Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Estudio de la Auto - Reconstrucción de Algunos Campos Estructurados de Luz

Tesis presentada al

Posgrado en Ciencias (Física Aplicada)

como requisito parcial para la obtener el título de

Doctor en Ciencias (Física Aplicada)

por

Job Mendoza Hernández

asesorado por

Dr. Marcelo David Iturbe Castillo

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco

Puebla Pue.
Marzo de 2016

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Estudio de la Auto - Reconstrucción de Algunos Campos Estructurados de Luz

Tesis presentada al

Posgrado en Ciencias (Física Aplicada)

como requisito parcial para la obtener el título de

Doctor en Ciencias (Física Aplicada)

por

Job Mendoza Hernández

asesorado por

Dr. Marcelo David Iturbe Castillo

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco

Puebla Pue.

Marzo de 2016

Título: Estudio de la Auto - Reconstrucción de Algunos Campos Estructurados de Luz

Estudiante: Job Mendoza Hernández

COMITÉ

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar
Presidente

Dr. Sergeyevich Andrey Ostrovsky
Secretario

Dr. Sabino Chávez Cerda
Vocal

Dra. Karen Volke Sepúlveda
Vocal

Dr. Gabriel Martínez Niconoff
Vocal

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Vocal

Dr. Marcelo David Iturbe Castillo
Asesor

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco
Asesor

AGRADECIMIENTOS.

Gracias a mis asesores: Dr. Marcelo David Iturbe Castillo y al Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco por todo el tiempo que me dieron y muchas gracias por sus consejos para llevar a buen puerto el trabajo de tesis. Al Dr. Sabino Chávez Cerda por compartir sus conocimientos y por las valiosas discusiones acerca del trabajo. Al Dr. Victor y Dra. Guadalupe por el tiempo que me dieron en sus cursos de verano. Gracias a los integrantes del comité revisor de tesis por su tiempo, por sus recomendaciones y comentarios.

Gracias a los que aportaron sus recursos a CONACYT que me otorgó una beca económica para llevar a cabo los estudios de doctorado. Gracias por el apoyo administrativo de las secretarias de posgrado cuando lo hubo y cuando no, gracias Dra. Maribel por lidiar con muchos asuntos administrativos. Gracias a los que me apoyaron en el laboratorio cuando tenia que apagar la luz o utilizar el equipo para realizar los experimentos de la tesis. Gracias amigos y amigas Fer, Juan, Fredy, Yaret, Dulce, Mari, Arge, Bety, Marco, Javi, Robert por las charlas y las bebidas espirutuosas tan necesarias, a veces, para tranquilizar el alma estresada.

Gracias a mi Familia, mi madre Esperanza, mi hermana Vianey y mi sobrino Miguel Damian, que han estado y han sido mi gran apoyo todos estos años. Gracias a ti mi querida Adriana por todo este tiempo juntos, por ir y venir, por quererme muchas gracias. Gracias a mis abuelos, tias, tios, primos, primas, sobrinos, cuñado por ayudarme cuando lo necesite, gracias por revivirme, por contestarme varias preguntas y hacer que tenga más preguntas.

Gracias a todos aquellos que me apoyaron y a los que no lo hicieron. Gracias, muchas gracias a todos.

DEDICADO ...

A mis abuelos, Leonila y Margarito.
A mis sobrinos, Ivonne y Miguel Damian.
A mi madre, Esperanza.
A mi querida Adriana.
A ustedes, por levantarme los domingos.

Índice general

Resumen iv

1. Introducción 1

2. Conceptos teóricos 10

2.1. Ecuación de onda 10

2.1.1. Ecuación de Helmholtz 12

2.2. Campos de luz invariantes en propagación: Bessel y Parabólicos . . . 12

2.2.1. Haces Bessel 13

2.2.2. Haz Bessel como la superposición de dos ondas cónicas 15

2.2.3. Haces Parabólicos 19

2.3. Ecuación paraxial de Helmholtz 20

2.3.1. Haz Gaussiano 21

2.3.2. Haces Laguerre-Gauss 23

2.3.3. Haces Hermite-Gauss 27

2.3.4. Haz Airy 29

2.4. Momento angular en haces de luz 33

2.4.1. Conservación del momento angular. Segunda ley de Kepler . . 33

2.4.2. Momento angular orbital en haces Laguerre-Gauss y haces Bessel 35

3. Auto-reconstrucción en campos adifraccionales 37

3.1. Solución numérica de la ecuación paraxial de Helmholtz 38

3.2. Superposición de dos ondas planas inclinadas 39

3.2.1. Vórtice óptico y su superposición 42

3.3. Haces Bessel de alto orden y sus ondas cónicas constituyentes 46

3.3.1. Superposición de ondas cónicas con frentes de onda rotantes . 49

3.3.2. Haces Bessel-coseno (seno) 55

3.4. Haces Parabólicos 56

3.4.1. Haces Parabólicos-coseno (seno) 56

3.4.2. Haces Parabólicos con frentes de onda rotantes 58

3.5. Representación analítica de haces Cáusticos 62

3.5.1. Solución analítica de haces Cáusticos adifraccionales 68

3.6. Analogía de la segunda ley de Kepler en haces con MAO 69

4. Auto-reconstrucción en haces paraxiales 74

4.1. Comparación entre haces Laguerre-Gauss y haces Bessel 75

4.1.1. Auto-reconstrucción en haces Laguerre-Gauss contra haces Bessel 83

4.2. Obtención analítica de la onda entrante y saliente de un haz Laguerre-Gauss 86

4.2.1. Función X 87

4.2.2. Haces Exóticos Laguerre-Gauss 89

4.3. Haces X-Hermite-Gauss 96

4.4. Auto-reconstrucción en haces Airy 101

5. Resultados experimentales **107**

5.1. Hologramas generados por computadora 108

5.1.1. Técnica de construcción de hologramas 109

5.1.2. Transmitancia de una pantalla LCD-SLM 110

5.2. Auto-reconstrucción en haces adifraccionales 112

5.3. Comparación de haces Laguerre-Gauss y haces Bessel 119

5.4. Haces Exóticos Laguerre-Gauss (ELG) 122

5.4.1. Haces Exóticos Laguerre-Gauss parcialmente obstruidos 124

6. Conclusiones **127**

A. Método de Frobenius **130**

B. Segunda solución de la ecuación diferencial Bessel: Método de Hankel. **134**

Artículos y resumen en extenso **151**

Presentaciones en congresos y reuniones **152**

Resumen

En este trabajo de tesis se estudia de forma teórica, numérica y experimental la propiedad de auto-reconstrucción de algunos campos estructurados de luz. En particular se enfoca a estudiar campos invariantes en propagación con algunas de sus variantes y como un ejemplo del caso de un campo variante en propagación a los haces Laguerre-Gauss. Se analiza la dinámica de los campos estructurados de luz al propagarse en el espacio libre después de ser bloqueados parcialmente con una obstrucción opaca. Para explicar la dinámica observada se utiliza la concepción de que este tipo de campos puede ser descrito como la superposición de dos ondas cuyos vectores transversales de onda son contra-propagantes. Se realiza una comparación entre los haces Bessel y los haces Laguerre-Gauss considerando parámetros similares entre ellos. Se obtiene la segunda solución de la ecuación diferencial asociada de Laguerre, para índices radial y azimutal entero, que hacía falta para demostrar que el haz Laguerre-Gauss también está constituido de una onda entrante y una onda saliente. Se verifica experimentalmente la dinámica de auto-reconstrucción de los haces estructurados, utilizando para ello un modulador espacial de luz de cristal líquido para modular la transmitancia de un haz láser de helio-neón. Con este sistema fue posible generar tanto el campo de luz estructurado como sus ondas constituyentes.

Capítulo 1

Introducción

El entendimiento de los fenómenos naturales ha sido de gran interés para la humanidad y la física es uno de los caminos para comprenderlos y utilizarlos. La óptica, una de las áreas de la física, se ha desarrollado para lograr el entendimiento de la luz permitiendo que un gran número de aplicaciones se hayan vislumbrado y realizado, por ejemplo, el desarrollo de fuentes de luz tipo láser [1, 2].

A lo largo del desarrollo de la óptica se han estudiado y generado diversos campos de luz con distintas estructuras de intensidad y fase. Estos campos deben de satisfacer la ecuación de onda o versiones más limitadas de ella, como lo son la ecuación de Helmholtz (EH) o la ecuación paraxial de Helmholtz (EPH). El haz Gaussiano que es una solución de la EPH tiene una distribución de intensidad dada por una función Gaussiana [3, 4]. Se han estudiado haces de alto orden con una envolvente Gaussiana y gobernados por polinomios de Hermite o polinomios asociados de Laguerre [2], estos haces son los haces Hermite-Gauss (HG) y los haces Laguerre-Gauss (LG) obtenidos al resolver la EPH con una simetría rectangular y simetría cilíndrica respectivamente [2,5]. Recientemente se han presentado los haces Ince-Gauss (IG) como soluciones a la EPH en coordenadas elípticas y descritos por los polinomios Ince [6]. Se han generado haces llamados elegantes manipulando las

funciones que describen los haces HG, LG e IG considerando parámetros complejos en sus argumentos [7–9]. Se han generado haces paraxiales que son descritos por la función Confluente Hipergeométrica [10–13]. Dentro de los haces paraxiales existe el haz Airy con la singularidad de que se propaga en trayectorias parabólicas por lo tanto es llamado haz acelerado y es definido por la función de Airy [14, 15], o los haces Pearcy que describen la difracción de una cúspide cáustica [16, 17].

Los haces paraxiales presentan difracción, esto es, sufren un aumento en su sección transversal al propagarse [3]. A finales de los años ochenta se demostraron haces no paraxiales cuyo perfil transversal de intensidad no se ensancha al propagarse manteniendo su distribución inicial en una región del espacio. Inicialmente se generaron los haces Bessel descritos por una función Bessel de primera clase y orden cero [18, 19]. Los haces Bessel son parte de los nombrados campos invariantes en propagación o adifraccionales y son soluciones a la ecuación de Helmholtz (EH) con simetría cilíndrica circular. Otros haces con estructuras transversales de intensidad parabólicas y elípticas se demostraron con la generación de haces Mathieu [20, 21] y haces Parabólicos [22, 23], siendo soluciones exactas en coordenadas elípticas y en coordenadas parabólicas circulares de la EH. Existen haces con distribuciones que no presentan simetrías circulares o parabólicas, por ejemplo los haces cáusticos, que no son soluciones exactas a la EH, pero que siguen siendo adifraccionales [24]. El haz Airy se puede decir adifracional por mantener su distribución inicial al propagarse sobre trayectorias parabólicas [25]. Haces Bessel-like acelerados, como el haz Airy, que no están limitados en una aproximación paraxial [26, 27].

Los campos invariantes en propagación son capaces de auto-reconstruirse o autosanarse: si se obstruye parte del haz después de cierta distancia éste tiende a recuperar su distribución inicial de amplitud y fase [28, 29]. Se han presentado algunas formas de describir tal propiedad considerando rigurosos desarrollos matemáticos. Basados en óptica ondulatoria la auto-reconstrucción resulta de la interpretación del haz Bessel como la propagación de ondas planas cuyo vector de onda yace sobre la superficie de un cono [30,47]. Sin embargo, la interpretación física de la propiedad de

auto-reconstrucción queda oscurecida por los desarrollos matemáticos. Con la interpretación del haz como la superposición de dos ondas viajeras, en sus componentes transversales, que generan un campo estacionario se demostró la auto-reconstrucción del haz [32–34]. Inicialmente se presentó para un haz Bessel de primer tipo y orden cero en términos de ondas cónicas saliente y entrante, cuyos vectores de onda en la dirección transversal es contra-propagante y al superponerse generan el haz Bessel. Las ondas cónicas son descritas por dos funciones Hankel y de analizar la dinámica en propagación al ser parcialmente obstruidas se demuestra que estas ondas constituyen al haz Bessel [34]. Recientemente la propagación del haz Airy se ha interpretado en términos de dos ondas con frentes de onda entrante y saliente que describen la generación de la estructura del haz y la reconstrucción de éste [25]. La sencillez de la interpretación de onda entrante y onda saliente permite describir la auto-reconstrucción de haces cuyo patrón de intensidad cambia al propagarse [35], donde la auto-reconstrucción, en este caso reconstrucción, se entiende como recobrar la distribución del haz como si éste no fuera perturbado. Teóricamente la interpretación de un haz estructurado en términos de dos ondas viajeras, con vectores de onda transversales contra-propagantes, sólo necesita de un conjunto completo de soluciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden que los describan, por ejemplo, la ecuación diferencial de Bessel es descrita por las funciones de Bessel de primer y segundo tipo [36,37]. En la literatura las dos soluciones pueden ser encontradas por el método de Frobenius o el método de variación de parámetros [37–42], si la independencia lineal de las soluciones requiere de una una variación logarítmica en una de las soluciones se pueden usar métodos descritos por Hankel y Weber [43]; o la representación de las soluciones en términos funciones hipergeométricas con diferentes parámetros [44,45]. Se ha mostrado la reconstrucción en haces Laguerre-Gauss para uno o dos anillos [46], incluso se han presentado análisis matemáticos basados en óptica física que presentan la imposibilidad de la reconstrucción de estos haces bajo el concepto de ondas planas que yacen sobre la superficie de un cono [47]. Existen trabajos que muestra la reconstrucción de la interferencia de haces Laguerre-Gauss

con un sólo anillo [48] y la reconstrucción en haces Pearcy y haces Bessel fraccionarios [16, 17, 49, 50], sin embargo no se ha sustentado la razón de su reconstrucción bajo algún principio, en este sentido la superposición de dos ondas viajeras es el camino para la interpretación de su reconstrucción.

Es bien sabido que los haces de luz pueden poseer momento angular en dos contribuciones: una parte asociada al spin y relacionada con su polarización, y la otra parte orbital relacionada con su distribución espacial de fase [51–54]. Allen y colaboradores demostraron que los haces Laguerre-Gauss tienen momento angular orbital bien definido proporcional al índice azimutal de los haces con fase azimutal $exp(i\phi m)$ [55]. El cálculo detallado del del vector de Poynting que envuelve todas las componentes eléctricas y magnéticas de la distribución del haz Laguerre-Gauss permite obtener el momento lineal para llegar al momento angular total o local [55]. La componente radial del vector de Poynting esta relacionado con el ensanchamiento del haz, la componente longitudinal con el momento lineal en la dirección de propagación z y la componente azimuthal da lugar al momento angular orbital en la dirección de propagación z. Dificultades en la interpretación del momento angular orbital, al investigar las trayectorias del vector de Poynting, en un tratamiento clásico y su concordancia en teoría cuántica se presentan en [56]. Por la similitud en la estructura de fase el estudio de momento angular no se limita a haces Laguerre-Gauss, en [57] se demuestra que haces Bessel de alto orden poseen momento angular orbital siguiendo un tratamiento vectorial riguroso, más aún, en tal artículo se demuestra la transferencia del momento angular de haces Bessel a partículas. Sin tener que transferir momento angular orbital (MAO) de haces a partículas se han mostrado métodos para saber que los haces poseen MAO. Realizando la interferencia de una onda plana con un haz con MAO [58, 59], el patrón de interferencia característico de forma de "tenedor" indica la existencia de MAO. Recientemente la difracción de un haz con MAO a través de una abertura triangular es una técnica para averiguar de manera indirecta el valor del vórtice óptico o carga topológica [5, 60].

En los haces con distintas estructuras de intensidad se han comparado sus dis-

tribuciones iniciales y su propagación en el espacio libre. La primera comparación entre un haz Gaussiano y un haz Bessel fue realizado por Durnin y colaboradores [18, 19]. En estos trabajos se demostraron las similitudes y diferencias en su trasporte de potencia y en las diferencias entres sus perfiles transversales de intensidad en propagación. En trabajos posteriores se presentaron diferentes criterios de comparación entre sus perfiles iniciales de propagación [61–64] y recientemente se ha presentado una revisión de las contribuciones de un haz Gaussiano y un haz Bessel en los últimos años [65]. Una comparación entre haces circularmente simétricos como los haces Bessel-Gauss [66], y haces elegantes Laguerre-Gauss fue realizada en [67], donde se relacionan para un número grande de anillos, sin embargo estos haces son estructurados únicamente dentro de una región finita, en un volumen cónico donde pueden existir y mas allá de este volumen modifican su estructura a un anillo [68]. Analogías entre las propiedades de haces y las cantidades en mecánica clásica se han presentado en relación con el momento de inercia de un sólido y la distribución de intensidad de un haz Laguerre-Gauss [69, 70]. El desplazamiento transversal del vector de Poynting o circulación de energía se ha presentado en las referencias [71–74]. En [71] se midió el flujo de energía relacionado directamente con el ángulo de los frentes de onda helicoidales de los haces haces Bessel, haces Laguerre-Gauss y haces Mathieu rotantes. Se calculo y midió el desplazamiento de dos lóbulos que corresponden al primer anillo (o elipse) a campo cercano del haz al ser transmitido por una rendija rectangular. Se ha reportado la dinámica de auto-reconstrucción de la superposición de haces Bessel con su distribución de intensidad rotante. [72, 73]. En [74] se observa de forma simple el sentido de giro que tiene un haz con momento angular orbital al obstruir con una navaja, en este trabajo se observa como la distribución de energía ha circulado para un haz Laguerre-Gauss con un sólo anillo.

En cuanto a la generación experimental de haces con diferentes estructuras transversales de intensidad con o sin momento angular se utilizan elementos ópticos u hologramas generados por computadora utilizando moduladores espaciales de luz (SLM, Spatial Light Modulator) de cristal líquido [75–77]. Un holograma generado

por computadora (CGH, computer generated hologram) u holograma sintético son términos usados para referirse a los hologramas producidos por códigos de computadora. Se modela matemáticamente la ecuación que describe el haz y se despliega en la pantalla de cristal liquido de tal forma que el haz pueda ser reconstruido. Un SLM de cristal líquido puede ser de reflexión o transmisión. Por ejemplo utilizando una SLM de reflexión se ha generado haces Bessel con alta eficiencia [78], donde se emplea un holograma de fase que coincide con la modulación de fase del haz a generar. También se han generado haces Mathieu utilizando este tipo de técnica al plasmar en la pantalla la fase del campo deseado y después de un filtrado espacial obtener la distribución [79]. Recientemente se ha explorado la generación de haces paraxiales como los haces Hermite utilizando elementos de fase (elemento kinoform) plasmados en una pantalla de cristal líquido [80]. La utilización de un SLM de transmisión ha sido poco explorada respecto a su contra parte de reflexión para la generación de distribuciones de luz debido a la baja potencia en los haces que se generan, sin embargo, es fácil implementar porque sólo es necesaria la ecuación que describe el haz y ningún otro algoritmo para generar el holograma sintético. En los trabajos [81–83] se muestra una forma precisa de codificar CGHs con distintas distribuciones circularmente simétricas como los haces Bessel. Se modifica la amplitud de los hologramas sumando una función, llamada de fondo, a la parte real del coseno del holograma computacional de tal forma de obtener un eficiente haz como resultado.

En este trabajo de tesis se analizará la reconstrucción de haces estructurados de luz, analítica, numérica y experimentalmente. El estudio esta enfocado principalmente a analizar haces invariantes en propagación y haces Laguerre-Gauss. El análisis realizado mostrará que los haces se comportan como si estuvieran formados de dos ondas con frentes contrapropagantes: uno entrante y otro saliente. Se estudiará la dinámica de reconstrucción de los haces al realizar un experimento que consiste en cubrir parte de la distribución con una obstrucción opaca. Se utiliza la concepción de dos ondas viajeras con frentes de onda cónicos entrante y saliente que al superponerse describen la estructura del haz Bessel. Son exploradas las propiedades

de reconstrucción los haces Parabólicos y Cáusticos al ser parcialmente obstruidos. Se realizará una comparación entre los haces Bessel y haces Laguerre-Gauss. Se presentará por primera vez la reconstrucción de haces Laguerre-Gauss con multiples anillos. Se encontrará la solución analítica para ordenes entero en los indices radial y azimutal de la ecuación diferencial asociada de Laguerre que puede describer una onda entrante y saliente que constituya un haz Laguerre-Gauss. La demostración experimental de la auto-reconstrucción de los haces se realizará utilizando SLM de cristal líquido de transmisión en modo de amplitud. Se mostrarán las ondas que constituyen los haces al ser parcialmente obstruidos modificando la técnica dada en [81], para generar haces que no son circularmente simétricos.

Los campos estructurados han sido utilizados para observar organismos vivos de tamaño nanómetrico con lo cual se ha mejorado la observación del mundo microscopio [85–87]. Se ha explorado el incremento de canales de comunicación por fibra óptica utilizando haces con momento angular [88, 89]. Se ha mostrado que haces estructurados pueden ser una excelente opción en la mejora de comunicaciones tanto en óptica clásica como cuántica [**?**, 90–92]. Se han mostrado bastantes desarrollos en la manipulación de materia utilizando campos estructurados por ejemplo en áreas como la biología y la físico-química [94]. Se han utilizado de haces con momento angular en fenómenos ópticos no lineales como la generación de segundo armónico [95], se han desarrollado aplicaciones para medir la velocidad transversal y longitud de partículas usando haces con momento angular [96]. Se han presentado diversas revisiones de las contribuciones en los desarrollos de haces con momento angular [59, 77], libros que presentan desarrollos teóricos y experimentales que se han llevado en los últimos años [97–99], pero que sin embargo no significa que el estudio de campos estructurados este agotado.

El presente trabajo de tesis se divide en seis capítulos. El segundo capítulo contiene los conceptos teóricos fundamentales para la comprensión de propagación de haces de luz al solucionar la ecuación de Helmholtz y la ecuación paraxial de Helmholtz. Se presentan las distribuciones de intensidad iniciales para campos

invariantes en propagación y haces paraxiales. Se presenta la propiedad de autoreconstrucción de haces Bessel interpretada en términos de dos ondas cónicas entrante y saliente. Se presentan los conceptos básicos de momento angular orbital en haces de luz.

En el capítulo tres se establece el modelo numérico que permite simular la dinámica de propagación de los haces de luz que se estudiarán a lo largo del trabajo. Se utiliza la dinámica que tiene la interferencia de dos ondas planas (con un pequeño ángulo) al ser parcialmente obstruidas para describir el fenómeno de reconstrucción. Con el ejemplo de ondas planas se observan las características de la dinámica de los constituyentes de haces Bessel de alto orden al ser parcialmente obstruidas. Se esquematizan los frentes de onda helicoidales-cónicas que generan el haz Bessel de alto orden. Se investiga la dinámica para haces Parabólicos con y sin frentes de onda rotantes. Se describen analíticamente los haces Cáusticos y se esquematizan sus frentes de onda cónicos con una modulación cuadrática o cubica. En haces con frentes de onda rotantes, en particular en haces Bessel de alto orden y haces Parabólicos, se mide la circulación energía en relación con el desplazamiento del momento lineal en su coordenada transversal y posición con el eje de propagación. Se demuestra que el desplazamiento de momento lineal es inversamente proporcional a la distancia y tienen el mismo comportamiento que una partícula en un sistema bajo fuerzas centrales de mecánica clásica.

En el capitulo cuatro se hace una comparación entres los haces Laguerre-Gauss y haces Bessel bajo circunstancias similares. Se hace uso de la ecuación asociada de Laguerre con índice radial grande para tener la misma condición inicial y la misma sección transversal entre los haces. Se encuentran los parámetros para hacer una comparación entre pares. Se estudia la dinámica de reconstrucción en haces Laguerre-Gauss con multiples anillos con respecto a los haces Bessel. Se demostrará que los haces LG son constituidos de dos ondas cónicas tal como los haces Bessel. Se presenta la segunda solución de la ecuación diferencial asociada de Laguerre para valores enteros en sus índices radial y azimutal que hacia falta para construir soluciones

transversales como una superposición compleja para describir las ondas cónicas en haces LG. Se estudian las características de estas ondas en propagación en el espacio libre y se estudia su dinámica al ser parcialmente obstruidos. Se muestran las ondas constituyentes de los haces Hermite-Gauss y se presentan los perfiles de intensidad partiendo de las relaciones entre polinomio de Laguerre y Hermite. Se muestran la propagación en espacio libre de estas ondas para algunos casos. Finalmente se estudia la dinámica de reconstrucción de haces Airy al ser parcialmente obstruidos en términos de las soluciones de ecuación de Airy.

En el capítulo cinco se abordan conceptos de la generación de haces de luz con hologramas generados por computadora. Se describe la técnica a utilizar y la modificación que se utiliza para la construcción de hologramas, que generen haces con simetría circular y no circular, en una pantalla de cristal liquido en modo de amplitud. Se observan experimentalmente las ondas constituyentes de los haces Bessel de alto orden. Se muestra la reconstrucción de haces Cáusticos, Parabólicos y Airy al ser parcialmente obstruidos. Se presenta la comparación de haces Laguerre-Gauss y haces Bessel en distintas etapas de su propagación. Se muestra la dinámica de autoreconstrucción en sus ondas cónicas constituyentes de los haces Laguerre-Gauss.

En el capítulo seis se darán las conclusiones del trabajo. Se presentan dos apéndices para hallar las soluciones a ecuaciones diferenciales de segundo orden y en la parte final de la tesis se muestran las referencias utilizadas, los artículos publicados y los congresos en los cuales se participo en el periodo en el que se realizo el doctorado.

Capítulo 2

Conceptos teóricos

En este capítulo se presentan los conceptos teóricos fundamentales para la comprensión de la propagación de la luz, en particular para la propagación de campos de luz en el espacio libre. Se presenta la ecuación de onda y la ecuación de Helmholtz para describir un campo escalar en la sección 2.1. Los haces adifraccionales se presentan como soluciones a la ecuación de Helmholtz en la sección 2.2. En la sección 2.2.2 se presenta el haz Bessel de primer tipo en términos de dos ondas cónicas partiendo de su generación experimental por medio de una mascarilla anular. En la sección 2.3 se presenta la ecuación paraxial de Helmholtz y las soluciones que describen los haces Leguerre-Gauss y haces Hermite-Gauss. En la sección 2.3.4 se muestra el haz Airy como otra solución a la ecuación paraxial. Por último en la sección 2.4 se presenta el momento angular orbital en haces Laguerre-Gauss y haces Bessel.

2.1. Ecuación de onda

Las ecuaciones de Maxwell permitieron establecer a la luz como una onda electromagnética [100]. Esta onda se propaga en el espacio libre con una velocidad igual

a la velocidad de la luz en el vacío de $c_0 \approx 3.0 \times 10^8$ m/s. La onda se puede describir matemáticamente por una función real de la posición $\vec{r} = (x, y, z)$ y del tiempo t, denotada por $u = u(\vec{r}, t)$ que satisface la ecuación de onda:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{2.1}$$

donde ∇^2 es el operador laplaciano que en coordenadas cartesianas se escribe como: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Una solución a la ecuación de onda es la función armónica:

$$u(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) \cos[2\pi\nu t + \alpha(\vec{r})], \tag{2.2}$$

donde el argumento del coseno es la fase y $A(\vec{r})$ es la amplitud, $\alpha(\vec{r})$ es una fase inicial, ν es la frecuencia y $\omega = 2\pi\nu$ es la frecuencia angular.

La intensidad óptica $I(\vec{r}, t)$ es el promedio temporal de la función de onda al cuadrado y se define como la potencia óptica por unidad de área:

$$I(\vec{r}, t) = 2 < u^2(\vec{r}, t) >, \tag{2.3}$$

donde el operador $< \cdots >$ indica el promedio sobre un intervalo de tiempo el cual es mucho más grande que el tiempo de un ciclo óptico.

La onda plana es otra solución a la ecuación de onda y en su representación compleja esta dada como:

$$u(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} \mp wt)}, \tag{2.4}$$

donde A es una constante, $\vec{k}$ es el vector de onda y su magnitud es $k = 2\pi/\lambda$. La onda viaja a lo largo de la dirección $\vec{k}$. En un instante de tiempo la fase de la onda es descrita por un plano perpendicular a $\vec{k}$. La importancia de las ondas planas es que cualquier onda tridimensional puede expresarse como una combinación de ondas planas [101].

2.1.1. Ecuación de Helmholtz

Es conveniente utilizar la función de onda escalar $u(\vec{r},t)$ descrita en (2.2) en una representación compleja para realizar operaciones. Sea la función compleja:

$$U(\vec{r},t) = A(\vec{r})exp(i\alpha(\vec{r}))exp(iwt), \tag{2.5}$$

donde $u(\vec{r},t) = Re\{U(\vec{r},t)\}$ y la función compleja $U(\vec{r},t)$ debe satisfacer la ecuación de onda (2.1).

La ecuación (2.5) la podemos reescribir como:

$$U(\vec{r},t) = U(\vec{r})\exp(iwt), \tag{2.6}$$

donde $U(\vec{r})$ es una amplitud compleja, $\mid U(\vec{r}) \mid = A(\vec{r})$ y $\arg\{U(\vec{r})\} = \alpha(\vec{r})$ su fase.

Sustituyendo (2.6) en la ecuación de onda (2.1) se tiene:

$$(\nabla^2 + k^2)U(\vec{r}) = 0, \tag{2.7}$$

donde $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ es número de onda.

La ecuación (2.7) es la **ecuación de Helmholtz** [3] para un campo escalar U.

2.2. Campos de luz invariantes en propagación: Bessel y Parabólicos

Los campos invariantes en propagación [19] son soluciones a la ecuación de Helmholtz, ecuación (2.7). Estos haces se propagan en una dirección preferencial sin cambio en su perfil transversal de intensidad en una región del espacio. Los haces tienen simetría de traslación separando la amplitud compleja en parte transversal y en parte longitudinal $U(\mathbf{r}) = U(r_t)U(z)$. En esta sección se presentarán los haces Bessel como la solución a la ecuación de Helmholtz (2.7) en coordenadas cilíndricas circulares y se mostrarán también los haces Parabólicos partiendo de la representación integral de los haces adifraccionales.

2.2.1. Haces Bessel

La ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas circulares (r, ϕ, z) para la amplitud compleja $U_B(r, \phi, z)$ esta dada como:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U_B}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial U_B}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U_B}{\partial z^2} + k^2 U_B = 0. \tag{2.8}$$

Suponiendo que $U_B(r, \phi, z) = N(r)Q(\phi)Z(z)$ y $Z(z) = exp(ik_z z)$ y $k_t^2 = k^2 - k_z^2$, entonces la ecuación (2.8) se puede reescribir como:

$$\frac{\partial^2 N(r)Q(\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial N(r)Q(\phi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial N(r)Q(\phi)}{\partial \phi^2} + k_t^2 N(r)Q(\phi) = 0. \tag{2.9}$$

La solución para la función $Q(\phi)$ depende sólo de la variable ϕ y es proporcional a $\exp(\pm im\phi)$ o $[cos(m\phi); sen(m\phi)]$ donde m es una constante de separación, sin embargo m es entera para cumplir las condiciones de frontera suponiendo una cavidad cilíndrica. Para la coordenada r se tiene la ecuación diferencial de Bessel:

$$r^2\frac{d^2 N(k_t r)}{dr^2} + r\frac{dN(k_t r)}{dr} + N(k_t r)\left[k_t^2 r^2 - m^2\right] = 0, \tag{2.10}$$

cuya solución, para m entero, son las funciones Bessel. La solución general de la ecuación de Bessel se escribe en términos de dos funciones linealmente independientes **apéndice 2**: funciones Bessel de orden m de primer tipo $J_m(k_t r)$ y de segundo tipo $Y_m(k_t r)$. Por tanto la solución es de la forma:

$$N_m(k_t r) = A_m J_m(k_t r) + B_m Y_m(k_t r), \tag{2.11}$$

donde A_m y B_m son constantes que pueden ser complejas.

Si se considera la primera solución J_m la amplitud compleja para un haz Bessel de alto orden se puede escribir como:

$$U_B(\mathbf{r}) = A_B exp(ik_z z) J_m(k_t r) exp(-im\phi). \tag{2.12}$$

La dependencia del haz Bessel en $exp(-im\phi)$ es muy importante por su relación con su momento angular y sus frentes de onda rotantes.

En el caso de tener una variación seno o coseno en ϕ, se tiene el haz Bessel-seno (BS) o Bessel-coseno (BC):

$$U_B(\mathbf{r}) = A_B \exp(ik_z z) J_m(k_t r) \times [cos(m\phi); sen(m\phi)], \tag{2.13}$$

que al sumarse de la siguiente forma:

$$U_B(\mathbf{r}) = A_B \exp(ik_z z) J_m(k_t r)[cos(m\phi) + isen(m\phi)], \tag{2.14}$$

se recupera el caso de un haz Bessel de alto orden, ecuación (2.12). En la figura (2.1) se presenta la distribución transversal de intensidad y fase para un haz Bessel de alto orden, un haz BC y un haz BS.

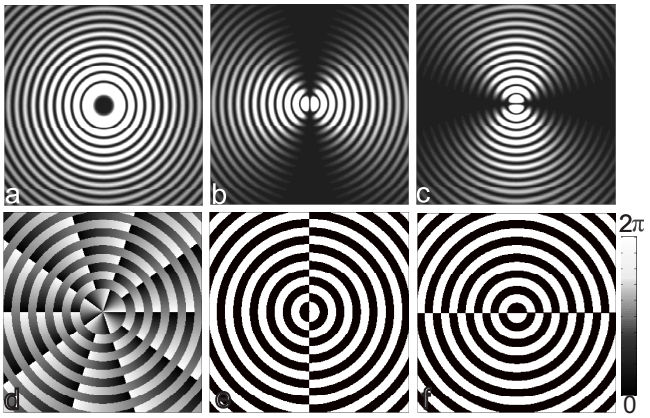

Figura 2.1: Distribución transversal de intensidad (arriba) y fase (abajo) para un haz: a) Bessel con $m = 5$, b) Bessel-coseno (BS) con $m = 1$ y c) Bessel-seno (BC) para $m = 1$.

Durnin y colaboradores [18, 19] considerando un haz Bessel con $m = 0$, esto es:

$$U_B(r, \phi, z) = A_B \exp(ik_z z) J_0(k_t r), \tag{2.15}$$

presentaron la siguiente forma integral para la solución, que originalmente es la integral reducida de Wittaker [102] y que representa a los haces invariantes en propagación:

$$U(\mathbf{r}) = \exp(ik_z z) \int_0^{2\pi} A(\phi) \exp[ik_t(x \cos\phi + y \sin\phi)] d\phi, \tag{2.16}$$

donde $A(\phi)$ es una función compleja arbitraria de ϕ definida, en el espacio de frecuencias espaciales, sobre un anillo de radio k_t. La ecuación (2.16) representa la superposición de ondas planas que yacen sobre la superficie de un cono que subtiende un ángulo θ respecto al eje de propagación z, donde θ se halla con la relación:

$$\tan\theta = k_t/k_z. \tag{2.17}$$

Si en la ecuación (2.16) $A(\phi)$ es constante se tiene simetría axial y el campo es proporcional a la función Bessel de orden cero de primera clase, caso obtenido por Durnin y colaboradores. Si $A(\phi) = \exp(im\phi)$ se encuentran los haces Bessel de alto orden definidos por la ecuación (2.12).

Al obtener la intensidad del campo definido por ecuación (2.16) se obtiene que:

$$I(x, y, z \geq 0) = I(x, y), \tag{2.18}$$

lo que muestra que no hay cambio en la sección transversal del haz al propagarse en z y por lo tanto son llamados **campos invariantes en propagación o haces adifraccionales**.

2.2.2. Haz Bessel como la superposición de dos ondas cónicas

Durnin y colaboradores [19], utilizaron una abertura anular (AA) y una lente esférica (L) separadas por una distancia igual a la distancia focal de la lente para generar el haz Bessel de orden cero, ver figura (2.2). El espectro de Fourier de un haz Bessel yace sobre un anillo así como la de otros haces adifraccionales [24]. Se planteó que cada punto a lo largo de la abertura anular en el arreglo actúa como fuente puntual que genera ondas esféricas y éstas ondas son transformadas por la lente a ondas planas, propagándose con un ángulo θ respecto al eje de propagación z. Las ondas planas tienen sus vectores de onda sobre la superficie de un cono y en

la región donde estas ondas planas interfieren, de longitud en eje Z_{max}, se genera el haz Bessel.

Se tiene otra interpretación física del haz Bessel como la superposición de dos ondas cónicas descritas por dos funciones Hankel, saliente y entrante, los vectores de onda transversales se contrapropagan generando el haz Bessel como un caso estacionario. Las ondas, entrante y saliente, son soluciones a la ecuación de Helmholtz (2.11) y se construyen para $m = 0$ como:

$$U(r,z)_{sal} = exp(ik_z z)(J_0(k_t r) + iY_0(k_t r)), \tag{2.19}$$

$$U(r,z)_{ent} = exp(ik_z z)(J_0(k_t r) - iY_0(k_t r)), \tag{2.20}$$

donde $H_0^{(1)} = J_0 + iY_0$ y $H_0^{(2)} = J_0 - iY_0$ son las **funciones Hankel de primer tipo y segundo tipo** y las ecuaciones (2.19) y (2.20) son las ondas cónicas, saliente y entrante, [32]. Por lo tanto cuando se superponen éstas ondas $U(\mathbf{r}) = U_{sal} + U_{ent} = 2exp(ik_z z)J_0$ se genera el haz Bessel.

En el esquema de la figura (2.2) se muestran los vectores de onda que están sobre las superficies de las ondas cónicas entrante y saliente. Los frentes de onda cónicos se pueden obtener del argumento de la amplitud compleja $Fase = arg[U_{ent;sal}]$ o siguiendo la aproximación del frente de onda [35]:

$$Fase = arg[U_{ent;sal}] \approx k_t r. \tag{2.21}$$

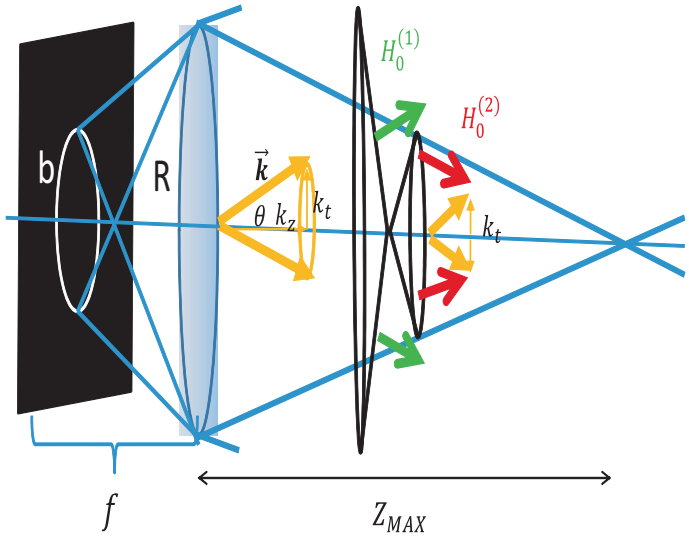

Figura 2.2: Esquema del arreglo experimental abertura anular lente (AAL) propuesto por Durnin para la generación del haz Bessel J_0. El haz Bessel es generado al iluminar con una onda plana una abertura anular de radio b con ancho Δb, esta abertura es colocada en el foco anterior de una lente esférica de distancia focal f y radio R.

La distancia Z_{max} se puede calcular utilizando argumentos geométricos. Si se considera el esquema de la figura (2.2), el ángulo θ que forman las ondas planas con el eje z se encuentra:

$$Z_{max} = R/tan\theta, \tag{2.22}$$

la distancia adifraccional del haz, donde R es el radio de la lente. Utilizando las características del esquema experimental (2.2) $tan\theta = k_z/k_t \approx b/f$, se puede hallar Z_{max}.

Los haces Bessel tienen la capacidad de auto-reconstruirse. Si se coloca un objeto opaco obstruyendo parcialmente al haz, éste se reconstruye a una distancia Z_{min}. La naturaleza de los haces Bessel y otros haces invariantes en propagación, considerados como un conjunto de ondas planas o como la superposición de ondas Hankel ha permitido justificar la auto-reconstrucción [34]. Si se considera que sólo una sección de cada una de las ondas cónicas es obstruida y las otras regiones de las ondas siguen propagándose sin modificación éstas son las responsables de la auto-reconstrucción

al superponerse. Si se coloca una obstrucción circular de radio q fuera del eje, el haz inicia su auto-reconstrucción a una distancia Z_{min}, ver figura (2.3).

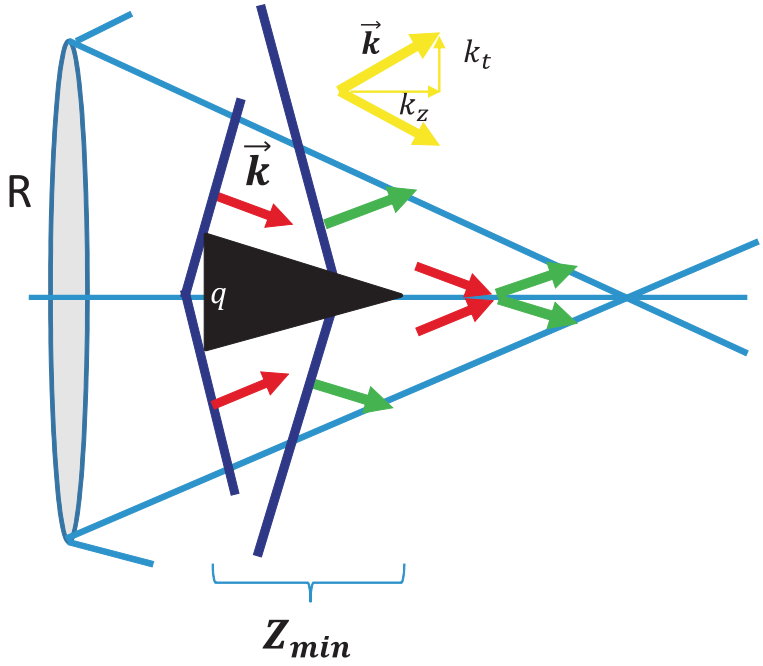

Figura 2.3: Esquema para explicar la auto-reconstrucción de un haz Bessel al ser parcialmente obstruido por un disco opaco de radio q. Onda cónica entrante (vector rojo) y onda cónica saliente (vector verde).

La distancia mínima donde el haz inicia su reconstrucción Z_{min} se puede calcular con argumentos geométricos. Las ondas planas que propician la reconstrucción del haz forman un ángulo θ respecto al eje de propagación, lo cual permite relacionar el radio de la obstrucción y la distancia Z_{min} como:

$$tan\theta = q/Z_{min}, \tag{2.23}$$

y de acuerdo a la ecuación (2.17) la distancia mínima de reconstrucción del haz Bessel es $Z_{min} = qk_z/k_t$.

2.2.3. Haces Parabólicos

Para hallar los haces Parabólicos es necesario expresar la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas parabólicas [103] y entonces resolver la ecuación diferencial cilíndrica parabólica. Con la integral reducida de Wittaker (2.16), es necesario sólo encontrar el valor de $A(\phi)$ y resolver la integral, esto fue realizado en el artículo [22], donde se propone la siguiente forma funcional de $A(\phi)$:

$$A_{cos}(\phi, a) = \frac{1}{2(\pi|sen\phi|)^{1/2}} \exp\left(ialn\left|tan\frac{\phi}{2}\right|\right), \tag{2.24}$$

$$A_{sen}(\phi; a) = \frac{1}{i}\begin{cases} -A_{cos}(\phi; a), & \phi\epsilon(-\pi, 0) \\ A_{cos}(\phi; a), & \phi\epsilon(0, \pi) \end{cases} \tag{2.25}$$

El haz que se obtiene utilizando A_{cos} y A_{sen} en la integral (2.16) se llamaran haz Parabólico-coseno y Parabólico-seno respectivamente en analogía con los haces Bessel (2.13).

Cuando se considera que $A(\phi; a) = A_{cos} \pm iA_{sen}$ entonces se obtienen los haces Parabólicos rotatorios (PR) o simplemente Parabólicos. En este caso $A(\phi; a) \approx \exp\left(ialn\left|tan\frac{\phi}{2}\right|\right)$ es una fase rotante tal como el haz Bessel con su fase azimutal $exp(-im\phi)$ donde se puede establecer la relación con el momento angular orbital y entre los parámetros a y m. En la figura (2.4) se presenta la distribución de intensidad y fase de haces Parabólicos, Parabólicos-seno y Parabólicos-coseno cuando $a = \sqrt{2}$. Las distribuciones se obtienen resolviendo numéricamente la integral (2.16) para la función $A(\phi; a)$ en la ecuación (2.25). Haciendo una analogía con los haces Bessel-coseno, a es similar a m, sin embargo para los haces Parabólicos-coseno (PC) o Parabólicos-seno (PS) el número de secciones en el haz no es determinada por a, pero es notable que la distribución de intensidad es parecida a los haces Bessel-coseno y Bessel-seno ya que en el eje x la intensidad es cero, ver figura (2.4).

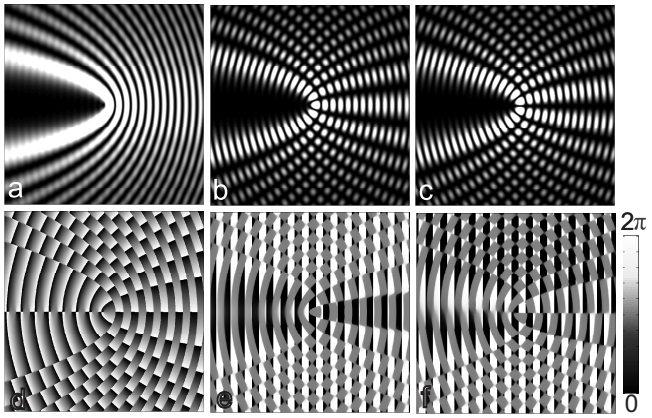

Figura 2.4: Distribución de intensidad (arriba) y fase (abajo) para un haz: a) Parabólico , b) Parabólico-coseno(PS) y c) Parabólico-seno (PC) para $a = \sqrt{2}$.

2.3. Ecuación paraxial de Helmholtz

Una onda paraxial se construye a partir de una onda plana $A\exp(-ikz)$ considerada como una onda portadora, modulando su amplitud compleja A con una envolvente $A(\vec{r})$ lentamente variable con la posición:

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r})\exp(-ikz). \tag{2.26}$$

La variación de $A(\vec{r})$ con la posición es mucho menor que la amplitud para una propagación del orden de λ. Sustituyendo la función (2.26) en la ecuación de Helmholtz (2.7) y suponiendo que la envolvente es una función lentamente variable de la posición $\frac{\partial^2 A(\vec{r})}{\partial z^2} \ll k\frac{\partial A(\vec{r})}{\partial z}$, la ecuación se reduce a:

$$\nabla_t^2 A(\vec{r}) - 2ik\frac{\partial A(\vec{r})}{\partial z} = 0, \tag{2.27}$$

conocida como la **ecuación paraxial de Helmholtz** (2.27). Donde ∇_T^2 es el operador Laplaciano transversal que en coordenadas rectangulares esta dado como: $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

2.3.1. Haz Gaussiano

En esta sección se muestra el haz Gaussiano como una solución de la ecuación paraxial de Helmholtz. Sea una onda esférica, dada por:

$$\mathbf{U}(r) = \frac{A}{r}\exp(-ikr), \tag{2.28}$$

donde r es la distancia desde la fuente puntual, k es el número de onda y A es una constante que puede ser compleja.

Ahora examinemos la onda esférica originada en $r = 0$ en puntos $r = (x, y, z)$ cercanos al eje z pero lejanos del origen, esto es, puntos en los que $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \ll z$ entonces $(x^2+y^2)/z^2 \ll 1$. Lo que permite aproximar a r por una expansión en serie de Taylor:

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = z\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} = z\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2} - \frac{(x^2 + y^2)^2}{8z^4} + \dots\right)$$
$$\approx z\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2}\right) = z + \frac{x^2 + y^2}{2z}.$$

Sustituyendo $r = z + \frac{x^2+y^2}{2z}$ en la fase de la ecuación (2.28) y en la amplitud r por z entonces se tiene:

$$\mathbf{U}(r) \approx \mathbf{A}(r)\exp(-ikz) = \frac{A}{z}\exp(-ikz)\exp\left(-ik\frac{x^2 + y^2}{2z}\right), \tag{2.29}$$

conocida como **aproximación de Fresnel** de una onda esférica.

De la aproximación a la onda esférica ecuación (2.29), se puede mostrar que la envolvente compleja $\mathbf{A}(r)$ es solución a la ecuación paraxial de Helmholtz:

$$\mathbf{A}(r) = \frac{A}{z}\exp\left(-ik\frac{x^2 + y^2}{2z}\right), \tag{2.30}$$

y cuando es reemplazada z por la función $q(z) = z + iL_D$ la ecuación (2.30) sigue siendo una solución a la ecuación paraxial de Helmholtz (2.27), pero con argumentos complejos en la amplitud. Si $q(z)$ se escribe en términos de otros parámetros como

el ancho del haz $W(z)$ y el radio de curvatura $R(z)$. Se escribe la función compleja $1/q(z)$ como:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi W^2(z)}, \tag{2.31}$$

donde al sustituir (2.31) en (2.30) y al usar la ecuación (2.26) la amplitud compleja U_G de un haz Gaussiano llega a ser:

$$U_G(\mathbf{r}) = A_0 \frac{w_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{r^2}{W^2}\right] \exp\left[-ikz - \frac{ikr^2}{2R(z)} + i\Phi(z)\right], \tag{2.32}$$

donde $A_0 = A/iL_D$ es una constante, $w_0 = W(0)$ es el ancho mínimo del haz en $z = 0$ denominado cintura, $W^2(z) = w_0^2\left[1 + (z/L_D)^2\right]$ es el ancho del haz para cualquier z, $R(z) = z\left[1 + (L_D/z)^2\right]$ el radio de curvatura del frente de onda, $\Phi(z) = \tan^{-1}(z/L_D)$ la fase Gouy y $L_D = kw_0^2/2$. L_D es la distancia de difracción o distancia de Rayleigh.

Existen otros métodos para obtener la forma de un haz gaussiano, por ejemplo ver [104–106].

En la figura (2.5) se representa la distribución transversal de intensidad del haz Gaussiano para las posiciones $z = 0$ y en $z = L_D$. Se presenta, además, su perfil central de intensidad en ambas posiciones (2.5c). La coordenada transversal esta normalizada con respecto a la cintura del haz w_0. Se puede observar que la intensidad para la posición $z = L_D$ disminuyo a la mitad respecto a la intensidad en $z = 0$. En la figura (2.6) se muestra la intensidad en eje del haz Gaussiano como función de la posición z se puede observar que esta decae al valor de 1/2 a una distancia de difracción.

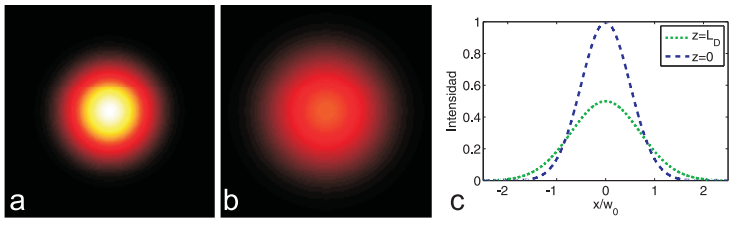

Figura 2.5: Distribución transversal de intensidad (a y b), y perfil central de intensidad de un haz Gaussiano. Para las posiciones $z = 0$ (a, linea azul) y $z = L_D$ (b, linea verde).

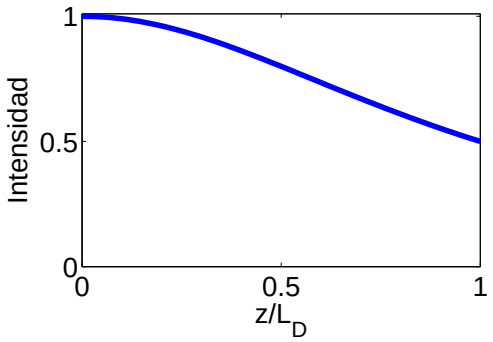

Figura 2.6: Intensidad normalizada en eje como función de la distancia de propagación de un haz Gaussiano.

2.3.2. Haces Laguerre-Gauss

En esta sección se presentan los haces Laguerre-Gauss que son soluciones a la siguiente ecuación paraxial de Helmholtz en coordenadas cilíndricas [121]:

$$\frac{\partial^2 U_{LG}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_{LG}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_{LG}}{\partial \phi^2} - 2ik\frac{\partial U_{LG}}{\partial z} = 0. \tag{2.33}$$

Considerando una amplitud compleja de la forma:

$$U_{LG}(\mathbf{r}) = F[\sqrt{2}r/W(z)]\varphi[\phi]exp(i\beta(z))U_G(\mathbf{r}), \tag{2.34}$$

entonces se requiere encontrar las funciones F, φ y β, donde U_G representa la amplitud compleja del haz Gaussiano. Sustituyendo la función (2.34) en la ecuación (2.33) se obtiene:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{rF}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{2}{FU_G}\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial U_{LG}}{\partial r} + \frac{1}{r^2\varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} - \frac{2ik}{F}\frac{\partial F}{\partial z} + 2k\frac{\partial \beta}{\partial z} \\ &+\frac{1}{U_G}\left[\frac{\partial^2 U_G}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_G}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_G}{\partial \phi^2} - 2ik\frac{\partial U_G}{\partial z}\right] = 0,\end{aligned} \tag{2.35}$$

y dado que U_G es solución a la ecuación paraxial de Helmholtz el término en paréntesis es cero. Realizando un cambio de variable en (2.35), dado por:

$$\xi = \frac{\sqrt{2}r}{W(z)}, \tag{2.36}$$

y utilizando la regla de la cadena se encuentra:

$$\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}+\frac{1}{\xi F}\frac{\partial F}{\partial \xi}-\frac{\xi}{F}\left(\frac{ikW^2}{R}+2\right)\frac{\partial F}{\partial \xi}+\frac{\xi}{F}\frac{ikW^2}{R}\frac{\partial F}{\partial \xi}+\frac{1}{\xi^2\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}+kW^2(z)\frac{\partial\beta}{\partial z}=0, \tag{2.37}$$

que reduciendo términos:

$$\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}+\frac{1}{F}\left(\frac{1}{\xi}-2\xi\right)\frac{\partial F}{\partial \xi}+\frac{1}{\xi^2\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}+kW^2(z)\frac{\partial\beta}{\partial z}=0. \tag{2.38}$$

El último término depende únicamente de z, los otros sumandos de ξ y ϕ, de tal forma se considera como una constante C y se resuelve la ecuación:

$$\frac{d\beta}{dz}=\frac{C}{kW(z)^2} \tag{2.39}$$

recordando que $W^2(z)=w_0^2(1+z^2/L_D^2)$ entonces la solución es el arco tangente dado como:

$$\beta(z)=\frac{C}{2}\tan^{-1}(z/L_D). \tag{2.40}$$

En la ecuación (2.38) el término que depende sólo ϕ, $\varphi(\phi)$, se considera como una constante igual a $-m^2$ (para cumplir las condiciones de frontera) y se resuelve:

$$\frac{d^2\varphi}{d\phi^2}+m^2\varphi=0, \tag{2.41}$$

con solución

$$\varphi(\phi)=A_m\,e^{im\phi}+B_m\,e^{-im\phi}, \tag{2.42}$$

con m un entero. Y la ecuación (2.38) se escribe como:

$$\frac{d^2F}{d\xi^2}+\left(\frac{1}{\xi}-2\xi\right)\frac{dF}{d\xi}+\left(C-\frac{m^2}{\xi^2}\right)F=0. \tag{2.43}$$

Realizando el cambio de variable a la ecuación (2.43) dado por $y=\xi^2$ se tiene:

$$y\frac{d^2F}{dy^2}+(1-y)\frac{dF}{dy}+\frac{1}{4}\left(C-\frac{m^2}{y}\right)F=0. \tag{2.44}$$

La ecuación (2.44) en $y=0$ esta indefinida, esto es, la función es singular en ese punto y además es una singularidad regular lo que sugiere usar el método de Frobenius para hallar la solución, ver **apéndice 1**.

Por el método de Frobenius se puede encontrar una solución de la forma:

$$F(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, y^{k+s}. \tag{2.45}$$

Entonces resolviendo la ecuación indicial $s^2 - m^2/4 = 0$ de la ecuación (2.44) se tienen dos raíces $s = \pm m/2$ y eligiendo la raíz positiva para tener una solución en el origen a través de:

$$F(y) = y^s \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, y^k = y^{m/2} H(y), \tag{2.46}$$

en la ecuación (2.44) al sustituir $F(y)$ se llega a la ecuación:

$$yH'' + (m + 1 - y)H' + \left(\frac{1}{4}C - \frac{m}{2}\right) H = 0, \tag{2.47}$$

que es la ecuación diferencial asociada de Laguerre [107], cuya primera solución son los polinomios asociados de Laguerre $H(y) = L_n^m(y)$ donde $n = C/4 - m/2$ es un entero o $C = 4n + 2m$. Finalmente agrupando los valores para F, φ y β se puede escribir la amplitud compleja para un haz Laguerre-Gauss U_{LG} como:

$$U_{LG} = \left(\frac{\sqrt{2}r}{W(z)}\right)^m L_n^m \left(\frac{2r^2}{W^2(z)}\right) e^{\pm im\phi} e^{i\beta(z)} U_G, \tag{2.48}$$

donde

$$\beta(z) = (2n + m) \tan^{-1}(z/L_D). \tag{2.49}$$

Escribiendo cada elemento de la ecuación (2.48), la amplitud compleja del haz Laguerre-Gauss (LG) se escribe como:

$$\begin{aligned} U_{LG}(r, \phi, z) = & A_0 \frac{w_0}{W(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r}{W(z)}\right)^m L_n^m \left(\frac{2r^2}{W^2(z)}\right) \times \\ & \exp\left[-\frac{r^2}{W^2(z)} - \frac{ikr^2}{2R(z)} + i(2n + m + 1)\Phi(z) \pm im\phi\right]. \end{aligned} \tag{2.50}$$

La distribución transversal de intensidad en (2.50) esta gobernada por el polinomio asociado de Laguerre L_n^m y la modulación de la función Gaussiana

$exp(-r^2/W^2(z))$. El término azimutal ϕ describe una fase helicoidal que es muy importante para la descripción del momento angular orbital en este tipo de haces.

En la figura (2.7) se presentan distribuciones transversales de intensidad y sus correspondientes fases de algunos haces Laguerre-Gauss. Las distribuciones de los haces LG corresponden a anillos concéntricos determinados por el índice radial n con un spot central oscuro para $m \neq 0$ y un spot central brillante cuando $m = 0$. El número de anillos siempre serán $n + 1$ para $m \neq 0$. Para el caso del índice radial $n = 0$ y índice azimutal $m = 0$ se obtiene el haz Gaussiano. Las fases se representan por cambios de color en el rango de 0 a 2π en la figura (2.7).

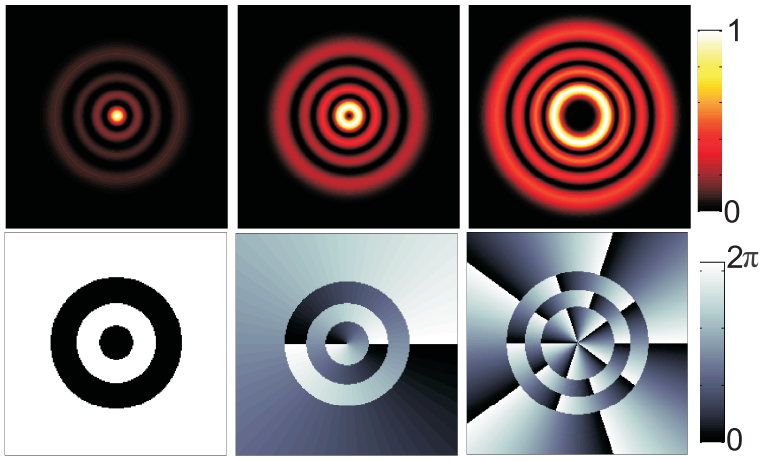

Figura 2.7: Distribución transversal de intensidad (arriba) y sus correspondientes fases (abajo) de un haz Laguerre Gauss para $m = 0$, 1 y 5, y $n = 3$.

En la figura (2.8) se representa de manera esquemática los frentes de onda helicoidales que comúnmente se le asocia a una dependencia azimutal $exp(im\phi)$ de un haz Laguerre-Gauss o de un haz Bessel de alto orden. Para $m = 1$ se presenta la superficie helicoidal en una longitud de onda (2π). Cuando se incrementa el índice m se presenta un entrelazamiento entre las fases siguiendo la forma del caso $m = 1$. El número de entrelazamientos es originado al dividir el intervalo de 0 a 2π entre m, ver figura (2.8). La importancia que tiene esta superficie es la dirección en que la energía fluye localmente, paralelo a la dirección del vector de Poynting y perpendicular a la

superficie.

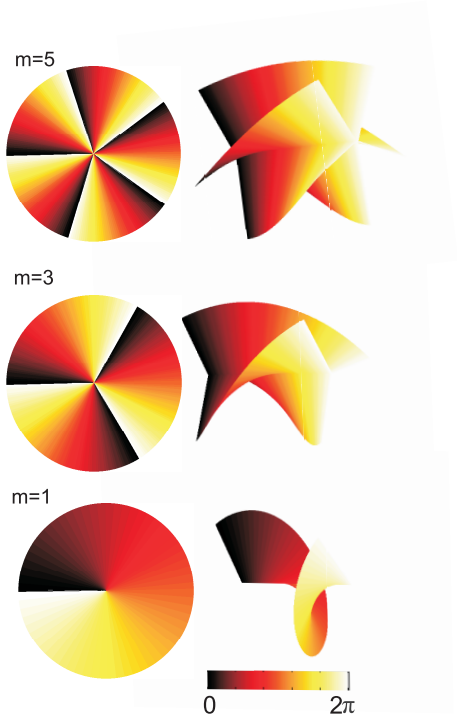

Figura 2.8: Frentes de onda helicoidales para $m = 1$, 3 y 5. Se muestra su representación en el plano donde se divide el rango de 0 a 2π entre m y las secciones cónicas pertenecen al rango $[0, 2\pi]$.

2.3.3. Haces Hermite-Gauss

Los haces Hermite-Gauss son soluciones a la ecuación paraxial de Helmhotz en coordenadas rectangulares. Siguiendo el procedimiento presentado en la sección anterior (2.3.2), suponiendo una amplitud compleja $U_{HG} = A_0\mathfrak{X}(\left(\frac{\sqrt{2}x}{W(z)}\right)\mathfrak{Y}\left(\frac{\sqrt{2}y}{W(z)}\right))\,exp(i\mathfrak{Z}(z))U_G$ donde U_G representa el haz Gaussiana y aplicando el "método de separación de variables", se puede resolver la ecuación paraxial de Helmholtz llegando a la amplitud compleja para un haz Hermite-Gauss de la

forma [2, 3, 5]:

$$U_{HG}(x,y,z)=A_{l,p}\left(\frac{w_0}{W(z)}\right)H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{W(z)}\right)H_p\left(\frac{\sqrt{2}y}{W(z)}\right)\times \exp\left[-\frac{(x^2+y^2)}{W^2(z)}-\frac{ik(x^2+y^2)^2}{2R(z)}+i(l+q+1)\Phi(z)\right]. \quad (2.51)$$

donde $H_{l,p}$ son los polinomios de Hermite [36], $A_{l,p}$ es una constante y la distribución del haz depende de los índices l y p. En el caso de $l = p = 0$ se tiene al haz Gaussiano. La fase del haz Hermite-Gauss tiene las mismas características del haz Gaussiano con excepción de un $(l + q + 1)$, pero que éste es independiente de las coordenadas x y y.

En la figura (2.9) se muestran algunas distribuciones transversales de intensidad y sus respectivas fases de algunos haces Hermite-Gauss para valores de los parámetros l y q en el plano transversal.

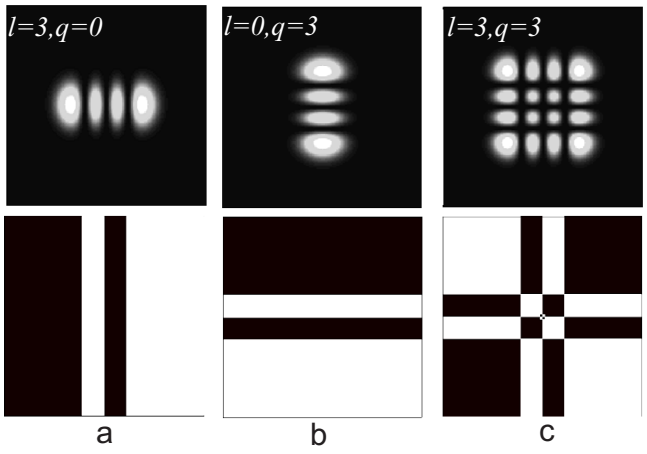

Figura 2.9: Distribuciones transversales de intensidad de haces Hermite-Gauss (arriba) y sus fases respectivas (abajo).

2.3.4. Haz Airy

Un haz Airy puede ser estudiado como una solución a la ecuación paraxial de Helmholtz unidimensional normalizada, ecuación (2.27), [15]:

$$\frac{\partial^2 U_A}{\partial X^2} - i\frac{\partial U_A}{\partial Z} = 0, \tag{2.52}$$

donde $U_A(X, Z)$ es la amplitud compleja del haz Airy, la coordenada transversal y longitudinal se normalizan a $X = x/w_0$ y $Z = z/kw_0^2$ respectivamente. La ecuación (2.52) es proporcional a la función Airy [25], Ai dada como:

$$U_A(X, Z) = Ai(Z - (X/2)^2)exp(i(ZX/2 - Z^2/12)), \tag{2.53}$$

donde $U_A(X, 0) = Ai(X)$.

El haz Airy $U_A(X, 0) = Ai(X)$ puede ser estudiado a partir de la ecuación diferencial de Airy (2.54):

$$\frac{d^2 U_A(X)}{dX^2} \pm XU_A(X) = 0, \tag{2.54}$$

donde las soluciones a la ecuación (2.54) son las funciones de Airy, $Ai(X)$ y $Bi(X)$ [44]. La ecuación diferencial está definida para numeros reales X y el segundo término de la ecuación (2.54) puede ser negativo o positivo dependiendo del signo de X. En el articulo [25] se describe el haz de Airy bajo la interpretación de dos ondas contrapropagantes y su relación con la función Bessel modificada de primer tipo K.Las funciones de Airy se pueden escribir como:

$$A_i(X) = [\frac{1}{\pi}\sqrt{X/3}]K_{1/3}(2/3X^{3/2}), \tag{2.55}$$

$$B_i(X) = \sqrt{X/3}[I_{-1/3}(2/3X^{3/2}) + I_{1/3}(2/3X^{3/2})], \tag{2.56}$$

donde K y I son las funcione Bessel modificadas.

En la figura (2.10) se muestra el perfil transversal de intensidad de un haz Airy.

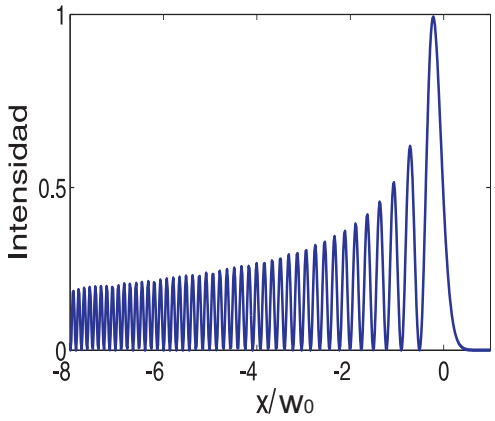

Figura 2.10: Perfil transversal de intensidad de un haz Airy $Ai(-x)$.

La propagación de un haz Airy $Ai(k_A x)$ se presenta en el plano $x - z$ en la figura (2.11). El haz Airy presenta una curvatura respecto al eje de propagación por esto se les ha llamado acelerado [25]. El parámetro k_A se utiliza en este caso para relacionarlo con la magnitud del vector transversal k_t presente en haces Bessel, por ejemplo, si $k_A = 4$ entonces $k_t = 11$ considerando que $k_t \approx 2.75 k_A$. La región de existencia adifraccional para un haz Bessel en estas condiciones será $Z_{max} = 1.9$ con $R = 10$. En la figura (2.11) se muestra la región de existencia de un haz Bessel limitada en un triángulo y la distancia adifraccional del haz Airy la distancia donde ocurre la intersección del rayo que viene del borde de la distribución (linea punteada) y el triángulo, de acuerdo a [25].

Es importante señalar que en el capítulo siguiente se planteará en detalle el modelo numérico que se utiliza para simular la propagación de los campos.

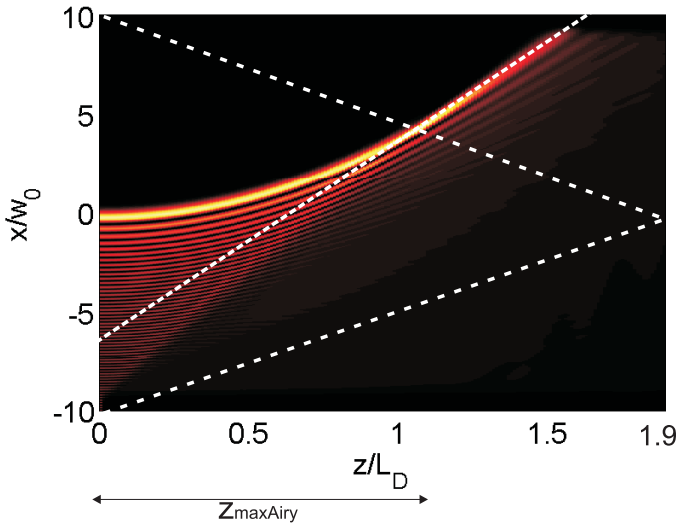

Figura 2.11: Propagación del haz Airy en el plano $x - z$. Distancia adifraccional del haz Airy indicada por $Z_{maxAiry}$.

El haz Airy es una solución de la ecuación paraxial de Helmholtz en las coordenadas (x, z), al implementar la solución numérica de la ecuación paraxial de Helmholtz esta solución puede ser descrita en el plano (x, y) para distintos valores de z. En la figura (2.12) se presentan algunas etapas de la propagación del haz Airy. El haz se desplaza a la derecha manteniendo su distribución inicial, cuando se gráfica la propagación del plano $x - z$ se obtienen los resultados presentados en la figura (2.11).

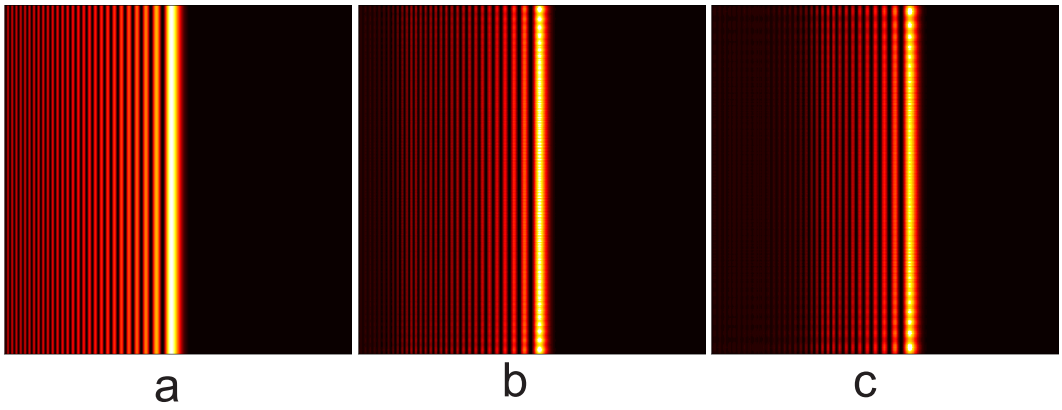

Figura 2.12: Distribución transversal de intensidad de la propagación del haz Airy Ai. En las posiciones z: 0 a), 0.36 b) y c) 0.54.

Los haces Airy se definen para una distribución transversal bidimensional como [15]:

$$Ai(-x,-y) = Ai(x)Ai(y). \tag{2.57}$$

En la figura (2.13) se presenta la distribución transversal de intensidad en algunas etapas de la propagación del haz Airy bidimensional. La distribución transversal presenta un lóbulo intenso, en una esquina, el cual se desplaza en referencia a la posición inicial, figura a), la distribución va disminuyendo su tamaño excepto en los extremos.

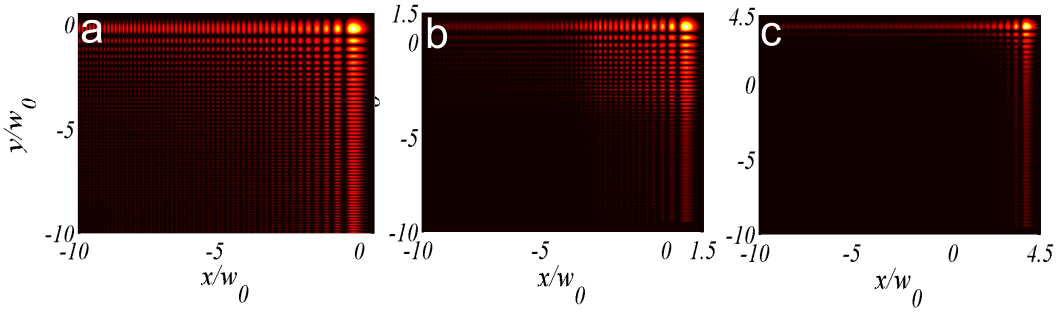

Figura 2.13: Distribución transversal de intensidad en propagación del haz Airy Ai bidimensional. En las posiciones z: 0 a), 0.5 b) y 1 c).

2.4. Momento angular en haces de luz

En esta sección se presenta la densidad de momento lineal y momento angular local de haces Laguerre-Gauss y haces Bessel. Inicialmente se hace una introducción al momento angular en mecánica clásica para posteriormente relacionarlo con haces de luz. Se utiliza la conservación de momento angular para predecir algunas características en el movimiento de sistemas de masas puntuales, por ejemplo, la segunda ley de Kepler [108, 109].

2.4.1. Conservación del momento angular. Segunda ley de Kepler

Si se tiene una partícula de masa M moviéndose con una velocidad v su momento lineal es $\vec{P} = M\vec{v}$ y el momento angular $\vec{L}$ de ésta partícula con respecto al origen O es una cantidad vectorial definida como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \tag{2.58}$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición de la particular con respecto al origen. Derivando cada parte de la ecuación (2.58) con respecto al tiempo t resulta:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times M\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{neta}. \tag{2.59}$$

Cuando la fuerza $\vec{F}$ es paralela al vector $\vec{r}$, la fuerza es central y la ecuación (2.59) es igual a cero, por lo tanto el momento angular asociado a la partícula se conserva:

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{P}| = constante. \tag{2.60}$$

El vector r y P están en el mismo plano y L es perpendicular a esta plano. La magnitud de L es proporcional al producto de las magnitudes r y P. La componente transversal del momento lineal P_t tiene un comportamiento hiperbólico proporcional a $1/r$.

Como consecuencia de la conservación de momento angular se obtiene la segunda ley de Kepler en el caso de planetas entre algunas otros fenómenos. Esta ley señala que el vector de posición que indica la posición de un planeta barre areas iguales en tiempos iguales:

$$\frac{d(Area)}{dt} = \frac{rv_t}{2} = \frac{r^2 w_{P_t}}{2} = \frac{L}{2M} = constante. \tag{2.61}$$

donde v_t es la velocidad perpendicular a r y w_{P_t} es la frecuencia angular.En el sistema planeta-Sol cualitativamente esto significa que mientras más cerca del Sol este el planeta se mueve con mayor velocidad y cuando éste está lejos de él se mueve más lento.

Un esquema de las direcciones de las fuerza y el momento lineal transversal en el sistema Sol-planeta se presentan en la figura (2.14).

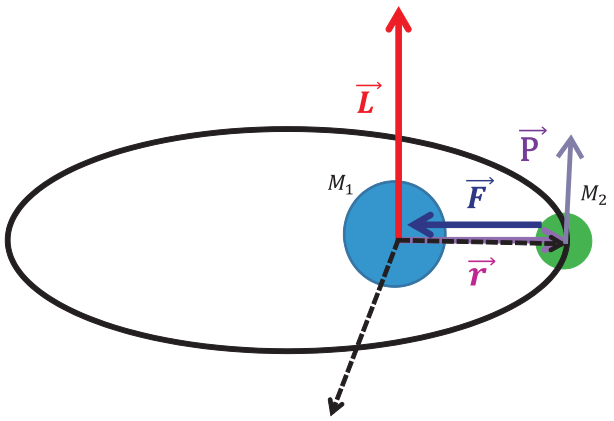

Figura 2.14: Esquema de las direcciones de la fuerza $\vec{F}$ y momento lineal $\vec{P}$ donde $\vec{r}$ es el vector de posición y $\vec{L}$ el momento angular en el sistema Sol (M_1)-planeta(M_2). La orbita que sigue el planeta es representado en la elipse (linea negra).

2.4.2. Momento angular orbital en haces Laguerre-Gauss y haces Bessel

El momento lineal $\vec{P}$ de un campo electromagnético es proporcional al vector de Poyting $\vec{S}$ (el vector de Poyting se relaciona con la circulación de energía [110]):

$$\vec{P} = \langle\vec{S}\rangle/c_0^2 = (\vec{E} \times \vec{B})/c_0^2, \tag{2.62}$$

donde $\vec{E}$ es el campo eléctrico, $\vec{B}$ es el campo magnético y c_0 es la velocidad de la luz en el vacío. El momento angular por lo tanto estaría dado por:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \langle\vec{S}\rangle/c_0^2. \tag{2.63}$$

Considerando una región del espacio de volumen V, la densidad de momento angular estaría dada por:

$$\vec{L} = \frac{1}{\mu_0 c_0^2} \int d^3r \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}). \tag{2.64}$$

L. Allen y colaboradores encontraron el valor del momento lineal y momento angular orbital del vector potencial linealmente polarizado $\vec{\mathcal{A}(r)}$ de un haz Laguerre-Gauss [55], esto es, considerando que:

$$\vec{\mathcal{A}(r)} = U(x, y, z) \exp(-ikz)\hat{x}, \tag{2.65}$$

en una aproximación de envolvente lenta $\frac{\partial U}{\partial z} \ll k$ se tiene que el momento lineal [55] esta dado como:

$$\vec{P} = \frac{\langle\vec{S}\rangle}{c_0^2} = \frac{i\epsilon_0 w}{4}[U^*\nabla U - U\nabla U^*] + \frac{wk\epsilon_0}{2}|U|^2\hat{z}, \tag{2.66}$$

donde U^* es el campo complejo conjugado. Sustituyendo la expresión de $U_{LG}(r, \phi, z)$, ecuación (2.50), y realizando las operaciones indicadas se obtiene:

$$\vec{P} = \left[\frac{r}{R(z)}\hat{r} + \frac{m}{kr}\hat{\phi} + \hat{z}\right] \frac{k\epsilon_0 w}{2}|U_{LG}|^2, \tag{2.67}$$

que es la expresión para el **vector de momento lineal de un haz Laguerre-Gauss**. Este vector tiene una componente radial relacionada con el ancho del haz,

una componente azimutal relacionada con el momento angular orbital en la dirección de la componente ϕ, la componente en z relacionada con la dirección de propagación del campo y todas multiplicadas por la distribución transversales intensidad U_{LG} del haz Laguerre-Gauss.

Calculando el momento angular, dado en la ecuación (2.63), se tiene que:

$$\vec{L} = \left[-\frac{zm}{kr}\hat{r} + (\frac{rz}{R(z)} - r)\hat{\phi} + \frac{m}{k}\hat{z} \right] \frac{k\varepsilon_0 w}{2} |U_{LG}|^2. \tag{2.68}$$

Calculando la densidad de momento, dado en la ecuación (2.64) y por la simetría en la componente radial y azimutal que tiene el haz alrededor del eje se tiene solamente la componente L_z.

Para los haces Bessel de alto orden se ha obtenido su momento angular orbital en condiciones no paraxiales [57]. Sin embargo, en el caso paraxial y con una polarización lineal se tiene la misma descripción que los haces Laguerre-Gauss en su componente z:

$$L_z = \frac{m}{w}\frac{\epsilon_0 |U_B|^2}{2}, \tag{2.69}$$

donde U_B es la amplitud compleja de un haz Bessel de alto orden, m es el índice azimutal del haz, ϵ_0 permitividad del vacío y w es frecuencia angular de la luz en el vacío. La componente z del momento angular (L_z) proviene de la componente azimutal del vector de Poynting del haz Bessel (P_ϕ).

$$P_\phi = \langle S_\phi \rangle / c_0^2 = \frac{m}{r}\frac{|U_B|^2}{2w}. \tag{2.70}$$

La componente azimutal esta asociada al momento angular en la componente longitudinal z. La dirección de propagación de energía esta relacionada con el frente de onda helicoidal que tienen estas distribuciones de campo electromagnético. Un haz de luz con una dependencia azimutal exhibe una singularidad de fase que se manifiesta con una región oscura en el centro del haz. La singularidad de fase o discontinuidad de fase esta definida como un punto donde la fase integrada en un camino cerrado alrededor del punto es un múltiplo entero m de 2π [112, 113]. El entero m es llamado **carga topológica** de la singularidad.

Capítulo 3

Auto-reconstrucción en campos adifraccionales

En este capítulo se estudia de manera numérica la dinámica de la auto-reconstrucción de campos adifraccionales al propagarse en el espacio libre para posteriormente proponer alguna explicación al comportamiento observado. Se analiza la distribución transversal de intensidad de los campos al propagarse y al ser parcialmente bloqueados con un objeto opaco. El comportamiento observado es asociado a dos ondas que constituyen el campo permitiendo su estudio de forma independiente. Para haces que possen momento angular orbital se mide la circulación de energía en estos campos al ser parcialmente obstruidos llegando a una relación con la distancia radial. En la sección 3.1 se describe como se obtiene la solución numérica de la ecuación paraxial de Helmholtz normalizada que se utiliza para simular la dinámica de la auto-reconstrucción de los haces. En la sección 3.2 se muestra la dinámica que tiene la interferencia de dos ondas planas al ser parcialmente obstruidas para describir el fenómeno de auto-reconstrucción, también se muestra la propagación de diferentes vortices ópticos. En la sección 3.3 se analiza la dinámica de haces Bessel de alto orden (BAO) en términos de dos ondas Hankel al ser parcialmente obstrui-

dos. Se representan los frentes de onda helicoidales-cónicas que tiene el haz BAO. En la sección 3.4 se investiga la dinámica de reconstrucción de los haces Parabólicos y se representan los frentes de onda de sus ondas constituyentes. En la sección 3.5 se describen analíticamente los haces Cáusticos y se presentan los frentes de onda de sus ondas constituyentes. Por último en la sección 3.6 se analiza cuantitativamente el desplazamiento del flujo de energía respecto a la distancia radial de haces con momento angular orbital (MAO), en particular de los haces BAO y los haces Parabólicos, al obstruirlos parcialmente. Se asocia este desplazamiento con el momento lineal transversal el cual es inversamente proporcional a la distancia radial.

3.1. Solución numérica de la ecuación paraxial de Helmholtz

El comportamiento de la auto-reconstrucción de haces adifraccionales en el espacio libre se obtiene al resolver de manera numérica la ecuación paraxial de Helmholtz normalizada (2.27). La ecuación se normaliza respecto a la cintura w_0 y distancia de Rayleigh L_D de un haz Gaussiano para las coordenadas transversales y la coordenada longitudinal, respectivamente [32, 84].

La ecuación paraxial de Helmholtz normalizada esta dada como:

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{-i}{4}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right), \tag{3.1}$$

con $X = x/w_0$, $Y = y/w_0$, $Z = z/L_D$ y $L_D = \pi w_0^2/\lambda$.

La ecuación (3.1) se puede resolver utilizando transformada de Fourier y la propiedad de la trasformada de Fourier de una derivada [36] y, posteriormente, integrando de manera definida de la posición z a la posición $z + \triangle Z$. Obteniendo que:

$$U(X, Y, Z + \triangle Z) = g^{-1}[g[U_0(X, Y)]exp(\frac{i}{4}(k_X^2 + k_Y^2)\triangle Z)], \tag{3.2}$$

donde la función $g[f]$ indica la transformada de Fourier y $g^{-1}[f]$ la transformada inversa de Fourier. La solución (3.2), requiere solamente del conocimiento de la distribución inicial de campo U_0 para poder conocer como evoluciona a cualquier distancia posterior.

3.2. Superposición de dos ondas planas inclinadas

Para entender la dinámica de auto-reconstrucción tanto de los haces invariantes como de los haces variantes en propagación inicialmente se describe el comportamiento de un patrón de interferencia producido por dos ondas planas cuyo vector de onda esta ligeramente inclinado con respecto al eje de propagación z, este patrón se obstruirá en su centro con un objeto circular opaco. Limitando las ondas planas a una extensión transversal R por lo cual existen sólo en una región determinada por $Zmax = R/\tan\theta$, donde $\tan\theta = k_y/k_z$ y $k_y^2 + k_z^2 = k^2$. Las ondas planas se pueden escribir como:

$$u_1(\vec{r}, t) = A_1 e^{i(-k_y y - k_z z + wt)}, \tag{3.3}$$

$$u_2(\vec{r}, t) = A_2 e^{i(k_y y - k_z z + wt)}, \tag{3.4}$$

si se considera que la amplitud cumple con $A_1 = A_2 = A$ entonces:

$$|u_1 + u_2|^2 = |[e^{i(-k_y y)} + e^{i(k_y y)}]e^{i(-k_z z + wt)}|^2, \tag{3.5}$$

$$|u_1 + u_2|^2 = 4A^2 \cos^2(k_y y). \tag{3.6}$$

El vector de onda, de cada onda plana, en su dirección transversal se contraponen haciendo estacionario el patrón de interferencia y la onda mantiene un perfil de intensidad constante en la dirección z. Cabe señalar que si se obtiene la intensidad del patrón de interferencia con la parte real el resultado tiene una diferencia en un factor de 2 con respecto a la ecuación (3.2), esto es:

$$\langle |u_1 + u_2|^2 \rangle = 2A^2 \cos^2(k_y y). \tag{3.7}$$

Algunas características sobre la detección de ondas se profundizan en el libro [114].

En la figura (3.1) se muestra el comportamiento, en el plano x-z, del patrón anterior al ser obstruido en su centro por un objeto opaco circular de radio 1. Se pueden observar dos sombras que se propagan siguiendo la dirección de las ondas planas independientes como se muestra en la figura (3.3).

En la figura (3.2) se presenta un esquema de la dirección de las ondas planas y la región de interferencia que se simuló numéricamente en la figura (3.1). También en la figura (3.2) se muestra el esquema de la obstrucción de radio q y la sombra geométrica que produce en una distancia Z_{min}.

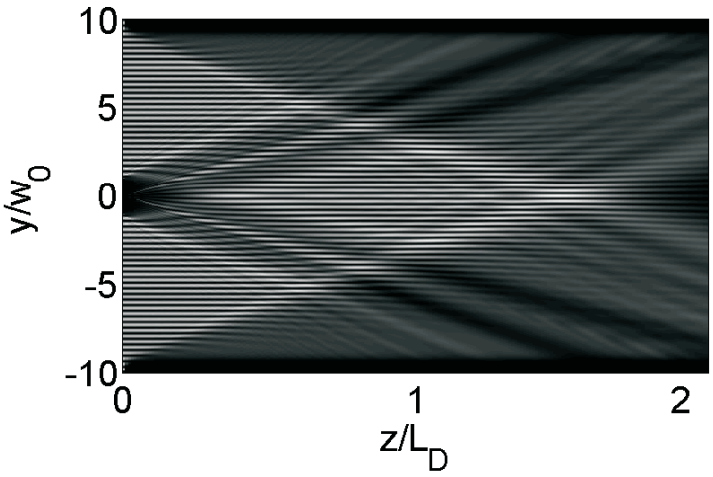

Figura 3.1: Propagación de la distribución de intensidad de dos ondas planas inclinadas al ser parcialmente obstruidas, en el plano $y - z$.

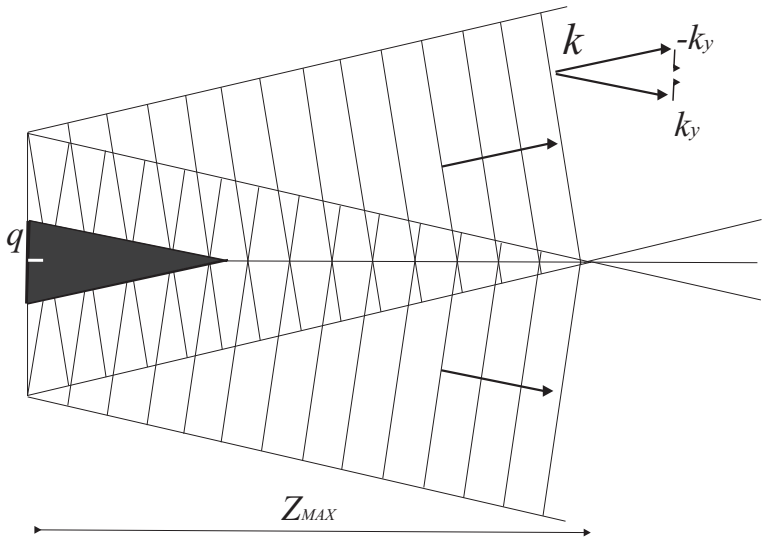

Figura 3.2: Esquema de la región de existencia de interferencia de dos ondas planas inclinadas y su dirección de propagación. Se presenta el esquema de una obstrucción q.

En la figura (3.3) se presentan las distribuciones transversales de intensidad en diferentes posiciones de la interferencia de las dos ondas planas al ser parcialmente obstruidas. En la misma imagen como referencia se muestran las ondas planas de forma individual en los renglones inferiores. En las imágenes (3.3b y c), se observan dos sombras fuera del eje, estas sombras corresponden a las direcciones que seguirán las ondas planas independientemente.

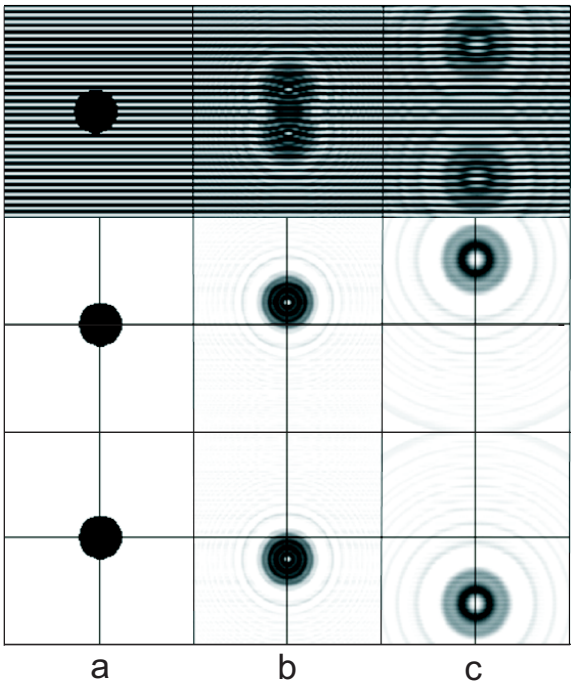

Figura 3.3: Patrones transversales de intensidad de la interferencia de dos ondas planas inclinadas al ser parcialmente obstruidas en las posiciones:$z = 0$ en a), $z = 0.25L_D$ en b) y $z = 0.5L_D$ en c).

3.2.1. Vórtice óptico y su superposición

En esta sección se describe la propagación de un vórtice óptico descrito por una amplitud compleja dada por:

$$U(\phi)_{-m} = A\exp(-im\phi), \tag{3.8}$$

donde A es una constante. En la figura (3.4) se muestra la propagación en el plano $y-z$ de vortices ópticos con cargas topológicas $m = 1$, 5 y 10. Los vórtices se originan desde la posición inicial $z = 0$ donde fluye la energía lateralmente dependiendo de la magnitud y signo de la carga topológica. El desplazamiento de la energía se puede apreciar cualitativamente al obstruir parcialmente al vórtice. En la figura (3.5) se puede observar la formación de una espiral la cual rota a medida que la distribución se propaga una distancia mayor. El sentido de rotación de la espiral

permite distinguir la dirección de flujo cuando se tiene un valor $-m$ o $+m$ en el vórtice.

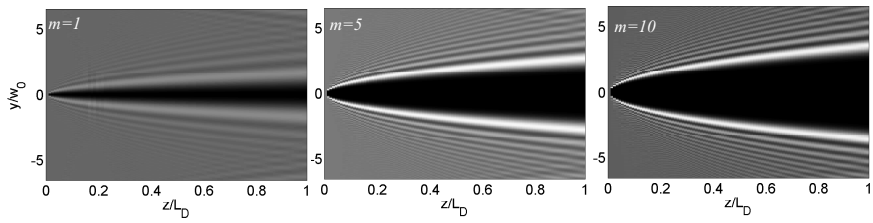

Figura 3.4: Propagación de vórtices ópticos en el plano $y - z$ para los casos $m = 1$, 5 y 10.

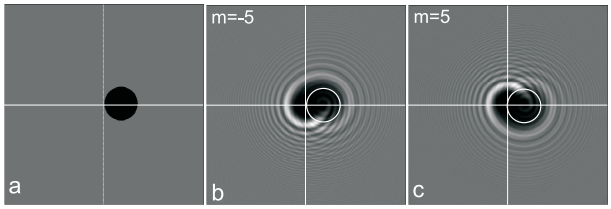

Figura 3.5: Evolución de la distribución de transversal intensidad para dos vórtices parcialmente obstruidos con cargas topológicas $m = -5$ y $m = 5$. En a) se presentan la condición inicial para los vortices. En b) y c) la distribución en la posición $z = 0.2L_D$.

Si ahora se suman dos vórtices ópticos con frentes de onda opuestos se tiene:

$$U(\phi)_{-m} + U(\phi)_m = 2A\cos(m\phi). \tag{3.9}$$

En la figura (3.6) se gráfica el patrón transversal de intensidad para $m = 1$ y $m = 5$. Estas distribuciones presenta máximos y mínimos de intensidad dependiendo del valor de m. Para $m = 1$ la intensidad es cero sobre el eje y y es máxima sobre el eje x. Para cualquier otro valor de m el numero de máximos y mínimos esta dada por $2m$.

En la figura (3.7) se observa la propagación de la superposición de dos vortices ópticos con carga topológica $m = 5$ en diferentes posiciones.

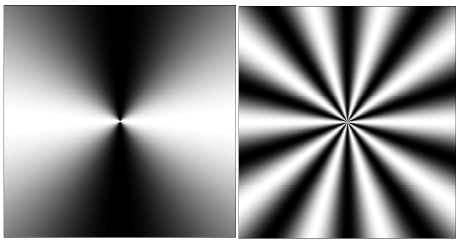

Figura 3.6: Distribución transversal de intensidad de la superposición de dos vortices para los casos $m = 1$ (derecha) y $m = 5$ (izquierda).

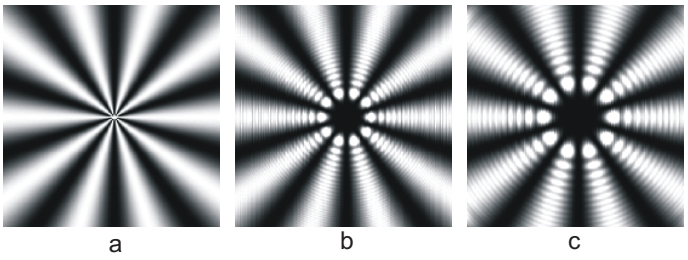

Figura 3.7: Propagación de la superposición de dos vórtices con carga $m = 5$. En el plano inicial a) en $z = 0$, b) en $z = 0.25$ y c) en $z = 0.5$.

Si se obstruye parcialmente la distribución mostrada en la figura (3.7a) con un objeto circular opaco puede observarse que la distribución se reconstruye en una posición posterior (Z_{min}). Las direcciones opuestas de los vectores de onda en la dirección azimutal generan un campo estacionario. En la figura (3.9) se esquematizan los frentes de onda helicoidales girando en direcciones opuestas. Las franjas que se observan en la figura (3.6), se deben a la superposición de secciones cónicas, esto es la inclinación del frente de onda ahora depende de m. Esta interpretación de dos vortices superpuestos ecuación (3.9), da origen a su reconstrucción y la representación del frente helicoidal simplemente como una superficie helicoidal para $m \geq 1$, en contraste con la representación de los frentes de onda helicoidales entrelazados que se muestran en la figura (2.8) que describen la fase azimutal.

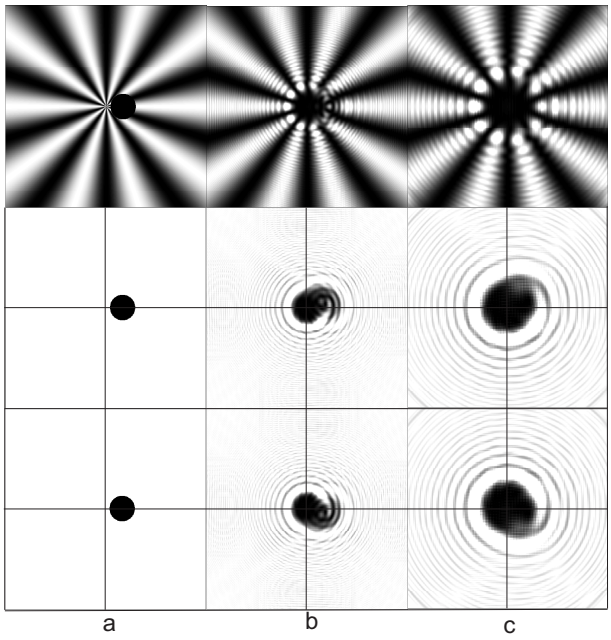

Figura 3.8: Propagación de la superposición de dos vortices al ser parcialmente obstruidos, como referencia se presentan los vortices independientemente. En a) se presentan las condiciones iniciales, en b) $z = 0.25$ y en c) $z = 0.5$.

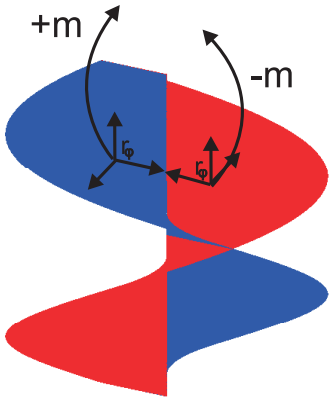

Figura 3.9: Representación de los frentes de onda helicoidales con dirección opuesta de giro. La figura en azul es para la carga $+m$ y la figura en rojo para $-m$, las direcciones de la componente azimutal son opuestas.

En la figura (3.10) se representan las superficies helicoidales para distintos valores

de m. En esta representación de la fase los frentes de onda no están entrelazados y el incremento del valor de m se presenta en la inclinación de la superficie debida a m.

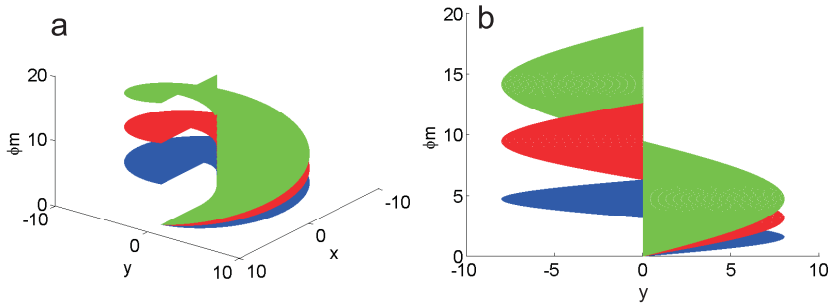

Figura 3.10: Representación de superficie helicoidal ϕm a), para los casos $m = 1$, $m = 2$ y $m = 3$, azul, rojo y verde respectivamente. En b) se muestra que al incrementar la carga m la pendiente en la superficie helicoidal se incrementa.

3.3. Haces Bessel de alto orden y sus ondas cónicas constituyentes

En esta sección se estudiará el comportamiento en propagación de los haces Bessel de alto orden (BAO) al ser parcialmente obstruidos. Para ello utilizaremos la siguiente expresión para describir al haz Bessel de ato orden:

$$U_B(\mathbf{r}) = A_B exp(ik_z z) J_m(k_t r) exp(-im\phi), \tag{3.10}$$

así como sus ondas constituyentes cónicas, ecuaciones (2.19) y (2.20).

En la figura (3.11) se muestra la dinámica de la auto-reconstrucción de haces Bessel de alto orden con distintas cargas topológicas $m = 5$ y $m = 10$. Donde se puede observar, en las imágenes centrales, la formación de dos sombras que se pueden asociar a las ondas cónica entrante (OCE) y saliente (OCS). La sombra de mayor contraste relacionada con la onda entrante, dirigiéndose al eje del haz. La sombra de menor contraste asociada a la onda cónica saliente alejándose del eje. Las

distribuciones transversales de intensidad corresponden a las posiciones $z = 0, 0.1$ y 0.5. Sus vectores transversales con $k_t = 15$ y el radio de la obstrucción $q = 1$. Bajo estas condiciones se obtiene una $Z_{min} \approx 0.13$ y la distancia máxima adifraccional $Z_{max} \approx 1.3$.

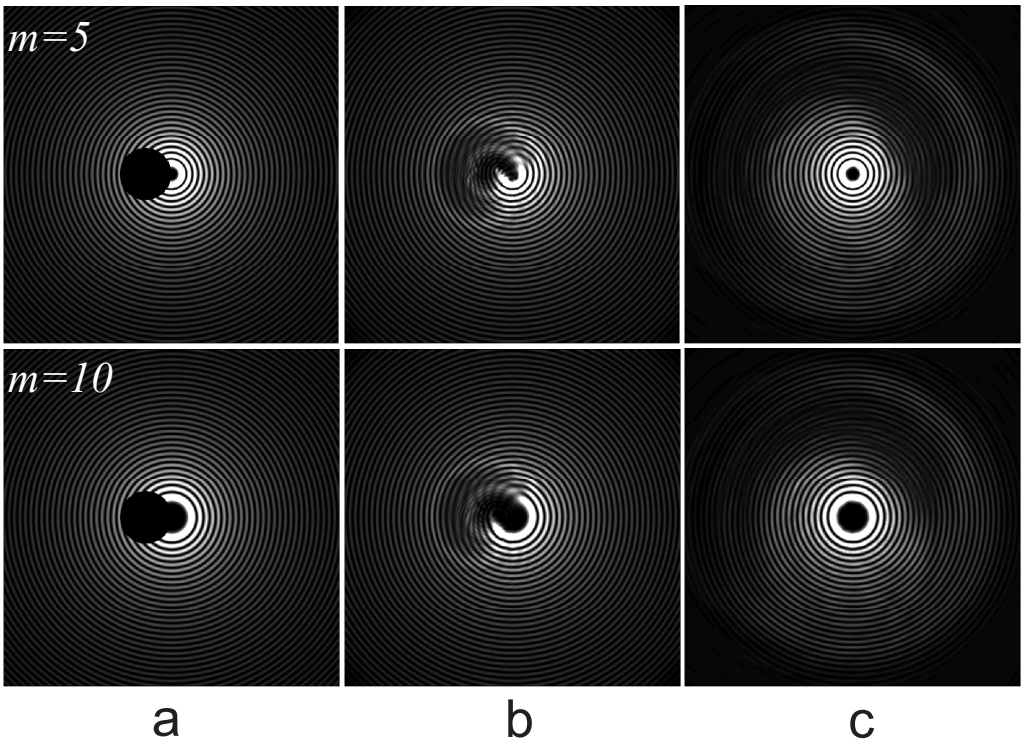

Figura 3.11: Auto-reconstrucción de haces Bessel de alto orden al ser parcialmente obstruidos con $m = 5$ (arriba) y $m = 10$ (abajo). Secciones transversales de intensidad correspondientes a la posición z en: a) 0, b) 0.1 y c) 0.5.

Se puede observar que la sombra producida por la OCE se mueve mas rápido que la producida por la OCS en la figura (3.12). Se muestra como evolucionan las sombras en un intervalo de distancias menor, esto es en las en las posiciones $z = 0, 0.1$ y 0.2. Donde con más detalle se puede observar la rotación de las sombras en el sentido de las manecillas del reloj. La sombra de mayor contraste OCE se mueve mas rápido que la sombra de menor contraste OCS. En la siguiente etapa de imágenes la sobra interior a cubierto el anillo interior mientras la sobra exterior no

ha cubierto la trayectoria circular.

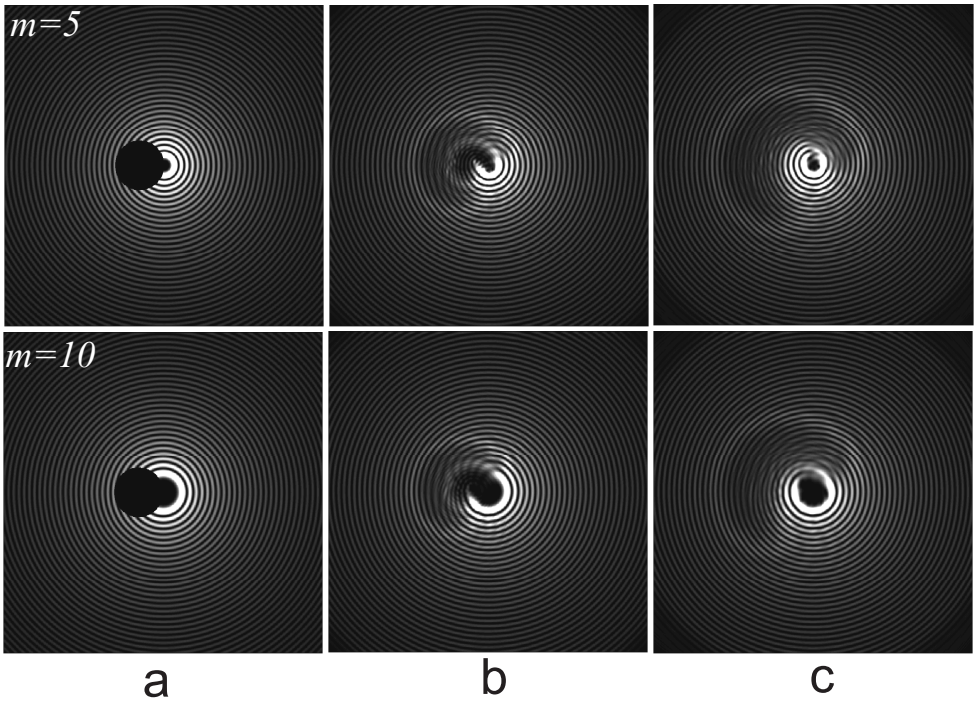

Figura 3.12: Circulación de energía de haces Bessel de alto orden (BAO) con $m = 5$ (arriba) y $m = 10$ (abajo) al ser parcialmente obstruidos. Secciones transversales de intensidad correspondientes a la posición z: a) 0, b) 0.1 y c) 0.2.

En la figura (3.13) se presenta la propagación del haz Bessel de orden con $m = 5$ en el plano $y - z$ al ser parcialmente obstruido. Se puede apreciar la proyección de la sombra de la OCS, en este plano, alejándose y creciendo indicada en la figura con puntos amarillos. También podemos observar la proyección de la sombra de la OCE, en ese plano, acercándose al eje indicada en la figura por un triángulo.

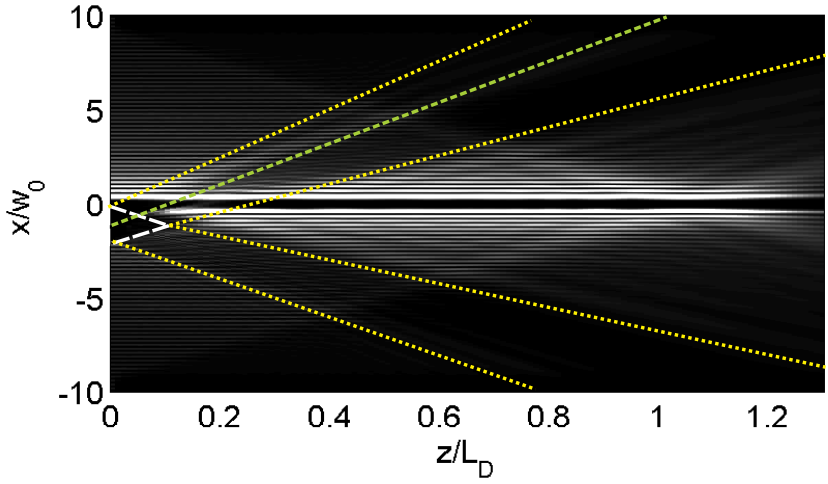

Figura 3.13: Propagación del haz Bessel de orden $m = 5$ en el plano $x - z$ al ser parcialmente obstruido.

3.3.1. Superposición de ondas cónicas con frentes de onda rotantes

Para iniciar el análisis es necesario considerar la segunda solución de la ecuación de Bessel, la función $Y_m(k_t r)$, la cual no esta limitada en el origen (**apéndice 2**), por lo tanto es posible obtener una aproximación de la función para determinar como va evolucionando tanto numérica como experimentalmente.

En la figura (3.14) se muestran los perfiles centrales de intensidad de las funciones Y_m, J_m y H_m para $m = 1$, $m = 5$ cuando $k_t = 11$. Se puede observar como la función Hankel actúa como la envolvente de las funciones Y_m y J_m.

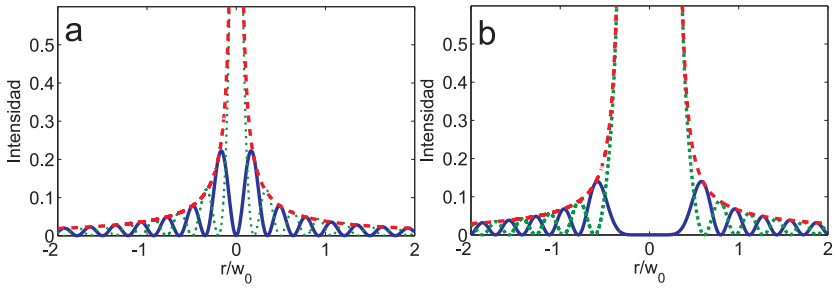

Figura 3.14: Perfiles centrales de intensidad de las funciones Bessel (linea azul), Neumann (puntos verdes) y Hankel (guiones rojos) con indices m en: a) 1 y b) 5.

La función Y_m se limita en su amplitud para poder determinar como va evolucionando en el espacio libre. En la figura (3.15a) se presenta la propagación de la función $Y_m \times \exp(-im\phi)$ en el plano $y - z$ para el caso $m = 5$, donde se puede observar el comportamiento en intensidad de la región central del haz es semejante al haz Bessel de primer tipo. En la figura (3.15b) se comparan los perfiles centrales de intensidad $J_m \times \exp(-im\phi)$ y $Y_m \times \exp(-im\phi)$ en la posición $z = 0.75$, se puede apreciar que ambos perfiles son muy parecidos.

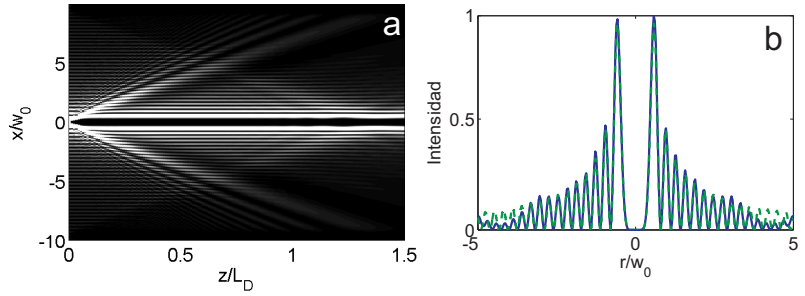

Figura 3.15: Propagación de la función $Y_m \exp(-im\phi)$ en el plano $y - z$ a). Comparación de los perfiles centrales $J_m \exp(-im\phi)$ (linea verde) y $Y_m \exp(-im\phi)$ (linea azul) a la distancia $z = 0.75$ b).

Al analizar el perfil central de intensidad de la función Neumann es posible estudiar la propagación de las ondas cónicas con componente azimutal, esto es un

campo U de la forma:

$$U(r,z)_{H(1),H(2)} = A_m exp(ik_z z) H_m^{(1),(2)}(k_t r)\exp(-im\phi), \tag{3.11}$$

donde A_m es una constante. En la figura (3.16a) se muestra el comportamiento en intensidad en el plano $x-z$ de la onda cónica saliente $U_{H(1)}$. En la figura (3.16b) se muestra lo mismo para la onda cónica entrante $U_{H(2)}$, es importante recordar que para esta ultima onda, una vez que atraviesa el eje se convierte en saliente, por lo que se genera el haz Bessel J_m. En la figura (3.17) se presentan las distribuciones transversales de intensidad para diferentes distancias de propagación.

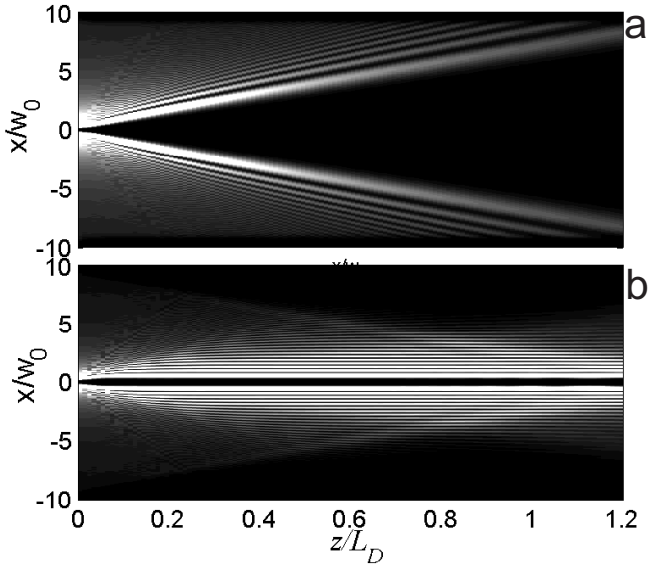

Figura 3.16: Propagación de ondas cónicas entrante y saliente con momento angular en el plano $x-z$. La onda cónica saliente (OCS) en a) y la onda cónica entrante (OCE) en b).

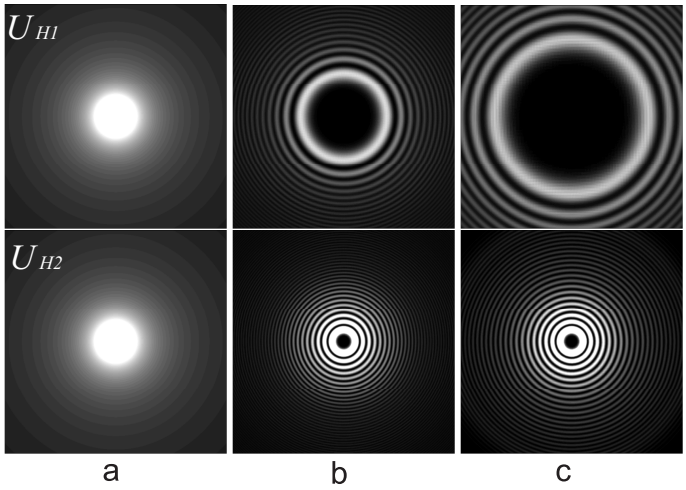

Figura 3.17: Distribuciones transversales de intensidad para la onda cónica saliente (arriba) y entrante (abajo) para las siguientes distancias de propagación: a) $z = 0$, b) $z = 0.5$ y c) $z = 1$.

Al obstruir parcialmente, fuera de eje, un haz Bessel de alto orden, $m = 5$ y $kt = 11$, éste tiende a reconstruirse en una posición posterior. Durante la reconstrucción se pueden identificar dos sombras que están asociadas a cada una de las ondas cónicas que constituyen a este haz, figura (3.11).

La sombra de menor contraste, debida a la onda cónica saliente U_{H1}, aumentando de tamaño al incrementarse la distancia de propagación, ver figura (3.18 inferior). La sombra de mayor contraste empieza primero reduciendo su tamaño, gira, cruza el eje, pierde contraste y aumenta de tamaño, ver figura (3.18 en medio).

El análisis anterior muestra que la superposición de las onda cónica entrante y onda cónica saliente generan al haz Bessel de alto orden. Es importante mencionar que las características individuales que presentan las ondas cónicas son mantenidas el comportamiento del haz Bessel.

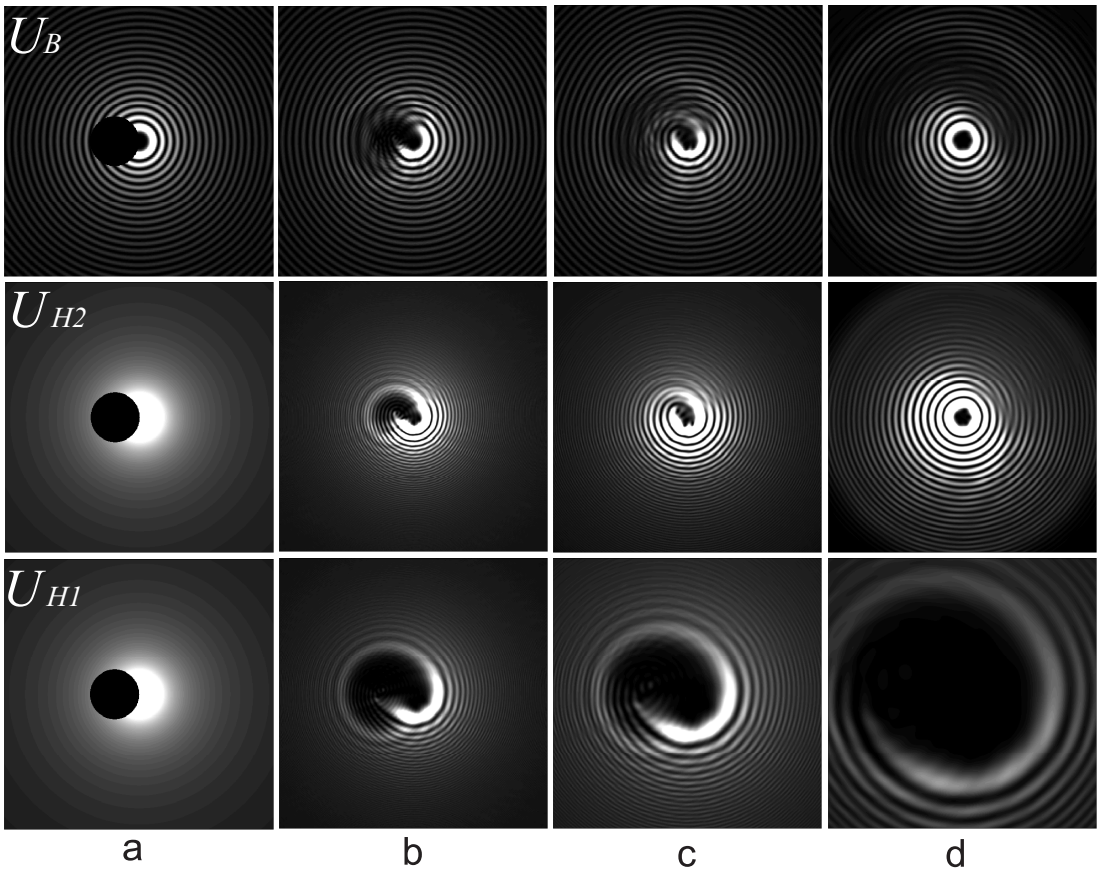

Figura 3.18: Perfiles transversales de intensidad de la dinámica de auto-reconstrucción de un haz Bessel de alto orden (arriba) y sus ondas cónicas constitutivas: entrante (en medio) y saliente (abajo). Para la distancia de propagación z de: a) 0, b) 0.1, c) 0.2 y d) 0.5.

En la figura (3.19) se muestra lo que consideramos seria una representación del frente de onda helicoidal-cónico de la onda entrante y saliente. Esta forma se obtuvo al graficar la ecuación (2.21) multiplicada por el término azimutal ϕm.

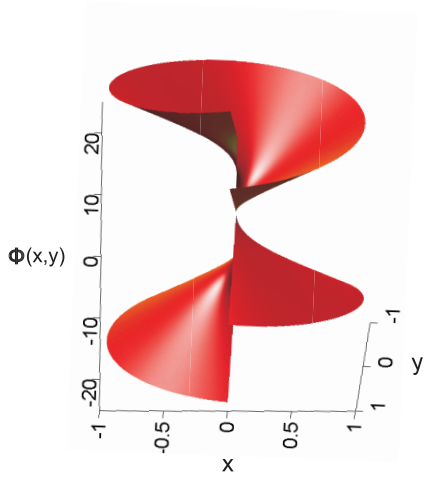

Figura 3.19: Frente de onda helicoidal-cónico de la onda cónica entrante y onda cónica saliente con el término azimutal.

La inclinación del cono depende del valor k_t y la parte rotatoria depende de m, en la figura (3.20) se presentan algunos casos de los frentes de onda manteniendo fijo k_t y cambiando m. La región del plano (x, y) es diferente, entre las figuras (3.19) y (3.20), para hacer notar que la inclinación depende también de la distancia radial al eje del haz.

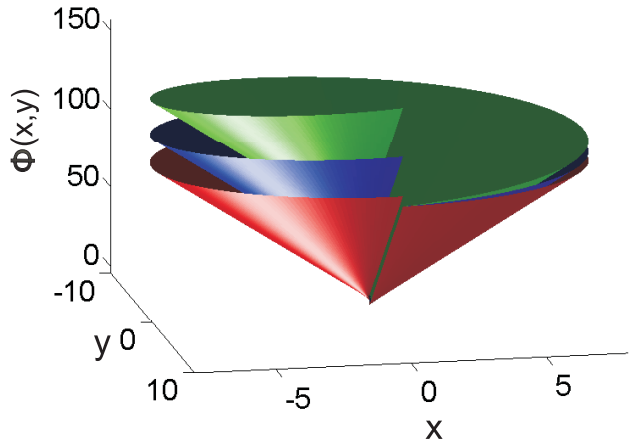

Figura 3.20: Frentes de onda helicoidales-cónicos para cargas $m = 1$ (rojo), $m = 2$ (azul) y $m = 3$ (verde), considerando $k_t = 11$.

3.3.2. Haces Bessel-coseno (seno)

En esta sección se observan las características del haz Bessel-coseno (BC) y Bessel-seno (BS) al ser parcialmente obstruidos, ecuación (2.13). El haz es constituido de dos ondas cónicas en su componente transversal debido a que dependen de la función J_m. En la figura (3.21) se muestra las distribuciones transversales de intensidad del haz BC y el haz BS para el caso $m = 1$ cuando el haz es parcialmente obstruido. Se puede observar la evolución de las de ondas cónicas constituyentes observando las sombras de bajo y alto contraste, imágenes centrales de la figura. La sombra de la OCS de bajo contraste se aleja del eje hacia la izquierda mientras va incrementando su tamaño, imágenes (3.21b). La sombra de la OCS de alto contraste va acercando al eje hasta pasar por él y convertirse en una onda cónica saliente.

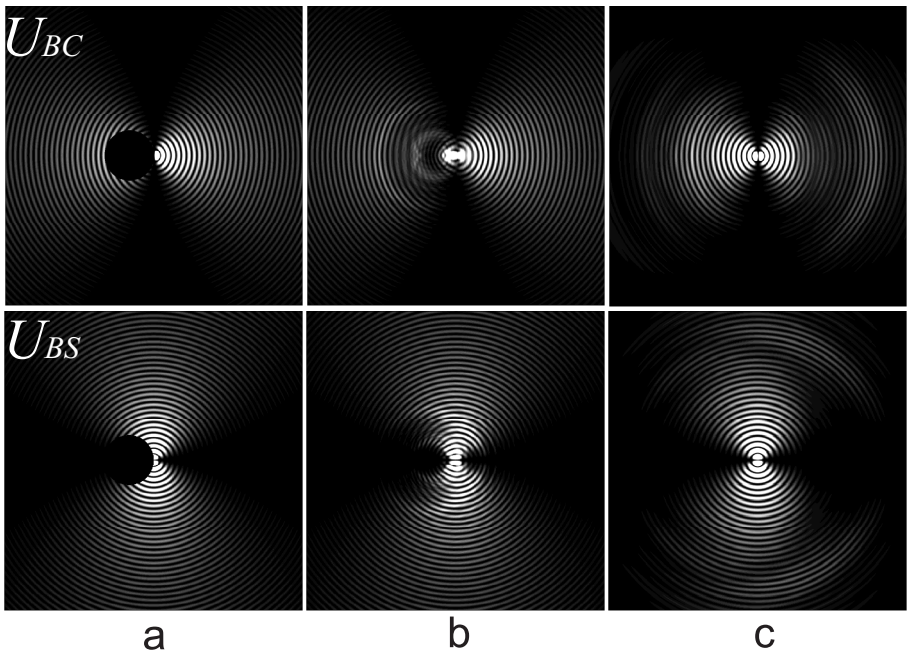

Figura 3.21: Auto-reconstrucción de haces Bessel-coseno (arriba) y Bessel-seno (abajo) para $m = 1$ al ser parcialmente obstruidos. Patrones de transversales intensidad para las posiciones z de: a) 0, b) 0.1 y c) 0.2.

En la figura (3.22) se muestra la propagación del haz BC para $m = 5$ al ser

parcialmente obstruido. En este haz es poco perceptible las dos sombras originadas por las ondas cónicas (3.22b).

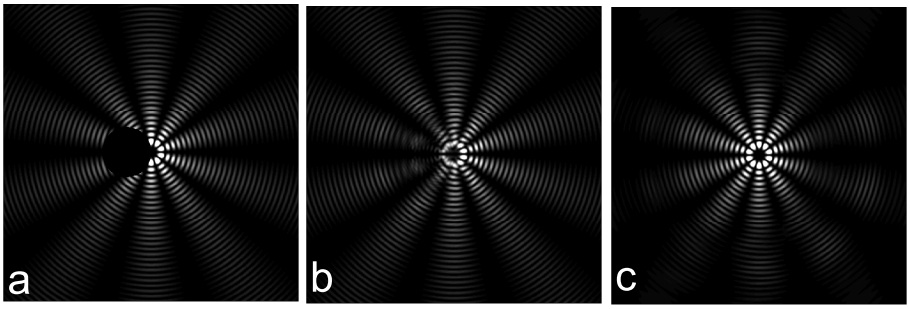

Figura 3.22: Auto-reconstrucción del haz Bessel-coseno (BC) para $m = 5$ al ser parcialmente obstruido. Distribuciones transversales de intensidad para la distancia z de: a) 0, b) 0.1 y c) 0.5.

3.4. Haces Parabólicos

En esta sección se analizarán las características de haces Parabólicos al ser parcialmente obstruidos y de esta forma determinar sus ondas constituyentes. En primer lugar se estudia el comportamiento que tienen los haces Parabólicos-coseno (PC) y Parabólicos-seno (PS), y posteriormente los haces Parabólicos con frentes de onda rotantes.

3.4.1. Haces Parabólicos-coseno (seno)

La distribución inicial de intensidad de los haces PS y haces PC se obtiene resolviendo la integral (2.16) para la función $A(\phi; a)$ dada en la ecuación (2.25).

En la figura (3.23) se grafican las distribuciones transversales de intensidad a diferentes distancias de propagación para los haces PC y haces PS al ser parcialmente obstruidos. Se puede observar que la dinámica de auto-reconstrucción es muy similar a la obtenida para un haz Bessel, ya que se puede observar dos sombras una de alto

y otra de bajo contraste, que indica que estos haces están constituidos por dos ondas cónicas.

La sombra de la onda entrante, de radio menor, se mueve hacia la izquierda y se acerca al eje hacia la izquierda y la sombra de la onda saliente, de radio mayor, se mueve hacia la derecha.

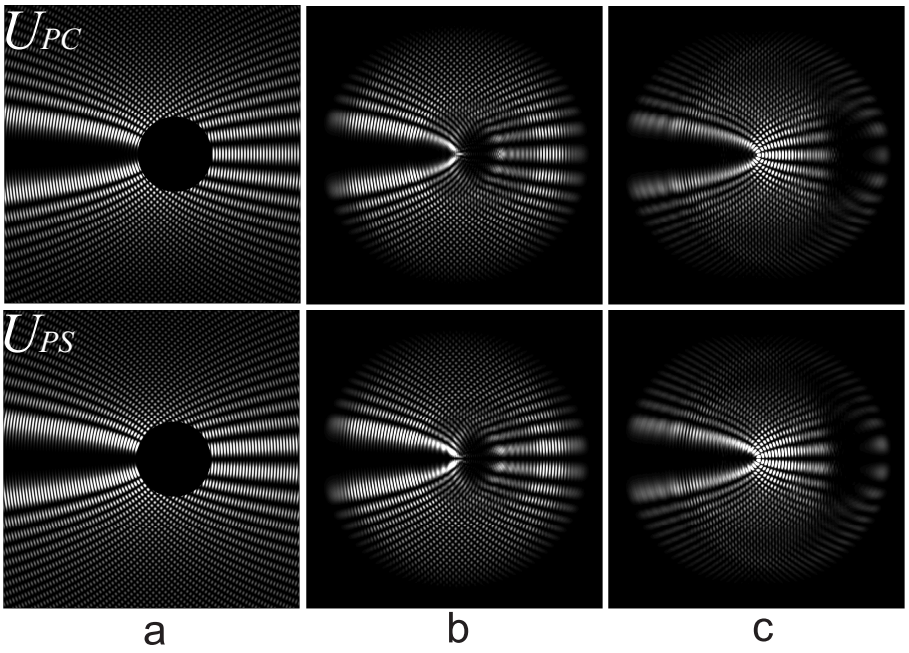

Figura 3.23: Auto-reconstrucción de los haces Parabólico-coseno (PC) y haces Parabólico-seno (PS) al ser parcialmente obstruidos.

En la figura (3.24) se representa representa esquemáticamente un frente de onda "cónico" parabólico asociado a las ondas entrante y saliente que genera un haz PC o el haz PS. La función de fase que describe la superficie fue obtenido utilizando la ecuación (2.21) considerando coordenadas parabólicas cilíndricas como la base del cono.

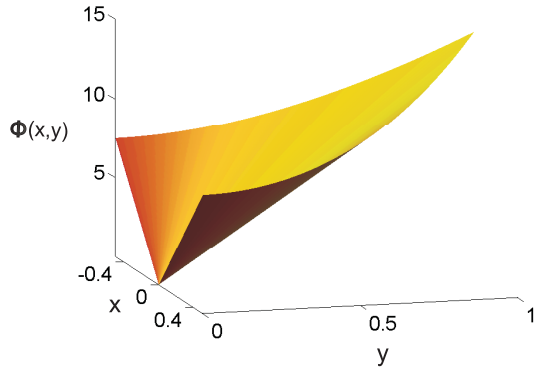

Figura 3.24: Representación del frente de onda cónico-parabólico de la onda entrante o saliente del haz Parabólico-seno.

3.4.2. Haces Parabólicos con frentes de onda rotantes

En esta sección se analiza el comportamiento del campo descrito por el haz Parabólico con frente de onda rotante al ser parcialmente obstruido (PR, haz Parabólico rotante). Para obtener el haz PR se superponen el haz PC y el haz PS:

$$U_P(\mathbf{r}, a) = U_{A_{cos}}(\mathbf{r}, a) \pm iU_{A_{sen}}(\mathbf{r}, a). \tag{3.12}$$

En la figura (3.25) se muestra la propagación del haz PR con distintos valores del parámetro a al ser parcialmente obstruido. Distribuciones transversales obtenidas en las posiciones z: a) 0, b) 0.2, c) 0.3 y d) 1. En este caso también se pueden observar la aparición de dos sombras: una de bajo y otra de alto contraste. Lo cual sugiere que este tipo de haces también esta constituido de dos ondas cónicas. La sombra de bajo contraste de la onda saliente (OS) se aleja del eje del haz mientras va aumentando su tamaño. La onda entrante (OE) relacionada con la sombra de alto contraste se aproxima al eje.

El movimiento de las sombras de la OE y la OS describen cualitativamente la circulación de energía en trayectorias parabólicas que tiene el haz Parabólico. La sombra de la OE de radio menor se mueve más rápido respecto a la sombra de la

OS de radio mayor.

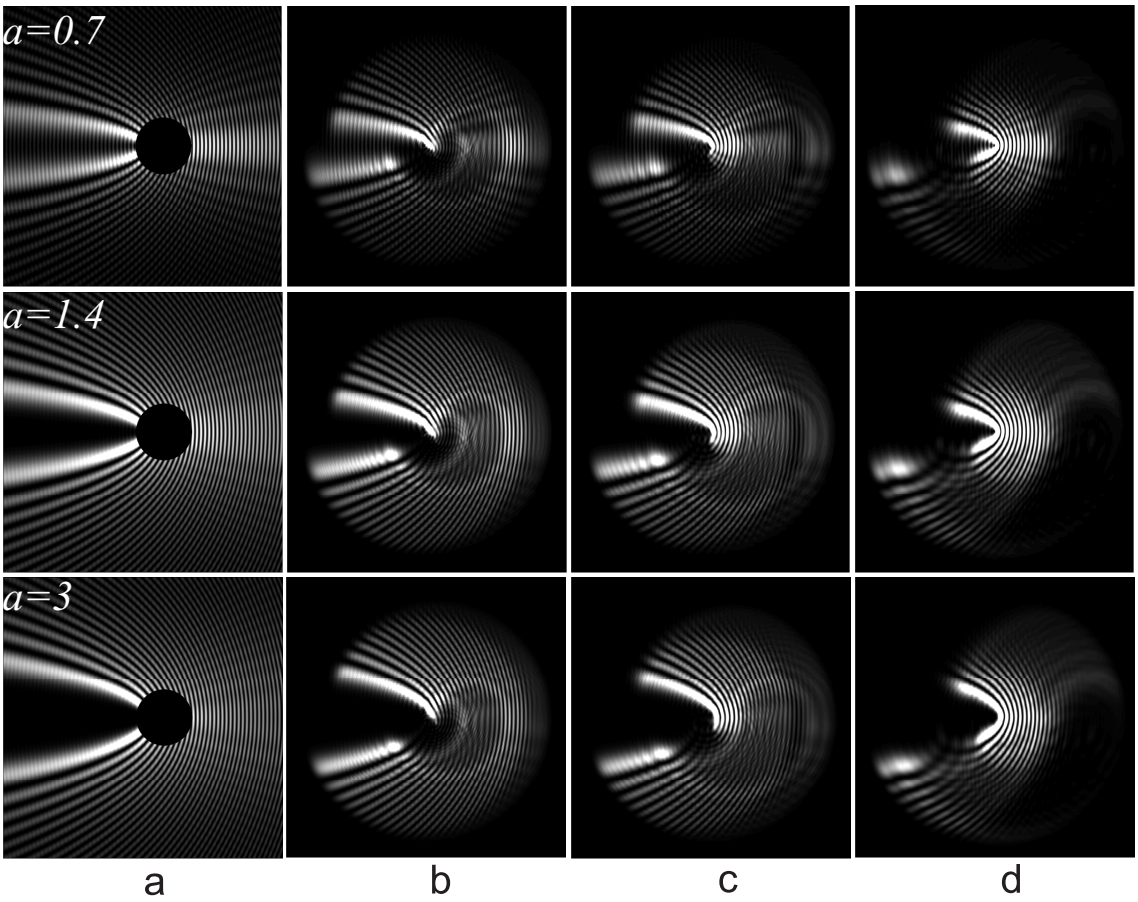

Figura 3.25: Etapas de la propagación de haces parabólicos con frentes de onda rotantes al ser parcialmente obstruidos. Distribuciones transversales de intensidad para la distancia z de: a) 0, b) 0.2 y c) 0.3 y d) 1.

En la figura (3.26) se presenta la propagación del haz PR para el caso $a = \sqrt{2}$ al ser parcialmente obstruido en el plano $x - z$. En la imagen se muestra la sombra de alto contraste OE y la sombra de bajo contraste OS.

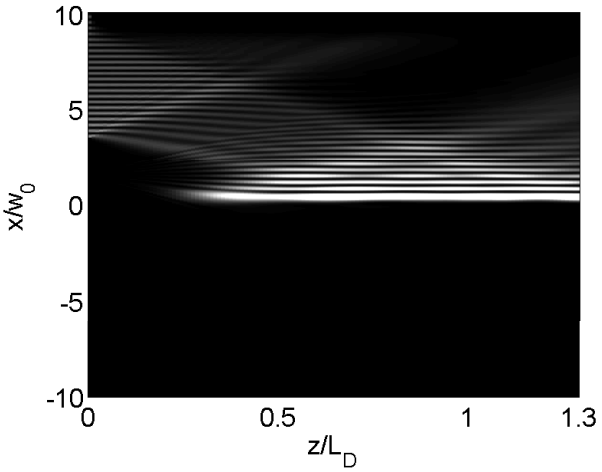

Figura 3.26: Propagación del haz Parabólico-rotante (PR) al ser parcialmente obstruido en el plano $x - z$ para el caso $a = \sqrt{2}$.

Para obtener la forma funcional de las ondas saliente y entrante es necesario hallar la segunda solución a la ecuación cilíndrica parabólica. Sin embargo este calculo queda fuera de este trabajo de tesis, lo que se determino fue el frente de onda del haz Parabólico rotante.

En la figura (3.27) se esquematiza el frente de onda rotante (helicoidal-parabólico) de un haz Parabólico-rotante (PR) graficando el argumento de la función (3.13). Esta superficie es análoga al frente de onda helicoidal para el haz Bessel de alto orden. El signo "$+$" en la ecuación (3.13) es para la región de $(0, \pi)$ y el signo "$-$" es para la región $(\pi, 2\pi)$. En la figura (3.28) se muestra el frente de onda cónico helicoidal-parabólico teniendo una analogía con el frente onda cónico-helicoidal de las ondas constituyentes de un haz Bessel.

$$A_\phi = A_{cos}(\phi, a) \pm A_{sen}(\phi, a) \approx \exp\left(ialn\left|tan\frac{\phi}{2}\right|\right), \tag{3.13}$$

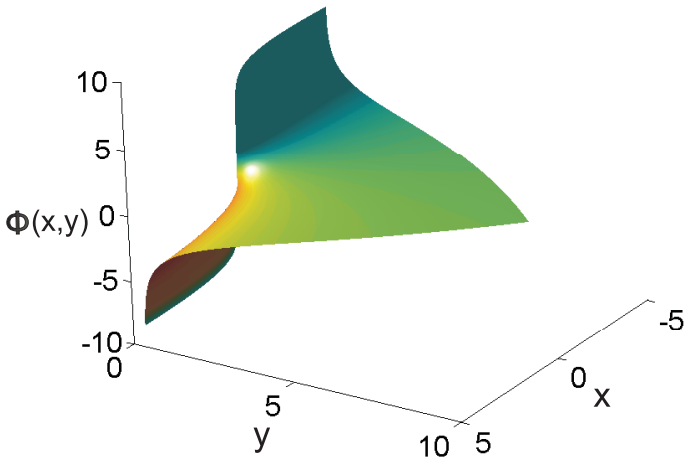

Figura 3.27: Frente de onda helicoidal-parabólico para la región de $(0, \pi)$, esta superficie es análoga al frente onda helicoidal de un haz Bessel de alto orden.

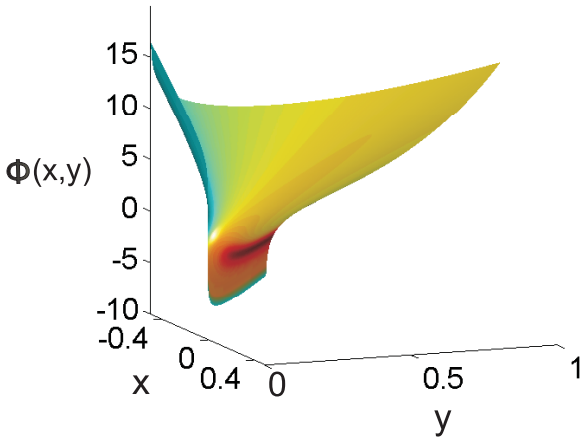

Figura 3.28: Frente de onda cónico helicoidal-parabólico de las ondas constituyentes de un haz Parabólico.

3.5. Representación analítica de haces Cáusticos

En el capítulo de los conceptos teóricos de este trabajo de tesis se mostró que los campos ópticos invariantes en propagación son gobernados por la integral reducida de Whitaker, ecuación (2.16). Si se conoce la función $A(\phi)$ al resolver la integral entonces de define la estructura que tendrá el haz.

Se presentó un estudio numérico y experimental de nuevos campos invariantes en propagación sin simetría radial en [24], utilizando una modulación en el arreglo experimental usada por Durnin para generar haces Bessel el cual es constituido de una abertura anular (AA) y una lente esférica. En particular el campo incidente fue modulado con una fase unidimensional cuadrática o cúbica. Por la investigación que se realizó en la modulación del campo incidente en arreglo experimental AA en [24, 84]. Un haz Cáustico invariante en propagación (CIP) es descrito por la función de fase $A_c(\phi)$ que describe la intersección de una superficie parabólica y un cilindro.

En la figura (3.29a) se muestra la intersección de una superficie cilindrica y una superficie parabólica, la curva de intersección se presenta en negro. En la figura (3.29b) se representa las dos superficies cónicas que describen a las ondas entrantes y salientes que generan a el haz CIP.

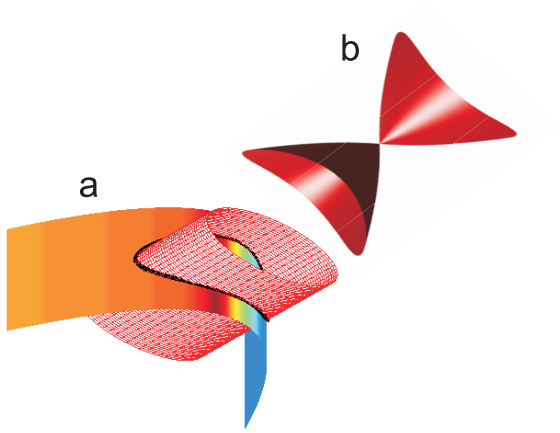

Figura 3.29: Intersección de un cilindro circular y una superficie parabólica a). Los frentes de onda cónicos entrante y saliente que generan el haz CIP en b).

La intersección de una superficie cilíndrica y una superficie parabólica se describe mediante la función de fase:

$$A_c(\phi) = \exp(if\cos^2(\phi)), \tag{3.14}$$

para el campo complejo de un haz Cáustico invariante en propagación, donde el valor de f incrementa o disminuye la curvatura de la superficie parabólica. Físicamente esta fase cilíndrica se obtiene cambiando la distancia focal f de una lente cilíndrica para modular en fase el campo incidente sobre la abertura anular del arreglo experimental AA y lente [24].

Considerando la función (3.14) como el integrando de la ecuación reducida de Whittaker, ecuación (2.16), se resuelve la integral numéricamente y se obtienen las distribuciones de intensidad para un haz CIP, ver la figura (3.30) para los parámetros $f = 8$, $f = 36$ y $k_t = 11$.

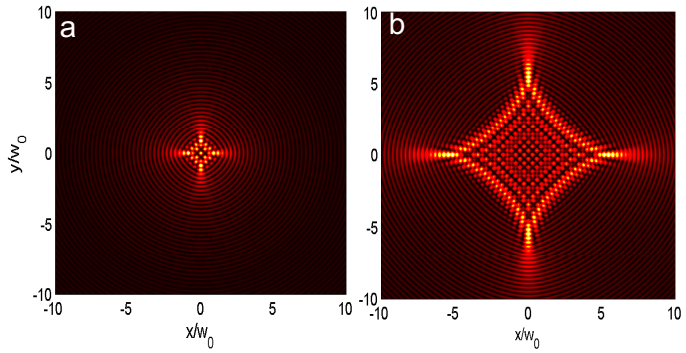

Figura 3.30: Patrones transversales de intensidad de un haz Cáustico invariante en propagación (CIP) para los valores de $f = 8$ a) y $f = 36$ b).

En la figura (3.31) se presenta la intensidad en eje de la figura (3.30a), como puede observarse la intensidad en eje se mantiene constante y decae hasta 0.25 unidades en coordenadas normalizadas a la distancia maxima adifraccional $Z_{max} \approx 1.9$.

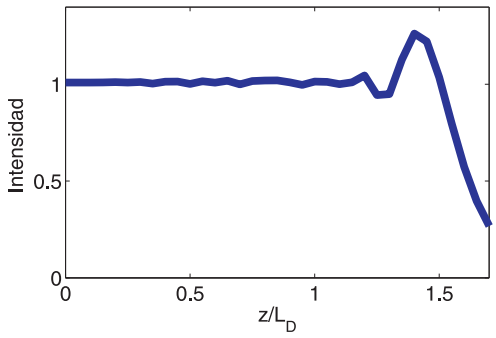

Figura 3.31: Intensidad en eje para el haz Cáustico invariante en propagación.

Después de comprobar la adifraccionalidad del haz CIP se obstruye parcialmente el haz fuera del eje con un objeto opacao. En la figura (3.32) se presentan los resultados en las posiciones $z = 0$, 0.1 y 0.5. En la figura (3.32b) se observan dos sombras que están emergiendo: una sombra grande de bajo contraste viajando a la izquierda debido a una onda cónica saliente y una sombra pequeña de alto contraste debida a la onda cónica entrante viajando a la derecha. Cuando la onda entrante pasa el eje

este cambia a una onda saliente y continua moviéndose lejos del eje. En las imágenes (3.32c) se puede observar que los haces se han reconstruido.

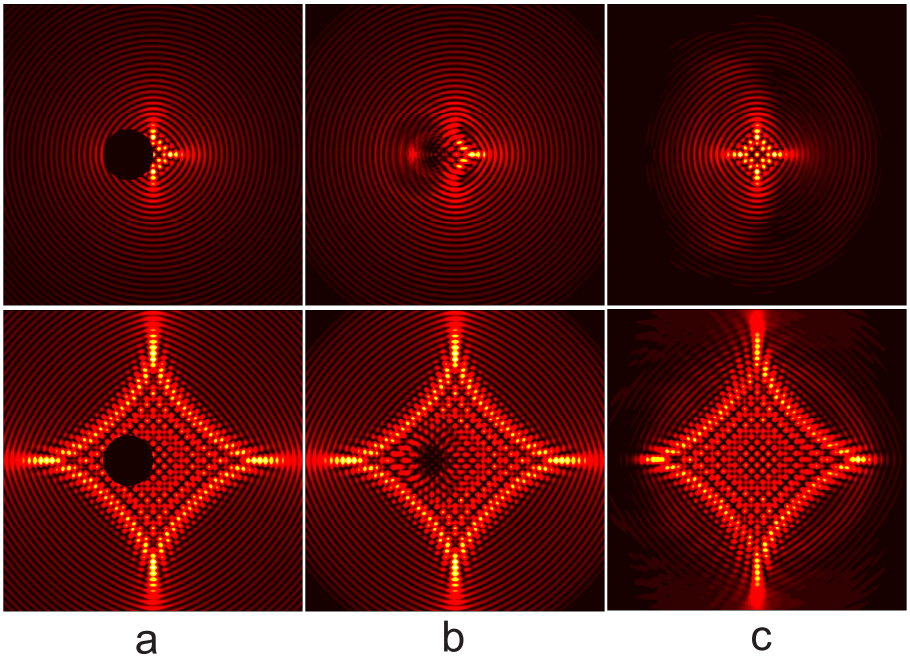

Figura 3.32: Auto-reconstrucción de dos haces Cáusticos invariantes en propagación al ser parcialmente obstruidos: $f = 8$ (arriba) y $f = 30$ (abajo). Perfiles transversales de intensidad obtenidos en las distancias z de: a) 0, b) 0.1 y c) 0.5.

Otro tipo de haz se obtiene en el caso de una modulación unidimensional cúbica de fase en sobre la iluminación de la abertura anular en AA, articulo [24]. La curva de intersección entre una superficie cúbica y una superficie cilindrrica, ver figura (3.34), permite dilucidar la función de modulación de fase que describa un haz CuIP el cual puede ser escrito como:

$$A_{cub}(\phi) = \exp(if\cos^3(\phi)), \tag{3.15}$$

El valor de f tiene la misma característica que para el haz CIP.

Considerando lo descrito en la parte superior de esta sección se grafican los frentes de onda de la ecuación (3.16) para las ondas cónicas entrantes y salientes

con la modulación cúbica que generan el haz CuIP. En la figura (3.33) se presentan los frentes de onda cónicos con la modulación de un superficie cúbica para " + " en (3.33a) y " − " en (3.33b).

$$Fase = arg[U_{ent;sal}] \approx k_t r \pm fx^3 \tag{3.16}$$

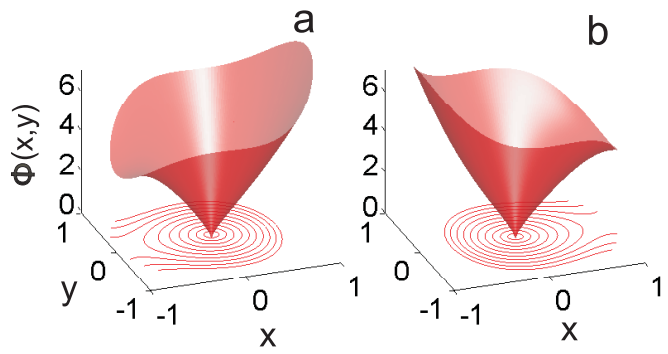

Figura 3.33: Frentes de onda cónicos con una modulación cúbica positiva a) y negativa b).

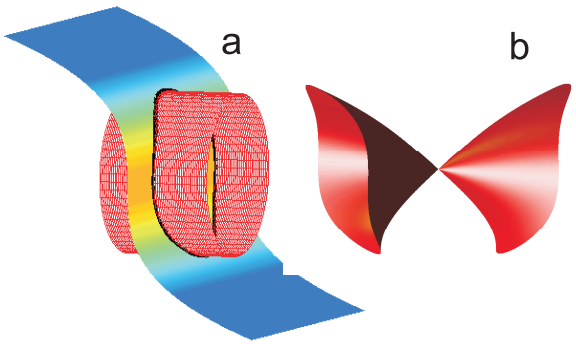

Figura 3.34: Intersección de un cilindro circular y una superficie cúbica a). Los frentes de onda de las ondas cónicas entrante y saliente que generan un haz Cúbico invariante en propagación (CuIP) en b).

Considerando la función (3.15) como el integrando de la integral reducida de Whittaker (2.16) se resuelve numéricamente y se obtienen las distribuciones de in-

tensidad para un haz CuIP que se muestran en la figura (3.35), para los valores de $f = 4$, $f = 28$ y $k_t = 11$.

Se analiza el comportamiento del haz CuIP al ser parcialmente obstruido fuera de eje con un objeto opaco. En la figura (3.36) se muestran los patrones transversales de intensidad en las posiciones $z = 0$, 0.1 y 0.5. En estas imágenes se observan dos sombras, figura (3.36b): una sombra grande de bajo contraste viajando a izquierda debido onda cónica saliente y una sombra pequeña de alto contraste de la onda cónica entrante viajando a la derecha.

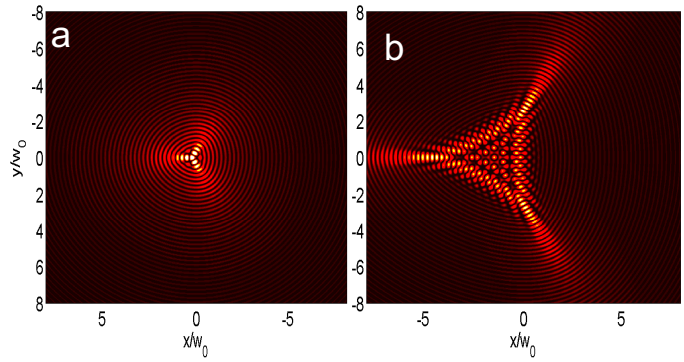

Figura 3.35: Patrones transversales de intensidad de un haz Cúbico invariante en propagación (CuIP) para los valores de $f = 4$ a) y $f = 28$ b).

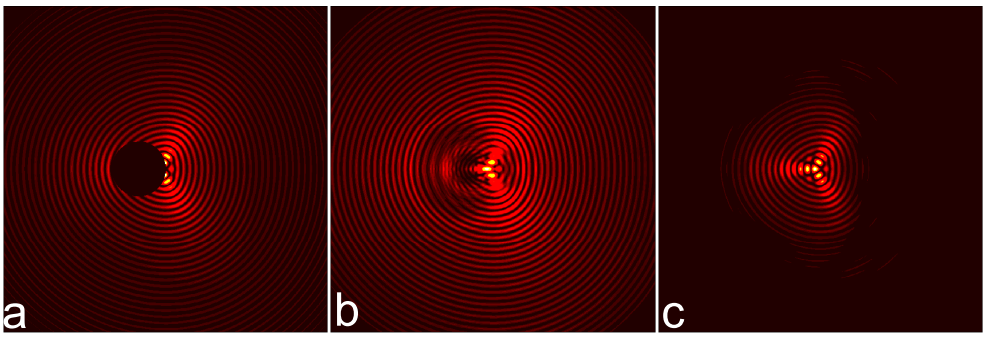

Figura 3.36: Auto-reconstrucción de un haz Cúbico invariante en propagación al ser parcialmente obstruido en las posiciones $z = 0$ a), 0.1 b) y 0.5 c).

3.5.1. Solución analítica de haces Cáusticos adifraccionales

En esta sección se muestra la representación analítica para un haz Cáustico invariante en propagación de tal forma de reconocer sus constituyentes. Para encontrar la representación analítica de un haz Cáustico invariante en propagación se considera la solución de la integral reducida de Whittaker (2.16), con los componentes de su integrando escritos de la siguiente forma:

$$A_c(\theta) = \exp(if\cos^2(\theta)) = \exp(if/2)\exp(if/2cos2\theta), \tag{3.17}$$

y

$$\exp(ik_t(x\cos\theta + y\sin\theta) = \exp(ik_t rcos(\theta - \phi)) \tag{3.18}$$

con un cambio de variable en coordenadas polares $x = r\cos\phi$ y $y = r\sin\phi$ entonces la integral para un haz CIP esta dada como:

$$U_c(\mathbf{r}) = \exp(ik_z z)\exp(if/2)\int_0^{2\pi}\exp(if/2cos2\theta)\exp(ik_t rcos(\theta-\phi))d\theta. \tag{3.19}$$

Usando una relación de ondas planas y funciones Bessel, [36]-capítulo 11, se tiene:

$$e^{iucosv} = \sum_{m\to-\infty}^{\infty} i^m J_m(u)e^{imv}, \tag{3.20}$$

la cual significa que una onda plana se compone de funciones Bessel para la componente radial (en u) y una componente angular (v).

Otra propiedad que es útil es la ortogonalidad de las funciones coseno y seno:

$$\int_0^{2\pi} cosn\theta cosm\theta = \pi\delta_{nm}, \tag{3.21}$$

donde δ_{nm} es la delta de Kronecker.

Realizando la multiplicación del integrando en la ecuación (3.19), tomando la relación (3.20) y considerando la ortogonalidad de la funciones coseno y seno, se tiene la representación del campo complejo de un haz CIP en términos de funciones

Bessel:

$$U_c(r,\phi) = 2\pi[J_0(f/2)J_0(k_t r)+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m m J_m(f/2)J_m(k_t r)e^{-im\phi} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m m J_m(f/2)J_m(k_t r)e^{im\phi}], \quad (3.22)$$

$$U_c(r,\phi) = 2\pi\left[J_0(f/2)J_0(k_t r) + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m m J_m(f/2)J_m(k_t r)cos(m\phi)\right], \quad (3.23)$$

esta ecuación permite observar de forma independiente los constituyentes del haz CIP, funciones Bessel en la parte radial y funciones armónicas en la parte angular.

3.6. Analogía de la segunda ley de Kepler en haces con MAO

Se observó cualitativamente que la circulación de energía depende de la distancia al eje de propagación en las secciones 3.3 y 3.4. Se mostró el desplazamiento en la energía en haces Bessel de alto orden, figura (3.11) y haces Parabólicos rotantes, figura (3.25), al ser parcialmente obstruidos. En esta sección se analiza cuantitativamente el desplazamiento de la energía transversal respecto a la distancia radial llevando al resultado que la circulación de energía es inversamente proporcional a la distancia radial al eje análogo a una partícula bajo la influencia de una fuerza central.

De la conservación de momento angular se tiene que en un plano el momento lineal tangencial P_t de una partícula es inversamente proporcional a su posición $1/r$.

$$P_t \sim \frac{1}{r} \quad (3.24)$$

Un haz Bessel de alto orden tiene momento lineal transversal local, sección 2.4.2, dado por:

$$P_t = \langle S_t \rangle / c^2 = \frac{C|J_m(k_t r)|^2|m|}{r}, \quad (3.25)$$

donde $|J_m|$ es la amplitud compleja del haz Bessel, $C = E_0\epsilon_0/2w$ y m es la carga topológica .

En la segunda ley de Kepler, sección 2.4.2 :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{rv}{2} = \frac{r^2 w_p}{2} = constante, \tag{3.26}$$

se establece que el vector de posición de la partícula (planeta) barre áreas iguales en tiempos iguales, donde v es la velocidad transversal y w_p la velocidad angular. En un haz con momento angular la ecuación (3.25) indica que la circulación de energía será mayor al estar cerca del eje del haz con un comportamiento inversamente proporcional a la posición $1/r$.

En los haces Parabólicos con frentes de onda rotantes donde su fase azimutal esta determinada por $exp(ialn|tan\frac{\phi}{2}|)$ y el valor a determina el lado recto de la parábola. La confirmación de que la circulación de energía es inversamente proporcional a la posición radial $(1/r)$ se realiza analizando como se desplaza a lo largo de un eje el patron de difracción obtenido al colocar una obstrucción circular de aproximadamente del ancho en cada anillo brillante (o parabola) y propagar el haz. Por difracción se genera el spot de Arago detrás de la obstrucción, ver figura (3.37). El spot un máximo de intensidad que permite seguir el flujo de energía del haz. Entonces se mide el desplazamiento transversal del spot en diferentes distancias radiales del centro de la obstrucción, hasta el décimo anillo (o parabola). La dinámica obtenida del spot se asocia al momento lineal de los haces Bessel de alto orden y haces Parabólicos P_t.

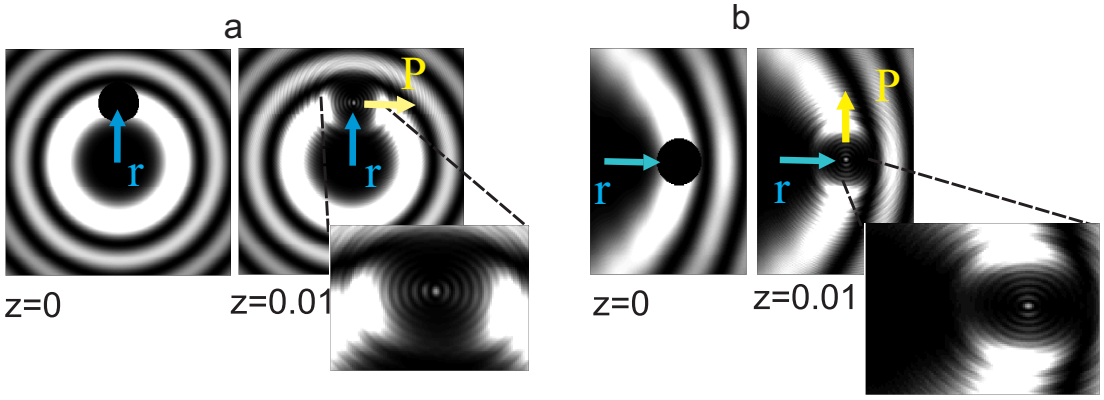

Figura 3.37: Condición inicial y el spot de Arago después de la obstrucción: para un haz Bessel de alto orden a) y un haz Parabólico b). Se muestra el spot de Arago en una región amplificada.

Se muestran los datos obtenidos para tres haces Bessel de orden $m = 1, 5$ y 10, en la figura (3.38a). En la figura (3.38b) se muestra los correspondientes datos para los haces Parabólicos con $a = -0.7, -1.4$ y -3; para estos haces el parámetro a esta relacionado con la rotación azimutal a lo largo de trayectorias parabólicas. Ambos haces se propagan la misma distancia. Se observa, como es predicho en la ecuación (3.25), que los datos ajustan a una hipérbola mostrando entonces el mismo comportamiento de una partícula en un sistema bajo una fuerza central. El juste se realizó con la herramienta cftool de Matlab. Se puede observar que el desplazamiento aumenta al incrementar m para haces Bessel y a para haces Parabólicos. El comportamiento del flujo local de energía de un haz con distribución circular y parabólica, (3.38), es análogo al que tiene una fuerza central inversa al cuadrado [109].

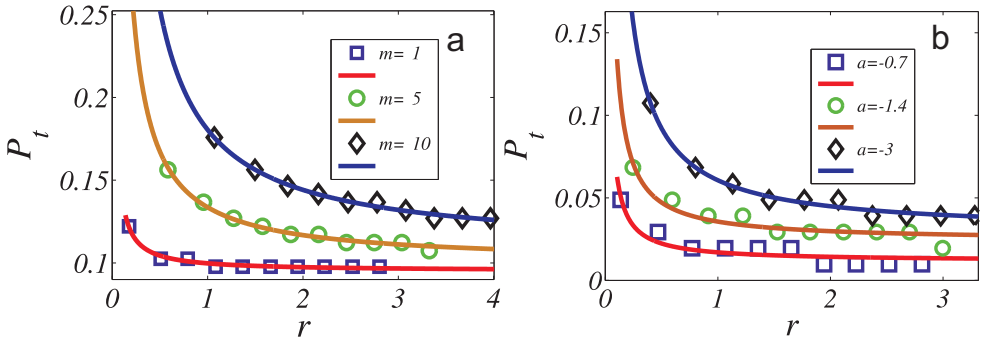

Figura 3.38: Circulación de energía inversamente proporcional a la distancia radial cuando los haces son parcialmente bloqueados: a) en haces Bessel de alto orden y b) en haces Parabólicos para el plano $z = 0.03$.

Para el caso de un haz Bessel de alto orden $m = 10$ y un haz Parabólico $a = -3$ los datos ajustan a las hipérbolas descritas por las funciones (4.8) y (3.28) respectivamente del momento transversal P_t :

$$P_{tB}(r) = 0.0726/r + 0.1078, \tag{3.27}$$

y

$$P_{tp}(r) = 0.0314/r + 0.0291. \tag{3.28}$$

La conservación de momento angular de una partícula sujeta a una fuerza central ocurre en un plano. Para mostrar que esto pasa en los haces con frentes de onda rotantes, se mide el desplazamiento en otra posición $z = 0.02$ y como referencia se colocan los datos de la posición $z = 0.03$. En la figura (3.39) se presenta el desplazamiento de energía con la dependencia radial hiperbólica demostrando que tienen el mismo comportamiento en distintos planos, para el haz Bessel con carga topológica $m = 10$ y $m = 5$.

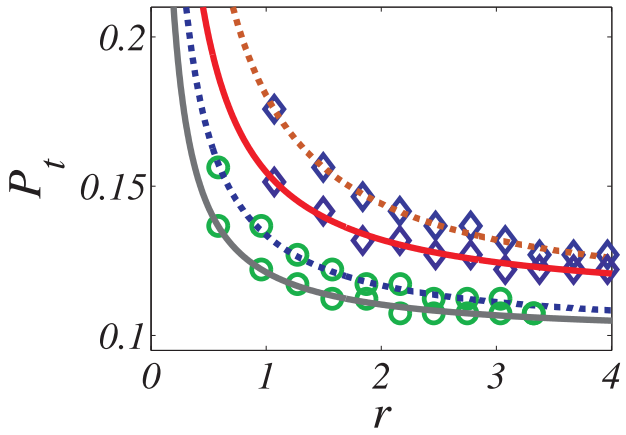

Figura 3.39: Comportamiento de la circulación de energía de los haces Bessel para $m = 10$ (diamantes) y para $m = 5$ (círculos) en dos planos: $z = 0.02$ (linea) y $z = 0.03$ (puntos).

Capítulo 4

Auto-reconstrucción en haces paraxiales

En este capítulo se estudia la auto-reconstrucción, de forma analítica y numérica, de algunos haces paraxiales en particular: haces Laguerre-Gauss (LG), haces Hermite-Gauss (HG) y haces Airy. En relación con lo estudiado de las características de propagación de los haces Bessel en el capítulo anterior se hace una comparación entre estos haces y los haces LG. Se muestra por primera vez que los haces LG con multiples anillos tienen la propiedad de auto-reconstrucción y esta propiedad puede ser descrita en términos de dos ondas: una onda entrante y otra saliente. Para la descripción de estas ondas se encuentra la segunda solución de la ecuación diferencial asociada de Laguerre para índices de orden enteros que nombraremos función X. Esta función X es utilizada para describir los haces Hermite-Gauss considerando que éste es constituido de dos ondas. En la sección 4.1 se compararán las características de propagación y perfil transversal de intensidad de haces Bessel (B), haces Bessel-Gauss (BG) y haces LG en circunstancias similares, la comparación se realizará principalmente entre haces B y haces LG. Se mostrará que los haces LG tiene una mayor distancia de propagación respecto a los haces B. En la sección

4.1.1 se mostrará que el haz LG tiene la propiedad de reconstruirse al ser parcialmente obstruido comparando las características de reconstrucción del haz B. En la sección 4.2 se demuestra que la reconstrucción del haz Laguerre-Gauss ocurre por la superposición de dos ondas cónicas contrapropagantes que constituyen el haz. Se encuentra la segunda solución de la ecuación diferencial asociada de Laguerre para un índice radial entero que describe las ondas constituyentes del haz LG. En la sección 4.3 se muestra que el haz HG también es constituido de ondas entrantes y salientes. Por último, en la sección 4.4 se estudia la reconstrucción del haz Airy con las soluciones de la ecuación de Airy que constituirán la onda saliente y onda entrante.

4.1. Comparación entre haces Laguerre-Gauss y haces Bessel

En esta sección se comparan los haces Laguerre-Gauss y haces Bessel en propagación para la cual se obtendrá una relación entre la funciones Bessel y los polinomios asociados de Laguerre. Para hallar la relación entre las funciones se utiliza la ecuación diferencial asociada de Laguerre, ecuación (2.47), que puede escribirse como [37]:

$$xy'' + (m+1)y' + [n + (m+1)/2]\, y = \frac{yx}{4}, \tag{4.1}$$

con solución $y(x) = e^{-x/2} L_n^m(x)$.

Si se supone que en la ecuación (4.1) la parte de la derecha es cero, se tendría una ecuación homogénea relacionada con la ecuación diferencial de Bessel cuyo conjunto completo de soluciones serían las funciones Bessel de primer J_m y segundo tipo Y_m [111]. Ahora, si se toma la ecuación (4.1) ésta se puede resolver por el método de variación de parámetros [37, 111]:

$$y(x) = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) + \frac{\pi}{4N} \int_0^x \frac{y(u)}{(Nu)^{m+1}} [y_1(u)y_2(x) - y_1(x)y_2(u)]du, \tag{4.2}$$

donde

$$N = n + \frac{1}{2}(m+1), \tag{4.3}$$

$$y_1(x) = (\sqrt{Nx})^{-m} J_m(2\sqrt{Nx}), \quad y_2(x) = (\sqrt{Nx})^{-m} Y_m(2\sqrt{Nx}). \tag{4.4}$$

La ecuación 4.2 estable una relacion entre las funciones Bessel con los polinomios asociados de Laguerre ya que $y(x) = e^{-x/2} L_n^m(x)$. Para tener una relación simplificada se observa el comportamiento asintótico de las funciones Bessel cuando $x \to 0$, esto es cuando $x \to 0$, $y_1 \to A_1$ y $y_2 \to \infty$ determina el valor de las constantes, que para tener un valor finito en $y(x)$, entonces $A_2 = 0$ y la ecuación (4.2) llega a ser:

$$y(x) = A_1[y_1(x) + p(n)], \tag{4.5}$$

donde

$$p(n) = \frac{\pi}{4A_1 N} \int_0^x \frac{y(u)}{(Nu)^{m+1}} [y_1(u)y_2(x) - y_1(x)y_2(u)]du. \tag{4.6}$$

Cuando $x \geq 0$ la función $p(n)$ es más pequeña que $y_1(x)$ para todo $0 \leq x \leq \mathfrak{a}$ y $\mathfrak{a}$ cualquier número mayor a cero siempre que n sea grande [37], entonces :

$$y(x) \approx A_1 y_1(x) \tag{4.7}$$

donde $A_1 = \Gamma(n+m+1)/n!$, y $\Gamma(.)$ es la función gamma.

De la ecuación (4.7) y de que $y(x) = e^{-x/2} L_n^m(x)$ se tiene una expresión para relacionar los haces Bessel, haces Bessel-Gauss y haces Laguerre-Gauss cuando el índice radial n es grande, $n \gg 1$. Si se hace un cambio de variable $x = 2r^2/w^2(z)$ y se reagrupan los términos se tiene que la ecuación (4.7) dada como:

$$e^{-r^2/w^2(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)}\right)^{|m|} L_n^{|m|}\left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \approx \frac{\Gamma(n+|m|+1)}{n!\, N^{|m|/2}} J_m\left(2\sqrt{2N}\frac{r}{w(z)}\right), \tag{4.8}$$

donde $N = n + \frac{|m|+1}{2}$.

La ecuación (4.8) describe la relación entre los principales parámetros del haz Laguerre-Gauss (2.50), cintura, índice radial n e índice azimutal m con la frecuencia radial k_t de un haz Bessel, ecuación (4.9), y un haz Bessel-Gauss, ecuación (4.10) [66]:

$$U_B(r, \phi, z = 0) = A_B J_m(k_t r) exp(-im\phi), \tag{4.9}$$

$$U_{BG}(r, \phi, z = 0) = A_B J_m(k_t r) exp(-r^2/w_{BG}^2) exp(-im\phi). \tag{4.10}$$

donde A_B, A_{BG} son las respectivas amplitudes de los haces y w_{BG} es la cintura del haz BG.

De la relación $k_t = 2\sqrt{2N}/w_0$, en $z = 0$, se establecen los requerimientos para que un haz Laguerre-Gauss tenga una forma similar a un haz Bessel. Se puede ver que para cualquier par de indices m y n, los anillos en el haz LG de alto orden están confinados en el disco de radio $R = w_0\sqrt{2N}$, ver [115]. Entonces para la comparación entre los haces este radio define la extensión del haz B y la cintura del haz BG ($w_{BG} = R$). Como un ejemplo los patrones de intensidad de los haces LG y haces B en $z = 0$ se presentan en la figura (4.1). El lado izquierdo de la columna es para los indices $m = 0$ y $n = 10$, mientras que el lado derecho es para $m = 5$ y $n = 10$. El renglón de abajo muestra la comparación de los correspondientes perfiles centrales de intensidad, incluyendo el haz BG. Los perfiles de intensidad de los tres haces en la parte central son prácticamente los mismos [ver las figuras 4.1(e) y 4.1(f)]. El anillo externo difiere en amplitud y frecuencia debido a la no uniformidad del polinomial asociado de Laguerre que define el haz LG. Se estudiaron los perfiles transversales variando los valores de los indices m y n, teniendo m positivo y $n \geq 5$, se observa la semejanza entre los haces LG y haces B dentro del disco de radio $2w_0$ que se aproxima a los primeros $n/2$ anillos.

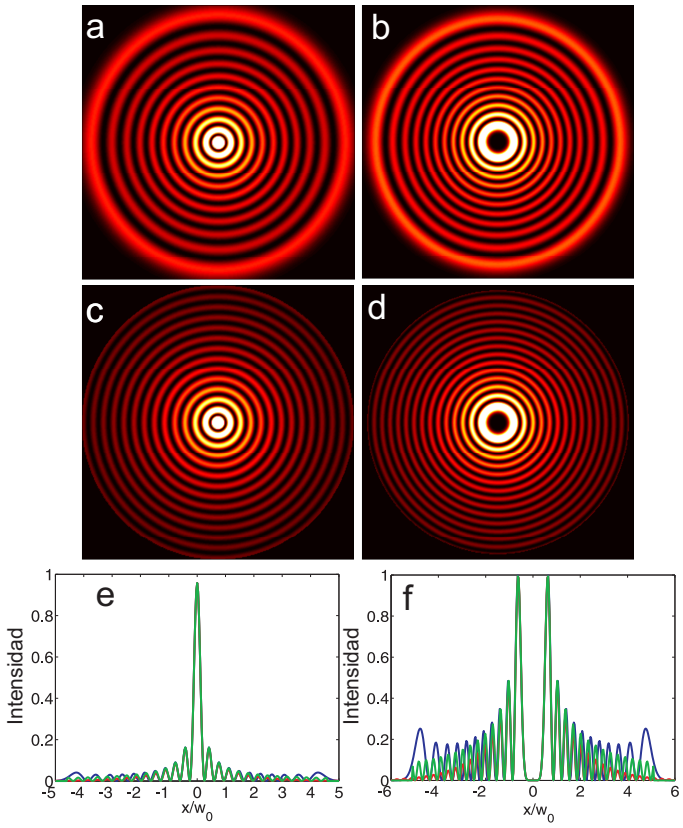

Figura 4.1: Patrones transversales de intensidad y perfiles centrales de los haces Laguerre-Gauss (LG) y haces Bessel (B). Columna de la izquierda: $m = 0$, $n = 10$; columna de la derecha: $m = 5$, $n = 10$. Renglón superior: LG; renglón de en medio: B; y el renglón inferior: perfiles centrales de intensidad, LG (linea azul), B(linea verde) y BG (linea roja).

Al determinar la frecuencia radial de los haces B y haces BG, y su extensión transversal, se puede obtener su máxima distancia de propagación sin difracción $Z_{max} = R/tan\theta \approx R/(k_t/k) \equiv L_D$. Esta relación establece que bajo circunstancias similares, la distancia máxima sin difracción de un haz B es idéntica a la longitud de difracción de un haz LG. Esta la relación es notable en el análisis, desde que la distancia L_D define el espacio donde el haz LG puede ser considerado colimado y su estructura no cambia significativamente en este espacio tal como un haz B nodifractivo. Para demostrar lo anterior se investiga la propagación de los haces B y haces LG, para los primeros se utiliza la ecuación paraxial de Helmholtz y para los

segundos de usa la ecuación (2.47). Las coordenadas transversales son normalizadas a la cintura w_0 y la distancia de propagación z es normalizada a L_D.

En la figura (4.2) se muestra el comportamiento de la intensidad en el plano $x - z$ del haz LG y el haz B para $m = 0$ y $n = 10$. Como referencia, en las dos imágenes, se marca una región triangular que describe la existencia del haz Bessel y en la región externa se muestra la extensión del haz LG con unas líneas punteadas. Si se observa de cerca el comportamiento de los haces es prácticamente similar en la región de existencia del haz B. Fuera de la región del haz B este haz se transforma en una onda Hankel saliente [34] mientras que el haz LG mantiene su estructura, pero claramente se ensancha.

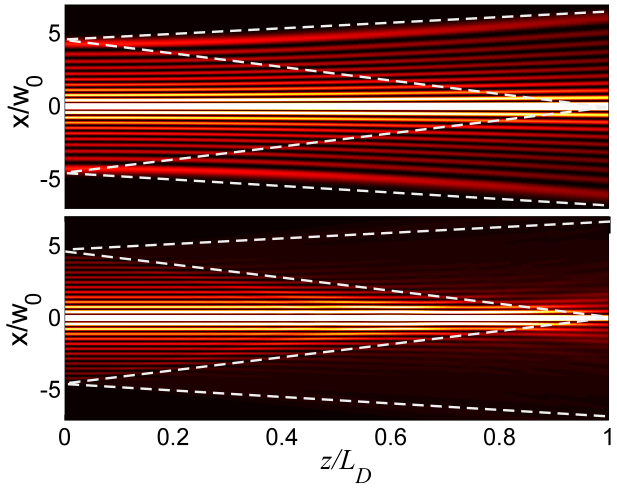

Figura 4.2: Comportamiento de la propagación en el plano $x - z$ del haz Laguerre-Gauss (LG) (arriba) y el haz Bessel (B) (abajo) con $m = 0$ y $n = 0$. La región cónica del haz B y el tamaño del haz LG son marcadas con líneas punteadas.

La intensidad en eje para los haces LG, BG y B cuando $m = 0$ y $n = 10$ son mostrados en la figura (4.3). En $z = L_D$, la intensidad en el eje normalizada del haz B y haz BG decae a menos de 0.25 mientras que en el haz LG decae a 0.5; sin embargo, para la distancia de propagación $0.9L_D$, la intensidad en eje del haz B es mas alta que el haz LG. En el caso limite de tener $m = 0$ y $n = 0$ se puede observar

la intensidad en eje en figura (4.4b) y el perfil de intensidad en la figura (4.4a).

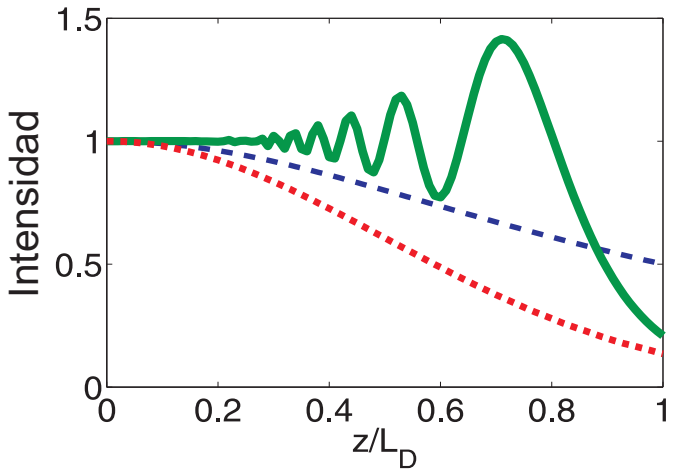

Figura 4.3: Intensidad en eje en una distancia de difracción del haz B (linea solida verde), haz BG (puntos en rojo) y el haz LG (linea punteada azul) para el caso $m = 0$ y $n = 10$.

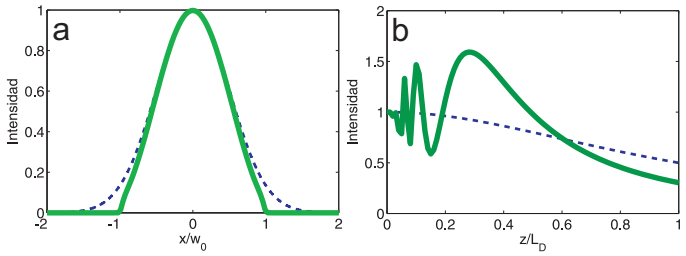

Figura 4.4: Perfil de intensidad del haz Bessel (linea solida) y el haz Laguerre-Gauss (linea punteada) para el caso $m = 0$ y $n = 0$ a). Intensidad en eje de ambos haces en una distancia de difracción b).

En la figura (4.5) se muestra la propagación de los haces LG y haces B con momento angular $m = 5$. Como es de esperarse se puede observar que su dinámica es la misma que el caso $m = 0$. En la figura (4.6) se muestran los patrones de intensidad de tres etapas de la propagación de los haces LG y B. Se muestra en las imágenes (4.6b) y (4.6c) como el haz LG se ha ensanchado y el haz B ha disminuido su extensión, en la posición $z = L_D$ el haz B, imagen (4.6c), sólo mantiene su estructura interior y el haz LG aún mantiene su estructura.

Para observar no sólo la estructura entre los haces con carga topológica se calcula la intensidad normalizada del primer anillo para los haces LG y B cuando $m = 5$ y $n = 10$, y son mostrados en la figura (4.7). En $z = L_D$, la intensidad del haz B decae a menos de 0.25 mientras que en el haz LG decae a 0.5; para la distancia de propagación $0.9L_D$, la intensidad en eje del haz B es similar al haz LG.

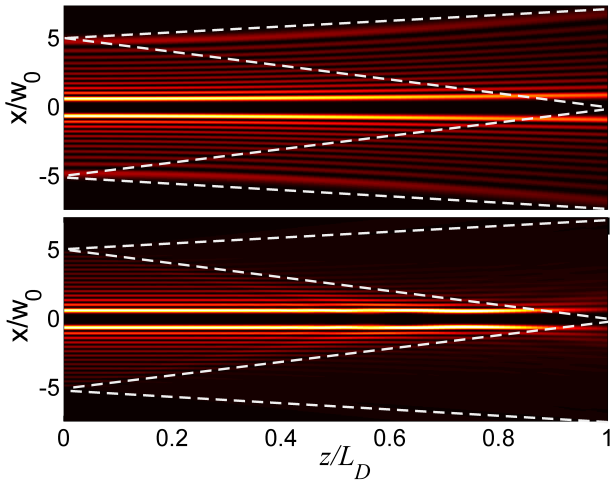

Figura 4.5: Lo mismo que en la figura (4.2), pero los haces tienen momento angular con carga $m = 5$ y en $n = 10$.

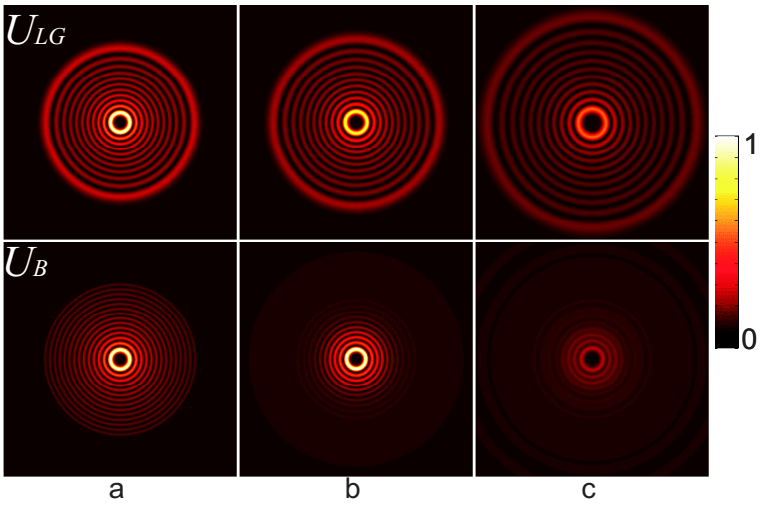

Figura 4.6: Distribución transversal de intensidad de la propagación de los haces Lagerre-Gauss U_{LG} y haces Bessel U_B (figura 4.5) en: $z = 0$ a), en $z = L_D/2$ b) y en $z = L_D$ c).

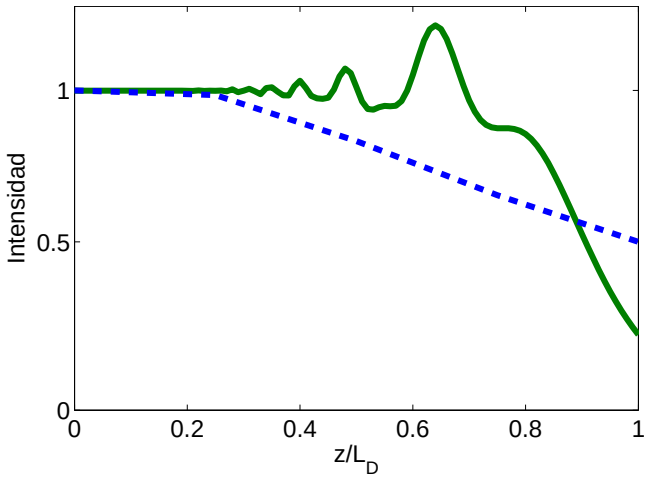

Figura 4.7: Intensidad normalizada del primer anillo para los haces Lagerre-Gauss (azul) y Bessel (verde) cuando $m = 5$ y $n = 10$.

Los resultados obtenidos en esta sección sugieren que los haces LG pueden representar una ventaja en aplicaciones como manipulación óptica y en estudios de detección de entrelazamiento cuántico usando haces LG [91, 92].

4.1.1. Auto-reconstrucción en haces Laguerre-Gauss contra haces Bessel

En esta sección se analiza la auto-reconstrucción en haces Laguerre-Gauss, propiedad que se creía exclusiva de haces Bessel [47, 116]. La auto-reconstrucción se ha reportado para haces LG con uno o dos anillos [46, 48]. En la figura (4.8) se muestra un ejemplo de la auto-reconstrucción para el haz LG con $m = 0$ y $n = 1$ al ser parcialmente obstruido, hasta una distancia $z = L_D$. En las diferentes etapas de la propagación del haz el comportamiento es similar al del haz B, sin embargo el haz LG se ha reconstruido y el haz B se ha difractado, ver la figura (4.8c).

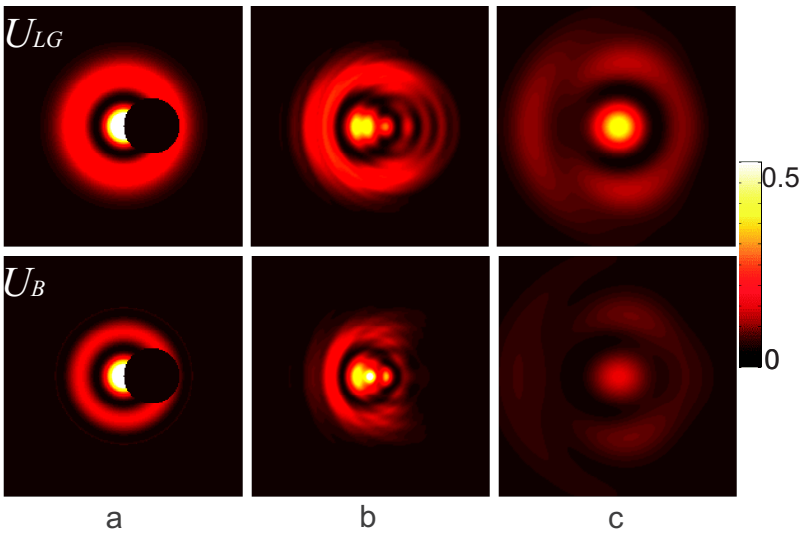

Figura 4.8: Distribución transversal de intensidad de la propagación de un haz Laguerre-Gauss y el haz Bessel con $m = 0$ y $n = 1$ al ser parcialmente obstruidos, en las posiciones: $z = 0$ a), $z = L_D/2$ b) y $z = L_D$ c).

En las figuras (4.9) y (4.10) se presentan los patrones transversales de intensidad a diferentes distancias de propagación de un haz LG con multiples anillos y un haz B que fueron inicialmente obstruidos fuera de eje. Se puede observar que la dinámica del haz LG es muy similar al haz Bessel.

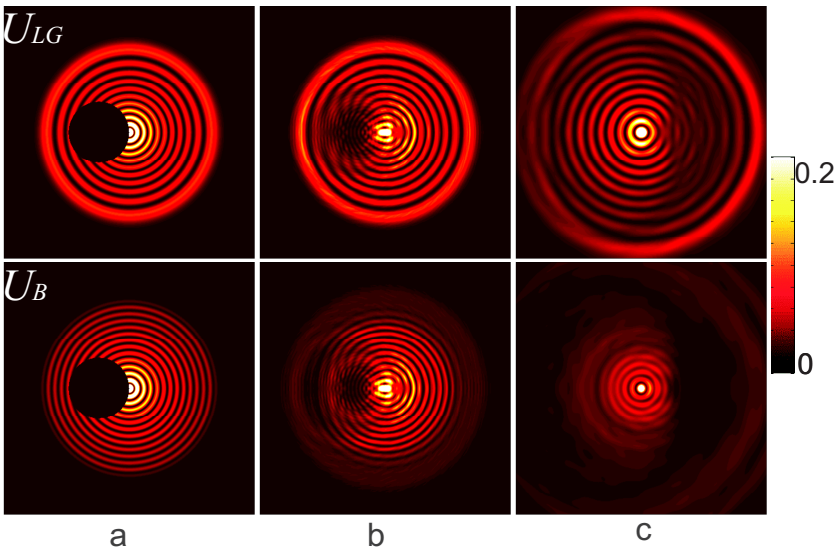

Figura 4.9: Auto-reconstrucción del haz Laguerre-Gauss (arriba) y el haz Bessel (abajo) con $m = 0$ y $n = 10$. En las posiciones: $z = 0$ a), $z = 0.2$ c), y $z = L_D$ f). Ambos renglones tienen la misma escala de color. Aprecie que en $z = L_D$, el haz Bessel casi a desaparecido mientras que el haz Laguerre-Gauss claramente se auto reconstruyo.

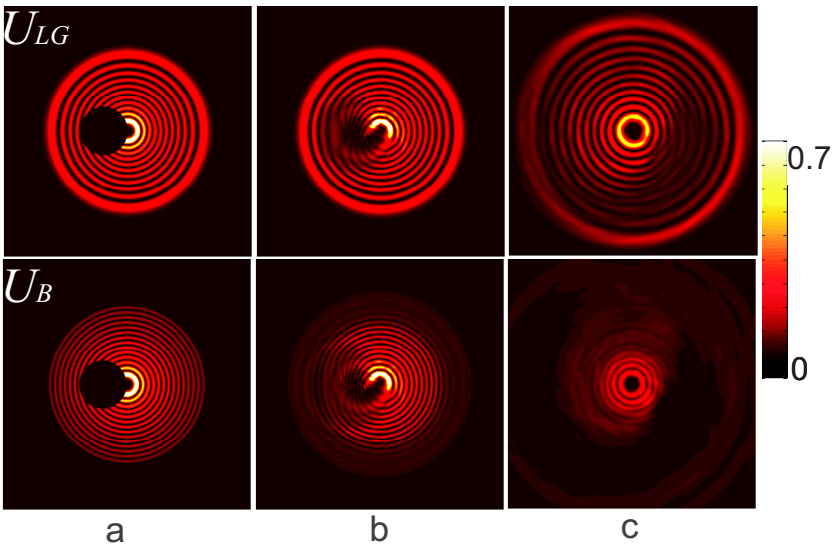

Figura 4.10: Se muestra un comportamiento similar que el presentado en la figura (4.9), pero los haces tiene momento angular con carga topológica $m = 5$. Note la circulación de energía en b).

De la comparación entre los haces LG y haces B es posible suponer que la recon-

strucción en los haces LG es debida a dos ondas constituyentes. En las imágenes de la figura [4.11b] al incrementar el numero de anillos del haz Laguerre-Gauss ($n = 19$) se puede ver claramente que existen dos sombras, una de bajo y otra de alto contraste que corresponderán a dos ondas "cónicas" que constituyen el haz LG. En la siguiente sección se obtendrán, de manera analítica, las ondas "cónicas" entrantes y salientes que constituyen al haz Laguerre-Gauss.

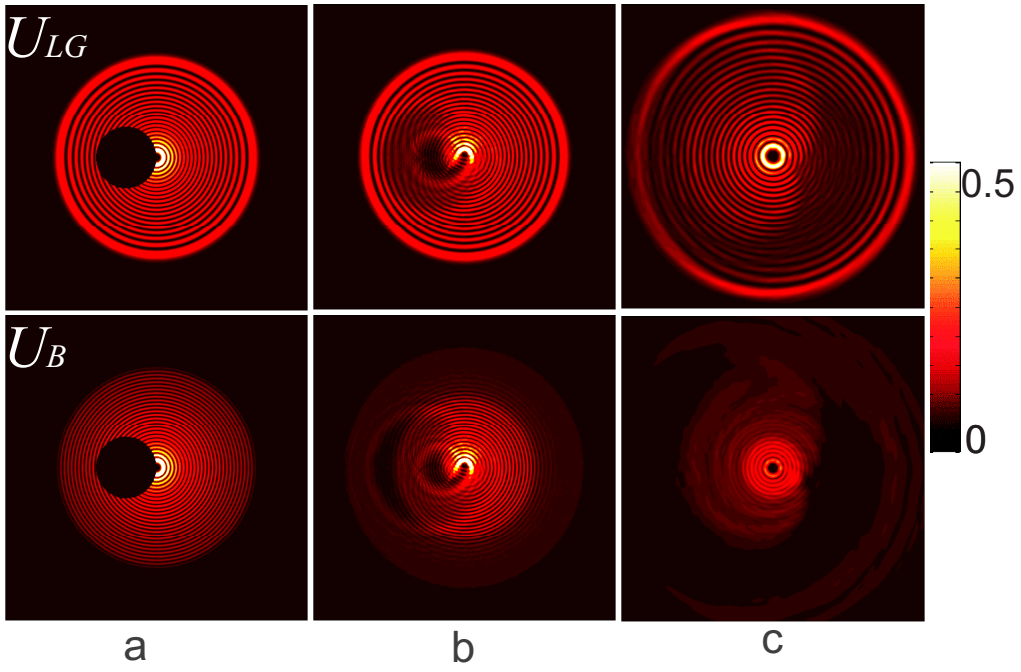

Figura 4.11: Auto-reconstrucción del haz Laguerre-Gauss (arriba) y haz Bessel (abajo) con $m = 5$ y $n = 19$. Aprecie en b) la existencia de dos sombras de bajo y alto contraste que corresponden a dos ondas cónicas que constituyen al haz Laguerre-Gauss.

En conclusión se ha demostrado que el haz Laguerre-Gauss (LG) puede ser una mejor opción que el haz Bessel (B) para muchas aplicaciones en donde se utilizan las propiedades del haz B. Se obtuvieron los parámetros para realizar una comparación en condiciones similares donde la región de existencia cuasi-adifraccional de un haz B es similar para al de un haz LG. Se demostró que los haces LG poseen una más robusta propiedad de auto-reconstrucción por propagarse una mayor distancia que su par Bessel. Como los haces Laguerre-Gauss se han generado muy eficientemente

estos últimos años, ellos pueden ser una excelente opción para presentes y futuras aplicaciones [117–119].

4.2. Obtención analítica de la onda entrante y saliente de un haz Laguerre-Gauss

Se ha demostrado que los haces Laguerre-Gauss poseen la propiedad de auto-reconstrucción con la misma dinámica que los haces Bessel. En esta sección se demuestra esta propiedad se debe a que los haces LG están constituidos por: una onda entrante y otra saliente. Como en el caso de los haces Bessel estos constituyentes deben estar descritas por funciones muy similares a las funciones Hankel y por esto es necesario obtener las soluciones de la ecuación que los describe. Esto es, se buscan dos soluciones de la ecuación diferencial asociada de Laguerre (associated Laguerre differential equation ALDE) y_1 y y_2 para índices enteros azimutal m y radial n de la ecuación (2.47). La primera solución esta dada por los polinomios asociados de Laguerre $y_1 = L_n^m$ [107]. Usando por ejemplo el método de Frobenius (**apéndice 1**), se encuentra:

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k m! n! x^k}{(n-k)!(m+k)k!}. \tag{4.11}$$

Será útil escribir la solución (4.11) en términos de la función Confluente Hipergeométrica $\Phi(a, m; x)$ (FCH) de primer tipo [36, 37, 41], con lo que el polinomio asociado de Laguerre se escribe como:

$$L_n^m(x) = \frac{(m+n)!}{m!n!}\Phi(-n; m+1, x). \tag{4.12}$$

De acuerdo a la literatura [36, 37, 41] se tiene una segunda solución $U(a, m, x)$

Confluente Hipergeométrica de segundo tipo con la siguiente expansión en serie [37]:

$$U(a,m+1,x)=\frac{(-1)^{m+1}}{\Gamma(a-m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k x^k}{(m+k)!k!}\times[\psi(a+k)-\psi(1+k)-(m+1+k)+ln(x)]+$$
$$\frac{1}{\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k(m-k-1)!(a-m)_k x^{k-m}}{k!}, \quad (4.13)$$

donde $|arg(x)|<\pi$, $m=0,1,2...$; $a\neq 0,1,2...$, $\psi(x)=\Gamma'(x)/\Gamma(x)$ es la derivada logarítmica de la función gama y la suma $\sum_{k=0}^{-1}...$ es cero cuando $m=0$. Sin embargo, la función (4.13) es una solución para $m=0,1,2...$ y $a\neq -n$ $(n=0,1,2...)$. Si a tiende a un entero y m no es entero en (4.13), ver [37], la segunda solución no es linealmente independiente a la primera por lo que:

$$U(-n,m+1,x)=(-1)^n\frac{(m+n)!}{m!}\Phi(-n,m+1,x), \quad (4.14)$$

de esta forma U y Φ no son soluciones para $m=0,1,2...$ y $n=0,1,2,...$, que satisfagan la ALDE, pero estas funciones se pueden utilizar para construir una segunda solución, que llamaremos función X.

4.2.1. Función X

Se define una nueva función X como una segunda solución a la ecuación asociada de Laguerre (ALDE) para índice azimutal y radial entero $m=0,1,2...$ y $n=0,1,2,...$ Siguiendo el método de Hankel, ver **apéndice 2**, que se utiliza para encontrar una segunda solución a la ecuación diferencial de Bessel, la función X_a^m se define como:

$$X_a^m(x)=\frac{\frac{m!}{(m+a)!}U(-a,m+1;x)-\cos(\nu\pi)\Phi(-a,m+1;x)}{\sin(a\pi)}, \quad (4.15)$$

donde $m=0,1,2...$, y a es un número no entero. La función X tiene la misma forma de la función Neumann [120]. Cuando el valor de $a\rightarrow n(0,1,2,...)$ el lado derecho de la ecuación (4.15) es indeterminado $0/0$ considerando la ecuación (4.14).

Ahora utilizando la regla de L'Hopital se encuentra que la función X para un $a = n(0, 1, 2, ...)$ esta dada como:

$$X_n^m(x) = \lim_{a\to n} X_a^m(x) = \frac{1}{\pi}\left[(-1)^n \frac{\partial(DU(-a, m+1; x))}{\partial a} - \frac{\partial(\Phi(-a, m+1; x))}{\partial a}\right]_{a=n},$$

para $m = 0, 1, 2...$ y $n = 0, 1, 2, ...$ donde $D = \frac{m!}{(m+n)!}$

Debido al factor en la ecuación (4.14) se puede obtener la formula (4.15) con otro valor en la amplitud, sin embargo con la forma funcional de (4.15) es posible comparar X_n^m y Φ.

La función X_n^m es solución a ALDE debido a que U y Φ son soluciones a ALDE, tal que:

$$x\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial(\frac{m!}{(m+a)!}U)}{\partial a}\right) + (m+1-x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial(\frac{m!}{(m+a)!}U)}{\partial a}\right) + a\left(\frac{\partial(\frac{m!}{(m+a)!}U)}{\partial a}\right) + \frac{m!}{(m+a)!}U = 0 \tag{4.16}$$

y

$$x\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial(\Phi)}{\partial a}\right) + (m+1-x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial(\Phi)}{\partial a}\right) + a\left(\frac{\partial(\Phi)}{\partial a}\right) + \Phi = 0 \tag{4.17}$$

son soluciones a la ALDE. Multiplicando la ecuación (4.16) por $(-1)^a$ y restando a (4.17) y tomando el limite $a \to n$ (n un entero) se obtiene:

$$x\frac{d^2}{dx^2}\big(X_n^m\big) + (m+1-x)\frac{d}{dx}\big(X_n^m\big) + n\big(X_n^m\big) = \frac{1}{\pi}[(-1)^n\frac{m!}{(m+n)!}U - \Phi], \tag{4.18}$$

y el lado derecho de la ecuación(4.18) es cero por lo tanto X_n^m es solución a la ecuación diferencial asociada de Laguerre.

Con las funciones $\Phi(-n, m+1, x)$ y $X_n^m(x)$ se tiene la solución general a la ecuación diferencial asociado de Laguerre para $m = 0, 1, 2...$ y $n = 0, 1, 2, ...$:

$$y(n, m; x) = A\Phi(-n, m+1; x) + BX_n^m(x) \tag{4.19}$$

donde A y B son constantes. La demostración de la independencia lineal entre las funciones no se realizará analíticamente en esta tesis, lo que se realizará es observar

su comportamiento en propagación al describir físicamente las ondas constituyentes al haz Laguerre-Gauss.

De acuerdo a la definición de las funciones Hankel [36] se construyen las **funciones Laguerre-Hankel**:

$$LH_n^m(1;x) = L_n^m(x) + iCX_n^m(x), \tag{4.20}$$

$$LH_n^m(2;x) = L_n^m(x) - iCX_n^m(x), \tag{4.21}$$

de primer (4.20) y segundo tipo (4.21), donde $C(m,n) = (m+n)!/m!n!$ Las funciones Laguerre-Hankel son de gran relevancia para construir las ondas que generan el haz Laguerre-Gauss como lo son las funciones Hankel en haces Bessel.

4.2.2. Haces Exóticos Laguerre-Gauss

Los haces Laguerre-Gauss se obtienen al resolver la ecuación paraxial de Helmholtz donde la estructura de estos haces es determinada por los polinomios asociados de Laguerre que a su vez son soluciones a la ecuación diferencial asociada de Laguerre (ALDE). Las soluciones X y LH a la ALDE describirán otros haces de la ecuación paraxial de Helmholtz. Las ondas que constituyen al haz Laguerre-Gauss, se les nombrará **haces Exóticos Laguerre-Gauss (ELG)**, donde al sustituirse las funciones $LH(1)$ y $LH(2)$ en la amplitud compleja del haz LG, ecuación (2.50), se obtienen los haces ELG como:

$$U_{EX}(r,\phi,z) = A_0 \frac{w_0}{W(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r}{W(z)}\right)^{|m|} LH_n^{|m|}\left(p; \frac{2r^2}{W^2(z)}\right) \times \exp\left[-\frac{r^2}{W^2(z)} - \frac{ikr^2}{2R(z)} + i(2n+|m|+1)\Phi(z) \pm im\phi\right], \tag{4.22}$$

donde $LH_n^{|m|}(p;r)$ son las funciones Laguerre-Hankel de primer y segundo tipo con $p = 1, 2$; n y m el índice radial y azimutal entero; los parámetros de la fase

dentro de la formula (4.22) son los mismos que el haz Laguerre-Gauss. Si se utiliza la función X_n^m en lugar de las funciones L_n^m o $LH_n^{|m|}$ se tendrá otro haz que se nombrará haz X-Gauss (XG), U_{XG}.

Para observar las características en propagación del haz ELG es necesario conocer primero su distribución central de intensidad en $z = 0$. Considerando la normalización de la sección anterior (4.1) se evalúa la amplitud compleja U_{ELG} utilizando el paquete Mathematica y Matlab. En la figura (4.12) se muestra el perfil central de intensidad de los haces Laguerre-Gauss, haces ELG y haces X-Gauss para el caso $m = 0$ y $n = 0$, como puede observarse en la imagen (4.12a) existen dos regiones donde el haz ELG tiene divergencia en el origen y en los extremos, sin embargo, se acotan estas dos regiones para observar el comportamiento de las funciones indipendientemente. En la imagen (4.12b) se muestra la aproximación que se realiza en los haces ELG y XG.

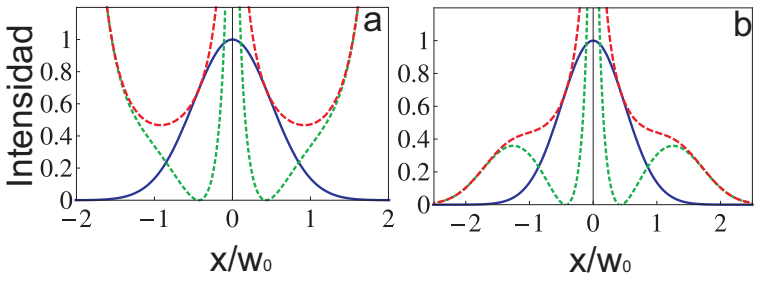

Figura 4.12: Perfil central de intensidad de los haces Laguerre-Gauss (linea azul), X-Gauss (puntos verdes) y los haces Exóticos Laguerre-Gauss (guión rojo) para el caso $m = 0$ y $n = 0$. En a) se muestra las divergencias que tiene el haz ELG y en b) se muestra una aproximación que se realiza en los haces.

Cuando se suman las funciones $U_{ELG}(1;r) + U_{ELG}(2;r) = 2U_{LG}$ se obtiene el haz Laguerre-Gauss donde las divergencias se cancelan una con la otra. La gráfica de X_n^m en la imagen (4.12b) se obtiene considerando el mismo numero de anillos que el haz LG. En la ecuación (4.16) cuando $a \to n$ significa un numero al menos debajo por una centesima de diferencia al entero. El primer termino de la suma es $k = n$

y en el segundo termino de la suma se toman al menos $k = 3n + 1$ elementos en la ecuación (4.16). En la figura (4.13) se muestran los haces Laguerre-Gauss, haces ELG y haces X-Gauss con $n = 3$ y $m = 1$, y $n = 10$ y $m = 5$. Se ve que el haz ELG es la envolvente de los otros dos haces como las funciones Hankel en los haces Bessel.

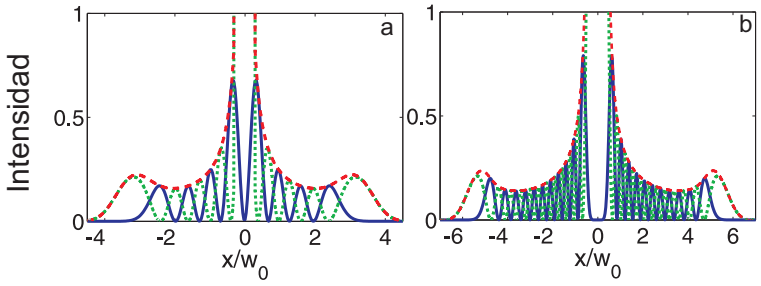

Figura 4.13: Perfil central de intensidad de los haces Laguerre-Gauss (linea azul), haces X-Gauss (puntos verdes) y haces Exóticos Laguerre-Gauss (guiones rojos) para los casos: $m = 1$ y $n = 3$ en a); $m = 5$ y $n = 10$ en b).

En la figura (4.14) se muestra la distribución transversal de intensidad y la representación de los frentes de onda de los haces Exóticos Laguerre-Gauss para $m = 0$ y $n = 3$. Los frentes de ondas son superficies conicas y su base es la región de la distribución transversal de intensidad. El frente de onda se obtiene al graficar la fase de $arg[U_{ELG}]$. Haciendo un acercamiento a la fase, figura (4.15), es posible notar que tiene una curvatura al acercarse a la base del cono. Se muestran casos de los frentes de onda de los haces ELG cuando tienen momento angular orbital en las figuras (4.16) y (4.17) cuando $m = 1$. Cuando se incrementa el numero de anillos, por ejemplo, $n = 15$ se incrementa la base del cono, figura (4.17).

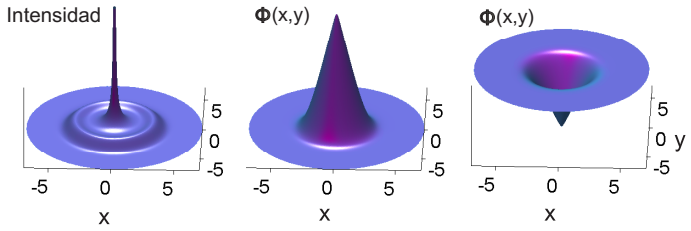

Figura 4.14: Frentes de ondas de los haces Exóticos Laguerre-Gauss (ELG) y su intensidad para $m = 0$ y $n = 3$. La base del cono esta limitado en la región de la distribución de intensidad.

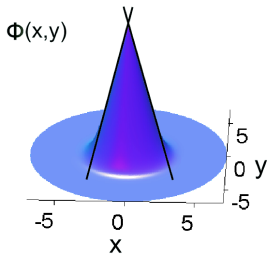

Figura 4.15: Acercamiento al frente onda cónico de la figura (4.14). El frente de onda tiene una curvatura cerca de la base.

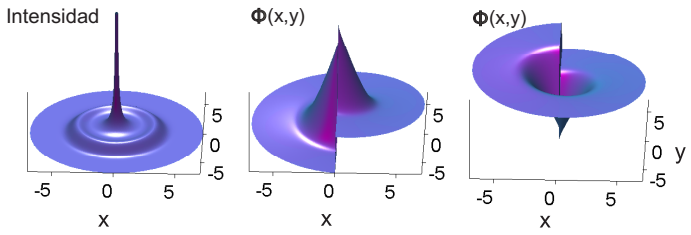

Figura 4.16: Frentes de onda de los haces ELG y su intensidad con momento angular orbital $m = 1$ y $n = 3$.

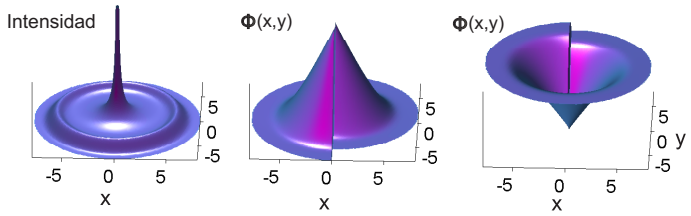

Figura 4.17: Frentes de onda cónicos de los haces ELG y su intensidad con $m = 1$ y $n = 15$.

En la figura (4.18) se muestra la propagación de los haces ELG de primer y segundo tipo en el plano $x - z$. Se muestra también su superposición generando el haz LG. El haz cónico saliente $U_{ELG}(1; r)$ diverge al propagarse formando la región exterior del haz LG, figura (4.19a). El haz cónico entrante $U_{ELG}(2; r)$ al propagarse genera la región interior del haz LG.

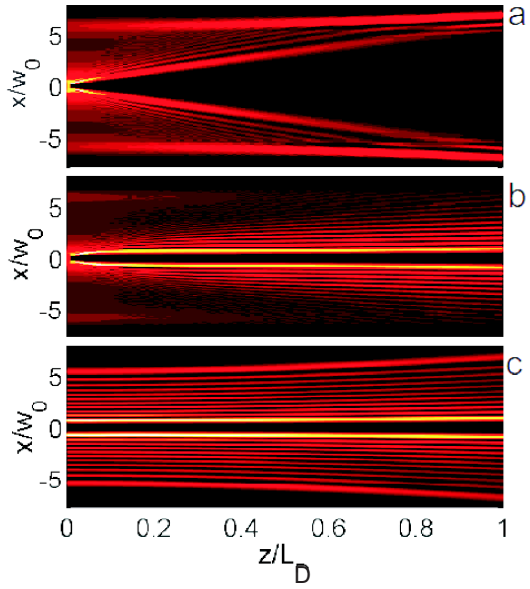

Figura 4.18: Propagación de los haces Exóticos Laguerre Gauss (ELG) entrante b) y saliente a), el haz Laguerre-Gauss en c) en el plano $x - z$; considerando $m = 5$ y $n = 10$.

Se presentan algunas etapas de las distribuciones transversales de intensidad

de los haces ELG entrante y saliente en la figura (4.19), en el renglón inferior se superponen los haces para generar el haz LG . El haz ELG saliente U_{ELG1} se difracta generando la parte exterior del haz LG; y el haz ELG entrante U_{ELG2} genera la parte interior del haz LG con el mismo numero de anillos, ver figura (4.19c).

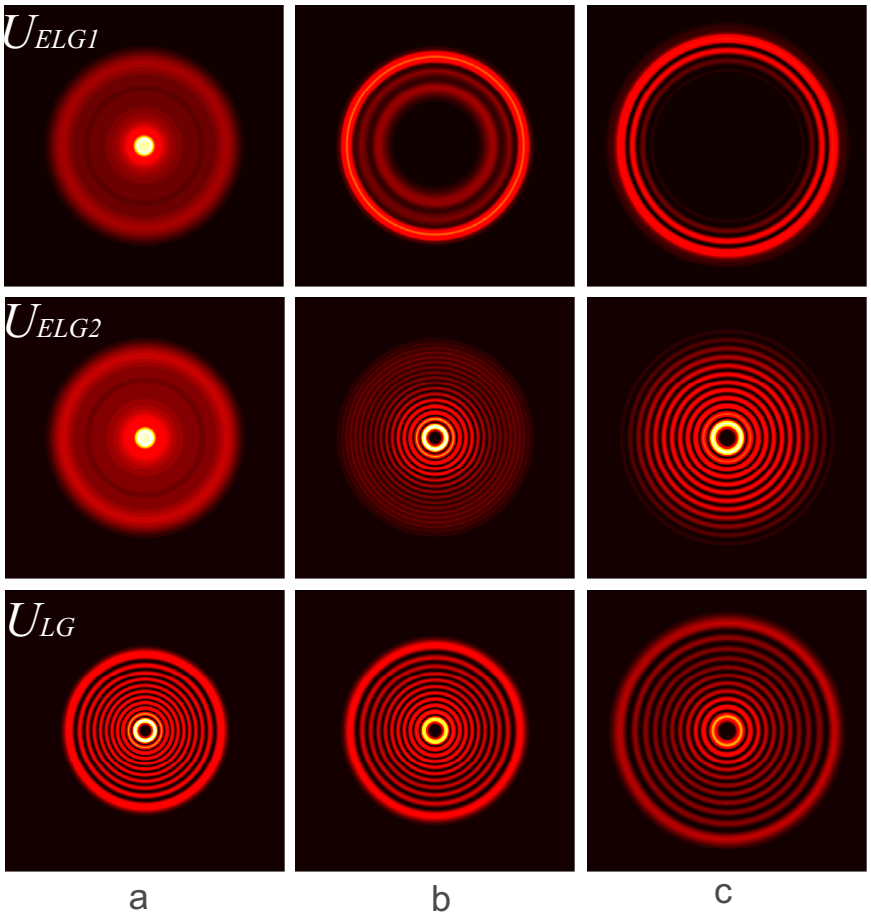

Figura 4.19: Patrones transversales de intensidad en etapas de la propagación del haz Exótico Laguerre-Gauss (ELG) saliente (arriba) y entrante (en medio), el haz LG (abajo). Imágenes en las posiciones: $z = 0$ a); $z = L_D/2$ b) y $z = L_D$ c).

Se obstruyen parcialmente fuera de eje los haces ELG, saliente y entrante, y el haz LG mostrando de forma independiente la dinámica de auto-reconstrucción que presenta el haz LG, figura (4.20b). Las sombras de bajo y alto contraste presentes en la auto-reconstrucción del haz LG son debidas a los haces ELG entrante y ELG

saliente. En la figura (4.21) se muestra la auto-reconstrucción del haz LG con $m = 5$ y $n = 19$ y sus ondas constituyentes donde al incrementar el numero de anillos se hace evidente las sombras de bajo y alto contraste, ver figura (4.21b).

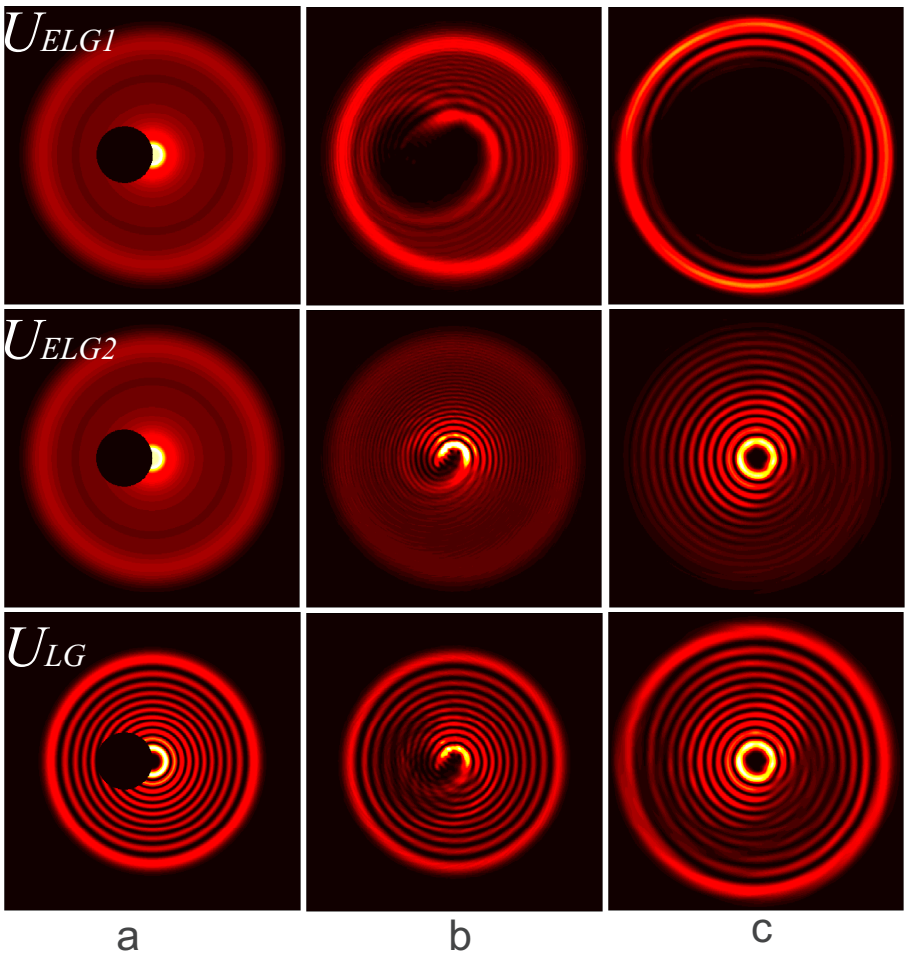

Figura 4.20: Haces Exóticos Laguerre-Gauss saliente U_{ELG1} y entrante U_{ELG2}, y el haz LG al ser parcialmente obstruidos, con $m = 5$ y $n = 10$. En las posiciones: $z = 0$ a); $z = L_D/2$ b); y $z = L_D$ c).

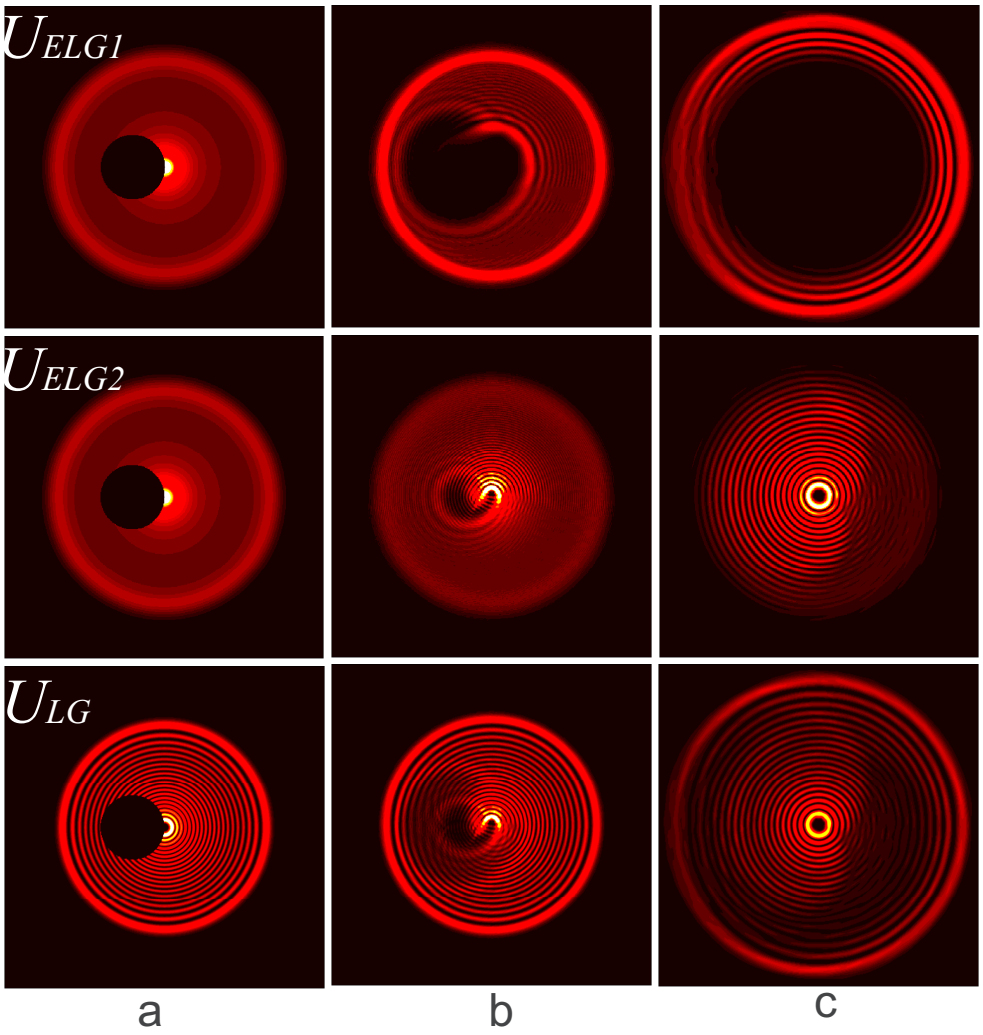

Figura 4.21: Haces Exóticos Laguerre-Gauss saliente U_{ELG1} y entrante U_{ELG2}, y el haz LG al ser parcialmente obstruidos, con $m = 5$ y $n = 19$. En las posiciones: $z = 0$ a); $z = L_D/2$ b); y $z = L_D$ c).

4.3. Haces X-Hermite-Gauss

Como consecuencia de la descripción de los haces Laguerre-Gauss en términos de dos ondas que lo constituyen dependientes de la función X es posible describir a los haces Hermite-Gauss (HG) en términos también de la fucnión X. El análisis al

respecto se deja solo con la presentación de las haces X-Hermite-Gauss (XHG) y la reconstrucción del haz HG.

La distribución de intensidad de una haz Hermite-Gauss, sección (2.3.3), esta dada como:

$$I_{HG}(x,y,z) = A_{lm}\left(\frac{w_0}{W(z)}\right)^2 H_l^2\left(\frac{\sqrt{2}x}{W(z)}\right) H_p^2\left(\frac{\sqrt{2}y}{W(z)})\right) exp\left(-2(x^2+y^2)/W^2(z)\right), \tag{4.23}$$

donde $H_{l,p}$ son los polinomios de Hermite, $A_{l,p}$ es una constante y el orden del haz es descrito por los indices l y p. En el caso de $l = p = 0$ se tiene un haz Gaussiano.

Los polinomios de Hermite se pueden escribir en términos de la función Confluente Hipergeométrica (FCH) Φ, para numeros pares e impares [37], para un índice impar por ejemplo se tiene:

$$H_{2q+1}(\sqrt{2}x) = (-1)^q \frac{(2q+1)!}{q!} 2x\Phi(-q, 3/2; 2x^2), \tag{4.24}$$

entonces el polinomio H_{2q+1} para $q = 0, 1, ..$ se puede escribir como:

$$H_{2q+1}(\sqrt{2}x) = XH_{2q+1}^{1/2}(1;x) + XH_{2q+1}^{1/2}(2;x), \tag{4.25}$$

donde:

$$XH_{2q+1}^{1/2}(1;x) = H_{2q+1}(\sqrt{2}x) + i\mathfrak{C}X_n^{1/2}(2x^2), \tag{4.26}$$

$$XH_{2q+1}^{1/2}(2;x) = H_{2q+1}(\sqrt{2}x) - i\mathfrak{C}X_n^{1/2}(2x^2), \tag{4.27}$$

son las funciones que se definirán como **X-Hankel**(XH), con $\mathfrak{S} = (-1)^q \frac{(2q+1)!}{q!}$. Al sustituir las funciones XH en lugar de los polinomios de Hermite, en la ecuación (4.23), se definirán los **haces X-Hermite-Gauss** (XHG) de primer y segundo tipo U_{XHG}.

Es necesario señalar que en la sustitución de las funciones X-Hermite por los polinomios de Hermite $H(x)H(y)$, en la ecuación (4.23), se tendría que realizar una multiplicación de funciones complejas, donde una simple suma tal como

$HH(1) + HH(2) = H$ no describirá el haz Hermite-Gauss, pero puede ser hallada una combinación de sumas que los describan; sin embargo en este trabajo se aborda sólo el caso donde $H(x)H(y) = H(x)$ ó $H(x)H(y) = H(y)$, es decir donde el polinomio $H(y) = 1$ ó $H(x) = 1$.

Se muestran los perfiles transversales de intensidad con $l = 3$ y $p = 0$ para el haz Hermite-Gauss, el haz X-Gauss (sólo la función de $X_n^{1/2}$) y el haz X-Hermite Gauss, en la figura (4.22), donde puede observarse el haz HG con cuatro máximos, el haz XG con cinco y el haz XHG como la envolvente de los otros dos haces.

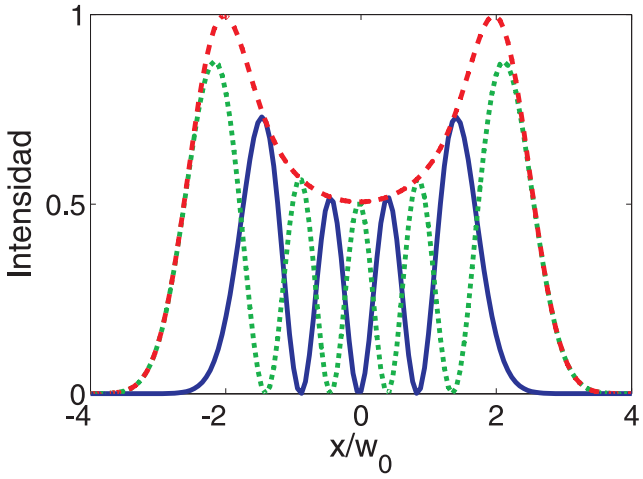

Figura 4.22: Perfil central de intensidad del haz Hermite-Gauss (linea azul), haz X-Gauss (puntos verdes) y haz X-Hermite Gauss (guiones rojos).

Se presentan distribuciones transversales de intensidad en distintas etapas de la propagación de los haces X-Hermite Gauss (de primer y segundo tipo) y su superposición generando el haz Hermite-Gauss para $l = 3$ y $p = 0$ en la figura (4.23). Se puede observar que el haz XHG de primer tipo concentra su energía en dos lóbulos que se alejan del eje de propagación, figura (4.23arriba). El haz XHG de segundo tipo concentra su energía en el centro formando los lóbulos centrales del haz Hermite-Gauss.

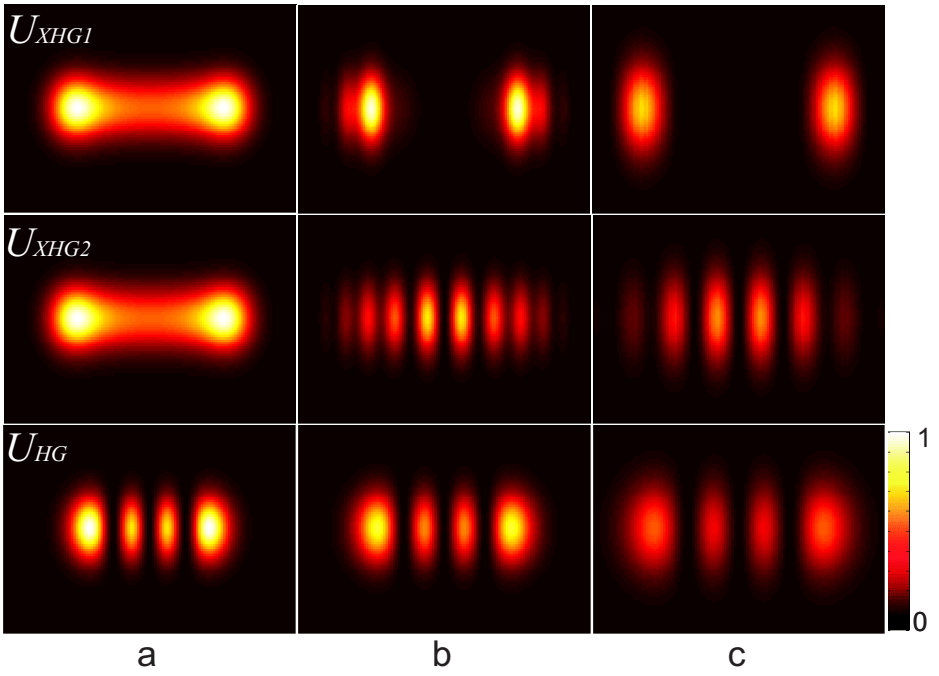

Figura 4.23: Patrones transversales de intensidad de la propagación de los haces X-Hermite-Gauss (XHG) y el haz Hermite-Gauss (HG). Posiciones de los patrones de intensidad: $z = 0$ en a), $z = L_D/2$ en b), $z = L_D$ en c).

En la figura (4.24) se representan los frentes de onda entrante y saliente de los haces X-Hermite-Gauss. La superficie del frente de onda saliente indica la separación que tiene en dos lóbulos el haz HXG saliente, mientras que el la superficie del haz entrante genera la distribución de franjas muy similar a la superposición de ondas planas.

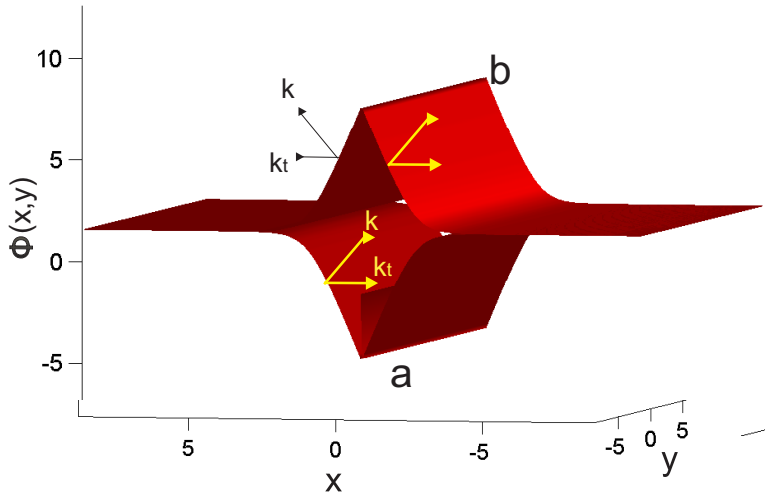

Figura 4.24: Frentes de onda de los haces X-Hermite Gauss entrante a) y saliente b).

El haz HG es constituido de los haces XHG y con estos haces es posible mostrar la propiedad de auto-reconstrucción de los haces HG [124]. En la figura (4.25) se presenta la dinámica de auto-reconstrucción al obstruir parte central de la distribución del haz HG y los haces XHG con un objeto opaco. El haz HG recobra su distribución central de intensidad, ver figura (4.25arriba), es notable que los lóbulos de los extremos no están bien definidos y éstos son rodeados por una distribución menos intensa. El haz XHG entrante hace que el HG recobre su distribución central y el haz XHG saliente la parte de los extremos del haz HG.

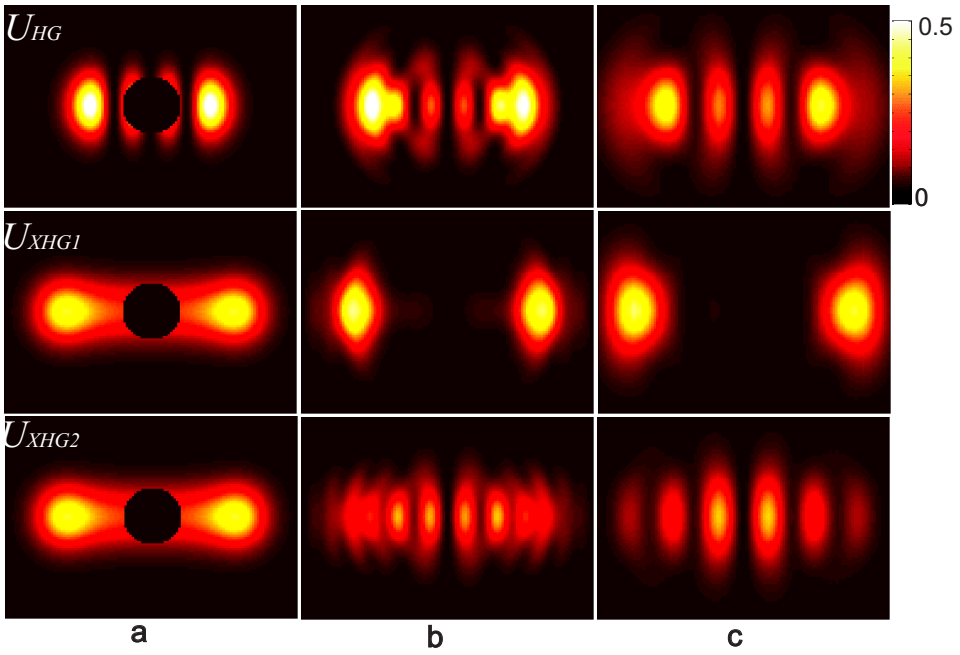

Figura 4.25: Distribución transversal de intensidad de la propagación del haz Hermite-Gauss (arriba) y los haces X-Hermite-Gauss saliente (en medio) y entrante (abajo) al ser parcialmente obstruidos. Las posiciones de los patrones de intensidad: a) en $z = 0$, b) en $z = L_D/2$, c) en $z = L_D$.

4.4. Auto-reconstrucción en haces Airy

En esta sección se analizan la auto-reconstrucción de haces Airy en términos de sus componentes básicas cuando estos haces son parcialmente obstruidos. En el articulo [25] se presenta el estudio en términos de funciones Bessel de orden un tercio, en esta sección se estudian los haces partiendo de las soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial de Airy ecuación (2.54), funciones de Airy $Ai(k_A x)$ y $Bi(k_A x)$.

De esta forma la onda Hankel-Airy de primer y segundo tipo serían definidas respectivamente como sigue:

$$HAi^{(1)}(-k_A x) = Ai(k_A x) + iBi(k_A x) \tag{4.28}$$

$$HAi^{(2)}(-k_A x) = Ai(k_A x) - iBi(k_A x). \tag{4.29}$$

En la figura (4.26) se presentan los perfiles central de intensidad de las funciones Airy (Ai y Bi) y Hankel-Airy. En la figura se puede apreciar el intercalado de máximos y mínimos entre las funciones Ai y Bi, la función HAi es la envolvente a estas dos funciones. La función HAi no este limitada para valores $x > 0$, sin embargo en esta región es cancelada cuando las dos funciones Hankel-Airy son superpuestas generando el haz Airy, $Ai = HAi^{(1)} + HAi^{(2)}$. Para observar de forma independiente a la función HAi en propagación ésta es acotada para valores $x > 0$.

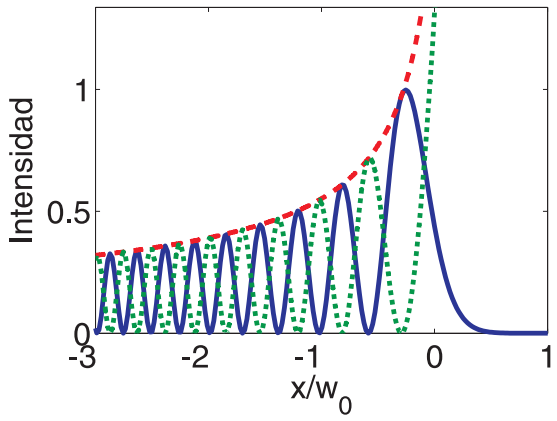

Figura 4.26: Perfiles centrales de intensidad de las funciones Airy (Ai y Bi), Hankel-Airy HAi con $k_A = 4$. La onda Hankel-Airy (linea roja), Bi (linea verde) y Ai (linea azul).

En la figura (4.27) se presenta la distribución de intensidad del haz Airy al ser parcialmente obstruido en el plano $x - z$. En esa imagen se puede apreciar dos sombras una de bajo y alto contraste que indican el comportamiento de sus ondas saliente y entrante. Fuera de la región de la sobra de alto contraste el haz se ha reconstruido. En la imagen (4.27) se muestra la propagación de la onda entrante $HAi^{(2)}$ al ser parcialmente obstruida confirmando que la sombra de alto contraste es debida al comportamiento de esta onda. En la imagen (4.27) se presenta $HAi^{(1)}$ parcialmente obstruida mostrando que la sombra de bajo contraste es debida ha esta onda.

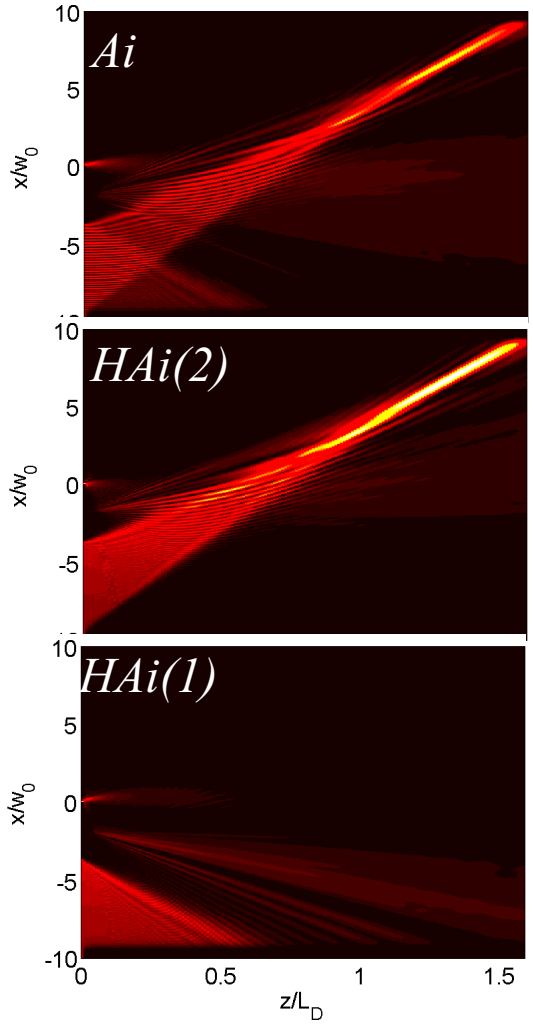

Figura 4.27: Propagación del haz Airy Ai a) y las ondas Hankel-Airy $HAi^{(1)}$ b) y $HAi^{(2)}$ c) parcialmente obstruidas.

En la figura (4.28) se presentan la distribución transversal de intensidad de la propagación del haz Airy y las ondas Hankel-Airy al ser parcialmente obstruidas por una obstrucción circular de radio $q = 1.8$. En las figuras del primer renglón se puede apreciar dos sombras que se producen por la abertura circular y que corresponden a la onda entrante y saliente de un haz Airy. En las imágenes de los otros renglones se presentan dos sombras que corresponde al comportamiento de las ondas entrante y onda saliente que componen el haz Airy.

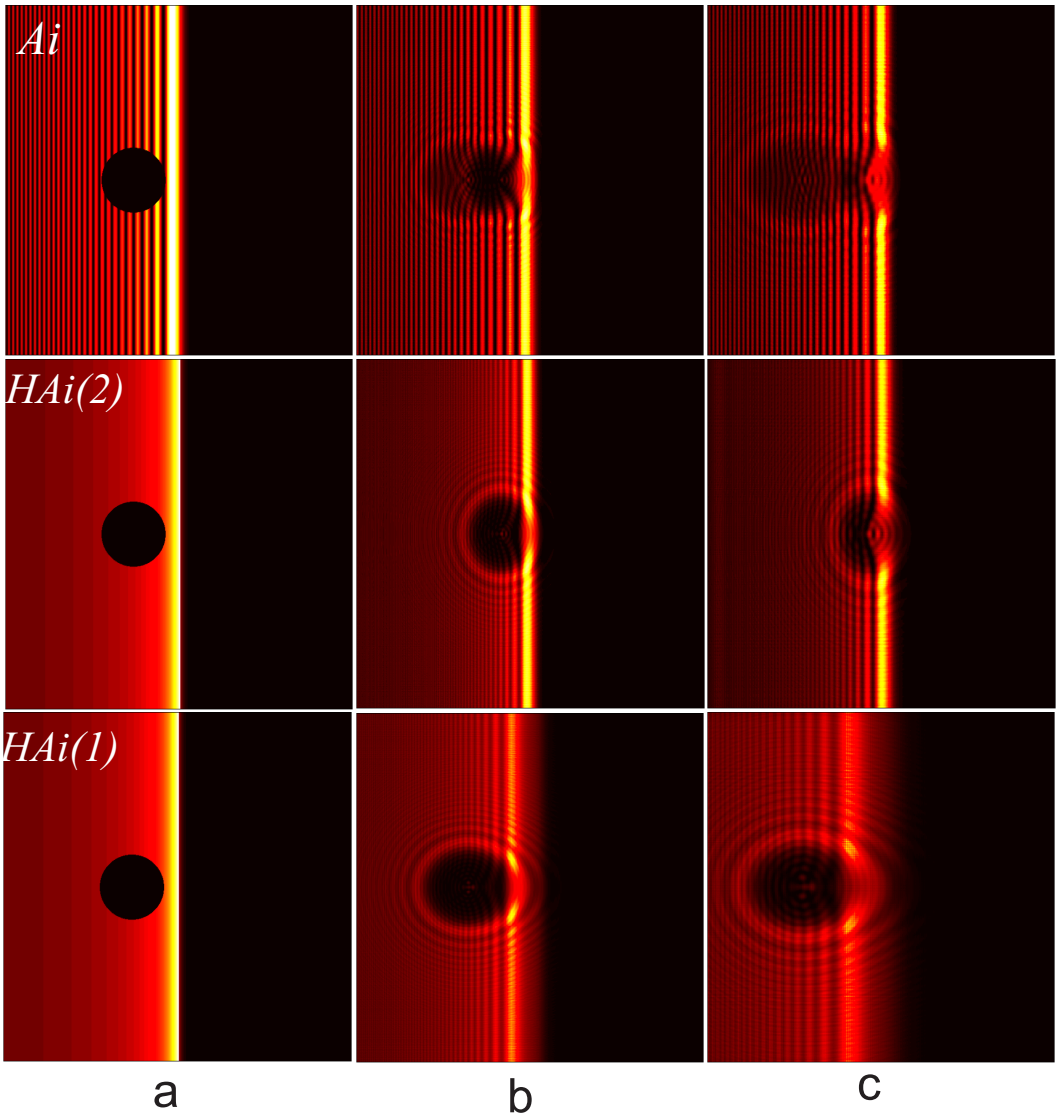

Figura 4.28: Patrones transversales de intensidad de la propagación del haz Airy Ai (arriba) y los haces Hankel-Airy $HAi(1)$ (en medio) y $HAi(2)$ (abajo) al ser parcialmente obstruidos. En las posiciones z: 0 a), 0.12 b) y 0.24 c) .

Se representa el frente de onda entrante y saliente que constituyen al haz Airy en la figura (4.29). Las superficies fueron obtenidas graficando el argumento de $arg[HAi^{(1),(2)}]$, la dirección de la energía seria perpendicular a esta superficie. Es notable que estas superficies son muy parecidos al frente de onda del haz Hermite X-Gauss, pero son sólo la mitad de esas superficies.

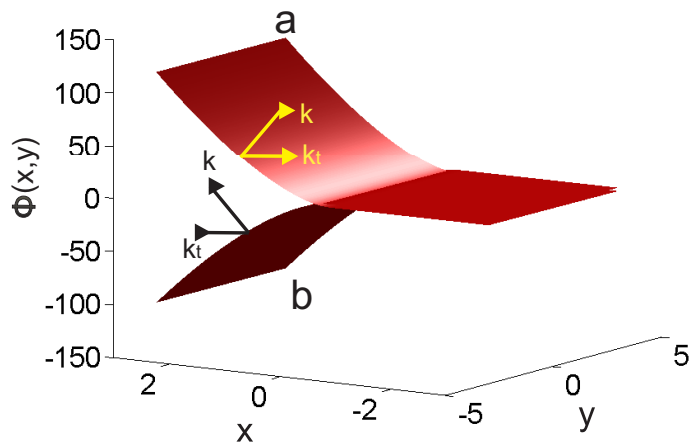

Figura 4.29: Frentes de onda de las ondas Hankel-Airy, saliente a) y entrante b).

Las funciones Hankel-Airy bidimensionales tendrán la siguiente definición:

$$HAi^{(1)}(-x,-y) = Ai(x)[Ai(y) + iBi(y)] + Ai(y)[Ai(x) + iBi(x)], \tag{4.30}$$

y

$$HAi^{(2)}(-x,-y) = Ai(x)[Ai(y) - iBi(y)] + Ai(y)[Ai(x) - iBi(x)], \tag{4.31}$$

donde (4.30) es la onda saliente y (4.31) es la onda entrante. Si se suman (4.30) y (4.31) se obtiene el haz Airy bimensional.

En la figura (4.30) se presentan la distribución transversal de intensidad en distintas etapas de propagación del haz Airy bidimensional y las ondas Hankel-Airy parcialmente obstruidos con un objeto opaco. En la imagen central superior se observan dos sombras asociadas a una onda entrante y otra saliente. Estas sombras se observan de forma independiente en los renglones inferiores que corresponden a las ondas Hankel-Airy.

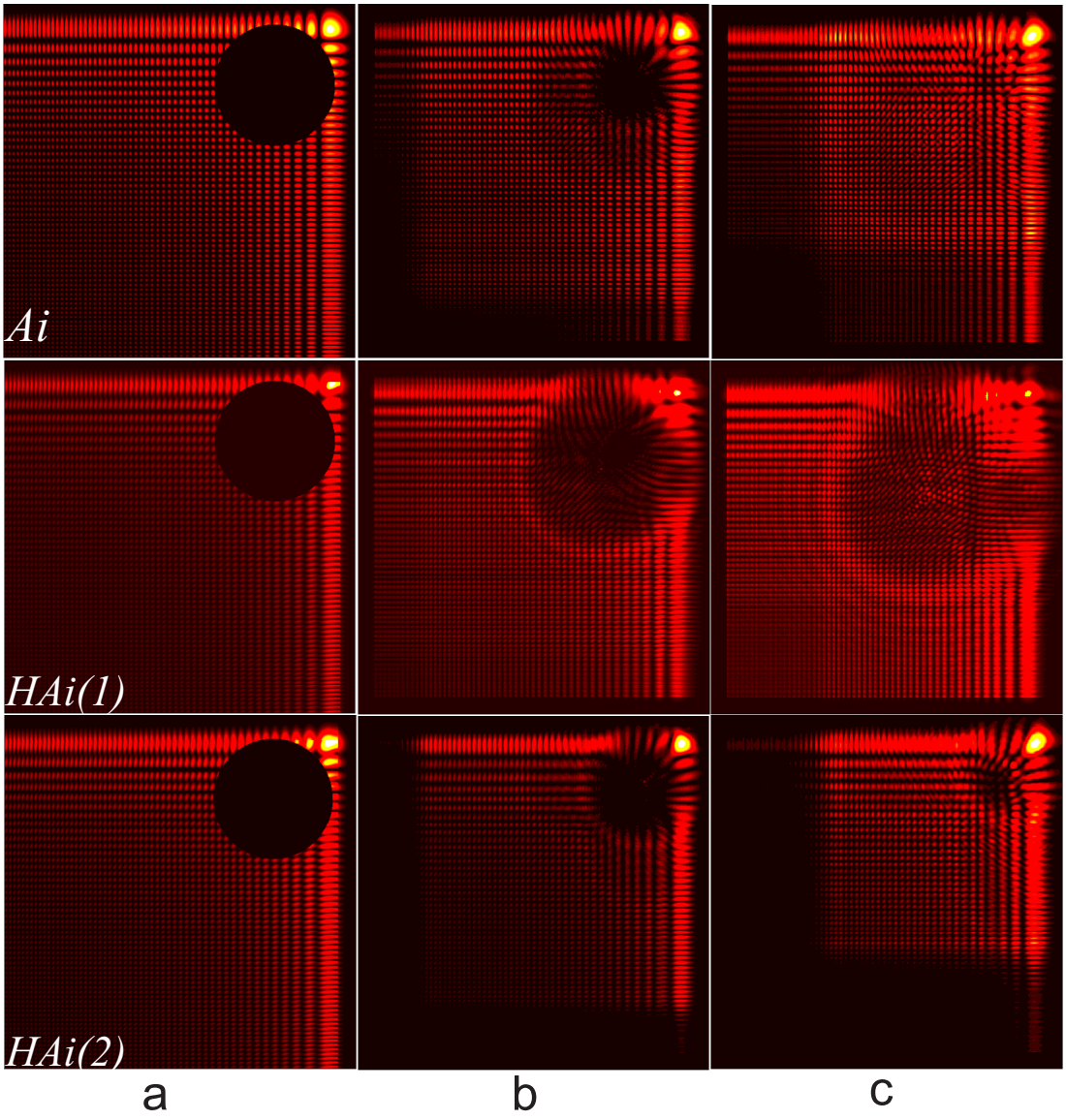

Figura 4.30: Distribución transversal de intensidad de la propagación del haz Airy bidimensional (arriba) y sus ondas constituyentes, saliente (en medio) y entrante (abajo) parcialmente obstruidas. En las posiciones z: 0 a), 0.12 b) y 0.24 c).

Capítulo 5

Resultados experimentales

En los capítulos anteriores se mostró numéricamente el comportamiento de haces adifraccionales y haces paraxiales en propagación al ser parcialmente bloqueados. En este capítulo se presenta experimentalmente la auto-reconstrucción en los haces adifraccionales: Bessel de alto orden, Cáusticos y Parabólicos. Se comparan los haces Bessel y haces Laguerre-Gauss en propagación analizando sus características. Se demuestra la auto-reconstrucción de los haces Laguerre-Gauss con multiples anillos y se generan los haces Exóticos Laguerre-Gauss constituyentes los haces LG mostrando por primera vez que estos haces puedes ser descritos por dos funciones independientes. Para esto se utiliza un holograma computacional desplegado en un modulador espacial de luz de cristal liquido (LCD-SLM, liquid crystal display spatial light modulator) en modo de amplitud. En la sección 5.1 se describe la técnica para sintetizar hologramas que generen haces con simetría circular. Para la generación de haces con simetrías diferentes a la circular es modificada la técnica agregando una nueva función de fondo en la sintetización del holograma. En la sección 5.2 se presenta la reconstrucción de haces Bessel de alto orden y sus ondas constituyentes. Se muestra también la auto-reconstrucción de haces Cáusticos, Parabólicos y el haz Airy al ser parcialmente obstruidos. En la sección 5.3 se presenta la comparación de haces

Laguerre-Gauss y haces Bessel en distintas etapas de su propagación y se compara la auto-reconstrucción entre ambos haces. En la sección se muestran por primera vez los haces Exóticos Laguerre-Gauss experimentalmente. Se observa la dinámica de los haces Exóticos Laguerre-Gauss al ser parcialmente obstruidos demostrando que el haz Laguerre-Gauss es constituido de estos dos haces.

5.1. Hologramas generados por computadora

La holografía "convencional" consiste en, utilizando luz coherente, registrar y posteriormente reconstruir la onda procedente de un objeto [3]. Así un holograma es un elemento óptico que contiene codificada la amplitud y fase de la onda objeto. El código holográfico que se plasma en el holograma esta basado en el patrón de interferencia de la onda objeto o señal $U_0 = a(x,y)exp(i\phi(x,y))$ con una onda de referencia $\mathcal{R}(x,y) = Aexp(i\psi(x,y)$. La intensidad de la suma de las dos ondas, señal y de referencia, se guarda en un holograma y la transmitancia es proporcional a la intensidad:

$$\begin{aligned} I(x,y) &= |U_0(x,y) + \mathcal{R}(x,y)|^2 \\ &= |U_0(x,y)|^2 + 2|U_0(x,y)||\mathcal{R}(x,y)|cos(\phi(x,y) - \psi(x,y)) + |\mathcal{R}(x,y)|^2 \\ &= a^2(x,y) + A^2 + 2Aa(x,y)cos(\phi(x,y) - \psi(x,y)), \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde $a(x,y)$ es una función positiva normalizada del campo de la señal y la fase $\phi(x,y)$ toma valores en el dominio $[-\pi,\pi]$; la onda de referencia es en general una onda plana con una inclinación $\psi(x,y) = 2\pi(s_0x + d_0y)$ donde (s_0,d_0) son las frecuencia espaciales de la onda fuera de eje.

En un holograma generado por computadora (CGH, computer generated hologram) o holograma sintético se modela matemáticamente utilizando la ecuación (5.1) y se despliega en una pantalla de cristal liquido LCD-SLM. En este trabajo se utilizará este tipo de holograma el cual se desplegará en la pantalla LCD-SLM en modo de amplitud [81].

5.1.1. Técnica de construcción de hologramas

Si se emplea un CGH para sintetizar un campo U_0 [81–83, 125], la transmitancia normalizada, del holograma convencional (5.1) llegará a ser el llamado holograma sintético dada por:

$$h(x,y) = g_0\{b(x,y) + a(x,y)cos[\phi(x,y) - 2\pi(s_0x + d_0y)]\} \tag{5.2}$$

donde $g_0 \equiv 1/2$ es una constante de normalización, $a(x,y)$ la amplitud del campo de la señal, s_0 y d_0 son las frecuencia espaciales de la onda plana y $b(x,y)$ es la denominada función de fondo:

$$b(x,y) = [1 + a^2(x,y)]/2. \tag{5.3}$$

El espectro de fourier del holograma sintético, ecuación (5.2), se puede escribir como el espectro de la función de fondo, la señal S y su conjugado S^*, dada por:

$$H(u,v) = g_s\{B(u,v) + \frac{1}{2}S(u+u_0, v+v_0) + \frac{1}{2}S^*(-u+u_0, -v+v_0)\}. \tag{5.4}$$

Cuando un CGH con transmitancia $h(x,y)$, ecuación (5.2), es plasmado en un LCD-SLM de transmisión (SLM en la figura 5.1), el modulador agrega una modulación de fase o fase acoplada a la señal junto con las características de discretas de la pantalla. En los trabajos [81, 83] se encuentra que la mínima fase acoplada es de $\pi/3$ cuando la pantalla LCD-SLM se configura entre dos polarizadores cruzados que tienen ángulos de 90° y 0° entre sus ejes de transmisión respecto al vector director de la pantalla LCD-SLM. La señal (haz) se obtiene al procesar la transmitancia $h(x,y)$ en un sistema $4f$ y filtrar la señal principal S del espectro de Fourier (FE- filtraje espacial en el esquema experimental), figura (5.4).

En los trabajos [81,83] se modifica $h(x,y)$, con una nueva función de fondo $b(x,y)$ para una configuración de mínima fase acoplada por:

$$b(x,y) = fft^{-1}[A_bA(u,v)exp(-\rho^2/\alpha^2)], \tag{5.5}$$

donde $A(u,v)$ es la trasformada de Fourier de $|a(x,y)|$ y $\rho = u^2+v^2$ es la coordenada radial de la señal y α es el ancho de la Gaussiana que corresponde a la longitud entre máximos o mínimos de la señal, por ejemplo, en un haz Bessel la longitud entre anillos es la frecuencia radial del haz y A_b es una constante que asegure que se cumpla $b(x,y) \geq a(x,y)$. La función de fondo (5.5) es una evolvente suave de $|a(x,y)|$ que da óptimos hologramas.

Si se requiere generar haces sin simetría circular se propone una función de fondo descrita por la superposición del modulo de la señal $|u_0(x,y)| = |a(x,y)|$ y una función Gaussiana $G(x,y) = exp(-r^2/\varrho^2)$ dada por:

$$b_{ss}(x,y) = \int_{-R/2}^{R/2}\int_{-R/2}^{R/2} |a(x_1,y_1)|G(x-x_1,y-y_1)dx_1dy_1, \tag{5.6}$$

donde ϱ es el ancho de la Gaussiana que corresponde a la longitud entre máximos o mínimos de intensidad de la señal, la integral se convierte en una sumatoria finita al realizarlo numéricamente y el haz a procesar existe una región R. La función (5.6) da una envolvente suave del modulo del campo $|u_0(x,y)| = |a(x,y)|$ que no es circularmente simétrico.

5.1.2. Transmitancia de una pantalla LCD-SLM

En esta sección se describen las características de amplitud de la pantalla $HOLOEYE2002$ de cristal liquido nemático torcido (LCD-SLM) en la configuración de sólo amplitud y mínima fase acoplada [83, 126].

En la figura (5.1) se muestra el esquema del sistema experimental utilizado para obtener la modulación de amplitud contra niveles de grises (voltaje aplicado al SLM) que se utiliza para construir un CGH. En el sistema experimental se empleo un haz láser He-Ne de 633nm, un sistema de filtrado óptico con pinholo $40x$, una pantalla HOLOEYE2002 de cristal liquido nemático torcido en la configuración de minima fase acoplada. Una lente para captar la intensidad en un detector del orden cero de

difracción. En la pantalla SML se plasman niveles de grises de $[0, 255]$ que permitan una modulación de amplitud entre $[0, 1]$. En la figura (5.2) se muestra la modulación de amplitud que se obtiene experimentalmente en configuración de minima fase acoplada de la pantalla LCD-SLM. En la figura (5.3) se presentan algunos ejemplos de hologramas sintéticos que se obtienen con los datos de modulación de amplitud y que se plasmaron en la pantalla LCD-SLM . Se presenta un holograma que sintetiza un haz Parabólico que se utiliza para generar un haz sin obstrucción y un un holograma que genera un haz parcialmente obstruido.

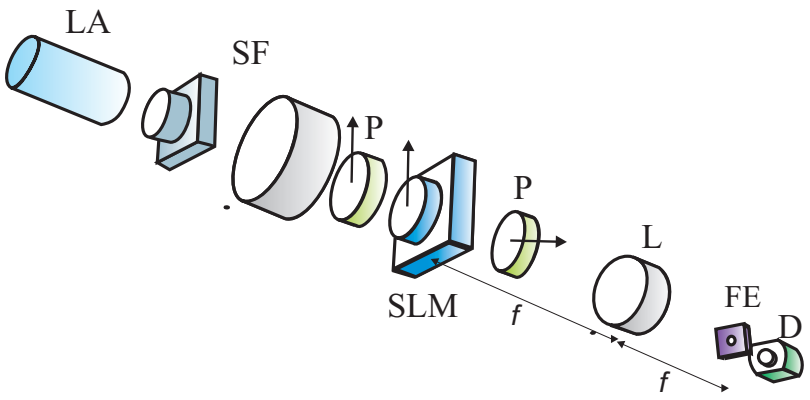

Figura 5.1: Esquema del sistema experimental utilizado para obtener la modulación de amplitud contra voltaje aplicado a la pantalla $LCD - SLM$. LA Láser He-Ne a 633nm, SF sistema de filtrado, P polarizador, SLM modulator espacial de luz de cristal liquido, F lente de distancia focal $f = 38cm$, FE filtraje espacial en el orden cero y detector de potencia D.

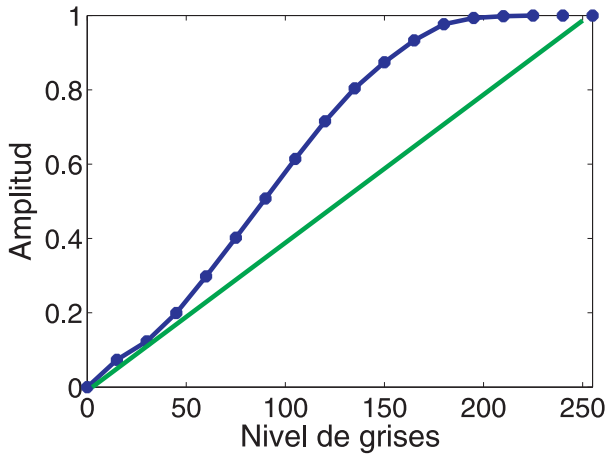

Figura 5.2: Curva de modulación de amplitud (linea azul) para la configuración de minima fase acoplada, 90° y 0°, entre los polarizadores. Linea verde modulación ideal.

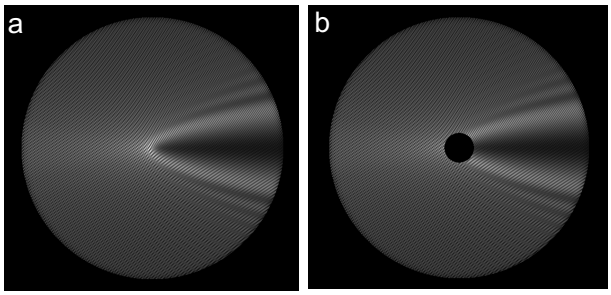

Figura 5.3: Ejemplos de hologramas sintéticos para generar haces Parabólicos: a) sin obstrucción y b) parcialmente obstruido.

5.2. Auto-reconstrucción en haces adifraccionales

En esta sección se obtiene de manera experimental la auto-reconstrucción de haces adifraccionales. Se utilizaron los datos de la modulación de amplitud, figura (5.2), para construir la función de transmitancia $h(x, y)$ para sintetizar los hologramas con distintos niveles de gris al desplegarlos en la pantalla LCD-SLM.

La generación de los haces se realizó utilizando el sistema experimental esquematizado en la figura (5.4). La LCD-SML se configuró en modo de amplitud con mínima

fase. Se utilizó un haz láser He-Ne de 633nm, un sistema de filtrado óptico inicial para colimar el haz que llega a la pantalla posteriormente a éste se coloco un sistema $4f$ para procesar el el holograma y descodificar el haz mediante un sistema de un filtraje espacial en el plano de Fourier, FE, se selecciona un orden del espectro de Fourier que genere el haz con las características deseadas a la distancia focal posterior a la lente L_1. Esta distribución fue captada con una cámara CCD, con resolución de $9\mu m$ y área de detección de $5.76mm$ de ancho $\times$ $4.35mm$ de alto marca Pulnix .

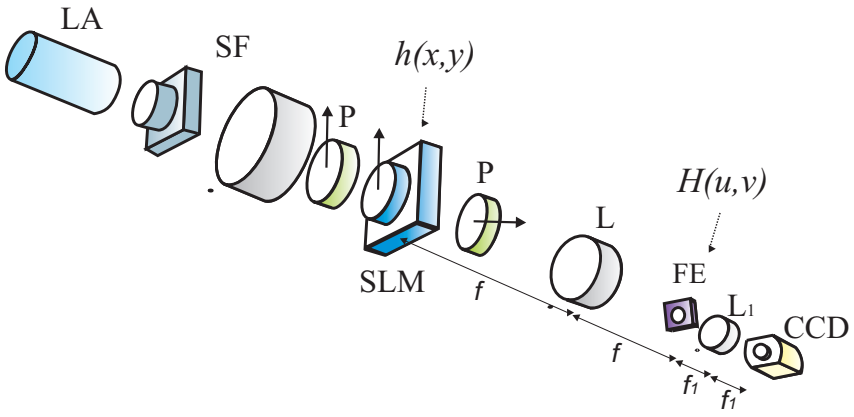

Figura 5.4: Esquema del sistema experimental utilizado para la generación de haces por medio de hologramas sintetizados computacionalmente y desplegados en una pantalla LCD-SLM. LA Láser He-Ne a 633nm, SF sistema de filtrado, P polarizador, SLM pantalla de cristal liquido (espatial light modulator), L lente con distancia focal $f = 38cm$ y L_1 lente con distancia focal $f_1 = 10cm$ ó $15cm$, FE filtraje espacial y cámara CCD.

Los hologramas CHG desplegados en la pantalla LCD se codifican con cantidades normalizadas. La onda plana como portadora tiene frecuencias $s_0 = d_0 = 1/6$, en una región de radio $R_e = 10$ (ventana computacional). El haz Bessel de alto orden y sus ondas cónicas constituyentes con una carga topológica $m = 5$ y con $k_t = 10$. En el proceso para la obtención de haz se utiliza una lente de distancia focal $f_1 = 15cm$ en el sistema experimental (5.4) con lo que se obtienen haces con frecuencia radial $k_t = 37mm$, $R_e = 3mm$ y por lo tanto $Z_{max} \approx 80cm$.

En la figura (5.5) se presentan etapas de la auto-reconstrucción del haz Bessel

de alto orden con carga topológica $m = 5$. Se presentan también las ondas cónicas saliente y entrante parcialmente obstruidas que constituyen al haz Bessel. En el primer renglón se puede observar el haz Bessel, la imagen central presenta en su dinámica dos sombras que son asociadas a los efectos que tienen sus ondas constituyentes de forma independiente, una sombra de bajo contraste que corresponde a la onda saliente y una sombra de menor contraste que corresponde a la dinámica de la onda entrante. Las ondas entrante y saliente se presentan en el segundo y tercer renglón, la dinámica de los haces parcialmente obstruidos muestran las sombras que contiene el haz Bessel de manera independientemente. En la figura (5.6) se muestra la simulación numérica del experimento obtenido en los resultados de la figura (5.5), donde es posible observar la gran similitud entre los haces realizados experimentalmente.

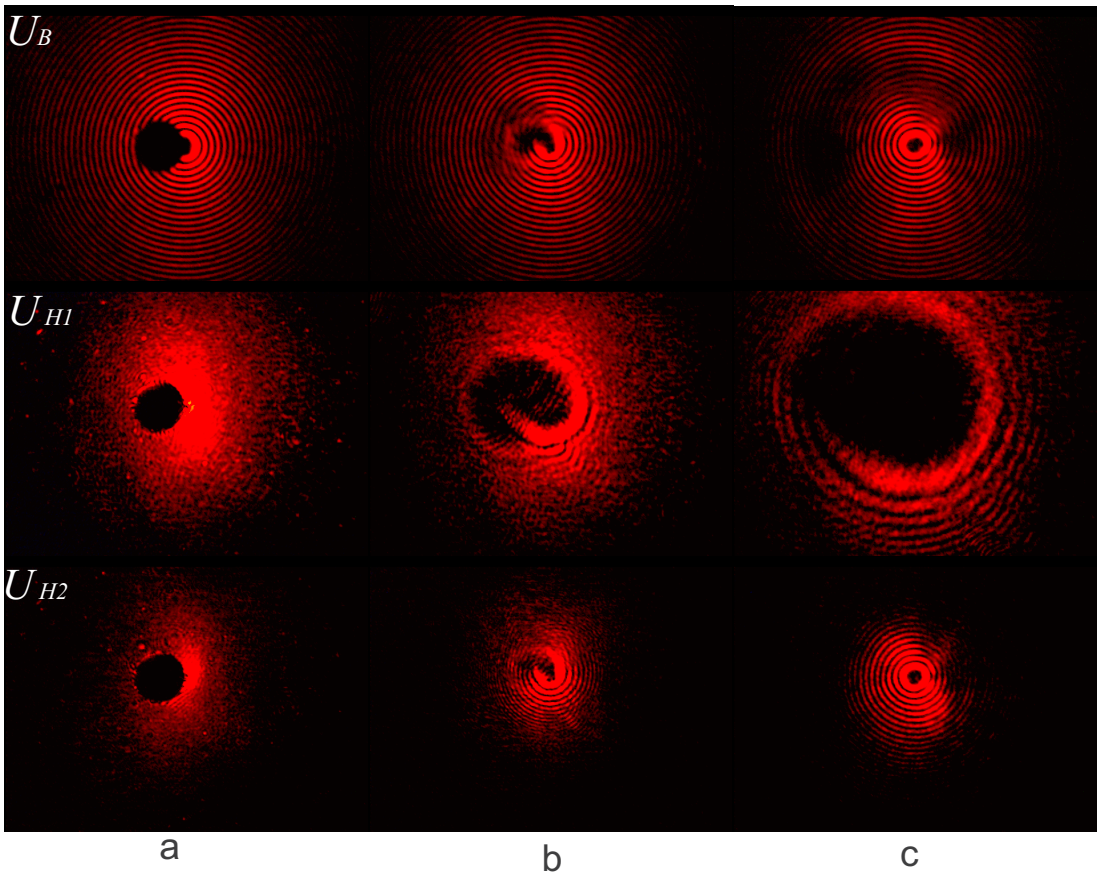

Figura 5.5: Patrones transversales de intensidad del haz Bessel de alto orden con $m = 5$ (arriba) y la ondas cónicas saliente (en medio) y entrante (abajo) parcialmente obstruidas fuera de eje. En las posiciones z: a) $0cm$, b) $10cm$ y c) $30cm$.

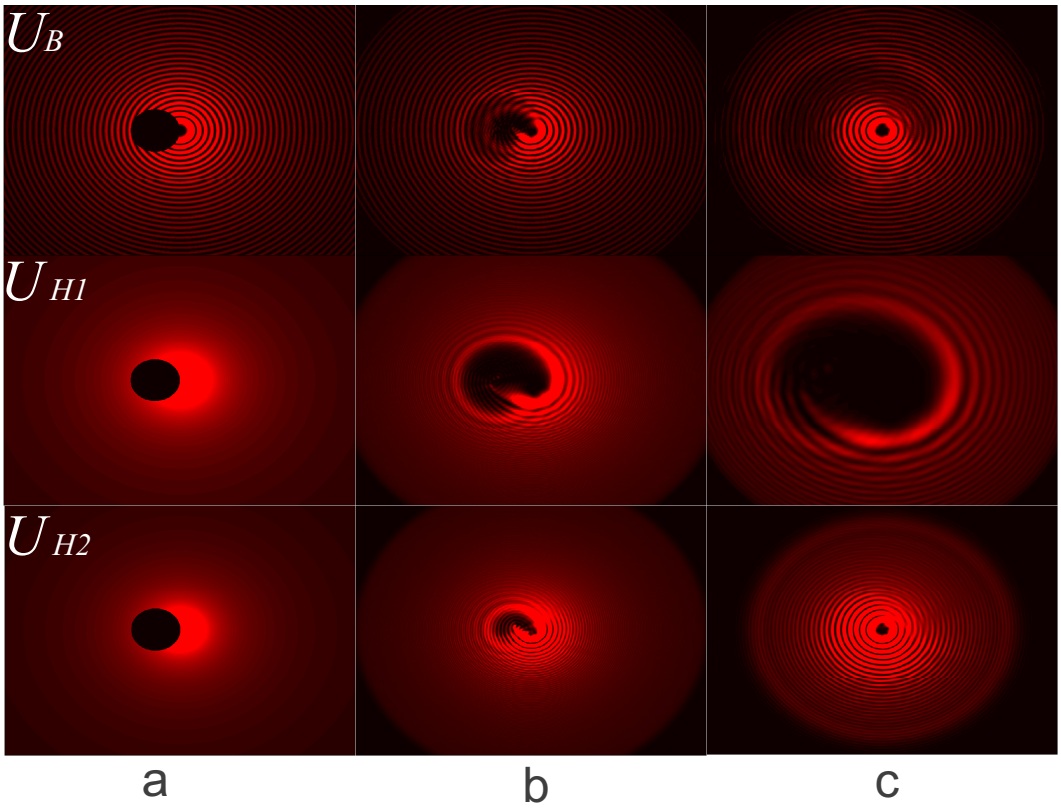

Figura 5.6: Lo mismo que en la figura (5.5) al realizar la simulación numérica del experimento.

En la figura (5.7) se presenta la auto-reconstrucción de haces Cáusticos, Cúbicos, Parabólicos y Airy con las mismas características empleadas para generar los haces Bessel, pero para el haz Airy se tiene $k_A = 13mm$ y $R_e = 5mm$.

En el haz Cáustico y haz Cúbico se puede observar dos sombras de alto y bajo contraste en la imagen central asociadas a la onda entrante y saliente, (5.7b). En el haz Airy y haz Parabólico no es apreciable este comportamiento por el tamaño de la obstrucción y su posición, pero es posible observar la onda saliente en el haz Parabólico y la reconstrucción de los haces.En la figura (5.8) se muestra la simulación numérica de el experimento mostrado en la figura (5.7) donde se puede observar una gran similitud con el experimento.

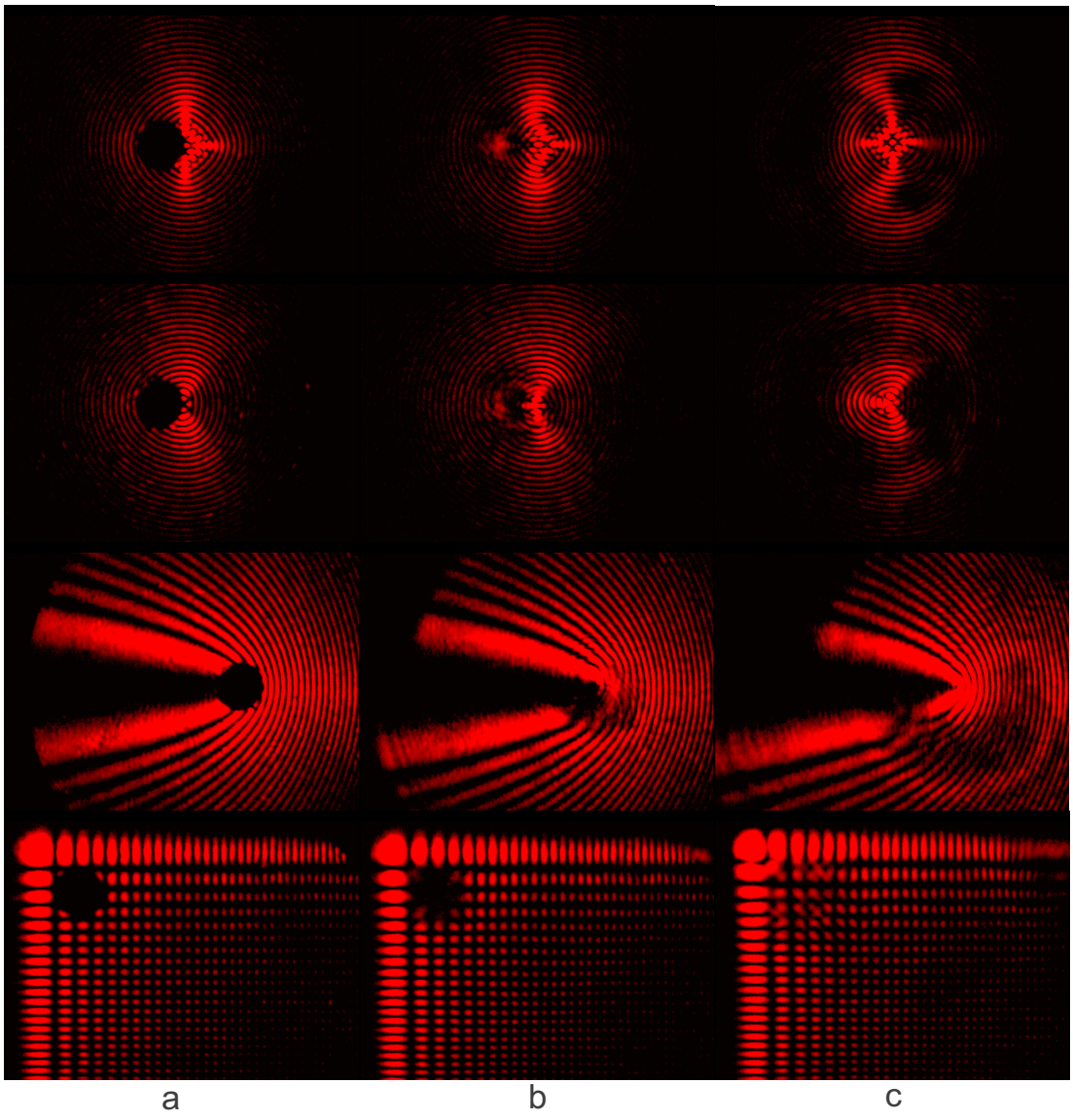

Figura 5.7: Auto-reconstrucción del haz Cáustico, Cúbico, Parabólico y Airy al ser parcialmente obstruidos fuera de eje con un objeto opaco. En las posiciones z: a) $0cm$, b) $10cm$ y c) $30cm$.

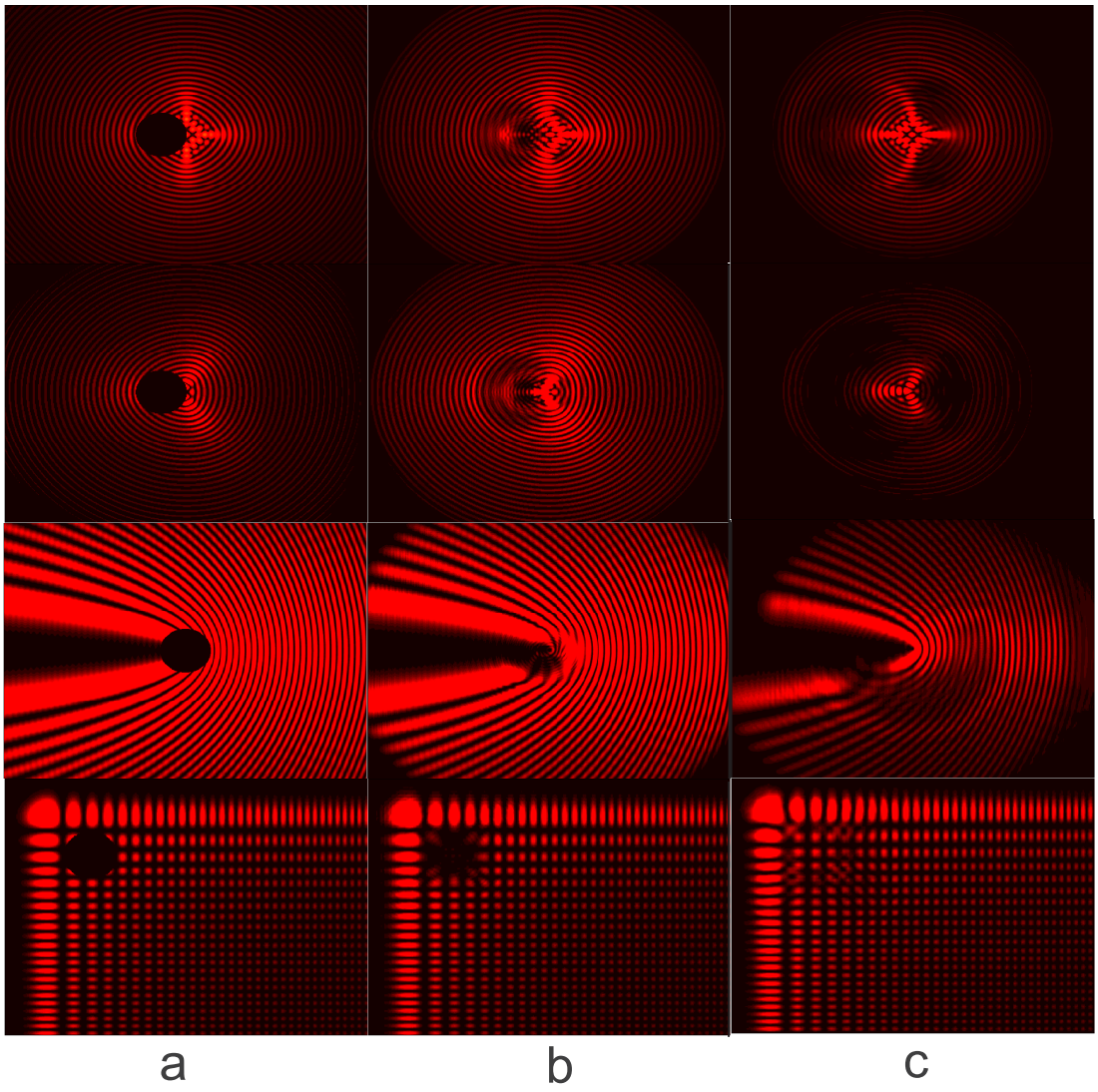

Figura 5.8: Lo mismo que en la figura (5.7) al realizar la simulación numérica numérica del experimento.

5.3. Comparación de haces Laguerre-Gauss y haces Bessel

En esta sección se muestra de forma experimentalmente las características de propagación de haces Laguerre-Gauss (LG) y haces Bessel bajo las condiciones de la sección (4.1). Se presenta también la auto-reconstrucción de los haces LG con multiples anillos y se comprueba que el haz recobra su estructura en una distancia de difracción en comparación de los haces Bessel que recuperan sólo su distribución central. Los hologramas CGH desplegados en la pantalla LCD se codifican con valores de frecuencias en la portadora de $s_0 = d_0 = 1/6$ en una región limitada de radio $R_e = 10$. El haz LG se codificó con un índice azimutal $m = 5$ y índice radial $n = 19$ y cintura $w_0 = 1$. En el sistema experimental, figura (5.4), se utilizó una lente de distancia focal $f_1 = 10cm$ que permite obtener haces con una cintura $w_0 = 0.2644mm$ y distancia máxima adifraccional $Z_{max} \equiv L_D \approx 34.69cm$.

En la figura (5.9) se presenta la distribución transversal de intensidad en la propagación de los haces LG y los haces Bessel en condiciones similares de la sección del desarrollo teórico y numérico, (4.1). El haz Bessel va disminuyendo su sección transversal mientras que el haz LG mantiene su estructura y aumenta su tamaño en una distancia de difracción, figura (5.9c). En la figura (5.10) se muestra la simulación numérica de el experimento mostrado en la figura (5.9) donde se puede observar una gran similitud entre ellos.

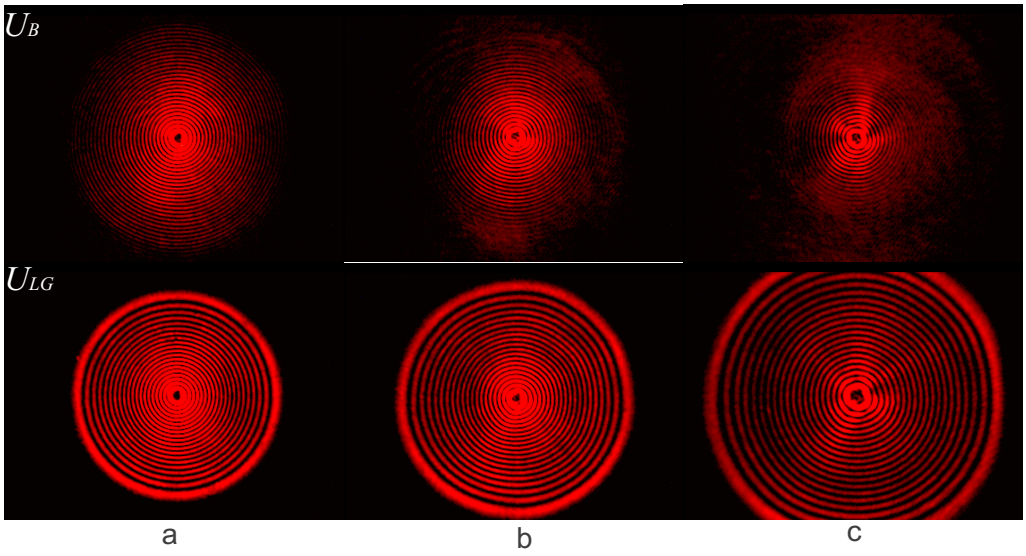

Figura 5.9: Distribución transversal de intensidad de la propagación de los haces Laguerre-Gauss contra los haces Bessel con $m = 5$ y $n = 19$. En las posiciones z: $0cm$ a), $17cm$ b) y $34cm$ c).

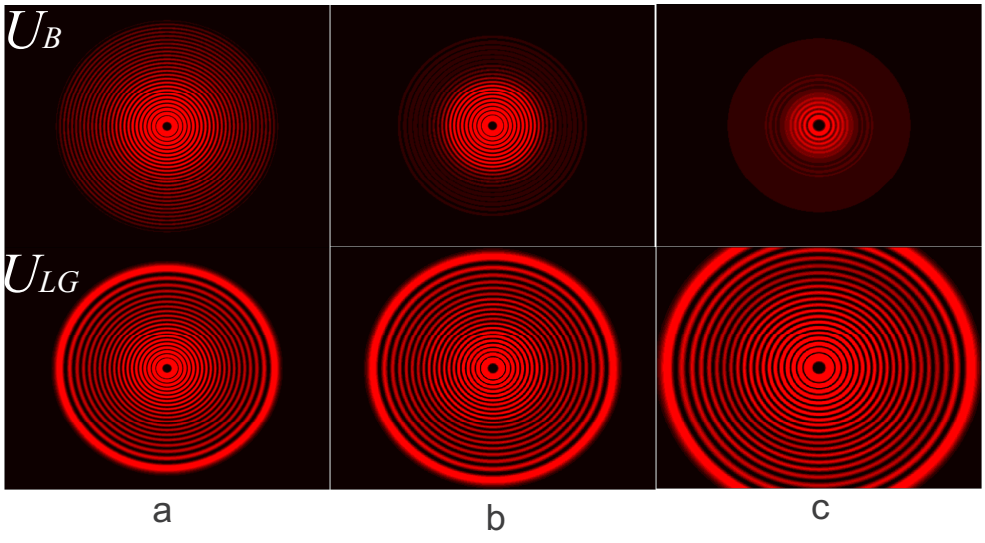

Figura 5.10: Lo mismo que en la figura (5.9) al realizar la simulación numérica del experimento.

Se presentan los patrones transversales de intensidad de la propagación de los haces LG y los haces Bessel al ser parcialmente obstruidos en la figura (5.11). El haz Bessel en estas condiciones sólo se reconstruye en su parte central mientras

el haz LG recobra su estructura hasta una distancia de difracción. En la columna central se pueden observar dos sombras producidas por un objeto que bloquea la distribución que son asociadas a las ondas entrante y saliente que componen los haces. En la figura (5.12) se muestra el mismo experimento, pero realizando una simulación numérica donde es notable la gran similitud entre el experimento y la simulación.

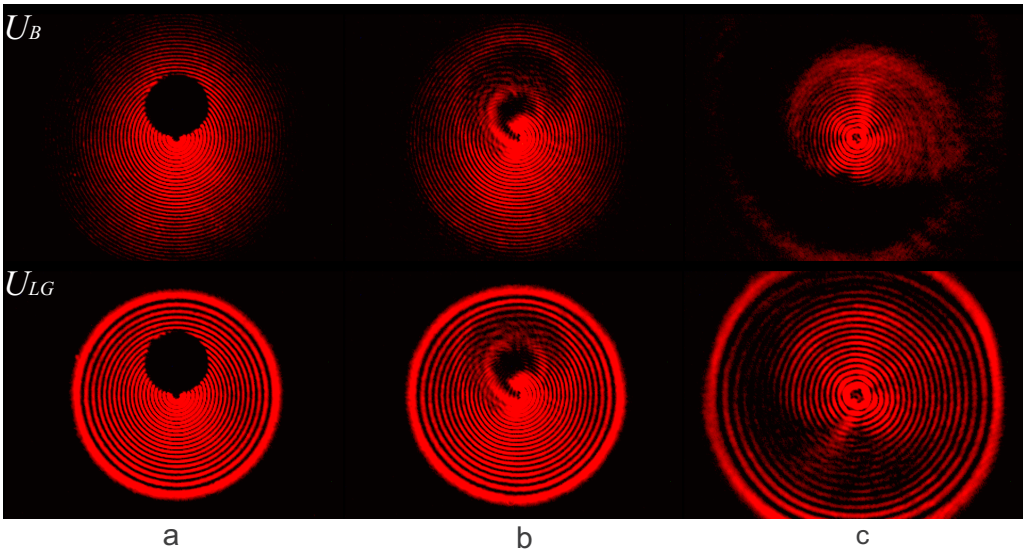

Figura 5.11: Patrones transversales de intensidad de la propagación de haces Laguerre-Gauss versus los haces Bessel con índice azimutal $m = 5$ e índice radial $n = 19$, al ser parcialmente obstruidos. En las posiciones z: $0cm$ a), $8cm$ b) y $34cm$ c).

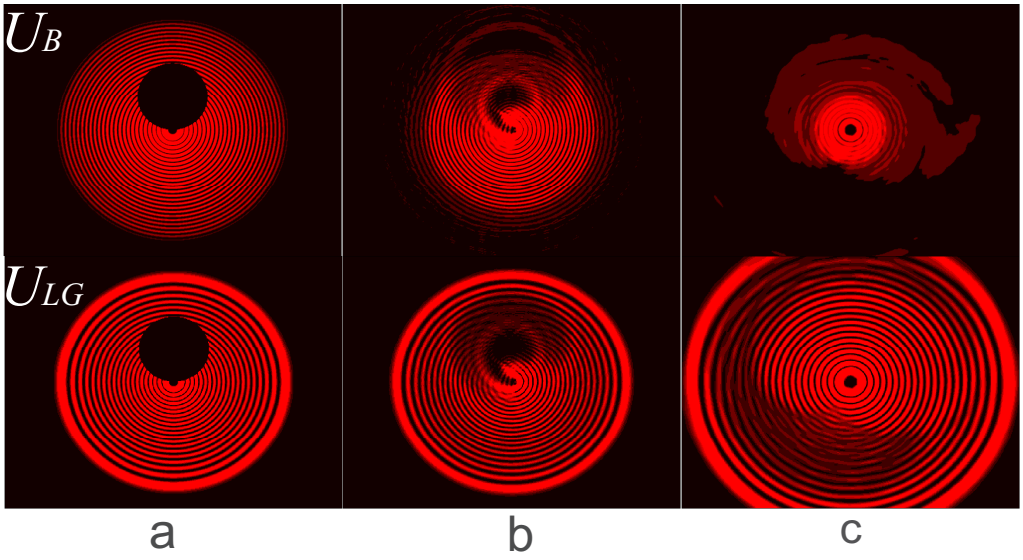

Figura 5.12: Lo mismo que en la figura (5.11) al realizar la simulación numérica del experimento.

5.4. Haces Exóticos Laguerre-Gauss (ELG)

En esta sección se presentan de forma experimental los haces Exóticos Laguerre-Gauss (ELG). Se observa la dinámica de estos haces al ser parcialmente obstruidos. Los hologramas CGH desplegados en la pantalla LCD se codifican con las mismas condiciones utilizadas para la generación del haz LG. El haz ELG se codificó con índice azimutal $m = 5$ e índice radial $n = 19$ y cintura $w_0 = 1$. En la figura (5.13) se muestra el haz LG, el haz ELG(1) saliente y el haz ELG(2) entrante. El ELG(1) saliente al propagarse genera la parte exterior del haz LG. El ELG(2) entrante al propagarse genera la parte interior del haz LG. En la figura (5.14) se presenta la simulación numérica que corresponde al experimento.

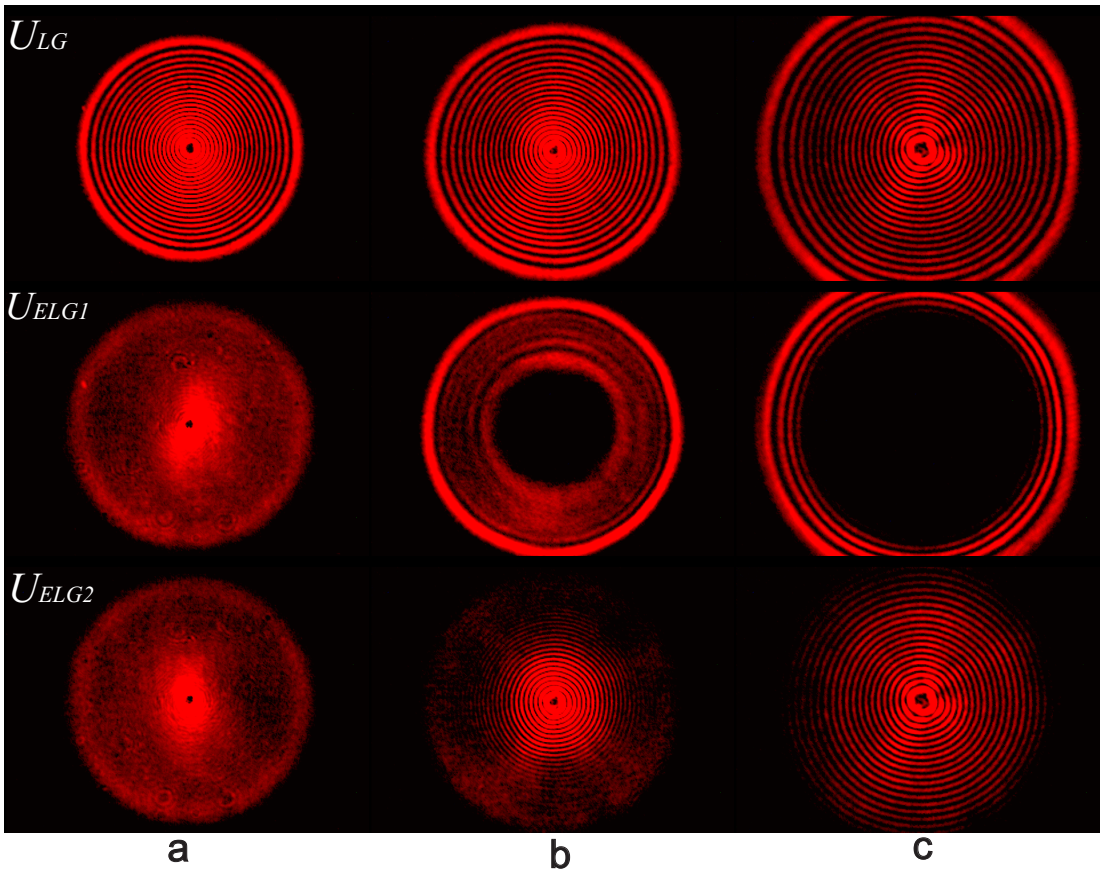

Figura 5.13: Distribución transversal de intensidad de la propagación del haz Laguerre-Gauss (arriba) y los haces Exóticos Laguerre-Gauss saliente (en medio) y entrante (abajo) con indices $m = 5$ y $n = 19$. En las posiciones z: $0cm$ a), $17cm$ b) y $34cm$ c).

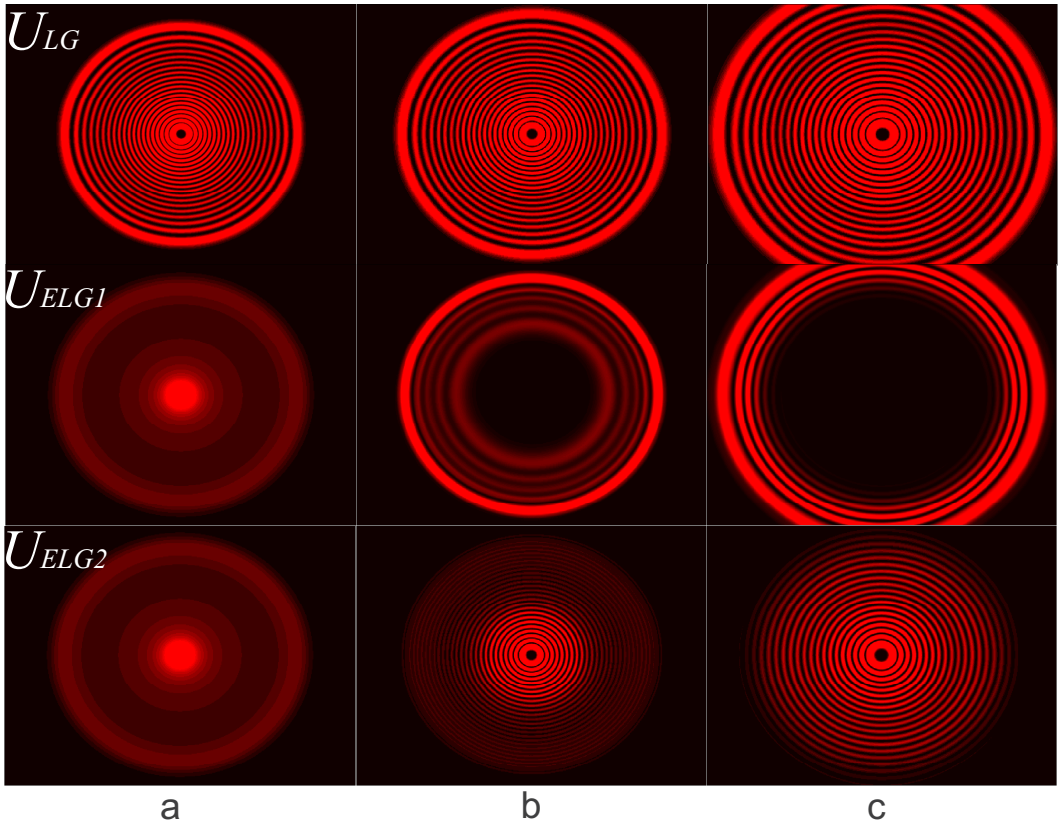

Figura 5.14: Lo mismo que en la figura (5.13) al realizar la simulación numérica del experimento.

5.4.1. Haces Exóticos Laguerre-Gauss parcialmente obstruidos

La dinámica de la auto-reconstrucción del haz Laguerre-Gauss de forma experimental presenta la existencia dos sombras una de alto y otra de bajo contraste asociadas a dos ondas que constituye el haz: una onda entrante y otra saliente. La distribución transversal de intensidad en diferentes posiciones del haz LG y los haces Exóticos Laguerre-Gauss parcialmente obstruidos con un objeto opaco se presentan en la figura (5.15). En la imagen central del primer renglón el haz LG presenta una sombra de bajo contraste y otra otra de alto alto contraste asociadas a la onda saliente (en medio) y otra onda entrante (abajo) que se presentan de forma inde-

pendiente, ver figura (5.15b). En la figura (5.16) se muestra la simulación numérica del experimento presentado en la figura (5.15) donde es posible observar una gran similitud con el experimento.

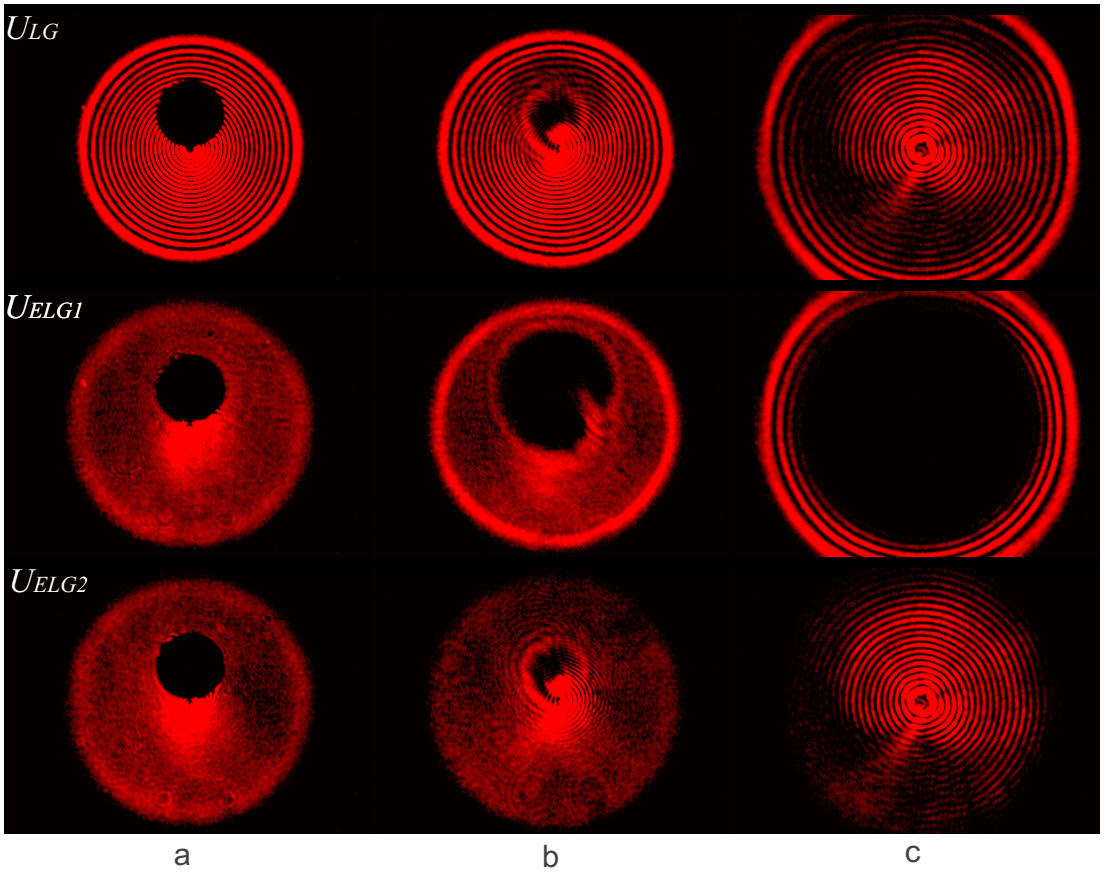

Figura 5.15: Distribución transversal de intensidad del haz Laguerre-Gauss (arriba) y los haces Exóticos Laguerre-Gauss al ser parcialmente obstruidos: saliente (en medio) y entrante (abajo). En las posiciones z: $0cm$ a), $8cm$ b) y $34cm$ c).

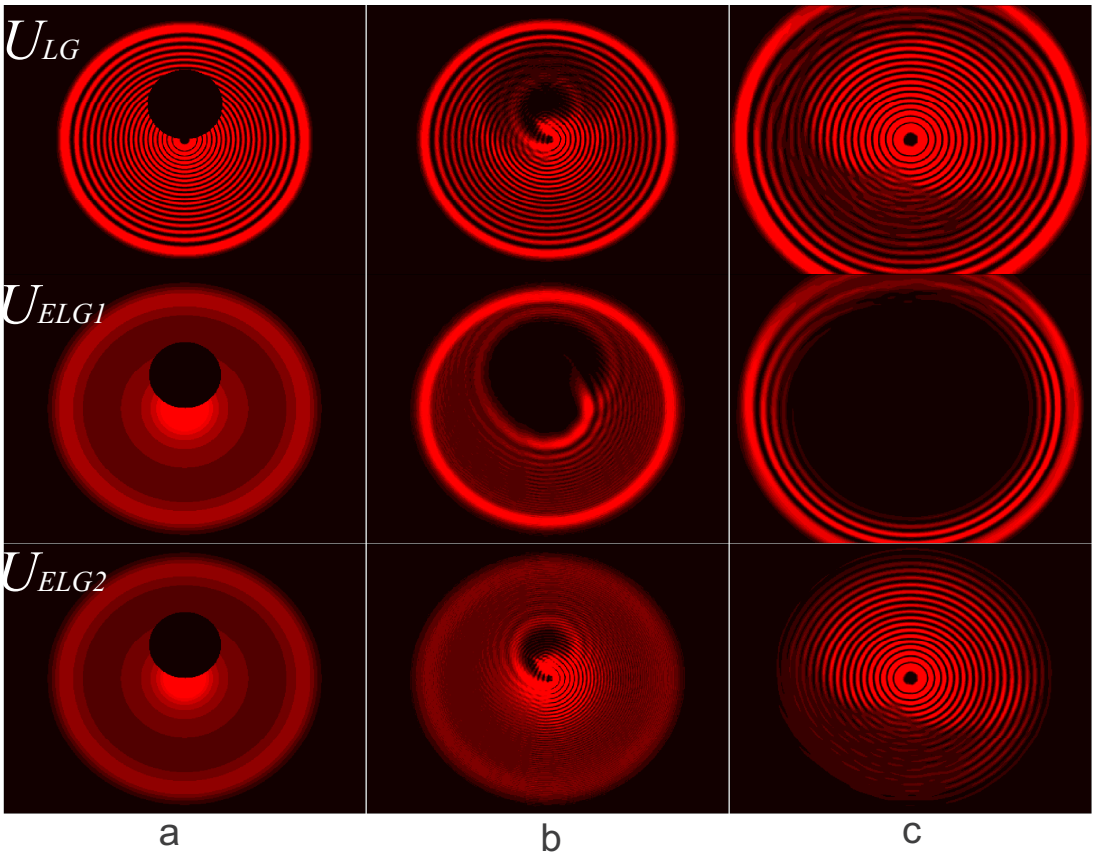

Figura 5.16: Lo mismo que en la figura (5.15) al realizar una simulación numérica.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo de tesis se estudió la dinámica de auto-reconstrucción de campos estructurados de luz. En particular se estudiaron campos invariantes en propagación y haces Laguerre-Gauss que fueron parcialmente obstruidos, en su sección transversal de intensidad, con un objeto opaco. Se analizó la propagación de los campos considerando que éstos pueden ser descritos por dos ondas, entrante y saliente, que se contra-propagan en sus componentes transversales. Estas ondas fueron obtenidas de las dos soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden que gobierna la propagación de tales estructuras transversales de intensidad del campo.

Se obtuvo una representación de los frentes de onda de las ondas, entrante y saliente, que constituyen los campos. Se describió analíticamente el campo complejo de haces invariantes en propagación que no tienen una simetría circular, en particular de haces Cáusticos. Se demostró que en haces Bessel de alto orden y haces Parabólicos con frentes de onda rotantes la circulación de energía es inversamente proporcional a la distancia radial respecto al eje de propagación de los haces. La carga topológica **m** al incrementarse en haces Bessel y similarmente para **a** en haces Parabólicos hace que el desplazamiento transversal de energía también se incremente.

Se llevó acabo por primera vez una comparación en secciones transversales simi-

lares entre haces Laguerre-Gauss y haces Bessel. Se encontró que la distancia máxima adifraccional de un haz Bessel corresponde a la distancia de difracción del haz Laguerre-Gauss, región donde se compararon ambos haces en propagación. La comparación mostró que el haz Laguerre-Gauss se propaga una distancia mayor a la distancia difracción manteniendo su estructura mientras que el haz Bessel conserva sólo su estructura central. Se mostró por primera vez el haz Laguerre-Gauss tiene la propiedad de auto-reconstrucción para multiples anillos. Se reveló que estos haces recobran su estructura mejor que los haces Bessel por propagarse una distancia mayor a la distancia máxima adifraccional.

La dinámica de auto-reconstrucción del haz Laguerre-Gauss mostró que éste puede ser descrito por la superposición de dos ondas, una entrante y otra saliente, que generan su estructura transversal de intensidad. Se encontró la segunda solución a la ecuación diferencial asociada de Laguerre para índices radial y azimutal entero, a la cual se le nombró función X que demostró que las ondas, saliente y entrante, son descritas por funciones tipo Hankel como los haces Bessel. Se presentó la propagación de estas ondas mostrando la dinámica de reconstrucción de los haces Laguerre-Gauss y se presentó que haces Hermite-Gauss pueden ser descritos también por dos ondas, entrante y saliente, en términos de la función X.

Se comprobó experimentalmente la dinámica de auto-reconstrucción de los campos invariantes en propagación y haces Laguerre-Gauss utilizando una pantalla de cristal líquido con modulación de sólo amplitud. Se realizó una modificación en la técnica de generación de hologramas para generar haces invariantes en propagación sin simetría circular. Se compararon en propagación el haz Laguerre-Gauss y el haz Bessel al tener secciones transversales similares y se demostró la auto-reconstrucción de estos haces.

Trabajo a futuro

Con el trabajo realizado en esta tesis se puede vislumbrar que puede ser necesario la representación explícita de las segundas soluciones de las ecuaciones diferenciales

de segundo orden que fueron consideradas en el trabajo. En algunas soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden se puede plantear la pregunta: el método de Hankel explorado aquí puede ser útil en otro tipo ecuaciones que requieran una segunda solución.

Del análisis cualitativo y cuantitativo llevado acabo en haces Parabólicos para mostrar el desplazamiento transversal o la circulación de energía que se muestra al ser parcialmente obstruidos los haces es necesario presentar la descripción vectorial de los haces Parabólicos de forma analítica.

El trabajo planteó algunas similitudes entre los haces Hermite-Gauss y haces Airy de tal forma que se pueden explorar en detalle sus similitudes como haces acelerados.

En el trabajo experimental la utilización de un modulador de cristal líquido requiere llevar acabo un análisis en la eficiencia en la generación de haces sin simetría circular.

Apéndice A

Método de Frobenius

El método de Fobrenius permite obtener soluciones en serie en la vecindad de un punto singular regular de una ecuación diferencial de segundo orden [38–42,120]. En este apéndice se describirán brevemente algunas definiciones para poder entender el método.

De la ecuación diferencial (A.1):

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \tag{A.1}$$

un punto x es un punto singular de la ecuación (A.1), si $P(x_0) = 0$ y si $P(x_0) \neq 0$ es un punto ordinario.

En general la ecuación (A.1) es pertinente escribirla en la forma:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{A.2}$$

donde $p(x) = Q(x)/P(x)$ y $q(x) = R(x)/P(x)$.

Si P, Q, R son funciones más generales que polinomios. Se generaliza la definición de punto singular. Un punto singular x_0 es singular si p, q, no tienen un desarrollo en serie de Taylor convergentes. En el caso de la solución alrededor de un punto singular

podemos hallar dos soluciones: y_1, y_2 linealmente independientes y las soluciones estarían acotadas, ó y_1 esta acotada y y_2 no lo este.

Un punto x_0 singular es un punto singular regular si:

$$lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}, \tag{A.3}$$

es finito y

$$lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}, \tag{A.4}$$

es finito.

En caso contrario x_0 será un punto singular irregular.

Para hallar una solución de (A.2) considérese lo siguiente, por simplicidad $x=0$ es el punto singular regular (si $x_0 \neq 0$ se hace el cambio de variable $u = x - x_0$, $u(x_0) = 0$). En tal caso:

$$lim_{x\to 0}x\frac{Q(x)}{P(x)} = lim_{x\to 0}xp(x) \tag{A.5}$$

y

$$lim_{x\to 0}x^2\frac{R(x)}{P(x)} = lim_{x\to 0}x^2q(x) \tag{A.6}$$

entonces $xp(x)$ y $x^2q(x)$ tienen desarrollos en serie de Taylor convergente $xp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$, $x^2q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$ en algún intervalo $|x| < \rho$ con $\rho > 0$. Para estudiar la ecuación (A.2) es conveniente multiplicar por x^2 con lo cual:

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + x^2q(x)y = 0 \tag{A.7}$$

ó

$$x^2y'' + x\left[\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k\right]y' + \left[\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k\right]y = 0 \tag{A.8}$$

Si en particular todo p_k y q_k son cero excepto:

$$p_0 = lim_{x\to 0}x\frac{Q(x)}{P(x)} \tag{A.9}$$

y

$$q_0 = lim_{x\to 0}x^2\frac{R(x)}{P(x)}, \tag{A.10}$$

entonces la ecuación (A.7) seria una ecuación de Euler con solución $y(x) = x^s$ de la siguiente forma:

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0 \tag{A.11}$$

Si ahora se considera que p_k y q_k son distintos de cero y ya que son coeficientes de Euler (q_kx^s) multiplicados por series de potencias se halla la solución para (A.7):

$$y(x) = x^s \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{A.12}$$

y la tarea siguiente es hallar:

- Los valores de s para los que la ecuación (A.7) tiene una solución de la forma (A.12)
- La relación de recurrencia de a_k
- El radio de convergencia

Las soluciones de la ecuación (A.7) pueden establecerse en el siguiente **Teorema** [40]. Sea la ecuación diferencial (A.7) con $x = 0$ un punto singular regular. Entonces $xp(x)$ y $x^2q(x)$ son analíticas:

$$xp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \tag{A.13}$$

con $|x| < \rho_p$

$$x^2q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \tag{A.14}$$

con $|x| < \rho_q$.

Tienen desarrollos convergentes en series de Taylor. Convergentes en $|x| < \rho$, $\rho = min[\rho_p, \rho_q]$.

Sean s_1, s_2, raices de la **ecuación indicial**

$$F(s) = s(s-1) + p_0s + q_0 \tag{A.15}$$

1. Si $s_1 \neq s_2$, $s_1 - s_2 \neq N\epsilon Z^+$, s_1, s_2, ϵR, $s_1 > s_2$ entonces y_1, y_2 son soluciones:

   - $y_1 = |x|^{s_1}[1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(s_1)x^k]$
   - $y_2 = |x|^{s_2}[1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(s_2)x^k]$

   Convergentes $\forall x$ tal que $|x| < \rho$.

2. Si s_1, s_2, y $s_1 = s_2$ entonces las soluciones son de la forma:

   - $y_1 = |x|^{s_1}[1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(s_1)x^k]$
   - $y_2 = |x|^{s_1}[\sum_{k=1}^{\infty} b_k(s_1)x^k] + y_1 ln|x|$.

3. Si $s_1 - s_2 = N\epsilon Z^+$, entonces las soluciones son de la forma

   - $y_1 = |x|^{s_1}[1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(s_1)x^k]$
   - $y_1 = ay_1 ln|x| + |x|^{s_2}[\sum_{k=1}^{\infty} c_k(s_2)x^k]$.

Los coeficientes $a_k(s_1)$, $a_k(s_2)$, $b_k(s_1)$, $c_k(s_2)$ y la constante a (que puede ser cero) pueden determinarse por la sustitución directa de (A.12) en (A.7). Todas las series son convergentes al menos $\forall x$ tal que $|x| < \rho$ y $\rho = min[\rho_p, \rho_q]$.

Apéndice B

Segunda solución de la ecuación diferencial Bessel: Método de Hankel.

Existen algunas dificultades practicas al momento de aplicar el método de Frobenius para la solución de ecuaciones del tipo (A.7), apéndice 1. Tal vez la principal es manipular los parámetros para hallar la relación de recurrencia que describan los coeficientes de las series. El ingenioso método de Hankel, refinado por Weber, presenta otro camino para lidiar con las dificultades practicas [43], de tal forma que las soluciones puedan ser manipuladas numéricamente [122]. En este apéndice se aborda el método de Hankel para hallar la segunda solución Y_m (función de Neumann) de la ecuación diferencial de Bessel con m entero, donde es necesario soluciones independientes Y_ν con ν un número no entero y la regla de L'Hopital.

La ecuación de Bessel de orden ν es descrita por:

$$x^2\frac{d^2y(x)}{dx^2} + x\frac{dy(x)}{dx} + y(x)\left[x^2 - \nu^2\right] = 0. \tag{B.1}$$

La ecuación (B.1) es encontrada en es el estudio de problemas con simetría

cilíndrica por lo cual las soluciones se les conoce también como funciones cilíndricas.

Para hallar la segunda solución primero se encuentra la ecuación indicial (A.15), que para este caso es $s^2 - \nu^2 = 0$ y las raices son $s_1 = \nu$ y $s_1 = -\nu$.

Cuando ν no es un entero y siguiendo el teorema de Frobenius (caso (1) y (3)) se tienen dos soluciones linealmente independientes sin un factor logarítmico. Si se sustituye (A.12) a la ecuación de Bessel se obtienen dos soluciones independientes para ν y $-\nu$, descritas por (B.2):

$$J_{\pm\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(\pm\nu + k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\pm\nu+2k}. \tag{B.2}$$

convergentes en $|x| < \infty$.

Si se sustituye ν por un entero m, (B.2) no es un sistema fundamental de soluciones para (B.1), solo existe una solución $J_{-m}(x) = (-)^m J_m(x)$. Por lo tanto es necesario encontrar una segunda solución linealmente independiente a J_m . En este caso se debe encontrar una solución con un termino logarítmico tal como en el caso (3) del método de Frobenius; que involucra encontrar la relación de recurrencia para este caso que no es simple de encontrar [42]. Lo que a continuación se describe fue el método obtenido por Hankel para hallar la solución $Y_{\nu=m}$ donde usa soluciones del tipo (B.2).

Si ν no es un entero y m es un entero cualquiera o cero la función:

$$J_\nu(x) - (-)^m J_{-\nu}(x), \tag{B.3}$$

sigue siendo solución de la ecuación (B.1) y cuando $\nu = m$ esta función es igual a cero. Así que si se escribe otra versión de (B.3) para $\nu \neq m$:

$$Y_\nu = \frac{J_\nu(x) - (-)^m J_{-\nu}(x)}{\nu - m}, \tag{B.4}$$

sigue siendo solución de (B.1) y es indeterminada cuando $\nu = m$.

Se puede evaluar el limite de (B.4) como:

$$Y_m = \lim_{\nu \to m} \frac{J_\nu(x) - (-)^m J_{-\nu}(x)}{\nu - m}, \tag{B.5}$$

y puede verse que es una solución de la ecuación de Bessel de orden m y que es linealmente independiente a J_m. De esta forma Hankel encontró la segunda solución para (B.1) cuando $\nu = m$ (m un entero), es decir, la función Bessel de segundo tipo de orden m Y_m.

Weber reescribió la función (B.4) como sigue:

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)cos(\nu\pi) - (-)^m J_{-\nu}(x)}{sen(\nu\pi)}, \tag{B.6}$$

que es la forma estándar que se usa por ejemplo en [36]- página 694. De esta manera cuando se toma el limite en (B.6) para $\nu \to m$ se tiene la segunda solución a la ecuación (B.1), la función Bessel de segundo tipo de orden m, Y_m:

$$Y_m(x) = \lim_{\nu \to m} \frac{J_\nu(x)cos(\nu\pi) - (-)^m J_{-\nu}(x)}{sen(\nu\pi)}, \tag{B.7}$$

o

$$Y_m(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^m \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=m}, \tag{B.8}$$

aplicando la regla de L'Hopital en (B.6).

Para mostrar que (B.8) es solución a la ecuación de Bessel se diferencia $J_{\pm\nu}$ en (B.1) con respecto al índice ν entonces:

$$x^2\frac{d^2 J_{\pm\nu}}{dx^2} + x\frac{dJ_{\pm\nu}}{dx} + J_{\pm\nu}\left[x^2 - \nu^2\right] = \frac{2\nu}{\pi}J_{\pm\nu}, \tag{B.9}$$

ahora si se multiplica $J_{-\nu}$ por $-(1)^\nu$ y restando a J_ν en la ecuación (B.9) y tomando el limite $\nu \to m$ (m un entero) se obtiene:

$$x^2\frac{d^2 Y_m}{dx^2} + x\frac{dY_m}{dx} + Y_m\left[x^2 - m^2\right] = \frac{2m}{\pi}[J_m - (1)^m J_{-m}], \tag{B.10}$$

y el lado derecho de la ecuación (B.10) es cero entonces Y_m es solución de la ecuación de diferencial de Bessel.

La expansión en serie de Y_m se puede obtener de (B.8) diferenciando (B.2) para $\pm\nu$ [37]-capitulo 5, sin necesidad de obtener la relación de recurrencia y usar solu-

ciones que son ya obtenidas:

$$Y_m(x) = \frac{2}{\pi} J_m(x) ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{m+2k}}{k!(m+k)!}[\psi(k+1)+\psi(k+m+1)], \quad \text{(B.11)}$$

donde

$$\psi(q+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{q}, \quad \text{(B.12)}$$

$\psi(1) = -\gamma$ es la constante de Euler ($\gamma = 0.57721...$) y en el caso de $m = 0$ la primer suma en (B.11) es igual cero. De forma general $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ es la derivada logarítmica de la función gama Γ o la función polígama.

Bibliografía

[1] G. D. Boyd, H. Kogelnik, "Generalized Confocal Resonator Theory," *Bell Syst. Tech. J.* **41**, 1347-1369 (1962).

[2] A. E. Siegman, *Lasers* (University Science Books, 1986).

[3] B. E. A. Saleh, M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics* (John Wiley and Sons, 1991).

[4] R. Guenter, *Modern Optics*, (John Wiley and Sons, 1990).

[5] G. Gbur, *Mathematical Methods for Optical Sciences* (Cambridge University Press, 2011).

[6] M. A. Bandres, J. C. Gutiérrez-Vega, " Ince-Gausssin beams," *Opt. Lett.* **29**, 144 (2004).

[7] A. E. Siegman, " Hermite- gaussian functions of complex argument as optical-beam eigenfunctions," *J. Opt. Soc. Am. A*, **63**, 1093 (1973).

[8] M. A. Bandres, "Elegante Ince-Gausssina beams," *Opt. Lett.* **29**, 1724 (2004).

[9] E. Zauderer, "Complex argument Hermite-Gaussian and Laguerre-Gaussian beams," *J. Opt. Soc. Am. A*, **3**, 465 (1986)

[10] V. V. Kotlyar, R. V. Skidanov, S. N. Khonina, V. A. Soifer, "Hypergeometric modes," *Opt. Lett.* **32**, 724 (2007).

[11] E. Karimi, G. Zito, B. Piccirillo, L. Marrucci, E. Santamato, "Hypergeometric-Gaussian modes," *Opt. Lett.* **32**, 3053 (2007).

[12] M. A. Bandres, J. C. Gutiérrez-Vega, "Circular beams," *Opt. Lett.* **33**, 177 (2008).

[13] M. A. Bandres, J. C. Gutiérrez-Vega, "Cartesian beams," *Opt. Lett.* **32**, 3459 (2007).

[14] M. V. Berry, N. L. Balazs, "Nonspreding wave packets," *Am. J. Phys.* **43**, 264 (1979).

[15] G. A. Siviloglou, J. Broky, A. Dogariu, D. N. Christodoulides, "Observation of accelerating Airy beams," *Phys. Rev. Lett.* **99**, 213901 (2007).

[16] J. D. Ring, J. Lindberg, A. Mourka, M. Mazilu, K. Dholakia, M. R. Dennis, "Auto-focusing and self-healing of Pearcy beams," *Opt. Express*, **20**, 18955 (2012).

[17] J. Broky, G. A. Siviloglou, A. Dogariu, D. N. Christodoulides, "Self-healing properties of optical Airy beams," *Opt. Express*, **16**, 12880 (2008).

[18] J. Durnin, "Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory," *J. Opt. Soc. Am. A*, **4**, 651 (1987).

[19] J. Durnin, J.J. Miceli, J. H. Eberly, "Diffraction-Free Beams," *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1499 (1987).

[20] J. C. Gutiérrez-Vega, M. D. Iturbe-Castillo, S. Chávez-Cerda, "Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams," *Opt. Lett.* **25**, 1493 (2000).

[21] R. J. Hernández-Hernández, R. A. Terborg, I. Ricardez-Vargas, K. Volke-Sepúlveda, "Experimental generation of Mathieu-Gauss beams with phase-oly spatial light modulator," *Appl. Opt.* **49**, 6903 (2010).

[22] M. A. Bandres, J. C. Gutiérrez-Vega, S. Chávez-Cerda, "Parabolic nondiffracting optical wave fields," *Opt. Lett.* **29**, 44 (2004).

[23] C. López-Mariscal, M.A. Bandres, J. C. Gutiérrez-Vega, " Observation of parabolic nondriffracting optical fields," *Opt. Express*, **13**, 2364 (2005).

[24] J. Mendoza-Hernández, M. L. Arroyo Carrasco, M. M. Méndez Otero, S. Chávez-Cerda, M. D. Iturbe Castillo, "New asymmetric propagation inavariant beams obtained by amplitud and phase modulation in frecuency space," *J. Mod. Opt.* **61**, S46-S56 (2014).

[25] J. Rogel-Salazar, H. A. Jiménez-Romero, S. Chávez-Cerda, "Full characterization of Airy beams under physical principles," *Phys. Rev. A*, **89**, 023807 (2014).

[26] M. A. Bandres, I. Kamir, M. S. Mills, B. M. Rodriguez-Lara, E. Greenfield, M. Segev, N. Chistodoulides, "Accelerating optical beams," *Opt. Pho. News*, **24**, 30 (2013).

[27] M. A. Bandres, B. M. Rodriguez-Lara, "Nondiffracting accelerating waves: Weber and parabolic momentum," *New J. Phys.* **15**, 013054 (2013).

[28] D. McGloin, K. Dholakia, "Bessel beams: Diffraction in a new ligth," *Cont. Phys.* **46**, 15 (2005).

[29] I. A. Litvin, M. G. McLaren, A. Forbes, "A conical wave approach to calculation Bessel-Gauss beam reconstrucción after complex abstacles," *Opt. Comm.* **282**, 1075 (2009).

[30] Z. Bouchal, J. Wagner, M. Chlup, "Self-reconstruction of a distorted nondifracting beam," *Opt. Commun.* **151**, 207 (1998).

[31] J. Aiello, G. S. Agarwal, "Wave-optics description of sel-helaing mechanics in Bessel beams," *Opt. Lett.* **39**, 6819 (2014).

[32] S. Chávez-Cerda, "A new approach to Bessel beams," *J. Mod. Opt.* **46**, 923 (1999).

[33] S. Chávez-Cerda, G. S. McDonald, G. H. C. New, "Nondiffracting beams: traveling, standing, rotating and spiral waves," *Opt. Commun.* **123**, 225 (1996).

[34] M. Anguiano-Morales, M.M. Mendez-Otero, M.D. Iturbe-Castillo, S. Chávez-Cerda, "Conical dynamics of Bessel beams," *Opt. Eng.* **46**, 078001 (2007).

[35] M. Anguiano Morales, A. Martinez, M. D. Iturbe Castillo, S. Chavez Cerda, N. Alcala-Ochoa, "Self-healing property of a caustic optical beam," *Appl. Opt.* **46**, 8284 (2007).

[36] G. B. Arfken, H. J.Weber, *Mathematical Methods for Physicists*. (Sixth edition. Elsevier Academic Press 2005).

[37] N. N. Lebedev, *Especial function and their applications*, (Dover Publications, Inc.,1972), p. 262-265.

[38] Ravi P. Agarwal, Donal O' Regan, *Ordinary and Partial Differential Equations. With Special Functions, Fourier Series, and Boundary Value Problems*, (Springer, 2009), p. 33-35, 37, 61.

[39] William F. Trench, *Elementary differential Equations*, (Brooks/Cole Thomson Leaning, 2000), p. 329-358.

[40] R. Kent Nagle, Edward B. Saff, Arthur David Snider, *Fundamentals of differential equations*, (7th edition. Pearson Addison Wesley, 2008), p. 493-494, 501.

[41] W.W. Bell, *Special functions for scientists and engineers*, (Dover Publications Inc. 2004), p. 93-99.

[42] Early D. Rainville, Phillip E. Bedient, Richard E. Bedient, *Elementary Differential Equations*, (8th Edition, Prentice Hall, 1996), p. 399-400.

[43] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel function*, (Second edition, Cambridge, 1996), p. 57-60.

[44] M. Abramowitz and I. A. Stegun *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover, New York, 1964).

[45] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, 2007).

[46] A. Cámara, T. Alieva, "Propagation of broken stable beams," *J. Mod. Opt.* **58**, 743-747 (2011).

[47] J. Aiello, G. S. Agarwal, "Wave-optics description of self-healing mechanism in Bessel beams," *Opt. Lett.* **39**, 6819-6822 (2014).

[48] Igor A. Litvin, L. Burger, A. Forbes, "Angular self-reconstruction of petal-like beams," *Opt. Lett.* **38**, 3363-3365 (2013).

[49] S. H. Tao, X. Yuan, "Self-reconstrucción property fractional Bessel beams," *J. Opt. Soc. Am. A*, **21**, 1192 (2004).

[50] P. L. Marston, "Self-reconstrucción property fractional Bessel beams: comment," *J. Opt. Soc. Am. A*, **26**, 2181 (2009).

[51] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. (Third Edition. Addison Wesley, 1999), p. 355-358, (1999).

[52] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, (Third edition, John Wiley, 1999), p. 425-429.

[53] M. A. Heald, J. B. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation*. (Third Edition, Saunders College Publishing, 1995), p. 167-181.

[54] A. Yariv, *Quantum Electronics*, (Third edition. John Wiley, 1986).

[55] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, J. P. Woerdman, "Orbital angular momentum of ligth the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes," *Phys. Rev. A*, **45**, 11 (1992).

[56] L. Allen, M. J. Padgett, "The vector in Laguerre-Gaussian beams and the interpretation of their angular momentum density," *Opt.commun.*, **184**, 67-71 (2000).

[57] K. Volke-Sepulveda, V. Garcés-Chávez, S. Chávez-Cerda, J. Arlt, K. Dholakia, "Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam," *J. Opt. B: Quantum S. Opt.* **4**, S82-S89 (2002).

[58] A. G. White, C. P. Smith, N. R. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop, R. Mcduff, C. O. Weiss, "Interferometric measurements of phase singularities in the output of a visible laser," *J. Mod. Opt.* **38**, 12 (1991).

[59] M. Padgett, L. Allen, "Light with a twist in its tail," *Contemp. Phy.* **41**, 5 (2000).

[60] J. M. Hickmann, E. J. S. Fonseca, W. C. Soares, S. Chávez-Cerda, "Unveiling a Truncated Optical Lattice Associated with a Triangular Aperture Using Light's Orbital Angular Momentum," *Phys. Rev. Lett.* **105**, 053904 (2010).

[61] P. L. Overfelt, C. S. Kenney, "An optical vortex as a rotating body: mechanical features of a singular light beam," *J. Opt. Soc. Am. A*, **8**, 732 (1991).

[62] P. V. Adamson, "An optical vortex as a rotating body: mechanical features of a singular light beam," *Opt. Spectros.* **88**, 242 (2000).

[63] M. Lin, Y. Yu, "A Comparison of Propagation Between Apertured Bessel and Gaussian beams," *J. Infrared Milli.* Terahz Waves **30**, 410 (2009).

[64] Y. Z. Yu, W. B. Dou, "Comparison of Propagation of Apertured Bessel and Gaussian Beams," *Int. Conf. Commun. Technol. Proc.* 217 (2008).

[65] R. L. Nowack, "A tale of two beams: an elementary overview of Gaussian beams and Bessel beams," *Stud. Geophys. Geod.* **56**, 355 (2012).

[66] F. Gorri, G. Guattari, C. Padovani, "Bessel-Gauss beams," *Opt. Commun.* **64**, 491 (1987).

[67] M. A. Porras, R. Borghi, M. Santarsiero, "Relationship between elegant Laguerre-Gauss and Bessel-Gauss beams," *J. Opt. Soc. Am. A*, **18**, 177 (2001).

[68] S. Saghafi, C. J. R. Sheppard, "Near field and far field of elegant Hermite-Gaussian and Laguerre-Gaussian modes," J. Mod. Opt. **45**, 1999 (1998).

[69] M. J. Padgett, L. Allen, "The Poynting vector in Laguerre-Gaussian laser modes," *Opt. Commun.* **121**, 36-40 (1995).

[70] A. Y. Bekshaev, M. S. Soskin, M. V. Vasnetsov, "An optical vortex as a rotating body: mechanical features of a singular light beam," *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **6**, S170-S174 (2004).

[71] R. A. Terborg, K.Volke-Sepulveda, "Quantitave characterization of the energy circulation in helical beams by means of near-field diffraction," *Opt. Express*, **21**, 3379-3387 (2013).

[72] R. Rop, I. A. Litvin, A. Forbes, "Generation and propagation dynamics of obstructured and unobstructured rotating orbital angular momentum carrying helicon beams," *J. Opt.* **14**, 035702 (2012).

[73] R. Rop, A. Dudley, C. López- Mariscal, A. Forbes, "Measuring the rotation rates of superpositions of higher-order beams," *J. Mod. Opt.* **59**, 259 (2012).

[74] J. Arlt, "Handedness and azimuthal energy flow of optical vortex beams," *J. Mod. Opt.* **50**, 1573 (2003).

[75] N. R. Heckenberg, R. McDuff, C. P. Smith, A. G. White, "Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms," *Opt. Lett.* **17**, 221 (1992).

[76] H. He, N. R. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop, "Optical-particle trapping with higher-order doughnut beams produced using high-efficiency computer-generated holograms," *J. Mod. Opt.* **42**, 1 (1995).

[77] A. M. Yao, M. J. Padgett, "Orbital angular momentum: origins behavior and applications," *Adv. Opt. Phot.* **3**, 161 (2011).

[78] V. Arrizón, D. Sánchez-de-la-Llave, U. Ruiz, G Mendez, "Efficient generation of an arbitrary nondiffracting Bessel beam employing its phase modulation," *Opt. Lett.* **34**, 1456 (2009).

[79] R. J. Hernández-Hernández, R. A. Terborg, I. Ricardez-Vargas, K. Volke-Sepulveda "Experimetal generation of Mathieu-Gauss beams with a phase-only spatial light modulator," *Appl. Opt.* **49**, 6903 (2010).

[80] D. Aguirre-Olivas, G. Mellado-Villaseñor, D. Sánchez-de-la-Llave, V. Arrizón, "Efficient generation of Hermite–Gauss and Ince–Gauss beams through kinoform phase elements," *Appl. Opt.* **54**, 8444 (2015).

[81] V. Arrizón, G. Mendez, D. Sánchez-de-la-llave "Accurate enconding of arbitrary complex fields with amplitud-only liquid crystal spatial light modulators," *Opt. Express*, 13, 7913 (2005).

[82] M. Guadalupe Méndez Vázquez, "Caracterización de la transmitancia de una pantalla de cristal líquido configurada en modo de amplitud", Tesis de Licenciatura.

[83] M. Guadalupe Méndez Vázquez, "Implementación de transmitancias complejas con un modulador de amplitud electro-óptico", Tesis de maestria. Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE), (2007).

[84] J. Mendoza-Hernández. "Estudio de la generación y auto-reconstrucción de nuevos haces invariantes". Tesis de maestria, FCFM, BUAP, (2011)

[85] T. A. Planchon, L. Gao, D. E. Milkie, M. W. Davidson, J. A. Galbraith, C. G. Galbraith, E. Betzig "Rapid three-dimensional isotropic imaging of living cells using Bessel beam plane illumination," *Nature Meth.*, **8**, 417 (2011).

[86] F. O. Fahrbach, V. Gurchenkov, K. Alessandri, P. Nassoy, A. Rohrbach, "Light-sheet microscopy in thick media using scanned Bessel beams and two-photon fluorescence excitation," *Opt. Express*, **21**, 13824 (2010).

[87] F. O. Fahrbach, P. Simon, A. Rohrbach, "Microscopy with self-reconstructing beams," *Nat. Phot.*, **4**, 780-785 (2010).

[88] N. Bozinovic, Y. Yue, Y. Ren, M. Tur, P. Kristensen, H. Huang, A. E. Willner, S. Ramachandran, "Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexiing in fibers," *Science*, **340**, 1545 (2013).

[89] J. Wang, J. Y. Yang, I. M. Fazal, N. Ahmed, Y. Yan, H. Huang, Y. Ren, Y. Yue, S. Doliner, M. Tur, A. E. Willner, "Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexiing," *Nat. photonics*, **6**, 488 (2012).

[90] M. Krenn, R. Fickler, M. Fink, J. Handsteiner, M. Malik, T. Scheidl1, R. Ursin and A. Zeilinger, "Communication with spatially modulated light through turbulent air across Vienna," *New J. Phys.* **16**, 113028 (2014).

[91] M. McLaren, M. Agnew, J. Leach, F. S. Roux, M. J. Padgett, R. W. Boyd, A. Forbes, "Entangled Bessel-Gaussian beams," *Opt. Express*, **20**, 23589-23597 (2012)

[92] M. McLaren, T. Mhlanga, M. J. Padgett, F. S. Roux, A. Forbes, "Self-healing of quantum entanglement after an obstruction," *Nat. Commun.* **5**, 3248 (2014).

[93] M. Mirhosseini, O. S. Magaña-Loaiza, M. N. O'Sullivan1, B. Rodenburg, M. Malik, M. P. J. Lavery, M. J. Padgett, D. J. Gauthier and R. W. Boyd, "High-dimensional quantum cryptography with twisted light," *New J. Phys.* **17**, 033033 (2015).

[94] D. G. Grier, "A revolution in optical manipulation," *Nature*, **424**, 810 (2003).

[95] K. Dholakia, N. B. Simpson, M. Padgett, L. Allen "Second-harmonic generation and orbital angular momentum of ligth," *Phys. Rev. A*, **54**, 5 (1996).

[96] C. Rosales-Guzmán, N. Hermosa, A. Belmonte, J. P. Torres, "Measuring the translational and rotational velocities of particles in helical motion using structures light," *Opt. Express*, **22**, 16504 (2014).

[97] L. Allen, M. J. Padgett, M. Babiker, *IV. The orbital angular momentum of light*, (Progress in optics XXXIX, 1999).

[98] L. Allen, S. M. Barnett, M. J. Padgett, *Optical angular momentum*, (Institute of Physics Publishing, 2003).

[99] D. L. Andrews, M. Babiker, *The angular momentum of light*, (Cambridge University Press, 2013).

[100] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, (Third edition, John Wiley, 1999), chapter 5.

[101] E. Hecht, *Óptica*, (Addison Wesley Iberoamericana, 2000).

[102] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis*. (Cambridge University Press, 1963), p. 390-400.

[103] M. R. Spiegel, S. Lipschutz, D. Spellman, *Análisis vectorial*. (Segunda edición. Schaum, Mc. Graw Hill, 2013), chapter 7.

[104] B. E. A. Saleh, M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics* (John Wiley and Sons, 1991). chapter 3, section 3.1, p. 81-90.

[105] A. E. Siegman, *Lasers* (University Science Books, 1986), p. 626-663.

[106] R. Guenter,*Modern Optics*, (John Wiley and Sons, 1990), p 336-346.

[107] G. B. Arfken, H. J.Weber, *Mathematical Methods for Physicists*. (Sixth edition. Elsevier Academic Press 2005), p. 837-848.

[108] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fundamentals of physics*, (John Wiley and Sons, 2008), p. 290-292, 342-344.

[109] T. W. B. Kibble, F. H. Berkshire, *Classical Mechanics*, (Imperial College Press, London, 2004). Chapter 3 and 4.

[110] M. V. Berry, "Optical currents," *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **11**, 094001 (2009)

[111] F. Bowman, "Introduction to Bessel functions,"*Dover*, pag. 117-118 (1958).

[112] A. G. White, C. P. Smith, N. R. Heckenberg, H. Rubisztein-Dunlop, R. Mcduoo, C. O. Weiss, "Interferometric measurements of phase singularities in the output of a visible laser,"*J. Mod. Opt.* **38**, 2531 (1991).

[113] G. Gbur, *Mathematical Methods for Optical Sciences* (Cambridge University Press, 2011), p. 302-308.

[114] C. Roychoudhuri, *Causal physics: Photons by non-interctions of waves*, (CRC Press, Taylor and Francis Group, 2014), chapter 3, p. 37-53.

[115] R. L. Phillips, L. C. Andrews "Spot size and divergence for Laguerre-Gaussian beams of any order," *Appl. Opt.* **22**, 643 (1983).

[116] I. Georgescu, "Entaglement, heal thyself," *Nat. Phys.* **10**, 188 (2014).

[117] G. Ruffato, M. Massari and F. Romanato, "Generation of high-order Laguerre–Gaussian modes by means of spiral phase plates," *Opt. Lett.* **39**, 5094 (2014).

[118] N. Matsumoto, T. Ando, T. Inoue, Y. Ohtake, N. Fukuchi, T. Hara, "Generation of high-quality higher-order Laguerre–Gaussian beams using liquid-crystal-on-silicon spatial light modulators," *J. Opt. Soc. Am. A*, **25**, 1642 (2008).

[119] M. Granata, C. Buy, R. Ward and M. Barsuglia, "Higher-Order Laguerre-Gauss Mode Generation and Interferometry for Gravitational Wave Detectors," *Phys. Rev. Lett.* **105**, 231102 (2010).

[120] G. B. Arfken, H. J.Weber, *Mathematical Methods for Physicists*. (Sixth edition. Elsevier Academic Press 2005), chapter 2.

[121] G. Gbur, *Mathematical Methods for Optical Sciences* (Cambridge University Press, 2011), p. 633-655.

[122] S. Zhang, J. Jin, *Computation of special functions*, (John Wiley and Sons, CRC Press, Taylor and Francis Group, 1996).

[123] J. Mendoza-Hernández, M. L. Arroyo Carrasco, M. D. Iturbe Castillo, S. Chávez-Cerda, "Laguerre-Gauss beasm vs Bessel beams showdown: peer comparison," *Opt. Lett.* **40**, 3739 (2015).

[124] D. Aguirre-Olivas, G. Mellado-Villaseñor, V. Arrizón, S. Chávez-Cerda, "Self-healing for Hermite-Gauss and Ince-Gauss beams," *Proc. SPIE 9581. Laser Beam Sahping XVI.* 958105 (2015).

[125] A. Yariv, P. Yeh *Optical Waves in Crystals*, Wiley Intersciencie. Third edition (2003)

[126] Properties of the LC 2002, Spatial light modulator operating instruction. Holoeye Pioneers in Photonic Technology.

Artículos y resumen en extenso

- **Demonstration of Optical Beams with Orbital Angular Momentum Satisfying Kepler's second law** Job Mendoza-Hernández, M. Luis Arroyo Carrasco, Jixiong Pu, M. David Iturbe Castillo, and Sabino Chávez-Cerda. Optica. **0000**, 0000 (2016)

- **Laguerre-Gauss beams versus Bessel beams showdown: peer comparison** Job Mendoza-Hernández, M. Luis Arroyo Carrasco, M. David Iturbe Castillo, and Sabino Chávez-Cerda. Opt. Lett. **40**, 3739 (2015)

- **New asymmetric propagation invariant beams obtained by amplitude and phase modulation in frequency space** Job Mendoza-Hernández, M. Luis Arroyo Carrasco, M. Maribel Méndez Otero, Sabino Chávez-Cerda, and M. David Iturbe Castillo. J. Mod. Opt. **61**, S46 (2014)

- **Intensidad en eje de una haz invariante en propagación**. Job Mendoza Hernández, M. Luis Arroyo Carrasco, M. Maribel Méndez Otero, Sabino Chávez Cerda, M. David Iturbe Castillo. Resumen en extenso. XXV Reunión anual de óptica. (2012)

Presentaciones en congresos y reuniones

- **Haces Laguerre y Hermite-Gauss: origen de su estructura** Job Mendoza-Hernández, M. Luis Arroyo Carrasco, M. David Iturbe Castillo y Sabino Chávez-Cerda. Primer congreso internacional; Luz, Ciencia y Arte (I-CILCA). Puebla, Puebla. Del 9 al 13 Noviembre de 2015

- **Laguerre-Gauss and Bessel beams, a proper comparison** Job Mendoza-Hernández, M. Luis Arroyo Carrasco, M. David Iturbe Castillo y Sabino Chávez-Cerda. Light in Science, Light in Life (LiSci). Tequisquiapan, Queretaro. Del 26 al 30 Octubre de 2015

- **Complete conical wave description for the transverse structure of Laguerre-Gauss beams with orbital angular momentum** Job Mendoza-Hernández, Alfonso I. Jaimes-Nájera, M. David Iturbe Castillo y Sabino Chávez-Cerda. International Conference on Optical Angular Momentum (ICOAM). New York. EUA. Del 4 al 7 de agosto de 2015

- **Transverse linear momentum in optical beams with orbital angular momentum**. Job Mendoza Hernández, M. Luis Arroyo Carrasco, M. Maribel Méndez Otero, M. David Iturbe Castillo y Sabino Chávez Cerda. European Optical Society Annual Meeting (EOSAM). Berlin, Alemania. Del 15 al 19 septiembre de 2014

- **Self-Healing of Airy beams**. Job Mendoza Hernández, M. Luis Arroyo Carrasco, M. Maribel Méndez Otero, M. David Iturbe Castillo y Sabino Chávez Cerda. Latin America Optics and Phonics (LAOP) Workshop. Cancun, Quintana Roo. Del 10 al 16 de noviembre de 2014.

- **Self-Healing of beams with angular momentum**. Job Mendoza Hernández, M. Luis Arroyo Carrasco, M. Maribel Méndez Otero, M. David Iturbe Castillo y Sabino Chávez Cerda. The Frontiers in Optics/ Laser Science XXIX, APS/DLS 29th Annual meeting. Orlando, Florida, EUA. Del 6 al 10 de octubre de 2013.

- **Self-Healing of propagation invariant caustic beams**. Job Mendoza Hernández, M. Luis Arroyo Carrasco, M. Maribel Méndez Otero, M. David Iturbe Castillo y Sabino Chávez Cerda. Mexican Optics and Photonics Meeting (MOPM). Ensenada, Baja California. Del 4 al 6 de septiembre de 2013.

- **Intensidad en eje de una haz invariante en propagación**. Job Mendoza Hernández, M. Luis Arroyo Carrasco, M. Maribel Méndez Otero, M. David Iturbe Castillo y Sabino Chávez Cerda. LV Congreso Nacional de Física. Poster. Morelia, Michoacan. Del 8 al 12 de septiembre de 2012. XXV Reunión Anual de Óptica (RAO). Sesión Simulatanea. Morelia, Michoacan. 12 de septiembre de 2012.