



# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

---

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas  
Postgrado en Ciencias Matemáticas

## **“Los continuos enrejados tienen segundo y tercer producto simétrico único”**

TESIS

para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias Matemáticas**

Presenta:

**M. en C. Luis Alberto Guerrero Méndez**

Directores de Tesis:

Dr. David Herrera Carrasco  
Dr. Fernando Macías Romero

Puebla, Puebla.

27 de Junio de 2016



**BUAP**

**DR. JOSÉ ENRIQUE BARRADAS GUEVARA  
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y  
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP  
P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que el(la) C:

**LUIS ALBERTO GUERRERO MÉNDEZ**

estudiante del Doctorado en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 9 de junio de 2016, con la tesis titulada:

***“LOS CONTINUOS ENREJADOS TIENEN SEGUNDO Y TERCER  
PRODUCTO SIMÉTRICO ÚNICO”***

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.  
H. Puebla de Z, a 10 de junio de 2016.

**DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO  
COORDINADOR DEL POSTGRADO  
EN MATEMÁTICAS.**



**Los continuos enrejados tienen  
segundo y tercer producto simétrico  
único**

**Luis Alberto Guerrero Méndez**

Directores de tesis:

**David Herrera Carrasco**

**Fernando Macías Romero**

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas  
BUAP



# Índice general

Introducción	v
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Conceptos básicos . . . . .	1
1.2. Continuos enrejados . . . . .	10
1.3. El $n$ -ésimo producto simétrico de un continuo . .	13
1.4. Continuos alambrados . . . . .	16
1.5. Resultados necesarios . . . . .	18
<b>2. Resultados obtenidos</b>	<b>23</b>
2.1. Unicidad del segundo y tercer producto simétrico para continuos enrejados . . . . .	23
<b>Conclusiones</b>	<b>51</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>54</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>60</b>



# Introducción

La teoría de unicidad de hiperespacios ha sido ampliamente investigada, por ejemplo, véase [1]–[6], [8], [13], [15]–[26], [28]–[31]; en este trabajo de tesis analizamos la unicidad del segundo y tercer producto simétrico para los continuos enrejados.

La historia sobre la unicidad del  $n$ -ésimo producto simétrico comienza en el año 2006 cuando se demuestra un teorema al respecto, sobre gráficas finitas.

Una **gráfica finita** es un continuo que se puede escribir como unión finita de arcos tales que cualesquiera dos de ellos, o son ajenos o se intersectan solamente en uno o en ambos puntos extremos. Sea  $\mathfrak{G}$  la clase de las gráficas finitas.

El teorema que se demuestra sobre gráficas finitas es el siguiente:

(a) Si  $X \in \mathfrak{G}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $X$  tiene  $n$ -ésimo producto simétrico único (véase [6, Corolario 5.9]).

Una **dendrita** es un continuo localmente conexo sin curvas cerradas simples. Denotamos por  $\mathfrak{D}$  a la clase de las dendritas tales que su conjunto de puntos extremos es cerrado.

Se cumple que  $\mathfrak{G} \not\subset \mathfrak{D}$  y  $\mathfrak{D} \not\subset \mathfrak{G}$  (véase Ejemplo 1.16 y Ejemplo 1.17).

Para los elementos de la clase  $\mathfrak{D}$  se demostró lo siguiente, que se desprende de [2, Teorema 5.2] y [21, Teorema 3.5]:

(b) Si  $X \in \mathfrak{D}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $X$  tiene  $n$ -ésimo producto simétrico único (véase [21, Teorema 3.7]).

Años más tarde se definen nuevas clases de continuos; la clase de los continuos casi enrejados y la de los continuos enrejados (véase [15]). Dado un continuo  $X$ , sean

$$\mathcal{G}(X) = \{p \in X : p \text{ tiene una vecindad } G \text{ en } X \text{ tal que } G \text{ es una gráfica finita}\} \text{ y}$$

$$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X).$$

Un continuo  $X$  es casi enrejado si el conjunto  $\mathcal{G}(X)$  es denso en  $X$ . Un continuo  $X$  es enrejado si  $X$  es casi enrejado y  $X$  tiene una base de vecindades  $\mathfrak{B}$  tal que  $U - P(X)$  es conexo. Denotamos por  $\mathcal{AM}$  a la clase de los continuos casi enrejados y  $\mathcal{M}$  a la clase de los continuos enrejados.

En [15] se demuestra que  $\mathfrak{G} \subset \mathcal{M}$  y  $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ . De hecho, la clase  $\mathfrak{G} \subsetneq \mathcal{M}$  y  $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{M}$ , (véase Ejemplo 1.30). Denotamos por  $\mathcal{LC}$  a la clase de los continuos localmente conexos.

En 2012 se probó en [26] lo siguiente respecto a unicidad del producto simétrico para continuos casi enrejados localmente conexos:

(c) Si  $X \in \mathcal{M}$  y  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 4$ , entonces  $X$  tiene  $n$ -ésimo producto simétrico único (véase [26, Corolario 4.4]).

En 2013 aparece el concepto de alambre y continuo alambrado en [17]; Un **alambre** en un continuo  $X$  es un subconjunto  $\alpha$  de  $X$  homeomorfo a  $(0, 1)$ ,  $[0, 1)$ ,  $[0, 1]$  o  $S^1$  y que es una componente de algún abierto en  $X$ .

Dado un continuo  $X$ , sea

$$W(X) = \bigcup \{\alpha : \alpha \text{ es un alambre en } X\}.$$

Un continuo  $X$  es **alambrado** si  $W(X)$  es denso en  $X$ . Denotamos por  $\mathcal{W}$  a la clase de los continuos alambrados.

Por [17, p. 1578], se sabe que  $\mathcal{AM} \subset \mathcal{W}$ . Además la contención es propia (véase Ejemplo 1.37). Se demuestra [17] lo siguiente:

(d) Si  $X \in \mathcal{W}$  y  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 4$ , entonces  $X$  tiene  $n$ -ésimo producto simétrico único (véase [17, Corolario 6]).

Los resultados de (c) y (d) generalizan los resultados (a) y (b) para  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 4$ .

Como se puede observar, para el caso de las clases  $\mathcal{AM} \cap \mathcal{LC}$  y  $\mathcal{W}$ , los resultados sobre unicidad del  $n$ -ésimo producto simétrico están hechos sólo para cuando  $n \geq 4$ .

En esta tesis, se demuestra el resultado siguiente, mismo que fue publicado en [13]:

(e) Si  $X \in \mathcal{M}$  y  $n \in \{2, 3\}$ , entonces  $X$  tiene  $n$ -ésimo producto simétrico único (véase [13, Teorema 3.11]).

Como  $\mathfrak{G} \subsetneq \mathcal{M}$  y  $\mathfrak{D} \subsetneq \mathcal{M}$ , el resultado (e) generaliza los resultados (a) y (b) para  $n \in \{2, 3\}$ . Ahora, como  $\mathcal{AM} \subset \mathcal{W}$ , por la definición de continuo enrejado tenemos que  $\mathcal{M} \subset \mathcal{W}$ . Así,

(f) Si  $X \in \mathcal{M}$  y  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 4$ , entonces  $X$  tiene  $n$ -ésimo producto simétrico único.

Por lo tanto, de los resultados (e) y (f) se obtiene el Corolario siguiente:

(g) Si  $X \in \mathcal{M}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $X$  tiene  $n$ -ésimo producto simétrico único (véase [13, Corolario 3.12]).

El tópico de este trabajo está inmerso en el problema general siguiente.

**Pregunta.** Dado  $n \in \mathbb{N}$ , ¿qué condiciones necesita tener un continuo  $X$  para que se garantice la unicidad del  $n$ -ésimo producto simétrico de  $X$ ?

El trabajo de tesis está dividido en dos partes. En el Capítulo 1 se presentan los conceptos básicos, así como resultados necesarios para hacer las demostraciones en el capítulo posterior. En el segundo capítulo se presentan los resultados obtenidos sobre la unicidad del segundo y tercer producto simétrico para los continuos enrejados, siendo estos los resultados principales de este trabajo:

**Teorema.** (Véase Teorema 2.18). Si  $X$  es un continuo enrejado y  $n \in \{2, 3\}$ , entonces  $X$  tiene  $n$ -ésimo producto simétrico único.

**Corolario.** (Véase Corolario 2.19) Si  $X$  es un continuo enrejado y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $X$  tiene  $n$ -ésimo producto simétrico único.

# Capítulo 1

## Preliminares

Comenzamos esta tesis aclarando y exponiendo los conceptos más básicos. También introducimos algunas notaciones que utilizaremos frecuentemente a lo largo del trabajo. Enseguida dedicamos apartados especiales a los continuos enrejados, a los continuos alambrados y al  $n$ -ésimo producto simétrico de un continuo. Concluimos el Capítulo 1 con una sección para recabar resultados que necesitamos para nuestras demostraciones del Capítulo 2 y finalmente hacemos un viaje rápido por la historia de la unicidad del  $n$ -ésimo producto simétrico para distintas clases de continuos.

### 1.1. Conceptos básicos

En esta sección revisamos los conceptos más básicos y algunas notaciones que necesitamos para el desarrollo de nuestro trabajo.

Damos inicio a nuestra primera sección de este capítulo con la definición de continuo.

**Definición 1.1.** *Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.*

Cualquier conjunto conexo que sea acotado y cerrado en el plano Euclidiano  $\mathbb{R}^2$  es un ejemplo de un continuo. De hecho siguiendo la misma idea se pueden encontrar muchos ejemplos en el espacio  $\mathbb{R}^n$  con la topología usual. En la referencia [34], se dan muchos ejemplos de continuos. En [12, Capítulo 10], [11, Capítulo 27] y [14, Capítulo 19] también se dan ejemplos de continuos, incluso en [34] y el Capítulo 27 de [11] se exhibe el clásico continuo universal llamado Cubo de Hilbert y se demuestra que efectivamente todo continuo se puede encajar en el Cubo de Hilbert.

Frecuentemente hablaremos de  $n$ -celdas en este trabajo, por lo que conviene anotar su definición en esta sección de conceptos básicos.

**Definición 1.2.** *Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , donde  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $I_i = [0, 1]$ . Una  $n$ -**celda** es un espacio topológico homeomorfo a  $\prod_{i=1}^n I_i$  con la topología producto.*

Ahora, recordemos la noción de orden de un punto en un espacio dado.

**Definición 1.3.** *Sean  $X$  un continuo,  $p \in X$  y  $\beta \in \mathbb{N} \cup \{\omega, \aleph_0, \mathfrak{c}\}$ . Se dice que  $p$  es de **orden menor o igual que  $\beta$  en  $X$** , denotado por  $\text{ord}(p, X) \leq \beta$ , si  $p$  tiene una base de vecindades  $\mathfrak{B}$  en  $X$  tal que para cada  $U \in \mathfrak{B}$  se cumple que  $|\text{fr}_X(U)| \leq \beta$ . Se dice que  $p$  es de **orden  $\beta$  en  $X$** , denotado por  $\text{ord}(p, X) = \beta$ , si  $\text{ord}(p, X) \leq \beta$  y  $\text{ord}(p, X) \not\leq \alpha$  para cualquier  $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\omega, \aleph_0, \mathfrak{c}\}$  con  $\alpha < \beta$ .*

A lo largo de todo el trabajo hablamos de puntos extremos, puntos ordinarios y puntos de ramificación, por lo que también conviene recordar su definición.

**Definición 1.4.** Sean  $X$  un continuo y  $p \in X$ .

- (a) Si  $\text{ord}(p, X) = 1$ , entonces se dice que  $p$  es un **punto extremo** de  $X$ .
- (b) Si  $\text{ord}(p, X) = 2$ , entonces se dice que  $p$  es un **punto ordinario** de  $X$ .
- (b) Si  $\text{ord}(p, X) \geq 3$ , entonces se dice que  $p$  es un **punto de ramificación** de  $X$ .

Los conjuntos de puntos extremos, puntos ordinarios y puntos de ramificación de un continuo  $X$  son denotados por  $E(X)$ ,  $O(X)$  y  $R(X)$ , respectivamente.

El arco y la circunferencia son los ejemplos más sencillos de continuos. Necesitaremos identificar cuando un continuo contiene copias de estos en formas especiales.

**Definición 1.5.** Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo  $[0, 1]$  con la topología usual de  $\mathbb{R}$ . Sean  $J$  un arco,  $p, q \in J$  y  $h: [0, 1] \rightarrow J$  un homeomorfismo. Supongamos que  $h(0) = p$  y  $h(1) = q$ . Los puntos  $p$  y  $q$  se llaman puntos extremos de  $J$  y en este caso se dice que  $J$  es un arco que va de  $p$  a  $q$ .

**Definición 1.6.** Una **curva cerrada simple** es cualquier espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria  $S^1$  con la topología usual de  $\mathbb{R}^2$ .

Ahora sí, pasamos a ver las definiciones de arco libre, arco libre maximal y circunferencia libre en un continuo.

**Definición 1.7.** Un **arco libre** en un continuo  $X$  es un arco  $\alpha$  con puntos extremos  $a$  y  $b$  en  $X$  tal que  $\alpha - \{a, b\}$  es un conjunto abierto en  $X$ . Un arco libre  $\alpha$  es un **arco libre maximal en  $X$**  si es maximal con respecto a la inclusión.

**Definición 1.8.** Una *circunferencia libre*  $S$  en un continuo  $X$  es una curva cerrada simple contenida en  $X$  tal que existe  $p \in S$  tal que  $S - \{p\}$  es abierto en  $X$ .

Enseguida vemos la notación que usaremos para denotar a la colección de arcos libres maximales y circunferencias libres en un continuo. Esta notación nos es de mucha utilidad, porque nos ofrece practicidad para manejar los arcos libres maximales y ciclos en las demostraciones sobre hiperespacios en el Capítulo 2.

Dado un continuo  $X$ , definimos a  $\mathcal{A}_S(X)$  como sigue:

$$\mathcal{A}_S(X) = \{J \subset X : J \text{ es un arco libre maximal en } X \text{ o un ciclo en } X\}.$$

La noción de puntos adyacentes en un continuo juega un papel importante en nuestro trabajo, por lo que a continuación enunciamos la definición.

**Definición 1.9.** Sean  $x, z \in X$ . El punto  $x$  es **adyacente** al punto  $z$  en  $X$ , o los puntos  $x, z$  son **adyacentes** en  $X$ , si existe  $J \in \mathcal{A}_S(X)$ , que no es una circunferencia libre, tal que  $x, z$  son los puntos extremos de  $J$ .

**Ejemplo 1.10.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , sean

$A_n$  el segmento de recta que va de  $(0, 0)$  a  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2n})$ ,

$B_n$  el segmento de recta que va de  $(0, 0)$  a  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2n})$  y

$$C_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{2n}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2n}\right)^2 \right\}.$$

Consideremos  $B = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2: -\frac{1}{2} \leq x \leq 0\}$  y sea

$$X = \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cup \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \cup \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \right) \cup B.$$

El espacio topológico  $X$  considerado con la topología usual de  $\mathbb{R}^2$  es un continuo (véase Figura 1). Si  $p = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , entonces  $\text{ord}(p, X) = 1$ . Sean  $o = (-\frac{1}{2}, 0)$  y  $q = (0, 0)$ . Para todo  $x$  que pertenece al arco que va de  $o$  a  $q$  se cumple que  $\text{ord}(x, X) = \aleph_0$ . Si  $r = (1, 0)$ , entonces  $\text{ord}(r, X) = 2$ . Así,  $p$  es un punto extremo de  $X$ , todos los puntos del arco que va de  $o$  a  $q$  son puntos de ramificación de  $X$  y  $r$  es un punto ordinario de  $X$ . Sean  $s = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  y  $t = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . El arco que va de  $s$  a  $t$  en  $X$  y que pasa por  $q$  no es un arco libre en  $X$ . El arco que va de  $s$  a  $t$  y pasa por  $r$  sí es un arco libre en  $X$ . El arco que va de  $p$  a  $q$  es un arco libre maximal en  $X$ . Además,  $C_n$  es una circunferencia libre en  $X$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

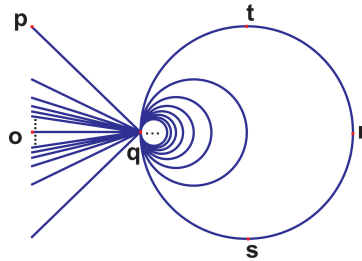


Figura 1.

El concepto de gráfica finita juega un papel muy importante en nuestro trabajo, porque se ocupa al momento de definir continuo enrejado, y por lo tanto se utilizará frecuentemente en demostraciones del Capítulo 2. Siendo así, enunciamos a continuación la definición de gráfica finita y vemos un ejemplo sencillo de dichos continuos.

**Definición 1.11.** Una **gráfica finita** es un continuo que se puede escribir como unión finita de arcos tales que cualesquiera dos de ellos, o son ajenos o se intersectan solamente en uno o en ambos puntos extremos.

**Ejemplo 1.12.** Un  **$n$ -odo simple**  $X$  es un continuo que es unión de  $n$  arcos  $J_1, J_2, \dots, J_n$  tal que existe  $p \in X$  con la propiedad de que  $J_i \cap J_j = \{p\}$ , cuando  $i \neq j$ , y  $p$  es un punto extremo de cada uno de los arcos  $J_i$ . Los  $n$ -odos simples son ejemplos de gráficas finitas. En la Figura 2 vemos gráficamente un 10-odo simple y un 17-odo simple.

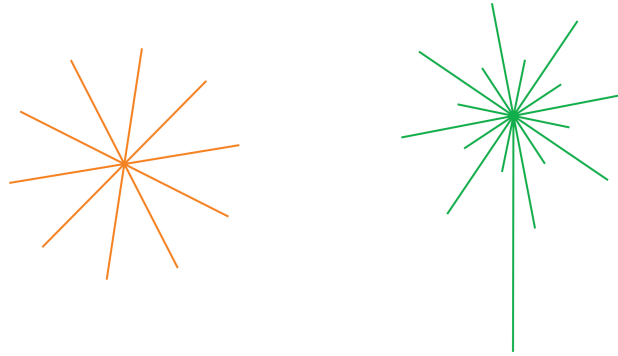


Figura 2. Ejemplo de un 10-odo simple y 17-odo simple.

En 2006 se demostró el teorema siguiente respecto a la unicidad del  $n$ -ésimo producto simétrico para gráficas finitas.

**Teorema 1.13.** [6, Corolario 5.9] Sean  $X$  una gráfica finita,  $Y$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $F_n(X)$  es homeomorfo a  $F_n(Y)$ , entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y$ .

También conviene anotar la definición de dendrita, ya que las mencionaremos en algunas partes de este trabajo.

**Definición 1.14.** Una **dendrita** es un continuo localmente conexo sin curvas cerradas simples.

A continuación un ejemplo importante de dendrita.

**Ejemplo 1.15.** Un ejemplo clásico e importante es la **dendrita de Gehman**. Esta dendrita se construye empezando en la parte superior, de donde salen dos segmentos de recta, en cuyos extremos inferiores se colocan otros dos segmentos de recta más pequeños. Repitiendo este proceso una infinidad de veces y finalmente se considera la cerradura de la unión de todos los segmentos de recta construidos. De hecho el conjunto de puntos que se añaden al tomar la cerradura de la unión de los segmentos de recta construidos es el conjunto de Cantor (véase Figura 3).

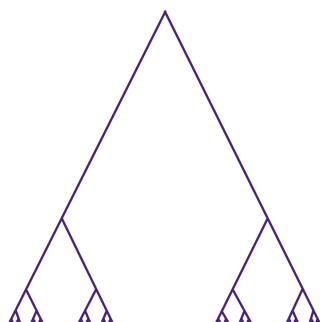


Figura 3. Dendrita de Gehman.

Los ejemplos a continuación nos sirven para poner en evidencia que  $\mathfrak{G} \not\subset \mathfrak{D}$  y  $\mathfrak{D} \not\subset \mathfrak{G}$ .

**Ejemplo 1.16.** Una curva cerrada simple es un continuo que pertenece a la clase  $\mathfrak{G}$  y no pertenece a la clase  $\mathfrak{D}$  porque no es una dendrita.

**Ejemplo 1.17.** Consideremos la dendrita de Gehman (Ejemplo 1.15). La dendrita de Gehman pertenece a la clase  $\mathfrak{D}$  y no pertenece a la clase  $\mathfrak{G}$  porque no es unión finita de arcos.

Como en el caso de las dendritas, conviene precisar que es un abanico suave, ya que de pronto se mencionará en algún momento. Para esto, necesitamos primero precisar que es un continuo unicoherente, que es un dendroide y que es un abanico.

**Definición 1.18.** *Un continuo  $X$  es **unicoherente** si siempre que se tengan subcontinuos  $A$  y  $B$  de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ , se cumple que  $A \cap B$  es conexo.*

**Definición 1.19.** *Un **dendroide** es un continuo arco conexo hereditariamente unicoherente.*

Dado un dendroide  $X$  y puntos  $p, q \in X$ , denotamos por  $pq$  al único arco que une  $p$  y  $q$  en  $X$ .

**Definición 1.20.** *Un **abanico** es un dendroide  $X$  con un único punto de ramificación  $v$ , al que se le llama vértice de  $X$ .*

Ahora sí, la definición de abanico suave.

**Definición 1.21.** *Un abanico  $X$  con vértice  $v$  es un **abanico suave** si para toda sucesión  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$  en  $X$  que converge a un punto  $x \in X$ , la sucesión  $\{vx_m\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $vx$ .*

Ahora, una definición y un teorema sobre espacios topológicos en general que serán muy útiles en la demostración del Teorema 2.16, (véase Capítulo 2).

**Definición 1.22.** *Una familia  $\{A_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$  de subconjuntos de un espacio topológico  $X$  es **localmente finita** en un subconjunto  $A$  de  $X$  si para cada punto  $x$  de  $A$  existe una vecindad  $V$  de  $x$  en  $X$  tal que  $V \cap A_\alpha \neq \emptyset$  para a lo más un número finito de índices  $\alpha$ .*

**Ejemplo 1.23.** Consideremos el intervalo  $(0, 1) \subset \mathbb{R}$  con la topología usual. Sea  $\mathcal{F} = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ . Veamos que la familia  $\mathcal{F}$  es localmente finita en  $(0, 1)$ . Para cualquier  $r \in (0, 1)$  existe  $N_r \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < \frac{1}{N_r} < r$ . Sea  $V_r = (r - \frac{1}{N_r}, r + \frac{1}{N_r})$ . Notemos que  $V_r$  es una vecindad de  $r$  que sólo interseca a los elementos de la colección  $\mathcal{F}$  tales que  $n < N_r$ . Como  $\{(0, \frac{1}{n}) : n < N_r\}$  es una subcolección finita de  $\mathcal{F}$ , se cumple que  $\mathcal{F}$  es localmente finita en  $(0, 1)$ . Sin embargo,  $\mathcal{F}$  no es una familia localmente finita en  $\mathbb{R}$  porque para cualquier vecindad  $V$  del 0 la cardinalidad del conjunto de elementos de  $\mathcal{F}$  que intersecan a  $V$  no es finita.

**Teorema 1.24.** [9, Teorema 9.4, p. 83] Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos y  $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$  una cubierta de  $X$  que satisface (a) o (b):

- (a) Todos los conjuntos  $A_\alpha$  son abiertos en  $X$ .
- (b) Todos los conjuntos  $A_\alpha$  son cerrados en  $X$  y forman una familia localmente finita en  $X$ .

Sea  $\{f_\alpha : A_\alpha \rightarrow Y\}$  una familia de funciones continuas tal que para cada  $(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda$ , se cumple que  $f_\alpha|_{A_\alpha \cap A_\beta} = f_\beta|_{A_\alpha \cap A_\beta}$ . Entonces existe una única función continua  $f : X \rightarrow Y$  la cual es una extensión de cada  $f_\alpha$ , es decir, para todo  $\alpha \in \Lambda$ , se cumple que  $f|_{A_\alpha} = f_\alpha$ .

El siguiente teorema es un resultado importante en teoría de continuos, que aunque muy básico, lo enunciamos porque lo utilizamos en nuestro trabajo.

**Teorema 1.25.** [35, Teorema 8.26] Si  $X$  es un continuo localmente conexo y  $U$  es un conjunto conexo y abierto en  $X$ , entonces  $U$  es localmente conexo.

El siguiente resultado sobre límites de conjuntos es ampliamente conocido y no es difícil de probar, sin embargo, se puede consultar una prueba en [10]. Este resultado clásico será de utilidad al demostrar el inciso (a) del Teorema 2.15.

**Teorema 1.26.** [10, Teorema 1.60] Sean  $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$  y  $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$  sucesiones de elementos de  $2^X$  tales que  $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $A$  y  $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $B$ , donde  $A, B \in 2^X$ . Si  $A_m \cap B_m \neq \emptyset$ , para cada  $m \in \mathbb{N}$ , entonces  $A \cap B \neq \emptyset$ .

## 1.2. Continuos enrejados

En esta sección enunciamos lo referente a los continuos enrejados; desde su definición y ejemplos, hasta algunas propiedades importantes de los elementos de esta clase, que fueron objeto de estudio al realizar este trabajo.

Primero, veamos como va la definición de continuo casi enrejado, para así pasar a definir continuo enrejado, ya que como veremos, la clase de los continuos enrejados es una subclase de los continuos casi enrejados. Para esto, necesitamos la notación siguiente.

Dado un continuo  $X$ , sean

$$\mathcal{G}(X) = \{p \in X : p \text{ tiene una vecindad } G \text{ en } X \text{ tal que } G \text{ es una gráfica finita}\}$$

y

$$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X).$$

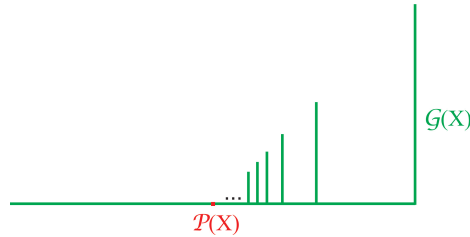
**Definición 1.27.** Un continuo  $X$  es *casi enrejado* si  $\mathcal{G}(X)$  es denso en  $X$ .

Ahora, veamos que es un continuo enrejado.

**Definición 1.28.** *Un continuo casi enrejado  $X$  es **enrejado** si  $X$  tiene una base de vecindades  $\mathfrak{B}$  tal que para cada  $U \in \mathfrak{B}$  se cumple que  $U - \mathcal{P}(X)$  es conexo.*

Veamos ahora un par de ejemplos para conocer más de continuos casi enrejados y continuos enrejados.

**Ejemplo 1.29.** *Sea  $X = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{\frac{1}{n}\} \times [0, \frac{1}{n}]))$ . El conjunto  $X$  considerado con la topología usual de  $\mathbb{R}^2$  es un continuo. En este caso,  $\mathcal{P}(X) = \{(0, 0)\}$ . El continuo  $X$  (véase Figura 5) es casi enrejado pero no es enrejado, porque para cualquier conjunto abierto  $U$  en  $X$  que tiene al punto  $(0, 0)$  se cumple que  $U - \mathcal{P}(X)$  no es conexo.*

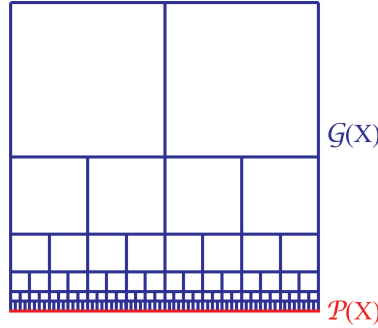


**Figura 5.** *Ejemplo de continuo casi enrejado que no es enrejado.*

**Ejemplo 1.30.** *El continuo de la Figura 6 es definido de la manera siguiente. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $A_n = \{(x, 2^{-n+1}) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$  y  $A_0 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$ . Ahora, para cada  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y cada entero  $m$  tal que  $0 \leq m \leq 2^{n+1}$ , sea  $B_{n,m} = \{(m2^{-n-1}, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2^{-n}\}$ . Finalmente, consideremos*

$$X = \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) \cup \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} \left( \bigcup_{m=0}^{2^{n+1}} B_{n,m} \right) \right).$$

El continuo  $X$  es un continuo enrejado. En este espacio  $\mathcal{P}(X) = A_0$  y obviamente  $\mathcal{G}(X) = X - A_0$ . Notemos que  $X$  no es gráfica finita ni dendrita.



**Figura 6.** Ejemplo de continuo enrejado.

Los continuos que no son localmente conexos no pueden ser enrejados. Es lo que afirma el resultado que sigue.

**Teorema 1.31.** [15, Lema 2] Si  $X$  es un continuo enrejado, entonces  $X$  es localmente conexo.

Así,  $\mathcal{M} \subset \mathcal{AM} \cap \mathcal{LC}$ . De hecho la contención es propia como lo muestra el Ejemplo que sigue:

**Ejemplo 1.32.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , sea

$$C_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left( x - \frac{1}{2n} \right)^2 + y^2 = \left( \frac{1}{2n} \right)^2 \right\}.$$

Consideremos  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ . El espacio topológico  $X$  considerado con la topología usual de  $\mathbb{R}^2$  es un continuo conocido como el Arete Hawaiano Armónico (véase Figura 6). El espacio  $X$  es un continuo casi enrejado localmente conexo que no es enrejado, porque  $U - \mathcal{P}(X)$  no es conexo, para cualquier conjunto abierto  $U$  en  $X$  que contenga al único punto de  $\mathcal{P}(X)$ . Así, no se podrá encontrar la base de vecindades que pide la definición de conjunto enrejado.

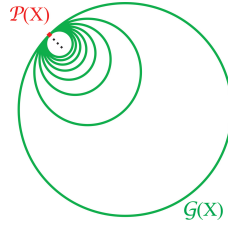


Figura 6. Arete Hawaiano Armónico.

### 1.3. El $n$ -ésimo producto simétrico de un continuo

En esta sección exponemos lo necesario sobre el  $n$ -ésimo producto simétrico de un continuo, comenzamos con la definición y luego algunas nociones muy generales sobre este hiperespacio, todo con la intención de introducir a este trabajo, primero conociendo al menos de una manera muy general, como es el hiperespacio sobre el cual se desarrolla todo nuestro trabajo.

Dados un continuo  $X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos las familias siguientes de subconjuntos de  $X$  :

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\},$$

$$F_n(X) = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y tiene a lo más } n \text{ puntos}\} \text{ y}$$

$$C_n(X) = \{A \subset X : A \text{ es cerrado en } X, \text{ no vacío y tiene a lo más } n \text{ componentes}\}.$$

En el libro de Nadler [35, 4.2], se prueba que  $2^X$  es metrizable. La métrica que se define para  $2^X$  se conoce como **métrica de Hausdorff**. Como  $F_n(X)$  y  $C_n(X)$  son subconjuntos de  $2^X$ , se tiene que  $F_n(X)$  y  $C_n(X)$  también son metrizables. De hecho,

a  $F_n(X)$  y a  $C_n(X)$ , considerados con la métrica de Hausdorff, se les conoce como el  **$n$ -ésimo producto simétrico** de  $X$  y el  **$n$ -ésimo hiperespacio** de  $X$ , respectivamente.

Dados  $m \in \mathbb{N}$  y  $U_1, \dots, U_m$  subconjuntos de  $X$ , sea

$$\langle U_1, \dots, U_m \rangle_n = \{A \in F_n(X) : A \subset U_1 \cup \dots \cup U_m \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset,$$

para cada  $i \in \{1, \dots, m\}\}$ .

La familia de todos los conjuntos de la forma  $\langle U_1, \dots, U_m \rangle_n$ , donde  $m \in \mathbb{N}$  y cada  $U_i$  es conjunto abierto en  $X$ , es una base para la topología de  $F_n(X)$ , (véase [33, Teorema 1.2]).

Algunos subconjuntos importantes de  $F_n(X)$  son los siguientes, mismos que usaremos con frecuencia en demostraciones a lo largo de este trabajo.

Dados un continuo  $X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , sean

$$P_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset\},$$

$$R_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \cap R(X) \neq \emptyset\},$$

$$\Lambda_n(X) = F_n(X) - (R_n(X) \cup P_n(X)),$$

$$\mathcal{E}_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \text{ tiene una vecindad en } F_n(X) \text{ que es una } n\text{-celda}\}.$$

Dado que nuestro trabajo forma parte de la teoría de unicidad de hiperespacios, anotamos a continuación la definición de hiperespacio único.

**Definición 1.33.** Sean  $X$  un continuo,  $n \in \mathbb{N}$  y  $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C_n(X), F_n(X)\}$ . Se dice que  $X$  tiene **hiperespacio único**  $\mathcal{H}(X)$ , si la implicación siguiente es verdadera: si  $Y$  es un continuo tal que  $\mathcal{H}(X)$  es homeomorfo a  $\mathcal{H}(Y)$ , entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y$ .

Dado cualquier continuo  $X$ , siempre se cumple que  $X$  tiene primer producto simétrico único porque la función  $h: X \rightarrow F_1(X)$  definida, para cada  $x \in X$ , por  $h(x) = \{x\}$ , es continua y suprayectiva (véase [34, Lema 2.3]), además es evidente que es inyectiva y cerrada, es decir,  $h$  es un homeomorfismo. Así, cuando se quiere verificar la unicidad del  $n$ -ésimo producto simétrico para un continuo  $X$  se revisa para  $n \geq 2$ .

Sean  $X$  un continuo y  $W$  un conjunto abierto en  $X$ . Para cada conjunto abierto  $U$  en  $X$ , definimos  $c(U, W, X)$  como el número de componentes de  $U \cap W$ , si la cardinalidad del conjunto de componentes de  $U \cap W$  es finita, si no ocurre así definimos  $c(U, W, X) = \infty$ .

Para cada  $p \in \text{cl}_X(W)$ , definimos

$v(p, W, X) = \min(\{m \in \mathbb{N} : \text{existe una base de vecindades } \mathfrak{B} \text{ de } p \text{ en } X \text{ tal que}$

$$c(U, W, X) = m, \text{ para cada } U \in \mathfrak{B}\} \cup \{\infty\}).$$

En [6, Teorema 3.4], se demuestra que si  $X$  es una gráfica finita, entonces  $\mathcal{E}_n(X)$  es abierto en  $F_n(X)$ . Así, si  $X$  es una gráfica finita y  $A \in F_n(X)$ , tiene sentido hablar de  $v(A, \mathcal{E}_n(X), F_n(X))$ . Como [6], podemos denotar por  $v_X(A)$  a  $v(A, \mathcal{E}_n(X), F_n(X))$ . Cuando no sea necesario mencionar el espacio  $X$ , simplemente escribiremos  $v(A)$  para denotar a  $v(A, \mathcal{E}_n(X), F_n(X))$ .

## 1.4. Continuos alambrados

Aunque en nuestro estudio no hacemos investigación sobre continuos alambrados, sí los mencionamos frecuentemente y usamos algunos resultados sobre los elementos de esta clase de continuos. Por lo tanto, dedicamos pequeña sección, para exponer lo referente a estos continuos.

Una parte de un continuo se llama alambre si cumple con las condiciones de la definición siguiente.

**Definición 1.34.** *Un **alambre** en un continuo  $X$  es un subconjunto  $\alpha$  de  $X$  homeomorfo a  $(0, 1)$ ,  $[0, 1)$ ,  $[0, 1]$  o  $S^1$  y que es una componente de algún abierto en  $X$ .*

Dado un continuo  $X$ , sea

$$W(X) = \bigcup \{ \alpha : \alpha \text{ es un alambre en } X \}.$$

Conociendo la noción de alambre, estamos listos para conocer que es un continuo alambrado.

**Definición 1.35.** *Un continuo  $X$  es **alambrado** si  $W(X)$  es denso en  $X$ .*

Veamos un ejemplo interesante de continuo alambrado. Para esto, recordemos la definición de continuo indescomponible.

**Definición 1.36.** *Un continuo  $X$  es **descomponible** si  $X$  se puede escribir como la unión de dos subcontinuos propios. Un continuo  $X$  es **indescomponible** si  $X$  no es descomponible.*

**Ejemplo 1.37.** *Un **solenoid** (para la definición véase [35, 2.8]) es un ejemplo de un continuo que es alambrado pero que no es casi enrejado. Un solenoid es un continuo alambrado porque*

*es un continuo indescomponible en el que todos sus subcontinuos propios, no degenerados, son arcos, y la clase de los continuos alambrados contiene a la clase de los continuos indescomponibles tales que todos sus subcontinuos propios no degenerados son arcos (véase página 1578 de [17]). De hecho, un solenoide  $S$  no es un continuo casi enrejado porque en cada punto se comporta localmente como el producto cartesiano del conjunto de Cantor con el intervalo  $[0,1]$ , no pudiendo tener así cada punto una vecindad que sea gráfica finita, por lo que el conjunto  $\mathcal{G}(S)$  no puede ser denso en  $S$ .*

Como dato interesante, cabe mencionar que en [17], los autores ponen en evidencia que la clase  $\mathcal{W}$  contiene a las clases siguientes de continuos (véase [17, pág. 1578]). La razón es que si  $\alpha$  es un arco libre en un continuo  $X$  y  $p$  y  $q$  son los puntos extremos de  $\alpha$ , entonces  $\alpha - \{p, q\}$  es un alambre. Luego, un continuo  $X$  en el que se cumpla que la unión de sus arcos libres es un conjunto denso en  $X$  es continuo alambrado.

- (a) La clase de las compactaciones del rayo  $[0, \infty)$ .
- (b) La clase de las compactaciones de la recta real.
- (c) La clase de los continuos indescomponibles tales que sus subcontinuos propios no degenerados son arcos.
- (d) La clase de los abanicos suaves.

Por lo tanto, los continuos que pertenecen a las clases de los incisos (a)-(d) tienen  $n$ -ésimo producto simétrico único cuando  $n \geq 4$ .

El teorema que a continuación enunciamos apareció en 2013 en [17], y es de suma importancia para llegar a una conclusión

sobre unicidad del  $n$ -ésimo producto simétrico de continuos enrejados cuando  $n$  es cualquier número natural (véase Corolario 2.19).

**Teorema 1.38.** [17, Corolario 6] *Si  $X$  es un continuo alambrado y  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 4$ , entonces  $X$  tiene  $n$ -ésimo producto simétrico único.*

Como la clase de los continuos enrejados está contenida propiamente en la clase de los continuos alambrados, del Teorema 1.38, tenemos el corolario siguiente.

**Corolario 1.39.** *Si  $X$  es un continuo enrejado y  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 4$ , entonces  $X$  tiene  $n$ -ésimo producto simétrico único.*

## 1.5. Resultados necesarios

En esta sección enunciamos resultados importantes y necesarios para este trabajo. Son resultados que aparecen en diferentes artículos de investigación que conviene queden anotados en este apartado para facilitar la lectura de nuestras demostraciones. En cada caso, como debe de ser, viene anotada la referencia adecuada de cada resultado.

Comenzamos esta sección con el resultado que dice que la colección de puntos del  $n$ -ésimo producto simétrico que tienen una  $n$ -celda como vecindad es invariante bajo homeomorfismos.

**Teorema 1.40.** [2, Teorema 4.1] *Sean  $X$  y  $Y$  continuos y  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $h : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$  es un homeomorfismo, entonces  $h(\mathcal{E}_n(X)) = \mathcal{E}_n(Y)$ .*

A continuación, un resultado importante sobre conexidad local referente al  $n$ -ésimo producto simétrico de un continuo.

**Teorema 1.41.** [33, Teorema 6.3] *Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Un continuo  $X$  es localmente conexo si y sólo si  $F_n(X)$  es localmente conexo.*

Enseguida, un teorema que nos da un par de condiciones equivalentes para que un continuo localmente conexo sea casi enrejado.

**Teorema 1.42.** [26, Teorema 3.1] *Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $X$  un continuo localmente conexo. Las propiedades siguientes son equivalentes.*

- (i)  *$X$  es casi enrejado.*
- (ii) *El conjunto  $\mathcal{E}_n(X)$  es denso en  $F_n(X)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*
- (iii) *Todo conjunto no vacío y abierto en  $X$  contiene un arco libre de  $X$ .*

**Teorema 1.43.** [26, Teorema 3.8] *Sea  $X$  un continuo localmente conexo y  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{E}_n(X)$  es denso en  $F_n(X)$ . Entonces*

- (a) *si  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\mathcal{E}_n(X) \subset \Lambda_n(X)$ ,*
- (b) *si  $n \in \mathbb{N} - \{2, 3\}$ , entonces  $\mathcal{E}_n(X) = \Lambda_n(X) - F_{n-1}(X)$ .*

Enunciamos a continuación un resultado relacionado con continuos localmente conexos, el cual se usará frecuentemente en varias demostraciones que aparecen en esta tesis.

**Teorema 1.44.** [15, Lema 8] *Sean  $X$  un continuo localmente conexo  $X$  y  $\{J_j\}_{j=1}^{\infty}$  una sucesión de puntos diferentes de  $\mathcal{A}_S(X)$ . Para cada  $j \in \mathbb{N}$ , sea  $x_j \in J_j$ . Si  $\lim x_j = x$  para algún  $x \in X$ , entonces  $\lim J_j = \{x\}$  (en  $C(X)$ ).*

**Teorema 1.45.** [26, Teorema 3.9] *Sean  $X$  un continuo casi enrejado y localmente conexo tal que  $X$  no es un arco ni una curva cerrada simple y  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces las componentes de  $\Lambda_n(X)$  son los conjuntos no vacíos de la forma:*

$$\langle \text{int}_X(J_1), \dots, \text{int}_X(J_m) \rangle_n, \text{ donde } m \leq n,$$

los conjuntos  $\text{int}_X(J_1), \dots, \text{int}_X(J_m)$  son disjuntos dos a dos y para cada  $k \in \{1, \dots, m\}$  se cumple que  $J_k \in \mathcal{A}_S(X)$ .

**Teorema 1.46.** [26, Teorema 3.10] Sean  $X$  un continuo localmente conexo y  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{E}_n(X)$  es denso en  $F_n(X)$ . Si  $A \in P_n(X)$ , entonces para cada base  $\mathfrak{B}$  de  $A$  en  $F_n(X)$  y cada  $\mathcal{V} \in \mathfrak{B}$ , el conjunto de componentes de  $\mathcal{V} \cap \mathcal{E}_n(X)$  tiene cardinalidad no finita.

El teorema que sigue es de bastante utilidad en algunas demostraciones a lo largo de este trabajo.

**Teorema 1.47.** [15, Teorema 4] Sean  $X$  un continuo localmente conexo,  $n \in \mathbb{N}$  y  $A \in C_n(X)$ . Entonces las proposiciones siguientes son equivalentes

- (a)  $\dim_A[C_n(X)]$  es finita,
- (b) existe una gráfica finita  $G$  contenida en  $X$  tal que  $A \subset \text{int}_X(G)$ ,
- (c)  $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ .

El teorema que sigue nos dice cuales son algunos subconjuntos de una gráfica finita que tienen una  $n$ -celda como vecindad.

**Teorema 1.48.** [6, Lema 5.1] Si  $X$  es una gráfica finita,  $n \in \{2, 3\}$  y  $A \in F_n(X) - R_n(X)$ , entonces  $A \in \mathcal{E}_n(X)$ .

**Teorema 1.49.** [15, Lema 10] Si  $X$  es un continuo localmente conexo y  $\alpha$  es un arco libre en  $X$ , entonces existe  $J \in \mathcal{A}_S(X)$  tal que  $\alpha \subset J$ .

**Teorema 1.50.** [6, Lema 5.3] Sean  $X$  una gráfica finita,  $p, q, r, w, x, y \in X$  tal que  $\text{ord}(p, X) = n \geq 3$ ,  $\text{ord}(q, X) = s \geq 3$ ,  $\text{ord}(r, X) = k \geq 3$  y  $x, y, w \notin R(X)$ . Si  $A \in F_3(X)$ , entonces los posibles valores para  $v(A)$  son:

- (a) si  $A = \{p\}$ , entonces  $v(A) = n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ ;
- (b) si  $A = \{p, x\}$ , entonces  $v(A) = n + \binom{n}{2}$ ;
- (c) si  $A = \{p, x, y\}$  y  $x \neq y$ , entonces  $v(A) = n$ ;
- (d) si  $A = \{p, q\}$  y  $p \neq q$ , entonces  $v(A) = n\binom{s}{2} + s\binom{n}{2} + ns$ ;
- (e) si  $A = \{p, q, w\}$  y  $p \neq q$ , entonces  $v(A) = ns$ ;
- (f) si  $A = \{p, q, r\}$ , con  $p, q$  y  $r$  diferentes, entonces  $v(A) = nsk$ ;
- (g) si  $A \in F_3(X) - R_3(X)$ , entonces  $v(A) = 1$ .

**Teorema 1.51.** [6, Lema 5.4] Sean  $X$  una gráfica finita,  $p, q, x \in X$  tal que  $\text{ord}(p, X) = n \geq 3$ ,  $\text{ord}(q, X) = s \geq 3$ , y  $x \notin R(X)$ . Si  $A \in F_2(X)$ , entonces los posibles valores para  $v(A)$  son:

- (a) si  $A = \{p\}$ , entonces  $v(A) = n + \binom{n}{2}$ ;
- (b) si  $A = \{p, x\}$ , entonces  $v(A) = n$ ;
- (c) si  $A = \{p, q\}$  y  $p \neq q$ , entonces  $v(A) = ns$ ;
- (d) si  $A \in F_2(X) - R_2(X)$ , entonces  $v(A) = 1$ .



# Capítulo 2

## Resultados obtenidos

### 2.1. Unicidad del segundo y tercer producto simétrico para continuos enrejados

En esta sección presentamos los resultados obtenidos sobre la unicidad del segundo y tercer producto simétrico para continuos enrejados (véase Teorema 2.18 y Corolario 2.19). Comenzamos con algunos teoremas previos que son necesarios para la demostración de tal hecho.

El teorema siguiente nos dice que los continuos enrejados nunca comparten los puntos sin gráfica finita como vecindad con los arcos libre maximales ni con las circunferencias libres.

**Teorema 2.1.** *Sea  $X$  un continuo enrejado. Si  $J \in \mathcal{A}_S(X)$ , entonces  $J \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ .*

**Prueba.** Supongamos que  $J \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$ . Sea  $x \in J \cap \mathcal{P}(X)$ . Como  $x$  no tiene vecindad que sea gráfica finita,  $x \notin \text{int}_X(J)$ . Sea  $\mathfrak{B}$  una base de vecindades de  $X$  tal que para cada  $U \in \mathfrak{B}$ , se cumple que  $U - \mathcal{P}(X)$  es conexo y sea  $V \in \mathfrak{B}$  tal que  $x \in V$ . Si  $J$  es un arco, entonces  $x$  es un punto extremo de  $J$ . Sean  $y$  el otro

punto extremo de  $J$  y  $U_1 = V - \{y\}$ . Si  $J$  es una circunferencia libre, sea  $U_1 = B_X(x, \frac{1}{2}\text{diám}(J))$ . Como  $U_1$  es abierto en  $X$  y  $x \in U_1$ , existe  $V_1 \in \mathfrak{B}$  tal que  $x \in V_1 \subset U_1$ . Notemos que se cumple lo siguiente.

- (i) Si  $J$  es un arco, entonces  $V_1 \cap E(J) = \{x\}$ .
- (ii) Si  $J$  es una circunferencia libre, entonces  $J \not\subset V_1$ .

Observemos que

$$\begin{aligned} V_1 - \mathcal{P}(X) &= V_1 \cap \mathcal{G}(X) = V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap X \\ &= V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap (J \cup (X - J)) \\ &= (V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap J) \cup (V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap (X - J)). \end{aligned}$$

Ahora, notemos que si  $J$  es un arco, entonces

$$\begin{aligned} V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap J &= V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap (\text{int}_X(J) \cup E(J)) \\ &= (V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap \text{int}_X(J)) \cup (V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap E(J)). \end{aligned}$$

Como  $V_1 \cap E(J) = \{x\}$  y  $x \notin \mathcal{G}(X)$ , se sigue que

$$V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap E(J) = \emptyset.$$

Luego,

$$V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap J = V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap \text{int}_X(J).$$

Notemos que si  $J$  es una circunferencia libre, entonces

$$V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap J = V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap \text{int}_X(J).$$

Así,

$$V_1 - \mathcal{P}(X) = (V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap \text{int}_X(J)) \cup (V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap (X - J)).$$

Como  $x \notin \text{int}_X(J)$ , hay dos opciones,  $x \in \text{int}_X(X - J)$  o  $x \in \text{fr}_X(J)$ . Notemos que  $x \notin \text{int}_X(X - J)$ , porque  $\text{int}_X(X - J) \subset X - J$  y  $x \in J$ . Luego,  $x \in \text{fr}_X(J)$ . Como  $V_1$  es abierto en  $X$  y  $x \in V_1$ , se sigue que  $V_1 \cap J \neq \emptyset$  y  $V_1 \cap (X - J) \neq \emptyset$ .

Notemos que  $V_1 \cap (X - J)$  es abierto en  $X$ . Como  $X$  es un continuo casi enrejado,  $V_1 \cap (X - J) \cap \mathcal{G}(X) \neq \emptyset$ .

Ahora, como  $x \in J$  y  $\text{cl}_X(\text{int}_X(J)) = J$ , existe una sucesión  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$  contenida en  $\text{int}_X(J)$  tal que  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $x$ . Como  $V_1$  es abierto en  $X$  y  $x \in V_1$ , existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que si  $m \geq M$ , entonces  $x_m \in V_1$ . Como para cada  $m \in \mathbb{N}$ , se cumple  $x_m \in \text{int}_X(J)$ ; se obtiene que  $x_m \in \mathcal{G}(X)$ . Así, hemos probado que existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que si  $m \geq M$ , entonces  $x_m \in V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap \text{int}_X(J)$ . Luego,

$$V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap \text{int}_X(J) \neq \emptyset.$$

Como  $\mathcal{P}(X)$  es cerrado en  $X$ , tenemos que  $V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap \text{int}_X(J)$  y  $V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap (X - J)$  son abiertos en  $X$ .

Así,  $V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap \text{int}_X(J)$  y  $V_1 \cap \mathcal{G}(X) \cap (X - J)$  forman una desconexión de  $V_1 - \mathcal{P}(X)$ . Es decir,  $V_1 - \mathcal{P}(X)$  no es conexo. Esto es una contradicción. Por lo tanto,  $J \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ .  $\square$

El teorema siguiente afirma que si en un continuo hay una sucesión convergente de puntos de ramificación que tienen vecindad que es gráfica finita, entonces el límite de dicha sucesión no tiene vecindad que sea gráfica finita.

**Teorema 2.2.** *Sean  $X$  un continuo y  $x \in X$ . Si  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$  es una sucesión de puntos diferentes en  $R(X) \cap \mathcal{G}(X)$  tal que  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $x$ , entonces  $x \in \mathcal{P}(X)$ .*

**Prueba.** Supongamos que  $x \notin \mathcal{P}(X)$ . Luego,  $x \in \mathcal{G}(X)$ . Así, existe una gráfica finita  $G$  en  $X$  tal que  $x \in \text{int}_X(G)$ . Veamos que

existe un abierto  $V$  en  $X$  tal que  $x \in V \subset G$  y  $|V \cap R(X)| \leq 1$ . Como  $X = E(X) \cup O(X) \cup R(X)$  y los conjuntos  $E(X)$ ,  $O(X)$  y  $R(X)$  son disjuntos dos a dos, tenemos tres casos.

**Caso 1.** Supongamos que  $x \in E(X)$ . Sea  $\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{d(x, y) : y \in R(X) \cap \text{int}_X(G)\}$ . Notemos que  $\varepsilon$  existe porque  $G$  es unión finita de arcos. Además,  $\varepsilon > 0$  porque  $x \neq y$ . Así, sea  $U = B_X(x, \varepsilon)$ . Luego,  $U \cap R(X) = \emptyset$ . Por lo tanto,  $|U \cap R(X)| \leq 1$ .

**Caso 2.** Supongamos que  $x \in O(X)$ . La demostración en este caso es análoga a la del Caso 1.

**Caso 3.** Supongamos que  $x \in R(X)$ . Sea  $\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{d(x, y) : y \in (R(X) \cap \text{int}_X(G)) - \{x\}\}$ . Notemos que  $\varepsilon$  existe porque  $G$  es unión finita de arcos. Además,  $\varepsilon > 0$  porque  $x \neq y$ . Así, sea  $U = B_X(x, \varepsilon)$ . Luego,  $U \cap R(X) = \{x\}$ . Por lo tanto,  $|U \cap R(X)| \leq 1$ .

Por otro lado, como  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$  es una sucesión en  $R(X)$  y  $U$  es abierto en  $X$ , existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que si  $m \geq M$ , entonces  $x_m \in U$ . Luego,  $|U \cap R(X)| = \infty$ . Esto es una contradicción. Por lo tanto,  $x \in \mathcal{P}(X)$ .  $\square$

El siguiente es un ejemplo de un continuo  $X$  para el cual  $\mathcal{G}(X) = \emptyset$ . Es claro que en este caso, el continuo no es casi enrejado.

**Ejemplo 2.3.** Sea  $X$  una 2-celda,  $p \in X$  y  $A$  un arco contenido en  $X$  con  $p \in A$ . Notemos que  $A$  es una gráfica finita y que  $X$  no es casi enrejado. Además,  $A$  no puede ser vecindad de  $p$  porque  $U \not\subset A$ , para todo abierto  $U$  en  $X$  con  $p \in U$ . Luego,  $\mathcal{G}(X) = \emptyset$ .

El recíproco del Teorema 2.2 es falso por el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.4.** Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , sea  $L_m$  el segmento de recta en  $\mathbb{R}^2$  que va de  $(0, 0)$  a  $(\frac{1}{m}, \frac{1}{m^2})$ . Sea  $F_\omega = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} L_m$ . El conjunto  $F_\omega$  con la topología inducida de  $\mathbb{R}^2$  es un continuo, de hecho, es una dendrita y se conoce precisamente como  $F_\omega$ . Notemos

que  $(0, 0) \in \mathcal{P}(F_\omega)$  y no existe una sucesión  $\{x_m\}_{m=1}^\infty$  de puntos diferentes en  $R(X) \cap \mathcal{G}(X)$  que sea convergente a  $(0, 0)$ .

En los continuos enrejados el recíproco del Teorema 2.2 es verdadero.

**Teorema 2.5.** *Sea  $X$  un continuo enrejado. Entonces  $x \in \mathcal{P}(X)$  si y sólo si existe una sucesión  $\{x_m\}_{m=1}^\infty$  de elementos diferentes de  $R(X) \cap \mathcal{G}(X)$  tal que  $\{x_m\}_{m=1}^\infty$  converge a  $x$ .*

*Prueba.* Supongamos que  $x \in \mathcal{P}(X)$  y que no existe una sucesión de elementos diferentes en  $R(X) \cap \mathcal{G}(X)$  que sea convergente a  $x$ . Luego, existe un conjunto abierto  $V$  en  $X$  tal que  $x \in V$  y  $V \cap (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) = \emptyset$ . El Teorema 1.31 implica que  $X$  es localmente conexo. Luego, existe un conjunto conexo y abierto  $U$  en  $X$  tal que  $x \in U \subset V$ . Notemos que  $U \cap (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) = \emptyset$ . Como  $X$  es casi enrejado,  $U \cap \mathcal{G}(X) \neq \emptyset$ .

Sea  $x_1 \in U \cap \mathcal{G}(X)$ . El Teorema 1.25 nos garantiza que  $U$  es arco conexo. Luego, existe un arco  $L$  contenido en  $U$  que va de  $x$  a  $x_1$ . Así, existe un homeomorfismo  $\gamma: [0, 1] \rightarrow L$  tal que  $\gamma(0) = x$  y  $\gamma(1) = x_1$ .

Como  $U \cap (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) = \emptyset$ , para cada  $t \in (0, 1]$ , se cumple que  $\text{ord}(\gamma(t), X) \leq 2$ , o bien  $(\gamma([0, 1]) - \{x, x_1\}) \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$ . Sea  $t_1 = \sup\{t \in [0, 1]: \gamma(t) \in \mathcal{P}(X)\}$ . Sea  $\alpha_1$  el arco contenido en  $U$  con puntos extremos  $\gamma(t_1)$  y  $\gamma(1)$ . Notemos que  $\alpha_1$  es un arco libre en  $X$ . Por el Teorema 1.49, existe  $J \in \mathcal{A}_S(X)$  tal que  $\alpha_1$  está contenido en  $J$ . Luego,  $\gamma(t_1) \in J \cap \mathcal{P}(X)$ , esto contradice al Teorema 2.1. Así, si  $x \in \mathcal{P}(X)$ , entonces existe una sucesión  $\{x_m\}_{m=1}^\infty$  de elementos diferentes de  $R(X) \cap \mathcal{G}(X)$  tal que  $\{x_m\}_{m=1}^\infty$  converge a  $x$ . La otra implicación está probada en el Teorema 2.2.  $\square$

El resultado siguiente extiende [2, Teorema 4.5 (b)] a continuos casi enrejados localmente conexos.

**Teorema 2.6.** *Si  $X$  es un continuo casi enrejado localmente conexo y  $n \in \{2, 3\}$ , entonces  $\mathcal{E}_n(X) = \Lambda_n(X)$ .*

**Prueba.** Sean  $X$  un continuo casi enrejado localmente conexo y  $n \in \{2, 3\}$ . El Teorema 1.42 implica que  $\mathcal{E}_n(X)$  es denso en  $F_n(X)$ . Luego, por el Teorema 1.43, se cumple que  $\mathcal{E}_n(X) \subset \Lambda_n(X)$ . Ahora, veamos que  $\Lambda_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$ . Para esto, sea  $A \in \Lambda_n(X)$ . Por el Teorema 1.47, existe una gráfica finita  $G$  contenida en  $X$  tal que  $A \subset \text{int}_X(G)$ . Vamos a probar que  $A \subset E(G) \cup O(G)$ . Supongamos que existe  $a \in A$  tal que  $a \notin E(G) \cup O(G)$ . Luego,  $a \in R(G)$ . Como  $a \in \text{int}_X(G)$ , se sigue que  $a \in R(X)$ . Así,  $A \cap R(X) \neq \emptyset$ . Esto es una contradicción. Por lo tanto,  $A \subset E(G) \cup O(G)$ .

Luego,  $A \in F_n(G) - R_n(G)$ . Como  $P_n(G) = \emptyset$ , se cumple la siguiente igualdad  $\Lambda_n(G) = F_n(G) - R_n(G)$ . Por lo tanto,  $A \in \Lambda_n(G)$ . El Teorema 1.48 implica que  $A \in \mathcal{E}_n(G)$ . Así, existe una  $n$ -celda  $\mathcal{C}$  en  $F_n(G)$  tal que  $A \in \text{int}_{F_n(G)}(\mathcal{C})$ . Notemos que  $A \in \langle \text{int}_X(G) \rangle_n$ . Además, como  $\text{int}_{F_n(G)}(\mathcal{C}) \subset \langle \text{int}_X(G) \rangle_n$ , se tiene que  $\text{int}_{F_n(G)}(\mathcal{C}) \cap \langle \text{int}_X(G) \rangle_n = \text{int}_{F_n(G)}(\mathcal{C})$ . Como en el interior de una  $n$ -celda siempre se puede construir una  $n$ -celda, existe una  $n$ -celda  $\mathcal{C}'$  en  $F_n(G)$  tal que  $A \in \text{int}_{F_n(G)}(\mathcal{C}') \subset \mathcal{C}' \subset \text{int}_{F_n(G)}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C} \subset \langle \text{int}_X(G) \rangle_n$ . Como  $\langle \text{int}_X(G) \rangle_n$  es abierto en  $F_n(X)$ , la  $n$ -celda  $\mathcal{C}'$  es una  $n$ -celda en  $F_n(X)$ . Luego,  $A \in \mathcal{E}_n(X)$ . Así,  $\Lambda_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$ . Por lo tanto,  $\mathcal{E}_n(X) = \Lambda_n(X)$ .  $\square$

El resultado siguiente, nos dice que si consideramos un continuo casi enrejado localmente conexo  $X$ , entonces las colecciones  $\Lambda_2(X)$  y  $\Lambda_3(X)$  son invariantes bajo homeomorfismos.

**Teorema 2.7.** *Sean  $X$  un continuo casi enrejado localmente conexo y  $n \in \{2, 3\}$ . Si  $h : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$  es un homeomorfismo, entonces  $h(\Lambda_n(X)) = \Lambda_n(Y)$ .*

**Prueba.** El Teorema 2.6 nos dice que  $h(\Lambda_n(X)) = h(\mathcal{E}_n(X))$ . Por otro lado, el Teorema 1.40 implica que  $h(\Lambda_n(X)) = \mathcal{E}_n(Y)$ . Ahora, el Teorema 2.6 implica que  $h(\Lambda_n(X)) = \Lambda_n(Y)$ .  $\square$

Notemos que si  $X$  es un continuo casi enrejado localmente conexo y  $n \in \{2, 3\}$ , el Teorema 1.45 y el Teorema 2.6, nos aseguran que  $\mathcal{E}_n(X)$  es un conjunto abierto en  $F_n(X)$ . Así, en este caso, si  $A \in F_n(X)$ , como en el caso de gráficas finitas, también tiene sentido hablar de  $v(A, \mathcal{E}_n(X), F_n(X))$  y lo denotamos por  $v_X(A)$ . Cuando no sea necesario mencionar el espacio  $X$ , simplemente escribiremos  $v(A)$  para denotar a  $v(A, \mathcal{E}_n(X), F_n(X))$ .

**Teorema 2.8.** *Sean  $X$  un continuo casi enrejado localmente conexo,  $n \in \{2, 3\}$  y  $A \in F_n(X) - P_n(X)$ , entonces existe una gráfica finita  $G$  contenida en  $X$  tal que  $A \subset \text{int}_X(G)$  y  $v(A, \mathcal{E}_n(G), F_n(G)) = v(A, \mathcal{E}_n(X), F_n(X))$ .*

**Prueba.** Sea  $A \in F_n(X) - P_n(X)$ . Como  $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ , por el Teorema 1.47, existe una gráfica finita  $G$  contenida en  $X$  tal que  $A \subset \text{int}_X(G)$ . Veamos que  $v(A, \mathcal{E}_n(G), F_n(G)) = v(A, \mathcal{E}_n(X), F_n(X))$ . Para esto, sean

$M = \{m \in \mathbb{N} : \text{existe una base de vecindades } \mathfrak{B} \text{ de } A \text{ en } F_n(X)$

tal que  $c(U, \mathcal{E}_n(X), F_n(X)) = m$ , para cada  $U \in \mathfrak{B}\}$  y

$M_1 = \{m \in \mathbb{N} : \text{existe una base de vecindades } \mathfrak{B}_1 \text{ de } A \text{ en } F_n(G)$

tal que  $c(U, \mathcal{E}_n(G), F_n(G)) = m$ , para cada  $U \in \mathfrak{B}_1\}$ .

Veamos que  $M = M_1$ . Sea  $m \in M$ . Existe una base de vecindades  $\mathfrak{B}$  de  $A$  en  $F_n(X)$  tal que  $c(U, \mathcal{E}_n(G), F_n(G)) = m$ , para cada  $U \in \mathfrak{B}$ . Sea  $\mathfrak{B}_1 = \{V \in \mathfrak{B} : V \subset \langle \text{int}_X(G) \rangle_n \cap U, \text{ para } U \in \mathfrak{B}\}$ . Notemos que  $\mathfrak{B}_1$  es una base de vecindades de  $A$  en  $F_n(G)$ . Sea  $V \in \mathfrak{B}_1$ . Veamos que  $c(V, \mathcal{E}_n(X), F_n(X)) = c(V, \mathcal{E}_n(G), F_n(G))$ . El Teorema 2.6 implica que  $V \cap \mathcal{E}_n(X) = V \cap \Lambda_n(X) = V \cap \Lambda_n(G) = V \cap \mathcal{E}_n(G)$ . Por lo tanto,  $c(V, \mathcal{E}_n(X), F_n(X)) = c(V, \mathcal{E}_n(G), F_n(G))$ . Luego,  $m \in M_1$ . Así,  $M \subset M_1$ . De manera similar, se demuestra que  $M_1 \subset M$ . Luego,  $M = M_1$ . Por lo tanto,  $\text{mín}(M \cup \{\infty\}) = \text{mín}(M_1 \cup \{\infty\})$ . Así,  $v(A, \mathcal{E}_n(G), F_n(G)) = v(A, \mathcal{E}_n(X), F_n(X))$ .  $\square$

**Teorema 2.9.** *Sean  $X$  un continuo casi enrejado localmente conexo y  $p, q, r, x, y \in \mathcal{G}(X)$  tales que  $\text{ord}(p, X) = n \geq 3$ ,  $\text{ord}(q, X) = s \geq 3$ ,  $\text{ord}(r, X) = k \geq 3$  y  $x, y \in O(X) \cup E(X)$ . Si  $A \in F_3(X)$ , entonces los posibles valores para  $v(A) = v(A, \mathcal{E}_3(X), F_3(X))$  son:*

- (a) si  $A = \{p\}$ , entonces  $v(A) = n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ ;
- (b) si  $A = \{p, x\}$ , entonces  $v(A) = n + \binom{n}{2}$ ;
- (c) si  $A = \{p, x, y\}$  y  $x \neq y$ , entonces  $v(A) = n$ ;
- (d) si  $A = \{p, q\}$  y  $p \neq q$ , entonces  $v(A) = n \binom{s}{2} + s \binom{n}{2} + ns$ ;
- (e) si  $A = \{p, q, x\}$  y  $p \neq q$ , entonces  $v(A) = ns$ ;
- (f) si  $A = \{p, q, r\}$ , con  $p, q$  y  $r$  diferentes, entonces  $v(A) = nsk$ ;
- (g) si  $A \in \Lambda_3(X)$ , entonces  $v(A) = 1$ ;
- (h) si  $A \in PA_3(X)$ , entonces  $v(A) = \infty$ .

**Prueba.** Veamos (a). Notemos que  $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ . Por el Teorema 2.8, existe una gráfica finita  $G$  contenida en  $X$  tal que  $A \subset \text{int}_X(G)$  y  $v(A, \mathcal{E}_3(G), F_3(G)) = v(A, \mathcal{E}_3(X), F_3(X))$ . Ahora, como  $p \in R(X)$  y  $p \in \text{int}_X(G)$ , se sigue que  $p \in R(G)$ . Por el Teorema 1.50, se obtiene que  $v(A, \mathcal{E}_3(G), F_3(G)) = n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ . Luego,  $v(A, \mathcal{E}_3(X), F_3(X)) = n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ .

De manera análoga se prueban los incisos (b) – (g).

Veamos (h). Sea  $A \in P_3(X)$ . Por el Teorema 1.46 para cada base  $\mathcal{B}$  de  $A$  en  $F_3(X)$  y cada  $\mathcal{V} \in \mathfrak{B}$ , el conjunto de componentes de  $\mathcal{V} \cap \mathcal{E}_3(X)$  tiene cardinalidad no finita. Así,  $v(A) = \infty$ .  $\square$

**Teorema 2.10.** Sean  $X$  un continuo casi enrejado localmente conexo y  $p, q, x \in \mathcal{G}(X)$  tales que  $\text{ord}(p, X) = n \geq 3$ ,  $\text{ord}(q, X) = s \geq 3$  y  $x \in O(X) \cup E(X)$ . Si  $A \in F_2(X)$ , entonces los posibles valores para  $v(A)$  son:

(a) si  $A = \{p\}$ , entonces  $v(A) = n + \binom{n}{2}$ ;

(b) si  $A = \{p, x\}$ , entonces  $v(A) = n$ ;

(c) si  $A = \{p, q\}$  y  $p \neq q$ , entonces  $v(A) = ns$ ;

(d) si  $A \in \Lambda_2(X)$ , entonces  $v(A) = 1$ ;

(e) si  $A \in P_2(X)$ , entonces  $v(A) = \infty$ .

**Prueba.** Veamos (a). Notemos que  $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ . Por el Teorema 2.8, existe una gráfica finita  $G$  contenida en  $X$  tal que  $A \subset \text{int}_X(G)$  y  $v(A, \mathcal{E}_2(G), F_2(G)) = v(A, \mathcal{E}_2(X), F_2(X))$ . Ahora, como  $p \in R(X)$  y  $p \in \text{int}_X(G)$ , se sigue que  $p \in R(G)$ . Del Teorema 1.50, obtenemos que  $v(A, \mathcal{E}_2(G), F_2(G)) = n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ . Luego,  $v(A, \mathcal{E}_2(X), F_2(X)) = n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ .

De manera análoga se prueban los incisos (b) – (d).

Veamos (e). Sea  $A \in P_2(X)$ . Por el Teorema 1.46 para cada base  $\mathcal{B}$  de  $A$  en  $F_2(X)$  y cada  $\mathcal{V} \in \mathfrak{B}$ , el conjunto de componentes de  $\mathcal{V} \cap \mathcal{E}_2(X)$  tiene cardinalidad no finita. Así,  $v(A) = \infty$ .  $\square$

**Teorema 2.11.** *Sean  $X$  y  $Y$  continuos casi enrejados localmente conexos y  $n \in \{2, 3\}$ . Si  $h : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$  es un homeomorfismo y  $A$  es un elemento de  $F_n(X)$  tal que  $v_X(A)$  es finito, entonces*

$$v_Y(h(A)) \leq v_X(A).$$

**Prueba.** Sea  $A \in F_n(X)$ . Supongamos que  $v_X(A) = m$ , para algún  $m \in \mathbb{N}$ . Sea  $\mathfrak{B}$  una base de vecindades de  $A$  en  $F_n(X)$  tal que  $c(U, \mathcal{E}_n(X), F_n(X)) = m$ , para cada  $U \in \mathfrak{B}$ . Sea  $\mathfrak{C} = \{h(U) : U \in \mathfrak{B}\}$ . Notemos que  $\mathfrak{C}$  es una base de vecindades de  $h(A)$  en  $F_n(Y)$ . Además, como  $h$  es inyectiva,  $h(U \cap \mathcal{E}_n(X)) = h(U) \cap h(\mathcal{E}_n(X))$ , para cada  $U \in \mathfrak{B}$ . El Teorema 1.40 implica que  $h(\mathcal{E}_n(X)) = \mathcal{E}_n(Y)$ . Así,  $h(U \cap \mathcal{E}_n(X)) = h(U) \cap \mathcal{E}_n(Y)$ . Ahora, sea  $\mathcal{V} \in \mathfrak{C}$ . Existe  $\mathcal{U}_0 \in \mathfrak{B}$  tal que  $h(\mathcal{U}_0) = \mathcal{V}$ . Luego,  $\mathcal{V} \cap \mathcal{E}_n(Y) = h(\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{E}_n(X))$ . Como el número de componentes de un espacio topológico es un invariante topológico, la cardinalidad del conjunto de componentes de  $\mathcal{V} \cap \mathcal{E}_n(Y)$  es igual a la cardinalidad del conjunto de componentes de  $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{E}_n(X)$ . Así,  $c(\mathcal{V}, \mathcal{E}_n(Y), F_n(Y)) = m$ , para cada  $\mathcal{V} \in \mathfrak{C}$ . Por lo tanto,  $v_Y(h(A)) \leq v_X(A)$ .  $\square$

**Teorema 2.12.** *Sean  $X$  y  $Y$  continuos casi enrejados localmente conexos y  $n \in \{2, 3\}$ . Si  $h : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$  es un homeomorfismo, entonces*

$$(a) \ h(R_n(X) \cup P_n(X)) = R_n(Y) \cup P_n(Y).$$

$$(b) \ \text{Si } A \in F_n(X), \text{ entonces } v_X(A) = v_Y(h(A)).$$

$$(c) \ h(R_n(X) - P_n(X)) = R_n(Y) - P_n(Y).$$

$$(d) \ h(F_1(R(X) \cap \mathcal{G}(X))) = F_1(R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)).$$

$$(e) \ h(P_n(X)) = P_n(Y).$$

(f) Si  $X$  es un continuo enrejado, entonces  $h(F_1(\mathcal{P}(X))) \subset F_1(\mathcal{P}(Y))$ .

**Prueba.** Veamos (a). Sea  $A \in R_n(X) \cup P_n(X)$ . Luego,  $h(A) \in h(R_n(X) \cup P_n(X))$ . Supongamos que  $h(A) \notin R_n(Y) \cup P_n(Y)$ . Luego,  $h(A) \in \Lambda_n(Y)$ . El Teorema 2.6 implica que  $h(A) \in \mathcal{E}_n(Y)$ . Por el Teorema 1.40, sabemos que  $h(\mathcal{E}_n(X)) = \mathcal{E}_n(Y)$ . Luego,  $h(A) \in h(\mathcal{E}_n(X))$ . Por lo tanto,  $A \in \mathcal{E}_n(X)$ . Por el Teorema 2.6,  $A \in \Lambda_n(X)$ . Luego,  $A \notin R_n(X) \cup P_n(X)$ . Esto es una contradicción. Por lo tanto,  $h(A) \in R_n(Y) \cup P_n(Y)$ . Así,  $h(R_n(X) \cup P_n(X)) \subset R_n(Y) \cup P_n(Y)$ .

Ahora, como  $h^{-1}$  es un homeomorfismo, de manera análoga se puede demostrar que  $h^{-1}(R_n(Y) \cup P_n(Y)) \subset R_n(X) \cup P_n(X)$ . Luego,  $h(h^{-1}(R_n(Y) \cup P_n(Y))) \subset h(R_n(X) \cup P_n(X))$ . Así,  $R_n(Y) \cup P_n(Y) \subset h(R_n(X) \cup P_n(X))$ . Por lo tanto,  $h(R_n(X) \cup P_n(X)) = R_n(Y) \cup P_n(Y)$ .

Veamos (b). Sea  $A \in F_n(X)$ . Supongamos que  $v_X(A)$  es finito. Por el Teorema 2.11, sabemos que  $v_Y(h(A)) \leq v_X(A)$ . Luego,  $v_Y(h(A))$  es finito. Ahora, como  $h^{-1} : F_n(Y) \rightarrow F_n(X)$  es un homeomorfismo, por el Teorema 2.11, se obtiene que  $v_X(h^{-1}(h(A))) \leq v_Y(h(A))$ . Así,  $v_X(A) \leq v_Y(h(A))$ . Por lo tanto,  $v_X(A) = v_Y(h(A))$ . Ahora, supongamos que  $v_X(A) = \infty$ . El Teorema 2.11 implica que  $v_Y(h(A)) = \infty$ . Así,  $v_X(A) = v_Y(h(A))$ .

Veamos (c). Veremos la prueba de este inciso para el caso  $n = 3$ . La prueba para el caso  $n = 2$  es análoga, lo único que cambia es que en vez de usar la parte (h) del Teorema 2.9, se usa la parte (e) del Teorema 2.10.

Sean  $n = 3$  y  $A \in R_3(X) - P_3(X)$ . Por la parte (a), se sabe que  $h(A) \in R_3(Y) - P_3(Y)$ . Si  $h(A) \in P_3(Y)$ , por la parte (h) del Teorema 2.9, se sigue que  $v_Y(h(A)) = \infty$ . Como  $A \in R_3(X) - P_3(X)$ , el Teorema 2.9 implica que  $v_X(A) < \emptyset$ . Esto es una contradicción a la parte (b). Así,  $h(A) \in R_3(Y) - P_3(Y)$ . Por lo tanto,  $h(R_3(X) - P_3(X)) \subset R_3(Y) - P_3(Y)$ .

Ahora, como  $h^{-1}$  es un homeomorfismo, de manera análoga se puede demostrar que  $h^{-1}(R_3(Y) - P_3(Y)) \subset R_3(X) - P_3(X)$ . Luego,  $h(h^{-1}(R_3(Y) - P_3(Y))) \subset h(R_3(X) - P_3(X))$ . Así,  $R_3(Y) - P_3(Y) \subset h(R_3(X) - P_3(X))$ . Por lo tanto,  $h(R_3(X) - P_3(X)) = R_3(Y) - P_3(Y)$ .

Veamos (d). Veremos la prueba de este inciso para el caso  $n = 3$ . La prueba para el caso  $n = 2$  es análoga.

**Afirmación 1.** Sea  $A \subset F_3(X) - \mathcal{P}_3(X)$ . Entonces  $A \subset R(X) \cap \mathcal{G}(X)$  si y sólo si existe un abierto  $\mathcal{V}$  en  $F_3(X)$  tal que para cada  $A_1 \in \mathcal{V} - \{A\}$  se cumple que  $v(A_1) < v(A)$ .

**Prueba de la Afirmación 1.** Supongamos que  $A \subset R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ . Luego,  $A$  es un conjunto como los descritos en (a), (d) o (f) del Teorema 2.9. Supongamos que  $A$  es como en (a) del Teorema 2.9. Luego, existe  $y \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$  tal que  $A = \{y\}$ . Existe un abierto  $U$  en  $X$  tal que  $U \cap R(X) = \{y\}$ . Sea  $\mathcal{V} = \langle U \rangle_3$ . Sabemos que  $\mathcal{V}$  es abierto en  $F_3(X)$ . Además,  $V \cap F_1(\mathcal{P}(X)) = \{A\}$ . Sea  $A_1 \in \mathcal{V} - \{A\}$ . Notemos que si consideramos los conjuntos descritos en los diferentes incisos del Teorema 2.9, resulta que  $A_1$  es un conjunto como los descritos en (b), (c) o (g) del Teorema 2.9. Así, por las partes (a), (b), (c) y (g) del Teorema 2.9, se obtiene que  $v(A_1) < v(A)$ . Cuando  $A$  es un conjunto como los descritos en las partes (d) o (f) se hace algo similar y se

demuestra que existe un conjunto abierto  $\mathcal{V}$  en  $F_3(X)$  tal que para cada  $A_1 \in \mathcal{V} - \{A\}$  se cumple que  $v(A_1) < v(A)$ .

Recíprocamente, sea  $A \in F_3(X) - P_3(X)$  tal que  $A$  contiene un punto  $y \in X - [R(X) \cup \mathcal{P}(X)]$ . Luego, existe un arco  $L$  en  $X$  tal que  $y \in L$  y  $L \cap R(X) = \emptyset$ . Por las partes (b), (c), (e) o (g) del Teorema 2.9, se sigue que  $v(A) = v((A - \{y\}) \cup \{l\})$ , para cada  $l \in L$ . Así,  $v(A_1) = v(A)$ , para una cantidad no finita de elementos  $A_1$  de  $\mathcal{V}$ , para cada abierto  $\mathcal{V}$  de  $A$  en  $F_3(X)$ . Así, queda probada la Afirmación 1.

Así, obtenemos la afirmación siguiente.

**Afirmación 2.** Si  $A \in F_3(X) - P_3(X)$ , entonces  $A \subset R(X) \cap \mathcal{G}(X)$  si y sólo si  $h(A) \subset R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$ .

Ahora, sea  $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ . Por la Afirmación 2,  $h(\{x\}) \subset R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$ . Luego,  $h(\{x\})$  es de una de las formas:  $\{z\}$ ,  $\{z, u\}$ ,  $\{z, u, w\}$ , donde  $z, u, w \in R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$  son puntos diferentes. Siguiendo las ideas de [6, Lema 5.5], y usando el Teorema 2.9, la única posibilidad es que  $h(\{x\}) = \{z\}$ , para algún  $z \in R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$ . La otra contención se demuestra de manera similar. Así, queda probado (d).

Veamos (e). Sea  $A \in P_n(X)$ . Luego,  $A \in P_n(X) \cup R_n(X)$ . Por la parte (a),  $h(A) \in P_n(Y) \cup R_n(Y)$ . Notemos que  $A \notin R_n(X) - P_n(X)$ . Por la parte (c), se cumple que  $h(A) \notin R_n(Y) - P_n(Y)$ . Luego,  $h(A) \in P_n(Y)$ . Así,  $h(P_n(X)) = P_n(Y)$ .

Como  $h^{-1}$  es un homeomorfismo, de manera análoga se prueba que  $h^{-1}(P_n(Y)) \subset P_n(X)$ . Luego,  $h(h^{-1}(P_n(Y))) \subset h(P_n(X))$ . Así,  $P_n(Y) \subset h(P_n(X))$ . Por lo tanto,  $h(P_n(X)) = P_n(Y)$ .

Veamos (f). Sea  $A \in F_1(\mathcal{P}(X))$ . Luego, existe  $x \in \mathcal{P}(X)$  tal que  $A = \{x\}$ . Por el Teorema 2.5, existe una sucesión  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$

de elementos diferentes de  $R(X) \cap \mathcal{G}(X)$  tal que  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $x$ . Luego,  $\{\{x_m\}\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $\{x\}$ . Como  $h$  es continua,  $\{h(\{x_m\})\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $h(\{x\})$ . Notemos que  $\{x_m\} \in F_1(R(X) \cap \mathcal{G}(X))$ , para cada  $m \in \mathbb{N}$ . Por la parte (d),  $h(\{x_m\}) \in F_1(R(Y) \cap \mathcal{G}(Y))$ , para cada  $m \in \mathbb{N}$ . Así, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existe  $r_m \in R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$  tal que  $h(\{x_m\}) = \{r_m\}$ . Luego,  $\{r_m\}_{m=1}^{\infty}$  es una sucesión de elementos diferentes de  $R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$ . Supongamos que  $\{r_m\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $y \in Y$ . Por el Teorema 2.2, se obtiene que  $y \in \mathcal{P}(Y)$ . Luego,  $\{h(\{x_m\})\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $\{y\}$ . Así,  $h(\{x\}) = \{y\}$ . Por lo tanto,  $h(\{x\}) \in F_1(\mathcal{P}(Y))$ .  $\square$

**Lema 2.13.** Sean  $X$  y  $Y$  continuos enrejados y  $n \in \{2, 3\}$ . Si  $h : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$  es un homeomorfismo y  $x \in (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X)$ , entonces existe un único  $y \in (R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$  tal que  $h(\{x\}) = \{y\}$ .

**Prueba.** Supongamos que  $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ . Por el Teorema 1.31, los espacios  $X$  y  $Y$  son localmente conexos. Por (d) del Teorema 2.12, existe  $y \in R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$  tal que  $h(\{x\}) = \{y\}$ . Veamos que  $y$  es único. Para esto, supongamos que existe  $y' \in R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$  tal que  $h(\{x\}) = \{y'\}$ . Luego,  $\{y\} = \{y'\}$ . Así,  $y = y'$ . Por lo tanto,  $y$  es único. Ahora, supongamos que  $x \in \mathcal{P}(X)$ . Por (f) del Teorema 2.12, existe  $y \in \mathcal{P}(Y)$  tal que  $h(\{x\}) = \{y\}$ . De manera análoga, como en el caso en que  $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ , se ve que  $y$  es único. Así, para todo  $x \in (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X)$ , existe un único  $y \in (R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$  tal que  $h(\{x\}) = \{y\}$ .  $\square$

**Teorema 2.14.** Sean  $X$  y  $Y$  continuos enrejados y  $n \in \{2, 3\}$ . Si  $F_n(X)$  es homeomorfo a  $F_n(Y)$ , entonces existe una función biyectiva y continua  $f_1$  de  $(R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X)$  a  $(R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$ .

**Prueba.** Sea  $h : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$  un homeomorfismo y sea  $f_1 : (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X) \rightarrow (R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$  definida, para cada  $x \in (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X)$ , por  $f_1(x) = y$ , donde  $y$  es el único punto de  $(R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$  (mencionado en el Lema 2.13) tal que  $h(\{x\}) = \{y\}$ . Por el Lema 2.13, la función  $f_1$  está bien definida. Veamos que  $f_1$  es biyectiva y continua. Primero veamos que  $f_1$  es inyectiva. Para esto, sean  $x, z \in (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X)$  tales que  $f_1(x) = f_1(z)$ . Luego,  $f_1(x)$  es el único punto de  $(R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$  tal que  $h(\{x\}) = \{f_1(x)\}$  y  $f_1(z)$  es el único punto de  $(R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$  tal que  $h(\{z\}) = \{f_1(z)\}$ . Luego,  $h(\{x\}) = h(\{z\})$ . Como  $h$  es inyectiva,  $\{x\} = \{z\}$ . Así,  $x = z$ . Ahora, veamos que  $f_1$  es suprayectiva. Para esto, sea  $y \in (R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$ . Veamos que  $y \in f_1((R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X))$ . Notemos que  $\{y\} \in F_1((R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup F_1(\mathcal{P}(Y)))$ . Supongamos que  $\{y\} \in F_1(R(Y) \cap \mathcal{G}(Y))$ . Por (d) del Teorema 2.12, se sigue que  $\{y\} \in h(F_1(R(X) \cap \mathcal{G}(X)))$ . Luego, existe  $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$  tal que  $h(\{x\}) = \{y\}$ . Ahora, supongamos que  $\{y\} \in F_1(\mathcal{P}(Y))$ . Como  $h : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$  es un homeomorfismo, existe  $h^{-1} : F_n(Y) \rightarrow F_n(X)$ , el cual también es un homeomorfismo. Notemos que  $h^{-1}(\{y\}) \in h^{-1}(F_1(\mathcal{P}(Y)))$ . Por (f) del Teorema 2.12, se obtiene que  $h^{-1}(\{y\}) \in F_1(\mathcal{P}(X))$ . Así, existe  $x \in \mathcal{P}(X)$  tal que  $h^{-1}(\{y\}) = \{x\}$ . Como  $h(h^{-1}(\{y\})) = h(\{x\})$ , existe  $x \in \mathcal{P}(X)$  tal que  $h(\{x\}) = \{y\}$ . Por lo tanto, hemos probado que para  $y \in (R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$ , existe  $x \in (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X)$  tal que  $h(\{x\}) = \{y\}$ . Por el Lema 2.13, sabemos que existe un único  $y \in (R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$  tal que  $h(\{x\}) = \{y\}$ . Así,  $f_1(x) = y$ , y por lo tanto,  $y \in f_1((R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X))$ . Luego,  $f_1$  es suprayectiva.

Para finalizar la prueba de este teorema, veamos que  $f_1$  es

continua.

Sea  $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ . Por la parte (d) del Teorema 2.12, existe  $y \in R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$  tal que  $h(\{x\}) = \{y\}$ . Luego,  $f_1(x) = y$ . Notemos que existe una gráfica finita  $G$  contenida en  $X$  tal que  $x \in \text{int}_X(G)$ . Sea  $U$  un conjunto abierto en  $X$  tal que  $x \in U \subset \text{int}_X(G)$  y  $U \cap R(X) = \{x\}$ . Así,  $f_1$  es continua en el punto  $x$ .

Ahora, supongamos que  $x \in \mathcal{P}(X)$  y consideremos tres casos.

**Caso 1.** Sea  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$  una sucesión de puntos de  $R(X) \cap \mathcal{G}(X)$  tal que  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $x$ . Luego,  $\{\{x_m\}\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $\{x\}$ . Como  $h$  es continua,  $\{h(\{x_m\})\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $h(\{x\})$ . Por la parte (d) del Teorema 2.12, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existe  $y_m \in R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$  tal que  $h(\{x_m\}) = \{y_m\}$ . Ahora, por la parte (f) del Teorema 2.12, existe  $y \in \mathcal{P}(Y)$  tal que  $h(\{x\}) = \{y\}$ . Así,  $\{f_1(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $f_1(x)$ .

**Caso 2.** Sea  $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$  una sucesión de puntos de  $\mathcal{P}(X)$  tal que  $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $x$ . Luego,  $\{\{z_m\}\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $\{x\}$ . Como  $h$  es continua,  $\{h(\{z_m\})\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $h(\{x\})$ . Por la parte (e) del Teorema 2.12, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existe  $w_m \in \mathcal{P}(Y)$  tal que  $h(\{z_m\}) = \{w_m\}$ . También por la parte (e) del Teorema 2.12, existe  $w \in \mathcal{P}(Y)$  tal que  $h(\{x\}) = \{w\}$ . Así,  $\{f_1(z_m)\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $f_1(x)$ .

**Caso 3.** Sea  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$  una sucesión de puntos de  $(R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X)$  tal que  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $x$ . En este caso, usamos el Caso 1 y el Caso 2 para obtener que  $\{f_1(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $f_1(x)$ .  $\square$

**Teorema 2.15.** Sean  $X$  y  $Y$  continuos enrejados,  $n \in \{2, 3\}$  y  $h : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$  un homeomorfismo. Si  $f_1 : (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X) \rightarrow (R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$  es la función definida en la prueba del Teorema 2.14, entonces se cumplen las proposiciones siguientes.

- (a) Si  $x, z \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$  son adyacentes en  $X$ , entonces  $f_1(x)$  y  $f_1(z)$  son adyacentes en  $Y$ .
- (b) Si  $x, z \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$  son adyacentes en  $X$ , entonces el número de arcos de  $\mathcal{A}_S(X)$  que unen  $x$  y  $z$  coincide con el número de arcos de  $\mathcal{A}_S(Y)$  que unen  $f_1(x)$  y  $f_1(z)$ .
- (c) Si  $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ , entonces  $\text{ord}(x, X) = \text{ord}(f_1(x), Y)$ .
- (d) Sea  $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ . Supongamos que el número de circunferencias libres en  $X$  (respectivamente en  $Y$ ) que contienen a  $x$  (respectivamente a  $f_1(x)$ ) es  $k_1$  (respectivamente  $k'_1$ ), el número de puntos extremos de  $X$  (respectivamente de  $Y$ ) adyacentes a  $x$  (respectivamente a  $f_1(x)$ ) es  $k_2$  (respectivamente  $k'_2$ ) y el número de arcos de  $X$  (respectivamente de  $Y$ ) que unen  $x$  (respectivamente  $f_1(x)$ ) con otro punto de ramificación de  $X$  (respectivamente de  $Y$ ) es  $k_3$  (respectivamente  $k'_3$ ). Entonces  $k_1 = k'_1$ ,  $k_2 = k'_2$  y  $k_3 = k'_3$ .

**Prueba.** Veamos (a). Sean  $x, z \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$  tales que  $x$  y  $z$  son adyacentes en  $X$ . Veamos que  $f_1(x)$  y  $f_1(z)$  son adyacentes en  $Y$ . Por hipótesis, existe  $J \in \mathcal{A}_S(X)$  tal que  $J$  no es una circunferencia libre y  $x$  y  $z$  son los puntos extremos de  $J$ . Sea  $\mathcal{U} = \langle \text{int}_X(J) \rangle_n$ . Por el Teorema 1.45,  $\mathcal{U}$  es una componente de  $\Lambda_n(X)$ . Como  $h$  es un homeomorfismo,  $h(\mathcal{U})$  es una componente de  $h(\Lambda_n(X))$ . Además, por el Teorema 2.7,  $h(\Lambda_n(X)) = \Lambda_n(Y)$ . Así,  $h(\mathcal{U})$  es componente de  $\Lambda_n(Y)$ . Luego, por el Teorema 1.45,  $h(\mathcal{U}) = \langle \text{int}_Y(L_1), \dots, \text{int}_Y(L_l) \rangle_n$ , donde  $l \leq n$ , los conjuntos  $\text{int}_Y(L_1), \dots, \text{int}_Y(L_l)$  son disjuntos dos a dos y para cada  $k \in \{1, \dots, l\}$ , se cumple que  $L_k \in \mathcal{A}_S(Y)$ . Notemos que  $\{x\}, \{z\} \in \text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{U})$ . Como  $h$  es un homeomorfismo,  $h(\{x\}), h(\{z\}) \in h(\text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{U})) = \text{cl}_{F_n(Y)}(h(\mathcal{U})) = \text{cl}_{F_n(Y)}(\langle \text{int}_Y(L_1), \dots,$

$\text{int}_Y(L_l)\rangle_n$ . Notemos que  $h(\{x\}) = \{f_1(x)\}$  y  $h(\{z\}) = \{f_1(z)\}$ , donde  $f_1$  es la función definida en la prueba del Teorema 2.14. Así,  $\{f_1(x)\}, \{f_1(z)\} \in \text{cl}_{F_n(Y)}(\langle \text{int}_Y(L_1), \dots, \text{int}_Y(L_l)\rangle_n) = \langle L_1, \dots, L_l\rangle_n$ . Por lo tanto, existen sucesiones  $\{B_k\}_{k=1}^\infty$  y  $\{C_k\}_{k=1}^\infty$  en  $\langle \text{int}_Y(L_1), \dots, \text{int}_Y(L_l)\rangle_n$  tales que  $\{B_k\}_{k=1}^\infty$  converge a  $\{f_1(x)\}$  y  $\{C_k\}_{k=1}^\infty$  converge a  $\{f_1(z)\}$ . Luego,  $B_k \cap L_1 \neq \emptyset$  y  $C_k \cap L_1 \neq \emptyset$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Como  $L_1$  es cerrado en  $X$ , por el Teorema 1.26,  $L_1 \cap \{f_1(x)\} \neq \emptyset$  y  $L_1 \cap \{f_1(z)\} \neq \emptyset$ . Luego,  $f_1(x), f_1(z) \in L_1$ . Por (d) del Teorema 2.12, se sigue que  $f_1(x), f_1(z) \in R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$ . Por lo tanto,  $f_1(x)$  y  $f_1(z)$  son adyacentes en  $Y$ . Así, queda probada la parte (a).

Veamos (b). Sean  $I_1, \dots, I_i$  los diferentes arcos libres maximales en  $X$  que unen a  $x$  y  $y$ . Por la parte (a),  $f_1(x)$  y  $f_1(z)$  son adyacentes en  $Y$ . Sean  $J_1, \dots, J_j$  los diferentes arcos libres maximales en  $Y$  que unen a  $f_1(x)$  y  $f_1(y)$ . Ahora, consideremos las colecciones siguientes de subconjuntos de  $F_n(X)$  y de  $F_n(Y)$ ,

$$\mathfrak{C}_1 = \{\mathcal{C} \subset F_n(X) : \mathcal{C} \text{ es una componente de } \Lambda_n(X) \text{ y } \{x\}, \{z\} \in \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{C})\}$$

y

$$\mathfrak{C}_2 = \{\mathcal{C} \subset F_n(Y) : \mathcal{C} \text{ es una componente de } \Lambda_n(Y) \text{ y } \{f_1(x)\}, \{f_1(z)\} \in \text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{C})\}.$$

**Afirmación.** La cardinalidad de  $\mathfrak{C}_1$  es  $\sum_{t=1}^n \binom{i}{t}$  y la cardinalidad de  $\mathfrak{C}_2$  es  $\sum_{t=1}^n \binom{j}{t}$ .

**Prueba de la Afirmación.** Veamos que la cardinalidad de  $\mathfrak{C}_1$  es  $\sum_{t=1}^n \binom{i}{t}$ . Para esto, sea  $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}_1$ . Por el Teorema 1.45,  $\mathcal{C} = \langle \text{int}_X(L_1), \dots, \text{int}_X(L_l)\rangle_n$ , donde  $l \leq n$ , los conjuntos  $\text{int}_X(L_l)$ ,

$\dots, \text{int}_X(L_l)$  son disjuntos dos a dos y para cada  $k \in \{1, \dots, l\}$ , se cumple que  $L_k \in A_S(X)$ . Como  $\{x\}, \{z\} \in \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{C})$ , se sigue que  $\{x\}, \{z\} \subset L_1 \cap \dots \cap L_l$ . Por otro lado, como  $x$  y  $z$  son adyacentes en  $X$  y para cada  $k \in \{1, \dots, l\}$ , se cumple que  $L_k \in A_S(Y)$ ; cada  $L_k$  es un arco que une  $x$  y  $z$ . Así,  $\{L_1, \dots, L_l\} \subset \{I_1, \dots, I_i\}$ . Como el número de subconjuntos no vacíos de  $\{I_1, \dots, I_i\}$  con a lo más  $n$  elementos es  $\sum_{t=1}^n \binom{i}{t}$ , la cardinalidad de  $\mathfrak{C}_1$  es  $\sum_{t=1}^n \binom{i}{t}$ . De manera análoga se demuestra que la cardinalidad de  $\mathfrak{C}_2$  es  $\sum_{t=1}^n \binom{j}{t}$ . Así, queda probada la Afirmación.

Ahora, por el Teorema 2.7, se sabe que  $h(\Lambda_n(X)) = \Lambda_n(Y)$ . Como  $h$  es un homeomorfismo, si  $\mathcal{C}$  es una componente de  $\Lambda_n(X)$  y  $\{x\}, \{z\} \in \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{C})$ , entonces  $h(\mathcal{C})$  es una componente de  $\Lambda_n(Y)$  y  $\{f_1(x)\}, \{f_1(z)\} \in \text{cl}_{F_n(Y)}(h(\mathcal{C}))$ . Luego, la cardinalidad de  $\mathfrak{C}_1$  es igual a la cardinalidad de  $\mathfrak{C}_2$ . Así, por la Afirmación,  $\sum_{t=1}^n \binom{i}{t} = \sum_{t=1}^n \binom{j}{t}$ . Por lo tanto,  $i = j$ .

Veamos (c). Veremos la prueba de este inciso para el caso  $n = 3$ . La prueba para el caso  $n = 2$  es análoga, lo único que cambia es que en vez de usar la parte (a) del Teorema 2.9, se usa la parte (a) del Teorema 2.10.

Sea  $n = 3$ . Como  $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ , existe una gráfica finita  $G$  en  $X$  tal que  $x \in \text{int}_X(G)$ . Luego,  $\text{ord}(x, X)$  es finito. Supongamos que  $\text{ord}(x, X) = k$ . Por la parte (a) del Teorema 2.9, se sabe que  $v(\{x\}) = k + \binom{k}{2} + \binom{k}{3}$ . Por otro lado, por (b) del Teorema 2.12, sabemos que  $v(\{x\}) = v(h(\{x\}))$ . Notemos que  $v(h(\{x\})) = v(\{f_1(x)\})$ , donde  $f_1$  es la función definida en la prueba del Teorema 2.14. Ahora, por (d) del Teorema 2.12, se sigue que  $f_1(x) \in R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$ . Así, existe una gráfica finita  $G'$  en  $Y$  tal que  $f_1(x) \in \text{int}_Y(G')$ . Luego,  $\text{ord}(f_1(x), Y)$  es finito. Supongamos que  $\text{ord}(f_1(x), Y) = l$ . Por la parte (a) del

Teorema 2.9, se obtiene que  $v(\{f_1(x)\}) = l + \binom{l}{2} + \binom{l}{3}$ . Así,  $k + \binom{k}{2} + \binom{k}{3} = l + \binom{l}{2} + \binom{l}{3}$ . Por lo tanto,  $k = l$ , es decir,  $ord(x, X) = ord(f_1(x), Y)$ .

Veamos (d). Como  $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ , existe una gráfica finita  $G$  en  $X$  tal que  $x \in \text{int}_X(G)$ . Luego,  $ord(x, X)$  es finito. Supongamos que  $ord(x, X) = m$ . Luego,  $m = 2k_1 + k_2 + k_3$ . Por la parte (c),  $ord(f_1(x), Y) = m$ . Luego,  $m = 2k'_1 + k'_2 + k'_3$ . Así,  $2k_1 + k_2 + k_3 = 2k'_1 + k'_2 + k'_3$ . Sean  $I_1, \dots, I_i$  los diferentes conjuntos de  $\mathcal{A}_S(X)$  que contienen a  $x$ . Luego,  $i = k_1 + k_2 + k_3$ . Ahora, sean  $J_1, \dots, J_j$  los diferentes conjuntos de  $\mathcal{A}_S(Y)$  que contienen a  $f_1(x)$ . Luego,  $j = k'_1 + k'_2 + k'_3$ . Ahora, consideremos las colecciones siguientes de subconjuntos de  $F_n(X)$  y de  $F_n(Y)$ ,

$$\mathfrak{C}_3 = \{\mathcal{C} \subset F_n(X) : \mathcal{C} \text{ es una componente de } \Lambda_n(X) \text{ y } \{x\} \in cl_{F_n(X)}(\mathcal{C})\}$$

y

$$\mathfrak{C}_4 = \{\mathcal{C} \subset F_n(Y) : \mathcal{C} \text{ es una componente de } \Lambda_n(Y) \text{ y } \{f_1(x)\} \in cl_{F_n(Y)}(\mathcal{C})\}.$$

Veamos que la cardinalidad de  $\mathfrak{C}_3$  es  $\sum_{t=1}^n \binom{i}{t}$ . Para esto, sea  $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}_3$ . El Teorema 1.45 implica que  $\mathcal{C} = \langle \text{int}_X(L_1), \dots, \text{int}_X(L_l) \rangle_n$ , donde  $l \leq n$ , los conjuntos  $\text{int}_X(L_1), \dots, \text{int}_X(L_l)$  son disjuntos dos a dos y para cada  $k \in \{1, \dots, l\}$ , se cumple que  $L_k \in \mathcal{A}_S(X)$ . Como  $\{x\} \in cl_{F_n(X)}(\mathcal{C})$ , se obtiene que  $\{x\} \subset L_1 \cap \dots \cap L_l$ . Luego,  $\{L_1, \dots, L_l\} \subset \{I_1, \dots, I_i\}$ . Como el número de subconjuntos no vacíos de  $\{I_1, \dots, I_i\}$  con a lo más  $n$  elementos es  $\sum_{t=1}^n \binom{i}{t}$ , la cardinalidad de  $\mathfrak{C}_3$  es  $\sum_{t=1}^n \binom{i}{t}$ . De manera análoga se demuestra que la cardinalidad de  $\mathfrak{C}_4$  es  $\sum_{t=1}^n \binom{j}{t}$ . Ahora, por el Teorema 2.7, se sabe que  $h(\Lambda_n(X)) = \Lambda_n(Y)$ . Como  $h$  es un homeomorfismo, si  $\mathcal{C}$  es una componente de  $\Lambda_n(X)$  y

$\{x\} \in cl_{F_n(X)}(\mathcal{C})$ , entonces  $h(\mathcal{C})$  es una componente de  $\Lambda_n(Y)$  y  $\{f_1(x)\} \in cl_{F_n(Y)}(h(\mathcal{C}))$ . Luego, la cardinalidad de  $\mathfrak{C}_3$  es igual a la cardinalidad de  $\mathfrak{C}_4$ . Así, por la Afirmación,  $\sum_{t=1}^n \binom{i}{t} = \sum_{t=1}^n \binom{j}{t}$ . Por lo tanto,  $i = j$ . Luego,  $k_1 + k_2 + k_3 = k'_1 + k'_2 + k'_3$ . Como  $2k_1 + k_2 + k_3 = 2k'_1 + k'_2 + k'_3$ , se sigue que  $k'_1 = k_1$ . Así,  $k_2 + k_3 = k'_2 + k'_3$ . Por las partes (a) y (b),  $k_3 = k'_3$ . Por lo tanto,  $k_2 = k'_2$ . Así,  $k_1 = k'_1$ ,  $k_2 = k'_2$  y  $k_3 = k'_3$ .  $\square$

A continuación, nuestro segundo teorema más importante de todo el trabajo, que junto con el Teorema 2.17, se obtiene que los continuos enrejados tienen segundo y tercer producto simétrico único.

**Teorema 2.16.** *Sean  $X$  y  $Y$  continuos enrejados y  $n \in \{2, 3\}$ . Si  $F_n(X)$  es homeomorfo a  $F_n(Y)$ , entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y$ .*

**Prueba.** Para probar  $X$  y  $Y$  son homeomorfos lo que se hace es extender la función  $f_1$ , definida en la prueba del Teorema 2.14, a un homeomorfismo entre  $X$  y  $Y$ .

Para cualesquiera  $x, z \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$  tales  $x$  y  $z$  son adyacentes en  $X$ , definimos los conjuntos

$$\mathcal{I}_{x,z} = \{J : J \text{ es un arco en } X \text{ y } J \text{ va de } x \text{ a } z\} \text{ y}$$

$$\mathcal{I}_{f_1(x),f_1(z)} = \{K : K \text{ es un arco en } Y \text{ y } K \text{ va de } f_1(x) \text{ a } f_1(z)\}.$$

Por el inciso (b) del Teorema 2.15, existe una función biyectiva  $\varphi_{x,z} : \mathcal{I}_{x,z} \rightarrow \mathcal{I}_{f_1(x),f_1(z)}$ .

Veamos que para cada  $J \in \mathcal{I}_{x,z}$ , existe un homeomorfismo  $f_{J,\varphi_{x,z}(J)} : J \rightarrow \varphi_{x,z}(J)$  tal que  $f_{J,\varphi_{x,z}(J)}(x) = f_1(x)$  y  $f_{J,\varphi_{x,z}(J)}(z) =$

$f_1(z)$ . Sea  $J \in \mathcal{I}_{x,z}$ . Como  $J$  y  $\varphi_{x,z}(J)$  son arcos, existen homeomorfismos  $f_J : J \rightarrow [0, 1]$  y  $f_{\varphi_{x,z}(J)} : [0, 1] \rightarrow \varphi_{x,z}(J)$  tales que  $f_J(x) = 0$ ,  $f_J(z) = 1$ ,  $f_{\varphi_{x,z}(J)}(0) = f_1(x)$  y  $f_{\varphi_{x,z}(J)}(1) = f_1(z)$ .

Sea  $f_{J,\varphi_{x,z}(J)} = f_{\varphi_{x,z}(J)} \circ f_J$ . Como la composición de homeomorfismos es un homeomorfismo,  $f_{J,\varphi_{x,z}(J)}$  es un homeomorfismo. Además,  $f_{J,\varphi_{x,z}(J)}(x) = (f_{\varphi_{x,z}(J)} \circ f_J)(x) = f_{\varphi_{x,z}(J)}(f_J(x)) = f_{\varphi_{x,z}(J)}(0) = f_1(x)$  y  $f_{J,\varphi_{x,z}(J)}(z) = (f_{\varphi_{x,z}(J)} \circ f_J)(z) = f_{\varphi_{x,z}(J)}(f_J(z)) = f_{\varphi_{x,z}(J)}(1) = f_1(z)$ .

Ahora, para cada  $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ , sean

$\mathcal{E}_x = \{J : J \text{ es un arco en } X \text{ y } J \text{ va de } x \text{ a algún punto extremo de } X\}$  y

$\mathcal{E}_{f_1(x)} = \{K : K \text{ es un arco en } Y \text{ y } K \text{ va de } f_1(x) \text{ a algún punto extremo de } Y\}$ .

Por el inciso (d) del Teorema 2.15, existe una función biyectiva  $\varphi_x : \mathcal{E}_x \rightarrow \mathcal{E}_{f_1(x)}$ . Sea  $J \in \mathcal{E}_x$  y supongamos que  $\{e_x\} = E(J) - \{x\}$  y  $\{e_{f_1(x)}\} = E(\varphi_x(J)) - \{f_1(x)\}$ .

Veamos que existe un homeomorfismo  $g_{J,\varphi_x(J)} : J \rightarrow \varphi_x(J)$  tal que  $g_{J,\varphi_x(J)}(x) = f_1(x)$  y  $g_{J,\varphi_x(J)}(e_x) = e_{f_1(x)}$ . Como  $J$  y  $\varphi_x(J)$  son arcos, existen homeomorfismos  $g_J : J \rightarrow [0, 1]$  y  $g_{\varphi_x(J)} : [0, 1] \rightarrow \varphi_x(J)$  tales que  $g_J(x) = 0$ ,  $g_J(e_x) = 1$ ,  $g_{\varphi_x(J)}(0) = f_1(x)$  y  $g_{\varphi_x(J)}(1) = e_{f_1(x)}$ .

Sea  $g_{J,\varphi_x(J)} = g_{\varphi_x(J)} \circ g_J$ . Como la composición de homeomorfismos es un homeomorfismo,  $g_{J,\varphi_x(J)}$  es un homeomorfismo. Además,  $g_{J,\varphi_x(J)}(x) = (g_{\varphi_x(J)} \circ g_J)(x) = g_{\varphi_x(J)}(g_J(x)) = g_{\varphi_x(J)}(0) = f_1(x)$  y  $g_{J,\varphi_x(J)}(e_x) = (g_{\varphi_x(J)} \circ g_J)(e_x) = g_{\varphi_x(J)}(g_J(e_x)) = g_{\varphi_x(J)}(1) = e_{f_1(x)}$ .

También, para cada  $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ , sean

$\mathcal{C}_x = \{J : J \text{ es una circunferencia libre en } X \text{ y } x \in J\}$  y  
 $\mathcal{C}_{f_1(x)} = \{K : K \text{ es una circunferencia libre en } Y \text{ y } f_1(x) \in K\}$ .

Otra vez, por el inciso (d) del Teorema 2.15, existe una función biyectiva  $g_x : \mathcal{C}_x \rightarrow \mathcal{C}_{f_1(x)}$ .

Veamos que para cada  $J \in \mathcal{C}_x$  existe un homeomorfismo  $h_{J,g_x(J)} : J \rightarrow g_x(J)$  tal que  $h_{J,g_x(J)}(x) = f_1(x)$ . Sea  $J \in \mathcal{C}_x$ . Luego, existe un homeomorfismo  $h_J : J \rightarrow S^1$ . Además,  $J \cap R(X) = \{x\}$ . Como  $g_x(J) \in \mathcal{C}_{f_1(x)}$ , existe un homeomorfismo  $h_{g_x(J)} : S^1 \rightarrow g_x(J)$ . Además, como  $f_1(x) \in g_x(J)$  y  $f_1(x) \in R(Y)$ , se obtiene que  $g_x(J) \cap R(Y) = \{f_1(x)\}$ .

Sea  $h_{J,g_x(J)} = h_{g_x(J)} \circ h_J$ . Como la composición de homeomorfismos es un homeomorfismo,  $h_{J,g_x(J)}$  es un homeomorfismo. Además, notemos que  $h_{J,g_x(J)}(x) = f_1(x)$ .

Ahora, por otro lado,  $\mathcal{A}_S(X)$  es una familia localmente finita en  $\mathcal{G}(X)$  (véase Definición 1.22) porque para todo  $z \in \mathcal{G}(X)$  existe una gráfica finita  $G_z$  contenida en  $X$  tal que  $z \in \text{int}_X(G_z)$  y para a lo más una cantidad finita de elementos  $J$  de  $\mathcal{A}_S(X)$  se cumple que  $\text{int}_X(G_z) \cap J \neq \emptyset$ .

Luego, por el Teorema 1.24, existe una única función continua

$$f_2 : \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{G}(Y),$$

la cual es una extensión de cada una de las funciones  $f_{J,\varphi_{x,z}(J)}$ ,  $g_{J,\varphi_x(J)}$  y  $h_{J,g_x(J)}$ , respectivamente. Es decir, para cada  $J \in \mathcal{I}_{x,z}$ , se cumple que  $f_2|_J = f_{J,\varphi_{x,z}(J)}$ . Para cada  $J' \in \mathcal{E}_x$ , se cumple que  $f_2|_{J'} = g_{J',\varphi_x(J')}$ . También, para cada  $J'' \in \mathcal{C}_x$ , se cumple que  $f_2|_{J''} = h_{J'',g_x(J'')}$ .

Es claro que para cada  $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$  se cumple  $f_2(x) = f_1(x)$ . Además, para cada  $J \in \mathcal{A}_S(X)$ , se tiene que  $f_2(J) \in \mathcal{A}_S(Y)$ . Además,  $f_2$  es biyectiva.

Ahora, sea

$$f_3: X \rightarrow Y$$

definida para cada  $x \in X$  por

$$f_3(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in \mathcal{P}(X) \\ f_2(x) & \text{si } x \in \mathcal{G}(X). \end{cases}$$

Para ver que  $f_3$  es una función continua sean  $x \in X$  y  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$  una sucesión en  $X$  tal que  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $x$ . Tenemos 2 casos.

**Caso 1.** Si  $x \in \mathcal{G}(X)$ , entonces existe una gráfica finita  $G$  contenida en  $X$  tal que  $x \in \text{int}_X(G)$ . Como  $\text{int}_X(G)$  es un conjunto abierto en  $X$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $m \geq N$ , entonces  $x_m \in \text{int}_X(G)$ . Supongamos que  $x_m \in \mathcal{G}(X)$ , para todo  $m \in \{1, \dots, N-1\}$ . Luego,  $x_m \in \mathcal{G}(X)$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Así, para todo  $m \in \mathbb{N}$ , se cumple que  $f_3(x_m) = f_2(x_m)$ . Además,  $f_3(x) = f_2(x)$ . Como  $f_2$  es continua, la sucesión  $\{f_2(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $f_2(x)$ . Luego, la sucesión  $\{f_3(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $f_3(x)$ .

**Caso 2.** Si  $x \in \mathcal{P}(X)$ , entonces analizaremos tres subcasos. (i) Supongamos que  $x_m \in \mathcal{P}(X)$ , para cada  $m \in \mathbb{N}$ . Así,  $f_3(x_m) = f_1(x_m)$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Además,  $f_3(x) = f_1(x)$ . Como  $f_1$  es continua, la sucesión  $\{f_1(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $f_1(x)$ . Luego, la sucesión  $\{f_3(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $f_3(x)$ . (ii) Supongamos que  $x_m \in \mathcal{G}(X)$ , para cada  $m \in \mathbb{N}$ . Luego, existe una sucesión  $\{J_m\}_{m=1}^{\infty}$  de elementos diferentes de  $\mathcal{A}_S(X)$  tales que  $x_m \in J_m$ . Por el Teorema 1.44, la sucesión  $\{J_m\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $\{x\}$ . Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , sea  $r_m \in J_m \cap R(X)$ . Como la sucesión  $\{r_m\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $x$ , se obtiene que  $f_3(r_m) = f_2(r_m) = f_1(r_m)$  y  $f_3(x) = f_1(x)$ . Luego, la sucesión  $\{f_3(r_m)\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $f_3(x)$ . Como  $f_3(r_m) \in f_2(J_m)$  y

$\{f_2(J_m)\}_{m=1}^{\infty}$  es una sucesión de elementos diferentes de  $\mathcal{A}_S(Y)$ , otra vez, por el Teorema 1.44, la sucesión  $\{f_2(J_m)\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $\{f_3(x)\}$ . Como  $f_3(x_m) = f_2(x_m) \in f_2(J_m)$ , se sigue que  $\{f_3(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$  converge a  $f_3(x)$ . (iii) Existe una cantidad infinita de elementos de  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$  en  $\mathcal{G}(X)$  y existe una cantidad infinita de elementos de  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$  en  $\mathcal{P}(X)$ . En este caso, procedemos como en los casos (i) y (ii) al mismo tiempo.

Así,  $f_3$  es una función continua. Además,  $f_3$  es biyectiva. Por lo tanto,  $f_3$  es un homeomorfismo.  $\square$

**Teorema 2.17.** *Si  $X$  es un continuo enrejado,  $n \in \{2, 3\}$  y  $Y$  es un continuo tal que  $F_n(X)$  es homeomorfo a  $F_n(Y)$ , entonces  $Y$  es un continuo enrejado.*

**Prueba.** El Teorema 1.41 implica que  $F_n(X)$  es localmente conexo. Como la conexidad local es un invariante topológico,  $F_n(Y)$  es localmente conexo. El Teorema 1.41 implica que  $Y$  es localmente conexo. Por otro lado, por el Teorema 1.42, se cumple que  $\text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{E}_n(X)) = F_n(X)$ . Por el Teorema 1.40 y dado que  $h$  es un homeomorfismo,  $F_n(Y) = h(F_n(X)) = h(\text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{E}_n(X))) = \text{cl}_{F_n(Y)}(h(\mathcal{E}_n(X))) = \text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{E}_n(Y))$ . Luego, por el Teorema 1.42, se obtiene que  $Y$  es casi enrejado.

**Afirmación 1.** Si  $K \in \mathcal{A}_S(Y)$ , entonces  $K \cap \mathcal{P}(Y) = \emptyset$ .

**Prueba de la Afirmación 1.** Supongamos que existe  $K \in \mathcal{A}_S(Y)$  tal que  $K \cap \mathcal{P}(Y) \neq \emptyset$ . Sea  $y \in K \cap \mathcal{P}(Y)$ . Como  $K$  es un arco libre maximal o una circunferencia libre,  $|K \cap \mathcal{P}(Y)| \leq 2$ . Notemos que si  $|K \cap \mathcal{P}(Y)| = 1$ , entonces  $K - \{y\}$  es un abierto en  $Y$ . Ahora, si  $|K \cap \mathcal{P}(Y)| = 2$ , entonces  $y \in E(Y)$ . Luego,  $\{y\} \in \text{cl}_{F_n(Y)}(\langle \text{int}_Y(K) \rangle_n)$ . Por la parte (e) del Teorema 2.12, se sigue que  $h^{-1}(\{y\}) \in P_n(X)$ . El Teorema 2.7 implica que  $h(\Lambda_n(X)) =$

$\Lambda_n(Y)$ . Por el Teorema 1.45, tenemos que  $\langle \text{int}_Y(K) \rangle_n$  es una componente de  $\Lambda_n(Y)$  y existen  $I_1, \dots, I_i \in \mathcal{A}_S(X)$  con  $i \leq n$  tales que  $h(\langle I_1, \dots, I_i \rangle_n) = \langle \text{int}_Y(K) \rangle_n$ . Como  $h$  es continua,  $h^{-1}(\{y\}) \in \text{cl}_{F_n(Y)}(\langle I_1, \dots, I_i \rangle_n)$ . Por el Teorema 2.1, se cumple que  $h^{-1}(\{y\}) \in R_n(X) - P_n(X)$ . Esto es una contradicción. Así,  $K \cap \mathcal{P}(Y) = \emptyset$ .

**Afirmación 2.** Si  $y \in \mathcal{P}(Y)$ , entonces existe una sucesión  $\{y_m\}_{m=1}^\infty$  de puntos de  $R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$  tal que  $\{y_m\}_{m=1}^\infty$  converge a  $\{y\}$ .

**Prueba de la Afirmación 2.** Sea  $V$  un conjunto abierto en  $Y$  tal que  $y \in V$ . Existe  $i_1 \in \mathbb{N}$ , tal que  $B(y, \frac{1}{i_1}) \subset V$ . Por el Teorema 1.42, existe un arco libre  $\alpha_{i_1}$  en  $Y$  tal que  $\alpha_{i_1} \subset B(y, \frac{1}{i_1})$ . Por el Teorema 1.49, existe  $K_{i_1} \in \mathcal{A}_S(Y)$  tal que  $\alpha_{i_1} \subset K_{i_1}$ . Ahora, sea  $0 < i_2 < d(y, \alpha_{i_1})$ . Por el Teorema 1.42, existe un arco libre  $\alpha_{i_2}$  en  $Y$  tal que  $\alpha_{i_2} \subset B(y, \frac{1}{i_2})$ . Por el Teorema 1.49, existe  $K_{i_2} \in \mathcal{A}_S(Y)$  tal que  $\alpha_{i_2} \subset K_{i_2}$ . Notemos que  $y \notin \alpha_{i_2}$ . Renombrando, podemos construir una sucesión  $\{\alpha_m\}_{m=1}^\infty$  de arcos libres disjuntos dos a dos tal que para cada  $m \in \mathbb{N}$ , se cumple que  $y \notin \alpha_m$  y  $\alpha_m \subset K_m$ , donde  $K_m$  es un elemento de  $\mathcal{A}_S(Y)$ . Luego,  $\{\alpha_m\}_{m=1}^\infty$  converge a  $\{y\}$ . Así, existe una sucesión  $\{K_m\}_{m=1}^\infty$  de elementos de elementos diferentes dos a dos de  $\mathcal{A}_S(Y)$ . De no ser así, existiría  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $N \leq m$ , entonces  $K_N = K_m$ . Luego,  $y \in K_N$ . Esto es una contradicción a la Afirmación 1. Ahora, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , sea  $x_m \in \alpha_m$ . Luego, la sucesión  $\{x_m\}_{m=1}^\infty$  converge a  $y$ . Como  $x_m \in K_m$ , para cada  $m \in \mathbb{N}$ , por el Teorema 1.44, la sucesión  $\{K_m\}_{m=1}^\infty$  converge a  $\{y\}$  (en  $C(Y)$ ). Por la Afirmación 1,  $K_m \cap \mathcal{P}(Y) = \emptyset$ , para cada  $m \in \mathbb{N}$ . Luego, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existe una gráfica finita  $D_m$  contenida en  $Y$  tal que  $K_m \subset \text{int}_Y(D_m)$ . Así, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existe  $y_m \in K_m \cap R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$ . Así,  $\{y_m\}_{m=1}^\infty$  converge a  $y$  porque

$\{K_m\}_{m=1}^\infty$  converge a  $\{y\}$ .

**Afirmación 3.** Si  $y \in \mathcal{P}(Y)$ , entonces  $h^{-1}(\{y\}) = \{x\}$ , para algún  $x \in \mathcal{P}(X)$ .

**Prueba de la Afirmación 3.** Por la Afirmación 2, existe una sucesión  $\{y_m\}_{m=1}^\infty$  de puntos de  $R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$  que converge a  $y$ . Luego,  $\{\{y_m\}\}_{m=1}^\infty$  converge a  $\{y\}$ . Así,  $\{h^{-1}(\{y_m\})\}_{m=1}^\infty$  converge a  $h^{-1}(\{y\})$ . Ahora, como  $\{y_m\} \in R_n(Y)$ , por la Afirmación 1 y por la parte (d) del Teorema 2.12, existe  $x_m \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$  tal que para cada  $m \in \mathbb{N} : h^{-1}(\{y_m\}) = \{x_m\}$ . Así, existe una subsucesión  $\{x_{m_k}\}_{k=1}^\infty$  de  $\{x_m\}_{m=1}^\infty$  que converge a  $x$ . El Teorema 2.2 implica que  $x \in \mathcal{P}(X)$ . Por lo tanto,  $h^{-1}(\{y\}) = \{x\}$ .

Supongamos que  $Y$  no es un continuo enrejado. Luego, existen  $y \in \mathcal{P}(Y)$  y una vecindad  $W$  de  $y$  tal que para cada conjunto abierto  $L$  en  $Y$  con  $y \in L \subset W$ , se cumple que  $L - \mathcal{P}(Y)$  no es conexo. Existe un conjunto conexo y abierto  $V$  en  $Y$  tal que  $y \in V \subset W$ . Notemos que  $V - \mathcal{P}(Y)$  no es conexo. Así, supongamos que  $V - \mathcal{P}(Y) = S \cup T$ , donde  $S$  y  $T$  son conjuntos abiertos en  $Y$ , disjuntos y no vacíos. Por la Afirmación 3, existe  $x \in \mathcal{P}(X)$  tal que  $h^{-1}(\{y\}) = \{x\}$ . Sea  $\mathfrak{B}$  una base de vecindades de  $X$  tal que para cada  $U \in \mathfrak{B} : U - \mathcal{P}(X)$  es conexo. Sea  $U \in \mathfrak{B}$  tal que  $\{x\} \in \langle U \rangle_n \subset h^{-1}(\langle V \rangle_n)$ . Usando argumentos análogos como los usados en la Afirmación 2, obtenemos una sucesión  $\{s_m\}_{m=1}^\infty$  de puntos de  $S \cap R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$  y una sucesión  $\{t_m\}_{m=1}^\infty$  de puntos de  $T \cap R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$  tales que  $\{s_m\}_{m=1}^\infty$  y  $\{t_m\}_{m=1}^\infty$  convergen a  $y$ . Por la parte (d) del Teorema 2.12, existen  $l_m, z_m \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ , para cada  $m \in \mathbb{N}$ , tales que  $h^{-1}(\{s_m\}) = \{l_m\}$  y  $h^{-1}(\{t_m\}) = \{z_m\}$ . El Teorema 2.5 implica que  $\{l_m\}_{m=1}^\infty$  y  $\{z_m\}_{m=1}^\infty$  convergen a  $x$ . Sea  $m_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\{l_{m_0}\}, \{z_{m_0}\} \in \langle U \rangle_n$ . Notemos que  $\langle U - \mathcal{P}(X) \rangle_n \subset h^{-1}(\langle V -$

$\mathcal{P}(Y)\rangle_n$ ). Así,  $h(\langle U - \mathcal{P}(X)\rangle_n) \subset \langle V - \mathcal{P}(Y)\rangle_n = \langle S \cup T\rangle_n$ . Por [7, Lemma 6.2(6.2.3)],  $\langle U - \mathcal{P}(X)\rangle_n$  es arco conexo. Luego, existe un arco  $\gamma$  en  $h(\langle U - \mathcal{P}(X)\rangle_n)$  que une  $\{s_{m_0}\}$  y  $\{t_{m_0}\}$ . Por [6, Lemma 3.3], cada componente de  $\cup\gamma$  interseca a  $\{s_{m_0}\}$  y  $\{t_{m_0}\}$ . Por lo tanto,  $\cup\gamma$  es conexo. Como  $\cup\gamma \subset V - \mathcal{P}(Y) = S \cup T$ , hay dos opciones,  $\cup\gamma \subset S$  o  $\cup\gamma \subset T$ , pero  $s_{m_0} \in (\cup\gamma) \cap S$  y  $t_{m_0} \in (\cup\gamma) \cap T$ . Esto es una contradicción. Así,  $Y$  es un continuo enrejado.  $\square$

**Teorema 2.18.** *Si  $X$  es un continuo enrejado y  $n \in \{2, 3\}$ , entonces  $X$  tiene  $n$ -ésimo producto simétrico único.*

**Prueba.** Supongamos que  $Y$  es un continuo tal que  $F_n(X)$  es homeomorfo a  $F_n(Y)$ . Por el Teorema 2.17, el continuo  $Y$  es un continuo enrejado. Por otro lado, por el Teorema 2.16, el continuo  $X$  es homeomorfo a  $Y$ . Así,  $X$  tiene  $n$ -ésimo producto simétrico único, para  $n \in \{2, 3\}$ .  $\square$

Con el corolario siguiente concluimos los resultados obtenidos en este trabajo.

**Corolario 2.19.** *Si  $X$  es un continuo enrejado y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $X$  tiene  $n$ -ésimo producto simétrico único.*

**Prueba.** Supongamos que  $n \in \{2, 3\}$ . El Teorema 2.18, nos asegura que  $X$  tiene  $n$ -ésimo producto simétrico único. Ahora, supongamos que  $n > 3$ . Por el Teorema 1.39, el continuo  $X$  tiene  $n$ -ésimo producto simétrico único. Así,  $X$  tiene  $n$ -ésimo producto simétrico único, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

## Conclusiones

Las clases de continuos involucradas en este trabajo son:

- (a) la clase  $\mathfrak{G}$  de las gráficas finitas,
- (b) la clase  $\mathfrak{D}$  de las dendritas cuyo conjunto de puntos extremos cerrado,
- (c) la clase  $\mathcal{M}$  de los continuos enrejados,
- (d) la clase  $\mathcal{LC}$  de los continuos localmente conexos,
- (e) la clase  $\mathcal{AM}$  de los continuos casi enrejados,
- (f) la clase  $\mathcal{W}$  de los continuos alambrados.

Estas clases guardan las siguientes relaciones:

$$\mathfrak{G} \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{AM} \cap \mathcal{LC} \subsetneq \mathcal{AM} \subsetneq \mathcal{W},$$

$$\mathfrak{D} \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{AM} \cap \mathcal{LC} \subsetneq \mathcal{AM} \subsetneq \mathcal{W}.$$

Antes de la realización de este trabajo, fue verificada la unicidad del  $n$ -ésimo producto simétrico, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , para los elementos de la clase  $\mathfrak{G}$  de las gráficas finitas (véase [6, Corolario 5.9]) y la clase  $\mathfrak{D}$  de las dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado (véase [21, Teorema 3.7]). La unicidad del  $n$ -ésimo producto simétrico, para  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n \geq 4$ , se ha verificado para clases más grandes de continuos, como la clase  $\mathcal{AM} \cap \mathcal{LC}$  de los continuos casi enrejados localmente conexos (véase [26, Corolario 4.4]), o incluso para una clase más grande como la clase  $\mathcal{W}$  de los continuos alambrados (véase [17, Corolario 6].)

Sin embargo, para verificar la unicidad del  $n$ -ésimo producto simétrico, para los casos  $n = 2$  y  $n = 3$  hay más dificultad. Así, con este trabajo se aporta un avance en este sentido, porque se está ampliando la unicidad del segundo y tercer producto simétrico, desde las clases  $\mathfrak{G}$  de las gráficas finitas y la clase  $\mathfrak{D}$  de las dendritas cuyo conjunto de puntos extremos cerrado, hacia una clase más grande, la clase  $\mathcal{M}$  de los continuos enrejados, siendo estos los resultados principales de este trabajo:

**Teorema.** (Véase Teorema 2.18). Si  $X$  es un continuo enrejado y  $n \in \{2, 3\}$ , entonces  $X$  tiene  $n$ -ésimo producto simétrico único.

**Corolario.** (Véase Corolario 2.19) Si  $X$  es un continuo enrejado y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $X$  tiene  $n$ -ésimo producto simétrico único.

Cabe mencionar que aún quedan problemas abiertos sobre la unicidad del  $n$ -ésimo producto simétrico para ciertas clases de continuos. En [13] queda planteada la pregunta siguiente:

**Pregunta 2.20.** [13, Pregunta 3.13] *Si  $X$  es un continuo alambrado y  $n \in \{2, 3\}$ , ¿tiene  $X$  hiperespacio único  $F_n(X)$ ?*

Cuestiones como la de la Pregunta 2.20 quedan sin resolver para distintas clases de continuos, algunas de las cuales, son subclases de  $\mathcal{W}$ . Enunciamos a continuación algunas preguntas con ánimo de que estas cuestiones nos induzcan a seguir investigando sobre unicidad de hiperespacios.

**Pregunta 2.21.** [2, Pregunta 1.1] *Si  $X$  es una dendrita y  $n \in \mathbb{N}$ , ¿tiene  $X$  hiperespacio único  $F_n(X)$ ?*

**Pregunta 2.22.** [5, Pregunta 15] *Si  $X$  es un continuo arco conexo tal que tiene un punto único que es vértice de un triodo simple en  $X$ , ¿tiene  $X$  hiperespacio único  $F_3(X)$ .*

**Pregunta 2.23.** [32, Pregunta 11] Si  $X$  es cualquier compactación del rayo  $[0, \infty)$ , ¿tiene  $X$  hiperespacio único  $F_3(X)$ ?

**Pregunta 2.24.** [31, Pregunta 40] Si  $X$  es un continuo enca-  
denable y  $n \in \mathbb{N}$ , ¿tiene  $X$  hiperespacio único  $F_n(X)$ ?

**Pregunta 2.25.** [31, Pregunta 41] Si  $X$  es cualquier abanico y  
 $n \in \mathbb{N}$ , ¿tiene  $X$  hiperespacio único  $F_n(X)$ ?

**Pregunta 2.26.** [31, Pregunta 42] Si  $X$  es un continuo indes-  
componible tal que todos sus subcontinuos propios no degenera-  
dos son arcos, ¿tiene  $X$  hiperespacio único  $F_3(X)$ ?

**Pregunta 2.27.** [31, Pregunta 43] Sean  $n \in \mathbb{N}$ . ¿Existirá un  
continuo de dimensión finita tal que no tenga hiperespacio único  
 $F_n(X)$ ?

**Pregunta 2.28.** [31, Pregunta 44] Si  $X$  es un continuo heredita-  
riamente indescomponible, ¿tiene  $X$  hiperespacio único  $F_2(X)$ ?



# Bibliografía

- [1] Acosta G., *Continua with unique hyperspace*, Lecture notes in pure and applied mathematics 230, 33–49, Marcel Dekker, Inc., 2002.
- [2] Acosta G., Hernández-Gutiérrez R., Martínez-de-la-Vega V., *Dendrites and symmetric products*, Glasnik Math. Ser. III 44 (2009) no. 1, 195–210.
- [3] Acosta G., Herrera-Carrasco D., *Dendrites without unique hyperspace*, Houston J. Math. 35 (2009), no. 2, 451–467.
- [4] Acosta G., Herrera-Carrasco D., Macías-Romero F., *Local dendrites with unique hyperspace  $C(X)$* , Topology Appl. 157 (2010), 2069–2085.
- [5] Anaya J. G., Castañeda E., Illanes A., *Continua with unique symmetric product*, Comment. Math. Univ. Carolin. 54 (2013) no. 3, 397–406.
- [6] Castañeda E., Illanes A., *Finite graphs have unique symmetric products*, Topology Appl. 153 (2006), 1434–1450.
- [7] Charatonik J. J., Illanes A., *Local connectedness in hyperspaces*, Rocky Mountain J. Math. 36 (2006), 811–856.
- [8] Duda R., *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph*, I, Fund. Math. 62 (1968), 265–286.

- [9] Dugundji J., *Topology*. BCS Associates, 2nd ed., Moscow, Idaho, USA, 1978.
- [10] Guerrero Méndez L. A., *Clases de continuos localmente conexos*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas BUAP, 2009.
- [11] Guerrero Méndez L. A., Herrera Carrasco D., Macías Romero F., *Dendritas Locales* (Capítulo 27), Matemáticas y sus Aplicaciones I, Textos Científicos, Dirección de Fomento Editorial, BUAP, Primera Edición 2011, págs. 291–300, ISBN: 978–607–487–338–2. <http://www.fcfm.buap.mx/cima/docs/publicaciones/MatematicasYSusAplicacionesI2011.pdf>
- [12] Guerrero Méndez L. A., D. Herrera Carrasco, M. de J. López Toriz, Fernando Macías Romero, *El  $n$ -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo* (Capítulo 10), Matemáticas y sus Aplicaciones 3, Textos Científicos, Dirección de Fomento Editorial, BUAP, págs. 175–195, Primera Edición 2013, ISBN: 978 607 487 659 8. <http://www.fcfm.buap.mx/cima/docs/publicaciones/MatematicasYSusAplicaciones3.pdf>
- [13] Guerrero-Méndez L. A., Herrera-Carrasco D., López M. de J., Macías-Romero F., *Meshed continua have unique second and third symmetric products*, *Topology Appl.* **191** (2015), 16–27.
- [14] Guerrero Méndez L. A., Herrera Carrasco D., Macías Romero F., *Encajes* (Capítulo 19), Matemáticas y sus Aplicaciones 2, Textos Científicos, Dirección de Fomento Editorial, BUAP, Primera Edi-

- ción 2013, págs. 271–285, ISBN: 978–607–487–600–0.  
<http://www.fcfm.buap.mx/cima/docs/publicaciones/MA2-31-10-13.pdf>
- [15] Hernández-Gutiérrez R., Illanes A., Martínez-de-la-Vega V., *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, Rocky Mt. J. Math. 43 (5) (2013), 1583–1624.
- [16] Hernández-Gutiérrez R., Illanes A., Martínez-de-la-Vega V., *Rigidity of hyperspaces*, Rocky Mt. J. Math. 45 (1) (2015), 213–236.
- [17] Hernández-Gutiérrez R., Martínez-de-la-Vega V., *Rigidity of symmetric products*, Topology Appl. 160, 13 (2013), 1577–1587.
- [18] Herrera-Carrasco D., *Dendrites with unique hyperspace*, Houston J. Math. 33 (3) (2007), 795–805.
- [19] Herrera-Carrasco D., Illanes A., López M. de J., Macías-Romero F., *Dendrites with unique hyperspace  $C_2(X)$* , Topology Appl. 156 (2009), 549–557.
- [20] Herrera-Carrasco D., Illanes A., Macías-Romero F., Vázquez-Juárez F., *Finite graphs have unique hyperspace  $HS_n(X)$* , Topology Proc. 44 (2014), 75–95.
- [21] Herrera-Carrasco D., López M. de J., Macías-Romero F., *Dendrites with unique symmetric products*, Topology Proc. 34 (2009), 175–190.
- [22] Herrera-Carrasco D., López M. de J., Macías-Romero F., *Framed continua have unique  $n$ -fold hyperspace suspension*, Topology Appl. 196 (2015) 652–667.

- 
- [23] Herrera-Carrasco D., López M. de J., Macías-Romero F., *Almost meshed locally connected continua have unique second symmetric product*, Topology Appl. 209 (2016) 1–13.
- [24] Herrera-Carrasco D., Macías-Romero F., *Dendrites with unique  $n$ -fold hyperspace*, Topology Proc. 32 (2008), 321–337.
- [25] Herrera-Carrasco D., Macías-Romero F., *Local dendrites with unique  $n$ -fold hyperspace*, Topology Appl. 158 (2011), 244–251.
- [26] Herrera-Carrasco D., Macías-Romero F., Vázquez-Juárez F., *Peano continua with unique symmetric products*, Journal of Mathematics Research; 4(4) (2012), 1–9.
- [27] Illanes A., *Dendrites with unique hyperspace  $F_2(X)$* , J. P. Geometry and Topology 2(1)(2002), 75–96.
- [28] Illanes A., *The hyperspace  $C_2(X)$  for a finite graph  $X$  is unique*, Glasnik Mat. 37 (57)(2002), 347–363.
- [29] Illanes A., *Finite graphs  $X$  have unique hyperspaces  $C_n(X)$* , Topology Proc. 27 (2003), 179–188.
- [30] Illanes A., *Dendrites with unique hyperspace  $C_2(X)$ , II*, Topology Proc. 34 (2009), 77–96.
- [31] Illanes A., *Uniqueness of Hyperspaces*, Questions Answers Gen. Topology 30 (2012), 21–44.
- [32] Illanes A., Martínez-Montejano J., *Compactifications of  $[0, \infty)$  with unique hyperspace  $F_n(X)$* , Glasnik Math., Serie III 44 (2009), 457–478.

- 
- [33] Illanes A., Nadler Jr. S. B., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [34] Illanes A., *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N. 28, Sociedad Matemática Mexicana, ISBN: 968-36-3594-6, 2004.
- [35] Nadler Jr. S. B., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

# Índice alfabético

- Abanico, 8
- Abanico suave, 8
- Alambre, 16
- Arco, 3
- Arco libre, 3
- Arco libre maximal, 3
  
- Circunferencia libre, 4
- Continuo, 1
- Continuo alambrado, 16
- Continuo casi enrejado, 10
- Continuo descomponible, 16
- Continuo enrejado, 11
- Continuo indescomponible, 16
- Continuo unicoherente, 8
- Curva cerrada simple, 3
  
- Dendroide, 8
  
- Familia localmente finita, 8
  
- Gráfica finita, 6
- Hiperespacio único, 15
  
- Métrica de Hausdorff, 13
  
- $n$ -celda, 2
- $n$ -ésimo producto simétrico, 14
- $n$ -ésimo hiperespacio, 14
  
- Orden de un punto, 2
- Puntos adyacentes, 4
- Punto extremo, 3
- Punto ordinario, 3
- Punto de ramificación, 3
  
- Solenoides, 16