



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Interferometría de corrimiento de fase generalizado de
autocalibración mediante el Método de la Distancia Euclídea

Tesis presentada al

Posgrado en Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Doctor en Ciencias (Física Aplicada)

por

M.C. Lara Cortés Francisco Alejandro

asesorado por

Dr. Cruz Meneses Fabián

Puebla Pue.
8 de Junio del 2016



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Interferometría de corrimiento de fase generalizado de
autocalibración mediante el Método de la Distancia Euclídea

Tesis presentada al

Posgrado en Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Doctor en Ciencias (Física Aplicada)

por

M.C. Lara Cortés Francisco Alejandro

asesorado por

Dr. Cruz Meneses Fabián

Puebla Pue.
8 de Junio del 2016

Título: Interferometría de corrimiento de fase generalizado de autocalibración mediante el Método de la Distancia Euclídea
Estudiante: M.C. LARA CORTÉS FRANCISCO ALEJANDRO

JURADO

Dr. Carlos Robledo
Sánchez
(Presidente)

Dra. Ma. Rosario Pastrana
Sánchez
(Secretario)

Dra. Rosibel Carrada
Legaria
(Vocal)

Dr. Jorge Castro Ramos
(Vocal Externo)

Dr. Tonatiuh Saucedo
Anaya
(Vocal Externo)

Dr. Antonio Barcelata
Pinzon
(Suplente)

(Vocal)

Dr. Cruz Meneses Fabián
Asesor

Índice general

Índice general	III
1. Introducción	3
1.1. Introducción	3
1.1.1. Planteamiento del problema	5
1.1.2. Objetivo General	5
1.1.3. Objetivos específicos	5
1.1.4. Hipótesis	6
1.1.5. Contexto del trabajo	6
1.1.6. Descripción de la tesis	7
2. Antecedentes	9
2.1. Interferometría	9
2.1.1. Diferencia de Fase	13
2.2. Algoritmos de extracción de fase	16
2.2.1. Algoritmos basados en la transformada de Fourier	16
2.2.2. Algoritmos de Corrimiento de fase	18
2.2.3. Algoritmos de AutoCalibración	20
2.2.4. Extracción de fase utilizando Mínimos Cuadrados	23
2.2.5. Algoritmo de Corrimiento de Fase Generalizado de Autocalibración	24
2.2.6. Métodos de extracción basados en las figuras de Lissajous	26
2.3. Modelo Matemático de Elipses.	29
2.4. Mínimos Cuadrados	34
2.5. Distancia Euclidiana	36
3. Método de la Distancia Euclidiana	37
3.1. Desarrollo	37
3.2. Simulación	43
3.2.1. Unidimensional	43
3.2.2. Bidimensional	51
3.3. Evaluación de Patrones experimentales	53
3.3.1. Evaluación de interferogramas con igual luz de fondo y luz de modulación por el método <i>ED</i>	53
3.3.2. Evaluación de interferogramas secundarios con el método <i>ED</i>	55

3.3.3. Evaluación de patrones normalizados por el método de <i>ED</i> comparando con <i>PSI</i> de tres pasos	57
3.3.4. Análisis de error del método <i>ED</i> al implementarse sobre los patrones secundarios I_{01} , I_{12}	61
3.3.5. Evaluación de patrones experimentales	70
4. Conclusiones	73
Bibliografía	75

Resumen

Se presenta una técnica de reconstrucción de fase que mejora la precisión de la medición bajo ciertas condiciones conocidas y controladas, lo cual es deducido a través de un análisis de error comparando la nueva técnica propuesta y el algoritmo de corrimiento de fase de tres pasos. El método propuesto está en la categoría de los algoritmos de interferometría de corrimiento de fase de autocalibración y tiene como base tres conceptos matemáticos básicos y a su vez importantes, la parametrización, el ajuste de datos a una curva y la distancia Euclídea. Esta última herramienta matemática va a generar una nueva forma de reconstruir la fase completamente diferente a los algoritmos que utilizan la función tangente. Como paso final el algoritmo se aplica sobre interferogramas experimentales corroborando que logra dar resultados confiables para seguir trabajando en la mejora del algoritmo.

1

Introducción

1.1. Introducción

La interferometría de corrimiento de fase (*PSI*) es un método capaz de obtener la fase deseada mediante resolver un sistema de ecuaciones formado por tres o más interferogramas desplazados en corrimientos de fase conocidos igualmente espaciados [3, 4]. Los intentos de llevar a cabo estos corrimientos experimentales han requerido la cuidadosa y exhaustiva calibración de los desplazamientos de fase, demandando alto costo, mucho esfuerzo y trabajo duro, además de otras consideraciones. De las características de *PSI* tal como no ser invasiva, de no contacto, proveyendo un campo completo de observación, y su alta aproximación dada en fracciones de la longitud de onda, ha sido sucesivamente empleada en muchos campos de la ciencia y tecnología, tal como Física, Astronomía, Biología, Química, Medicina, Mecánica, Metrología, Microscopia, Holografía, además de muchas otras. Esto ha sido empleado para medir el índice de refracción en medios transparentes incluyendo gases, líquidos, sólidos y plasmas, y además, para medir viscosidad, densidad, difusión, temperatura, homogeneidad, pureza, etc.; también el *PSI* ha sido usado para medir desplazamiento angular y lineal a muy cotas distancias, y además estimar grosores, rugosidad, topografía, modos de vibración en materiales, y muchas otras mediciones [8, 9]. Bruning et al [3] propuso en 1974 el uso de un transductor piezoeléctrico (*PZT*) como un desplazador de fase para crear corrimiento y para realizar por primera vez el método *PSI*. Después de él muchas otras técnicas experimentales para lograr un desplazamiento de fase fueron propuestas, incluyendo polarización [10], rejillas [11, 12], moduladores espaciales de luz [13] por desplazamiento lateral de la fuente de luz [14], y recientemente con filtros de amplitud [15–17] por aplicar la teoría de modulación de amplitud fuera de fase en cuadratura (*QAM*) [18] y no cuadratura *NQAM* [19].

No obstante, a pesar de los grandes esfuerzos para desarrollar la detección sincrónica de interferogramas como es requerido por el método *PSI*, las condiciones deseadas no son exactas, debido a la inhomogeneidad en el desplazamiento de fase de los materiales, y otras características tales como su respuesta no lineal, histéresis, y su dependencia de la temperatura y por defectos de fabricación, además de otras condiciones fuera de los desplazamientos de fase que forman parte de la configuración experimental tales como vibraciones metálicas, turbulencia atmosférica, gradientes de temperatura, inestabilidad de las fuentes de luz, no linealidad en el detector, y defectos en el uso de las componentes

1. INTRODUCCIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

ópticas. Las características intrínsecas de los desplazamientos de fase y las innatas fluctuaciones en la configuración experimental han introduciendo variaciones indeseables no solo en el corrimiento de fase sino también en la luz de fondo e iluminación de los interferogramas. Por esta razón muchos estudios para estimar la incertidumbre en la medición de objetos de fase han sido ampliamente desarrollados por Schreiber [20], Hariharan [21], Schmit y Creath [22], y otros investigadores. Una primera alternativa a la mejora de las desventajas en *PSI* fue proponer un algoritmo capaz de demodular la fase de los interferogramas con corrimiento de fase desigual, que es una técnica de detección asincrónica de interferogramas, nombrado como interferometría de corrimiento de fase generalizado (*GPSI*). Sin embargo estos pasos deben ser todavía conocidos, implicando calibración de los corrimientos de fase. Una nueva alternativa emerge para estimar los corrimientos de fase desconocidos en los interferogramas, estos son introducidos generalmente con una mala calibración en los corrimientos, nombrado está propuesta como algoritmos de corrimientos de fase de autocalibración. En 1982 Morgan [23], y en 1984 Grievenkamp [24] presentaron una propuesta basada en el método de mínimos cuadrados, y después de muchas interesantes propuestas que combinan *GPSI* con métodos de autocalibración como es clasificado por Patit et al [35] fueron presentados basados en tales conceptos como la transformada de Fourier [25], propiedades estadísticas [31, 32], ajuste a curvas elípticas [26, 27, 36, 37], métodos iterativos [28], espacio temporales [29], y optimización [30]. El merito de estos métodos esta en como calcular en muchos de los casos los corrimientos de los interferogramas y después calcular el objeto de fase por aplicar algunos algoritmos de corrimiento de fase *PSA* basados en *PSI* o *GPSI*. Asumiendo una detección sincrónica el caso más simple fue propuesto por Carré [39] en 1966, y un análisis de incertidumbre tal como un amplio estado de arte fue presentado por Kemaio et al [40], Novak and Miks [41], Hack [42], Rastogi y Hack [43], y en las referencias citadas aquí. La primera propuesta para autocalibración con detección asincronica fue resuelta por el uso de métodos iterativos [44, 45] demandando largos tiempos de cálculo de cómputo al procesar solo unas pocas muestras o con muchas pero con poca resolución. Métodos no iterativos fueron también propuestos reduciendo considerablemente el tiempo de computo permitiendo muchas muestras de alta resolución y con mejor aproximación en la demodulación de fase. En 1990 Freischlad, y Koliopoulos [46] presentaron por primera vez esta idea, seguidos por Larkin y Oreb [47], Schmit y Creath [22], y finalmente este método fue generado por Servin et al [48, 49], Mosiño et al [50, 51], y Tellez et al [52]. Básicamente, la transformada de Fourier fue usada como una principal herramienta para desarrollar esta aproximación. Sin embargo otras transformaciones integrales han sido usadas tal como la transformada *wavelet* [53], transformada *S* [54], y transformada *Z* usada por Surrel en 1996 [55] para introducir la idea de un polinomio característico. Todos los métodos arriba mencionados incluyendo *PSI*, *GPSI*, y autocalibración pueden clasificarse bajo los algoritmos de corrimiento de fase, los cuales tienen como mínimo dos características comunes tal como la uniformidad espacial o desplazamiento de fase homogéneo (corrimiento de fase), y el cálculo de la fase vía la función tangente.

En este tema de tesis buscamos una nueva forma de evaluar interferogramas con la finalidad de reconstruir la información de fase contenida dentro de la imagen que representa la interferencia de dos campos, hay que mencionar que se han realizado arduos trabajos para atacar este problema desarrollándose muchas técnicas con una alta formalidad física y matemática de ahí la importancia de la fase que se relaciona con las propiedades físicas

de un objeto de estudio por el cual pasa un frente de onda electromagnético para el cual el objeto de prueba es transparente, en otras palabras el frente de onda atraviesa el objeto y la estructura del frente de onda resultante se modificará dependiendo de las propiedades físicas de dicho material de estudio.

El objetivo de este trabajo es desarrollar una técnica de extracción de fase $\phi(x, y)$ que no utiliza la función tangente, basándonos en considerar patrones de interferencia con un paso de fase desconocido y arbitrario y que se comportan como las ecuaciones paramétricas de la elipse como fue considerado previamente por Farrell donde necesitamos como mínimo dos interferogramas corridos en fase en el rango de $[0, \pi]$ y representando cada interferograma un perfil de intensidad, formando pares ordenados de las intensidades y graficando observamos que tienen a formar una elipse por lo que proponemos encontrar las ecuaciones paramétricas que mejor representan a estos datos.

Finalmente queremos comprobar que se puede extraer la información de la fase al medir la distancia Euclidiana entre los puntos de intensidad y la curva que representa el mejor ajuste a estos puntos, asignando el valor de la fase que contiene la curva paramétrica que representa el mejor ajuste al punto de intensidad más cercano a esta, realizando este proceso para cada punto de intensidad que es formado a partir de los perfiles de intensidad extraídos de los patrones de interferencia pensamos que es posible extraer la información de la fase.

1.1.1. Planteamiento del problema

Como se ha mencionado en la introducción, el desarrollo de nuevos algoritmos de extracción de fase es un problema atacado por un gran número de investigadores alrededor del mundo por más de medio siglo debido a las aportaciones que han tenido en las mediciones de las propiedades físicas de diferentes tipos de sustancias y materiales que tienen repercusiones en diversas aplicaciones industriales, médicas y en el desarrollo de la investigación en las áreas de ciencias naturales y exactas.

Casi todas las técnicas de extracción de fase llegan a depender de la función tangente de ahí la necesidad de desarrollar nuevas técnicas que nos den otro enfoque y mejoren la precisión de las mediciones. De ahí que se propone una técnica de extracción basado en conceptos matemáticos como la parametrización, ajuste a una curva y la distancia Euclidiana que son herramientas utilizadas en muchas áreas de las ciencias naturales y exactas por ser precisas y eficaces para resolver problemas de gran complejidad.

1.1.2. Objetivo General

Crear una nueva técnica de extracción de fase que evalúe patrones de interferencia con corrimiento arbitrarios y desconocidos que mejore la medición de la fase comparado con los algoritmos de extracción de fase *PSI*, *GPSI*, que se base en las propiedades matemáticas de la elipse y la distancia euclidiana evitando el uso de la función tangente.

1.1.3. Objetivos específicos

- Modelar un par de perfiles de intensidades extraídos de dos interferogramas corridos en un valor de fase desconocido y arbitrario en el rango de $[0, \pi]$, a una elipse.

- Utilizando mínimos cuadrados encontrar las constantes para expresar las ecuaciones paramétricas de la elipse que mejor modelen los perfiles de intensidad.

- Desarrollar un algoritmo de extracción de fase con el concepto matemático de la distancia Euclidiana, midiendo la distancia entre los puntos formados al crear pares ordenados de los perfiles de intensidad corridos en fase, a la curva de la elipse obtenida del ajuste. Asignando el valor de fase que tiene un punto sobre la elipse obtenida del ajuste al punto más cercano formado de los perfiles de intensidad.

1.1.4. Hipótesis

Partiendo de los conceptos y técnicas matemáticas como ajuste a mínimos cuadrados, parametrización y la distancia Euclidiana, deducimos que es posible desarrollar un algoritmo de extracción de fase basándonos en estas ideas. Al observar que las ecuaciones que representan a los interferogramas tienen la forma matemática de las ecuaciones paramétricas de una elipse. También al agrupar en pares ordenados las intensidades de un perfil de los interferogramas generamos puntos de intensidad dispersos en un plano tal que se acercan a describir una elipse, y de la teoría para encontrar una curva a través de un ajuste de un conjunto de puntos, sabemos que se puede ajustar datos dispersos a diferentes tipos de curvas cónicas dentro de las que está incluida la elipse. Finalmente al realizar el ajuste se parametrizan las ecuaciones que forman la elipse, por lo que todos los puntos sobre la elipse tienen asignado un valor único de esta fase paramétrica, utilizando esta información asignamos la fase paramétrica que tiene un punto sobre la elipse a un punto formado de los perfiles de intensidades tal que esto se cumple al encontrar la distancia más corta entre ambos a saber la distancia Euclidiana, reconstruyendo la fase aplicando el mismo proceso para cada punto formado de los perfiles de intensidad.

1.1.5. Contexto del trabajo

El trabajo realizado en esta tesis está encaminado al desarrollo y mejora de la Óptica con especial atención a la interferometría en el desarrollo de mejores algoritmos de extracción de fase. Donde la fase tiene aplicaciones en la reconstrucción de un campo para la holografía, conocer las aberraciones en una componente óptica como una lente, para reconstruir objetos por proyección de franjas, en la tomografía para generar imágenes volumétricas internas de un objeto, donde todos estos problemas son atacados por el Cuerpo Académico de Óptica de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y por tal motivo debe considerarse que la investigación realizada en esta tesis es necesaria.

El presente trabajo se desarrolló en el Laboratorio de Luz Estructurada (LLE) de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. También, la presente es parte de un proyecto de investigación interno patrocinado por Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, con número de referencia MEFC-EXA16-I, y también este trabajo es parte de un proyecto con patrocinio externo por parte de SEP/CONACYT bajo la convocatoria de Investigación Científica Básica, con número de convenio: 257853.

1.1.6. Descripción de la tesis

En este apartado brevemente se mencionan los temas que se abordarán en esta tesis.

- El primer capítulo Introducción se enfoca en adentrarnos al problema de desarrollar algoritmos de extracción de fase necesarios en la interferometría desde un punto de vista histórico.
- En el segundo capítulo Antecedentes se describen algunos tipos de algoritmos de extracción de fase y se describen los conceptos matemáticos en los cuales se basa el algoritmo de extracción de fase que se propone en esta tesis.
- Con el tercer capítulo Método de la distancia Euclidiana se desarrolla la teoría, y se evalúan patrones experimentales con diferentes variaciones del algoritmo, además se hizo un estudio del ruido comparando el bias y la desviación estándar del método de la distancia Euclidiana (ED) contra la técnica de corrimiento de fase (PSI).
- El último capítulo es de conclusiones y trabajo a futuro.

2

Antecedentes

2.1. Interferometría

El fenómeno de interferencia [1], se produce cuando dos o más ondas se superponen en un punto del espacio y la onda resultante es igual a la suma de las perturbaciones constitutivas individuales.

Así la interferencia óptica equivale a la interacción de dos o más ondas de luz que producen una irradiancia resultante que se desvía de la suma de las irradiancias componentes y es definida como la energía medida por unidad de área por unidad de tiempo (medida para la potencia óptica de las fuentes).

La intensidad I de la luz ha sido definida como el promedio en el tiempo de cantidad de energía la cual cruza en unidad de tiempo una unidad de area perpendicular a la dirección de flujo de la energía. Para una onda plana,

$$I = v \langle w \rangle = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \langle E^2 \rangle = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \langle H^2 \rangle, \quad (2.1)$$

así comparando intensidades en el mismo medio podemos tomar a $\langle E^2 \rangle$ como una medida de la intensidad considerando campos cuasimonocromaticos definimos el campo de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \left\{ \vec{A}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \right\} = \frac{1}{2} \left[\vec{A}(\vec{r}) e^{-i\omega t} + \vec{A}^*(\vec{r}) e^{i\omega t} \right]. \quad (2.2)$$

Aquí \vec{A} es un vector complejo con componentes cartesianas rectangulares,

$$A_x = a_1(\vec{r}) e^{i\phi_{A1}(\vec{r})}, \quad A_y = a_2(\vec{r}) e^{i\phi_{A2}(\vec{r})}, \quad A_z = a_3(\vec{r}) e^{i\phi_{A3}(\vec{r})}, \quad (2.3)$$

donde a_j y ϕ_{Aj} ($j = 1, 2, 3$) son funciones reales. Para una onda plana homogenea las amplitudes a_j son constantes, mientras que las funciones de fase ϕ_{Aj} son de la forma $\phi_{Aj}(\vec{r}) = \vec{k} \cdot \vec{r} - \alpha_{Aj}$, donde \vec{k} es el vector de propagación y las α_{Aj} son las constantes de fase las cuales especifican el estado de polarización.

$$\vec{E}^2 = \frac{1}{4} \left(\vec{A}^2 e^{-2i\omega t} + \vec{A}^* e^{2i\omega t} + 2\vec{A} \cdot \vec{A}^* \right). \quad (2.4)$$

2. ANTECEDENTES

2.1. INTERFEROMETRÍA

Mientras, tomando el promedio temporal sobre un intervalo muy grande comparado con el periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$,

$$\langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{A}^* = \frac{1}{2} (|A_x|^2 + |A_y|^2 + |A_z|^2) = \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2). \quad (2.5)$$

Suponga ahora dos ondas monocromáticas \vec{E}_1 y \vec{E}_2 están superpuestas en algún punto P . El campo total en P es

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad (2.6)$$

así que

$$\vec{E}^2 = \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1 \vec{E}_2, \quad (2.7)$$

donde la intensidad final en P es

$$I = I_1 + I_2 + J_{12}, \quad (2.8)$$

donde

$$I_1 = \langle \vec{E}_1^2 \rangle, \quad I_2 = \langle \vec{E}_2^2 \rangle, \quad (2.9)$$

son las intensidades de las dos ondas, y

$$J_{12} = 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle, \quad (2.10)$$

es el termino de interferencia. Sea \vec{A} y \vec{B} las amplitudes complejas de las dos ondas donde

$$A_x = a_1 e^{i\phi_{A1}}, \dots, \quad B_x = b_1 e^{i\phi_{B1}}, \dots \quad (2.11)$$

Las fases (reales) ϕ_{A_j} y ϕ_{B_j} de las dos ondas serían en general diferentes, donde las ondas habrán viajado hasta P por diferentes caminos, pero las condiciones experimentales son tales que la misma diferencia de fase ϕ es introducida entre las correspondientes componentes, tendremos:

$$\phi_{A1} - \phi_{B1} = \phi_{A2} - \phi_{B2} = \phi_{A3} - \phi_{B3} = \phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} OPD, \quad (2.12)$$

donde OPD es la diferencia entre el camino óptico de las dos ondas de sus respectivas fuentes en común P , y λ_0 es la longitud de onda en el vacío. En términos de \vec{A} y \vec{B} ,

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 &= \frac{1}{4} \left(\vec{A} e^{-i\omega t} + \vec{A}^* e^{i\omega t} \right) \cdot \left(\vec{B} e^{-i\omega t} + \vec{B}^* e^{i\omega t} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\vec{A} \cdot \vec{B} e^{-2i\omega t} + \vec{A}^* \cdot \vec{B}^* e^{2i\omega t} + \vec{A} \cdot \vec{B}^* + \vec{A}^* \cdot \vec{B} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$J_{12} = 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \frac{1}{2} \left(\vec{A} \cdot \vec{B}^* + \vec{A}^* \cdot \vec{B} \right)$$

2. ANTECEDENTES

2.1. INTERFEROMETRÍA

$$\begin{aligned}
 &= a_1 b_1 \cos(\phi_{A1} - \phi_{B1}) + a_2 b_2 \cos(\phi_{A2} - \phi_{B2}) + a_3 b_3 \cos(\phi_{A3} - \phi_{B3}) \\
 &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \cos \phi
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Esta expresión muestra la dependencia de la interferencia en términos de las amplitudes de las ondas componentes y en la diferencia de fase de las dos ondas. Ahora se considera la distribución de intensidades resultante de la superposición de dos ondas las cuales se están propagándose en la dirección z , sea el vector de campo eléctrico de la primera onda estando en el plano xz y de la segunda onda en el plano yz . Entonces,

$$a_2 = 0, \quad b_1 = 0,$$

y de la Ec.(2.14) el término de interferencia es

$$J_{12} = a_3 b_3 \cos \phi. \tag{2.15}$$

Debemos concluir que $a_3 = b_3 = 0$, es decir que el vector de campo eléctrico de las ondas deben ser perpendiculares a la dirección z . De aquí las ondas de luz deben transversales, en acuerdo con la deducción de la teoría electromagnética.

Consideramos la distribución de intensidades resultante de la superposición de dos ondas las cuales están propagándose en la dirección z , y son linealmente polarizadas con sus vectores \vec{E} en la dirección x . Entonces

$$a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = 0,$$

así que usando (2.5), (2.9) y (2.14),

$$I_1 = \frac{1}{2} a_1^2, \quad I_2 = \frac{1}{2} b_1^2, \quad J_{12} = a_1 b_1 \cos \phi = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi. \tag{2.16}$$

La total intensidad es entonces dada por Ec.(2.17) como,

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi. \tag{2.17}$$

Evidentemente estaría en un máximo de intensidad,

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \quad \text{cuando} \quad |\phi| = 0, 2\pi, 4\pi, \dots, \tag{2.18}$$

y mínimo de intensidad

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \quad \text{cuando} \quad |\phi| = \pi, 3\pi, \dots, \tag{2.19}$$

En el caso especial cuando $I_1 = I_2$, Ec.(2.17) se reduce a

$$I = 2I_1(1 + \cos \phi) = 4I_1 \cos^2 \frac{\phi}{2}, \tag{2.20}$$

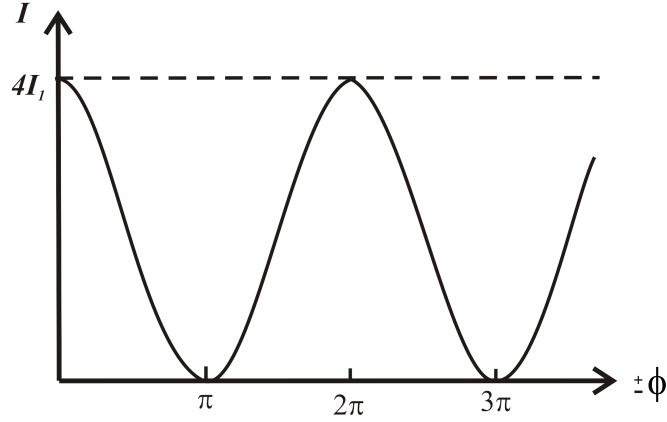


Figura 2.1: Interferencia de dos haces con igual Intensidad: variación de intensidad con diferencia de fase.

y la intensidad varia entre un máximo valor $I_{max} = 4I_1$, y un mínimo valor $I_{min} = 0$ Fig.(2.1).

La misma fórmula son igualmente validas para luz no polarizada ya que, un haz de luz natural puede ser representado como una superposición de dos haces linealmente polarizados incoherentes en ángulos derechos cada uno del otro (decimos en la dirección x y y). La interferencia entre las dos componentes puede ser considerada separadamente, y la intensidad es obtenida por la suma de las intensidades separadas. Donde ϕ tiene el mismo valor en cada caso.

Para un caso particular consideremos la interferencia de dos ondas, cuya intensidad se puede expresar mediante:

$$I = I_r + I_o + 2\sqrt{I_r I_o} \cos(\phi(x, y)). \quad (2.21)$$

donde $I_r = |\vec{E}_r|^2$ es la intensidad de la onda de referencia, $I_o = |\vec{E}_o|^2$ es la intensidad de la onda de prueba y $\phi(x, y)$ es la fase resultante de la diferencia de fase de las ondas. La Ec.(2.21) se puede reescribir de manera más compacta como

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y)\cos(\phi(x, y) + \phi_0). \quad (2.22)$$

tal que $a(x, y) = I_r + I_o$ es conocida como luz de fondo, $b(x, y) = 2\sqrt{I_r I_o}$ conocida como luz de modulación y la fase $\phi(x, y)$ está relacionada con el objeto de prueba de un interferómetro, y ϕ_0 la fase adicional introducida para poder aplicar las técnicas de extracción de fase como el método de corrimiento de fase o el método de la transformada de Fourier, entre otros [3, 56].

El término de interferencia se atribuye a $2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi(x, y))$ que se obtiene cuando las fuentes son coherentes espacialmente y como resultado se obtienen franjas de interferencia brillantes y oscuras, cuya separación entre dos franjas brillantes o dos franjas oscuras está relacionada con el periodo espacial de la onda de luz empleada.

Los dispositivos diseñados para recrear estos patrones se llaman interferómetros y se dividen en divisores de frente de onda y divisores de amplitud, en nuestro caso simularemos una patrón de interferencia sin importar el tipo de interferómetro empleado.

2.1.1. Diferencia de Fase

La diferencia de fase esta relacionado a la diferencia de la longitud de camino óptico entre las fuentes y el punto de observación de las dos ondas. Esta es la diferencia de camino óptico (*OPD*):

$$OPD = OPL_1 - OPL_2 = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)\Delta\phi, \quad (2.23)$$

o,

$$\Delta\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)OPD. \quad (2.24)$$

La diferencia de fase cambia por 2π cada vez *OPD* incrementa por una longitud de onda. La *OPD* es por lo tanto constante a lo largo de una franja.

La interferencia constructiva ocurre cuando las dos ondas están en fase, y una franja brillante o máximo en el patrón de intensidad resulta. Esto corresponde a una diferencia de fase de un número entero de 2π o un *OPD* que es un múltiplo de la longitud de onda. Un franja oscura o mínimo en el patrón de intensidad resulta de interferencia destructiva cuando las dos ondas están fuera de fase por π o la *OPD* es un número impar de media longitud de onda.

Para condiciones entre estos valores, un valor intermedio de la intensidad resulta. Donde ambos la *OPD* y la diferencia de fase incrementa con el entero m , el valor absoluto de m es llamado el orden de interferencia. Esta es su inherente precisión que hacen de la interferometría una valuable herramienta metrológica. La longitud de onda de la luz es usada como la unidad de medición. Los interferómetros pueden ser usados para medir pequeñas variaciones en distancia, índice, o longitud de onda.

Cuando dos ondas monocromáticas están interfiriendo, la franjas de interferencia no solo existen en el plano de observación, sino a travez de todo el espacio. En muchos casos, la observación de la interferencia es confinada a un plano, y este plano es usualmente asumido a ser perpendicular a el eje z .

Como nosotros nos movemos de una franja brillante a una adyacente franja brillante, la diferencia de fase cambia por 2π . Cada periodo de franja corresponde a un cambio en la *OPD* de una sola longitud de onda.

Interferencia de dos haces

Hay dos métodos generales de obtener haces de un solo haz de luz, y este proporciona una base para clasificar los arreglos usados para producir interferencia. En uno el haz es dividido al pasar a través de aperturas colocadas lado a lado. Este método, el cual es llamado división de frente de onda, es útil solo con fuentes suficientemente pequeñas. Alternativamente el haz es dividido en una o mas reflexiones parciales en la superficies, en cada una de las cuales parte de la luz es reflejada y parte es transmitida. Este método es llamado división de amplitud, este puede ser usado con fuentes extendidas, y además los efectos pueden ser de mayor intensidad que con división de frente de onda. En ambos casos, es conveniente considerar separadamente los efectos los cuales pueden resultar de la superposición de dos haces (interferencia de dos haces), y de los que resultan de la superposición de más de dos haces (interferencia de múltiples haces).

Interferómetro de División de Frente de Onda

Como un ejemplo de un interferómetro de división de frente de onda, se considera el más viejo de todos los experimentos inteferométricos debido a Thomas Young (1801). El frente de onda incidente es dividido al pasar a través de dos pequeños hoyos P_1 y P_2 en una pantalla S_1 . Los emergentes frentes de onda esféricos de P_1 y P_2 interferirán y el patrón resultante es observado en la pantalla S_2 . Esta es una analogía con el caso de dos fuentes puntuales en la Fig.(2.2) con el plano orientado a el plano yz .

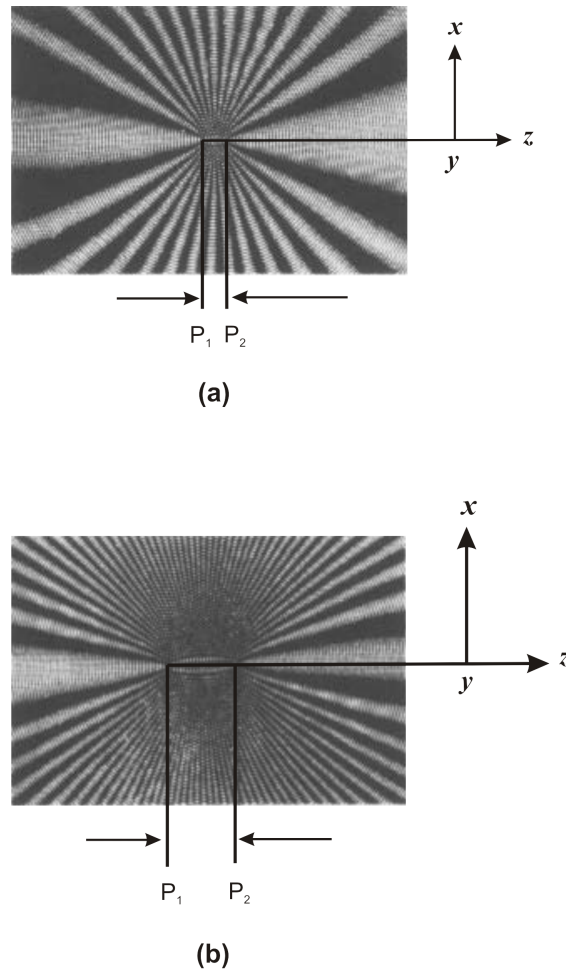


Figura 2.2: Interferencia de dos ondas esféricas.

La diferencia de longitud de camino geométrico s de la luz alcanzada en un punto arbitrario x en S_2 desde P_1 y P_2 es encontrado de la Fig.(2.3). Donde la distancia z entre S_1 y S_2 es mucho más grande que la distancia D entre P_1 y P_2 , nosotros tenemos, una buena aproximación,

$$\frac{s}{D} = \frac{x}{z}, \quad s = \frac{D}{z}x. \tag{2.25}$$

2. ANTECEDENTES
2.1. INTERFEROMETRÍA

La diferencia de fase se convierte por lo tanto,

$$\Delta\phi = \frac{2\phi}{\lambda}s = \frac{2\pi D}{\lambda z}x \quad (2.26)$$

el cual, introduciendo dentro en la expresión para la distribución de intensidad resultante, Ec.(2.27) da,

$$I(x) = 2I(1 + \cos(2\pi \frac{D}{\lambda z}x)). \quad (2.27)$$

Se obtienen franjas de interferencia paralelas a el eje y con período espacial $(\lambda z/D)$ el cual decrece como la distancia entre P_1 y P_2 incrementa. Aquí asumimos que las ondas de P_1 Y P_2 son completamente coherentes. Este es un caso ideal y se convierte más y más difícil conforme la distancia D entre P_1 y P_2 es incrementada. El contraste de las franjas de interferencia en S_2 es una medida de grado de coherencia.

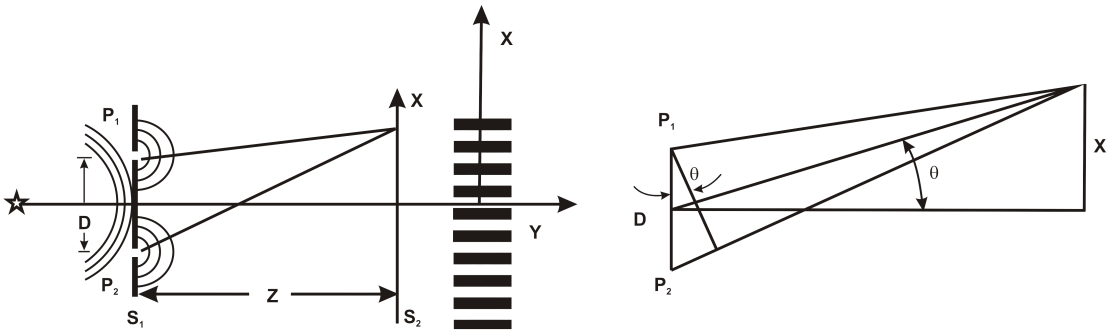


Figura 2.3: Interferómetro de Young.

División de Amplitud

El más conocido interferómetro de división de amplitud es el interferómetro de Michelson bosquejado Fig.(2.4). Aquí la amplitud de la luz del campo incidente es dividido por el divisor de haz BS la cual es parcialmente reflejada. Las ondas parcialmente reflejadas y transmitidas se propagan a los espejos M_1 y M_2 respectivamente, de donde estas se reflejan de regreso y recombinan para formar la distribución de interferencia en el detector D . La diferencia de longitud de camino entre las dos ondas parciales puede variar por el movimiento de uno de los espejos, es decir, M_2 , el cual debe ser montado en un objeto.

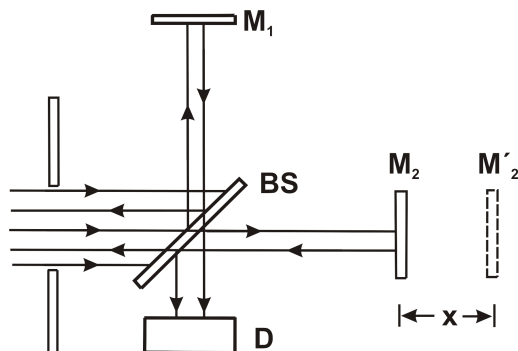


Figura 2.4: Interferómetro Michelson.

Un desplazamiento x de M_2 da una diferencia de longitud de camino de $2x$ y la diferencia de fase igual a $\Delta\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)2x$. Esta resulta en una distribución dada por,

$$I(x) = 2I\left(1 + \cos \frac{4\pi x}{\lambda}\right). \quad (2.28)$$

Como M_2 se mueve, su desplazamiento es medido contando el número de máximo de luz registrado por el detector. Por el conteo del número de máximos por unidad de tiempo, uno puede encontrar la velocidad del objeto. Otro tipos interferómetros de amplitud son mostrados en Fig.(2.5).

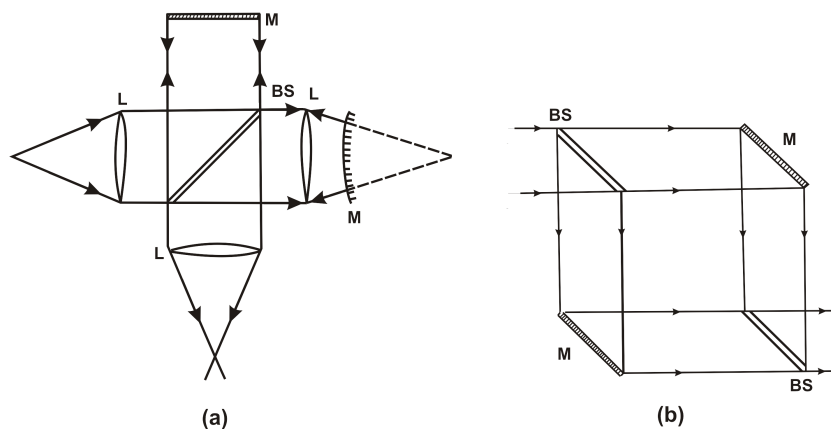


Figura 2.5: Ejemplos de Interferómetros de División de Amplitud (a) Twyman-Green, (b) Interferómetro Mach-Zehnder.

2.2. Algoritmos de extracción de fase

2.2.1. Algoritmos basados en la transformada de Fourier

Se puede reconstruir la fase partiendo de la información espacial y temporal contenida en el patrón de interferencia, por lo que se han desarrollado técnicas de extracción de fase, por una parte la técnicas espaciales las cuales han sido desarrolladas cuando las múltiples mediciones de fase son imprácticas: Por mencionar como la desarrollada por

2. ANTECEDENTES

2.2. ALGORITMOS DE EXTRACCIÓN DE FASE

Takeda a través de la transformada de Fourier, en la cual es necesario trabajar en el espacio de frecuencias y definir una función portadora espacial mediante una cuña de fase para calibrar la fase relativa entre las muestras. Generando patrones de franjas abiertas, rectas e igualmente espaciadas hay que tomar en cuenta que se necesita crear una cuña tal que introduzca una frecuencia portadora que haga que las franjas cerradas se puedan volver abiertas, de esta manera se deben tener diferentes cuñas de fase para diferentes patrones de interferencia, esto implica caracterizar la cuña de fase.

En la búsqueda de encontrar una técnica que reduzca el número de mediciones de interferogramas se creó una técnica de extracción de fase basado en la transformada de Fourier por Takeda [56] que solo necesita un interferograma con un término lineal de la variable espacial y una frecuencia portadora μ_0 .

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(2\pi\mu_0x + \phi(x, y)). \quad (2.29)$$

Una inclinación grande entre el frente de onda de referencia y el frente de onda evaluado producen franjas de frecuencia μ_0 , el cual es tratado como un patrón de frecuencia espacial. Asumimos que la inclinación es dirigida solo a lo largo del eje x . El método de análisis de Fourier se realiza en el dominio de la frecuencia espacial. Un patrón de interferencia con inclinación es descrito como:

$$I(x, y) = a(x, y) + c(x, y)e^{i2\pi\mu_0x} + c^*(x, y)e^{-i2\pi\mu_0x}, \quad (2.30)$$

donde

$$c(x, y) = \frac{b(x, y)}{2} e^{i\phi(x, y)}, \quad (2.31)$$

y el símbolo $*$ indica el complejo conjugado. Aplicando la propiedad de corrimiento en la frecuencia la transformada de Fourier en una dimensión de $I(x, y)$ produce.

$$\tilde{I}(\mu, y) = \tilde{a}(\mu, y) + \tilde{c}(\mu - \mu_0, y) + \tilde{c}^*(\mu + \mu_0, y), \quad (2.32)$$

donde μ es la coordenada de la frecuencia espacial y el símbolo \sim nos indica la transformada de Fourier. Esta función es trimodal con picos en $-\mu_0$, μ_0 y el origen como dibujado en la Fig.(2.6). La componente de este espectro centrado en μ_0 puede ser recobrado sin la portadora por un primer filtraje en la banda de frecuencias y entonces desplazamos el espectro aislado devuelta al origen. Esto nos da como resultado la función $\tilde{c}(\mu, y)$. Una transformada inversa de Fourier nos da $c(x, y)$. Se puede describir la tangente de la fase como:

$$\tan \phi(x, y) = \frac{Im [c(x, y)]}{Re [c(x, y)]}, \quad (2.33)$$

donde Re e Im se refieren a la parte real e imaginaria de la función $c(x, y)$.

La técnica de la transformada de Fourier ha generado una infinidad de algoritmos basados en estos conceptos con considerables mejoras ampliando la forma de los patrones que son posibles evaluar. La ventaja de estos algoritmos es que es posible extraer la información de fase de una sola captura de un patrón de interferencia ganando tiempo en el procesamiento a costa de una buena aproximación en la medición de la fase.

2. ANTECEDENTES

2.2. ALGORITMOS DE EXTRACCIÓN DE FASE

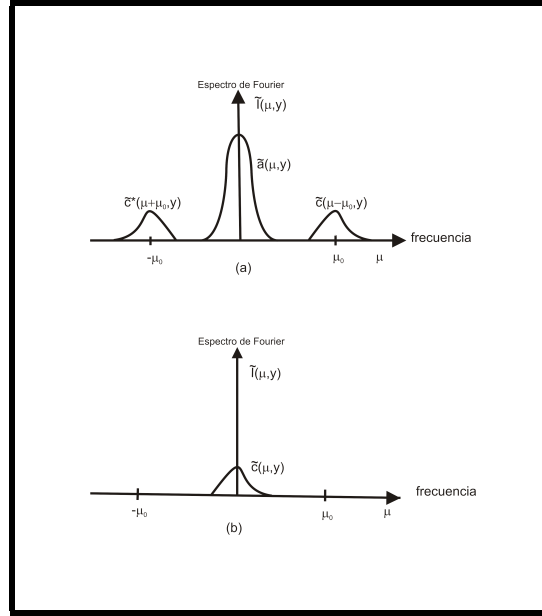


Figura 2.6: Análisis de franjas de Fourier:(a) el espectro del interferograma y (b) el espectro procesado

- Algunas desventajas son en los casos donde hay discontinuidad de los patrones de franjas, generando en el espacio de Fourier que los lóbulos se expandan en el dominio de frecuencias.
- El tamaño finito de la mascara espectral usada para aislar los lóbulos causa regiones de pérdida de información en el dominio espacial.
- La no monoticidad de la fase para franjas cerradas introduce ambigüedad en el signo de la fase lo cual se evita capturando dos patrones.

2.2.2. Algoritmos de Corrimiento de fase

Las investigaciones realizadas en el campo de la óptica para analizar la fase a partir de patrones de interferencia tuvo su repunte con las aportaciones realizadas por Brunning [3] introduciendo el uso del piezoeléctrico para crear corrimientos que consisten en modificar de manera muy precisa la diferencia de camino óptico de los haces que interfieren dentro de un arreglo interferométrico, encontrando una solución para medir la fase al resolver un sistema de tres ecuaciones lineales que es sabido tiene solución si el número de ecuaciones es mayor que el número de incógnitas donde las expresiones desconocidas son la función de fase $\phi(x, y)$, la luz de fondo $a(x, y) = A_r^2 + A_o^2$ y de modulación $b(x, y) = \sqrt{A_r A_o}$ y las cantidades conocidas son las intensidades I_n asociadas a los corrimientos también conocidos α_n .

$$I_n = a + b \cos(\phi + \alpha_n), \quad (2.34)$$

2. ANTECEDENTES

2.2. ALGORITMOS DE EXTRACCIÓN DE FASE

$$\alpha_n = \frac{2\pi n}{N}, \text{ donde } n = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1. \quad N \geq 3. \quad (2.35)$$

$$\tan \phi(x, y) = \frac{\sum I_n(x, y) \sin \alpha_n}{\sum I_n(x, y) \cos \alpha_n}. \quad (2.36)$$

Es una condición muy importante al momento de capturar patrones de interferencia que la visibilidad sea máxima,

$$v = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}. \quad (2.37)$$

Los algoritmos de corrimiento de fase necesitan un mínimo tres patrones de interferencia con corrimientos conocidos formando un sistema de ecuaciones donde las variables desconocidas son la luz de fondo, la luz de modulación y la fase del objeto de prueba. El proceso de medir la fase se realiza sobre todo patrón de interferencia generando un sistema de tres ecuaciones por cada píxel que conforma los interferogramas a evaluar lo cual hace a este método preciso con el inconveniente de calibrar muy bien los corrimientos, otra ventaja es que se puede mejorar la medición de la fase entre más muestras de interferogramas son registradas mediante el método de mínimos cuadrados. Entre sus desventajas está el tiempo invertido en calibrar el corrimiento que se quiere introducir en cada captura de un patrón de interferencia además que solo necesita que los corrimientos sean constantes.

En la práctica hay complicaciones al implementar con exactitud el corrimiento de fase que se propone teóricamente, debido a la calibración del piezoeléctrico y a la estabilidad del arreglo interferométrico que esta sujeta ha vibraciones sobre la superficie de trabajo, entre otros factores.

En su propuesta Brunning generaliza la medición de la fase al evaluar la captura de N patrones de interferencia con un número s de períodos registrados por la cámara, el realiza un análisis en que considera varias mediciones y promedia los resultados, de esta forma es posible compensar los errores asociados de las fluctuaciones del láser que genera bajas frecuencias aleatorias, el ruido asociado al detector que también introduce variaciones en la frecuencia, desviaciones asociadas al voltaje aplicado al piezoeléctrico, también las vibraciones mecánicas del sistema y factores ambientales.

En su arreglo experimental considera un interferómetro de Twyman- Green donde los frentes de onda ha interferir tienen la forma Ec.(2.38) y Ec.(2.39) donde co representa el camino óptico del haz que va del divisor de haz hasta el espejo de referencia cuya trayectoria será modificada por el piezoeléctrico y $w(x, y)$ representa la superficie a ser evaluada que estará montada en el brazo de prueba del interferómetro, al sumar los campos y calcular su magnitud obtenemos la expresión Ec.(2.40) que representa la irradiancia con $\phi(x, y) = 2kw(x, y)$ y $\alpha_n = 2kco(x, y)$.

$$W_1 = A_r \text{Exp}(i\alpha_n), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (2.38)$$

$$W_2 = A_o \text{Exp}[i\phi(x, y)], \quad (2.39)$$

$$I(x, y, \alpha) = (W_1 + W_2)(W_1 + W_2)^* = A_r^2 + A_o^2 + 2A_r A_o \cos[\phi(x, y) - \alpha_n]. \quad (2.40)$$

2. ANTECEDENTES

2.2. ALGORITMOS DE EXTRACCIÓN DE FASE

La forma de representar mejor el patrón de interferencia para cuando se realizan varias mediciones se representa en la Ec.(2.41),

$$I(x, y, \alpha) = a + b_c \cos \alpha + b_s \sin \alpha_n, \quad (2.41)$$

$$a = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} I(x, y, \alpha_n) = A_r^2 + A_o^2, \quad (2.42)$$

$$b_c = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} I(x, y, \alpha_n) \cos \alpha_n = 2A_r A_o \cos \phi(x, y), \quad (2.43)$$

$$b_s = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} I(x, y, \alpha_n) \sin \alpha_n = 2A_r A_o \sin \phi(x, y), \quad (2.44)$$

$$\phi(x, y) = \tan^{-1}(b_s/b_c) \quad \text{mod} \quad [2\pi], \quad (2.45)$$

$$\alpha = \alpha_n = 2k \frac{n \lambda}{N 2} \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2.46)$$

Como podemos observar al desarrollar el patrón de interferencia en series de Fourier observamos que representa una técnica de detección sincrónica ya que es posible sincronizar los corrimientos de fase y el tiempo de captura de los patrones. Un problema al realizar estas mediciones radica cuando hay una deriva o fluctuaciones de frecuencias que tienden a acercarse a los valores de la frecuencia portadora $\alpha = 2kco(t)$ durante el tiempo de muestreo, el cual es el tiempo necesario para mover el espejo de referencia $p\lambda/2$ o p periodos de la función $I(x, y, \alpha)$. Una forma de compensar estas mediciones es aleatorizando la medición.

El aleatorizar el orden de muestreo de los datos transforma una deriva con una fuerte componente cercana a la frecuencia portadora a unas componentes de frecuencias uniformemente distribuidas sobre un muy amplio espectro de frecuencias.

Una forma para calibrar la medición y minimizar el efecto de la deriva y otras fuentes de error es desarrollando los términos b_c y b_s de la serie de Fourier que representa a la intensidad Ecs.(2.43) y (2.44) que al graficarse en pares ordenados los puntos no forman una recta, se considera que hay deriva en la medición y debe volverse a repetirse la captura de nuevos patrones.

2.2.3. Algoritmos de AutoCalibración

Los métodos de interferometría de corrimiento de fase han tenido un uso muy extendido ya que han demostrado que entre mayor sea el número de interferogramas con un corrimiento conocido y constante es mejor la aproximación a la función de fase. Considerando que hay errores asociados a la traslación y estabilidad del arreglo, se han desarrollados algoritmos de autocalibración (SPSI) que toman en cuenta los siguientes factores: la dependencia espacial de las vibraciones, fluctuaciones de la intensidad temporal, turbulencias de aire, insensibilidad a un orden de desnivel de voltaje de un PZT con pendiente equivocada, variaciones no lineales de la potencia de un haz.

2. ANTECEDENTES

2.2. ALGORITMOS DE EXTRACCIÓN DE FASE

Los primeros algoritmos de corrimiento de fase no consideraban conocido el paso de fase como el propuesto por Carré [5] pero si necesitaba ser constante entre cada interferograma lo cual dio inicio a los primeros algoritmos de auto-calibración.

Sean los interferogramas donde

$$I_1(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x, y) - 3\alpha/2], \quad (2.47)$$

$$I_2(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x, y) - \alpha/2], \quad (2.48)$$

$$I_3(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x, y) + \alpha/2], \quad (2.49)$$

$$I_4(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x, y) + 3\alpha/2], \quad (2.50)$$

El paso de $\alpha(x, y)$ es obtenido de,

$$\alpha(x, y) = 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{3(I_2 - I_3) - (I_1 - I_4)}{I_2 - I_3 + (I_1 - I_4)}}, \quad (2.51)$$

y la fase es obtenido por

$$\phi(x, y) = \tan^{-1} \left(\tan(\alpha/2) \left[\frac{(I_1 - I_4) + (I_2 - I_3)}{(I_2 + I_3) - (I_1 + I_4)} \right] \right). \quad (2.52)$$

El algoritmo esta basado en la suposición que solo errores lineales existen en el PZT, un caso que es muy improbable. Carré afirma que 110° es el mejor corrimiento de fase sin citar una explicación. Un detallado estudio por Kema [6] usando expansión de serie de Taylor de la función de fase de interferencia revela que 110° es el mejor corrimiento de fase solo para errores de intensidad aleatorios, y no para pasos de fase o errores de intensidad sistemáticos. El estudio también ha revelado que ese paso de fase debe ser menor que 120° a fin de minimizar el error en el corrimiento de fase de segundo orden. Además, el paso de fase entre 90° y 120° , fue considerado para minimizar los errores de intensidad de segundo y tercer orden. Para que el algoritmo de Carré trabaje apropiadamente el numerador de la Ec.(2.52) debe ser positivo. Sin embargo, esta condición es verdadera sólo para imágenes perfectas y no se podrá mantener en la presencia de fuentes de error.

Otro ejemplo de un algoritmo de auto-calibración es el propuesto por Hariharan [7] que necesita cuatro corrimientos I_1 , I_2 , I_3 , e I_4 con sus adicionales corrimientos de fase -3α , $-\alpha$, $+\alpha$, y $+3\alpha$, respectivamente,

$$\tan^2 \alpha = \frac{3I_2 - 3I_3 - I_1 + I_4}{I_1 + I_2 - I_3 - I_4}, \quad (2.53)$$

$$\tan^2 \phi = \frac{(3I_2 - 3I_3 - I_1 + I_4)(I_1 + I_2 - I_3 - I_4)}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)^2}. \quad (2.54)$$

Algo particular ocurre cuando la diferencia de fase entre los haces que interfieren es cercano a $m\pi$ por lo que el numerador y denominador de las Ecs. (2.53) y (2.54) tiendan a cero creando una mayor incertidumbre en la medición de α y ϕ .

2. ANTECEDENTES

2.2. ALGORITMOS DE EXTRACCIÓN DE FASE

Bajo estas condiciones propone utilizar 5 patrones cuyos corrimientos son -2α , $-\alpha$, 0 , α , 2α , además mediante estos patrones mide los errores al aplicar voltaje a un piezoeléctrico considerando un corrimiento de $\pi/2$, la Fig.(2.7) muestra los errores de no-linealidad, histéresis y deriva lineal.

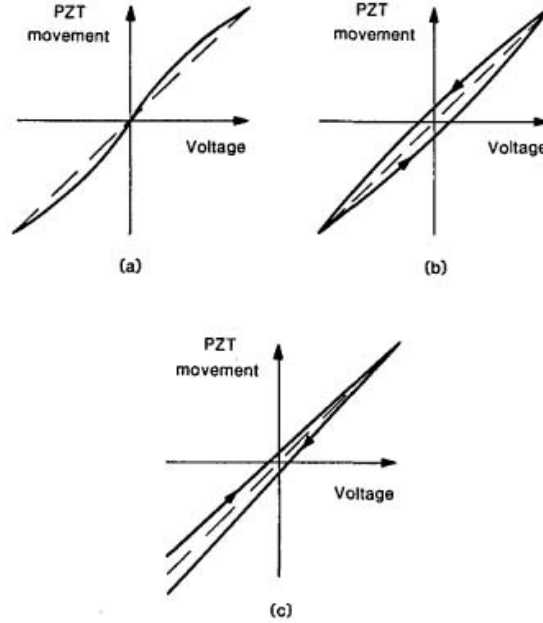


Figura 2.7: Movimiento de el PZT como una función del voltaje aplicado a mostrar los errores típicos (a) no linealidad, (b) histéresis; y (c) deriva lineal.

En el primer caso mostrado en la Fig.(2.7)(a), el PZT tiene una respuesta no lineal con desviaciones de linealidad de $\pm 1^\circ$ en el desplazamiento de referencia de $\pm \pi/2$. En la Fig.(2)(b) el PZT exhibe histéresis con desviaciones de linealidad de $\pm 2^\circ$ cuando el corrimiento de fase de referencia es 0° y $\pm 1^\circ$ cuando el corrimiento es igual a 90° . Otra fuente de error Fig.(2.7)(c) es la deriva lineal del PZT la cual es de 4° para los corrimientos de -178° , $-88,5^\circ$, 1° , $90,5^\circ$ y 180° y 180° , $89,5^\circ$, -1° , $-91,5^\circ$, y -182° en el segundo conjunto. El máximo error en la fase ϕ después de promediar los dos conjunto de mediciones es de $0,001^\circ$.

$$I_1(x, y) = a + b \cos(\phi(x, y) - 2\alpha), \quad (2.55)$$

$$I_2(x, y) = a + b \cos(\phi(x, y) - \alpha), \quad (2.56)$$

$$I_3(x, y) = a + b \cos \phi(x, y), \quad (2.57)$$

$$I_4(x, y) = a + b \cos(\phi(x, y) + \alpha), \quad (2.58)$$

$$I_5(x, y) = a + b \cos(\phi(x, y) + 2\alpha). \quad (2.59)$$

2. ANTECEDENTES

2.2. ALGORITMOS DE EXTRACCIÓN DE FASE

Las siguientes ecuaciones se obtienen cuando se considera un corrimiento de 90° ,

$$\frac{I_2 - I_4}{2I_3 - I_5 - I_1} = \frac{\sin \alpha \sin \phi}{(1 - \cos 2\alpha) \cos \phi}, \quad (2.60)$$

$$\tan \phi = \frac{2(I_2 - I_4)}{2I_3 - I_5 - I_1}. \quad (2.61)$$

Para comprobar que el corrimiento fuera $\alpha = \pi/2$ se utilizó la Ec.(2.62), este corrimiento se obtiene modificando el voltaje aplicado al piezoeléctrico hasta conseguir que $\cos \alpha = 0$ para realizar esta medición solo se necesitan cuatro mediciones de los patrones de interferencia.

$$\cos \alpha = \frac{I_5 - I_1}{2(I_4 - I_2)}. \quad (2.62)$$

2.2.4. Extracción de fase utilizando Mínimos Cuadrados

Expresando el patrón de interferencia por la Ec.(2.63) para un valor de corrimiento arbitrario,

$$I_n = a + b \cos(\phi + \alpha_n) = I_0 + b \cos \phi \cos \alpha_n - b \sin \phi \sin \alpha_n, \quad (2.63)$$

renombrando,

$$\begin{aligned} a_0 &= a = I_0, \\ a_1 &= b \cos \phi, \\ a_2 &= -b \sin \phi, \end{aligned}$$

Aplicando el método de mínimos cuadrados para N interferogramas con corrimientos arbitrarios obtenemos una expresión más general para reconstruir la fase utilizando la función tangente.

$$E(a_0, a_1, a_2) = \sum_{n=0}^{N-1} (I_n + a_0 + a_1 \cos \alpha_n + a_2 \sin \alpha_n)^2, \quad (2.64)$$

$$\partial E / \partial a_s = 0 \quad \text{para } s = 0, 1, 2. \quad (2.65)$$

$$\phi = \arctan\left(-\frac{a_2}{a_1}\right). \quad (2.66)$$

2.2.5. Algoritmo de Corrimiento de Fase Generalizado de Autocalibración

Hay otras variantes de algoritmos que permiten que el corrimiento sea desconocido y no constante a las cuales se les asocia el nombre de técnicas de interferometría de corrimiento de fase de generalizado de autocalibración (GSPSI) en estas se observa que el número de incógnitas es mayor que el número interferogramas capturados. Destacan entre estos los algoritmos iterativos que involucran campos de difracción [32–34], los que utilizan ecuaciones de lissajous [26, 27] y los métodos de mínimos cuadrados, normalización.

Se han desarrollado otras técnicas de corrimiento de fase en las que no es preciso conocer de manera inicial estos valores, a estas técnicas se les asocia el nombre de interferometría de corrimiento de fase generalizado (GSPSI).

Las principales propiedades de las técnicas GSPSI son:

1. a , b , ϕ son constantes en el tiempo.
2. α_n es desconocido y arbitrario.
3. El número de corrimientos puede ser $N \geq 2$.
4. Se forma un sistema de N ecuaciones por $(N + 3)$ incógnitas para N corrimientos, como consecuencia no hay solución bajo el criterio del *PSI*.
5. Las soluciones son aproximadas, basados en encontrar los N corrimientos α_n donde $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.
6. Encontrar la fase del objeto ϕ por el método del *PSI*.

Al igual que con *PSI*, con *GSPSI* se puede extraer la información de la fase ϕ contenida en un patrón de interferencia, para tal fin primero es necesario encontrar los valores de las fases adicionales α_n , mediante las relaciones matemáticas y propiedades físicas entre los patrones de interferencia.

Se han propuesto técnicas *GSPSI* con solo dos interferogramas de campos de difracción con un corrimiento entre ambos de $0 < \alpha < \pi$ y la intensidad de la onda de referencia constante. Calculando la suma y resta de ambas interferogramas y promediando estas cantidades se despeja el valor del corrimiento de fase, con el valor de α se encuentra la intensidad del frente de onda del objeto en el plano donde se registran los patrones de interferencia y finalmente calcular el campo del objeto en el plano de entrada aplicando la transformada inversa de Fresnel [33].

Guanming Lai and Toyohiko Yata desarrollaron un algoritmo basado en la transformada de Fourier para medir el corrimiento de la fase de referencia en tiempo real, en su arreglo interferométrico en el del brazo de prueba se coloca una superficie a evaluar y en el mismo plano pero separado una pequeña distancia un espejo inclinado que se comporta como una cuña de fase que introduce una función lineal, en el brazo de referencia se coloca un espejo que es desplazado fracciones de longitud de onda mediante un piezoeléctrico. Al interferir el campo de referencia y el de prueba en el plano de observación se van a formar dos tipos de franjas. Las franjas de intensidades que están en la parte superior del plano de observación corresponden a la interferencia del campo del objeto de prueba y el campo

2. ANTECEDENTES

2.2. ALGORITMOS DE EXTRACCIÓN DE FASE

de referencia que modifica su camino óptico por el PZT, en la parte inferior se obtienen franjas rectas producidas por la interferencia del campo asociado al espejo inclinado y el campo de referencia modificado por PZT. Nombraremos a las franjas de la parte inferior franjas de referencia y son líneas rectas con frecuencia espacial f y fase inicial α esta constante es importante conocerla ya que nos permite determinar los corrimientos en los interferogramas del objeto a evaluar el cual parte en la primera captura con este valor de corrimiento inicial el cual es desconocido. Al conocer el valor de la frecuencia portadora es posible extraer mediante la transformada de Fourier el corrimiento inicial α el cual es el valor del corrimiento de referencia inicial y determinar los valores de los corrimientos en los interferogramas del objeto de prueba. Aplicando el operador de la transformada de Fourier sobre el interferograma de franjas rectas que es representado por la Ec.(2.68) obtenemos su espectro Ec(2.69)

$$I(x) = a(x) + b(x) \cos(\phi(x) + \alpha_n), \quad (2.67)$$

$$I_r(x) = a(x) + b(x) \cos(2\pi f x + \alpha), \quad (2.68)$$

$$\tilde{I}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} I(x) \exp(-2\pi i \mu x) dx, \quad (2.69)$$

$$\tilde{I}(\mu) = \tilde{a}(\mu) + \tilde{c}(\mu - f) \exp(i\alpha) + \tilde{c}(\mu + f) \exp(-i\alpha), \quad (2.70)$$

donde,

$$\tilde{a}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} a(x) \exp(-2\pi i \mu x) dx, \quad (2.71)$$

$$\tilde{c}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} b(x) \exp(-2\pi i \mu x) dx, \quad (2.72)$$

son las transformadas de Fourier de la luz de fondo y el primer orden del espectro de la intensidad. Es importante que la frecuencia espacial de las franjas rectas tenga un valor alto tal que el primer orden del espectro pueda separarse del orden cero. El espectro del interferograma es evaluado por una función ventana que solo toma el espectro del primer orden.

$$\tilde{l}'(\mu) = \tilde{c}(\mu - f) \exp(i\alpha). \quad (2.73)$$

Aplicando el logaritmo en el espectro filtrado en f ,

$$\log[\tilde{l}'(f)] = \log[\tilde{c}(0)] + i\alpha. \quad (2.74)$$

Si la luz de fondo y la luz de modulación no varían en el tiempo la fase de la Ec.(2.74) también será una constante. Así el valor de corrimiento de fase inicial α corresponderá a la parte imaginaria del logaritmo del espectro filtrado evaluado en la frecuencia f menos una constante.

$$\alpha = \text{Im} \left[\log[\tilde{l}'(f)] \right] - \text{constante}. \quad (2.75)$$

Al conocer los corrimientos de fase se puede decodificar la información de la fase del objeto de prueba al capturar como mínimo tres interferogramas con sus respectivos corrimientos y se procede con los métodos de extracción de fase derivados de la técnica propuesta por Brunning que utiliza la tangente.

2.2.6. Métodos de extracción basados en las figuras de Lissajous

En un principio Kinnstaetter [38] utilizó las figuras de Lissajous para determinar los errores originados de las no-linealidades del detector, derivas del láser y la mala calibración del *PZT* en el corrimiento de fase. En este método la figura de Lissajous es graficada usando el corrimiento de fase como un parámetro de las intensidades obtenidas de dos puntos en el patrón de franjas separados aproximadamente en cuadratura. Un algoritmo iterativo selecciona dos detectores del arreglo de la cámara *CCD* los cuales están en cuadratura, los fotovoltajes de los detectores se grafican en las abscisas y en las ordenadas formando una figura de Lissajous la cual corresponderá a un círculo si la diferencia de fase del detector esta en cuadratura y la medición de la intensidad, visibilidad, y sensibilidad de los elementos del detector en dos puntos de la matriz de la cámara *CCD* son iguales.

De la formación de las figuras de Lissajous Kinnstaetter concluye lo siguiente:

- Los puntos no equidistantes en la circunferencia de la figura de Lissajous muestra que los corrimientos de fase no son igualmente espaciados (un hecho atribuido a las no-linealidades del piezoeléctrico).
- La incorrecta calibración del piezoeléctrico resulta en el solapamiento de los puntos en la circunferencia.
- La figura de Lissajous muestra altos armónicos o frecuencias si la intensidad promedio varia en el período de captura.
- Las figuras de Lissajous es también un indicador de las vibraciones inducidas mientras se registra el interferograma. Las bajas frecuencias mueven los puntos brillantes alrededor de la circunferencia de la figura de Lissajous y las altas frecuencias mueven los puntos de intensidad hacia el centro de gravedad de la figura.
- Las características no lineales del detector resulta en la degradación de las usuales geometrías de Lissajous elipses o círculos.

Al identificar las características de la figura de Lissajous, un algoritmo iterativo es aplicado para ajustar el mecanismo de paso físico para obtener corrimientos de fase igualmente espaciados donde los corrimientos de fase aplicados por el piezoeléctrico son ejecutados al rectificar el valor de voltaje necesario para cada desplazamiento, este algoritmo iterativo es repetido varias veces hasta que la figura de Lissajous esta en cuadratura.

Otro método basado en las figuras de Lissajous es el propuesto por Farell el cual es un método de extracción de fase espacio-temporal que utiliza las variaciones espaciales de los perfiles de intensidades para ajustar a una elipse mediante el algoritmo de Bookstein [36] para recuperar la información de la luz de fondo, modulación y corrimientos de fase, los perfiles de intensidad se extraen de dos interferogramas corridos en fase que son

2. ANTECEDENTES

2.2. ALGORITMOS DE EXTRACCIÓN DE FASE

representados por las Ec.(2.76) y Ec.(2.77) donde $\phi(x, y)$ es una función de x, y y α es el desfase.

$$I_1 = a_1 + b_1 \cos(\phi), \quad (2.76)$$

$$I_2 = a_2 + b_2 \cos(\phi + \alpha). \quad (2.77)$$

Al desarrollar las ecuaciones que representan los perfiles de intensidad y poner en cuadratura obtenemos la Ec.(2.78),

$$\frac{(I_1 - a_1)^2}{b_1^2} - \frac{2 \cos \alpha (I_1 - a_1)(I_2 - a_2)}{b_1 b_2} + \frac{(I_2 - a_2)^2}{b_2^2} = \sin^2 \alpha, \quad (2.78)$$

Desarrollando la ecuación anterior obtenemos la fórmula general de las cónicas con los parámetros A, B, C, D, E que se obtienen mediante el algoritmo de Bookstein [36] estos también van a servir para determinar los valores de a_1, a_2, b_1, b_2 y α .

$$AI_1^2 + BI_1I_2 + CI_2^2 + DI_1 + EI_2 = 1, \quad (2.79)$$

$$A = b_2^2/k, \quad B = -(2b_1b_2 \cos \alpha)/k, \quad C = b_1^2/k, \quad (2.80)$$

$$D = 2(a_2b_1b_2 \cos \alpha - a_1b_2^2)/k, \quad E = 2(a_1b_1b_2 \cos \alpha - a_2b_1^2)/k, \quad (2.81)$$

con,

$$k = b_1^2b_2^2 \sin^2 \alpha + 2a_1a_2b_1b_2 \cos \alpha - a_1^2b_2^2 - a_2^2b_1^2. \quad (2.82)$$

Los siguientes parámetros también se obtienen a través del método de mínimos como se mostrara más adelante en esta tesis,

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-B}{\sqrt{4AC}}\right), \quad a_1 = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}, \quad a_2 = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \quad (2.83)$$

$$b_1 = \sqrt{\frac{4C}{B^2 - 4AC} \left(F + \frac{CD^2 + AE^2 - BDE}{B^2 - 4AC}\right)}, \quad (2.84)$$

$$b_2 = \sqrt{\frac{4A}{B^2 - 4AC} \left(F + \frac{CD^2 + AE^2 - BDE}{B^2 - 4AC}\right)}. \quad (2.85)$$

Farrell propone dos algoritmos para extraer la fase de objeto de prueba considerando que al aplicar el algoritmo de Bookstein obtenemos los valores de la luz de fondo e iluminación y corrimiento de fase. El primero de estos considera que la luz de fondo e iluminación es diferente entre interferogramas con diferente paso de fase formando un sistema de ecuaciones que al resolverse da la información de la fase en términos de la tangente.

$$\phi(x, y) = \arctan\left(\frac{(\sum_n b_n \cos^2 \alpha_n)S - (\sum_n \sin \alpha_n \cos \alpha_n)C}{(\sum_n b_n \sin \alpha_n \cos \alpha_n)S - (\sum_n b_n \sin^2 \alpha_n)C}\right), \quad (2.86)$$

2. ANTECEDENTES

2.2. ALGORITMOS DE EXTRACCIÓN DE FASE

$$C = \sum_n (I_n \cos \alpha_n - a_n \cos \alpha_n), \quad (2.87)$$

$$S = \sum_n (I_n \sin \alpha_n - a_n \sin \alpha_n). \quad (2.88)$$

La segunda propuesta considera que la luz de fondo e iluminación no cambia en todos los interferogramas con corrimiento de fase llegando también a formar un sistema de ecuaciones donde la fase queda determinada en términos de la tangente.

$$\phi(x, y) = \arctan \left(\frac{CCIS - SCIC}{SCIS - SSIC} \right), \quad (2.89)$$

donde,

$$SC = N \sum_n \sin \alpha_n \cos \alpha_n - \sum_n \sin \alpha_n \sum_n \cos \alpha_n, \quad (2.90)$$

$$IC = N \sum_n I_n \cos \alpha_n - \sum_n I_n \sum_n \cos \alpha_n, \quad (2.91)$$

$$IS = N \sum_k I_k \sin \alpha_n - \sum_n I_n \sum_n \sin \alpha_n, \quad (2.92)$$

$$CC = N \sum_n \cos^2 \alpha_n - \left(\sum_n \cos \alpha_n \right)^2, \quad (2.93)$$

$$SS = N \sum_n \sin^2 \alpha_n - \left(\sum_n \sin \alpha_n \right)^2. \quad (2.94)$$

Ambos algoritmos se generalizan para N interferogramas corridos en fase. También propone un algoritmo de corrección de patrón de franjas considerando que se mide el error entre el corrimiento aplicado por el piezoeléctrico y el corrimiento obtenido por el algoritmo de Bookstein donde ϵ es la diferencia entre ambos. Los patrones de interferencia corregidos son evaluados por el algoritmo que el propone o por los algoritmos derivados de los métodos de Brunning.

$$I_2 = [(I_{2+\epsilon} - a_2) + (b_2/b_1)(I_1 - a_1) \sin \epsilon] \cos \epsilon + a_2. \quad (2.95)$$

Se puede considerar el algoritmo de Farrell como una técnica de auto-calibración ya que los corrimientos no necesitan ser constante y son arbitrarios.

2.3. Modelo Matemático de Elipses.

A nivel histórico la geometría analítica ha permitido explicar importantes problemas relacionados con fenómenos físicos. En óptica se puede analizar la polarización (lineal, circular, elíptica), determinando la relación de diferencia de fase entre las componentes de amplitud del campo eléctrico o magnético. En mecánica clásica nos facilita el análisis del movimiento de los cuerpos celestes, mediante las tres ecuaciones de movimiento de Kepler.

Para el desarrollo de esta tesis es necesario mencionar algunos conceptos básicos de geometría analítica, en particular la ecuación general de segundo orden que define a los lugares geométricos definidos como cónicas: parábola, el círculo, la elipse y la hipérbola.

En particular nos centraremos en definir las propiedades geométricas de la elipse, que es la base para plantear un problema relacionado con la interferometría. Por conveniencia se describirá de manera general la ecuación de segundo grado y más adelante se enfocará en las propiedades de la elipse.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (2.96)$$

Consideraremos el caso en que la Ec.(2.96) representa a todos lugares geométricos definidos como cónicas donde los valores de los coeficientes A, B, C, D, E, F dan indicios de que tipo de lugar geométrico representan. Si A y C tienen el mismo signo representan una elipse y si además $A = C$ representarán un círculo, con $A = 0$ o $C = 0$ representaran una parábola, si A y B tienen diferente signo representará una hipérbola. Con $B \neq 0$ se indica que la cónica forma un ángulo diferente de 0° con respecto al eje x y los coeficientes de los términos lineales D, E indican si se ha realizado una traslación horizontal sobre el eje x o vertical sobre el eje y fuera del origen de coordenadas. El último término de la Ec.(2.96) representa una constante.

Podemos expresar la ecuación general de segundo grado en términos de otro sistema de ejes coordenados x', y' que forman un ángulo ψ con respecto a los ejes x, y , de tal manera que la elipse, parábola o hipérbola no tengan un ángulo de inclinación en estos ejes coordenados x', y' .

Apliquemos a la ecuación general,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

en donde $B \neq 0$, y las ecuaciones de transformación por rotación son

$$x = x' \cos \psi - y' \sin \psi, \quad y = x' \sin \psi + y' \cos \psi,$$

Tenemos

$$\begin{aligned} A(x' \cos \psi - y' \sin \psi)^2 + B(x' \cos \psi - y' \sin \psi)(x' \sin \psi + y' \cos \psi), \\ + C(x' \sin \psi + y' \cos \psi)^2 + D(x' \cos \psi - y' \sin \psi), \\ + E(x' \sin \psi + y' \cos \psi) + F = 0. \end{aligned}$$

Desarrollando y reagrupando los términos, obtenemos

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \quad (2.97)$$

2. ANTECEDENTES
2.3. MÓDELO MATEMÁTICO DE ELIPSES.

en donde,

$$\begin{aligned} A' &= A \cos^2 \psi + B \sin \psi \cos \psi + C \sin^2 \psi, \\ B' &= 2(C - A) \sin \psi \cos \psi + B(\cos^2 \psi - \sin^2 \psi), \\ C' &= A \sin^2 \psi - B \sin \psi \cos \psi + C \cos^2 \psi, \\ D' &= D \cos \psi + E \sin \psi, \\ E' &= E \cos \psi - D \sin \psi, \\ F' &= F. \end{aligned}$$

Si la ecuación transformada Ec.(2.97) va a carecer del término en $x'y'$, el coeficiente de B' debe anularse. Por tanto, debemos tener,

$$2(C - A) \sin \psi \cos \psi + B(\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) = 0.$$

Por medio de las fórmulas trigonométricas del ángulo doble, esta última ecuación puede escribirse en la forma,

$$(C - A) \sin 2\psi + B \cos 2\psi = 0. \quad (2.98)$$

Si $A \neq C$, de la Ec.(2.98) tenemos la relación,

$$\tan 2\psi = \frac{B}{A - C}. \quad (2.99)$$

Si $A = C$, entonces la Ec.(2.98) se reduce a la forma,

$$B \cos 2\psi = 0. \quad (2.100)$$

Como $B \neq 0$, por hipótesis, se sigue que,

$$\cos 2\psi = 0. \quad (2.101)$$

El ángulo de rotación ψ queda restringido al intervalo $0^\circ \leq \psi \leq 90^\circ$, de manera que el intervalo de variación para 2ψ es $0^\circ \leq 2\psi \leq 180^\circ$. Por tanto de la Ec.(2.101) tenemos,

$$2\psi = 90^\circ \quad y \quad \psi = 45^\circ.$$

La ecuación general de segundo grado,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

en donde $B \neq 0$, puede transformarse siempre en otra de la forma,

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \quad (2.102)$$

sin término en $x'y'$, haciendo girar los ejes coordenados un ángulo positivo agudo ψ tal como lo muestra la Ec.(2.99).

2. ANTECEDENTES

2.3. MÓDELO MATEMÁTICO DE ELIPSES.

A partir de los valores de los coeficientes A , B , C podemos determinar el ángulo de inclinación ψ introducido en las ecuaciones de rotación de coordenadas.

Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.

Los dos puntos fijos se llaman focos de la elipse. La definición de una elipse excluye el caso en que el punto móvil esta sobre el segmento que une los focos.

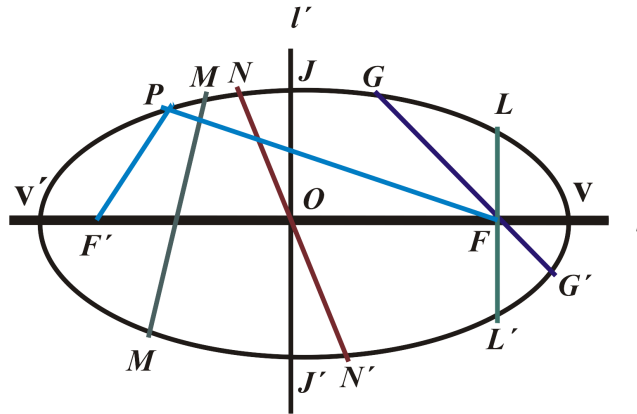


Figura 2.8: Elipse

Designemos por F y F' Fig.(2.8) los focos de una elipse. La recta l que pasa por los focos tiene varios nombres; veremos que es conveniente introducir el término de eje focal para designar esta recta. El eje focal corta a la elipse en dos puntos, V y V' , llamados vértices. La porción del eje focal comprendida entre los vértices, el segmento VV' , se llama eje mayor. El punto O del eje focal, punto medio del segmento que une los focos, se llama centro. La recta l' que pasa por O y es perpendicular al eje focal l tiene varios nombres; encontraremos conveniente introducir el término eje normal para designarla. El eje normal l' corta a la elipse en dos puntos, J y J' , y el segmento JJ' se llama eje menor. Un segmento tal como MM' , que une dos puntos diferentes cualesquiera de la elipse, se llama cuerda. En particular, una cuerda que pasa por uno de los focos, tal como GG' , se llama cuerda focal. Una cuerda focal, tal como LL' , perpendicular al eje focal l se llama lado recto. Evidentemente como la elipse tiene dos focos, tiene también dos lados rectos. Una cuerda que pasa por O , tal como NN' , se llama un diámetro. Si P es un punto cualquiera de la elipse, los segmentos FP y $F'P$ que unen los focos con el punto P se llaman radios vectores de P .

Consideremos la elipse de centro en el origen y cuyo eje focal coincide el eje X Fig.(2.9). Los focos F y F' están sobre el eje X . Como el centro O es el punto medio del segmento FF' , las coordenadas de F y F' serán, por ejemplo, $(f, 0)$ y $(-f, 0)$, respectivamente, siendo f una constante positiva. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la elipse. Por la definición de la curva, el punto P debe satisfacer la condición geométrica.

$$|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 2x_0, \quad (2.103)$$

en donde x_0 es una constante positiva mayor que f ,

2. ANTECEDENTES

2.3. MÓDELO MATEMÁTICO DE ELIPSES.

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}, \quad |\overline{F'P}| = \sqrt{(x+f)^2 + y^2}. \quad (2.104)$$

Para cada elipse, x_0 es la longitud del semieje mayor, y_0 la del semieje menor, y x_0 , y_0 y f están ligados por la relación,

$$x_0^2 = y_0^2 + f^2,$$

de manera que la condición geométrica Ec.(2.103) está expresada analíticamente por la ecuación,

$$\sqrt{(x-f)^2 + y^2} + \sqrt{(x+f)^2 + y^2} = 2x_0. \quad (2.105)$$

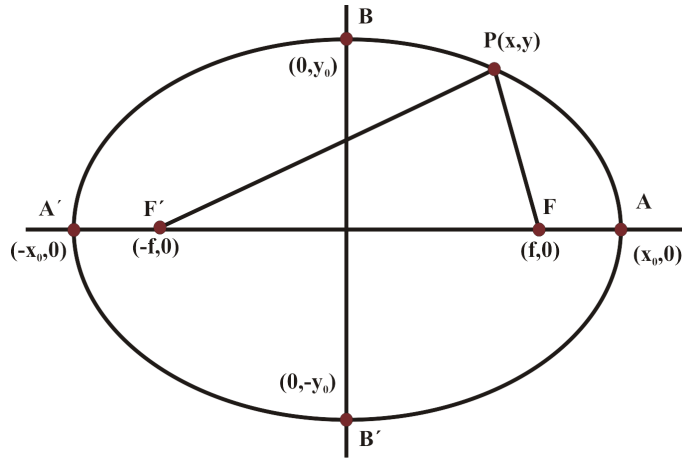


Figura 2.9: Elipse.

Para simplificar la Ec.(2.105), pasamos el segundo radical al segundo miembro, elevamos al cuadrado, simplificamos y agrupamos los términos semejantes. Esto nos da,

$$fx + x_0^2 = x_0\sqrt{(x+f)^2 + y^2}. \quad (2.106)$$

A partir de esta relación podemos llegar a la ecuación de la elipse que representa una elipse centrada en el origen y con el eje focal coincidiendo con el eje X, distancia focal igual a $2f$ y cantidad constante igual a $2x_0$ es,

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1. \quad (2.107)$$

Si el eje focal de la elipse coincide con el eje Y las coordenadas de los focos son $(0, f)$ y $(0, -f)$, la ecuación de la elipse es,

$$\frac{x^2}{y_0^2} + \frac{y^2}{x_0^2} = 1. \quad (2.108)$$

También, para cada elipse, la longitud de cada lado recto es $\frac{2y_0^2}{x_0}$ y la excentricidad e está dada por la fórmula,

2. ANTECEDENTES

2.3. MÓDELO MATEMÁTICO DE ELIPSES.

$$\epsilon = \frac{y_0}{x_0} < 1.$$

Para el caso de una elipse rotada en el origen, las ecuaciones paramétricas que definen cada par de puntos en la elipse son Ec.(2.109), Ec.(2.110) donde hay una diferencia de fase α entre las ambas componentes.

$$x = x_0 \cos \varphi, \tag{2.109}$$

$$y = y_0 \cos(\varphi - \alpha). \tag{2.110}$$

Desarrollando llegamos a la relación Ec.(2.111) que se puede reescribir en la forma general de una ecuación cuadrática como la Ec.(2.112),

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} - \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos \alpha = \sin^2 \alpha, \tag{2.111}$$

$$y_0^2 x^2 - 2x_0 y_0 \cos \alpha xy + x_0^2 y^2 - x_0^2 y_0^2 \sin^2 \alpha = 0. \tag{2.112}$$

Tomando como caso particular cuando la ecuación de segundo grado representa a una elipse rotada un ángulo ψ centrada en el origen de coordenadas, definimos los valores de los parámetros A, B, C, F como: $A = y_0^2, B = -2y_0 x_0 \cos \alpha, C = x_0^2, F = -y_0^2 x_0^2 \sin^2 \alpha$. Conociendo estos valores se pueden sustituir en la Ec.(2.111) que nos da la inclinación de la elipse rotada Ec.(2.113). Además de definir la excentricidad Ec.(2.114), con las constantes B' y A' Ec.(2.115), el ángulo de inclinación del rectángulo en el que esta circunscrito la elipse Ec.(2.116) y sus relaciones inversas Ec.(3.2), Ec.(2.118).

$$\tan 2\psi = \frac{2x_0 y_0 \cos \alpha}{x_0^2 - y_0^2}, \tag{2.113}$$

$$\sin 2\epsilon = \frac{2x_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2} \sin \alpha, \tag{2.114}$$

$$\tan \epsilon = \sqrt{\frac{B'}{A'}}, \tag{2.115}$$

$$\tan \theta = \frac{y_0}{x_0}, \quad \cot \theta = \frac{x_0}{y_0}, \tag{2.116}$$

$$\tan 2\psi = (\tan 2\theta) \cos \alpha, \quad \sin 2\epsilon = (\sin 2\theta) \sin \alpha, \tag{2.117}$$

$$\tan \alpha = \tan(2\epsilon) \csc(\psi), \quad \cos(2\theta) = \cos(2\alpha) \cos(2\psi). \tag{2.118}$$

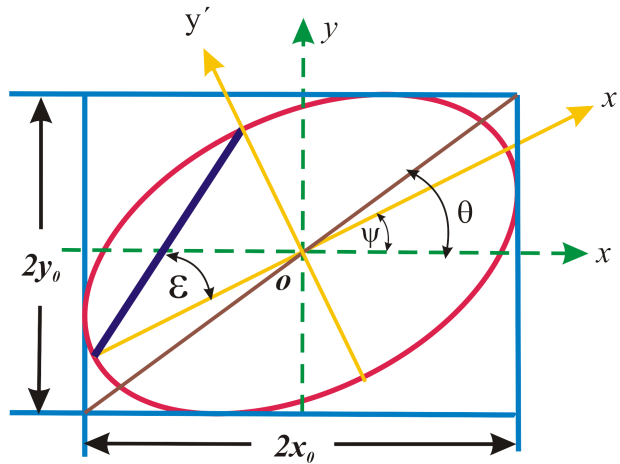


Figura 2.10: Elipse rotada.

2.4. Mínimos Cuadrados

En ciencia y ingeniería es frecuente el caso que un experimento produzca un conjunto de puntos de datos, donde las abscisas son distintas. Una meta de los métodos numéricos es el determinar una fórmula matemática que relacione estas variables.

Hay diferentes posibilidades para el tipo de función que puede ser usada. Frecuentemente hay un modelo matemático, basado en la naturaleza de la situación física, que determina la forma de la función. Considerando que en cualquier experimento se encuentran fuentes de error (error residual) que deben considerarse al momento de aproximar los datos a una función que los represente.

Hay muchas formas de calcular el error residual o desviación:

$$\text{Máximo error : } E_{\infty}(f) = \max_{1 \leq i \leq N} |f(x_i) - y_i|.$$

$$\text{Error promedio : } E_1(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |f(x_i) - y_i|.$$

$$\text{Error cuadrático promedio : } E_2(f) = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |f(x_i) - y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Plantaremos los conceptos básicos de mínimos cuadrados aplicado a encontrar la ecuación de una curva que se aproxime a un conjunto de pares de datos finitos, y trasladaremos esta técnica a encontrar la elipse de intensidad que mejor se ajuste a un conjunto de pares de datos de irradiancia.

Elegida la variable que se va a considerar independiente (x , por ejemplo), y dado el conjunto de puntos (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, N$, se selecciona la función que mejor se puede adaptar. Supongamos que ésta viene dada en la forma,

$$y = f(x, a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (2.119)$$

donde a_1, a_2, \dots, a_n son n parámetros, que dependen del tipo de función y que han de ser determinados.

A cada valor x_i de la variable independiente x le corresponde entonces dos valores de la variable y : uno es el valor y_i que le corresponde en el conjunto de puntos, al que llamaremos observado o real, y otro y_i^* al que llamaremos teórico, que se obtiene de sustituir x_i en la función elegida:

$$y_i^* = f(x, a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (2.120)$$

Se tienen así dos distribuciones, una real u observada y otra teórica, dependiendo esta última de los valores que se puedan asignar a los parámetros a_1, a_2, \dots, a_n .

El problema que se plantea es el determinar estos parámetros de forma que ambas distribuciones se aproximen lo más posible. Las distintas formas de conseguirlo dan lugar a los diversos procedimientos de ajuste. Una manera de resolver este problema es tratando de igualar los momentos de ambas distribuciones.

Tratamos de ajustar una función de la forma $y = f(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$ al conjunto de puntos (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, N$.

Para cada valor x_i de la variable independiente x , tenemos dos valores de y : el valor observado y_i y el valor teórico y_i^* , entre los cuales hay una diferencia, que vamos a llamar residuo y que representaremos por E_i :

$$E_i = y_i - y_i^*. \quad (2.121)$$

La idea, en principio, es la de determinar los parámetros a_1, a_2, \dots, a_n de forma que la suma ponderada de los residuos sea mínima:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - y_i^*). \quad (2.122)$$

En esta expresión, habrá sumandos positivos y negativos, que pueden compensarse unos con otros, dando una suma pequeña aún cuando el ajuste no sea bueno. Por ello, el método de mínimos cuadrados consiste en determinar los parámetros a_1, a_2, \dots, a_n , tratando de hacer mínima la media ponderada de los residuos, es decir, se trata de hacer mínima la expresión,

$$E(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - y_i^*)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_n)]^2. \quad (2.123)$$

La condición necesaria para que esta expresión sea mínima es que las derivadas parciales de primer orden respecto de cada uno de los parámetros se anulen. De esta manera se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales, llamadas normales, cuya resolución nos permite obtener los valores de los parámetros y, por tanto, la expresión de la función ajustada:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E}{\partial a_1} &= -2 \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_n)] \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0, \\
 \frac{\partial E}{\partial a_2} &= -2 \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_n)] \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0, \\
 &\vdots \\
 \frac{\partial E}{\partial a_n} &= -2 \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_n)] \frac{\partial f}{\partial a_n} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.124}$$

De manera similar utilizando el método de mínimos cuadrados planteamos encontrar la mejor elipse de intensidad que minimice el error y represente a los datos experimentales, partimos de la ecuación de la elipse rotada un ángulo ψ en el origen Ec.(2.111).

2.5. Distancia Euclidiana

Una distancia δ sobre un conjunto Ω es una aplicación de $\Omega \times \Omega$ en R , tal que a cada par (i, j) hace corresponder un número real $\delta(i, j) = \delta_{ij}$, cumpliendo algunas de las siguientes propiedades:

$$\delta_{ij} \geq 0 \tag{2.125}$$

$$\delta_{ii} = 0 \tag{2.126}$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \tag{2.127}$$

$$\delta_{ij} \leq \delta_{ik} + \delta_{jk} \tag{2.128}$$

δ_{ij} es euclídea si, existen dos puntos $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})$, $x_j = (x_{j1}, \dots, x_{jm})$ de R^m tales que,

$$\delta_{ij}^2 = (x_i - x_j)(x_i - x_j)^T, \tag{2.129}$$

es decir, δ_{ij} es la distancia euclídea entre los puntos x_i , x_j . Entonces (Ω, δ) puede representarse mediante el espacio euclídeo (R^m, l) .

$$l = \sqrt{(x_i - x_j)^2} \tag{2.130}$$

$$l = \sqrt{(x_{i1} - x_{j1})^2 + \dots + (x_{im} - x_{jm})^2} \tag{2.131}$$

3

Método de la Distancia Euclidiana

3.1. Desarrollo

En esta propuesta consideramos dos patrones de interferencia descritos como Ecs.(3.1,3.2) donde ϕ es la fase a evaluar y α corrimiento de fase desconocido y arbitrario en un rango de $[0, \pi]$, se propone una técnica (GSPSI) basada en la construcción de elipses de intensidad [26], [27].

$$I_1(x, y) = a_1(x, y) + b_1(x, y) \cos \phi(x, y), \quad (3.1)$$

$$I_2(x, y) = a_2(x, y) + b_2(x, y) \cos (\phi(x, y) + \alpha) \quad (3.2)$$

La Ec.(3.3) describe un conjunto de puntos en un plano formado por I_1 como el eje horizontal, y I_2 como el eje vertical. Cuando a_k y b_k son constantes con $k = 1, 2$, estos puntos de intensidad deben obedecer a una elipse, pero en un experimento a_k , b_k son funciones espaciales, así estos puntos no obedecen a una elipse. Sin embargo como a_k y b_k varían lentamente estas pueden aproximarse a valores constantes tales como A_k y B_k Ec.(3.4). Para realizar un ajuste de los datos a una elipse se toma el i -ésimo reglón de los patrones de interferencia y se toma un período en la componente j que va $(r, r + R)$, graficando ambas intensidades en pares $(I_{1i,j}, I_{2i,j})$ donde $\epsilon_{i,j}$ es el error local asociado en este punto Fig.(3.1).

$$\frac{(I_{1i,j} - a_{1i,j})^2}{b_{1i,j}^2} + \frac{(I_{2i,j} - a_{2i,j})^2}{b_{2i,j}^2} - 2 \frac{(I_{1i,j} - a_{1i,j})(I_{2i,j} - a_{2i,j}) \cos \alpha_i}{b_{1i,j} b_{2i,j} = \sin^2 \alpha_i}, \quad (3.3)$$

$$\frac{(I_{1i,j} - A_{1i})^2}{B_{1i}^2} + \frac{(I_{2i,j} - A_{2i})^2}{B_{2i}^2} - 2 \frac{(I_{1i,j} - A_{1i})(I_{2i,j} - A_{2i}) \cos \alpha}{B_{1i} B_{2i}} - \sin^2 \alpha = \epsilon_{i,j}. \quad (3.4)$$

Reorganizando esto se puede simplificar.

$$I_{1i,j}^2 + C_{1i} I_{2i,j}^2 + C_{2i} I_{1i,j} I_{2i,j} + C_{3i} I_{1i,j} + C_{4i} I_{2i,j} + C_{5i} = \epsilon_{i,j}, \quad (3.5)$$

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.1. DESARROLLO

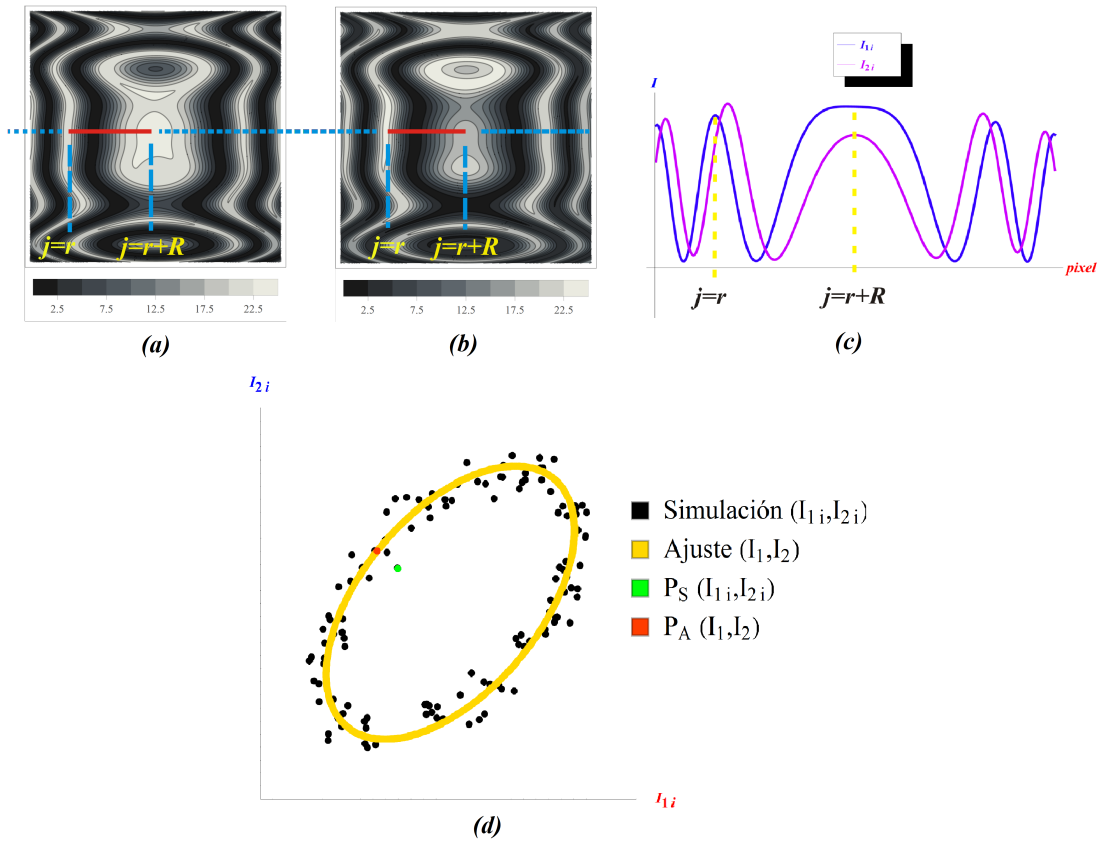


Figura 3.1: (a) Interferograma I_1 , (b) I_2 , (c) Perfiles de intensidades I_1 e I_2 , (d) Puntos de intensidades simulados (I_1, I_2) y su respectivo ajuste.

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.1. DESARROLLO

$$C_{1i} = \frac{B_1^2}{B_2^2}, \quad C_{2i} = -2\frac{B_1}{B_2} \cos \alpha, \quad C_{3i} = 2\left(\frac{B_1}{B_2}A_2 \cos \alpha - A_1\right), \quad (3.6)$$

$$C_{4i} = 2\left(\frac{B_1}{B_2}A_1 \cos \alpha - A_2\frac{B_1^2}{B_2^2}\right), \quad C_{5i} = A_1^2 + \frac{B_1^2}{B_2^2}A_2^2 - 2\frac{B_1}{B_2}A_1A_2 \cos \alpha - B_1^2 \sin^2 \alpha. \quad (3.7)$$

La Ec.(3.8) representa el error cuadrático asociado a la contribución de los puntos en el rango $j \in (r, r + R)$ aplicando mínimos cuadrados, donde $I_{1i,j}^2$ juega el rol de cantidad medida y el polinomio con coeficientes C_{si} , con $s = 1, 2, 3, 4, 5$ es la función que se propone como mejor ajuste a los datos experimentales.

$$\sum_{j=r}^{r+R} (I_{1i,j}^2 + C_{1i}I_{2i,j}^2 + C_{2i}I_{1i,j}I_{2i,j} + C_{3i}I_{1i,j} + C_{4i}I_{2i,j} + C_{5i})^2 = E_i. \quad (3.8)$$

Minimizando las parciales de la ecuación $E(C_{1i}, C_{2i}, C_{3i}, C_{4i}, C_{5i})$ respecto a los parámetros ha determinar C_{si} , obtenemos un sistema de Ecs.(3.10- 3.14).

$$E_i(C_{1i}, C_{2i}, C_{3i}, C_{4i}, C_{5i}) = \sum_{j=r}^{r+R} (I_{1i,j}^2 + C_{1i}I_{2i,j}^2 + C_{2i}I_{1i,j}I_{2i,j} + C_{3i}I_{1i,j} + C_{4i}I_{2i,j} + C_{5i}), \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial C_{1i}} = \sum_{j=r}^{r+R} I_{1i,j}^2 I_{2i,j}^2 + C_{1i}I_{2i,j}^4 + C_{2i}I_{1i,j}I_{2i,j}^3 + C_{3i}I_{1i,j}I_{2i,j}^2 + C_{4i}I_{2i,j}^3 + C_{5i}I_{2i,j}^2 = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial C_{2i}} = \sum_{j=r}^{r+R} I_{1i,j}^3 I_{2i,j} + C_{1i}I_{1i,j}I_{2i,j}^3 + C_{2i}I_{1i,j}^2 I_{2i,j}^2 + C_{3i}I_{1i,j}^2 I_{2i,j} + C_{4i}I_{1i,j}I_{2i,j}^2 + C_{5i}I_{1i,j}I_{2i,j} = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial C_{3i}} = \sum_{j=r}^{r+R} I_{1i,j}^3 + C_{1i}I_{1i,j}I_{2i,j}^2 + C_{2i}I_{1i,j}^2 I_{2i,j} + C_{3i}I_{1i,j}^2 + C_{4i}I_{1i,j}I_{2i,j} + C_{5i}I_{1i,j} = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial C_{4i}} = \sum_{j=r}^{r+R} I_{1i,j}^2 I_{2i,j} + C_{1i}I_{2i,j}^3 + C_{2i}I_{1i,j}I_{2i,j}^2 + C_{3i}I_{1i,j}I_{2i,j} + C_{4i}I_{2i,j}^2 + C_{5i}I_{2i,j} = 0, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial C_{5i}} = \sum_{j=r}^{r+R} I_{1i,j}^2 + C_{1i}I_{2i,j}^2 + C_{2i}I_{1i,j}I_{2i,j} + C_{3i}I_{1i,j} + C_{4i}I_{2i,j} + C_{5i} = 0. \quad (3.14)$$

En forma matricial de este sistema de ecuaciones es representado por una matriz U_i de 5×5 , V_i de 5×1 y W_i de 5×1 ,

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.1. DESARROLLO

$$U_i = \begin{pmatrix} \sum I_{2i,j}^4 & \sum I_{1i,j} I_{2i,j}^3 & \sum I_{1i,j} I_{2i,j}^2 & \sum I_{2i,j}^3 & \sum I_{2i,j}^2 \\ \sum I_{1i,j} I_{2i,j}^3 & \sum I_{1i,j}^2 I_{2i,j}^2 & \sum I_{1i,j}^2 I_{2i,j} & \sum I_{1i,j} I_{2i,j}^2 & \sum I_{1i,j} I_{2i,j} \\ \sum I_{1i,j} I_{2i,j}^2 & \sum I_{1i,j}^2 I_{2i,j} & \sum I_{1i,j}^2 & \sum I_{1i,j} I_{2i,j} & \sum I_{1i,j} \\ \sum I_{2i,j}^3 & \sum I_{1i,j} I_{2i,j}^2 & \sum I_{1i,j} I_{2i,j} & \sum I_{2i,j}^2 & \sum I_{2i,j} \\ \sum I_{2i,j}^2 & \sum I_{1i,j} I_{2i,j} & \sum I_{1i,j} & \sum I_{2i,j} & \sum 1 \end{pmatrix},$$

$$V_i = \begin{pmatrix} C_{1i} \\ C_{2i} \\ C_{3i} \\ C_{4i} \\ C_{5i} \end{pmatrix}, \quad W_i = \begin{pmatrix} -\sum I_{1i,j}^2 I_{2i,j}^2 \\ -\sum I_{1i,j}^3 I_{2i,j} \\ -\sum I_{1i,j}^3 \\ -\sum I_{1i,j}^2 I_{2i,j} \\ -\sum I_{1i,j}^2 \end{pmatrix},$$

$$U_i V_i = W_i. \quad (3.15)$$

Entonces el sistema de ecuaciones representado en forma matricial Ec.(3.15) tiene solución si $\text{Det}U_i \neq 0$ y está dada por,

$$V_i = U_i^{-1} W_i. \quad (3.16)$$

Otra forma de expresar la solución Ec.(3.16) es,

$$V_i = (G_i^T G_i)^{-1} G_i^T O_i, \quad (3.17)$$

donde $(\dots)^T$ y $(\dots)^{-1}$ representan la transpuesta y la inversa de una matriz, G_i es una matriz de $R \times 5$, y O_i es un vector columna de $R \times 1$, dado por,

$$G_i = \begin{pmatrix} I_{2i,r}^2 & I_{2i,r} I_{1i,r} & I_{1i,r} & I_{2i,r} & 1 \\ I_{2i,r+1}^2 & I_{2i,r+1} I_{1i,r+1} & I_{1i,r+1} & I_{2i,r+1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I_{2i,r+R}^2 & I_{2i,r+R} I_{1i,r+R} & I_{1i,r+R} & I_{2i,r+R} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

$$O_i = (-I_{1i,r}^2, -I_{1i,r+1}^2, \dots, -I_{1i,r+R}^2)^T. \quad (3.19)$$

Despejando A_1 , A_2 , B_1 , B_2 y $\cos \alpha$ en términos de las constantes C_{si} , obtenemos los parámetros Ec.(3.20) para definir las ecuaciones paramétricas de la elipse que mejor representa estos perfiles de intensidad Ecs.(3.23, 3.24).

$$A_{1i} = \frac{2C_{1i}C_{3i} - C_{2i}C_{4i}}{C_{2i}^2 - 4C_{1i}}, \quad A_{2i} = \frac{2C_{4i} - C_{2i}C_{3i}}{C_{2i}^2 - 4C_{1i}}, \quad \cos \beta_i = -\frac{C_{2i}}{2\sqrt{C_{1i}}}, \quad (3.20)$$

$$B_{1i} = \sqrt{\frac{4C_{1i}}{C_{2i}^2 - 4C_{1i}} \left(C_{5i} + \frac{C_{4i}^2 + C_{1i}C_{3i}^2 - C_{2i}C_{3i}C_{4i}}{C_{2i}^2 - 4C_{1i}} \right)}, \quad (3.21)$$

$$B_{2i} = \sqrt{\frac{4}{C_{2i}^2 - 4C_{1i}} \left(C_{5i} + \frac{C_{4i}^2 + C_{1i}C_{3i}^2 - C_{2i}C_{3i}C_{4i}}{C_{2i}^2 - 4C_{1i}} \right)}. \quad (3.22)$$

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.1. DESARROLLO

$$J_1(\varphi_{i,j}) = A_{1i} + B_{1i} \cos \varphi_{i,j}, \quad (3.23)$$

$$J_2(\varphi_{i,j}) = A_{2i} + B_{2i} \cos(\varphi_{i,j} + \beta_i). \quad (3.24)$$

La técnica que proponemos para calcular la fase ϕ parte de obtener las ecuaciones paramétricas de la elipse lo cual se ha demostrado al resolver el sistema de ecuaciones Ec.(3.15), y de conocer los pares ordenados de intensidades con los que partimos para realizar el ajuste. Sabemos que cada par de datos experimentales guarda la información de la fase y que para cada uno de estos hay un correspondiente punto sobre la elipse del ajuste, podemos deducir que el valor que permita obtener la distancia mínima entre ambos puntos es aquel que reconstruya y represente la fase.

De forma similar a la Ec.(3.9) minimizamos la Ec.(3.25) calculando la derivada respecto a $\varphi_{i,j}$, esta ecuación se repetirá para todos pares de puntos $I_{1i,j}, I_{2i,j}$ asociándose un punto sobre la elipse del ajuste permitiendo reconstruir de manera puntual la fase.

Este problema puede ser resuelto utilizando métodos iterativos como el método de Newton pero tiene sus desventajas en nuestro propósito de desarrollar un algoritmo que sea sencillo y que ocupe menor cantidad en tiempo de computo, ciertas condiciones deben satisfacerse a saber determinar un intervalo alrededor del valor con el que inicia la iteración, lo que imposibilita conocer de manera precisa el intervalo en el cual está la posible solución, hay que tomar en cuenta que al ser una función periódica va ha tener mas de una solución como se observa en la Fig.(3.2).

$$l(\varphi) = \sqrt{(I_{1i,j} - A_{1i} - B_{1i} \cos(\varphi_{i,j}))^2 + (I_{2i,j} - A_{2i} - B_{2i} \cos(\varphi_{i,j} + \alpha))^2}, \quad (3.25)$$

$$\frac{dl}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left[\sqrt{[I_{1i,j} - A_{1i} - B_{1i} \cos(\varphi_{i,j})]^2 + [I_{2i,j} - A_{2i} - B_{2i} \cos(\varphi_{i,j} + \beta_i)]^2} \right] = 0, \quad (3.26)$$

$$\frac{dl}{d\varphi} = [B_{1i}I_{1i} - A_{1i}B_{1i}] \sin(\varphi_{i,j}) + [-B_{1i}^2] \cos(\varphi_{i,j}) \sin(\varphi_{i,j}) + \quad (3.27)$$

$$[B_{2i}I_{2i} - A_{2i}B_{2i}] \sin(\varphi_{i,j} + \beta_i) + [-B_{2i}^2] \cos(\varphi_{i,j} + \beta_i) \sin(\varphi_{i,j} + \beta_i) = 0.$$

$$d_1 = -(I_{1i,j} - A_{1i}) B_{1i}, \quad d_2 = \frac{B_{1i}^2}{2}, \quad d_3 = -(I_{2i,j} - A_{2i}) B_{2i}; \quad d_4 = \frac{B_{2i}^2}{2}. \quad (3.28)$$

$$d_1 \sin(\varphi) + d_2 \sin(2\varphi_{i,j}) + d_3 \sin(\varphi_{i,j} + \beta_i) + d_4 \sin(2\varphi_{i,j} + 2\beta_i) = 0. \quad (3.29)$$

$$\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 = 1. \quad (3.30)$$

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA
3.1. DESARROLLO

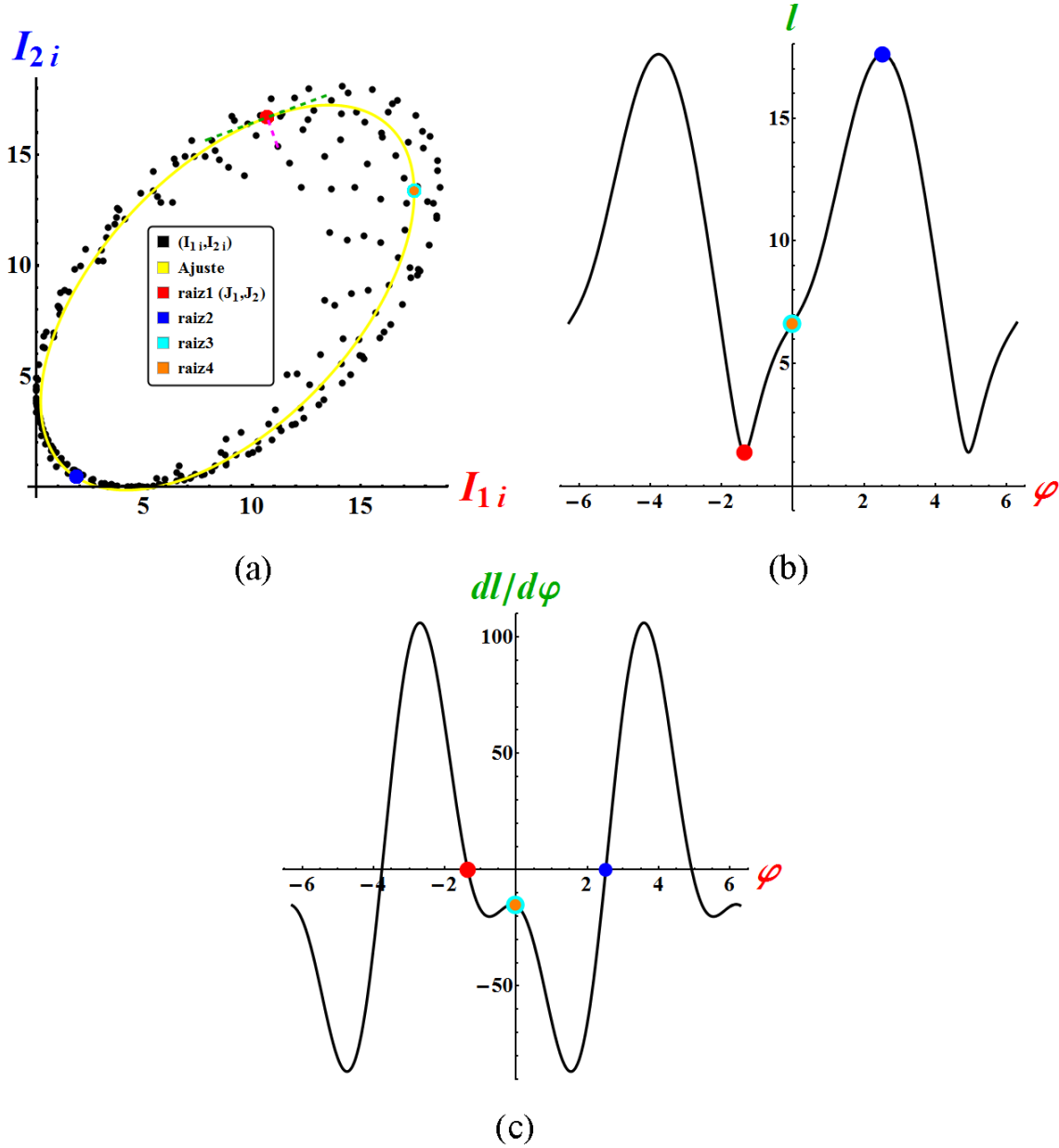


Figura 3.2: Se grafican las 4 soluciones de la Ec.(3.29): (a) el punto rojo representa un punto del ajuste que cumple la condición de distancia mínima entre (J_{1i}, J_{2i}) y $(I_{1i,j}, I_{2i,j})$, (b) gráfica de la Ec.(3.25) que representa la distancia, donde el punto rojo representa a $\varphi_{i,j}$ tal que $l(\varphi_{i,j})$ es un mínimo global, (c) la curva representa la derivada de la función de distancia donde el punto rojo y azul nos indican que el valor de la pendiente es cero en esos valores de $\varphi_{i,j}$, el punto anaranjado y cyan son raíces dobles que indican que hay un punto de inflexión en la curva para ese valor de $\varphi_{i,j}$.

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.2. SIMULACIÓN

Esta situación se simplifica al formar un sistema de dos ecuaciones con la Ec.(3.29) donde consideramos como variables $s = \cos(\varphi)$ y $r = \sin(\varphi)$ y la identidad Ec.(3.30). En la Fig.(3.2) se muestran las cuatro soluciones posibles φ de la Ec.(3.29) en un período $[-\pi, \pi]$. Como máximo se pueden encontrar cuatro soluciones reales, otra opción es que se tengan dos soluciones imaginarias y dos reales. De entre las cuatro soluciones elegimos el valor de φ tal que al sustituirse en la Ec.(3.25) de el valor más pequeño respecto a las otras raíces, así este valor es asignado a ϕ . La solución que obtenemos no se puede expresar de manera analítica pero si es una buena aproximación a la solución, además evita buscar la región en la cual está definida la solución, no es un método iterativo.

3.2. Simulación

3.2.1. Unidimensional

Podemos realizar un ajuste de conjuntos de pares dispersos de intensidades fuera del origen, sin necesidad de eliminar la luz de fondo utilizando dos interferogramas. Comprobamos que nuestra hipótesis inicial de medir el corrimiento y la fase utilizando la información de la elipse es posible, midiendo la distancia mínima entre un punto formado de las intensidades experimentales que son la base para el ajuste a una elipse y el punto asociado a ese punto experimental en el ajuste. Eliminamos ambigüedad para determinar la fase, derivado de los métodos iterativos como el método de Newton entre otros, utilizando dos ecuaciones reduciendo el tiempo de computo.

Partiremos de implementar el algoritmo en el caso unidimensional considerando que tomamos solo perfiles de intensidades que representan a las intensidades I_{1i}, I_{2i} aplicando las Ecs.(3.15) para obtener el ajuste de mínimos cuadrados. Mostramos algunos perfiles de intensidades para diferentes funciones de fase $\phi(x)$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones de la matriz (3.15) podemos obtener los parámetros A_1, A_2, B_1, B_2 y $\cos \alpha$ para definir las dos ecuaciones paramétricas de nuestro ajuste.

$$J_1 = A_1 + B_1 \cos \phi, \quad (3.31)$$

$$J_2 = A_2 + B_2 \cos(\phi + \alpha). \quad (3.32)$$

Mostramos las gráfica de los perfiles de intensidades, las correspondientes gráficas de los ajustes, la fases envuelta, desenvuelta y la $\phi(x)$ propuesta originalmente.

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.2. SIMULACIÓN

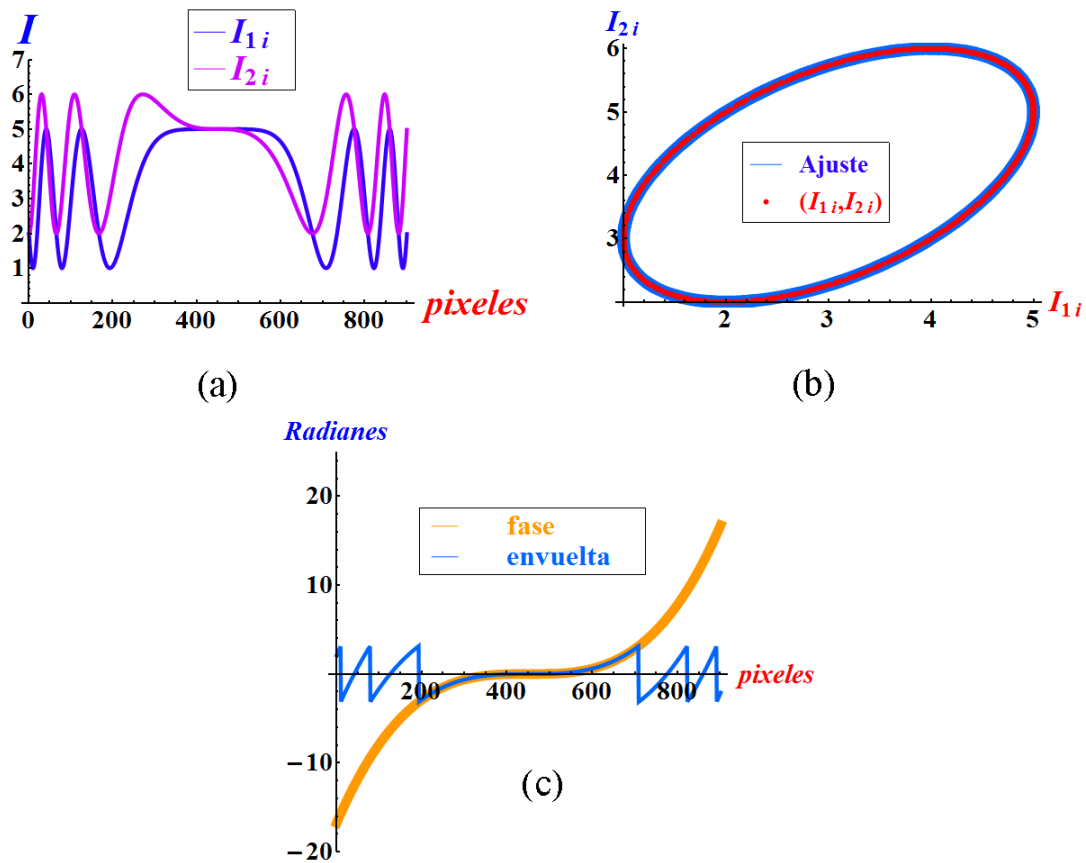


Figura 3.3: (a) Perfiles de intensidad I_{1i} , I_{2i} sin ruido, (b) Elipse (I_{1i}, I_{2i}) y ajuste de mínimos cuadrados, (c) $\phi(x) = x^3$: azul fase envuelta, naranja original.

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.2. SIMULACIÓN

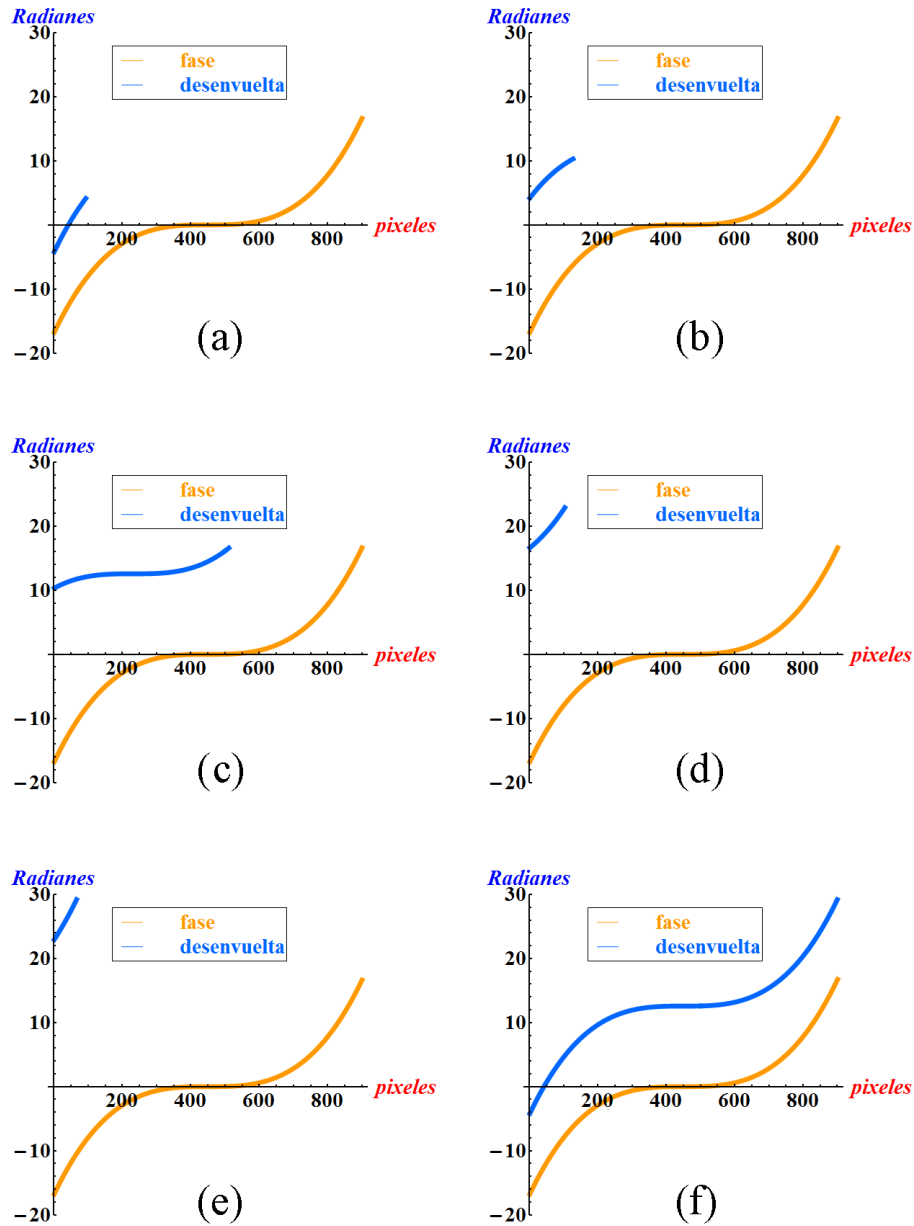


Figura 3.4: Las raíces de la Ec.(3.26) representa los valores de la fase: (a) Raíces obtenidas en el intervalo $(-\pi, \pi)$, (b) $(\pi, 3\pi)$, (c) $(3\pi, 5\pi)$, (d) $(5\pi, 7\pi)$, (e) $(7\pi, 9\pi)$, (f) Fase recupera de $(-\pi, 9\pi)$.

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA
3.2. SIMULACIÓN

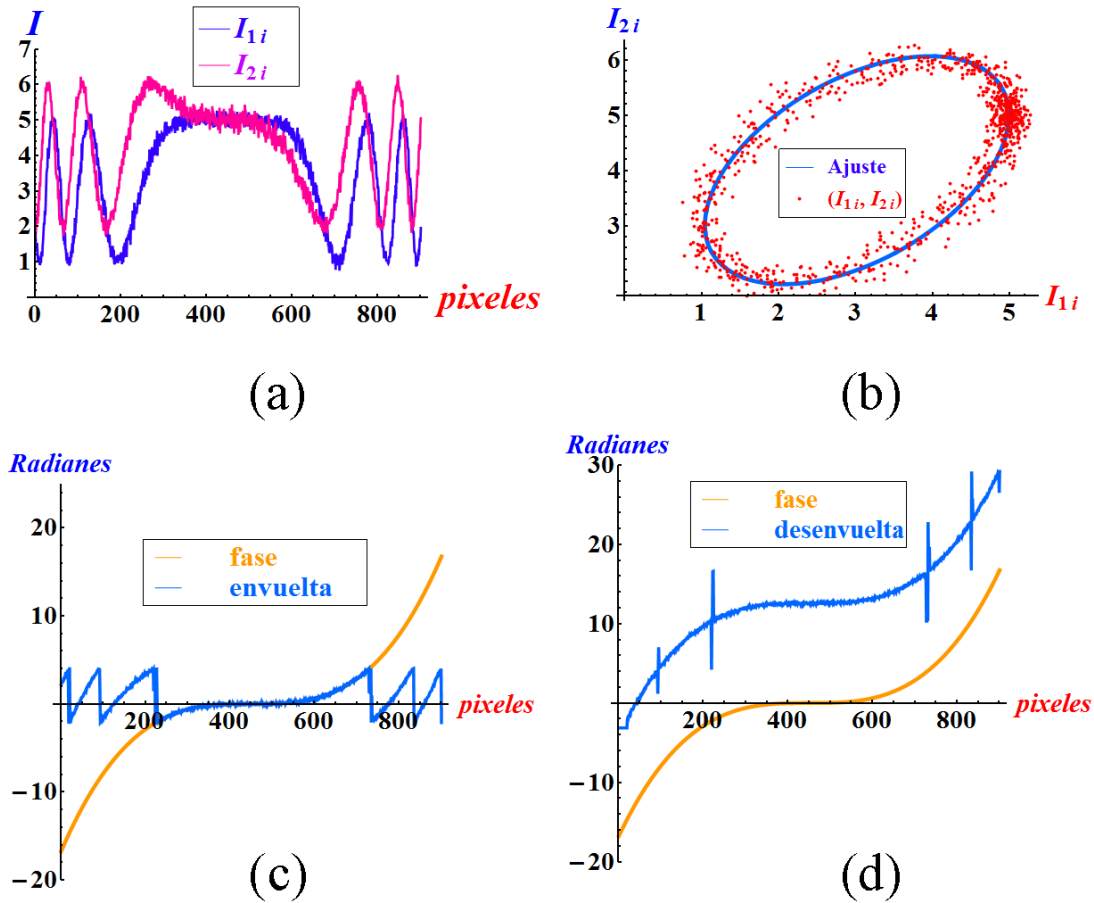


Figura 3.5: Perfiles de intensidad de la Fig.(3.3) con ruido, (a) Perfiles de intensidad I_{1i} , I_{2i} sin ruido, (b) Elipse (I_{1i}, I_{2i}) y ajuste de mínimos cuadrados, (c) $\phi(x) = x^3$: azul fase envuelta, naranja original. (d) $\phi(x) = x^3$: fase recupera obteniendo las raíces de $(-\pi, 9\pi)$, naranja original.

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA
3.2. SIMULACIÓN

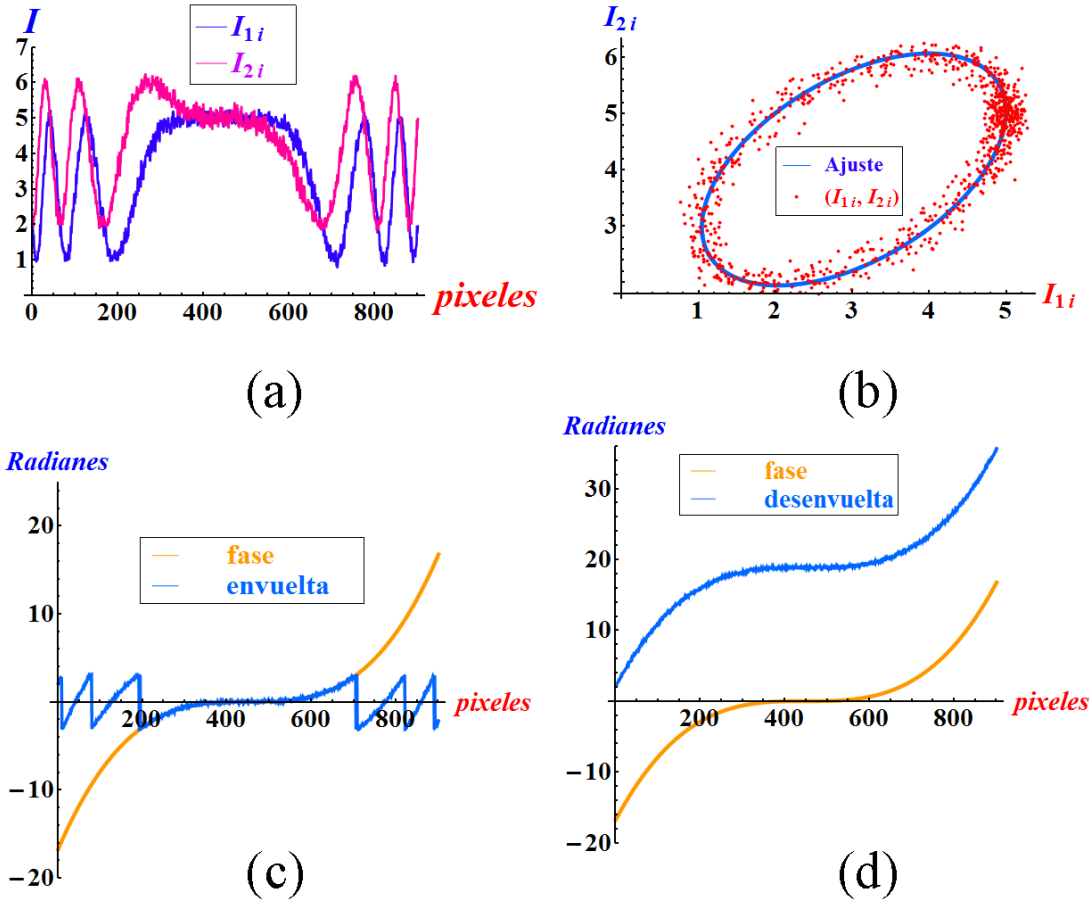
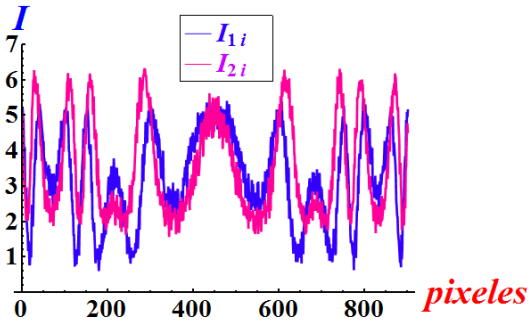
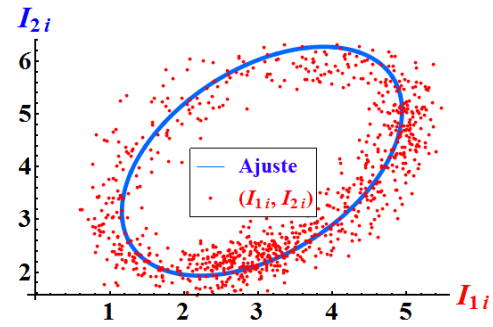


Figura 3.6: Perfiles de intensidad de la Fig.(3.3) con ruido, (a) Perfiles de intensidad I_{1i} , I_{2i} con ruido, (b) Elipse (I_{1i}, I_{2i}) y ajuste de mínimos cuadrados, (c) $\phi(x) = x^3$: azul fase envuelta utilizando la Ecs.(3.29, 3.30), naranja original. (d) $\phi(x) = x^3$: fase recupera aplicando algoritmo desenvolvimiento de fase, naranja original.

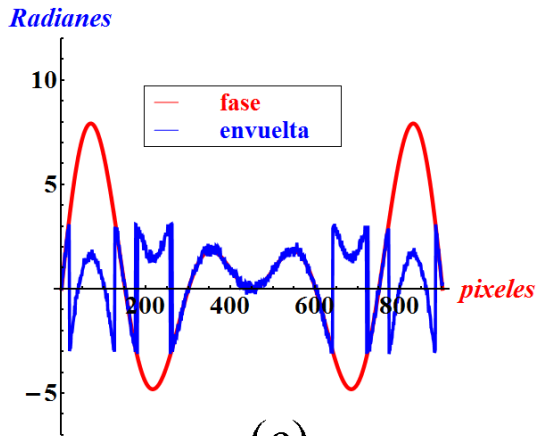
3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA
3.2. SIMULACIÓN



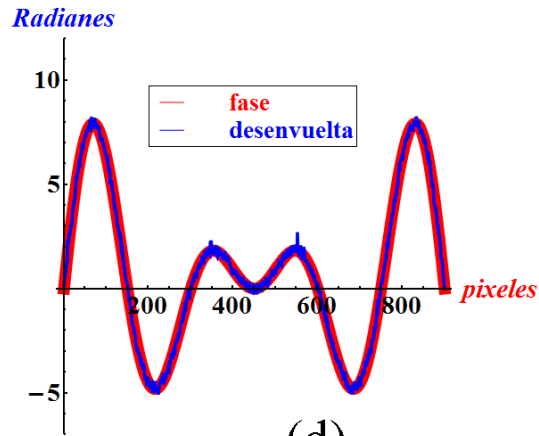
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.7: Perfiles de intensidad con ruido, (a) Perfiles de intensidad I_{1i} , I_{2i} con ruido, (b) Elipse (I_{1i}, I_{2i}) y ajuste de mínimos cuadrados, (c) $\phi(x) = x \sin(x)$: azul fase envuelta utilizando la Ecs.(3.29, 3.30), rojo fase original. (d) $\phi(x) = x \sin(x)$: azul fase recupera aplicando algoritmo desenvolvimiento de fase, rojo original.

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.2. SIMULACIÓN

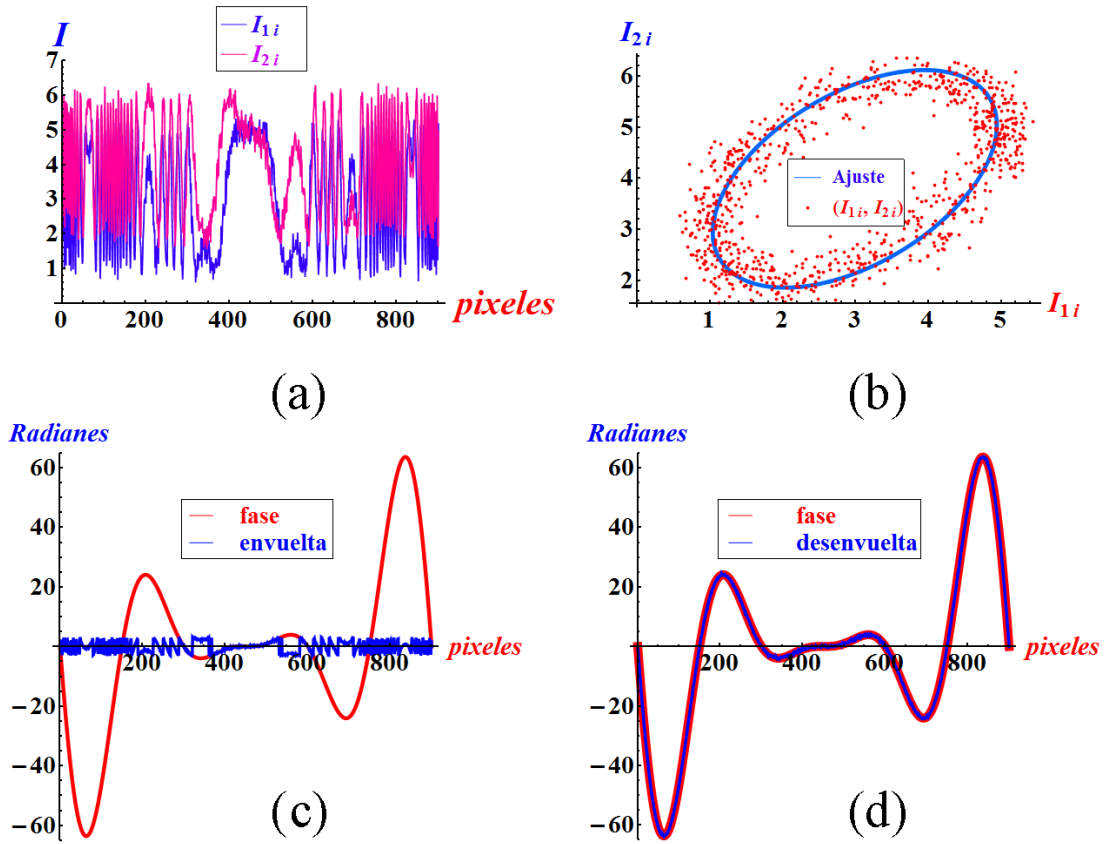


Figura 3.8: Perfiles de intensidad con ruido, (a) Perfiles de intensidad I_{1i} , I_{2i} con ruido, (b) Elipse (I_{1i}, I_{2i}) y ajuste de mínimos cuadrados, (c) $\phi(x) = x^2 \sin(t)$: azul fase envuelta utilizando la Ecs.(3.29, 3.30), rojo fase original. (d) $\phi(x) = x^2 \sin(x)$: azul fase recupera aplicando algoritmo desenvolvimiento de fase, rojo original.

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA
3.2. SIMULACIÓN

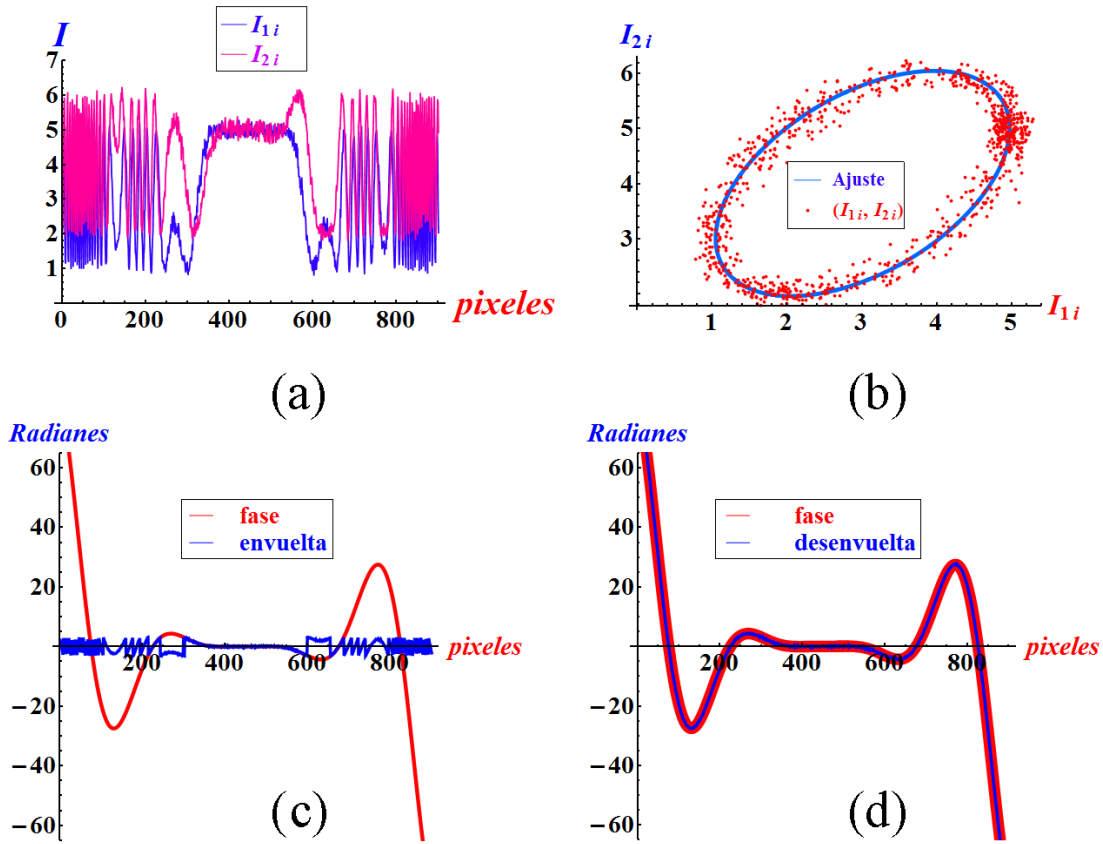


Figura 3.9: Perfiles de intensidad con ruido, (a) Perfiles de intensidad I_{1i} , I_{2i} con ruido, (b) Elipse (I_{1i}, I_{2i}) y ajuste de mínimos cuadrados, (c) $\phi(x) = x^3 \cos(x)$: azul fase envuelta utilizando la Ecs.(3.29, 3.30), rojo fase original, (d) $\phi(x) = x^3 \cos(x)$: azul fase recupera aplicando algoritmo desenvolvimiento de fase, rojo original.

3.2.2. Bidimensional

La Fig.(3.10) muestra la simulación de dos patrones de interferencia I_1, I_2 corridos en fase por $\pi/3$, con funciones de luz de fondo e iluminación gaussianas muy suaves, la función de fase propuesta es $\phi(x, y) = x^2 \sin x + y^2$, los patrones tienen dimensiones de 300×300 píxeles.

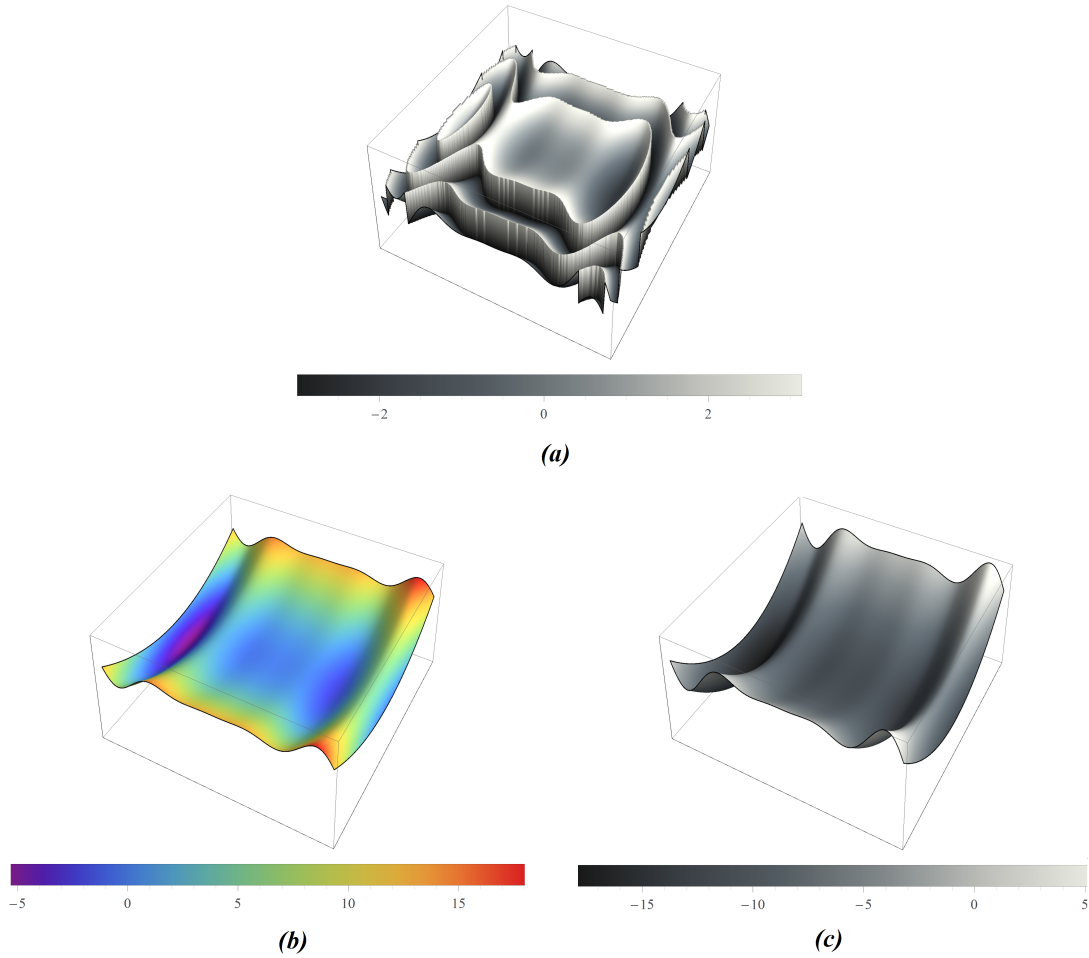


Figura 3.10: (a) Fase envuelta obtenida del algoritmo propuesto, (b) Fase propuesta $\phi(x, y) = x^2 \sin x + y^2$, (c) fase desenvuelta obtenida del ajuste.

Los patrones experimentales de la Fig.(3.11) tienen corrimiento de fase de $\pi/2$, de dimensiones de 150×200 píxeles de un acetato como objeto de fase, aplicando el algoritmo desarrollado obtenemos la fase envuelta (c) y aplicando un algoritmo de desenvolvimiento la fase desenvuelta (d).

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.2. SIMULACIÓN

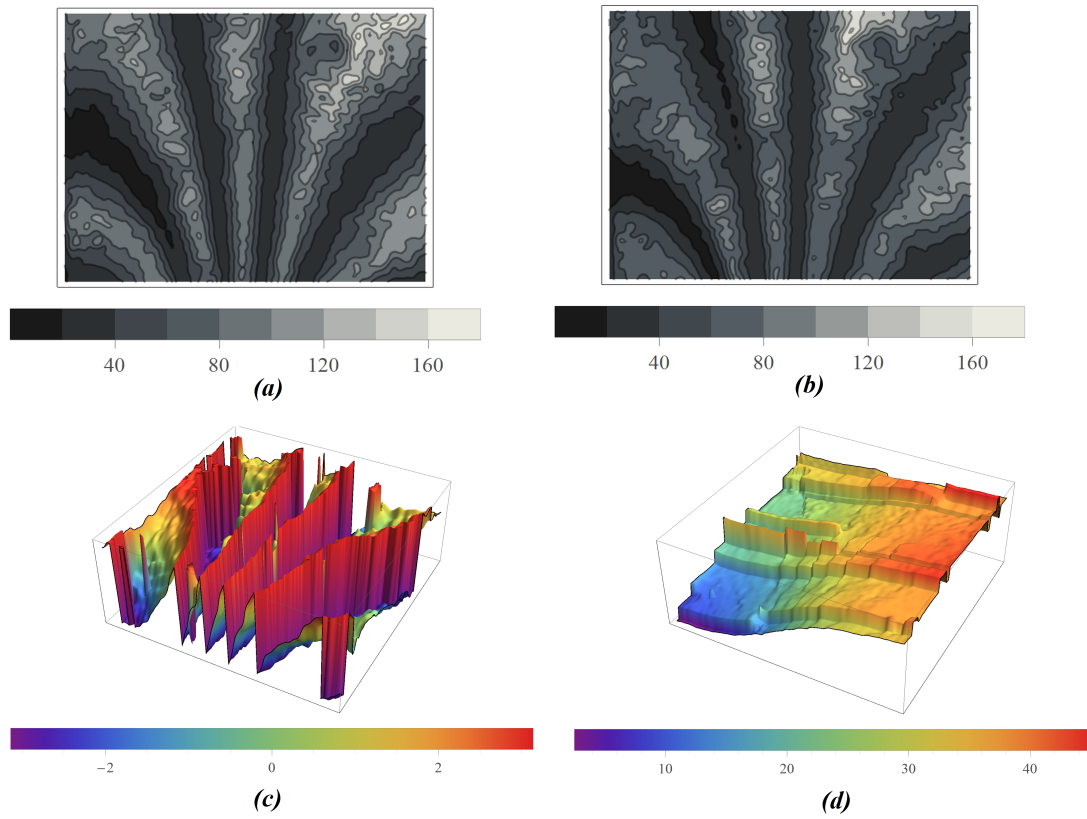


Figura 3.11: Patrones experimentales: (a) I_1 , (b) I_2 , (c) fase envuelta, (d) fase desenvuelta.

3.3. Evaluación de Patrones experimentales

Se realizó captura de patrones de interferencia utilizando un interferómetro de trayectoria común haciendo interferir los órdenes de difracción -1 y 0 de la replica de cada ventana, consideramos que las amplitudes de los campos que interfieren son funciones gaussianas suaves y que los corrimientos de fase introducidos por un trasladador son conocidos y constantes $\alpha_1 = 1,35319$ rad y $\alpha_2 = 2,70637$ rad, se utilizó una rejilla de 750 líneas por pulgada para una separación entre ventanas $x_0 = 2,8$ milímetros, un láser de Helio-Neón emitiendo con una longitud de onda de 632.8nm y en el esquema se muestra la configuración del interferómetro. El objeto de fase que se evaluó son dos fragmentos de acetatos que prensan una gota de agua colocada delante de una de las ventanas que están en el plano de entrada.

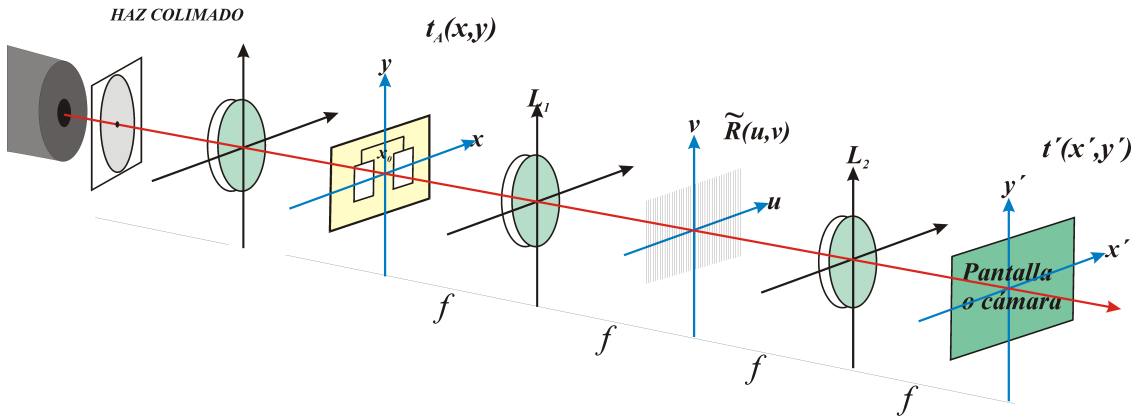


Figura 3.12: Interferómetro de trayectoria común.

3.3.1. Evaluación de interferogramas con igual luz de fondo y luz de modulación por el método ED

Utilizando la información de intensidad de los tres patrones de interferencia Ecs.(3.33-3.35) podemos realizar las siguientes manipulaciones para reconstruir la fase. Para este caso particular consideramos que la luz de fondo e iluminación son iguales en ambos patrones corridos en fase y podemos realizar un desarrollo más simple de la función de error y de los parámetros necesarios para realizar el ajuste.

$$I_0 = a + b \cos(\phi), \quad (3.33)$$

$$I_1 = a + b \cos(\phi + \alpha_1), \quad (3.34)$$

$$I_2 = a + b \cos(\phi + \alpha_2). \quad (3.35)$$

Partimos de la ecuación de la elipse en términos de I_0 , I_1 como se muestra en la Ec.(3.36),

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.3. EVALUACIÓN DE PATRONES EXPERIMENTALES

$$\frac{(I_0 - a)^2}{b^2} + \frac{(I_1 - a)^2}{b^2} - 2\frac{(I_0 - a)(I_1 - a)\cos\alpha}{b^2} = \sin^2\alpha. \quad (3.36)$$

Realizando un desarrollo similar a las Ecs.(3.4, 3.5, 3.8) del capítulo 2 obtenemos la función de error del sistema y minimizando respecto a las constantes S_0 , S_1 , S_2 que se quieren conocer se forma un sistema de ecuaciones el cual tiene solución, es importante mencionar que el ajuste se realiza tomando los perfiles de intensidades en los renglones i -ésimos de los interferogramas I_0 , I_1 .

$$E(S_0, S_1, S_2) = \sum_{j=r}^{r+R} (I_{0i,j}^2 + I_{1i,j}^2 + S_0 I_{0i,j} I_{1i,j} + S_1 (I_{0i,j} + I_{1i,j}) + S_2)^2, \quad (3.37)$$

$$S_0 = -2\cos\alpha_1, \quad S_1 = 2A(\cos\alpha_1 - 1), \quad S_2 = 2A^2(1 - \cos\alpha_1) - B^2\sin^2\alpha_1. \quad (3.38)$$

Partiendo de las constantes de la Ec.(3.38) obtenemos los valores de la luz de fondo A , luz de modulación B y el corrimiento de fase β_1 Ec.(3.39) que son los parámetros que se requieren para definir las ecuaciones paramétricas de una elipse Ec.(3.44) con las que se forma la elipse que representa el mejor ajuste a los puntos formados por el par ordenados de intensidades (I_0, I_1) .

$$A = -\frac{S_1}{S_0 + 2}, \quad B = \sqrt{\frac{4[S_1^2 - (S_0 + 2)S_2]}{(S_0 + 2)(4 - S_0^2)}}, \quad \cos\beta_1 = -\frac{S_0}{2}. \quad (3.39)$$

$$J_0 = A + B\cos\varphi, \quad J_1 = A + B\cos(\varphi + \beta_1). \quad (3.40)$$

Con las ecuaciones paramétricas J_0 , J_1 y las intensidades I_0 , I_1 ya establecidas proseguimos con ejecutar el método de extracción de fase basado en calcular la distancia Euclidiana (ED). Partiendo de la ecuación Ec.(3.41) que representa la distancia entre un punto formado por las intensidades (I_0, I_1) y un punto sobre la elipse obtenida del ajuste (J_0, J_1) .

$$l(\varphi) = \sqrt{(I_{1i,j} - A - B\cos(\varphi))^2 + (I_{2i,j} - A - B\cos(\varphi + \beta_1))^2}. \quad (3.41)$$

El método de la distancia Euclidiana consiste en asignar el valor de fase φ que tiene un punto (J_0, J_1) sobre la elipse que se obtiene del ajuste, al punto de (I_0, I_1) tal que la distancia entre ambos puntos sea mínima. Minimizando la Ec.(3.41) respecto φ se encontrara el valor del parámetro que cumpla la condición de la distancia mínima entre ambos puntos, este proceso se repetirá para cada punto (I_0, I_1) que se forma de los perfiles de intensidad de los interferogramas. La Ec.(3.42) tiene a lo más cuatro raíces reales que satisfacen la condición de distancia más corta entre los puntos, para descartar las otras raíces utilizamos la Ec.(3.41) acotando la solución en el rango de $(-\pi, \pi)$ con la identidad Ec.(3.43). De la Fig.(3.13)(f) cualitativamente vemos que la fase reconstruida tiene un nivel considerable de ruido.

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.3. EVALUACIÓN DE PATRONES EXPERIMENTALES

$$\frac{dl}{d\varphi} = [I_1 - A - B \cos(\varphi)] \sin(\varphi) + [I_2 - A] \sin(\varphi + \beta_1) - \frac{B}{2} \sin(2\varphi + 2\beta_1) = 0. \quad (3.42)$$

$$\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 = 1 \quad . \quad (3.43)$$

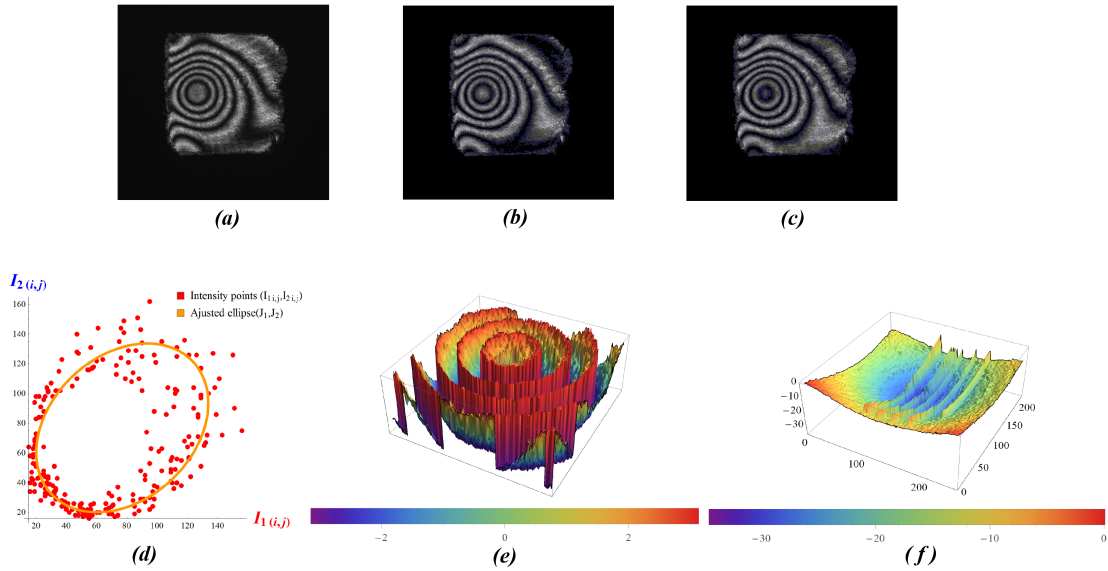


Figura 3.13: Interferogramas experimentales con corrimiento $\alpha_1 = 1,35319$, $\alpha_2 = 2,70637$: (a) I_1 , (b) I_2 , (c) I_3 , (d) Ajuste, (e) Fase envuelta por método ED, (f) Fase desenvuelta por el método de Itoh.

3.3.2. Evaluación de interferogramas secundarios con el método ED

Se puede mejorar los resultados manipulando los interferogramas de las Ecs.(3.33-3.35) al generar interferogramas secundarios Ecs.(3.44-3.46), al calcular la diferencia entre patrones $I_{01} = I_0 - I_1$, $I_{02} = I_0 - I_2$, $I_{12} = I_1 - I_2$ eliminando la luz de fondo permitiendo reconstruir de forma más limpia la fase, la amplitud de estos interferogramas secundarios esta dado por los términos $2b \sin(\frac{\alpha_1}{2})$, $2b \sin(\frac{\alpha_2}{2})$, $2b \sin(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2})$. Al eliminar la luz de fondo el par ordenado de intensidades se aproximan más a una elipse permitiendo mejorar el cálculo de la distancia Euclidiana y reconstruir mejor la fase.

La Fig.(3.14) muestra el algoritmo implementado en un diagrama de bloques.

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.3. EVALUACIÓN DE PATRONES EXPERIMENTALES

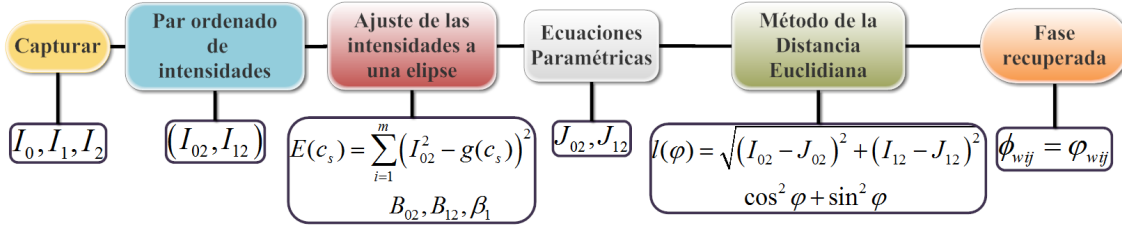


Figura 3.14: Diagrama de flujo de la simulación.

$$I_{01} = 2b \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \sin\left(\phi + \frac{\alpha_1}{2}\right), \quad (3.44)$$

$$I_{02} = 2b \sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \sin\left(\phi + \frac{\alpha_2}{2}\right), \quad (3.45)$$

$$I_{12} = 2b \sin\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \sin\left(\phi + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right). \quad (3.46)$$

Modelamos la ecuación de una elipse en términos de I_{02} , I_{12} Ec.(3.47),

$$\frac{I_{02}^2}{\sin^2 \frac{\alpha_2}{2}} + \frac{I_{12}^2}{\sin^2 \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}} - \frac{2I_{02}I_{12} \cos \frac{\alpha_1}{2}}{\sin \frac{\alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}} = 4b^2 \sin^2\left(\frac{\alpha_1}{2}\right). \quad (3.47)$$

La Ec.(3.48) representa la ecuación de error del sistema en términos de las constantes K_1 , K_2 , K_3 .

$$E(K_1, K_2, K_3) = \sum_{j=r}^{r+R} (I_{02}^2 + K_1 I_{12}^2 + K_2 I_{02} I_{12} + K_3)^2 = 0. \quad (3.48)$$

$$K_1 = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)} = \frac{B_{02}^2}{B_{12}^2}, \quad K_2 = -2 \frac{\sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)} \cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) = -2 \frac{B_{02}}{B_{12}} \cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right), \quad (3.49)$$

$$K_3 = -4b^2 \sin^2\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) = -B_{02}^2 \sin^2\left(\frac{\alpha_1}{2}\right). \quad (3.50)$$

En términos de las constantes K_1 , K_2 , K_3 , obtenemos los valores de los parámetros B_{02} , B_{12} y $\beta_1/2$ con los que construimos el ajuste, el cual es representado por las ecuaciones paramétricas de la elipse.

$$\frac{\beta_1}{2} = \arccos\left(-\frac{K_2}{2\sqrt{K_1}}\right), \quad B_{02} = \sqrt{\frac{4K_1 K_3}{K_2^2 - 4K_1}}, \quad B_{12} = \sqrt{\frac{4K_3}{K_2^2 - 4K_1}}. \quad (3.51)$$

$$J_{02} = B_{02} \cos \varphi, \quad J_{12} = B_{12} \cos\left(\varphi + \frac{\beta_1}{2}\right). \quad (3.52)$$

De manera similar la Ec.(3.53) representa la distancia entre los puntos (I_{02}, I_{12}) y (J_{02}, J_{12}) de la que se deriva el método de la distancia Euclidiana (ED) Ecs.(3.54, 3.55).

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.3. EVALUACIÓN DE PATRONES EXPERIMENTALES

$$l(\varphi) = \sqrt{(I_{02} - B_{02} \cos \varphi)^2 + (I_{12} - B_{12} \cos(\varphi + \frac{\beta_1}{2}))^2}, \quad (3.53)$$

$$\frac{dl}{d\varphi} = (I_{02} - B_{02} \cos(\varphi)) B_{02} \sin(\varphi) + I_{12} B_{12} \sin(\varphi + \frac{\beta_1}{2}) - \frac{B_{12}^2}{2} \sin(2\varphi + \beta_1) = 0. \quad (3.54)$$

$$\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 = 1. \quad (3.55)$$

Como resultado de generar interferogramas secundarios obtenemos mejores resultados en la reconstrucción de la fase como se ve en la Fig.(3.15)(c).

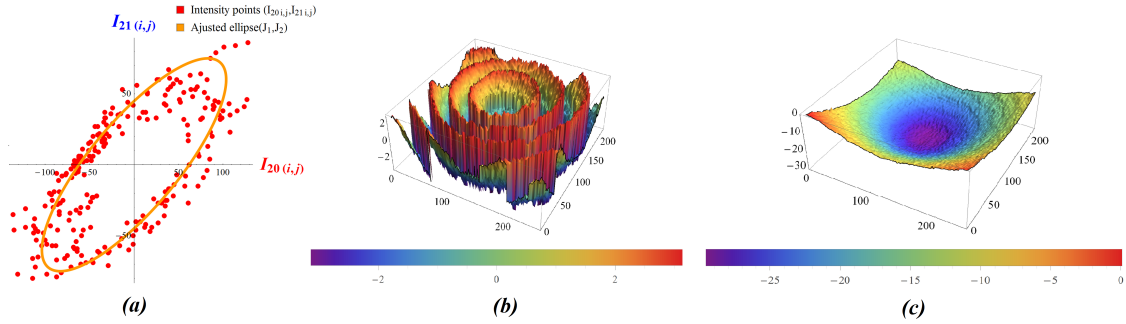


Figura 3.15: (a) Ajuste, (b) Fase envuelta por método de la distancia Euclidiana (ED), (c) Fase desenvuelta por el método de Itho.

3.3.3. Evaluación de patrones normalizados por el método de ED comparando con PSI de tres pasos

Otro caso particular es normalizando los patrones de interferencia, calculando la luz de fondo e iluminación Ecs.(3.56,3.57) a partir de las intensidades I_0, I_1, I_2 y corrimientos α_1, α_2 considerando que son conocidos estos valores.

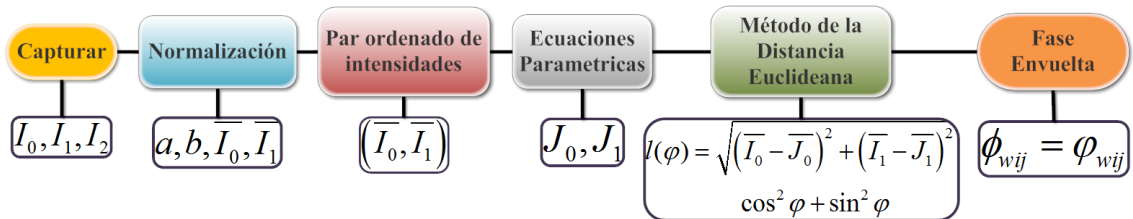


Figura 3.16: Diagrama de flujo de la simulación normalizando.

Con

$$a = \frac{(I_1 - I_0 \cos(\alpha_1)) \sin(\alpha_2) - (I_2 - I_0 \cos(\alpha_2)) \sin(\alpha_1)}{\sin \alpha_2 (1 - \cos \alpha_1) - (1 - \cos \alpha_2) \sin \alpha_1} \quad (3.56)$$

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.3. EVALUACIÓN DE PATRONES EXPERIMENTALES

$$b = \frac{\sqrt{(I_0 - a)^2 + (I_1 - a)^2 - 2(I_0 - a)(I_1 - a) \cos \alpha_1}}{\sin \alpha_1}. \quad (3.57)$$

Los patrones normalizados Ec.(3.58),

$$\bar{I}_0 = \cos \phi, \quad \bar{I}_1 = \cos(\phi + \alpha_1). \quad (3.58)$$

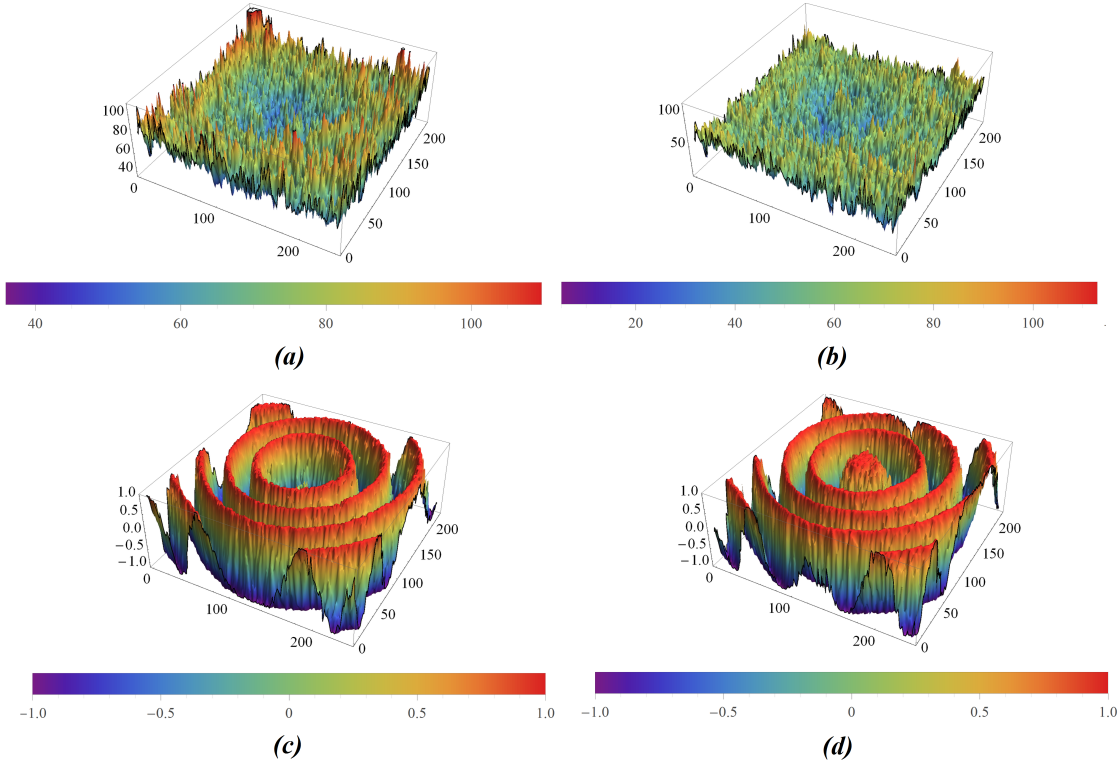


Figura 3.17: (a) Luz de Fondo, (b) Luz de modulación, (c) Patrón \bar{I}_1 normalizado, (d) Patrón \bar{I}_2 normalizado.

Por inspección las ecuaciones paramétricas son Ec.(3.59), la ecuación Ec.(3.60) que representa la distancia entre los puntos (\bar{I}_0, \bar{I}_1) y (J_0, J_1) .

$$J_0 = \cos \varphi, \quad J_1 = \cos(\varphi + \alpha_1). \quad (3.59)$$

Mediante las Ecs.(3.61,3.62) aplicamos el método de la distancia Euclidiana para interferogramas normalizados.

$$l(\varphi) = \sqrt{(\bar{I}_0 - \cos \varphi)^2 + (\bar{I}_1 - \cos(\varphi + \alpha_1))^2}, \quad (3.60)$$

$$\frac{dl}{d\varphi} = -\bar{I}_0 \sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi - \bar{I}_1 \sin(\varphi + \alpha_1) + \cos(\varphi + \alpha_1) \sin(\varphi + \alpha_1) = 0. \quad (3.61)$$

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.3. EVALUACIÓN DE PATRONES EXPERIMENTALES

$$\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 = 1. \quad (3.62)$$

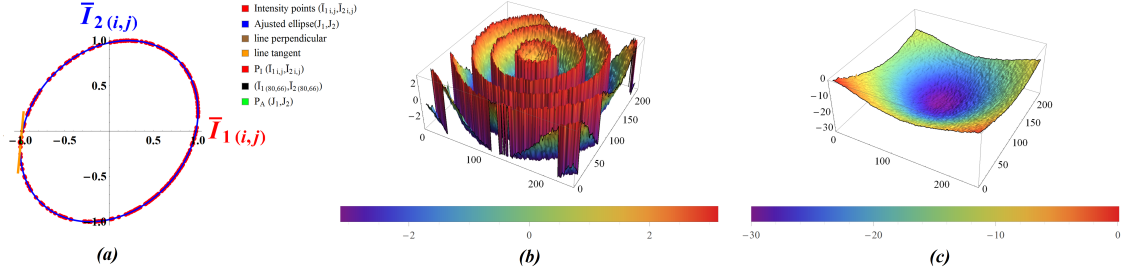


Figura 3.18: (a) Ajuste, (b) Fase envuelta por método DE, (c) Fase desenvuelta por el método de Itho.

También aplicando la técnica de PSI de tres pasos y comparamos ambas técnicas de manera cualitativa.

Para corrimientos arbitrarios,

$$\phi = \arctan \frac{(I_2 - I_3) \cos \alpha_1 - (I_1 - I_3) \cos \alpha_2 + (I_1 - I_2) \cos \alpha_3}{(I_2 - I_3) \sin \alpha_1 - (I_1 - I_3) \sin \alpha_2 + (I_1 - I_2) \sin \alpha_3}. \quad (3.63)$$

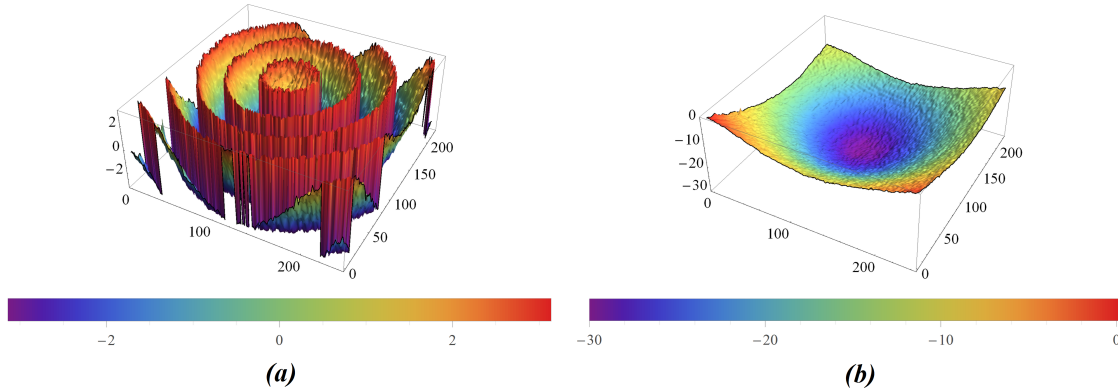


Figura 3.19: (a) Fase envuelta PSI(3), (b) Fase desenvuelta por el método de Itho.

Para comprobar cuantitativamente el método de la distancia Euclidiana con los patrones normalizado y el método de PSI de tres pasos realizamos una simulación comparando ambos métodos determinando la desviación estándar respecto a una fase propuesta, considerando que los campos que interfieren tienen una función de amplitud gaussiana suave y que son evaluados en un dominio espacial de un período, los corrimientos son $\alpha_1 = 2\pi/5$, $\alpha_2 = \pi/3$. La Fig.(3.20) muestra los interferogramas I_1 , I_2 , I_3 , la luz de fondo, luz de modulación y la fase ϕ de la simulación sin ruido.

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.3. EVALUACIÓN DE PATRONES EXPERIMENTALES

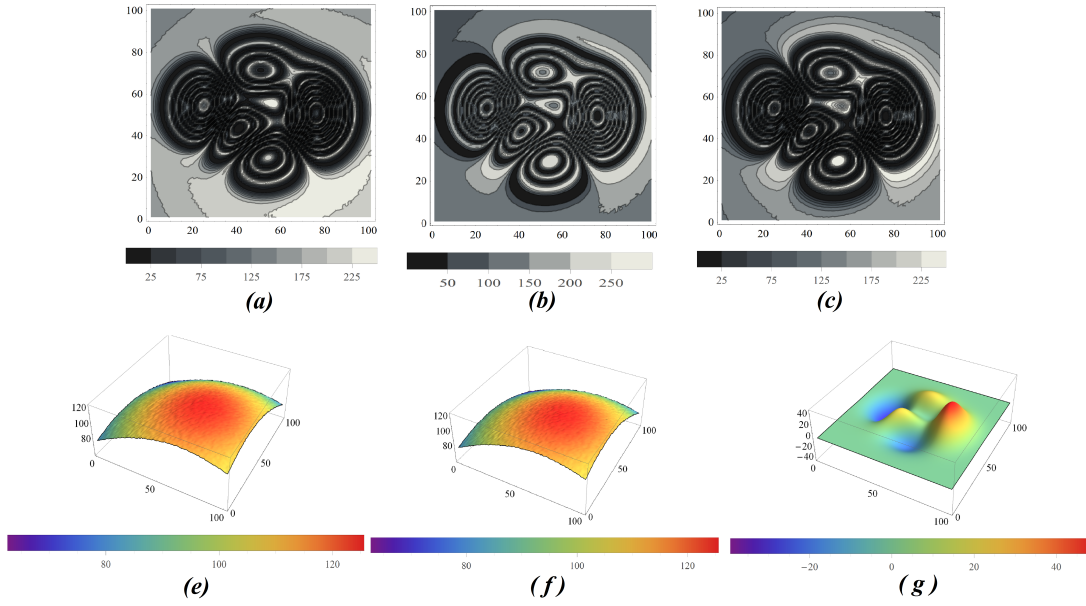


Figura 3.20: (a) I_1 , (b) I_2 , (c) I_3 , (d) luz de fondo, (e) luz de modulación, (f) fase $\phi(x, y) = 3(1-x)^2 e^{-(x^2)-(y+1)^2} - 10(x/5 - x^3 - y^5) e^{-x^2-y^2} - 1/3e^{-(x+1)^2-y^2}$.

La Fig.(3.21) muestra las gráficas de la luz de fondo, luz de modulación y los patrones normalizados que se derivan de las Ecs.(3.56-3.58) al incluir en la simulación un nivel muy bajo de ruido.

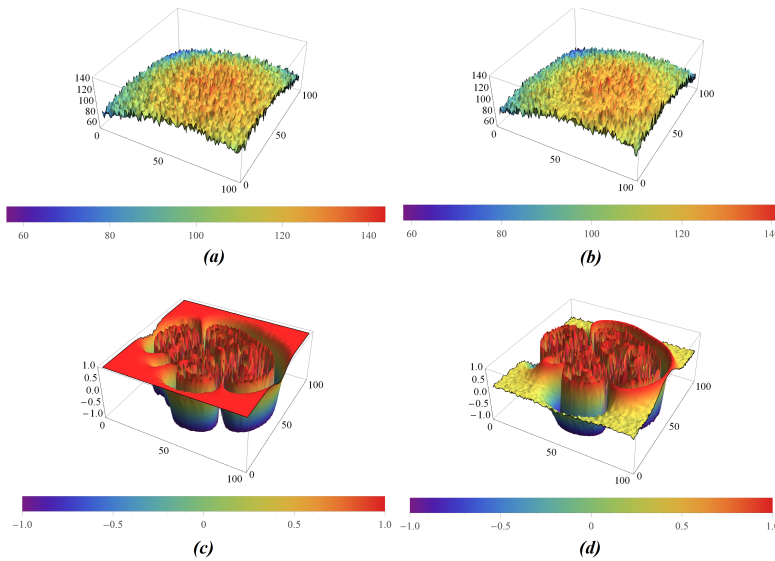


Figura 3.21: (a) Luz de Fondo, (b) Modulación, (c) Patrón \bar{I}_1 normalizado, (d) Patrón \bar{I}_2 normalizado.

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.3. EVALUACIÓN DE PATRONES EXPERIMENTALES

En la Fig.(3.22) se gráfica la desviación estándar por cada renglón de la fase recuperada por los métodos (ED) y (PSI), observando que la desviación estándar coincide en ambos métodos de extracción de fase.

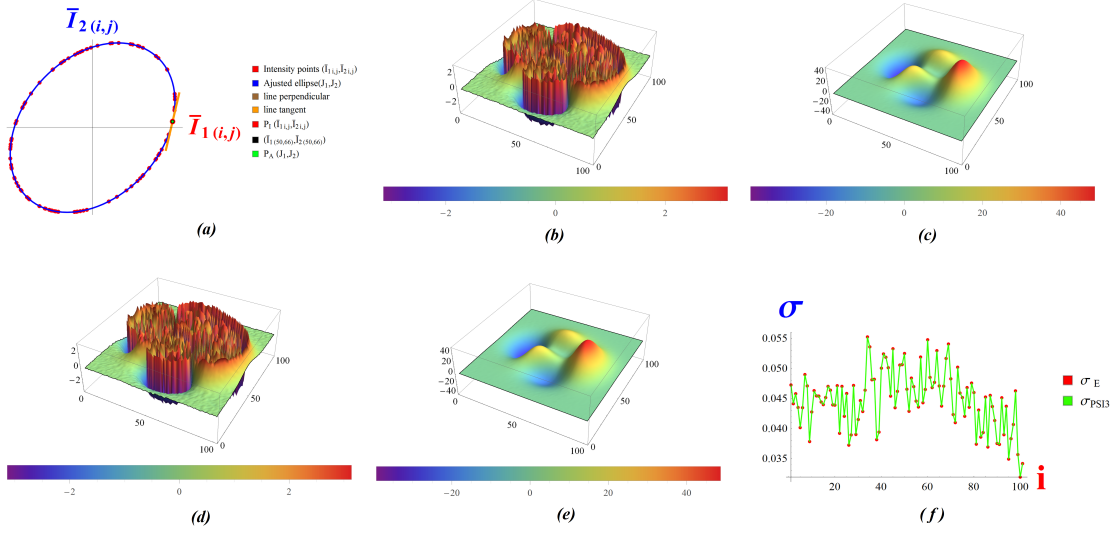


Figura 3.22: (a) Ajuste, (b) fase envuelta por método de elipse y distancia (ED), (c) fase desenvuelta método de elipse y distancia (ED), (d) fase envuelta PSI(tres pasos), (e) fase desenvuelta PSI(tres pasos), (f) Desviación estándar (ED) (rojo) y PSI(tres pasos).(verde).

3.3.4. Análisis de error del método ED al implementarse sobre los patrones secundarios I_{01} , I_{12}

Para realizar un análisis más detallado hemos optado por aplicar el método de la distancia Euclidiana considerando los tres patrones de interferencia definidos anteriormente en las Ecs.(3.33-3.35) con luz de fondo a y modulación b con variaciones espaciales suaves, realizando el ajuste con los patrones de interferencia secundarios I_{01} , I_{12} que dependen de los corrimientos α_1 y α_2 , como en los casos anteriores al eliminar la luz de fondo se estima que se obtendrá mejores resultados al reconstruir la fase. La ventaja consiste en obtener ambos corrimientos de fase de un solo ajuste como se muestra en el desarrollo de las ecuaciones para posteriormente aplicar el cálculo de la fase utilizando la distancia euclidiana. También se realizara un análisis de error más exhausto para caracterizar el algoritmo.

Una representación gráfica de los interferogramas descritos en la Ecs.(3.33-3.35) es mostrada en la Fig.(3.23)(1). Estos interferogramas fueron obtenidos considerando los corrimientos de fase de $\alpha_1 = \pi/3$ y $\alpha_2 = 2\pi/3$, y la fase del objeto, luz de fondo, y contraste de la forma

$$\phi(x, y) = \frac{10}{3} (x^2 \sin x + y^2), \quad (3.64)$$

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.3. EVALUACIÓN DE PATRONES EXPERIMENTALES

$$a(x, y) = a_0 \exp \left(-\frac{(x - x_a)^2}{\sigma_{ax}^2} - \frac{(y - y_a)^2}{\sigma_{ay}^2} \right), \quad (3.65)$$

$$b(x, y) = b_0 \exp \left(-\frac{(x - x_b)^2}{\sigma_{bx}^2} - \frac{(y - y_b)^2}{\sigma_{by}^2} \right), \quad (3.66)$$

donde los valores constantes: $a_0 = 7$, $x_a = -3,6$, $y_a = -3,5$, $\sigma_{ax} = 27$, $\sigma_{ay} = 26$; $b_0 = 3,5$, $x_b = 2,9$, $y_b = 3,9$, $\sigma_{bx} = 25$, $\sigma_{by} = 23$ fueron elegidos por simplicidad. La forma de ϕ , a y b fueron elegidos de una común situación experimental. Fig.(3.23)(2) muestra el objeto de fase, fondo y mapa de contraste usado en los interferogramas. Las imágenes en la Fig.(3.23) fueron codificados en un mapa de colores de rainbow con niveles de 8 bits y de 200×200 en resolución, entonces $m = 200$ y $n = 200$. En el desarrollo matemático omitimos las coordenadas.

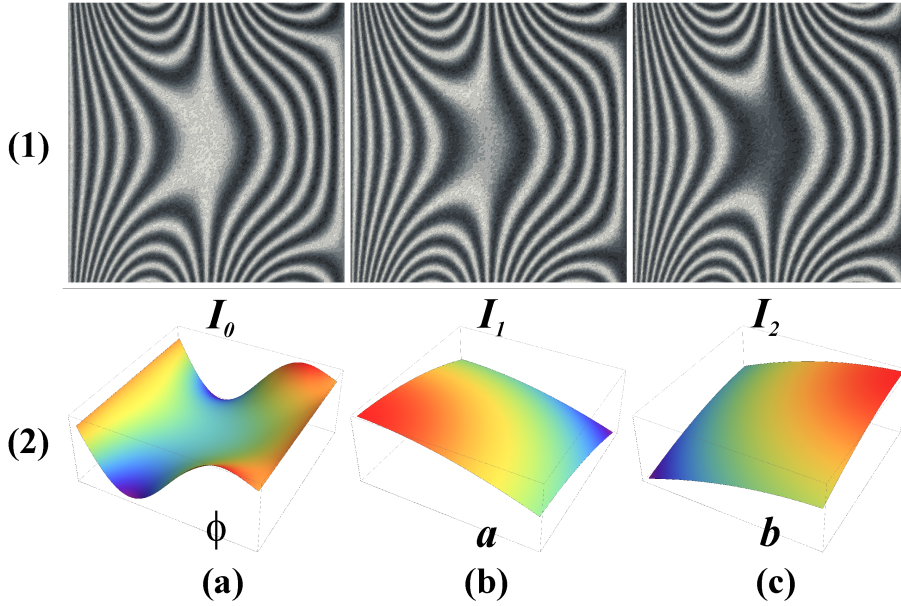


Figura 3.23: Interferogramas I_0 , I_1 , I_2 con $\alpha_1 = \pi/3$, $\alpha_2 = 2\pi/3$ (a2) función de fase ϕ ,(b2) luz de fondo a y (c2) luz de modulación b .

$$I_0 - I_1 = 2b \sin \left(\frac{1}{2} \alpha_1 \right) \sin \left(\phi + \frac{1}{2} \alpha_1 \right), \quad (3.67)$$

$$I_1 - I_2 = 2b \sin \left(\frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) \right) \sin \left(\phi + \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) \right), \quad (3.68)$$

y después de varias operaciones ϕ también puede ser eliminado,

$$\sin^2 \left(\frac{\alpha_2}{2} \right) = \frac{(I_0 - I_1)^2}{4b^2 \sin^2 (\alpha_1/2)} + \frac{(I_1 - I_2)^2}{4b^2 \sin^2 ((\alpha_2 - \alpha_1)/2)} - \frac{(I_0 - I_1)(I_1 - I_2) \cos (\alpha_2/2)}{2b^2 \sin (\alpha_1/2) \sin ((\alpha_2 - \alpha_1)/2)}. \quad (3.69)$$

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.3. EVALUACIÓN DE PATRONES EXPERIMENTALES

Típicamente, los interferogramas son capturados con una cámara *CCD*, así las variables toman valores discretos, tal como $X = j\Delta X = X_j$, $Y = i\Delta Y = Y_i$, donde ΔX y ΔY son los campos de la cámara *CCD*, y por lo tanto la notación $K(x, y) = K(x_i, y_i) = K_{i,j}$, con $K = I, a, b, \phi$ serán asumidos. Así, los interferogramas en la Ecs.(3.33-3.35) se convierten en la matriz de $m \times n$, con $i = 1 \cdots m$ y $j = 1 \cdots n$.

El presente método extrae el objeto de fase por renglones de los interferogramas secundarios dados en la Ecs.(3.67,3.68). Para el i -ésimo renglón, los pares ordenados $(p_{i,j}, q_{i,j})$ son formados, asignando a estos el nombre de puntos de intensidad, con $p = I_0 - I_1$, y $q = I_1 - I_2$. Note que los interferogramas secundarios tienen la forma de las ecuaciones paramétricas, donde $\phi_{i,j}$ es una función de fase desconocida que juega el rol de parámetro, donde por cada valor de $\phi_{i,j}$ un punto de intensidad $(p_{i,j}, q_{i,j})$ es asignado.

Entonces, una gráfica de estos puntos deben obedecer a una elipse si b_i es una constante, pero b_i es una función de x e y estos puntos de intensidad van a estar dispersos alrededor de una elipse.

Sin embargo, si b_i varía suavemente los puntos de intensidad forman una elipse y su ajuste puede ser viable. Superponiendo dos haces de amplitudes homogéneas podemos obtener b_i suavemente en un experimento. Entonces, si B_i es una constante que sustituye a b_i , y β_{i1}, β_{i2} son los corrimientos de fase que sustituyen a α_1 y α_2 en la Ec.(3.69), nosotros podemos escribir en una simple forma,

$$\epsilon_{i,j}(c_{0,i}, c_{1,i}, c_{2,i}) = (p_{i,j}^2 - c_{0,i} - c_{1,i}p_{i,j}q_{i,j} - c_{2,i}q_{i,j}^2), \quad (3.70)$$

donde las constantes c_{ki} , $k = 0, 1, 2$, dependen en B_i, β_{i1} y β_{i2} de la forma,

$$c_{0,i} = 4B_i^2 \sin^2(\beta_{2,i}/2) \sin^2(\beta_{1,i}/2), \quad (3.71)$$

$$c_{1,i} = 2 \frac{\sin(\beta_{1,i}/2) \cos(\beta_{2,i}/2)}{\sin[(\beta_{2,i} - \beta_{1,i})/2]}, \quad (3.72)$$

$$c_{2,i} = -\frac{\sin^2(\beta_{2,i}/2)}{\sin^2[(\beta_{2,i} - \beta_{1,i})/2]}. \quad (3.73)$$

El error local ϵ_{ij} asociado al i -ésimo renglón y j -ésima columna en la Ec.(3.70) depende en las c_{ki} que surgen por la aproximación usada principalmente en b_i . La forma como es descrito este error puede ser interpretado como la aproximación de los datos medidos p_{ij}^2 a una función de la forma $c_{0,i} + c_{1,i}p_{ij}q_{ij} + c_{2,i}q_{ij}^2$. Un error global tomando en cuenta todos los valores de $j = 1, \dots, n$ para determinar c_{ki} por el método de mínimos cuadrados puede ser descrito por,

$$\epsilon_i(c_{0,i}, c_{1,i}, c_{2,i}) = \sum_{j=1}^n (p_{i,j}^2 - c_{0,i} - c_{1,i}p_{i,j}q_{i,j} - c_{2,i}q_{i,j}^2)^2, \quad (3.74)$$

donde ϵ_i es la suma de los errores cuadráticos en el i -ésimo renglón. La minimización de ϵ_i se puede alcanzar por igualar a cero las primeras derivadas parciales de ϵ_i con respecto a c_{ki} y por resolver el sistema de ecuaciones formado. Uno puede llegar a probar,

$$c_i = (Q_i^T Q_i)^{-1} Q_i^T p_i, \quad (3.75)$$

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.3. EVALUACIÓN DE PATRONES EXPERIMENTALES

y $(\dots)^T$, $(\dots)^{-1}$ representan la transpuesta y la inversa de una matriz, c_i es un vector columna de 3×1 , Q_i es una matriz de $n \times 3$, y p_i es un vector columna de $n \times 1$, dado por,

$$c_i = (c_{0,i}, c_{1,i}, c_{2,i})^T, \quad (3.76)$$

$$Q_i = \begin{pmatrix} 1 & p_{i,1}q_{i,1} & q_{i,1}^2 \\ 1 & p_{i,2}q_{i,2} & q_{i,2}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & p_{i,n}q_{i,n} & q_{i,n}^2 \end{pmatrix}, \quad (3.77)$$

$$p_i = (p_{i,1}^2, p_{i,2}^2, \dots, p_{i,n}^2)^T, \quad (3.78)$$

con c_i calculado de la Ec.(3.75), los parámetros B_i , β_{i1} , y β_{i2} pueden ser obtenidos de la Ecs.(3.71-3.73), obteniendo,

$$\cos\left(\frac{\beta_{2i}}{2}\right) = \frac{c_{1,i}}{2\sqrt{-c_{2,i}}}, \quad (3.79)$$

$$\tan\left(\frac{\beta_{1,i}}{2}\right) = \frac{\sqrt{-4c_{2,i} - c_{1,i}^2}}{2 + c_{1,i}}, \quad (3.80)$$

$$B_i = \frac{-2}{4c_{2,i} + c_{1,i}^2} \sqrt{-c_{0,i}c_{2,i}(1 + c_{1,i} - c_{2,i})}. \quad (3.81)$$

Entonces las ecuaciones paramétricas de la elipse que representan el mejor ajuste para los datos experimentales en i -ésimo renglón son escritas como

$$P_{i,j} = 2B_i \sin\left(\frac{1}{2}\beta_{1,i}\right) \sin\left(\varphi_j + \frac{1}{2}\beta_{1,i}\right), \quad (3.82)$$

$$Q_{i,j} = 2B_i \sin\left(\frac{1}{2}(\beta_{2,i} - \beta_{1,i})\right) \sin\left(\varphi_j + \frac{1}{2}(\beta_{1,i} + \beta_{2,i})\right), \quad (3.83)$$

donde $\varphi_j = -\pi + 2\pi j/n$ es elegida como una función lineal.

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.3. EVALUACIÓN DE PATRONES EXPERIMENTALES

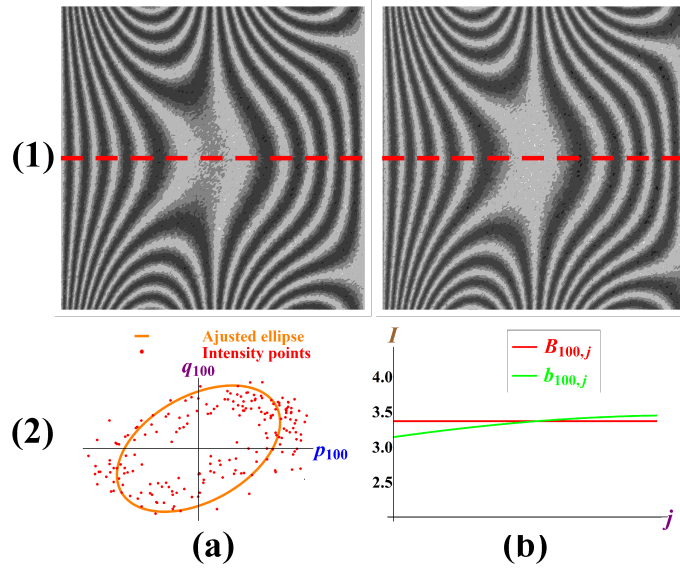


Figura 3.24: (1) Interferogramas secundarios, (a2) gráfica de los puntos de intensidad para $i = 100$ indicado en línea roja discontinua en (1), (b2) y muestra b_{100} con B_{100} para una comparación.

Fig.(3.24) muestra los interferogramas secundarios, una línea roja discontinua en el $i = 100$ renglón indica el conjunto de datos tomados para formar los puntos de intensidad $(p_{100,j}, q_{100,j})$. En la Fig.(3.24)(a2) estos puntos son graficados con puntos rojos, y estos son ajustados aplicando el proceso explicado arriba, estableciendo $B_{100} = 3,32$, $\beta_{1,100} = 1,0422$ y $\beta_{2,100} = 2,0889$, el cual genera la gráfica de la elipse con una línea naranja. En este ejemplo numérico $b_{100,j}$ es aproximado a una línea horizontal de altura $B_{100} = 3,32$, en la Fig.(3.24)(b2) estas curvas son graficadas juntas para hacer una comparación. Los errores en el cálculo de los corrimientos de fase son de $0,0049 = \alpha_1 - \beta_{1,100}$ rad y $0,0055 = \alpha_2 - \beta_{2,100}$ rad. En la forma para recuperar ϕ_{ij} , proponemos calcular la distancia Euclidiana de un punto (p_{ij}, q_{ij}) a la elipse ajustada dada en su forma paramétrica en la Ecs.(3.82,3.83). Entonces, la distancia de un punto experimental (p_{ij}, q_{ij}) a un punto de la elipse del ajuste puede ser dada en términos de ϕ Ec.(3.84). Porque la distancia Euclidiana de un punto a una elipse es definida como la distancia más corta, entonces el valor de la fase paramétrico ϕ sobre un punto de la elipse ajustada que satisface esta condición puede ser encontrada por calcular el mínimo de $L_i(\phi)$, que es igualando a cero la primera derivada, y resolver para ϕ . Así, usando las Ecs.(3.82, 3.83) la siguiente expresión puede ser obtenida,

$$L_i = \sqrt{(p_{i,j} - P_i(\varphi))^2 + (q_{i,j} - Q_i(\varphi))^2}. \quad (3.84)$$

$$0 = s_{i,j} \cos\left(\varphi + \frac{1}{2}\beta_{1,i}\right) + u_{i,j} \cos\left(\varphi + \frac{1}{2}(\beta_{1,i} + \beta_{2,i})\right) - v_i \sin(2\varphi + \beta_{1,i}) - \tilde{n}_i \sin(2\varphi + \beta_{1,i} + \beta_{2,i}), \quad (3.85)$$

donde $s_{ij} = p_{ij} \sin(\beta_{2,i}/2)$, $u_{ij} = q_{ij} \sin[(\beta_{2,i} - \beta_{1,i})/2]$, $v_i = B_i \sin^2(\beta_{1,i}/2)$, $\tilde{n}_i = B_i \sin^2[(\beta_{2,i} - \beta_{1,i})/2]$ son conocidos.

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.3. EVALUACIÓN DE PATRONES EXPERIMENTALES

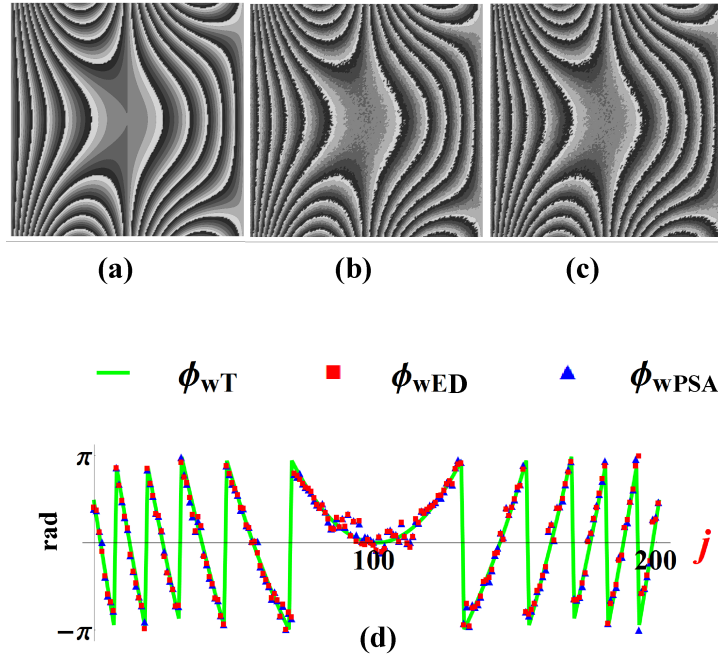


Figura 3.25: Fase envuelta, medición de 342 de 1000 con ruido Gaussiano de $\sigma = \pi/20$ en α_1 , (a) teórica, calculado por (b) *ED*, y (c) método *PSA*, y (d) datos sobre el renglón $i = 100$.

Resolviendo para ϕ en la Ec.(3.85) no es una tarea trivial, de hecho no existe una solución analítica. Nosotros encontramos ϕ por resolver numéricamente un sistema de ecuaciones formado con la Ec.(3.85) y la identidad trigonométrica $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$, cuya solución da 4 raíces, de las cuales, las complejas son discriminadas, mientras las reales son sustituidas en la Ec.(3.84) y el mínimo valor es elegido como una solución deseada, nombremos φ_{ij} . Entonces esta fase es asignada a la fase envuelta en este punto, $\phi_{wij} = \varphi_{ij}$, y de esta manera la fase del objeto en el punto (i, j) es encontrado. Este proceso es repetido para $j = 1 \dots n$ y para $i = 1 \dots m$ para obtener la fase envuelta en cada punto en el mapa, el cual es nombrado el método de la distancia Euclidiana (*ED*).

Figs.(3.25)(a-c) muestra la fase envuelta teórica ϕ_{wT} , la calculado por *ED* ϕ_{wED} , y por la típica fórmula en *PSI* ϕ_{wPSI} , respectivamente de Ecs.(3.33-3.35) esta fórmula es obtenida,

$$\tan \phi = \frac{I_0 (\cos \beta_1 - \cos \beta_2) - I_1 (1 - \cos \beta_2) + I_2 (1 - \cos \beta_1)}{I_0 (\sin \beta_1 - \sin \beta_2) + I_1 \sin \beta_2 - I_2 \sin \beta_1}. \quad (3.86)$$

Fig.3.25(d) muestra el $i = 100$ renglón de un mapa de fase envuelta, en línea verde ϕ_{wT100} , en cuadrados rojos $\phi_{wED,100}$, y en triángulos azules $\phi_{wPSI,100}$, graficados juntos para mostrar la discrepancia entre el presente y el típico método con respecto a la fase teórica. Además actualmente en esta simulación numérica la fase envuelta que representa la medición 342 de $r = 1000$. Para mostrar con mejor claridad la comparación de aproximación entre los métodos *ED* y *PSA*: Fig.3.26(a) muestra con los puntos rojos las 1000 mediciones de $\bar{\phi}_{wED,100}$ para $j = 84$, a partir del cual se calcula la media y se representa con una línea roja continua que tiene un valor de $\phi_{wED,100} = 0,9878$ rad, y en este

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.3. EVALUACIÓN DE PATRONES EXPERIMENTALES

punto $\phi_{wT,100} = 0,950772$ rad es graficado con una línea verde continua. El porcentaje del bias con respecto a un período de 2π es de $\epsilon_{ED,100} = 0,0059023$ calculado por medio de $\epsilon_{ED,100} = |\bar{\phi}_{wED,100} - \phi_{wT,100}|/2\pi$, mientras la desviación es de $\sigma_{ED,100} = 0,220225$ rad, lo cual es indicado con dos líneas purpuras discontinuas. Los subíndices ED y PSA en ϕ , σ , ϵ indicando que los métodos ED y PSA fueron aplicados. Si este cálculo es repetido para cada j una variación de la curva para $\epsilon_{ED,100}$ es obtenida como se muestra en la Fig. 3.26(b), similarmente para $\sigma_{ED,100}$ como se muestra en la Fig. 3.26(c), y similarmente para $\bar{\phi}_{wED,100}$ como se muestra en la Fig. 3.26(d). Para ver en mejor detalle, la Fig. 3.26(e) muestra un ejemplo de la Fig. 3.26(d) desde $j = 80$ hasta $j = 120$ para ilustrar el bias y la desviación estándar en el método ED que es indicado con la barra de tamaño en la gráfica. Observando la Fig. 3.26(b) y 3.26(c), el porcentaje de bias y la desviación estándar es diferente para cada punto j como esperamos. Una forma para cuantificar la aproximación en este renglón es por el promedio de $\epsilon_{ED,100}$ y $\sigma_{ED,100}$ son calculados, dando $\bar{\epsilon}_{ED,100} = 0,00883035$ y $\bar{\sigma}_{ED,100} = 0,147919$ rad, los cuales son graficados con líneas continuas rojas y azules, respectivamente. Si los cálculos para el método (ED) arriba explicado son repetidos para el método PSA usando los mismos interferogramas, similares gráficas pueden ser obtenidas, entonces para una comparación de ambos métodos: Fig. 3.27(a1) muestra con color rojo el método ED y con color azul el método PSA ; $\epsilon_{ED,100}$ y $\bar{\epsilon}_{PSA,100} = 0,00988584$ son mostrados en líneas continuas, y con el mismo color y notación en las líneas Fig. 3.27(a2) mostrando $\sigma_{ED,100}$, $\sigma_{PSA,100}$ y sus promedios $\bar{\sigma}_{ED,100} = 0,147919$ rad y $\bar{\sigma}_{PSA,100} = 0,175776$ rad. Como se puede notar, el método ED es mejor que el método PSA en ambos porcentajes de bias y desviación estándar para este particular caso donde el ruido Gaussiano fue solo introducido para α_1 de $\sigma_1 = \pi/20 = 0,157$ rad en desviación estándar mientras otros parámetros fueron mantenidos constantes. Se realiza un análisis adicional en una forma de mostrar las propiedades de los métodos ED y PSA para los casos donde solo α_2 , o b son introducidos con ruido Gaussiano de $\sigma_2 = \pi/20$ rad o $\sigma_b = 0,1\%b_0$, respectivamente, y cuando solo b es modulado espacialmente por $\sigma_{bx} = 8$, como es definido en la Ec. (3.66c). El resultado de este análisis es mostrado en las Figs. (3.27)(b)-(3.27)(d) para $\epsilon_{ED,100}$ y $\sigma_{ED,100}$ con el mismo color y línea de notación como en la Fig. (3.27)(a). Como puede notarse, el método ED es mejor que el método PSA en ambos porcentajes de bias y desviación estándar para estos particulares casos de niveles de ruido Gaussiano en α_2 , o b , o variaciones espaciales de b . Sin embargo, para tener una mejor descripción de $\bar{\epsilon}_{ED,100}$ y $\bar{\sigma}_{ED,100}$ estos valores fueron graficados en la Fig. (3.28)(a)-(3.28)(d), respectivamente. Como se muestra en la Fig. (3.28), cuando los parámetros son introducidos sin ruido y sin variaciones, ambos métodos obtienen el mismo resultado. No obstante cuando el nivel de ruido introducido esta entre cero y un valor umbral, el cual es diferente para cada caso (ver Figs. (3.28)(a)-(3.28)(d)), el método ED es más aproximado que el método PSA , y cuando este ruido umbral es rebasado, la situación es revertida el método ED es menos aproximado que el método PSA . Note que cada punto en la gráfica de la Fig. (3.28) representa el promedio de 200 datos, tal como es indicado para un caso particular de ruido en la Fig. (3.27) y en cada uno de estos 200 puntos fue obtenido por promediar 1000 mediciones de fase, como se muestra en la Fig. (3.26) para $j = 84$ en la simulación numérica.

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.3. EVALUACIÓN DE PATRONES EXPERIMENTALES

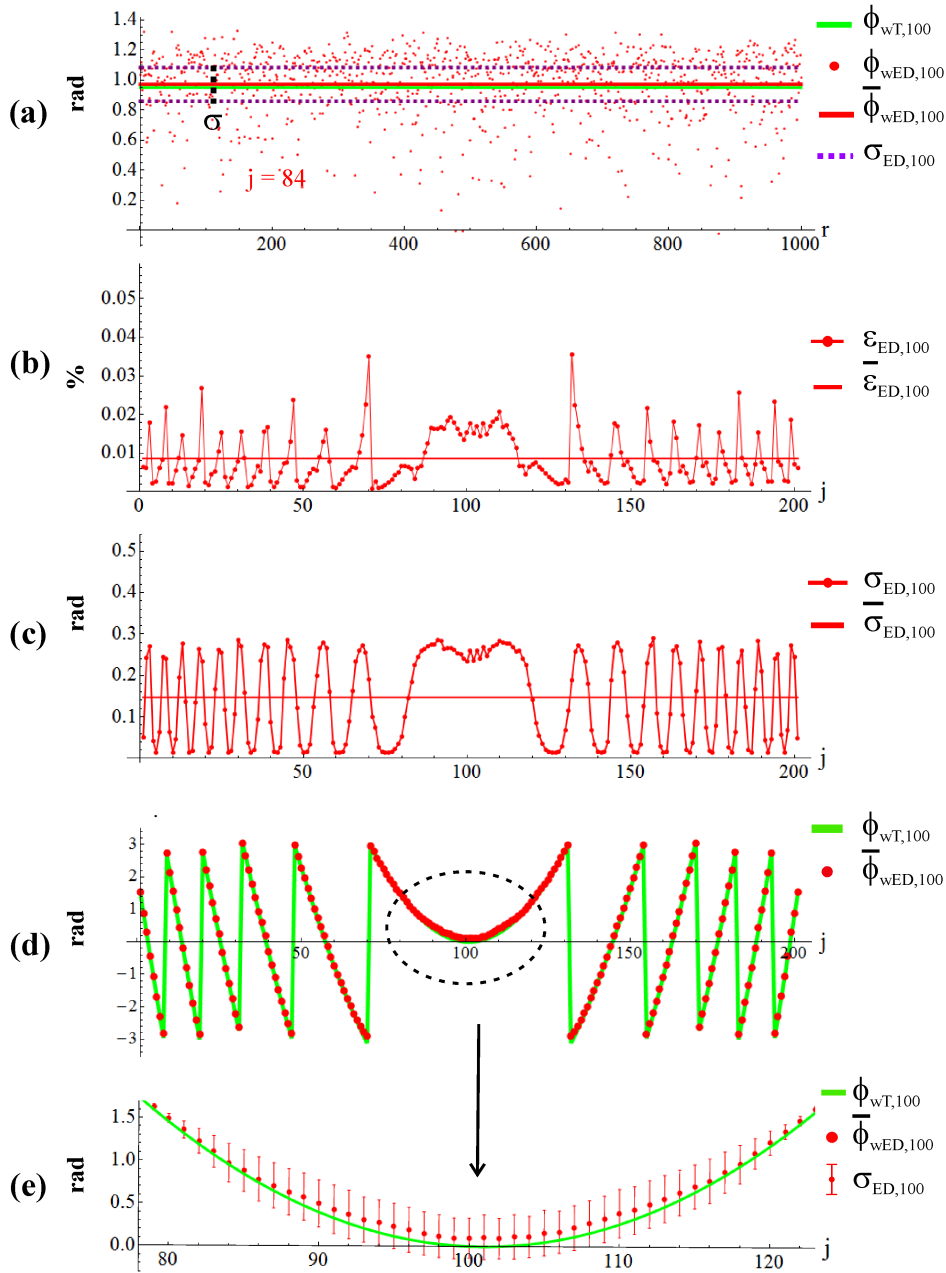


Figura 3.26: Fase envuelta reconstruida por método ED para $i = 100$ para estimar su aproximación (a) 1000 mediciones de $\phi_{wED,100}$ en $j = 84$, (b) porcentaje de bias, (c) desviación estándar, (d) fase promedio, (e) zoom para ver el bias y desviación estándar en cada punto j .

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA
3.3. EVALUACIÓN DE PATRONES EXPERIMENTALES

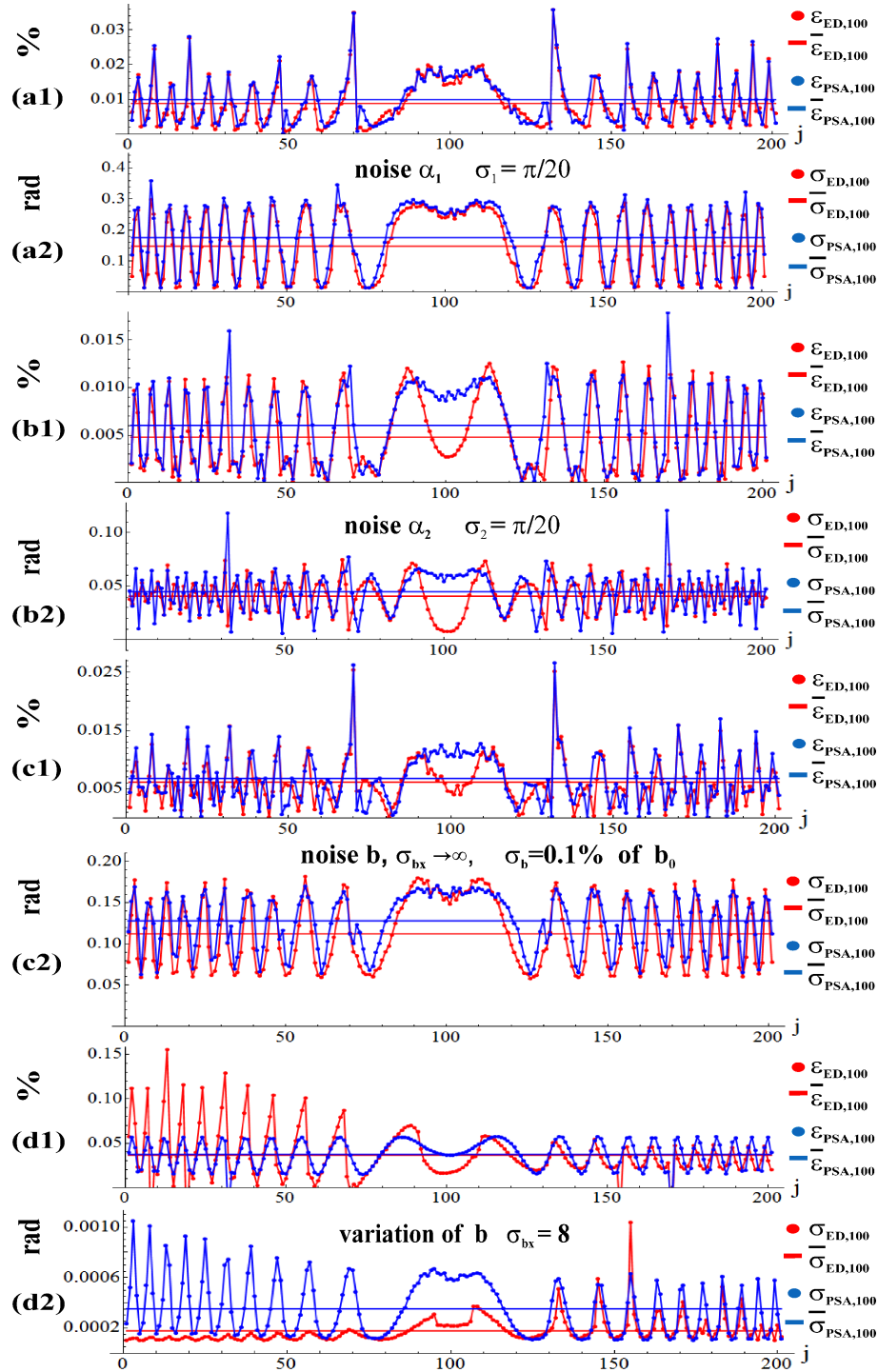


Figura 3.27: Cálculo de la aproximación (bias y desviación estandar) de los metodos *ED* y *PSA* para $i = 100$ en los casos: ruido Gaussiano de (a) $\sigma_1 = \pi/20$ rad en α_1 , (b) $\sigma_2 = \pi/20$ rad en α_2 , (c) $\sigma_b = 0,1\%b_0$ en b constante ($\sigma_{bx} \rightarrow \infty$) (d) sin ruido pero con $\sigma_{bx} = 8$. Cada punto en las gráficas representa el promedio de 1000 mediciones.

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.3. EVALUACIÓN DE PATRONES EXPERIMENTALES

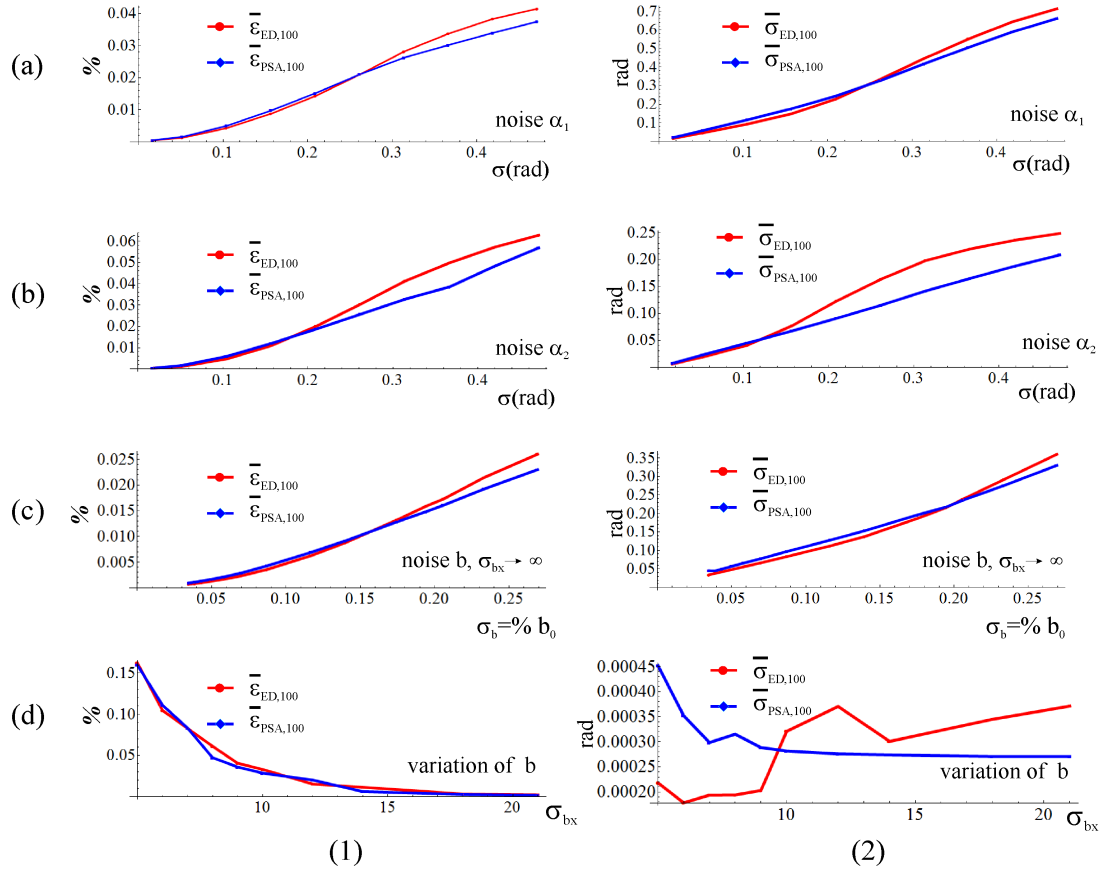


Figura 3.28: Exactitud en los metodos *ED* y *PSA* para diferentes niveles de ruido sobre $i = 100$ para (a) α_1 , (b) α_2 , y b en los casos (c) σ_b con $\sigma_{bx} \rightarrow \infty$, (d) σ_{bx} ; (1) porcentaje de bias, y (2) desviación estándar. Cada punto en las gráficas representa el promedio de 200 mediciones (ver Fig. 3.27), y cada una de estas 200 representan el promedio de 1000 mediciones (ver Fig.(3.26a)).

3.3.5. Evaluación de patrones experimentales

El presente método también fue aplicado a interferogramas capturados experimentalmente, como se muestra en la Fig.(3.29)(a1) codificado en niveles de grises de 8 bits y 221×241 en resolución, el cual tiene corrimientos de fase conocidos $\alpha_1 = 1,35$ y $\alpha_2 = 2,7$ por comparar con los corrimientos de fase β_1 y β_2 calculado con el presente método. Los interferogramas secundarios son calculados con la Ecs.(3.67, 3.68) y son graficados en la Figs.(3.29)(b1-b2). Los puntos rojos en la Fig.(3.29)(a2) son formados con intensidades extraídas del 110-ésimo renglón indicado con línea roja discontinua en la Figs.(3.29)(b1-b2). El ajuste de la elipse es obtenido aplicando el método de mínimos cuadrados que es representado con líneas de color naranja en la Fig.(3.29)(a2), el cual da $\beta_1 = 1,18$ y $\beta_2 = 2,77$, siendo comparable con el introducido corrimiento de fase experimental. Entonces aplicando el método *ED* ϕ_{wED} es obtenido como se muestra en la Fig.(3.29)(a3), y

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA

3.3. EVALUACIÓN DE PATRONES EXPERIMENTALES

aplicando el método *PSA* usando la Ec.(3.86) ϕ_{wPSI} es obtenido como se muestra en la Fig.(3.29)(b3).

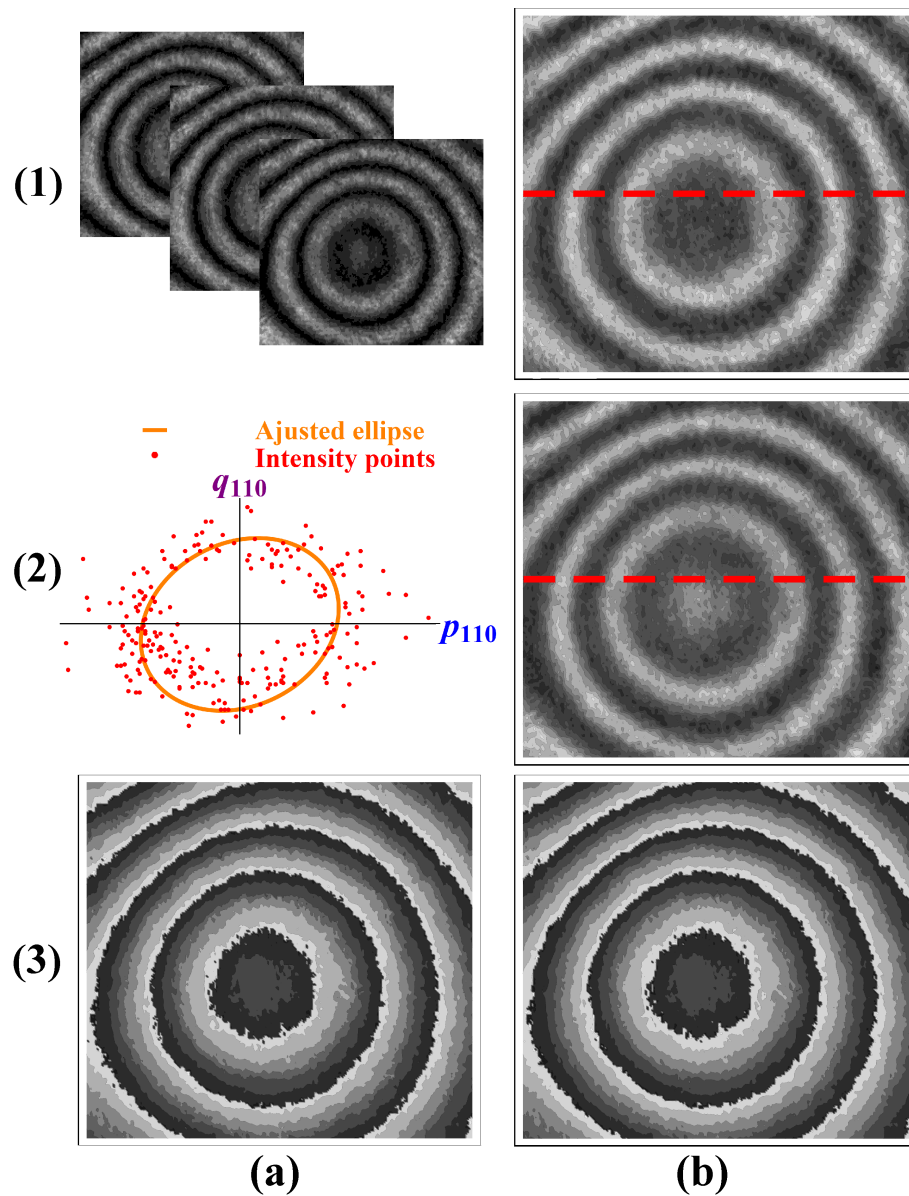


Figura 3.29: (a1) interferogramas experimentales, (b1-b2) interferogramas secundarios, (a2) puntos de intensidad y ajuste a una elipse para $i = 110$, (3) fase envuelta calculada por los métodos de *ED* y *PSI*.

3. MÉTODO DE LA DISTANCIA EUCLIDIANA
3.3. EVALUACIÓN DE PATRONES EXPERIMENTALES

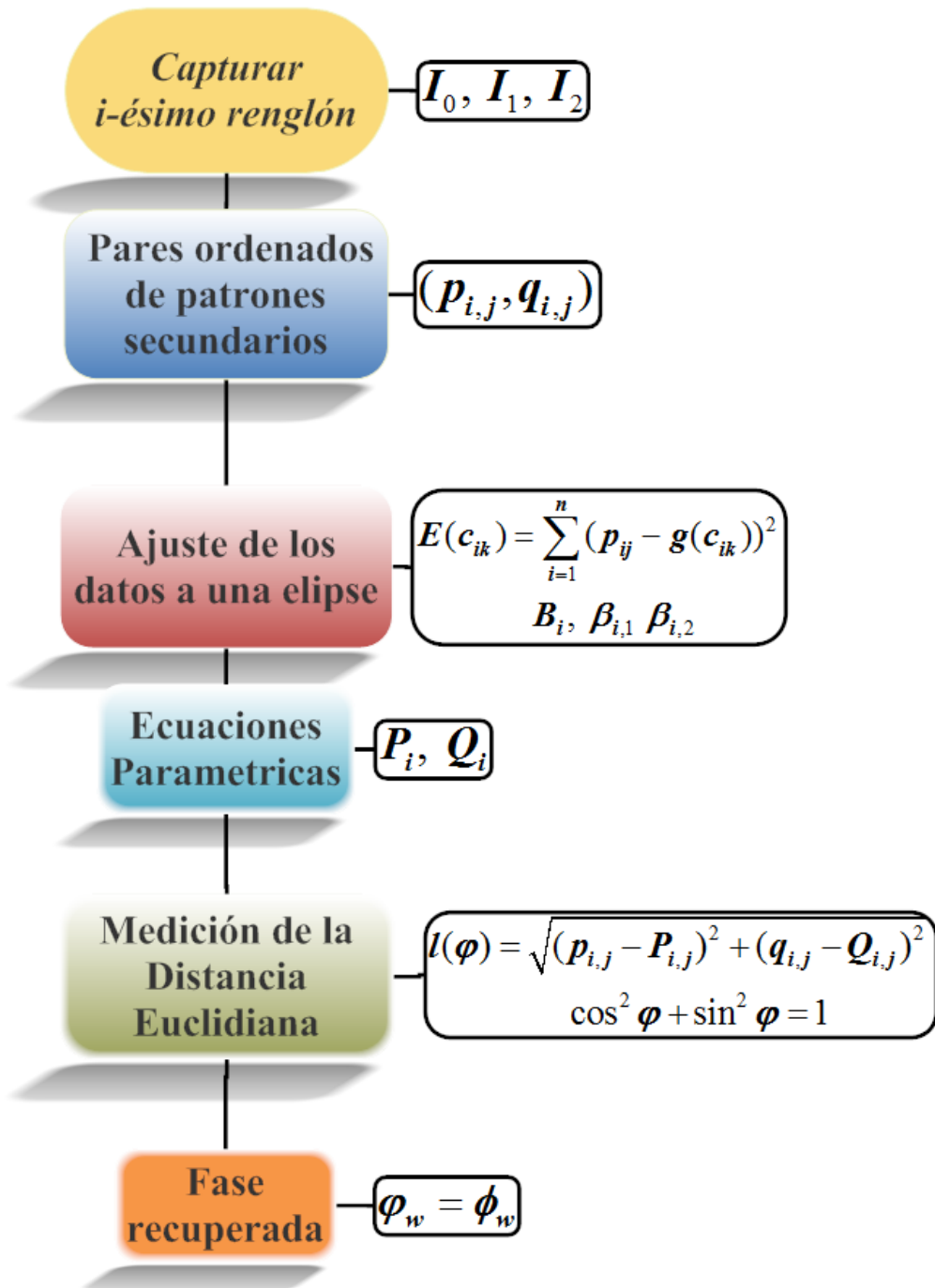


Figura 3.30: Diagrama del algoritmo.

4

Conclusiones

Presentamos un novedoso método para la extracción de fase nombrado el método de la Distancia Euclidiana ED que no usa la función tangente tal como los métodos PSA . El método esta basado en el concepto geométrico de la distancia Euclidiana de un punto a una elipse, involucrando dos importantes puntos: el primero fue el ajustar a una elipse datos dispersos que son obtenidos de formar pares ordenados en términos de las intensidades experimentales aplicando el método de mínimos cuadrados; el segundo fue el calcular la distancia Euclidiana de un punto formado por las intensidades a un punto sobre la curva que se obtiene del ajuste la cual es una elipse. Minimizando la Ec.(3.25) que representa la distancia Euclidiana con respecto al parámetro φ Ec.(3.29) y la identidad de la Ec.(3.55) podemos establecer un sistema de dos ecuaciones que tiene cuatro posibles soluciones de las cuales elegimos la que satisface la condición de distancia más corta entre los puntos al sustituirse en la Ec.(3.25), asignando este valor a la fase que se desea conocer ϕ . Además un detallado análisis para caracterizar el algoritmo fue llevado a cabo demostrando que el método ED es más preciso que el método PSA para bajo niveles de ruido y menos preciso que los métodos PSA para altos niveles de ruido. En particular, porque b fue aproximado a una constante, el método ED tiene poca tolerancia a las variaciones espaciales, como se observa en Fig.(3.28)(d) los errores incrementan como la función b tiene variaciones espaciales al decrecer el valor de σ_{bx} como se observa en las gráficas de la desviación estándar $\bar{\epsilon}$ y bias $\bar{\sigma}$, por lo tanto el algoritmo se convierte inestable. Una posible forma de mejorar estos resultados son: dividir cada renglón en intervalos que correspondan a un período en vez de tomar todos sus elementos, y segundo por aproximar b a un polinomio en vez de una valor constante. Estas aproximaciones pueden obtener altos umbrales de ruido como los umbrales mostrados en la Fig.(3.28). Por otro lado, el nivel de ruido donde el método ED calcula la fase con mejor precisión que el método PSA es posible obtener experimentalmente. Lo cual es una importante ventaja en la aplicación donde la exactitud es necesaria. Esto abre las posibilidades para mejorar el método ED por ajustar a una cónica o en general alguna curva paramétrica en dos o más dimensiones. Además creemos que se puede mejorar el tiempo de computo si la solución se encuentra a partir de una sola ecuación.

Bibliografía

- [1] Max Born, Emil Wolf, Principles of optics, Cambridge University Press, London, 1983
- [2] C. Meneses Fabian, F. A. Lara Cortes, Phase retrieval by Euclidean distance in self-calibrating generalized phase-shifting interferometry of three steps, *Opt. Express*. 23(10), 13589-13604 (2015).
- [3] J. H. Bruning, D .R. Herriott, J. E. Gallagher, D. P. Rosenfeld, A. D. White, and D. J. Brangaccio, Digital Wavefront Measurement Interferometer for Testing Optical Surfaces and Lenses, *Appl. Opt.* 13, 2693-2703 (1974).
- [4] K. Creath, Phase-measurement interferometry techniques, in *Progress in Optics XX-VI*, E. Wolf, eds. (ELSEVIER Science Publishers), 349-393, (1988).
- [5] P. Carré, Installation et Utilisation du Comparateur Photoelectrique et Interferentiel du Bureau International des Poids et Mesures, *Metrologia* 2, 13 (1966).
- [6] Kemaoy Q, Fangjun S, Xiaoping W.u, Determination of the best phase step of the Carré algorithm in phase shifting interferometry, *Meas. Sci. Technol.* 11, 1220-1223 (2000).
- [7] P. Hariharan, B. F. Oreb, and T. Eiju, Digital phase-shifting interferometry: a simple error-compensating phase calculation algorithm, *Appl. Opt.* 26(13) 2504-2505 (1987).
- [8] R. K. Leach, Optical measurement of surface topography, Springer, Berlin Heidelberg, (2011).
- [9] D. Nolte, Optical interferometry for biology and medicine (Springer New York, 2012)
- [10] T. Kiire, S. Nakadate and M. Shibuya, Phase-shifting interferometer based on changing the direction of the linear polarization orthogonally, *Appl. Opt.* 47(21), 3784-3788 (2008).
- [11] T. Susuki and R. Hioki, Translation of light frequency by a moving grating, *J. Opt. Soc. Am.* 57(12), 1551-1551 (1967).
- [12] C. Meneses-Fabian, R. Kantun-Montiel, G-P. Lemus-Alonso, and U. Rivera-Ortega, Double aperture common-path phase-shifting interferometry by translation a ruling at the input plane, *Opt. Lett.* 38(11), 1850-1852 (2013).
- [13] C. Tay, C. Quan, and H. Shang, Shape identification using phase shifting interferometry and liquid-crystal phase modulator, *Opt. Laser Technol.* 30(8) 545-550 (1998).

- [14] C. Robledo-Sánchez, R. Juárez-Salazar, C. Meneses-Fabian, F. Guerrero-Sanchez, and L. M. Arevalo-Aguilar, G. Rodriguez-Zurita, and V. Ixba-Santos, Phase-shifting interferometry based on the lateral displacement of the light source, *Opt. Express.* 21(14), 17228-17233 (2013).
- [15] U. Rivera-Ortega, C. Meneses-Fabian and G. Rodriguez-Zurita, Inhomogeneous phase-visibility modulating interferometry by space on-off non-quadrature amplitude modulation, *Opt. Express.* 21(15), 17421-17434 (2013).
- [16] U. Rivera-Ortega, C. Meneses-Fabian, G. Rodriguez-Zurita, and C. Robledo-Sanchez, Phase-visibility modulating interferometry by binary non-quadrature amplitude modulation with neutral density filters, *Opt. Laser Eng.* 55, 226-231 (2014).
- [17] C. Meneses-Fabian, U. Rivera-Ortega, and G. Rodriguez-Zurita, One-shot phase-visibility modulating interferometry by on-off non-quadrature amplitude modulation, *Opt. Laser Eng.* 58, 33-38 (2014).
- [18] C. Meneses-Fabian and U. Rivera-Ortega, Phase-shifting interferometry by the wave amplitude modulation, *Opt. Lett.* 36(13), 2417-2419 (2011).
- [19] C. Meneses-Fabian and U. Rivera-Ortega, Phase-shifting interferometry by the wave amplitude modulation: General case, *Opt. Laser Eng.* 50(7), 905-909 (2012).
- [20] H. Schreiber, J. H. Brunning, and J. E. Greivenkamp, Phase shifting interferometry, in *Optical Shop Testing*, D. Malacara ed., (John Wiley Sons, Inc., 2007).
- [21] P. Hariharan, B. F. Oreb, and T. Eiju, Digital phase-shifting interferometry: a simple error-compensating phase calculation algorithm, *Appl. Opt.* 26(13), 2504-2506 (1987).
- [22] J. Schmit and K. Creath, Extended averaging technique for derivation of error-compensating algorithms in phase-shifting interferometry, *Appl. Opt.* 34(19), 3610-3619 (1995).
- [23] C. J. Morgan, Least squares estimation in phase-measurement interferometry, *Opt. Lett.* 7(8), 368-370 (1982).
- [24] J. E. Grievenkamp, Generalized data reduction for heterodyne interferometry, *Opt. Eng.* 23(4), 350-352 (1984).
- [25] G. Lai and T. Yatagai, Generalized phase-shifting interferometry, *J. Opt. Soc. Am. A* 8(5), 822-827 (1991).
- [26] C. T. Farrell and M. A. Player, Phase step measurement and variable step algorithms in phase-shifting interferometry, *Meas. Sci. Technol.* 3(10), 953-958 (1992).
- [27] C. T. Farrell and M. A. Player, Phase-step insensitive algorithms for phase-shifting interferometry, *Meas. Sci. Technol.* 5(6), 648-652 (1994).
- [28] G.S. Han and S.W. Kim, Numerical correction of reference phases in phase-shifting interferometry by iterative least-squares fitting, *Appl. Opt.* 33(31), 7321-7325 (1994).

- [29] X Chen, M. Gramaglia, and J. A. Yeazell, Phase-shifting interferometry with uncalibrated phase shifts, *Appl. Opt.* 39(4), 585-591 (2000).
- [30] B. Raphael, I. F. C. Smith, A direct stochastic algorithm for global search, *Appl. Math. Comput.* 146(2-3), 729-758 (2013).
- [31] L. Z. Cai, Q. Liu, and X. L. Yang, Phase-shift extraction and wave-front reconstruction in phase-shifting interferometry with arbitrary phase steps, *Opt. Lett.* 28(19), 1808-1810 (2003).
- [32] L. Z. Cai, Q. Liu, and X. L. Yang, Generalized phase-shifting interferometry with arbitrary unknown phase steps for diffraction objects, *Opt. Lett.* 29(2), 183-185 (2004).
- [33] X. F. Xu, L. Z. Cai, Y. R. Wang, X. F. Meng, W. J. Sun, H. Zhang, X. C. Cheng, G. Y. Dong, and X. X. Shen, Simple direct extraction of unknown phase shift and wavefront reconstruction in generalized phase-shifting interferometry: algorithm and experiments, *Opt. Lett.* 33, 776-778 (2008).
- [34] X. F. Xu, L. Z. Cai, Y. R. Wang, X. L. Yang, X. F. Meng, G. Y. Dong, X. X. Shen, and H. Zhang, Generalized phase-shifting interferometry with arbitrary unknown phase shifts: Direct wave-front reconstruction by blind phase shift extraction and its experimental verification, *Appl. Phys. Lett.* 90, 121-124 (2007).
- [35] A. Patil and P. Rastogi, Approaches in generalized phase shifting interferometry, *Opt. Laser Eng.* 43(3-5), 475-490 (2005).
- [36] F. L. Bookstein, Fitting conic sections to scattered data, *Comput. Graphics Image Process.* 9(1), 56-71 (1979).
- [37] A. Albertazzi, A. V. Fantin, A. F. Maia, D. P. Willemann, M. E. Benedet, and M. Viotti, Use of generalized N-dimensional Lissajous figures for phase retrieval from sequences of interferometric images with unknown phase shifts, *Fringe 2013*, 191-196 (2014).
- [38] Kinnstaetter K, Lohmann AW, Schwider J, Streibl N. Accuracy of phase shifting interferometry. *Appl. Opt.* 27, 5082-5089. (1988).
- [39] P. Carré, Installation et utilisation du comparateur photoélectrique et interférentiel du Bureau International des Poids et Mesures, *Metrologia* 2(1), 13-23 (1966).
- [40] Q. Kemao, S. Fangjun, and W. Xiaoping, Determination of the best phase step of the Carré algorithm in phase shifting interferometry, *Meas. Sci. Technol.* 11(8), 1220-1223 (2000).
- [41] J. Novak, P. Novak, and A. Miks, Multi-step Phase-shifting Algorithms Insensitive to Linear Phase Shift Errors, *Opt. Commun.* 281, 5302-5309 (2008).
- [42] E. Hack, Measurement uncertainty of Carré-type phase-stepping algorithms, *Opt. Laser Eng.* 50(8), 1023-1025 (2012).
- [43] P. Rastogi and E. Hack, *Phase estimation in optical interferometry*, (CRC Press 2014.)

- [44] Z. Wang, and B. Han, Advanced iterative algorithm for phase extraction of randomly phase-shifted interferograms, *Opt. Lett.* 29(14), 1671-1673 (2004).
- [45] K. Larkin, A self-calibrating phase-shifting algorithm based on the natural demodulation of two-dimensional fringe patterns, *Opt. Express* 9(5), 236-253 (2001).
- [46] K. Freischlad, and C. L. Koliopoulos, Fourier description of digital phase-measuring interferometry, *J. Opt. Soc. Am. A* 7(4), 542-551 (1990).
- [47] K. G. Larkin and B. F. Oreb, Design and assessment of symmetrical phase-shifting algorithms, *J. Opt. Soc. Am. A* 9(10), 1740-1748 (1992).
- [48] M. Servin, J. C. Estrada, and J. A. Quiroga, Spectral analysis of phase shifting algorithms, *Opt. Express* 17(19), 16423-16428 (2009).
- [49] M. Servin, J. C. Estrada, and J. A. Quiroga, The general theory of phase shifting algorithms, *Opt. Express* 17(24), 21867-21881 (2009).
- [50] J. F. Mosiño, D. M. Doblado, and D. M. Hernández, A method to design tunable quadrature filters in phase shifting interferometry, *Opt. Express* 17(18), 15772-15777 (2009).
- [51] J. F. Mosiño, J. C. Gutiérrez-García, T. A. Gutiérrez-García, and J. M. Macías-Preza, Two-frame algorithm to design quadrature filters in phase shifting interferometry, *Opt. Express* 18(24), 24405-24411 (2010).
- [52] A. Téllez-Quiñones, and D. Malacara-Doblado, Inhomogeneous phase shifting: an algorithm for nonconstant phase displacements, *Appl. Opt.* 49(32), 6224-6231 (2010).
- [53] K. Qian, S. H. Soon, and A. Asundi, Phase-shifting windowed Fourier ridges for determination of phase derivatives, *Opt. Lett.* 28(18), 1657-1659 (2003).
- [54] B. Zielinski, K. Patorski, Application of the S-transform to the phase-shift extraction in phase shifting interferometry, *Proc. SPIE* 7746, 17th Slovak-Czech-Polish Optical conference on wave and quantum aspects of contemporary optics, 77460J (2010).
- [55] Y. Surrel, Design of algorithms for phase measurements by the use of phase stepping, *Appl. Opt.* 35(1), 51-60 (1996).
- [56] M. Takeda, H. Ina and S. Kobayashi, Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry, *J. Opt. Soc. Am.* 72, 156-160 (1982).
- [57] D. Malacara, Ed., *Optical Shop Testing*, 2nd Edition, John Wiley and Sons, New York, 566-568 (1992).
- [58] D. Malacara, M. Servín, and Z. Malacara, *Interferogram Analysis for Optical Testing*, (Optical Engineering (Marcel Dekker, Inc.,) New York, 1998).
- [59] J. Schwider, Advanced Evaluation Techniques in Interferometry, in *Progress in Optics XXVIII*, E. Wolf, Eds. (ELSEVIER Science Publishers), 271-359 (1990).

- [60] C. Meneses Fabian, G. Rodriguez Zurita, A. Cordero-Davila, and C. Robledo-Sanchez, Solving differential equations for phase retrieval in fourier-transform methods, AIP Conference Proceedings, Volumen 1236, 118-123 (2010).
- [61] F. A. Lara-Cortés, C. Meneses-Fabián, and G. Rodríguez-Zurita, Pfaff equation and fourier analysis to phase extraction from an interferogram with carrier frequency, Abstract book of the RIAO-OPTILAS, 7, 109-110 (2010).
- [62] Carles M. Cuadras, Distancias Estadísticas, Estadística Española, 30(119), 295-378 (1989).