfismo.

De la definición 1 y 2 se puede observar que una variedad diferenciable m dimensional es localmente difeomorfa a $\Re^m$. El conjunto de difeomorfismos f:M $\rightarrow$ M es un grupo denotado por

Dif(M). Si se toma un punto p en una carta (U,φ) tal que $\varphi(f(p)) = x^{\mu}(p)$ y bajo $f \in Dif(M)$, p se mapea a $f(p) \in U$ cuyas coordenadas serán $\varphi(f(p)) = y^{\mu}(f(p))$ entonces y es una función diferenciable de x. Esto es el llamdo punto de vista activo de una transformación de coordenadas. Si, por otro lado, (U,φ) y (V,ϕ) son cartas que se solapan y $p \in U \cap V$ entonces el mapa $x \mapsto y$ es diferenciable por (3) de la definición 1; este es el llamdo punto de vista pasivo de la transformación de coordenadas. Se deninirá ahora dos mapas espaciales que son la curva y la función.

Definición 3. Sea una variedad dimensional m-dimensional

i Una **curva abierta** es un mapa $c:(a,b) \to M$, donde $(a,b) \in \Re$ es un intervalo abierto tal que $a < 0 < b$, donde se ha incluido el 0 por conveniencia y a (b) puede ser $-\infty(+\infty)$. En una carta (U,φ), una curva $c(t)$, $t \in (a,b)$ tiene una representación dn coordenadas como $x = \varphi c:\Re :\to \Re^{m}$. Si el mapa es $c: S^{1} \to M$ se dice que es una **curva cerrada**.

ii Una función f es un mapa f: M$\to \Re$, donde en una carta (U,φ) la representación coordenada de f está dada por $f\varphi^{-1}:\Re^{m} \to \Re$ la cual es uan función real de m variables. El conjunto de funciones suaves en M se denota por F(M).

Habiendo definido el concept de curva y función en una variedad M, se puede definir el concepto de vectores tangentes en dicha variedad. Sea una curva $c:(a,b) \to M$ con $a < 0b$ y una función f:M$\to \Re$. Latasa de cambio de $f(c(t))$ en $t = 0$ a lo largo de la curva es

$$\frac{df(c(t))}{dt}\,|_{t=0} \tag{A.2}$$

En términos de coordenadas locales, esto es

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{dx^{\mu}(c(t))}{dt}\right)|_{t=0}\;. \tag{A.3}$$

Por lo tanto, $df(c(t))/dt$ en $t = 0$ se obtiene aplicando el operador diferencial X a f, donde

$$X = X^{\mu}(\partial/\partial x^{\mu}), \qquad conX^{\mu} = \frac{dx^{\mu}(c(t))}{dt}\,|_{t=0}\;. \tag{A.4}$$

Entonces,

$$\frac{df(c(t))}{dt}\,|_{t=0}= X^{\mu}(\partial f/\partial x^{\mu}) \equiv X[f]. \tag{A.5}$$

Definamos a $X = X^{\mu}\partial/\partial x^{\mu}$ como un vector tangente a M en $p = c(0)$ en la dirección dada por la curva $c(t)$. EN realidad, lo que se hace es definir una relación de equivalencia de curvas en M de la forma

(i) $c_1(0) = c_2(0) = p$

(ii) $\frac{dx^{\mu}(c_1(t))}{dt}\,|_{t=0}= \frac{dx^{\mu}(c_2(t))}{dt}\,|_{t=0}$

y, entonces, curvas que se encuentran en la misma clase de equivalencia definen el mismo operador diferencial X.

Todas lss clases de esta relación de equivalencia de curvas en $p \in M$, es decir todos los vectores tangentes en p, formanun espacio vectorial llamado **espacio tangente**de M en el punto p, denotado por T_pM y siendo $e_{\mu} = \{\partial/\partial x^{\mu}\}$ una base de este espacio vectorial llamada **base coordenada**. Un vector V$\in$ T_pM se escribe $V = V^{\mu}e_{\mu}$ y es independiente del sistema de coordenadas elegido. Esta independencia permite encontrar la transformación de las coordenadas del vector. Sea p$\in$ $U_i \bigcap U_j$, $x = \varphi_i(p)$ e $y = \varphi_j(p)$. Así se tiene para X$\in$ T_pM,

$$X = X^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \widetilde{X}^{\mu}\frac{\partial}{\partial y^{\mu}}. \tag{A.6}$$

ESto muestra, usando la regla de la cadena, que

$$\widetilde{X}^{\mu} = X^{\nu}\frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\nu}}. \tag{A.7}$$

Por supuesto que la base de $T_pM$no tiene por qué ser e_{μ}, sino que puede ser cualquier combinación $f_i = A_i^{\mu}e_{\mu}$, donde $A = A_i^{\mu}$ es una matriz invertible, o sea A$\in$ $GL(m,R)$. A las bases tipo $\{f_i\}$ se les llama bases no-coordenadas.

Ahora, siendo T_pM un espacio vectorial uno puede considerar su espacio dual, es decir el espacio de las funcionales [2], que los físicos llaman esoacio cotangente en p, denotado por T_p^*M. A un elemento $\omega \in T_p^*M$ se le llama **vector dual**, **vector cotangente** o **uno-forma**. Un ejemplo de una

[2]Dado un espacio vectorial V, a las funciones f:V$\rightarrow$ $\Re$ se las llama funcionales de V y uno puede demostrar que este espacio es, a su vez, un espacio vectorial.

uno-forma es la diferencial de una función f$\in F(M)$. La accción de un vector V en f es $V[f] = V^{\mu}(\partial f/\partial x^{\mu}) \in \Re$, entonces la acción de $df \in T_p^*M$ sobre $V \in T_p^*M$ es

$$\langle df, V\rangle \equiv V[f] = V^{\mu}\frac{\partial f}{\partial x^{\mu}} \in \Re. \tag{A.8}$$

En las coordenadas $x = \varphi(p)$, se tiene una expresión para $df = (\partial f/\partial x^{\mu})dx^{\mu}$. Por lo tanto, es natural tomar $\{dx^{\mu}\}$ como una base de T_p^*M teniendo

$$\langle dx^{\mu}, \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\rangle = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu}. \tag{A.9}$$

Una uno-forma ω arbitraria se puede escribir como

$$\omega = \omega_{\mu} dx^{\mu}, \tag{A.10}$$

siendo ω_{μ} las componentes de ω. Al igual que se hizo para los vectores, se pueden deducir las transformaciones de componentes de ω de un sistema de coordenadas a otro. Para un punto $p \in U_i \bigcap U_j$,

$$\omega = \omega_{\mu} dx^{\mu} = \widetilde{\omega}_{\nu} dy^{\nu}, \tag{A.11}$$

con $x = \varphi_i(p)$ e $y = \varphi_j(p)$. Utilizando el cambio $dx^{\mu} = (\partial x^{\mu}/\partial y^{\nu})$ se tiene

$$\widetilde{\omega}_{\nu} = \omega_{\mu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\nu}}. \tag{A.12}$$

Con esto, uno puede definir un producto interno $\langle , \rangle : T_p^*M \bigotimes T_pM \to \Re$ definido como

$$\langle \omega, V\rangle = \omega_{\mu} V^{\mu} \langle dx^{\mu}, \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \omega_{\mu} V^{\mu}. \tag{A.13}$$

Hay que notar que este producto interno está definido entre un vector y un vector dual y no entre dos vectores. Para definir una producto entre dos vectores se necesita introducir una métrica a la variedad. Así como el producto interno es un objeto bilinial qye asigna a una uno-forma y a un vector un real, se puede pensar en objetos multilineales que asignen a q elementos de T_p^*M y a r elementos de T_pM un real. Estos objetos se llaman tensores de tipo (q,r) y el conjunto de los tensores de tipo (q,r) en p∈M se denotan como $T^q_{r,p}$. Tomando las bases $\{dx^\mu\}$ para T_pM y $\{\partial/\partial x^\mu\}$ para T_pM, un elemento de $T^q_{r,p}(M)$ se escribe como

$$T = T^{\mu_1\ldots\mu_q}_{\nu_1\ldots\nu_r}\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}}dx^{\nu_1}\cdots dx^{\nu_r}, \tag{A.14}$$

Siendo $T^{\mu_1\ldots\mu_q}_{\nu_1\ldots\nu_r}$ las componentes de T en esta base.

A.3 Formas Diferenciales

Las formas diferenciales es la herramienta utilizada para desarrollar el cálculo exterior. Éste, es un formalismo matemático potente que permite no solamente escribir los tensores con una menor cantidad de índices, sino que hace más explicita la independencia de ciertos objetos respecto a un cambio general de coordenadas, ya que en este formalismo se trabaja con indenpencia de un sistema de coordenadas particular. Estas características son compatibles con la RG y, por ello, no es de extrañar que el cálculo exterior resulte de gran utilidad para describirla. Ddo un elemento $\omega \in T^0_r$, se puede definir una operación sobre ω de la siguiente manera

$$P\omega(V_1,\ldots,V_r) = \omega(V_{P(1)},\ldots,V_{P_{(r)}}), \tag{A.15}$$

donde $V_i \in T_pM$, $P \in S_r$, el grupo de simetría de orden r[3]. Se dice que ω es totalmente antisimétrico si $P\omega = Sg(P)\omega$, donde $Sg(P)$ es el signo de la permutación P ($+1$ si ésta es par y -1 si es impar). Se dice también que ω es totalmente simétrico cuando $P\omega = \omega$. Ahora se puede definir una forma diferencial

Definición 4. Una forma diferencial o una r-forma es un tensor de tipo $(0,r)$ totalmente antisimétrico.

Se puede definir el producto cuña de r uno-forma como el producto tensorial totalmente antisimétrico de la forma

[3]Para el contenido de esta sección, se puede pensar el grupo de simetría de orden r, S_r como las permutaciones de una colección ordenada de r elementos.

$$dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} = \sum_{P \in S_r} dx^{\mu_{P(1)}} \bigotimes \ldots \bigotimes dx^{\mu_{P(r)}}. \tag{A.16}$$

Se puede ver que $dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r}$ es lineal en cada entrada, y $dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} = 0$ si uno de los índices μ_i aparece al menos dos veces y que $dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} = Sg(P) dx^{\mu_{P(1)}} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_{P(r)}}$. El espacio vectorial de formas de orden r en p∈M se denota por Ω_p^r y el conjunto de r-formas A.16 forman una base de $\Omega_p^r(M)$. Un elemento $\omega \in \Omega_p^r$ se puede escribir como

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r}, \tag{A.17}$$

donde las componentes $\omega_{\mu_1 \ldots \omega_r}$ son totalmente anti-simétricas.

Al igual que los tensores en general, se pueden considerar r-formas suaves en una variedad M, formando un campo de r-formas denotado por $\Omega^r(M)$.

Como se vio anteriormente, $dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r} = 0$ si se repite algún índice μ_i, entonces se tiene $\begin{pmatrix} m \\ r \end{pmatrix} = \frac{m!}{r!(m-r)!}$ maneras de elegir bases no nulas, por lo tanto $\begin{pmatrix} m \\ r \end{pmatrix}$ es la dimensión del espacio vectorial $\Omega_p^r(M)$. La igualdad $\begin{pmatrix} m \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ m-r \end{pmatrix}$ hace que $dim\Omega_p^r(M) = dim\Omega_p^{m-r}$ y, como son espacios vectoriales de dimensión finita, $\Omega_p^r(M)$ es isomorfo a $\Omega_p^{m-r}(M)$.

Definición 5. Sean $\omega \in \Omega_p^q(M)$ y $\xi \in \Omega_p^r(M)$. El producto exterior $\wedge : \Omega_p^q \times \Omega_p^r \to \Omega_p^{q+r}(M)$ está definido por

$$(\omega \wedge \xi)(V_1, \ldots, V_{q+r}) U \frac{1}{q!r!} \sum_{P \subset S_{q+r}} Sg(P) \omega(V_{P(1)}, \ldots, V_{P(q)}) \xi(V_{P(q+1)}, \ldots, V_{P(r)}), \tag{A.18}$$

donde $V_i \in T_P M$.

El producto exterior tiene una serie de propiedades que conviene destacar.

Propiedad 1. Sean $\xi \in \Omega^q(M)$, $\eta \in \Omega^r(M)$ y $\omega \in \Omega^s(M)$. Se cumple entonces

I $\xi \wedge \xi = 0$ si q es impar

II $\xi \wedge \eta = (-1)^{qr} \eta \wedge \xi$

III $(\xi \wedge \eta) \wedge \omega = \xi \wedge (\eta \wedge \omega)$ (asociatividad).

La diferenciabilidad es otra operación importante en lo que respecta a formas diferenciales, es por eso que conviene introducir dicha operación.

Definición 6. Sea $\omega \in \Omega^r(M)$ que se expresa en la base de r-formas como $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\ldots\mu_r}dx^{\mu_1\ldots\mu_r}$. La derivada exterior d_r es un mapa $d_r : \Omega^r \to \Omega^{r+1}$ que se define como

$$d_r\omega = \frac{1}{r!}\frac{\partial\omega_{\mu_1\ldots\mu_r}}{\partial x^\nu}dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r}. \tag{A.19}$$

Utilizando el lenguage de formas diferenciales, uno puede escribir las operaciones usuales del cálculo vectorial [52]. Si tomamos las formas diferenciales definidas en el espacio euclídeo tridimensional $\Re^3$

I $\omega_0 = f(x,y,z)$

II $\omega_1 = \omega_x(x,y,z)dx + \omega_y(x,y,z)dy + \omega_z(x,y,z)dz$

III $\omega_2 = \omega_{xy}(x,y,z)dx\wedge dy + \omega_{yz}(x,y,z)dy\wedge dz + \omega_{yz}(x,y,z)dy\wedge dz$

IV $\omega_3 = \omega_{xyz}(x,y,z)dx\wedge dy\wedge dz.$

Sus derivadas exteriores correspondientes serían

I $d\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$

II $d\omega_1 = (\partial\omega_y/\partial x - \partial\omega_x/\partial y)dx\wedge dy + (\partial\omega_z/\partial y - \partial\omega_y/\partial z)dy\wedge dz + (\partial\omega_x/\partial z - \partial\omega_z/\partial x)dz\wedge dx$

III $\omega_2 = (\partial\omega_{yz}/\partial x + \partial\omega_{zx}/\partial y + \partial\omega_{xy}/\partial z)dx\wedge dy\wedge dz$

IV $\omega_3 = 0.$

La acción de d sobre ω_0 resulta ser el gradiente, sobre ω_1 es el rotor y sobre ω_2 la divergencia.

Hay dos propiedades importantes de la derivada exterior que se enunciarán a continuación. La primera tiene que ver con la regla de Leibniz pero modificada apropiadamente.

Propiedad 2. Sean $\xi \in \Omega^q$ y $\omega \in \Omega^r$, entonces

$$d(\xi\wedge\omega) = (d\xi)\wedge + (-1)^q\xi\wedge(d\omega). \tag{A.20}$$

La definición 2 hace la derivación compatible con (II) de la propiedad 1. La otra propiedad muy importante es la nilpotencia de la derivada exterior.

Propiedad 3. Sea $\omega \in \Omega^r$, escrita en la base de r-formas como $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1,\ldots,\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r}$. Entonces se cumple que $d_{r+1}d_r\omega = 0$.

Esta propiedad resulta directamente de la definición 6 y de la conmutatividad de las derivadas parciales. En efecto, la derivada parcial $\partial^2\omega_{\mu_1\ldots\mu_r}/\partial x^\alpha \partial x^\beta$ es simétrica en los índices α y β pero $dx^\alpha \wedge dx^\beta$ es anti-simétrica en estos índices, produciendo un resultado nulo.

A.4 Grupos de Lie

La idea clave de un grupo de Lie es que es un grupo en el sentido usual, pero con la propiedad adicional de que también es una variedad diferencial. La definición formal de un grupo de Lie es la siguiente:

Definición 7. Un grupo de Lie G es una variedad diferencibale que esta dotado con un grupo de estructura tal que las operaciones del grupo

1 $\cdot : G \times G \to G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$.

2 $^{-1} : G \to G, g \mapsto g^{-1}$.

son diferenciables.

A.4.1 Algebras de Lie

En esta sección escribiremos los conceptos necesarios de álgebras de Lie para su uso posterior, tanto notación y convenciones son presentadas.

Como preliminares, comenzamos con las definiciones pertinentes. Decimos que L es un álgebra de Lie si se cumple lo siguiente:

1.- L es un espacio vectorial sobre un campo K.

2.- Existe un mapeo $[,] : L \times L \to L$ tal que $\forall u, v, w \in L$ y $\forall K$ se satisface.

2a.- [u,v]=-[v,u] (Antisimetría).

2b.- [u,v+aw]=[u,v]+a[u,w] (Bilinealidad)

2c.- [u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v,]]=0 (Identidad de Jacobi).

Dado que L es un espacio vectorial, existe un conjunto de vectores (generadores del álgebra) $\{\hat{e}\}^n_{i=1,\ldots,n}$ y que cumplen lo siguiente

$$[\hat{e}_i, \hat{e}_j] = C_{ijk}\hat{e}_k, \tag{A.21}$$

a las constantes C_{ijk} se les llama cosntantes de estructura.

Supongamos que hacemos un cambio de base, es decir, una transformación de la forma

$$\hat{e}'_i = a_{im}\hat{e}_m. \tag{A.22}$$

De lo anterior se deduce

$$[\hat{e}'_i, \hat{e}'_j] = a_{im}a_{jn}C_{mnr}\hat{e}'_r = a_{im}a_{jn}C_{mnr}(a^{-1})_{rs}\hat{e}'_s, \tag{A.23}$$

es decir, la forma en que las constantes de estructura se transforman bajo un cambio de base es la siguiente:

$$C'_{ijs} = a_{im}a_{jn}C_{mnr}(a^{-1})_{rs}. \tag{A.24}$$

Sea un álgebra de Lie n-dimensional, si existe un mapeo lineal $\rho : L \to gl(n)$, donde $gl(n)$ representa todas las matrices $n \times n$, entonces se dice que ρ es una representación del álgebra L siempre que la imgen en $gl(n)$ preserve las relaciones que definen al álgebra. En otras palabras, es equivalente trabajar con los elementos del álgebra L o con una representación de la misma.

Dado que ρ es un mapeo lineal, éste se puede representar por una matriz, aun más, dadas las constantes de estructura de un álgebra éstas definen una representación del álgebra definiendo las matrices T_i de la siguiente manera

$$(Ad(T_i))_{jk} = (T_i)_{jk} = C_{ijk} \tag{A.25}$$

A esta representación del álgebra L se le conoce como representación adjunta. Con lo anteriormente discutido se define la forma de Killing como

$$g_{ij} = Tr((Ad(T_i)Ad(T_j)), \tag{A.26}$$

y de (A.24) se deduce que g_{ij} no depende de la base escogida, o bien, que g_{ij} representa una cantidad tensorial, más explicitamente

$$g'_{ij} = a_{im}a_{jn}g_{mn}, \tag{A.27}$$

o en forma matricial

$$g' = AgA^T. \tag{A.28}$$

Sabemos que dada una matriz simétrica X con coeficientes constantes esta puede ser diagonalizada mediante una matriz ortogonal U, de la forma siguiente

$$X_d = UXU^T, \tag{A.29}$$

donde U^T es la matriz transpuesta de U, X_d es la matriz cuyos elementos en la diagonal son los eingenvectores de X y donde U cumple $UU^T = U^TU = I$, siendo I la matriz unidad n-dimensional. Mas adelante estaremos trabajando con formas de Killing simétricas y con coeficientes reales de tal manera que la discusión anterior es válida y por tanto se cumple que dadas 2 métricas de Killing de una misma álgebra de Lie pero expresada en 2 bases distintas se tendrá que

$$g'_d = U'gU'^T, \tag{A.30}$$
$$g_d = UgU^T. \tag{A.31}$$

de tal forma que usando (A.28) y (A.31) obtenemos

$$g'_d = Cg_dC^T, \tag{A.32}$$

donde ahora $C = U'AU^T$. Dado que al diagonalizarse la matriz sus elementos son los eigenvectores, entonces con ello habremos resuelto el problema de encontrar cual álgebra de Lie define cada una de las estructuras simplécticas ya que basta con comparar el número de elementos positivos, negativos y cero de cada forma de Killing diagonal.

Apéndice B

Formalismo de Dirac aplicado a la acción exótica: caso Abeliano

La acción que se estudia en este apéndice es dada por

$$S[A,e] = \int \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}(A^I_\mu \partial_\nu A_{\lambda I} + \Lambda e^I_\mu \partial_\nu e_{\lambda I})dx^3, \tag{B.1}$$

donde, A_μ es el potencial de gauge con $\mu = 0,1,2$ que denota las componentes de espacio-tiempo. Se utliza la siguiente convención $\varepsilon^{012} = -\varepsilon_{012} = 1$ y $g_{\mu\nu} = diag(-1,1,1)$. La ecuaciones de movimiento son obtenidas de (B.1) y son

$$\frac{\delta S[A,e]}{\delta e_\mu I} : \qquad \varepsilon^{\mu\nu\rho}\Lambda\partial_\nu e_\rho{}^I = 0, \tag{B.2}$$

$$\frac{\delta S[A,e]}{\delta A_\mu I} : \qquad \varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho{}^I = 0. \tag{B.3}$$

Se puede observar de (B.2)

Se realiza el análisis Hamiltoniano de la acción (B.1); para llevar a cabo esto, se realiza la descomposición 2 + 1 y se introducen los momentos canónicos conjugados $(\pi^\alpha_I, p^\alpha_I)$ a (A^I_α, e^I_α) dados por

$$\pi^\lambda_I := \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}^I_\lambda} = \frac{1}{2}\varepsilon^{0\lambda\gamma}A_{\gamma I}, \tag{B.4}$$

$$p_I^{\lambda} := \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{e}_{\lambda}^{I}} = \frac{\Lambda}{2}\varepsilon^{0\lambda\gamma}e_{\gamma I}, \tag{B.5}$$

el paréntesis de Poisson entres las funcionales con las que se va a trabajar, se define como

$$\{A_{\mu}^{I}(x), \pi_J^{\nu}(y)\} = \delta_{\mu}^{\nu}\delta_J^{I}\delta^2(x-y), \tag{B.6}$$

$$\{e_{\mu}^{I}(x), p_J^{\nu}(y)\} = \delta_{\mu}^{\nu}\delta_J^{I}\delta^2(x-y), \tag{B.7}$$

se obtienen las siguientes restricciones primarias

$$\begin{aligned}
\Phi_I^0 &:= \pi_I^0 \approx 0, \\
\Phi_I^a &:= \pi_I^a - \frac{1}{2}\varepsilon^{0ab}A_{bI} \approx 0, \\
\phi_I^0 &:= p_I^0 \approx 0, \\
\phi_I^a &:= p_I^a - \frac{\Lambda}{2}\varepsilon^{0ab}e_{bI} \approx 0.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

A partir de las condiciones de consistencia sobre las restricicones primarias, se obtienen las siguientes restricciones secundarias

$$\begin{aligned}
\psi_I &:= 2\partial_a p_I^a \approx 0, \\
\Psi_I &:= 2\partial_a \pi_I^a \approx 0.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Para esta teoría no se encuentran restricciones terciarias. De las restricciones primarias y secundarias, se necesita identificar cuales corresponden a las de primera clase y cual a las de segunda clase. Para realizar esto, se necesita calcular el rango y los vectores nulos de la siguiente matriz de 8×8 cuyas entradas estan dadas por los corchetes de Poisson entre las restricciones primarias y secundarias

$$
W = \begin{array}{c} \\ \phi_I^\mu(x) \\ \Phi_I^\mu(x) \\ \psi_I(x) \\ \Psi_I(x) \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \phi_J{}^\nu(y) & \Phi_J{}^\nu(y) & \psi_J(y) & \Psi_J(y) \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\{\phi_I^\mu(x), \phi_J^\nu(y)\} & \{\phi_I^\mu(x), \Phi_J^\nu(y)\} & \{\phi_I^\mu(x), \psi_J(y)\} & \{\phi_I^\mu(x), \Psi_J(y)\} \\
\{\Phi_I^\mu(x), \phi_J^\nu(y)\} & \{\Phi_I^\mu(x), \Phi_J^\nu(y)\} & \{\Phi_I^\mu(x), \psi_J(y)\} & \{\Phi_I^\mu(x), \Psi_J(y)\} \\
\{\psi_I(x), \phi_J{}^\nu(y)\} & \{\psi_I(x), \Phi_J^\nu(y)\} & \{\psi_I(x), \psi_J(y)\} & \{\psi_I(x), \Psi_J(y)\} \\
\{\Psi_I(x), \phi_J^\nu(y)\} & \{\Psi_I(x), \Phi_J^\nu(y)\} & \{\Psi_I(x), \psi_J(y)\} & \{\Psi_I(x), \Psi_J(y)\}
\end{pmatrix}
\end{array}
\delta^2(x-y), \tag{B.10}
$$

la forma explicita de las entradas de la matriz (B.10) están dadas por

$$
\begin{aligned}
\{\phi_I^a(x), \phi_J^b(y)\} &= -\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\delta^2(x-y), \\
\{\phi_I^a(x), \Phi_J^b(y)\} &= 0, \\
\{\phi_I^a(x), \psi_J(y)\} &= -\Lambda\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\partial_b^y\delta^2(x-y). \\
\{\Phi_I^a(x), \Phi_J^b(y)\} &= -\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\delta^2(x-y). \\
\{\Phi_I^a(x), \Psi_J(y)\} &= -\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\partial_b^y\delta^2(x-y).
\end{aligned} \tag{B.11}
$$

La matriz (B.10) tiene rango 4 y 4 vectores nulos, esto significa que la teoría presenta cuatro restricciones de primera clase y cuatro restricciones de segunda clase. Usando los vectores nulos de (B.10) [67], se pueden identificar las cuatro constricciones de primera clase

$$
\begin{aligned}
\gamma_I^1 &= p_I^0 \approx 0, \\
\gamma_I^2 &= 2\partial_a p_I^a - \partial_a\phi_I^a \approx 0, \\
\gamma_I^3 &= \pi_I^0 \approx 0, \\
\gamma_I^4 &= 2\partial_a \pi_I^a - \partial_a\Psi_I^a \approx 0,
\end{aligned} \tag{B.12}
$$

y el rango nos permite identificar las siguientes cuatro restricciones de segunda clase

$$
\begin{aligned}
\chi_I^1 &= p_I^a - \frac{\Lambda}{2}\varepsilon^{0ab}e_{bI} \approx 0, \\
\chi_I^2 &= \pi_I^a - \frac{1}{2}\varepsilon^{0ab}A_{bI} \approx 0.
\end{aligned} \tag{B.13}
$$

Los corchtes de Poisson entre las restricciones (B.12) y (B.13), que son diferentes de cero, son

$$\begin{aligned} \{\chi^1(x), \chi^1(y)\} &= -\Lambda \varepsilon^{0ab} \eta_{IJ} \delta^2(x-y), \\ \{\chi^2(x), \chi^2(y)\} &= -\varepsilon^{0ab} \eta_{IJ} \delta^2(x-y). \end{aligned} \tag{B.14}$$

Los corchetes de Posisson dados por (B.14) se utilizan para construir la siguiente matriz

$$C^{ab} = \begin{pmatrix} -\Lambda & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \varepsilon^{0ab} \eta_{IJ} \delta^2(x-y), \tag{B.15}$$

y su inversa está dada por

$$[C^{ab}]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Lambda} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varepsilon_{0ab} \eta^{IJ} \delta^2(x-y). \tag{B.16}$$

Con todos estos resultados, podemos eliminar las restricciones de segunda clase mediante la introducción de los corchetes de Dirac. Por lo tanto, los corchetes de Dirac entre dos funcionales A y B es expresado por

$$\{A(x), B(y)\}_D = \{A(x), B(y)\}_P - \int dudv \{A(x), \zeta^a(u)\} [C^{ab}]^{-1}(u,v) \{\zeta^b(v), B(y)\}, \tag{B.17}$$

donde $\{A(x), B(y)\}_P$ es el corchete de Poisson entre dos funcionales A, B, $\zeta^a(u) = (\chi^1, \chi^2)$ son las constricciones de segunda clase y $[C^{ab}]^{-1}$ está dada por (B.16). Con todos los elementos antes mencionados, se puede construir los corchetes de Dirac de la teoría

$$\{e^I_a(x), e^J_b(y)\}_D = \frac{1}{\Lambda} \varepsilon_{0ab} \eta^{IJ} \delta^2(x-y), \tag{B.18}$$

$$\{e^I_a(x), p^b_J(y)\}_D = \frac{1}{2} \delta^b_a \delta^I_J \delta^2(x-y), \tag{B.19}$$

$$\{p^a_I(x), p^b_J(y)\}_D = \frac{\Lambda}{4} \varepsilon^{0ab} \eta_{IJ} \delta^2(x-y), \tag{B.20}$$

$$\{A^I_a(x), A^J_b(y)\}_D = \varepsilon_{0ab} \eta^{IJ} \delta^2(x-y), \tag{B.21}$$

$$\{A^I_a(x), \pi^b_J(y)\}_D = \frac{1}{2} \delta^b_a \delta^I_J \delta^2(x-y), \tag{B.22}$$

$$\{\pi_I^a(x), \pi_J^b(y)\}_D = \frac{1}{4}\varepsilon^{0ab}\eta_{IJ}\delta^2(x-y), \tag{B.23}$$

$$\{e_0^I(x), p_J^0(y)\}_D = \delta_J^I\delta^2(x-y), \tag{B.24}$$

$$\{A_0^I(x), \pi_J^0(y)\}_D = \delta_J^I\delta^2(x-y). \tag{B.25}$$

Por lo tanto, con el fin de cuantizar la teoría, se considera a las restricicones de segunda clase (B.13) como identidades fuertes y los corchetes de Dirac se promueven a conmutadores. Vale la pena comentar, que los corchetes de Dirac (B.18)-(B.25) son un caso particular del caso no abeliano reportado en [66].

Apéndice C

Fijación de la norma

A pesar de que se ha eliminado las restricciones de segunda clase, es necesario eliminar toda la libertad de norma de la teoría. Con el fin de lograr este objetivo, tenemos que imponer condiciones de norma. La fijación de norma se elige el de Coulomb y el temporal

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= e_0^I \approx 0, \\ \Omega_2 &= \partial^a e_a^I \approx 0, \\ \Omega_1 &= A_0^I \approx 0, \\ \Omega_2 &= \partial^a A_a^I \approx 0, \end{aligned} \tag{C.1}$$

de este modo se obtiene el conjunto completo de restricicones de segunda clase

$$
\begin{aligned}
\chi_I^1 &= p_I^0 \approx 0, \\
\chi_I^2 &= 2\partial_a p_I^a - \partial_a \phi_I^a \approx 0, \\
\chi_I^3 &= \pi_I^0 \approx 0, \\
\chi_I^4 &= 2\partial_a \pi_I^a - \partial_a \Psi_I^a \approx 0, \\
\chi_I^5 &= p_I^a - \frac{\Lambda}{2}\varepsilon^{0ab} e_{bI} \approx 0, \\
\chi_I^6 &= \pi_I^a - \frac{1}{2}\varepsilon^{0ab} A_{bI} \approx 0, \\
\chi_7^I &= e_0^I \approx 0, \\
\chi_8^I &= \partial^a e_a^I, \approx 0 \\
\chi_9^I &= A_0^I \approx 0, \\
\chi_{10}^I &= \partial^a A_a^I \approx 0.
\end{aligned} \tag{C.2}
$$

Ahora, con el fin de construir los corchetes de Dirac, se necesita calcular la matriz C_{ab} cuyas entradas están dadas por los corchetes de Poisson entre las restricciones de segunda clase (C.2). La matriz C_{ab} tiene la siguiente forma

$$
C_{ij} = \begin{pmatrix}
0 & -\Lambda\eta_{IJ} & 0 & 0 & 0 & -\delta_I^J\partial_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\Lambda\eta_{IJ} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_I^J\partial_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\delta_I^J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \delta_J^I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_I^J\nabla^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\delta_J^I\partial_1 & -\delta_J^I\partial_2 & 0 & 0 & \delta_J^I\nabla^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_{IJ} & 0 & 0 & 0 & -\delta_I^J\partial_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{IJ} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_I^J\partial_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_I^J & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_J^I & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_I^J\nabla^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_J^I\partial_1 & -\delta_J^I\partial_2 & 0 & 0 & \delta_J^I\nabla^2 & 0
\end{pmatrix} \delta^2(x-y),
$$

y su inversa está dada por

$$
[C^{ab}]^{-1} = \begin{pmatrix}
0 & \Lambda^{-1}\eta^{IJ} & 0 & 0 & -\Lambda^{-1}\eta^{IJ}\frac{\partial_2}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\Lambda^{-1}\eta^{IJ} & 0 & 0 & 0 & \Lambda^{-1}\eta^{IJ}\frac{\partial_1}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \delta_I^J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\delta_J^I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\Lambda^{-1}\eta^{IJ}\frac{\partial_2}{\nabla^2} & \Lambda^{-1}\eta^{IJ}\frac{\partial_1}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & \delta_I^J\frac{1}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_J^I\frac{1}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^{IJ} & 0 & 0 & -\eta^{IJ}\frac{\partial_2}{\nabla^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta^{IJ} & 0 & 0 & 0 & \eta^{IJ}\frac{\partial_1}{\nabla^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_I^J & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_J^I & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta^{IJ}\frac{\partial_2}{\nabla^2} & \eta^{IJ}\frac{\partial_1}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & \delta_I^J\frac{1}{\nabla^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_J^I\frac{1}{\nabla^2} & 0
\end{pmatrix} \delta^2(x-y), \tag{C.3}
$$

De esta manera, mediante el uso de la definición de los corchetes de Dirac entre dos funcionales (B.17), obtenemos los siguientes corchetes de Dirac entre los campos

$$\{e_a^I(x), p_J^b(y)\}_D = \delta^I{}_J(\delta^b{}_a - \frac{\partial_a\partial^b}{\nabla^2})\delta(x-y), \tag{C.4}$$

$$\{e_a^I(x), e_b^J(y)\}_D = 0, \tag{C.5}$$

$$\{p_I^a(x), p_J^b(y)\}_D = 0, \tag{C.6}$$

$$\{A_a^I(x), \pi_J^b(y)\}_D = \delta^I{}_J(\delta^b{}_a - \frac{\partial_a\partial^b}{\nabla^2})\delta(x-y), \tag{C.7}$$

$$\{A_a^I(x), A_b^J(y)\}_D = 0, \tag{C.8}$$

$$\{\pi_I^a(x), \pi_J^b(y)\}_D = 0. \tag{C.9}$$

Podemos observar que estos corchetes coinciden con los calculados mediante el formalismo de FJ en el capítulo 7.

Apéndice D

Formalismo de Dirac aplicado a la acción de Bonzom-Livine: caso Abeliano

La acción que se estudia en este apéndice es dada por

$$
\begin{aligned}
S^{Abeliana}[A,e] &= \int 2e^I \wedge F_I[A] + \frac{1}{\sqrt{|\Lambda|}} \int A^I \wedge dA_I + s\sqrt{|\Lambda|} e^I \wedge de_I \\
&= \int \varepsilon^{0ab} \left[\left(\frac{A_0^I}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}} + e_0^I \right) F_{abI} + \left(\frac{A_b^I}{\gamma\sqrt{|\Lambda|}} + e_b^I \right) \dot{A}_{aI} + \left(\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma} e_0^I + A_0^I \right) T_{abI} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma} e_b^I + A_b^I \right) \dot{e}_{aI} \right], \qquad \text{(D.1)}
\end{aligned}
$$

donde A_μ^a and e_μ^a son el set de campos de norma valuados en $U(1)$. Se introducen los momentos canónicos conjugados definidos como

$$\pi_I^\lambda := \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\lambda^I} = \varepsilon^{0\lambda\rho} \left[\frac{1}{\sqrt{|\Lambda|}\gamma} A_{\rho I} + e_{\rho I} \right], \qquad \text{(D.2)}$$

$$p_I^\lambda := \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{e}_\lambda^I} = \varepsilon^{0\lambda\rho} \left[A_{\rho I} + \frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{\gamma} e_{\rho I} \right]. \qquad \text{(D.3)}$$

despues de realizar el análisis canónico, se obtiene el siguiente resultado: el sistema tiene cuatro restricciones de primera clase

$$\begin{aligned}
\gamma^1 &= p_I^0 \approx 0, \\
\gamma^2 &= 2\partial_a p_I^a - \partial_a \phi_I^a \approx 0, \\
\gamma^3 &= \pi_I^0 \approx 0, \\
\gamma^4 &= 2\partial_a \pi_I^a - \partial_a \Phi_I^a \approx 0,
\end{aligned} \tag{D.4}$$

y 4 restricciones de segunda clase[1]

$$\begin{aligned}
\chi_{1I}^a &= p_I^a - \varepsilon^{0ab}\left[A_{bI} + \Omega e_{bI}\right] \approx 0, \\
\chi_{2I}^a &= \pi_I^a - \varepsilon^{0ab}\left[\beta A_{bI} + e_{bI}\right] \approx 0.
\end{aligned} \tag{D.5}$$

Los corchtes de Poisson entre las restricciones (D.4) y (D.5), que son diferentes de cero, son

$$\begin{aligned}
\{\chi_{1I}^a(x), \chi_{1J}^b(y)\} &= -2\Omega\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ}\delta^2(x-y), \\
\{\chi_{1I}^a(x), \chi_{2J}^b(y)\} &= -2\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ}\delta^2(x-y), \\
\{\chi_{2I}^a(x), \chi_{2J}^b(y)\} &= -2\beta\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ}\delta^2(x-y).
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Los corchetes de Posisson dados por (D.6) se utilizan para construir la siguiente matriz

$$C^{ab} = \begin{pmatrix} -2\Omega & -2 \\ -2 & -2\beta \end{pmatrix} \varepsilon^{0ab}\delta_{IJ}\delta^2(x-y), \tag{D.7}$$

y su inversa está dada por

$$[C^{ab}]^{-1} = \frac{\gamma^2}{2(s-\gamma^2)} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -1 & \Omega \end{pmatrix} \varepsilon_{0ab}\delta^{IJ}\delta^2(x-y). \tag{D.8}$$

con todos estos resultados, podemos eliminar las restricciones de segunda clase mediante la introducción de los corchetes de Dirac. Por lo tanto, los corchetes de Dirac entre dos funcionales A y B esta expresado por

[1]La forma de obtener las restricciones de primera clase y segunda clase es análoga a lo que se realizo en el apéndice A

$$\{A(x),B(y)\}_D = \{A(x),B(y)\}_P - \int dudv \{A(x),\zeta^i(u)\}[C^{ij}]^{-1}(u,v)\{\zeta^j(v),B(y)\}, \tag{D.9}$$

donde $\{A(x),B(y)\}_P$ es el corchete de Poisson entre dos funcionales A, B, $\zeta^a(u) = (\chi^1,\chi^2)$ son las constricciones de segunda clase y $[C^{ab}]^{-1}$ está dada por (D.8). Con todos los elementos antes mencionados, se puede construir los corchetes de Dirac de la teoría

$$\begin{aligned}
\{e^I_a(x),e^J_b(y)\}_D &= \frac{\gamma}{2\sqrt{|\Lambda|}(s-\gamma^2)}\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ}\delta^2(x-y),\\
\{A^I_a(x),e^J_b(y)\}_D &= -\frac{\gamma^2}{2(s-\gamma^2)}\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ}\delta^2(x-y),\\
\{e^I_a(x),p^b_J(y)\}_D &= \frac{1}{2}\delta^b_a\delta^I_J\delta^2(x-y),\\
\{p^a_I(x),p^b_J(y)\}_D &= \frac{s\sqrt{|\Lambda|}}{2\gamma}\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ}\delta^2(x-y),\\
\{A^I_a(x),A^J_b(y)\}_D &= \frac{s\sqrt{|\Lambda|}\gamma}{2(s-\gamma^2)}\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ}\delta^2(x-y),\\
\{A^I_a(x),\pi^b_J(y)\}_D &= \frac{1}{2}\delta^b_a\delta^I_J\delta^2(x-y),\\
\{\pi^a_I(x),\pi^b_J(y)\}_D &= \frac{\beta}{2}\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ}\delta^2(x-y),\\
\{p^a_I(x),\pi^b_J(y)\}_D &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ}\delta^2(x-y),\\
\{e^I_0(x),p^0_J(y)\}_D &= \delta^I_J\delta^2(x-y),\\
\{A^I_0(x),\pi^0_J(y)\}_D &= \delta^I_J\delta^2(x-y),
\end{aligned} \tag{D.10}$$

Por lo tanto, con el fin de cuantizar la teoría, se considera a las restricicones de segunda clase (D.5) como identidades fuertes y los corchetes de Dirac se promueven a conmutadores. Vale la pena comentar, que los corchetes de Dirac (D.10) son un caso particular del caso no Abeliano reportado en [67].

Apéndice E

Fijación de la norma

A pesar de que se ha eliminado las restricciones de segunda clase, es necesario eliminar toda la libertad de norma de la teoría. Con el fin de lograr este objetivo, tenemos que imponer condiciones de norma. La fijación de norma se elige el de Coulomb y el temporal, de este modo se obtiene el conjunto completo de restricicones de segunda clase

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= e_0^I \approx 0, \\
\Omega_2 &= \partial^a e_a^I \approx 0, \\
\Omega_3 &= A_0^I \approx 0 \\
\Omega_4 &= \partial^a A_a^I \approx 0, \\
\Omega_5 &= p_I^0 \approx 0, \\
\Omega_6 &= 2\partial_a p_I^a - \partial_a \chi_{1I}^a \approx 0, \\
\Omega_7 &= \pi_I^0 \approx 0, \\
\Omega_8 &= 2\partial_a \pi_I^a - \partial_a \chi_{2I}^a \approx 0, \\
\Omega_9 &= p_I^a - \varepsilon^{0ab}\left[A_{bI} + \Omega e_{bI}\right] \approx 0, \\
\Omega_{10} &= \pi_I^a - \varepsilon^{0ab}\left[\beta A_{bI} + e_{bI}\right] \approx 0.
\end{aligned} \tag{E.1}$$

las entradas de la matriz G, esta formada por los corchetes de Poisson entre las restricciones (E.1), la estructura de la matriz está dada por

$$G(x,y) = \begin{pmatrix} -2\Omega\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ} & 0 & 0 & 0 & \delta_I^J\partial_x^a & -2\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_I^J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_J^I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_I^J\nabla_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_J^I\partial_x^b & 0 & 0 & -\delta_J^I\nabla_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ} & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\beta\varepsilon^{0ab}\delta_{IJ} & 0 & 0 & 0 & \delta_I^J\partial_x^a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_I^J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_J^I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_I^J\nabla_x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_J^I\partial_x^b & 0 & 0 & -\delta_J^I\nabla_x^2 & 0 \end{pmatrix} \times\delta^2(x-y). \tag{E.2}$$

la inversa de G es

$$[G(x,y)]^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{0ab}\delta^{IJ}\frac{\beta}{2\theta} & 0 & 0 & \varepsilon_{0ab}\delta_J^I\frac{\beta\partial_x^b}{2\theta\nabla_x^2} & 0 & -\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ}\frac{1}{2\theta} & 0 & 0 & -\varepsilon_{0ab}\delta_J^I\frac{\partial_x^b}{2\theta\nabla_x^2} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_I^J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_J^I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{0ba}\delta_I^J\frac{\beta\partial_x^a}{2\theta\nabla_x^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\delta_I^J}{\nabla_x^2} & -\varepsilon_{0ba}\delta_I^J\frac{\partial_x^a}{2\theta\nabla_x^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_J^I}{\nabla_x^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_{0ab}\delta^{IJ}\frac{1}{2\theta} & 0 & 0 & -\varepsilon_{0ab}\delta_J^I\frac{\partial_x^b}{2\theta\nabla_x^2} & 0 & \varepsilon_{0ab}\delta^{IJ}\frac{\Omega}{2\theta} & 0 & 0 & \varepsilon_{0ab}\delta_J^I\frac{\Omega\partial_x^b}{2\theta\nabla_x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_I^J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_J^I & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_{0ba}\delta_I^J\frac{\partial_x^a}{2\theta\nabla_x^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{0ba}\delta_I^J\frac{\Omega\partial_x^a}{2\theta\nabla_x^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\delta_I^J}{\nabla_x^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_J^I}{\nabla_x^2} & 0 \end{pmatrix} \times\delta^2(x-y),$$

se define la variable $\theta = \beta\Omega - 1$. Despues de haber determinado la inversa de G, se procede a construir los corchetes de Dirac, estos corchetes están dados por

$$\begin{aligned} \{e_a^I(x), p_J^b(y)\}_D &= \delta^I{}_J(\delta^b{}_a - \frac{\partial_a\partial^b}{\nabla^2})\delta(x-y), \\ \{e_a^I(x), e_b^J(y)\}_D &= 0, \\ \{p_I^a(x), p_J^b(y)\}_D &= 0, \\ \{A_a^I(x), \pi_J^b(y)\}_D &= \delta^I{}_J(\delta^b{}_a - \frac{\partial_a\partial^b}{\nabla^2})\delta(x-y), \\ \{A_a^I(x), A_b^J(y)\}_D &= 0, \\ \{\pi_I^a(x), \pi_J^b(y)\}_D &= 0. \end{aligned} \tag{E.3}$$

Bibliografía

[1] Hanson, A., Regge, T. and Teitelboim, C. (1978). Constrained Hamiltonian Systems, (Roma: Accademia Nazionale dei Lincei).

[2] Henneaux, M. and Teitelboim, C. (1991). Quantization of Gauge Systems, (Princeton,New Jersey: Princeton University Press).

[3] Sundermeyer, K., (1982). Constrained Dynamics, Lecture Notes inPhysics, 169,(Alemania: Springer-Verlag).

[4] Weinberg. S, *The quantum theory of fields*, Cambridge University Press, Three Volumes, (1995).

[5] Arnowitt, R., Deser, R., Misner, C.: In:Witten, L. (ed.) Gravitation: An Introduction to Current Research. Wiley, New York (1962).

[6] Rovelli, C. Quantum Gravity. Cambridge University Press, Cambridge (2004).

[7] Palatini A, Rend. Circ. Mat, Palermo 43, 203, (1917)

[8] Ashtekar, A. Phys. Rev. Lett. 77, 3288 (1986).

[9] Ashtekar, A. Phys. Rev. D 36, 1587 (1987).

[10] Ashtekar, A. Lectures on Non-Perturbative Canonical Gravity. World Scientific, Singapore (1991).

[11] Ashtekar, A., Romano, J.D., Tale, R.S.: Phys. Rev. D 40, 2572 (1989).

[12] Morales-Tecotl, H.A., Urrutia, L.F., Vergara, J.D.: Class. Quantum Gravity 13, 2933-2940 (1996).

[13] Samuel, J. Pramana J. Phys. 28, L429 (1987)

[14] Jacobson, T., Smolin, L.: Class. Quantum Gravity 5, 583 (1988).

[15] Capovilla, R., Dell, J., Jacobson, T.: Class. Quantum Gravity 8, 59 (1991).

[16] Barbero, J.F.: Phys. Rev. D 51, 5507 (1995).

[17] Holts, S.: Phys. Rev. D 53, 5966 (1996).

[18] Capovilla, R., Jacobson, T., Dell, J.: Phys. Rev. Lett. 63, 2325 (1989).

[19] Thiemann, T. Modern Canonical Quantum General Relativity. Cambridge University Press, Cambridge (2007).

[20] Staruszkiewicz, A. (1963). Acta Physica Polonica 6, 735-740.

[21] A. Schwarz, Lett. Math. Phys. 2 (1978) 247.

[22] Deser, S. and Jackiw, R. (1984). Ann. Phys. 153, 405-416.

[23] Deser, S. and Jackiw, R. (1988). Commun. Math. Phys. 118, 495-509.

[24] ’t Hooft, G. (1988). Commun. Math. Phys. 117, 685-700.

[25] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Phys. Rev. Lett. 48(1983)975, Ann. Phys. NY 140(1984)372.

[26] E. Witten, Nucl. Phys. 311B(1988)46; Nucl. Phys. 323B(1989)113.

[27] R. M. S. Barbosa, C. P. Constantinidis, Z. Oporto and O. Piguet, Class. Quantum Grav. 29 (2012) 155011.

[28] Alberto Escalante and Omar Rodriguez Tezompantzi. Int. J. Pure Appl.Math. 81, (2012) 701-713 arXiv:1301.0502 [math-ph].

[29] Torres del Castillo G F and Acosta Avalos D, Rev. Mex. Fs. 40 405, (1994).

[30] H. García-Compean, O. Obregón, C. Ramírez, M. Sabido, Phys. Rev. D 61, 085022, (2000).

[31] P. Peldan, Class.Quant.Grav.11:1087-1132, (1994).

[32] Dirac, P.A.M. (1964). Lectures on Quantum Mechanics, Yeshiva University, New York.

[33] A. Escalante and M. Zárate, Ann. Phys. 353, 163-178, (2015).

[34] A. Escalante and Omar Rodriguez Tzompantzi. JHEP, 05, 073, (2014).

[35] A. Escalante and L. Carbajal, Ann. Phys. 326, 323-339, (2011).

[36] A. Escalante. Phys. Lett.B 676:105-111, (2009).

[37] A. Escalante and I. Rubalcava-Garcia, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 09, 1250053, (2012).

[38] A. Escalante, Int. J. Theor. Phys. 48, 2486-2498, (2009).

[39] V. Bonzom, E. R. Livine, Classical Quantum Gravity 25, 195024, (2008).

[40] R. Rosas-Rodriguez, Int. J. Mod. Phys. A, 23: 895-908, (2008)

[41] L. D. Faddeev and R. Jackiw, Phys. Rev. Lett. 60, 1692 (1988).

[42] B. Neto J. Wotzasek C. Int. J. Mod. Phys. A, 1992, 7: 4981.

[43] Everton M.C. Abreu, Albert C. R. Mendes, Clifford Neves, Wilson Olveira and Rodrigo C. N. Silva, JHEP 06, 093, (2013).

[44] Y. Gang Miao, J. Ge Zhou and Y. Yang Liu, Phys. Lett B, 323, 169-173, (1994).

[45] Foussats, A. et. al. Class. Quantum. Grav. 14 (1997) 269-284.

[46] Barcelos-Neto, J. et al. Z.Phys. C66(1995).

[47] Y. Jin-Long and H. Yong-Chang, Chinese Physics C(HEP and NP) Vol. 32, No. 10, oct, (2008).

[48] Y.C. Haung, J.L. Yang. Phys. Lett. B668, 438-441(2008).

[49] E.M.C. Abreu, A.C.R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira, F.I. Takakura, L.M.V. Xavier, Modern Phys. Lett. A 23 (2008) 829; E.M.C. Abreu, A.C.R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira, F.I. Takakura, Internat. J. Modern Phys. A 22 (2007) 3605; E.M.C. Abreu, C. Neves, W. Oliveira, Internat. J. Modern Phys. A 21 (2008) 5329; C. Neves, W. Oliveira, D.C. Rodrigues, C. Wotzasek, Phys. Rev. D 69 (2004) 045016; J. Phys. A 3 (2004) 9303; C. Neves, C. Wotzasek, Internat. J. Modern Phys. A 17 (2002) 4025; C. Neves, W. Oliveira, Phys. Lett. A 321 (2004) 267; J.A. Garcia, J.M. Pons, Internat. J. Modern Phys. A 12 (1997) 451; E.M.C. Abreu,

A.C.R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira, R.C.N. Silva, C. Wotzasek, Phys. Lett. A 374 (2010) 3603-3607.

[50] Einstein, Albert. Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Annalen der Physik, 49, 769-822 (1915).

[51] C. Misner, K. Thorne, J. A. Wheeler, Gravitation. W. H. Freeman and Company, 1973.

[52] M. Nakahara, Geometry, Topology and Physics. Graduate Student Series in Physics, Adam Hilger, Bristol, Philadelphia and New York, 1991.

[53] M. Blagojevi, Gravitation and gauge symmetries. Series in high energy Physics, cosmology and gravitation, (2002).

[54] J. Zanelli, Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities, second edition, February 2008, hep-th/0502193.

[55] D. M. Gitman and I.V.Tyutin, Quantization of fields with constraints, (Berlin, Germany: Springer. (Springer series in nuclear and particle physics, (1990)).

[56] Jian Jing, Feng-Hua Liiu and Jian- Feng Chen, Phys. Rev D, 78, 125004, (2008).

[57] A. M. Frolov, N. Kiriushcheva and S. V. Kuzmin, Grav. Cosmol. 16 (2010) 181-194.

[58] Joseph D. Romano, Gen. Rel. Grav. 25(1993).

[59] L. Castellani, Ann. Phys. 143, (1982) 357.

[60] A. Achucarro and P. K. Townsend, Phys. Lett. B 180, 89 (1986).

[61] R. Bufalo, BM. Pimentel, Eur. Phys. J.C (2014) 74:2993.

[62] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, Int. J.Mod. Phys. A7 (1992) 4981. See also H. Montani, Int. J. Mod. Phys. A8 (1993) 4319.

[63] Zheng-wen Long and Bo Liu, Europhys. Lett. 58 (1) (2002).

[64] H. Montani and C. Wotzasek. Int. J. Mod. Phys.A 8(1993), 3387.

[65] L. Leng, H. Yong-Chang. Annals. Phys, (2007), 322: 2469.

[66] A.Escalante and J. Manuel-Cabrera, Annals. Phys. 343, 27-39, (2014).

[67] Alberto Escalante, J. Manuel-Cabrera. Ann. Phys, 361 (2015) 585-604.

[68] A. Escalante and J. Manuel-Cabrera, submitted to JHEP, (2015).

[69] M. Do Carmo, Riemman Geometry. Mathematics: Theory and Applications, Birkhäuser Boston, Second Printing, (1993).

BUAP

MEMORANDUM

Para:	DR. HUGO MORALES TECOTL, Presidente. DR. ROBERTO CARTAS FUENTEVILLA, Secretario DR. JESÚS TOSCANO CHÁVEZ DR. JOSÉ ELÍAS LÓPEZ CRUZ DR. GERMÁN AURELIO LUNA ACOSTA DR. ALBERTO ESCALANTE HERNÁNDEZ (ASESOR).
De:	Dr. José Elías López Cruz, Secretario Académico.
Asunto:	Se cita al examen de grado de Doctorado en Ciencias (Física) del M.C. Jaime Manuel Cabrera.
Fecha:	Jueves 25 de febrero de 2016
CC:	Expediente.

Me permito informarles que el Comité Académico del IFUAP, los ha designado integrantes del Comité para el Examen de Grado de Doctorado en Ciencias (Física) del **M.C. Jaime Manuel Cabrera**, con su tesis titulada: *"Análisis de sistemas dinámicos describiendo relatividad general en tres dimensiones", que presentará el día martes 1ro. de marzo de 2016 a las 10:30hrs. en el auditorio del IFUAP.*

ATENTAMENTE

Elías López

Dr. José Elías López Cruz
Secretario Académico

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS" · 1578

/LAEmhr

Instituto de Física "Ing. Luis Rivera Terrazas"
Av. San Claudio esq. 18 sur, edif 110 A, B y C.
Ciudad Universitaria, Col. San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570
01(222) 2295610, Fax: ext. 5611