



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

Posgrado en Física Aplicada

---

**REPRESENTACIÓN MODAL DE SISTEMAS  
ÓPTICOS CON ILUMINACIÓN  
PARCIALMENTE COHERENTE Y  
PARCIALMENTE POLARIZADA**

Tesis presentada como requisito parcial para  
la obtención del grado de

**Doctor en Ciencias (Física Aplicada)**

por

**MC. Esteban Vélez Juárez**

asesorado por

**Dr. Andrey S. Ostrovsky**

Puebla Pue.  
**JUNIO del 2017**



**Título: REPRESENTACIÓN MODAL DE SISTEMAS  
ÓPTICOS CON ILUMINACIÓN PARCIALMENTE  
COHERENTE Y PARCIALMENTE POLARIZADA**

**Estudiante: MC. Esteban Vélez Juárez**

COMITÉ TUTORIAL

---

Dr. Gustavo Rodríguez Zurita  
Presidente

---

Dr. Cruz Meneses Fabian  
Secretario

---

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero  
Vocal

---

Dr. Gabriel Martínez Niconoff  
Vocal externo I

---

Dr. Edmundo Reynoso Lara  
Vocal externo II

---

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar  
Suplente

---

Dr. Andrey S. Ostrovsky  
Asesor

# Índice general

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>2. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA UNIFICADA DE COHERENCIA Y POLARIZACIÓN</b>	<b>3</b>
2.1. Introducción . . . . .	3
2.2. Propiedades estadísticas de un campo electromagnético . . . . .	3
2.3. Grado de coherencia . . . . .	4
2.4. Grado de polarización . . . . .	6
2.5. Representación en modos coherentes . . . . .	7
2.6. Número efectivo de modos coherentes . . . . .	10
2.7. Modelos básicos de radiación electromagnética . . . . .	11
2.8. Conclusiones . . . . .	13
<b>3. REPRESENTACIÓN MODAL DE UN SISTEMA ÓPTICO</b>	<b>14</b>
3.1. Introducción . . . . .	14
3.2. Sistema óptico como un sistema bilineal . . . . .	15
3.3. Representación en modos coherentes de un sistema óptico . . . . .	17
3.4. Simulación numérica . . . . .	20
3.5. Conclusiones . . . . .	23
<b>4. DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LA ESTRUCTURA MODAL DE UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO</b>	<b>24</b>
4.1. Introducción . . . . .	24
4.2. Reconstrucción de la estructura modal de la fuente del resultado del experimento de Young . . . . .	24
4.3. Ejemplo y simulación numérica . . . . .	26
4.4. Descomposición de la estructura del campo electromagnético en una base ortogonal de referencia . . . . .	32
4.5. Medición de la matriz de correlación intermodal . . . . .	33
4.6. Solución del problema de valores y funciones propios . . . . .	34
4.7. Conclusiones . . . . .	36
<b>5. Experimentos y resultados</b>	<b>37</b>
5.1. Introducción . . . . .	37
5.2. Caracterización de la fuente primaria . . . . .	37
5.2.1. Resultados . . . . .	40
5.3. Generación de la fuente secundaria . . . . .	41
5.4. Caracterización de la fuente secundaria . . . . .	42
5.4.1. Resultados . . . . .	45
5.5. Medición experimental de la matriz C . . . . .	47

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
5.5.1. Elección de la base de referencia . . . . .	47
5.5.2. Medición de los coeficientes $C_{kl}$ . . . . .	49
5.6. Cálculo de valores y funciones propios de la matriz $C$ y la reconstrucción de la estructura modal de la fuente generada . . . . .	52
5.7. Conclusiones . . . . .	54
<b>6. Conclusiones generales</b>	<b>55</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>56</b>
<b>Anexos: Publicaciones del autor</b>	<b>60</b>

# Índice de figuras

2.1. Distribución de los valores propios . . . . .	10
3.1. Sistema óptico de una lente simple . . . . .	15
3.2. Representación modal (I) de un sistema óptico parcialmente coherente . . . . .	19
3.3. Representación modal (II) de un sistema óptico parcialmente coherente. . . . .	19
3.4. Resultado del cálculo de $S(x')$ de acuerdo a la Ec.(3.35) para: $N = 1$ (izquierda); $N = 4$ (derecha). Los valores teóricos de $S(x')$ , obtenidos de acuerdo a la Ec.(3.32), son mostrados por curvas sólidas. . . . .	22
3.5. Resultado del cálculo de $S(x')$ de acuerdo a la Ec.(3.39) para: $N = 1$ (izquierda); $N = 4$ (derecha). Los valores teóricos de $S(x')$ , obtenidos de acuerdo a la Ec.(3.37), son mostrados por curvas sólidas. . . . .	22
4.1. Aproximación a la fuente real para $\gamma = 0,2$ . . . . .	28
4.2. Visión grafica de la aproximación a la fuente real para $\gamma = 0,5$ . . . . .	29
4.3. Visión grafica de la aproximación a la fuente real para $\gamma = 0,8$ . . . . .	30
4.4. Dependencia del error relativo de M . . . . .	31
4.5. Sistema óptico para medir los coeficientes $c_{ij;kl}$ , DH: divisor de haz, E: espejo, P: polarizador, SLM: Modulador espacial de luz, L: lente. . . . .	34
5.1. Láser He-Ne utilizado como fuente primaria, linealmente polarizado . . . . .	37
5.2. Arreglo experimental para la caracterización de la fuente primaria, OM: Objetivo de microscopio, DH:Divisor de haz, P: Polarizador, E: Espejo, L:Lente, PH:Pinhole. . . . .	38
5.3. Arreglo experimental montado para la caracterización de la fuente primaria . . . . .	39
5.4. Patrones de interferencia asociados al elemento de la matriz de densidad espectral cruzada $W_{xx}$ , en la primera fila para $\xi = 0,5mm$ ; $\xi = 1mm$ ; $\xi = 1,5mm$ ; $\xi = 2,0mm$ ; $\xi = 2,5mm$ ; $\xi = 3,0mm$ y en la segunda fila para $\xi = 3,5mm$ ; $\xi = 4mm$ ; $\xi = 4,5mm$ ; $\xi = 5,0mm$ ; $\xi = 5,5mm$ ; $\xi = 6,0mm$ , respectivamente. . . . .	40
5.5. Patrones de interferencia asociados al elemento de la matriz de densidad espectral cruzada $W_{yy}$ , en la primera fila para $\xi = 0,5mm$ ; $\xi = 1mm$ ; $\xi = 1,5mm$ ; $\xi = 2,0mm$ ; $\xi = 2,5mm$ ; $\xi = 3,0mm$ y en la segunda fila para $\xi = 3,5mm$ ; $\xi = 4mm$ ; $\xi = 4,5mm$ ; $\xi = 5,0mm$ ; $\xi = 5,5mm$ ; $\xi = 6,0mm$ , respectivamente. . . . .	40
5.6. Grado de coherencia para la fuente primaria . . . . .	41
5.7. Esquema del experimento para la generación de la fuente secundaria. DHP: Divisor de haz polarizado, E: Espejo, PD1,2 : Placa difusora 1 y 2 respectivamente, DH: Divisor de haz no polarizado. . . . .	41
5.8. Arreglo experimental montado para la generación de la fuente secundaria. . . . .	42
5.9. Ilustración esquemática de la técnica para la caracterización de la fuente secundaria. DH: Divisor de haz, M: Espejo, MP <sub>1</sub> , MP <sub>2</sub> : Pinholes Movibles, P <sub>1</sub> , P <sub>2</sub> : Polarizadores, PR <sub>1</sub> , PR <sub>2</sub> : Placas Retardadoras. . . . .	42

5.10. Ilustración física del arreglo experimental utilizado para la caracterización de la fuente secundaria . . . . .	43
5.11. Ilustración esquemática de la técnica para la generación y caracterización de la fuente secundaria. . . . .	43
5.12. Arreglo experimental montado para la generación y caracterización de la fuente secundaria. . . . .	43
5.13. Patrones de interferencia asociados al elemento de la matriz de densidad espectral cruzada $W_{xx}$ con la placa de $10^\circ$ para $\xi = 0,25mm$ , $\xi = 0,5mm$ , $\xi = 1,0mm$ , $\xi = 1,5mm$ , $\xi = 2,0mm$ , $\xi = 2,5mm$ , respectivamente. . . . .	44
5.14. Patrones de interferencia asociados al elemento de la matriz de densidad espectral cruzada $W_{yy}$ con la placa de $10^\circ$ para $\xi = 0,25mm$ , $\xi = 0,5mm$ , $\xi = 1,0mm$ , $\xi = 1,5mm$ , $\xi = 2,0mm$ , $\xi = 2,5mm$ , respectivamente. . . . .	44
5.15. Patrones de interferencia asociados al elemento de la matriz de densidad espectral cruzada $W_{xx}$ con la placa de $30^\circ$ para $\xi = 0,25mm$ , $\xi = 0,5mm$ , $\xi = 1,0mm$ , $\xi = 1,5mm$ , $\xi = 2,0mm$ , $\xi = 2,5mm$ , respectivamente. . . . .	44
5.16. Patrones de interferencia asociados al elemento de la matriz de densidad espectral cruzada $W_{yy}$ con la placa de $10^\circ$ para $\xi = 0,25mm$ , $\xi = 0,5mm$ , $\xi = 1,0mm$ , $\xi = 1,5mm$ , $\xi = 2,0mm$ , $\xi = 2,5mm$ , respectivamente. . . . .	45
5.17. Grado de coherencia para la fuente secundaria utilizando una placa difusora de $10^\circ$ .	45
5.18. Grado de coherencia para la fuente secundaria utilizando una placa difusora de $30^\circ$ .	46
5.19. Grado de coherencia para la fuente secundaria. . . . .	46
5.20. Sistema óptico experimental para la medición de los elementos de la matriz $\mathbf{C}$ . $L_1, L_2, L_3, L_4$ : Lentes; $P_1, P_2$ : Polarizadores; PD: Placa difusora; MEL-CL: Modulador espacial de luz de cristal liquido. . . . .	47
5.21. Arreglo experimental montado en el laboratorio para la medición de los elementos de la matriz $\mathbf{C}$ . . . . .	47
5.22. Primeros 5 polinomios Hermite-Gauss. . . . .	48
5.23. Primeros 5 polinomios Hermite-Gauss. . . . .	48
5.24. Señales de control que proyectara en el MEL-CL para medir los coeficientes $C_{kl}$ . El comportamiento de $t_{kl}(x)$ se muestra en el rango $-1,5 \leq x \leq 1,5$ . . . . .	50
5.25. $W(\xi)$ normalizada para una placa de 10 grados. . . . .	52
5.26. Comparación de resultados para una placa de $10^\circ$ . Los puntos representan los resultados obtenidos mediante el experimento de Young modificado y las líneas continuas representan el resultado obtenido mediante nuestra técnica. . . . .	53
5.27. $W(\xi)$ normalizada para una placa de 30 grados . . . . .	53
5.28. Comparación de resultados para una placa de $30^\circ$ . Los puntos representan los resultados obtenidos mediante el experimento de Young modificado y las líneas continuas representan el resultado obtenido mediante nuestra técnica. . . . .	54

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

Durante la última década en Óptica se observa un gran interés a la teoría universal de coherencia y polarización de campos electromagnéticos cuyo inicio fue puesto por F. Gori y E. Wolf [1,2]. La revisión de los conceptos básicos de esta teoría puede ser encontrada en el trabajo [3] recientemente publicado por el asesor de la presente tesis *et al.* Más adelante damos una breve descripción de las publicaciones correspondientes a la presente propuesta, dividiéndolas condicionalmente en cuatro grupos.

En las publicaciones del primer grupo la atención principal está dada a la definición del grado de coherencia electromagnética (vectorial) y su relación con el grado de polarización. Originalmente fueron propuestas diversas concurrentes definiciones [1,4-7] las cuales a veces se encuentran en contradicción entre si y con la definición del grado de coherencia escalar [3]. Como resultado hasta ahora no existe una definición única, universalmente admitida, para el grado de coherencia electromagnética. Según nuestro parecer una definición adecuada tiene que elegirse tomando en cuenta el contexto específico del problema en consideración.

En las publicaciones del segundo grupo la atención está concentrada en los cambios del grado de coherencia y del grado de polarización en propagación del campo electromagnético. Particularmente fue mostrado que los grados de coherencia y polarización en general sufren cambios incluso en propagación del campo electromagnético en el espacio libre [8-10]. En el contexto de la propuesta presente una atención particular merece el trabajo [11] donde se consideran los cambios del grado de coherencia y del grado de polarización en propagación del campo electromagnético en un sistema óptico arbitrario.

El tercer grupo de publicaciones toca el problema de la representación en modos coherentes de campos electromagnéticos. Para el caso de campos ópticos escalares la teoría de representación en modos coherentes formulada por E. Wolf [12] encontró diversas aplicaciones en descripción de los procesos y sistemas ópticos estadísticos [13]. Para el caso de campos electromagnéticos (vectoriales) la teoría de representación en modos coherentes por primera vez fue adaptada por F. Gori *et al.* [14] y un poco más tarde fue desarrollada por J. Tervo et al [5] y K. Kim and E. Wolf [15]. Pero todavía las aplicaciones correspondientes no han sido reportadas.

Las publicaciones del cuarto grupo consideran el problema de la generación experimental de fuentes electromagnéticas secundarias con características estadísticas dadas. Como se sabe [16, 17], este problema puede ser resuelto con base en dos enfoques opuestos: iniciando de una fuente primaria completamente incoherente y no-polarizada, tratar de obtener el resultado deseado a cuenta de los cambios de coherencia y polarización en propagación a través del espacio libre; iniciando de una fuente primaria completamente coherente y polarizada, tratar de obtener el resultado deseado a cuenta de los cambios de coherencia y polarización en transmisión a través de pantalla aleatoria. El primer enfoque fue utilizado en el artículo [18], mientras el segundo enfoque se utilizó en los artículos [19-23].

### Objetivo Principal

Desarrollar y comprobar experimentalmente la teoría de análisis y simulación de sistemas ópticos con iluminación electromagnética parcialmente coherente y parcialmente polarizada en base a la representación en modos coherentes del campo electromagnético.

### Metas

1. Realizar un análisis comparativo de las diferentes definiciones del grado de coherencia electromagnético y determinar las condiciones de aplicabilidad de estas definiciones según el problema a resolver.
2. Generalizar la técnica de representación en modos coherentes alternativa basada en los resultados de mediciones radiométricas y aplicarla a la simulación computacional de sistemas ópticos con iluminación electromagnética parcialmente coherente y polarizada.
3. Desarrollar la técnica de generación de la fuente electromagnética secundaria con las características estadísticas deseadas y llevar a cabo los experimentos correspondientes.
4. Desarrollar las técnicas de caracterización de las fuentes de iluminación electromagnética parcialmente coherente y parcialmente polarizada y llevar a cabo los experimentos correspondientes.
5. Buscar y justificar las aplicaciones prácticas de la teoría desarrollada.
6. Publicar los resultados derivados del proyecto en revistas indizadas y presentarlos en congresos internacionales y nacionales.
7. Aportar a la realización del proyecto de investigación apoyado por el CONACYT con clave 165142.

A continuación se presenta una breve descripción de los capítulos contenidos en la presente tesis.

En el capítulo 2 se hace una revisión de los principales conceptos derivados de la teoría vectorial de coherencia. Primeramente se analiza la definición del Grado de Coherencia y Grado de Polarización dados por E. Wolf y la relación que existe entre ellos. En segundo lugar estudiamos la representación en modos coherentes de un campo electromagnético vectorial y la relación que existe entre los valores propios y el grado de coherencia. Finalmente hacemos un análisis sobre el número de modos necesarios para la reconstrucción de la matriz de densidad espectral cruzada.

En el capítulo 3 aplicamos la representación en modos coherentes a un sistema óptico simple con iluminación parcialmente coherente y parcialmente polarizada y analizamos las ventajas computacionales que nos da esta representación. Posteriormente se hace una simulación numérica para corroborar el análisis realizado y mostramos los principales resultados de la simulación.

En el capítulo 4 hacemos la revisión a un método de medición de la función de densidad espectral mutua a partir de lo que se conoce como representación alternativa en modos coherentes, en donde se muestra la simulación numérica para una fuente modelo Schell-Gaussiano. Posteriormente se plantea un nuevo método para la medición de la matriz de densidad espectral mutua a partir de representar el campo en una base, llamada base de referencia.

En el capítulo 5 nos enfocamos en la realización de los experimentos, análisis de los datos obtenidos, además de las correspondientes simulaciones numéricas. Los resultados más destacados se muestran en las tablas y graficas contenidas en este capítulo, además se muestran las fotografías de los diferentes arreglos experimentales.

Finalmente se anexan copias de los artículos publicados durante la realización de este trabajo, así como copia de las memorias de la participación en los congresos.

## Capítulo 2

# FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA UNIFICADA DE COHERENCIA Y POLARIZACIÓN

### 2.1. Introducción

En los años 1980, E. Wolf propuso una nueva teoría de coherencia parcial formulada en el dominio espacio-frecuencia [24,25]. El resultado fundamental de esta teoría es el hecho de que un campo óptico estacionario puede ser representado como una superposición de modos coherentes, es decir, campos no correlacionados que son espacialmente coherentes [26]. La importancia de este resultado abre una nueva perspectiva en entender e interpretar la física de generación, propagación, y transformación de radiación óptica. En este capítulo damos una idea general de la teoría óptica de coherencia en el dominio espacio-frecuencia y la representación en modos coherentes de un campo óptico. Después consideramos el concepto de número efectivo de modos coherentes para la representación en modos coherentes de un campo óptico, y finalizamos dando algunos modelos básicos de radiación electromagnética.

### 2.2. Propiedades estadísticas de un campo electromagnético

Consideramos un campo electromagnético estocástico, estacionario (se asume casi monocromático) que se propaga en un ángulo sólido que obedece la aproximación paraxial a lo largo del eje  $z$  (eje de propagación) al que llamaremos campo óptico vectorial. Tal campo en un punto  $\mathbf{x} = (x, y)$  en algún plano  $z = cte$ , a una frecuencia  $\nu$ , puede ser representado de acuerdo a la teoría de coherencia en el dominio espacio-frecuencia [12] como un ensamble estadístico

$$\{\mathbf{E}(\mathbf{x}; \nu)\} = \{[E_x(\mathbf{x}; \nu) \ E_y(\mathbf{x}; \nu)]\}, \quad (2.1)$$

donde  $E_x$  y  $E_y$  son las componentes cartesianas del vector de campo eléctrico  $\mathbf{E}$ ; por brevedad, en adelante omitiremos la dependencia explícita de las cantidades de la frecuencia  $\nu$ . Las propiedades de correlación de segundo orden del campo electromagnético (2.1) quedan caracterizadas por la matriz de  $2 \times 2$  de densidad espectral cruzada [2]

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = [W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] = [\langle E_i^*(\mathbf{x}_1) E_j(\mathbf{x}_2) \rangle] \quad (i, j = x, y), \quad (2.2)$$

donde el asterisco y los corchetes angulares representan el conjugado complejo y el promedio en el ensamble, respectivamente. Los elementos de la diagonal de la matriz  $\mathbf{W}$  describe la auto correlación de las componentes del campo mientras que los elementos fuera de la diagonal representan las correlaciones cruzadas entre las diferentes componentes del campo.

Es apropiado notar las siguientes propiedades de los elementos de la matriz  $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . Asumiendo que  $W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  es una función continua en un dominio cerrado  $D$ , uno encuentra que esta es cuadrado integrable en este dominio, es decir ,

$$\int \int_D |W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 < \infty. \quad (2.3)$$

**CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA UNIFICADA DE  
COHERENCIA Y POLARIZACIÓN**  
2.3. GRADO DE COHERENCIA

---

En segundo lugar,  $W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  posee simetría Hermitiana, es decir ,

$$W_{ji}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = W_{ij}^*(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1), \quad (2.4)$$

eso se sigue inmediatamente de la definición (2.2) Además se puede mostrar [12] que  $W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  es una función definida no negativamente, es decir,

$$\int \int_D W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) f^*(\mathbf{x}_1) f(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \geq 0, \quad (2.5)$$

donde  $f(\mathbf{x})$  es una función cuadrado integrable.

Para  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$ , los elementos de la diagonal  $W_{ii}$  representan la densidad espectral de las componentes del campo

$$S_i(\mathbf{x}) = W_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \langle |E_i(\mathbf{x})|^2 \rangle, \quad (2.6)$$

la densidad espectral del campo puede ser expresada como

$$S(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{E}(\mathbf{x}) \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{x}) \rangle = S_i(\mathbf{x}) + S_j(\mathbf{x}) = \text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad (2.7)$$

donde  $\dagger$  denota el conjugado hermitiano y  $\text{Tr}$  la traza de la matriz.

Ahora, discutimos como las propiedades de correlación del campo electromagnético pueden ser evaluadas de una forma cuantitativa. De la definición (2.6) junto con la desigualdad (2.5), implica que

$$|W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| \leq \sqrt{S_i(\mathbf{x}_1) S_j(\mathbf{x}_2)}. \quad (2.8)$$

Así, uno puede definir la medida cuantitativa de la correlación entre las componentes del vector  $E_i$  y  $E_j$  como el valor absoluto normalizado de la función de correlación  $W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  , es decir

$$|\mu_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| = \frac{|W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|}{\sqrt{S_i(\mathbf{x}_1)} \sqrt{S_j(\mathbf{x}_2)}}, \quad (2.9)$$

esto es conocido como el coeficiente de correlación, el cual cumple la propiedad

$$0 \leq |\mu_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| \leq 1. \quad (2.10)$$

Las componentes  $E_i$  y  $E_j$  están totalmente correlacionadas cuando  $|\mu_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| = 1$  y totalmente no correlacionadas cuando  $|\mu_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| = 0$ . En la teoría escalar de coherencia en el dominio espacio-frecuencia, el coeficiente de correlación dado por la Ec. (2.9), para  $i = j$ , es conocido como el grado espectral de coherencia de un campo escalar.

### 2.3. Grado de coherencia

Una de las primeras definiciones del grado electromagnético de coherencia para el caso vectorial fue propuesto por Wolf [2] y es construida en base de la matriz de densidad espectral cruzada (2.2) y esta definida como

$$|\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| = \frac{|\text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|}{[\text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) \text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2)]^{1/2}}, \quad (2.11)$$

**CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA UNIFICADA DE  
COHERENCIA Y POLARIZACIÓN**  
2.3. GRADO DE COHERENCIA

---

donde  $Tr$  denota la traza de la matriz.

Ahora haciendo uso de la definición (2.9), encontramos que

$$|\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| = \frac{\sum_i |\mu_{ii}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| [S_i(\mathbf{x}_1)S_i(\mathbf{x}_2)]^{1/2}}{\left[ \sum_{i,j} S_i(\mathbf{x}_1)S_j(\mathbf{x}_2) \right]^{1/2}}, \quad (2.12)$$

En este caso  $|\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|$  representa el valor del poder medio ponderado de la auto correlación de los coeficientes ortogonales del campo. La definición dada por Wolf contiene una falla esencial ya que no utiliza la información completa acerca de las propiedades de coherencia del campo vectorial, al no considerar los elementos fuera de la diagonal de la matriz  $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . Este hecho resulta en que dos campos vectoriales con propiedades de coherencia diferentes pueden ser indistinguibles en base a la definición dada por Wolf, es decir dos campos con

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} W_{xx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & W_{xy}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ W_{yx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & W_{yy}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{bmatrix}, \quad y \quad \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} W_{xx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & 0 \\ 0 & W_{yy}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

poseen el mismo grado de coherencia  $|\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|$ .

Debido a la falla que existe en la definición propuesta por *E. Wolf, J. Tervo, Setälä y Friberg* [4] definen el grado de coherencia como la norma de Frobenius normalizada de la matriz de densidad espectral  $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ , es decir

$$\tilde{\mu}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \left[ \frac{\sum_i |W_{i,j}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2}{\sum_{i,j} S_i(\mathbf{x}_1)S_j(\mathbf{x}_2)} \right]^{1/2} = \left[ \frac{\text{Tr} \left[ \mathbf{W}^\dagger(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right]}{\text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) \text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2)} \right]^{1/2}. \quad (2.14)$$

Ahora, si hacemos uso de la definición (2.9), uno puede reescribir la Ec.(2.14) de la siguiente manera

$$\tilde{\mu}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \left[ \frac{\sum_i |\mu_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 S_i(\mathbf{x}_1)S_j(\mathbf{x}_2)}{\sum_{i,j} S_i(\mathbf{x}_1)S_j(\mathbf{x}_2)} \right]^{1/2}, \quad (2.15)$$

Como se puede ver, la Ec.(2.15),  $\tilde{\mu}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  representa el poder de la raíz cuadrática media ponderada del valor de los coeficientes de correlación para todos los pares de puntos  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . De la Ec.(2.15), junto con la Ec.(2.10), obtenemos que  $\tilde{\mu}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 1$  si, y solo si  $|\mu_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 = 1$ , para para cualquier par de puntos  $(i, j)$ , y  $\mu_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$  si, y solo si  $|\tilde{\mu}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 = 0$ , para cualquier par de puntos  $(i, j)$ . En otras palabras, el campo electromagnético vectorial es completamente coherente cuando sus componentes son totalmente auto correlacionadas y cruzada mente correlacionadas y el campo es totalmente incoherente cuando sus componentes no son auto correlacionadas ni cruzada mente correlacionadas. Regresando al ejemplo previo, uno puede estar seguro que los campos con una matriz de densidad espectral como en la Ec.(2.13) serán bien distinguibles en vista de  $\tilde{\mu}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . Es importante señalar que la definición de grado del grado de coherencia  $\tilde{\mu}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  es completamente consistente con el grado de coherencia escalar  $\mu_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . Esto se puede mostrar fácilmente considerando el campo escalar como un vector con solo una componente ortogonal no-cero, es decir

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} W_{xx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

Si substituyendo este campo en la Ec.(2.15) nos da como resultado  $\tilde{\mu}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |\mu_{xx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|$ .

**CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA UNIFICADA DE  
COHERENCIA Y POLARIZACIÓN**  
2.4. GRADO DE POLARIZACIÓN

---

Como se puede ver, el grado de coherencia de un campo escalar definido por la Ec.(2.11) con  $i = j$  tiene una funcional natural, dependiendo de las coordenadas de dos puntos en el plano  $z = cte$ . Pero algunas veces es mas conveniente caracterizar las propiedades de coherencia del campo por una medida numérica común para todo un plano. Esto se puede hacer mediante el grado global de coherencia en el dominio  $D$ , el cual es definido como [24]

$$\mu_{glob} = \frac{\int \int_D |\mu_{ii}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 S(\mathbf{x}_1) S(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2}{\int \int_D S(\mathbf{x}_1) S(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2}. \quad (2.17)$$

Por supuesto, es igual a la unidad para un campo completamente coherente y es igual a cero para un campo completamente incoherente . La generalización de esta definición para el caso vectorial esta dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{glob} &= \frac{\int \int_D \text{Tr} \left[ \mathbf{W}^\dagger(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right] d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2}{\int \int_D \text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) \text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2} \\ &= \frac{\int \int_D \mu^2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) S(\mathbf{x}_1) S(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2}{\int \int_D S(\mathbf{x}_1) S(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

El uso de cada una de las definiciones dependerá en mayor parte de las características físicas de la fuente y el objetivo de estudio, por lo que, en algunos casos será más conveniente utilizar la definición dada por Wolf y en otros casos la definición dada por Tervo.

## 2.4. Grado de polarización

Como es bien conocido, el grado de polarización es otra manifestación de las propiedades de correlación de un campo electromagnético estacionario, el cual es definido funcionalmente como la razón entre la parte de luz polarizada y la intensidad total del campo, en un punto  $\mathbf{r}$ , se obtiene entonces de cualquiera de las relaciones [12,26,27]

$$P^2(\mathbf{x}) = 1 - \frac{4\text{Det}\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{\text{Tr}^2\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = 2 \left[ \frac{\text{Tr}\mathbf{W}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{\text{Tr}^2\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} - \frac{1}{2} \right], \quad (2.19)$$

donde  $Det$  denota el determinante de la matriz y se cumple que para un campo completamente polarizado  $P(\mathbf{x}) = 1$  y para un campo completamente no polarizado  $P(\mathbf{x}) = 0$ .

Haciendo uso de las propiedad (2.4), se puede encontrar que

$$2\text{Det}\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = [\text{Tr}\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x})] - \text{Tr}[\mathbf{W}^\dagger(\mathbf{x}, \mathbf{x})\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x})]. \quad (2.20)$$

Si se sustituye la Ec.(2.20) dentro de la Ec.(2.19) y haciendo uso de la definición (2.15) podemos encontrar una conexión entre el grado de coherencia y el grado de polarización en el punto  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$  mediante la expresión

$$P^2(\mathbf{x}) = 2 \left[ \tilde{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \frac{1}{2} \right]. \quad (2.21)$$

**CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA UNIFICADA DE  
COHERENCIA Y POLARIZACIÓN**  
2.5. REPRESENTACIÓN EN MODOS COHERENTES

---

La Ec.(2.21) revela un hecho importante : El campo electromagnético completamente coherente es necesariamente completamente polarizado. En efecto para un campó completamente coherente la igualdad  $\tilde{\mu}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 1$  se cumplirá para cada par de puntos  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ , incluido el caso  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$ , y aquí  $P(\mathbf{x}) = 1$ .

Como se puede observar, el grado de polarización dado por la Ec.(2.21) tiene un carácter funcional, dependiendo de las coordenadas del punto en el plano. Para caracterizar las propiedades de polarización del campo electromagnético definido en todo el plano, se define el grado de polarización global definido por analogía con el grado de coherencia global como [28]

$$\begin{aligned}
 P_{glob} &= 2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} \left[ \mathbf{W}^\dagger(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right] d\mathbf{x}}{\int_{-\infty}^{\infty} [\text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x})]^{1/2} d\mathbf{x}} - 1 \\
 &= 2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mu}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) S^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_{-\infty}^{\infty} S^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} - 1. \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

Para esta definición es fácil mostrar que, es igual a la unidad para un campo electromagnético completamente polarizado y es igual a cero para un campo electromagnético completamente no polarizado.

## 2.5. Representación en modos coherentes

Uno de los resultados más importantes de la teoría de coherencia espacial en el dominio espacio-frecuencia es que bajo ciertas condiciones un campo electromagnético puede ser descompuesto en modos elementales que son completamente coherentes y mutuamente no correlacionados [12,29]. Cada una de esas descomposiciones recibe el nombre de representación en modos coherentes de un campo parcialmente coherente. La representación en modos coherentes es extremadamente útil en el análisis de campos parcialmente coherentes. La descripción detallada de varias aplicaciones de cada representación a diferentes campos de óptica moderna pueden ser encontrados [5,13,14]. En el caso vectorial haciendo uso de las relaciones (2.3)-(2.5) se puede mostrar fácilmente que la matriz de densidad espectral  $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  debe obedecer las siguientes condiciones:

$$\int \int_D \text{Tr} \left[ \mathbf{W}^\dagger(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right] d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 < \infty, \tag{2.23}$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = \mathbf{W}^\dagger(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \tag{2.24}$$

$$\int \int_D \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{f}^\dagger(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \geq 0, \tag{2.25}$$

donde  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  es una matriz fila arbitraria. Así, este puede ser asociado con un operador Hilbert-Schmidt. Como es conocido, cada operador Hilbert-Schmidt puede ser descompuesto en la forma de una serie de Mercer's [30]. Así, la matriz de densidad espectral puede ser representada por la siguiente descomposición:

**CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA UNIFICADA DE  
COHERENCIA Y POLARIZACIÓN**  
2.5. REPRESENTACIÓN EN MODOS COHERENTES

---

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_n \Lambda_n \Phi_n^\dagger(\mathbf{x}_1) \otimes \Phi_n(\mathbf{x}_2), \quad (2.26)$$

donde  $\otimes$  representa el producto directo de matrices, los coeficientes  $\Lambda_n$  son los eigenvalores y las matrices fila  $\Phi_n(\mathbf{x}) = [\varphi_{n,i}(\mathbf{x})]$  son los vectores de eigenfunciones de la ecuación integral

$$\int_D \Phi_n(\mathbf{x}_1) \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 = \Lambda_n \Phi_n(\mathbf{x}_2). \quad (2.27)$$

Debido a las condiciones (2.23)-(2.25), los eigenvalores  $\Lambda_n$  son necesariamente reales y no-negativos, y las eigenfunciones  $\Phi_n(\mathbf{x})$  pueden aceptarse como ortonormalizadas, es decir :

$$\int_D \Phi_n(\mathbf{x}) \Phi_m^\dagger(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{nm}, \quad (2.28)$$

donde  $\delta_{nm}$  representa la delta de Kronecker.

Para aclarar el significado físico de la descomposición (2.26), reescribimos esta en la forma

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_n \Lambda_n \mathbf{W}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad (2.29)$$

donde

$$\mathbf{W}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = [\varphi_{n,i}^*(\mathbf{x}_1) \varphi_{n,j}(\mathbf{x}_2)]. \quad (2.30)$$

Es obvio que la particular matriz de densidad espectral cruzada  $\mathbf{W}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  obedece justamente la misma ecuación diferencial que gobierna la propagación en el espacio libre de la matriz de densidad espectral cruzada  $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . Por esta razón cada  $\mathbf{W}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  puede ser asociado con un modo elemental del campo electromagnético vectorial. Sustituyendo  $\mathbf{W}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  de la Ec.(2.30) en las Ecs. (2.15) y (2.19), encontramos que  $\tilde{\mu}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 1$  y  $P(\mathbf{x}) = 1$ , es decir que estos modos son completamente coherentes y completamente polarizados. Como resultado, llegamos a la siguiente conclusión: la descomposición dada por la Ec. (2.29) representa la matriz de densidad espectral cruzada de algún campo electromagnético parcialmente coherente y parcialmente polarizado como una superposición de modos que son completamente coherentes y completamente polarizados.

Haciendo uso de las Ecs. (2.26) y (2.28) nos lleva a derivar las siguientes relaciones útiles entre los eigenvalores y las propiedades de la matriz de densidad espectral cruzada  $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  [5]:

$$\int \int_D \text{Tr} [\mathbf{W}^\dagger(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 = \sum_n \Lambda_n^2, \quad (2.31)$$

$$\int_D \mathbf{S}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_D \text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_n \Lambda_n. \quad (2.32)$$

En particular, aplicando estas relaciones a la Ec.(2.18), llegamos a la siguiente definición alternativa del grado de coherencia global

$$\tilde{\mu}_{glob} = \frac{\sum_n \Lambda_n^2}{(\sum_n \Lambda_n)^2}. \quad (2.33)$$

**CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA UNIFICADA DE  
COHERENCIA Y POLARIZACIÓN**  
2.5. REPRESENTACIÓN EN MODOS COHERENTES

---

Ahora discutiremos en breve el problema del uso de la representación en modos coherentes (2.26). Para hacer esto, notamos primero que la Ec.(2.27) puede ser reescrito en la forma integral de dos ecuaciones acopladas, es decir

$$\int_D [\varphi_{n,x}(\mathbf{x}_1)W_{x,x}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \varphi_{n,y}(\mathbf{x}_1)W_{y,x}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] d\mathbf{x}_1 = \Lambda_n \varphi_{n,x}(\mathbf{x}_2),$$

$$\int_D [\varphi_{n,x}(\mathbf{x}_1)W_{x,y}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \varphi_{n,y}(\mathbf{x}_1)W_{y,y}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] d\mathbf{x}_1 = \Lambda_n \varphi_{n,y}(\mathbf{x}_2). \quad (2.34)$$

Para una matriz  $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  dada, resolver el sistema de la ecuación integral (2.34) representa un problema no trivial. En este momento, la solución del sistema (2.34) es obtenida en forma cerrada solo para algunos casos especiales, a saber para el vector de campo modelo Schell-Gaussiano [5]. El problema se simplifica considerablemente cuando la matriz de densidad espectral tiene, o puede ser reducido, a la forma diagonal [14], es decir

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} W_{xx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & 0 \\ 0 & W_{yy}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Para cada uno de los elementos de la diagonal, uno puede usar dos descomposiciones escalares

$$W_{x,x}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_n \lambda_n \phi_n^*(\mathbf{x}_1) \phi_n(\mathbf{x}_2), \quad (2.36)$$

$$W_{y,y}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_n \mu_n \psi_n^*(\mathbf{x}_1) \psi_n(\mathbf{x}_2), \quad (2.37)$$

donde  $\lambda_n$  y  $\mu_n$  son los eigenvalores, mientras  $\phi_n(\mathbf{x})$  y  $\psi_n(\mathbf{x})$  son las correspondientes eigenfunciones, de dos ecuaciones integrales no acopladas

$$\int_D \phi_n(\mathbf{x}_1) W_{x,x}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 = \lambda_n \phi_n(\mathbf{x}_2), \quad (2.38)$$

$$\int_D \psi_n(\mathbf{x}_1) W_{y,y}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 = \mu_n \psi_n(\mathbf{x}_2), \quad (2.39)$$

respectivamente. Resolviendo independientemente las Ecs. (2.38) y (2.39), uno puede construir la representación en modos coherente vectorial (2.26) simplemente aceptando

$$\Lambda_{2n} = \lambda_n, \quad \Phi_{2n}(\mathbf{x}) = [ \phi_n(\mathbf{x}) \quad 0 ],$$

$$\Lambda_{2n+1} = \mu_n, \quad \Phi_{2n+1}(\mathbf{x}) = [ 0 \quad \psi_n(\mathbf{x}) ].$$

Notamos que, como se sigue de las Ecs. (2.26) y (2.27), construir la representación en modos coherentes presupone que la matriz de densidad espectral es bien conocida a priori. Pero en la mayoría de los casos no es posible conocerla, por lo que se han enfocado esfuerzos en encontrar representación en modos coherentes sin necesidad de resolver la ecuación integral de Fredholm [13].

## 2.6. Número efectivo de modos coherentes

Tomando en cuenta las Ecs (2.31) y (2.32) y la desigualdad en la Ec. (2.23) obtenemos que

$$\int_D \mathbf{S}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_D \text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_n \Lambda_n < \infty. \quad (2.40)$$

$$\int \int_D \text{Tr} [\mathbf{W}^\dagger(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 = \sum_n \Lambda_n^2 < \infty, \quad (2.41)$$

En virtud de la condición (2.41), los eigenvalores  $\Lambda_n$  pueden ser puestos en orden de una serie no-creciente

$$\Lambda_0 \geq \Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_n \geq \dots \geq 0. \quad (2.42)$$

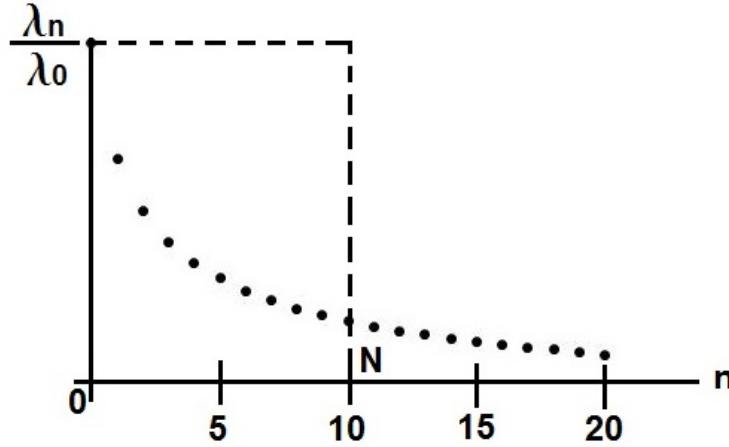


Figura 2.1: Distribución de los valores propios .

Una distribución típica del eigenvalor como una función del número  $n$  se muestra en la Fig.(2.1). Si aproximamos los primeros  $N$  eigenvalores en la Ec.(2.42) a  $\Lambda_0$  e igualamos a cero las restantes, de manera que

$$\int_D \text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_n^{N-1} \Lambda_0 = N \Lambda_0, \quad (2.43)$$

La relación (2.40) permite definir el *número efectivo* de modos coherentes necesarios para la representación del campo electromagnético como

$$N = \frac{1}{\Lambda_0} \sum_n \Lambda_n. \quad (2.44)$$

Cabe mencionar que los  $\Lambda_n$  son desconocidos a priori, por eso no podemos encontrar  $N$ . En lugar de hacer esto estimamos "la cota superior  $\aleph$ " del numero  $N$ .

Debido a la relación (2.41) es necesario que

**CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA UNIFICADA DE  
COHERENCIA Y POLARIZACIÓN**  
2.7. MODELOS BÁSICOS DE RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA

---

$$\sum_n \left( \frac{\Lambda_n}{\Lambda_0} \right)^2 \leq \sum_n \left( \frac{\Lambda_n}{\Lambda_0} \right), \quad (2.45)$$

la cual nos lleva a la siguiente desigualdad

$$\sum_n \Lambda_n^2 / \sum_n \Lambda_n \leq \Lambda_0. \quad (2.46)$$

Debido a que  $N \geq \aleph$  entonces tenemos que

$$N = \frac{1}{\Lambda_0} \sum_n \Lambda_n \geq \aleph. \quad (2.47)$$

Sustituyendo la Ec.(2.47) en la Ec.(2.33) obtenemos finalmente que

$$\frac{1}{\tilde{\mu}_{glob}} = \left( \sum_n \Lambda_n \right)^2 / \sum_n \Lambda_n^2 \geq \aleph \quad (2.48)$$

Esto nos indica que el número efectivo de modos coherentes es inversamente proporcional al grado global de coherencia de la fuente, es decir, entre más incoherente la fuente más modos serán necesarios.

## 2.7. Modelos básicos de radiación electromagnética

En esta sección discutiremos algunos modelos típicos de radiación electromagnética, los cuales pueden ser empleados para describir diversas fuentes luminosas y que se utilizan en nuestro desarrollo.

### Radiación de una fuente térmica

Este tipo de radiación puede ser bien descrita por la matriz de densidad espectral cruzada de la siguiente forma [31] :

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = E_0^2 \exp \left( -\frac{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2}{4\epsilon^2} \right) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

donde  $E_0$  y  $\epsilon$  son constantes positivas y  $\delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  es la función delta de Dirac.

Sustituyendo la Ec.(2.49) en la Ec.(2.11) y Ec.(2.19), inmediatamente encontramos que para este modelo

$$|\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| = 0, \quad (2.50)$$

y

$$P(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.51)$$

Es decir la radiación de este tipo es completamente incoherente y completamente no polarizada.

### Radiación de una fuente laser de gas

Como se sabe [2], la radiación de un láser de gas puede ser descrita por la siguiente matriz dada en la Ec.(2.52), ya que el láser esta polarizado linealmente gracias al ángulo de browser dentro de la cavidad

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = E_0^2 \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2}{4\epsilon^2}\right) \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha) \\ \cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Sustituyendo la Ec.(2.52) en las definiciones (2.11) y (2.19), hallamos para este modelo que

$$|\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| = 1, \quad (2.53)$$

y

$$P(\mathbf{x}) = 1. \quad (2.54)$$

Es decir la radiación de este tipo es completamente coherente y completamente polarizado (linealmente en la dirección dada por el angulo  $\alpha$ ).

### Radiación modelo Schell Gaussiano

El modelo Schell Gaussiano aproxima bien la radiación de muchas fuentes que se encuentran en la vida real. Este modelo se da por la matriz de densidad espectral cruzada de la siguiente forma

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (S_{ox}S_{oy})^{1/2} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_1^2}{2\sigma_x^2}\right) \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_2^2}{2\sigma_y^2}\right) \times \begin{bmatrix} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2}{2\beta_x^2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2}{2\beta_y^2}\right) \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

donde  $S_{ox}$  y  $S_{oy}$  son las densidades espectrales de las componentes del campo electromagnético y  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  son constantes positivas. Los parámetros  $\beta_x$  y  $\beta_y$  estan asociados con las longitudes de coherencia de las componentes de la fuente. Por lo que podemos definir un grado de coherencia global para cada componente del campo como  $\gamma_x = \sigma_x/\beta_x$  y  $\gamma_y = \sigma_y/\beta_y$  respectivamente.

Sustituyendo la Ec.(2.55) en las definiciones (2.11) y (2.19), obtenemos

$$|\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| = \frac{1}{S_{ox} + S_{oy}} \left\{ S_{ox} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2}{2\sigma_x^2}\right) + S_{oy} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2}{2\sigma_y^2}\right) \right\}, \quad (2.56)$$

y

$$P(\mathbf{x}) = \frac{|S_{ox} - S_{oy}|}{S_{ox} + S_{oy}}. \quad (2.57)$$

Como se puede ver de las ecuaciones (2.56) y (2.57) en caso general, para este modelo  $0 < \mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) < 1$  y  $0 < P(\mathbf{x}) < 1$ , es decir la radiación de este tipo es parcialmente coherente y parcialmente polarizada.

Cuando tenemos la versión 1D del modelo Schell Gaussiano, es decir, cuando la matriz de densidad espectral dada por la Ec.(2.55) se reduce a

$$W(x_1, x_2) = S(0) \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4\sigma_s^2}\right) \exp\left(-\frac{(x_1 - x_2)^2}{2\sigma_\mu^2}\right), \quad (2.58)$$

donde  $\sigma_s = \sigma_x$  y  $\sigma_\mu = \beta_x$ , su representación en modos coherentes es bien conocida, la cual está dada de la siguiente manera

$$\varphi_n = \left(\frac{2c}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(x\sqrt{2c}) \exp(-cx^2), \quad (2.59)$$

$$\varphi_n = S(0) \left(\frac{\pi}{a+b+c}\right)^{1/2} \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^n, \quad (2.60)$$

donde

$$a = \frac{1}{4\sigma_s^2}, \quad b = \frac{1}{4\sigma_\mu^2}, \quad c = (a^2 + 2ab)^{1/2}, \quad (2.61)$$

y  $H_n$  representa los polinomios de Hermite de orden  $n$ .

Notamos que los modelos anteriores dados por las Ecs. (2.49) y (2.52) representan casos particulares de (2.55) con una elección extrema correspondiente de los parámetros entrantes. Por esta razón el modelo Schell Gaussiano como modelo universal.

## 2.8. Conclusiones

En este capítulo se ha hecho una breve revisión sobre las definiciones y conceptos de la teoría unificada de coherencia y polarización dada por Wolf. Del análisis encontramos que una de las cantidades de mayor importancia es la matriz de densidad espectral cruzada cuyos elementos diagonales describen la auto-correlación (relaciones de fase) que existe entre cada componente del campo mientras que los elementos anti diagonales describen la correlación cruzada entre las diferentes componentes del campo. Se ha visto que dos cantidades fundamentales que caracterizan las propiedades estadísticas de una fuente electromagnética son: el grado de coherencia y el grado de polarización. Dichas cantidades serán fundamentales para lograr uno de los objetivos de esta tesis. Finalmente en este capítulo se hace una breve descripción sobre algunos tipos de fuentes electromagnéticas que pueden ser descritas por la matriz de densidad espectral cruzada, siendo el modelo Shell-Gaussiano una aproximación de muchas fuentes que se encuentran en la vida diaria.

Finalmente realizamos un estudio sobre la representación en modos coherentes para el caso vectorial, de donde observamos que las ecuaciones (2.59) y (2.60) construyen dicha representación presuponiendo que la matriz de densidad espectral  $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  es definida a priori. Además, si la matriz de densidad espectral es desconocida a priori encontramos un estimador del número de modos coherentes necesarios para representar dicha fuente, esto se logra a partir de la definición del grado de coherencia global.

## Capítulo 3

# REPRESENTACIÓN MODAL DE UN SISTEMA ÓPTICO

### 3.1. Introducción

La teoría de sistemas lineales ha sido empleada con éxito para describir sistemas ópticos [32,33]. En el enfoque de los sistemas ópticos lineales, la salida de un sistema óptico y su entrada son relacionados en forma general por medio de la transformación lineal

$$g(\mathbf{x}') = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x})h(\mathbf{x}', \mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (3.1)$$

Donde  $h(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  es lo que se conoce como la respuesta al impulso del sistema, es decir, la salida a  $\mathbf{x}'$  es el resultado del impulso de entrada en el punto  $\mathbf{x}$ . Tal transformación lineal describe un sistema óptico con iluminación completamente incoherente y completamente coherente. En el primer caso,  $f(\mathbf{x})$  y  $g(\mathbf{x}')$  tienen el significado de intensidades de luz; mientras en el segundo caso, podrían ser consideradas como las amplitudes complejas de un campo óptico. Al mismo tiempo, esto ha sido mostrado por Gamo [26] y luego por Thomson [34], cuando iluminación parcialmente coherente es usada, el sistema exhibe una naturaleza no lineal. En este caso, para describir un sistema óptico, uno puede aplicar la idea básica de la teoría de sistemas no lineales. La salida  $g(\mathbf{x}')$  puede ser representada mediante la serie de Volterra [35,36]

$$g(\mathbf{x}') = q_0(\mathbf{x}') + \sum_{-\infty}^{\infty} \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}_1) \dots f(\mathbf{x}_n) q_n(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n, \quad (3.2)$$

donde  $q_0(\mathbf{x}'; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  denota el n-esimo orden del núcleo de Volterra del sistema. Saleh [37] mostró que muchos de los sistemas y procesos ópticos se pueden representar de manera exacta o aproximada por el tercer término de la serie de Volterra, es decir

$$g(\mathbf{x}') = \int \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\mathbf{x}_1) f(\mathbf{x}_2) q_2(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2. \quad (3.3)$$

La transformación descrita por la Ec.(3.3) se denomina transformación bilineal y el sistema correspondiente se le conoce como sistema bilineal. El núcleo de Volterra de segundo orden  $q_2(\mathbf{x}'; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  representa la respuesta del sistema a dos impulsos localizados en los puntos  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ , por lo tanto, puede denominarse como un doble impulso de respuesta. Un análisis comprensivo de las propiedades de un doble impulso de respuesta para varios sistemas ópticos están dado en ref. 37. La transformación bilineal de la Ec.(3.3) puede ser utilizada para describir un sistema óptico con iluminación parcialmente coherente [38], pero la complejidad del kernel de Volterra de segundo orden  $q_2(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ , es una función compleja de 6D, hacer una descripción de este tipo resulta complicada. Varios intentos se han hecho para reducir la descripción de sistemas ópticos con iluminación parcialmente coherente [38-45], pero el problema permanece aún lejos de su completa solución. Recientemente, empleando la Representación en Modos Coherentes del campo de iluminación, hemos logrado reducir de manera significativa la descripción de un sistema óptico parcialmente coherente y se analiza una técnica efectiva para el calculo del espectro de potencia a su salida [46-52].

### 3.2. Sistema óptico como un sistema bilineal

Consideremos un sistema óptico elemental formado por una simple lente positiva, mostrada en la Fig.(3.1). Para un objeto, podemos considerar a esta como una pantalla de transmisión, que afecta la amplitud de un campo óptico de acuerdo a la función compleja  $t_0(\mathbf{x})$  conocida como transmisión de amplitud. Podemos asumir que el objeto está iluminado por un campo electromagnético caracterizado por la matriz de densidad espectral  $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . Tomando la transmitancia  $t_0(\mathbf{x})$  a la entrada del sistema, encontraremos a la salida del sistema el espectro de potencia  $S(\mathbf{x}') = \mathbf{W}(\mathbf{x}', \mathbf{x}')$  del campo en el plano  $\mathbf{x}'$

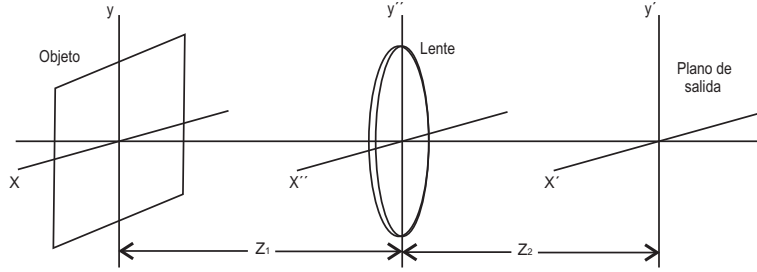


Figura 3.1: Sistema óptico de una lente simple .

Como punto inicial de nuestro calculo, utilizamos la representación del ensamble de la matriz de densidad espectral del campo, es decir

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = [W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] = [\langle E_i^*(\mathbf{x}_1) E_j(\mathbf{x}_2) \rangle] \quad (i, j = x, y), \quad (3.4)$$

Tomando en cuenta que el campo para ambas partes el objeto está relacionada mediante

$$E'_g(\mathbf{x}) = t_{0g}(\mathbf{x}) E_g(\mathbf{x}) \quad g = x, y, \quad (3.5)$$

donde  $g$  representa la componente del campo, uno encuentra que la matriz de densidad espectral cruzada del campo más allá del objeto está dada por

$$\mathbf{W}'(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = [\langle t_{0i}^*(\mathbf{x}_1) t_{0j}(\mathbf{x}_2) E_i^*(\mathbf{x}_1) E_j(\mathbf{x}_2) \rangle] = [t_{0i}^*(\mathbf{x}_1) t_{0j}(\mathbf{x}_2) W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)]. \quad (3.6)$$

La matriz de densidad espectral cruzada del campo  $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1'', \mathbf{x}_2'')$  justo enfrente de la lente puede ser encontrada como [13]

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1'', \mathbf{x}_2'') = \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{W}'(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \frac{\exp[ik(R_2 - R_1)]}{r_1 r_2} \cos \theta_1 \cos \theta_2 d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2, \quad (3.7)$$

donde

$$R_{1(2)} = \left[ (\mathbf{x}''_{1(2)} - \mathbf{x}_{1(2)})^2 + z_1^2 \right]^{1/2}. \quad (3.8)$$

Para simplificar el cálculo siguiente, empleamos la aproximación paraxial, que es justificable en nuestro caso [44]. Dentro de una aproximación paraxial, uno puede utilizar las siguientes relaciones para los parámetros en la Ec.(3.7)

$$\cos \theta_1 \approx \cos \theta_2 \approx 1, \quad (3.9)$$

**CAPÍTULO 3. REPRESENTACIÓN MODAL DE UN SISTEMA ÓPTICO**  
**3.2. SISTEMA ÓPTICO COMO UN SISTEMA BILINEAL**

---

$$R_{1(2)} \approx z_1, \quad (3.10)$$

en el denominador de la fracción bajo la integral, y

$$R_{1(2)} \approx z_1 \left[ 1 + \frac{(\mathbf{x}''_{1(2)} - \mathbf{x}_{1(2)})^2}{2z_1^2} \right] \quad (3.11)$$

en la función exponencial, en vista de que el factor  $R_{1(2)}$  es multiplicado por un número muy grande  $k$  y que, además, la variación de fase es pequeña puede cambiar el valor de la exponencial significativamente. El resultado de esta aproximación es

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}''_1, \mathbf{x}''_2) = \left( \frac{k}{2\pi z_1} \right)^2 \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{W}'(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \exp \left\{ i \frac{k}{2z_1} \left[ (\mathbf{x}''_2 - \mathbf{x}_2)^2 - (\mathbf{x}''_1 - \mathbf{x}_1)^2 \right] \right\} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2. \quad (3.12)$$

Bajo ciertas condiciones [44] la lente positiva en el plano  $\mathbf{x}''$  puede ser considerada como una pantalla delgada con una transmitancia de amplitud compleja

$$t_l(\mathbf{x}'') = P(\mathbf{x}'') \exp \left[ -i \frac{k}{2f} (\mathbf{x}'')^2 \right], \quad (3.13)$$

donde  $f$  es la distancia focal de la lente y  $P(\mathbf{x}'')$  es lo que se conoce como la función pupila dada como

$$P(\mathbf{x}'') = \begin{cases} 1, & \text{dentro la apertura de la lente} \\ 0, & \text{fuera de la lente} \end{cases}. \quad (3.14)$$

Por lo tanto la función de densidad espectral cruzada del campo justo detras de la lente puede ser encontrada por analogía con la Ec.(3.6), es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{W}'(\mathbf{x}''_1, \mathbf{x}''_2) &= [t_{li}^*(\mathbf{x}''_1) t_{lj}(\mathbf{x}''_2) W_{ij}(\mathbf{x}''_1, \mathbf{x}''_2)] \\ &= P_i(\mathbf{x}''_1) P_j(\mathbf{x}''_2) \exp \left\{ i \frac{k}{2f} \left[ (\mathbf{x}''_2)^2 - (\mathbf{x}''_1)^2 \right] \right\} \mathbf{W}(\mathbf{x}''_1, \mathbf{x}''_2), \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ahora, encontramos la función de densidad espectral cruzada del campo en el plano de salida  $\mathbf{x}'$ , ahora utilizando la aproximación paraxial de la Ec.(3.7), nos da como resultado

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) = \left( \frac{k}{2\pi z_2} \right)^2 \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{W}'(\mathbf{x}''_1, \mathbf{x}''_2) \exp \left\{ i \frac{k}{2z_2} \left[ (\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}''_2)^2 - (\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}''_1)^2 \right] \right\} d\mathbf{x}''_1 d\mathbf{x}''_2. \quad (3.16)$$

En sustitución consecutiva de  $\mathbf{W}'(\mathbf{x}''_1, \mathbf{x}''_2)$  para las Ecs. (3.15),(3.12) y(3.6) dentro de la Ec.(3.16) y tomando en cuenta que  $\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}$ , encontramos después de un cálculo sencillo la siguiente expresión para el espectro de potencia del campo en el plano de salida:

$$S(\mathbf{x}') = \int \int_{-\infty}^{\infty} t_0^*(\mathbf{x}_1) t_0(\mathbf{x}_2) \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) h^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1) h(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2, \quad (3.17)$$

donde

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}', \mathbf{x}) &= \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{z_1 z_2} \exp \left[ i \frac{k}{2z_2} (\mathbf{x}')^2 \right] \exp \left[ i \frac{k}{2z_1} \mathbf{x}^2 \right] \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{x}'') \exp \left[ i \frac{k}{2} \left( \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} - \frac{1}{f} \right) (\mathbf{x}'')^2 \right] \exp \left[ -i \frac{k}{z_2} \mathbf{x}'' \cdot \left( \mathbf{x}' + \frac{z_2}{z_1} \mathbf{x} \right) \right] d\mathbf{x}'' . \end{aligned} \quad (3.18)$$

**CAPÍTULO 3. REPRESENTACIÓN MODAL DE UN SISTEMA ÓPTICO**  
**3.3. REPRESENTACIÓN EN MODOS COHERENTES DE UN SISTEMA ÓPTICO**

---

Finalmente, comparando las Ecs. (3.18) y (3.3), llegamos a la conclusión que un sistema óptico fundamental como el mostrado en la Fig.(3.1) representa un sistema óptico bilineal con un doble impulso de respuesta

$$q_2(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) h^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1) h(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2). \quad (3.19)$$

Como se puede observar en la Ec.(3.18) resulta muy complejo resolver de manera general la Ec.(3.17), es por ello que consideraremos dos casos particulares en los que la Ec.(3.18) se simplifica de manera considerable y esto nos ayuda a realizar un análisis más simple de la Ec.(3.17).

Primeramente consideremos que la geometría de la Fig.(3.1) satisface la ley de lentes  $1/z_1 + 1/z_2 = f$ , el doble impulso de respuesta del sistema toma la misma forma que la Ec.(3.19), pero con

$$h(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{z_1 z_2} \exp\left[i\frac{k}{2z_2}(\mathbf{x}')^2\right] \exp\left[i\frac{k}{2z_1}\mathbf{x}^2\right] \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{x}'') \exp\left[-i\frac{k}{z_2}\mathbf{x}'' \cdot \left(\mathbf{x}' + \frac{z_2}{z_1}\mathbf{x}\right)\right] d\mathbf{x}'' . \quad (3.20)$$

La cual es conocida como la función de propagación de amplitud del sistema óptico. En este caso, la Ec.(3.17) puede ser interpretada como la representación de la imagen del objeto con un factor de escala definido por  $z_2/z_1$

Como segundo caso consideremos que la geometría en la Fig.(3.1) satisface la condición  $z_1 = z_2 = f$ , y la extensión física de la entrada es mucho menos que la apertura de la lente, se puede mostrar que el doble impulso de respuesta del sistema toma la forma como la Ec.(3.19) [33], pero con

$$h(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \frac{k}{i2\pi f} \exp\left(-i\frac{k}{f}\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}\right). \quad (3.21)$$

En este caso, la ecuación (3.17) puede ser interpretada como una transformada de Fourier 4D del objeto con frecuencias espaciales definidas por el vector  $(k/2\pi kf)\mathbf{x}'$

Como se puede ver da la Ec.(3.18), resolver de manera general la Ec.(3.17) resulta muy complicado realizar un análisis analítico debido a la complejidad de la función  $h(x)$ . Sin embargo es posible realizar un análisis para dos casos particulares: a) cuando el sistema dado en la Fig.(3.1) satisface la ley de lentes y b) Cuando el sistema en la Fig.(3.1) satisface la condición  $z_1 = z_2 = f$ . Debido a este problema en la siguiente sección se aplicara la representación en modos coherentes para analizar el mismo sistema optico para llevar a cabo un análisis numérico del sistema mostrado en la Fig.(3.1).

### 3.3. Representación en modos coherentes de un sistema óptico

Parece ser obvio que la representación en modos coherentes del campo de iluminación puede considerablemente simplificar la descripción de un sistema óptico con iluminación parcialmente coherente. En efecto, representar la iluminación del campo como la superposición de modos coherentes no correlacionados y completamente coherentes, se puede esperar que la densidad espectral del campo a la salida del plano de un sistema óptico representara la superposición de la fracción del espectro del sistema coherente producido por este modo. De esta forma, el incómodo problema de describir sistema óptico con iluminación parcialmente coherente puede remontarse al caso coherente.

**CAPÍTULO 3. REPRESENTACIÓN MODAL DE UN SISTEMA ÓPTICO**  
**3.3. REPRESENTACIÓN EN MODOS COHERENTES DE UN SISTEMA ÓPTICO**

---

La matriz de densidad espectral a la entrada del sistema en la Fig.(3.1) está dado por

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_n \Lambda_n \Phi_n^\dagger(\mathbf{x}_1) \otimes \Phi_n(\mathbf{x}_2), \quad (3.22)$$

donde  $\otimes$  representa el producto directo de matrices, los coeficientes  $\Lambda_n$  son los eigenvalores y las matrices fila  $\Phi_n(\mathbf{x}) = [\varphi_{n,i}(\mathbf{x})]$  son los vectores de eigenfunciones de la ecuación integral de Fredholm.

Como recordamos, cada termino bajo la suma en la parte derecha de la Ec.(3.22) puede ser asociado a un modo completamente coherente del campo de iluminación. Ahora sustituyendo la Ec. (3.22) dentro de la Ec. (3.17) y separando la operación integral, obtenemos

$$\begin{aligned} S(x') &= \sum_n \Lambda_n \int \int_{-\infty}^{\infty} t_0^*(\mathbf{x}_1) t_0^*(\mathbf{x}_2) \Phi_n^\dagger(\mathbf{x}_1) \otimes \Phi_n(\mathbf{x}_2) h^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1) h(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \\ &= \sum_n \Lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} t_0^*(\mathbf{x}_1) \Phi_n^\dagger(\mathbf{x}_1) h^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 \otimes \int_{-\infty}^{\infty} t_0(\mathbf{x}_2) \Phi_n(\mathbf{x}_2) h(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Como ya se demostró (Ver sección 2.3), este problema se simplifica considerablemente cuando la matriz de densidad espectral tiene forma diagonal. Tomando en cuenta esta observación, el problema de la Ec.(3.23) se reduce a

$$S_l(x') = \sum_n \lambda_n \left| \int_{-\infty}^{\infty} t_{0l}(\mathbf{x}) \varphi_{nl}(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right|^2. \quad (3.24)$$

donde  $l$  represente una componente del campo, es decir  $l = i$  o  $l = j$

Obviamente, cada termino bajo la suma en la Ec. (3.24) puede ser interpretado como una porción de la salida del sistema correspondiente al  $n$ -esimo modo coherente del campo de iluminación o, por brevedad, como una *salida modal* del sistema. De esta manera, la expansión dada por la Ec. (3.24) puede ser llamada como *la representación en modos coherentes de un sistema óptico con iluminación parcialmente coherente*.

Para mostrar las ventajas de la representación en modos coherentes de un sistema óptico con iluminación parcialmente coherente, reescribiremos la Ec.(3.24) en dos diferentes, pero equivalentes, formas. Como una primera forma es reescrita como:

$$S_l(x') = \sum_n \left| \int_{-\infty}^{\infty} t_{0l}(\mathbf{x}) q_{1l}^{(n)}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right|^2, \quad (3.25)$$

donde

$$q_{1l}^{(n)}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \sqrt{\lambda_n} \varphi_{nl}(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}', \mathbf{x}). \quad (3.26)$$

Con el debido respeto para la serie de Volterra (3.2), la función  $q_{1l}^{(n)}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$  dada por la Ec.(3.26) representa el Kernel de Volterra de primer orden y por consiguiente la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} t_{0l}(\mathbf{x}) q_{1l}^{(n)}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (3.27)$$

puede ser considerado como la salida del correspondiente sistema óptico lineal (coherente) o, por brevedad, el *sistema modal*. Por lo tanto, uno puede dar la siguiente interpretación física de la expansión (3.25): *Un sistema óptico con iluminación parcialmente coherente puede ser representado como la conexión paralela de sistemas modales coherentes con impulso de respuesta  $q_{1l}^{(n)}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ , cada uno seguido por un cuadrado, como se muestra en la Fig. (3.2)*

**CAPÍTULO 3. REPRESENTACIÓN MODAL DE UN SISTEMA ÓPTICO**  
**3.3. REPRESENTACIÓN EN MODOS COHERENTES DE UN SISTEMA ÓPTICO**

---

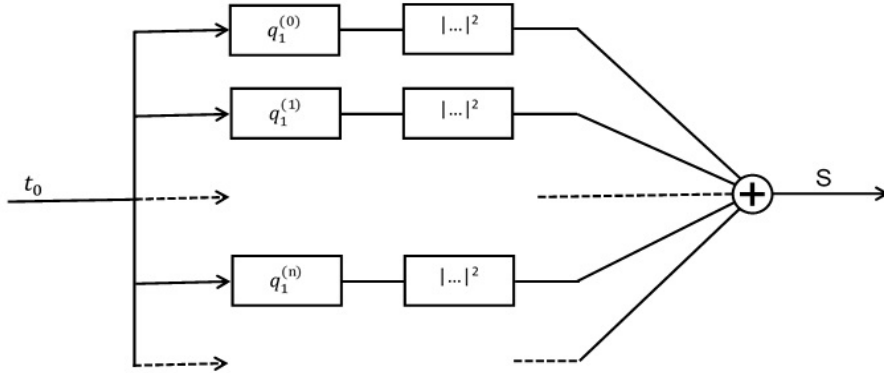


Figura 3.2: Representación modal (I) de un sistema óptico parcialmente coherente .

Ahora reescribimos la Ec.(3.24) como

$$S_l(x') = \sum_n \left| \int_{-\infty}^{\infty} t_{0l}^{(n)}(\mathbf{x}) q_{1l}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right|^2 \quad (3.28)$$

donde  $q_{1l}^{(n)}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = h(\mathbf{x}', \mathbf{x})$  y

$$t_{0l}^{(n)}(\mathbf{x}) = \sqrt{\lambda_n} \varphi_{nl}(\mathbf{x}) t_0(\mathbf{x}). \quad (3.29)$$

La función  $t_{0l}^{(n)}(\mathbf{x})$  describe el resultado de la modulación del modo del campo por el objeto y puede ser definido como un *objeto modal*. La integral en la Ec.(3.28) representa la respuesta del completamente coherente, lineal en amplitud compleja, sistema del objeto modal. Así, podemos dar la siguiente interpretación física de la expansión (3.28) : *un sistema óptico con iluminación parcialmente coherente puede ser representado como la conexión paralela de los sistemas coherentes con el mismo impulso de respuesta  $q_{1l}^{(n)}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$  y con el objeto modal  $t_{0l}^{(n)}(\mathbf{x})$  a su entrada , cada uno seguido por un cuadrado, como se muestra en la Fig.(3.3)*

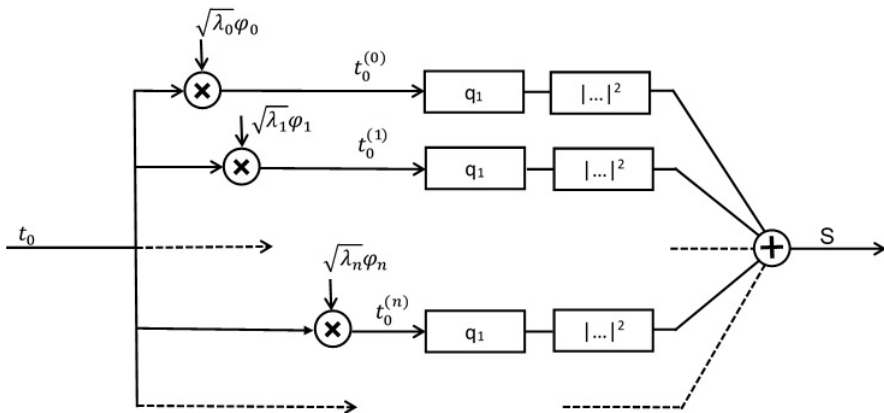


Figura 3.3: Representación modal (II) de un sistema óptico parcialmente coherente.

La representación en modos coherentes de un sistema óptico, dado por las Ecs.(3.25) y (3.28), son equivalentes desde el punto de vista del resultado final, pero expresan el efecto de iluminación

parcialmente coherente por dos caminos diferentes, En efecto, cuando usamos la representación (3.25), uno atribuye el efecto de coherencia parcial a la transferencia característica del sistema óptico, mientras en la representación (3.28) este efecto es atribuido a la transferencia característica del objeto. De esta forma, cuando necesitamos describir un sistema óptico con un tipo de iluminación definido, la preferencia puede ser asociada a la representación (3.25), mientras cuando necesitamos para un sistema óptico con iluminación variable, es más conveniente usar la representación (3.28).

### 3.4. Simulación numérica

Para ilustrar la aplicación de la representación en modos coherentes, consideraremos dos ejemplos para calcular el espectro de potencia en el plano de salida del sistema óptico mostrado en la fig.(3.1).

Como objeto, seleccionaremos la función peine de Dirac para el caso 1D

$$t(x) = \sum_m \delta(x - mx_0), \quad (3.30)$$

Este objeto será estudiado por las siguientes razones. Primero, para la imagen ideal y el exacto espectro de potencia de cada objeto tiene la misma forma de la función peine de Dirac. Segundo, la opción de estos objetos siguen al resultado de integración en la Ec.(3.17) será obtenida en una explícita forma analítica. Tomando en cuenta el carácter de nuestro objeto, y para razones de simplicidad como iluminación del campo consideramos la fuente secundaria modelo Schell Gaussiano 1D cuya matriz de densidad espectral cruzada y definida por la Ec. (2.55) y su estructura modal dada por las Ecs.(2.59) y (2.60). Finalmente asumimos que la función pupila de la lente tiene forma circular de radio  $r$ , además aceptamos que la amplitud de la función de propagación del sistema óptico, calculada de acuerdo a la Ec.(3.20) como

$$h(\rho) = \exp\left(i \frac{k}{2z_2} \rho^2\right) \frac{J_1(kR\rho/2f)}{kR\rho/2f}, \quad (3.31)$$

donde  $\rho = (u^2 + v^2)^{1/2}$  y  $J_1$  de nota las funciones de Bessel de primer tipo y de primer orden.

Primero, suponemos que el sistema forma la imagen de un objeto sin magnificación ( $z_1 = z_2 = 2f$ ). Entonces sustituyendo  $t(x)$ ,  $W(x_1, x_2)$ , y  $h(u; x)$  de las Ecs. (3.30),(2.60), y (3.38), respectivamente, dentro de la versión 1D de la Ec.(3.17) y haciendo uso de las propiedades de la función de Dirac, esto es una sencilla manera de obtener la siguiente expresión para el espectro de potencia  $S(x')$

$$S(x') = S(0) \sum_{m,l} A_{ml} \frac{J_1(kR(u + mx_0)/2f)}{kR(u + mx_0)/2f} \frac{J_1(kR(u + lx_0)/2f)}{kR(u + lx_0)/2f}, \quad (3.32)$$

donde

$$A_{ml} = \exp\left[-\frac{x_0^2}{4\sigma_s^2}(m^2 + l^2)\right] \exp\left[-\frac{x_0^2}{4\sigma_u^2}(m - l)^2\right], \quad (3.33)$$

Por analogía, pero esta vez utilizando la versión 1D de la Ec.(3.34) obtenemos la siguiente aproximación del espectro de potencia, donde hemos truncado la suma en  $N$  terminos, obtenemos la siguiente aproximación del espectro de potencia  $S(x')$

$$\hat{S}(x') = S(0) \sum_{n=0}^{N-1} B_n \left[ \sum_{m=0}^{N-1} C_{nm} \frac{J_1(kR(u + mx_0)/2f)}{kR(u + mx_0)/2f} \right]^2, \quad (3.34)$$

donde

$$B_n = \frac{1}{2^n n!} \left( \frac{b}{a+b+c} \right)^n, \quad (3.35)$$

y

$$C_{nm} = H_n \left( mx_0 \sqrt{2c} \right) \exp \left( -cm^2 x_0^2 \right), \quad (3.36)$$

con  $H_n$ , como antes, de nota están los polinomios de Hermite de orden  $n$

Ahora suponemos que el sistema óptico realiza la transformada de Fourier de un objeto ( $z_1 = z_2 = f$ ). En este caso usando las Ecs.(3.21), (2.60), y (3.30), por analogía con la anterior, uno puede encontrar que el espectro de potencia toma la forma

$$S(x') = S_0 \left\{ A_0 + \sum_{m \neq l} A_{ml} \cos \left[ \frac{k}{2f} x' x_0 (m-l) \right] \right\}, \quad (3.37)$$

donde

$$A_0 = \sum_m \exp \left( -\frac{x_0^2}{2\sigma_I^2} m^2 \right) \quad (3.38)$$

y  $A_{ml}$  son los mismos como en la Ec.(3.33).

Usando la representación en modos coherentes, obtenemos la siguiente aproximación para el espectro de potencia dado por la Ec.(3.37)

$$\hat{S}(x') = S(0) \sum_{n=0}^{N-1} B_n \left\{ C_{n0} + 2 \sum_{m \neq l} C_{nml} \cos \left[ \frac{k}{2f} x' x_0 (m-l) \right] \right\}, \quad (3.39)$$

donde

$$C_{n0} = \sum_m H_n^2 \left( mx_0 \sqrt{2c} \right) \exp \left( -cm^2 x_0^2 \right), \quad (3.40)$$

$$C_{nml} = H_n \left( mx_0 \sqrt{2c} \right) H_n \left( lx_0 \sqrt{2c} \right) \exp \left[ -cx_0^2 (m^2 + l^2) \right], \quad (3.41)$$

y los  $B_n$  son los mismos como en la Ec.(3.34).

Para evaluar la calidad de nuestra aproximación realizamos el cálculo numérico del espectro de potencia  $S(x')$  de acuerdo con las Ecs.(3.32), (3.34), (3.37), y (3.39). Cuando calculamos, nosotros tomamos  $x_0 = 2,44(2\pi f/kR)$ , que es más grande que el límite de Rayleigh de resolución para nuestro sistema óptico, y  $\sigma_I = 2\sigma_\mu = 10x_0$ , cada una corresponde a un grado de coherencia parcial verdadero ( $\gamma = 0,5$ ). Truncamos la suma sobre los índices y a los nueve impulsos centrales de Dirac y variamos el número  $n$  de los términos de nuestra expansión modal.

CAPÍTULO 3. REPRESENTACIÓN MODAL DE UN SISTEMA ÓPTICO  
3.4. SIMULACIÓN NUMÉRICA

---

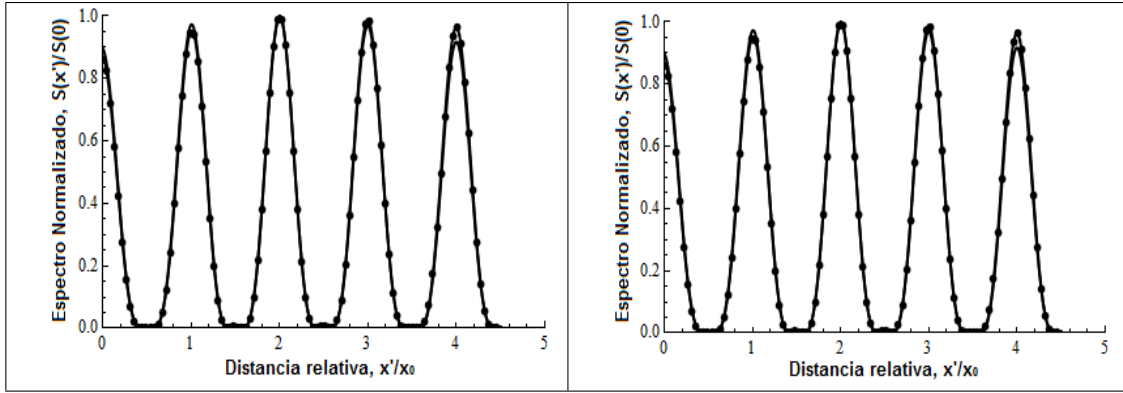


Figura 3.4: Resultado del cálculo de  $S(x')$  de acuerdo a la Ec.(3.35) para:  $N = 1$  (izquierda);  $N = 4$  (derecha). Los valores teóricos de  $S(x')$ , obtenidos de acuerdo a la Ec.(3.32), son mostrados por curvas sólidas.

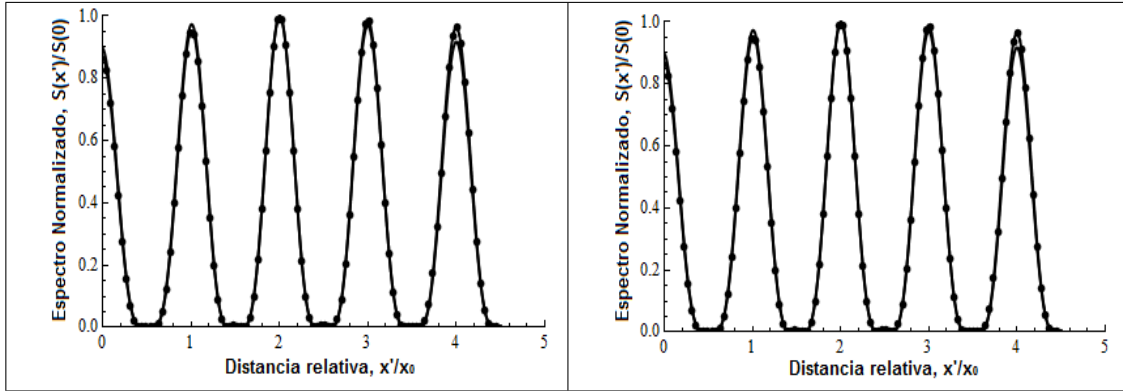


Figura 3.5: Resultado del cálculo de  $S(x')$  de acuerdo a la Ec.(3.39) para:  $N = 1$  (izquierda);  $N = 4$  (derecha). Los valores teóricos de  $S(x')$ , obtenidos de acuerdo a la Ec.(3.37), son mostrados por curvas sólidas.

Los resultados de los cálculos son mostrados en la Fig.(3.4) y Fig.(3.5). Como se puede ver en estas figuras, con el incremento del número  $n$ , la distribución del espectro de potencia aproximado se acerca más a las curvas teóricas. Cuando el número  $n$  es igual a el número efectivo de modos coherentes de iluminación, el error relativo es de aproximadamente 1%.

### 3.5. Conclusiones

La representación en modos coherentes de un sistema óptico parcialmente coherente puede ser interpretado como un remplazo del sistema original por una apropiada combinación paralela de sistemas modales completamente coherentes; Esto da una nueva percepción dentro de la física de formación de imágenes bajo condiciones de iluminación parcialmente coherente. De un punto de vista práctico, cada una de las representaciones resulta en un efectivo algoritmo para el cómputo de la distribución del espectro de potencia a la salida de un sistema óptico con iluminación de algún estado de coherencia. El uso de la representación en modos coherentes disminuye de manera considerable el tiempo de computo necesario para el cálculo del espectro de potencia a la salida del sistema. Sin embargo la aplicación de este algoritmo requiere que se conozca la estructura modal del campo de iluminación. Desafortunadamente existen pocas fuentes cuya estructura modal es conocida. Es por esta razón que en el siguiente capítulo nos enfocamos en la medición de la matriz de densidad espectral a partir del experimento de Young para una fuente escalar y proponemos un nuevo enfoque para llevar a cabo la RMC para una fuente vectorial.

## Capítulo 4

# DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LA ESTRUCTURA MODAL DE UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

### 4.1. Introducción

La representación en modos coherentes de un campo óptico fue abordado por primera vez por Gamou [26] y que posteriormente desarrollado por E. Wolf [12,29,24] es una herramienta esencial en la descripción del proceso y sistemas en óptica [13]. No hace mucho tiempo la teoría de RMC, originalmente propuesta para campos ópticos escalares, ha sido generalizada para el caso de campos electromagnéticos vectoriales [5,14,15]. Esta representación es definida a través de la solución a la ecuación integral de Fredholm, la cual tiene como núcleo a la matriz de densidad espectral del campo. Sin embargo, en la práctica la matriz de densidad espectral cruzada del campo en general es desconocida a priori. En teoría la matriz de densidad espectral cruzada del campo puede ser medida con 4 experimentos de Young [1,4], pero en la práctica cada medida es muy difícil de obtener debido a la gran cantidad de datos que se necesitan procesar. Recientemente un nuevo enfoque al problema de la medición experimental de la estructura modal para un campo óptico escalar ha sido propuesto por F. Ferreira y M. Belsley [54]. Este enfoque se basa en la descomposición del campo escalar en alguna base ortogonal auxiliar. En este capítulo se hace el desarrollo de este enfoque para la determinación experimental de la estructura modal de un campo electromagnético vectorial.

En este capítulo primeramente analizamos una técnica para calcular la estructura modal de un campo óptico escalar empleando el experimento de Young y posteriormente hacemos la generalización de la técnica propuesta por F. Ferreira y M. Belsley para un campo óptico vectorial.

### 4.2. Reconstrucción de la estructura modal de la fuente del resultado del experimento de Young

Consideremos una fuente con frente de onda plano la cual tiene una función de densidad espectral mutua desconocida a priori. En muchos casos de interés práctico la fuente puede ser asumida estadísticamente isotrópica, esta es caracterizada por la función de densidad espectral  $W(x_1, x_2) = \langle E^*(x_1)E(x_2) \rangle$ . Por simplicidad, asumimos que la función de densidad espectral  $W(x_1, x_2)$  es una función de valor real. Como es conocido [29], cada función de densidad espectral puede ser fácilmente medida, para un par de argumentos  $x_1 = \xi$  y  $x_2 = -\xi$ , usando el experimento de interferencia de Young con 2 pinholes simétricamente separados por una distancia variable de  $2\xi$ . Una vez medida la función  $W(\xi, -\xi)$ , podemos construir la función

$$W_A(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^{M-1} \mu_m \psi_m(x_1) \psi_m(x_2), \quad (4.1)$$

donde  $M$  es algún número entero,  $\{\psi_m(\mathbf{x})\}$  son un conjunto de funciones continuas ortonormales

**CAPÍTULO 4. DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LA ESTRUCTURA  
MODAL DE UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO**  
4.2. RECONSTRUCCIÓN DE LA ESTRUCTURA MODAL DE LA FUENTE DEL  
RESULTADO DEL EXPERIMENTO DE YOUNG

---

con valor real en el dominio  $D$ , es decir

$$\int_D \psi_m(\mathbf{x})\psi_l(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \delta_{ml}, \quad (4.2)$$

y  $\delta_{ml}$  es una delta de Kronecker, y los  $\mu_m$  son los valores positivos que minimizan la funcional

$$L(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{M-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} [W(\xi, -\xi) - W_A(\xi, -\xi)]^2 d\xi. \quad (4.3)$$

Se puede mostrar fácilmente que la función construida  $W_A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  cumple las propiedades dadas por las Ecs.(2.23)-(2.25), y puede ser interpretada como alguna RMC de la fuente. Claro que la representación alternativa en modos coherentes dada por la Ec. (4.1) no reproduce la densidad espectral mutua genuina de una fuente original pero puede ser utilizada como una aproximación útil en el análisis y diseño de sistemas ópticos con iluminación parcialmente coherente.

Como se sigue de la Ec.(4.2), las funciones modales  $\psi_m(x)$  de la representación alternativa deben ser elegidas tales que formen una base ortonormal en el dominio  $D$ . Como una simple elección de funciones modales  $\psi(x)$  se puede utilizar la base formada por los polinomios de Hermite  $H_m$ , donde  $m$  es el orden del polinomio, esta base polinomios obedece la siguiente relación de ortogonalidad [53]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2)H_m(u)H_l(u)du = 2^m m! \sqrt{\pi} \delta_{ml}. \quad (4.4)$$

Comparando las Ecs.(4.2) y (4.4), uno encuentra que, en esta base

$$\psi_m(x) = \left( \frac{1}{\alpha 2^m m!} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\pi}{2\alpha^2} x^2\right) H_m\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} x\right), \quad (4.5)$$

donde

$$\alpha = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} W(x, x)dx}{W(0, 0)}, \quad (4.6)$$

es el ancho efectivo de la fuente original. Entonces, substituyendo la Ec.(4.5) en la Ec.(4.1), encontramos que

$$W_A(x_1, x_2) = \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{\pi}{2\alpha^2}(x_1^2 + x_2^2)\right) \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\mu_m}{2^m m!} H_m\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} x_1\right) H_m\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} x_2\right). \quad (4.7)$$

Tomando en cuenta la Ec.(4.7) y la propiedad

$$H_m(-x) = (-1)^m H_m(x), \quad (4.8)$$

la funcional dada por la Ec.(4.3) toma la forma

$$L(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{M-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ W(\xi, -\xi) - \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{\pi \xi^2}{\alpha^2}\right) \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \frac{\mu_m}{2^m m!} H_m^2\left(\frac{\sqrt{\pi} \xi}{\alpha}\right) \right]^2 d\xi. \quad (4.9)$$

**CAPÍTULO 4. DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LA ESTRUCTURA  
MODAL DE UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO**  
4.3. EJEMPLO Y SIMULACIÓN NUMÉRICA

---

Ahora aplicamos el método de mínimos cuadrados, es decir

$$\frac{\partial}{\partial \mu_m} L(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{M-1}) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, M-1. \quad (4.10)$$

Con esto encontramos el siguiente sistema de ecuaciones lineales :

$$\sum_{l=0}^{M-1} \mu_l Q_{ml} = P_m, \quad m = 0, 1, \dots, M-1, \quad (4.11)$$

donde

$$Q_{ml} = (-1)^l \frac{1}{2^l l! 2^m m!} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2u^2) H_l^2(u) H_m^2(u) du, \quad (4.12)$$

$$P_m = \alpha \frac{1}{2^m m!} \int_{-\infty}^{\infty} W\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} u, -\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} u\right) \exp(-u^2) H_m^2(u) du. \quad (4.13)$$

Resolviendo este sistema, uno encuentra los valores  $\mu_m^{opt}$  que sustituyendo en la Ec. (4.4) da la óptima representación alternativa. Es necesario notar que la estructura de el sistema dado por las Ecs. (4.8)-(4.10) proporciona la no-negatividad de los valores  $\mu_m^{opt}$ . La calidad de la representación alternativa en modos coherentes puede ser evaluada por medio del error relativo entre la fuente real y la fuente alternativa :

$$\varepsilon = \frac{\int_0^{\infty} [W(\xi, -\xi) - W_A^{opt}(\xi, -\xi)]^2 d\xi}{\int_0^{\infty} |W(\xi, -\xi)|^2 d\xi}, \quad (4.14)$$

el cual dependerá del número de términos en la suma de la Ec.(4.7), ya que entre más modos se empleen, menor será el error.

### 4.3. Ejemplo y simulación numérica

Para verificar la técnica propuesta, consideremos un ejemplo de la fuente con la densidad espectral mutua cuya forma analítica es conocida a priori. Como tal fuente consideremos la fuente modelo Shell Gaussiano, para la cual

$$W(x_1, x_2) = S(0) \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4\sigma_s^2}\right) \exp\left(-\frac{(x_1 - x_2)^2}{2\sigma_\mu^2}\right), \quad (4.15)$$

donde la razón  $\gamma = \sigma_\mu/\sigma_s$  es una medida del grado global de coherencia.

Ahora sustituyendo la Ec.(4.15) en la Ec. (4.6), obtenemos

$$\alpha = \sqrt{2\pi}\sigma_s, \quad (4.16)$$

entonces  $W_A(x_1, x_2)$  dada por la Ec.(4.7) toma la siguiente forma

$$W_A(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4\sigma_s^2}\right) \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\mu_m}{2^m m!} H_m\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}\sigma_s}\right) H_m\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}\sigma_s}\right), \quad (4.17)$$

**CAPÍTULO 4. DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LA ESTRUCTURA  
MODAL DE UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO**  
4.3. EJEMPLO Y SIMULACIÓN NUMÉRICA

---

observamos que

$$\begin{aligned} W_A \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} u, -\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} u \right) &= S(0) \exp \left[ -\frac{2\frac{\alpha^2}{\pi} u^2}{4\sigma_s^2} \right] \exp \left[ -\frac{4\frac{\alpha^2}{\pi} u^2}{2\sigma_u^2} \right] \\ &= S(0) \exp \left[ -\frac{\alpha^2 u^2}{\pi} \left( \frac{1}{2\sigma_s^2} + \frac{2}{\sigma_u^2} \right) \right] = S(0) \exp \left[ -\frac{\alpha^2 u^2}{\pi} \left( \frac{4 + \gamma^2}{2\sigma_s^2 \gamma^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde  $\gamma = \sigma_u/\sigma_s$  sustituyendo (4.12) y (4.13) en (4.12) se deduce que

$$\begin{aligned} P_m &= S(0) \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_s}{2^m m!} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{2\pi\sigma_s u^2}{\pi} \left( \frac{4 + \gamma^2}{2\sigma_s^2 \gamma^2} \right) \right] \exp(-u^2) H_m^2(u) du \\ &= S(0) \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_s}{2^m m!} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{4 + \gamma^2}{\gamma^2} u^2 \right] \exp(-u^2) H_m^2(u) du \\ &= S(0) \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_s}{2^m m!} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\left( 1 + \frac{4 + \gamma^2}{\gamma^2} \right) u^2 \right] H_m^2(u) du \\ &= S(0) \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_s}{2^m m!} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{4 + 2\gamma^2}{\gamma^2} u^2 \right] H_m^2(u) du. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ahora substituyendo (4.18) y (4.15) en el error relativo  $\varepsilon$  dado por (4.14), tenemos

$$\varepsilon = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[ S(0) \exp \left( -\frac{4 + \gamma^2}{2\gamma^2 \sigma_s^2} \xi^2 \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp \left( -\frac{\xi^2}{2\sigma_2^2} \right) \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m \mu_m}{2^m m!} H_m^2 \left( \frac{\xi}{\sqrt{2}\sigma_s} \right) \right]^2 du}{\int_{-\infty}^{\infty} \left[ S(0) \exp \left( -\frac{4 + \gamma^2}{2\gamma^2 \sigma_s^2} \xi^2 \right) \right]^2 d\xi}. \quad (4.20)$$

Haciendo el cambio de variable  $u = \xi/(2\sigma_s)$  y resolviendo la integral en el denominador, tenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sqrt{2}\sigma_s \int_{-\infty}^{\infty} \left[ S(0) \exp \left( -\frac{4 + \gamma^2}{\gamma^2} u^2 \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp(-u^2) \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m \mu_m}{2^m m!} H_m^2(u) \right]^2 du}{S^2(0) \sqrt{\pi} \left( \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 4} \right)^{1/2}} \\ &= \frac{\sigma_s}{S^2(0)} \left( \frac{2(4 + \gamma^2)}{\sqrt{\pi}\gamma^2} \right)^{1/2} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left[ S(0) \exp \left( -\frac{4 + \gamma^2}{\gamma^2} u^2 \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp(-u^2) \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m \mu_m}{2^m m!} H_m^2(u) \right]^2 du. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Realizamos la simulación numérica del sistema dado por las Ecs. (4.12),(4.19). Usando el programa Matlab y aceptando  $\sigma_s = 1$  y  $S(0) = 1$  obtenemos la matriz aumentada correspondiente y posteriormente resolvemos el sistema de ecuaciones obtenido utilizando el metodo de Gauss-jordan.

**CAPÍTULO 4. DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LA ESTRUCTURA MODAL DE UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO**  
**4.3. EJEMPLO Y SIMULACIÓN NUMÉRICA**

---

En la Tabla 4.1 se muestran los cálculos realizados para un grado de coherencia global de  $\gamma = 0,2$  y los errores relativos correspondientes para cada número de modos.

M	1	5	10	15	20	25	30	35
$\mu_0$	0.3526	0.4912	0.4977	0.4956	0.4966	0.4960	0.4964	0.4961
$\mu_1$		0.4939	0.4847	0.4872	0.4860	0.4867	0.4862	0.4865
$\mu_2$		0.4642	0.4789	0.4759	0.4773	0.4765	0.4770	0.4766
$\mu_3$		0.4949	0.4647	0.4683	0.4668	0.4677	0.4671	0.4675
$\mu_4$		0.3255	0.4615	0.4570	0.4587	0.4578	0.4583	0.4579
$\mu_5$		0.4912	0.4444	0.4503	0.4484	0.4494	0.4488	0.4492
$\mu_6$			0.4469	0.4386	0.4408	0.4397	0.4404	0.4400
$\mu_7$			0.4200	0.4333	0.4306	0.4318	0.4311	0.4316
$\mu_8$			0.4478	0.4205	0.4238	0.4224	0.4231	0.4227
$\mu_9$			0.2946	0.4175	0.4135	0.4150	0.4142	0.4147
$\mu_{10}$				0.4021	0.4075	0.4057	0.4066	0.4061
$\mu_{11}$				0.4044	0.3968	0.3989	0.3979	0.3985
$\mu_{12}$				0.3800	0.3921	0.3896	0.3907	0.3901
$\mu_{13}$				0.4052	0.3805	0.3834	0.3822	0.3829
$\mu_{14}$				0.2665	0.3778	0.3741	0.3755	0.3748
$\mu_{15}$					0.3639	0.3687	0.3671	0.3679
$\mu_{16}$					0.3659	0.3591	0.3609	0.3600
$\mu_{17}$					0.3439	0.3548	0.3526	0.3536
$\mu_{18}$					0.3666	0.3443	0.3469	0.3458
$\mu_{19}$					0.2412	0.3419	0.3385	0.3398
$\mu_{20}$						0.3292	0.3336	0.3322
$\mu_{21}$						0.3311	0.3249	0.3266
$\mu_{22}$						0.3111	0.3210	0.3190
$\mu_{23}$						0.3317	0.3115	0.3139
$\mu_{24}$						0.2182	0.3093	0.3063
$\mu_{25}$							0.2979	0.3019
$\mu_{26}$							0.2996	0.2940
$\mu_{27}$							0.2815	0.2904
$\mu_{28}$							0.3001	0.2819
$\mu_{29}$							0.1974	0.2799
$\mu_{30}$								0.2696
$\mu_{31}$								0.2711
$\mu_{32}$								0.2547
$\mu_{33}$								0.2716
$\mu_{34}$								0.1787
$\varepsilon$	0.8029	0.5393	0.3794	0.2797	0.2155	0.1800	0.1512	0.1442

Tabla 4.1: Valores de  $\mu$  para  $\gamma = 0,2$ .

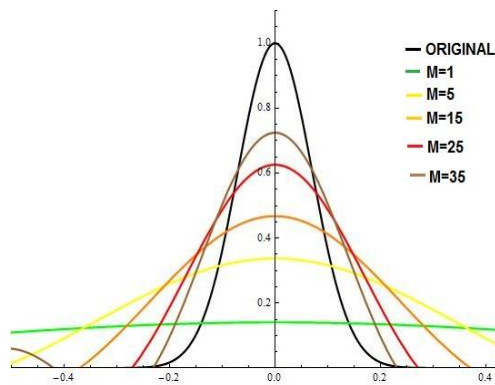


Figura 4.1: Aproximación a la fuente real para  $\gamma = 0,2$ .

**CAPÍTULO 4. DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LA ESTRUCTURA MODAL DE UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO**  
**4.3. EJEMPLO Y SIMULACIÓN NUMÉRICA**

---

En la Tabla 4.2 se muestran los cálculos realizados para un grado de coherencia global de  $\gamma = 0,5$  y los errores relativos correspondientes para cada número de modos.

M	1	5	10	15	20	25	30	35
$\mu_0$	0.8596	1.1717	1.1806	1.1789	1.1794	1.1793	1.1793	1.1793
$\mu_1$		1.0518	1.0390	1.0410	1.0404	1.0406	1.0405	1.0406
$\mu_2$		0.8993	0.9200	0.9177	0.9183	0.9181	0.9182	0.9181
$\mu_3$		0.8510	0.8078	0.8106	0.8100	0.8102	0.8101	0.8101
$\mu_4$		0.5210	0.7178	0.7142	0.7150	0.7148	0.7148	0.7148
$\mu_5$			0.6266	0.6314	0.6305	0.6308	0.6307	0.6307
$\mu_6$			0.5625	0.5557	0.5567	0.5564	0.5565	0.5565
$\mu_7$			0.4810	0.4920	0.4908	0.4911	0.4910	0.4911
$\mu_8$			0.4551	0.4320	0.4336	0.4332	0.4333	0.4333
$\mu_9$			0.2786	0.3839	0.3820	0.3824	0.3823	0.3823
$\mu_{10}$				0.3351	0.3377	0.3372	0.3374	0.3373
$\mu_{11}$				0.3008	0.2972	0.2978	0.2976	0.2977
$\mu_{12}$				0.2572	0.2632	0.2625	0.2627	0.2626
$\mu_{13}$				0.2434	0.2311	0.2319	0.2317	0.2317
$\mu_{14}$				0.1490	0.2053	0.2043	0.2045	0.2044
$\mu_{15}$					0.1792	0.1806	0.1804	0.1804
$\mu_{16}$					0.1609	0.1589	0.1592	0.1592
$\mu_{17}$					0.1376	0.1407	0.1404	0.1405
$\mu_{18}$					0.1302	0.1236	0.1240	0.1239
$\mu_{19}$					0.0797	0.1098	0.1093	0.1094
$\mu_{20}$						0.0959	0.0966	0.0965
$\mu_{21}$						0.0861	0.0850	0.0852
$\mu_{22}$						0.0736	0.0753	0.0751
$\mu_{23}$						0.0696	0.0661	0.0663
$\mu_{24}$						0.0426	0.0587	0.0584
$\mu_{25}$							0.0513	0.0517
$\mu_{26}$							0.0460	0.0455
$\mu_{27}$							0.0394	0.0403
$\mu_{28}$							0.0372	0.0353
$\mu_{29}$							0.0228	0.0314
$\mu_{30}$								0.0274
$\mu_{31}$								0.0246
$\mu_{32}$								0.0210
$\mu_{33}$								0.0199
$\mu_{34}$								0.0122
$\varepsilon$	0.5422	0.1347	0.0326	0.0090	0.0066	0.0055	0.0044	0.0034

Tabla 4.2: Valores de  $\mu$  para  $\gamma = 0,5$ .

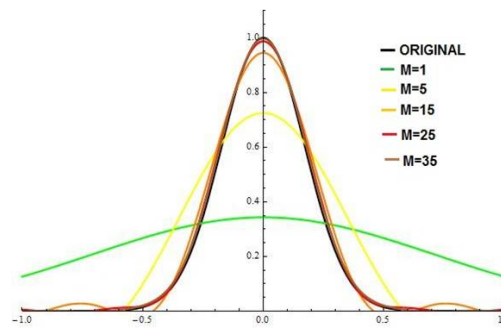


Figura 4.2: Visión grafica de la aproximación a la fuente real para  $\gamma = 0,5$ .

**CAPÍTULO 4. DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LA ESTRUCTURA MODAL DE UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO**  
**4.3. EJEMPLO Y SIMULACIÓN NUMÉRICA**

En la Tabla 4.3 se muestran los cálculos realizados para un grado de coherencia global de  $\gamma = 0,8$  y los errores relativos correspondientes para cada número de modos.

M	1	5	10	15	20	25	30	35
$\mu_0$	1.3162	1.7236	1.7286	1.7282	1.7283	1.7283	1.7283	1.7283
$\mu_1$		1.2584	1.2512	1.2515	1.2515	1.2515	1.2515	1.2515
$\mu_2$		0.8948	0.9067	0.9062	0.9063	0.9063	0.9063	0.9063
$\mu_3$		0.6808	0.6557	0.6563	0.6563	0.6563	0.6563	0.6563
$\mu_4$		0.3619	0.4759	0.4752	0.4752	0.4752	0.4752	0.4752
$\mu_5$			0.3432	0.3442	0.3441	0.3441	0.3441	0.3441
$\mu_6$			0.2506	0.2491	0.2492	0.2492	0.2492	0.2492
$\mu_7$			0.1782	0.1805	0.1804	0.1805	0.1805	0.1805
$\mu_8$			0.1355	0.1306	0.1307	0.1307	0.1307	0.1307
$\mu_9$			0.0721	0.0948	0.0946	0.0946	0.0946	0.0946
$\mu_{10}$				0.0683	0.0685	0.0685	0.0685	0.0685
$\mu_{11}$				0.0499	0.0496	0.0496	0.0496	0.0496
$\mu_{12}$				0.0355	0.0359	0.0359	0.0359	0.0359
$\mu_{13}$				0.0270	0.0260	0.0260	0.0260	0.0260
$\mu_{14}$				0.0143	0.0189	0.0188	0.0188	0.0188
$\mu_{15}$					0.0136	0.0136	0.0136	0.0136
$\mu_{16}$					0.0099	0.0099	0.0099	0.0099
$\mu_{17}$					0.0071	0.0072	0.0072	0.0072
$\mu_{18}$					0.0054	0.0052	0.0052	0.0052
$\mu_{19}$					0.0029	0.0038	0.0038	0.0038
$\mu_{20}$						0.0027	0.0027	0.0027
$\mu_{21}$						0.0020	0.0020	0.0020
$\mu_{22}$						0.0014	0.0014	0.0014
$\mu_{23}$						0.0011	0.0010	0.0010
$\mu_{24}$						0.0006	0.0007	0.0007
$\mu_{25}$							0.0005	0.0005
$\mu_{26}$							0.0004	0.0004
$\mu_{27}$							0.0003	0.0003
$\mu_{28}$							0.0002	0.0002
$\mu_{29}$							0.0001	0.0001
$\mu_{30}$								0.0001
$\mu_{31}$								0.0001
$\mu_{32}$								0.0001
$\mu_{33}$								0.0000
$\mu_{34}$								0.0000
$\varepsilon$	0.3501	0.0248	0.0051	0.0043	0.0042	0.0038	0.0038	0.0037

Tabla 4.3: Valores de  $\mu$  para  $\gamma = 0,8$ .

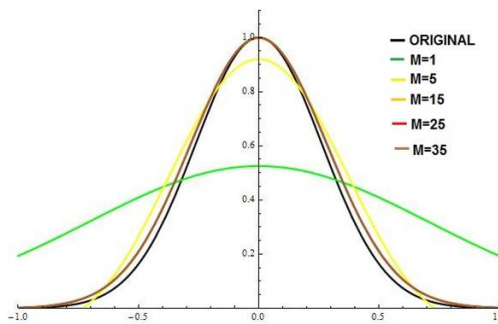


Figura 4.3: Visión grafica de la aproximación a la fuente real para  $\gamma = 0,8$ .

**CAPÍTULO 4. DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LA ESTRUCTURA  
MODAL DE UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO**  
4.3. EJEMPLO Y SIMULACIÓN NUMÉRICA

---

La dependencia del error relativo de la aproximación en el numero de modos coherentes  $M$ , para los diferentes valores de el grado global de coherencia  $\gamma$ , es mostrado en la Fig. (4.45). Se puede ver que el error relativo de la representación alternativa decrece con el aumento de  $M$ . Además, para disminuir el nivel del error, mas modos son necesarios para representar fuentes menos coherentes.

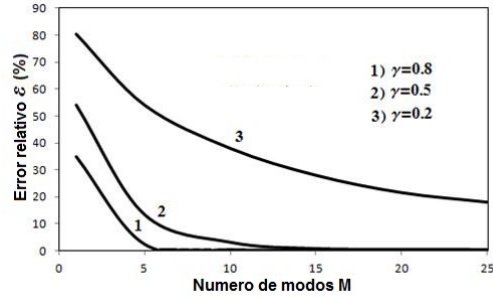


Figura 4.4: Dependencia del error relativo de  $M$  .

Como se puede observar en nuestro enfoque propuesto, la RMC alternativa para el caso vectorial se puede lograr haciendo dos representaciones escalares de la forma (3.16) , para cada componente  $W_{xx}$  y  $W_{yy}$  de la matriz de densidad espectral mutua, sin embargo el enfoque planteado se ha formulado bajo fuertes suposiciones con respecto al carácter de la fuente, es por eso que nos damos a la tarea de buscar un nuevo camino para resolver el problema de la representación en modos coherentes de una fuente. En la siguiente sección se plantea una idea novedosa para resolver este problema. Este nuevo enfoque nos llevara a resolver de manera más precisa la RMC de una fuente vectorial, sin hacer tantas suposiciones como en el enfoque desarrollado en esta sección.

**CAPÍTULO 4. DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LA ESTRUCTURA  
MODAL DE UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO**

**4.4. DESCOMPOSICIÓN DE LA ESTRUCTURA DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO EN  
UNA BASE ORTOGONAL DE REFERENCIA**

---

**4.4. Descomposición de la estructura del campo electro-  
magnético en una base ortogonal de referencia**

**Paso-1:**

1. Elegimos una base de referencia  $\psi(\mathbf{x})$ , más adelante nos ocuparemos de la descripción analítica de esta base.
2. Consideramos que las realizaciones del campo  $E_i(\mathbf{x})$  en el punto  $\mathbf{x}$  del dominio  $D$ , puede ser expresada a través de una expansion en la base de referencia seleccionada

$$E_i(\mathbf{x}) = \sum_k a_{i;k} \psi_k(\mathbf{x}). \quad (4.22)$$

3. Los elementos de la base son mutuamente ortonormales

$$\int_D \psi_k^*(\mathbf{x}) \psi_l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{kl}, \quad (4.23)$$

donde  $\delta_{kl}$  es la delta de Kronecker.

4. Las realizaciones de la señal óptica y los elementos de la base están relacionados como

$$a_{i;k} = \int_D E_i(\mathbf{x}) \psi_k^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (4.24)$$

Es importante resaltar el echo de que los coeficientes  $a_{i;k}$  son numeros aleatorios.

**Paso-2:**

Sustituyendo de la Ec.(4.22) en la definición de la matriz de densidad espectral mutua, Ec. (2.2), obtenemos

$$W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_k \sum_l c_{ij;kl} \psi_k^*(\mathbf{x}_1) \psi_l(\mathbf{x}_2), \quad (4.25)$$

donde

$$c_{ij;kl} = \langle a_{i;k}^* a_{j;l} \rangle. \quad (4.26)$$

**Paso-3:**

Sustituyendo (4.25) en la Ec. (2.27), encontramos

$$\sum_j \sum_k \sum_l c_{ij;kl} b_{j;n;k} \psi_l(\mathbf{x}) = \lambda_n \varphi_{i;n}(\mathbf{x}), \quad (4.27)$$

donde

$$b_{j;n;k} = \int_D \varphi_{j;n}(\mathbf{x}) \psi_k^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (4.28)$$

**CAPÍTULO 4. DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LA ESTRUCTURA  
MODAL DE UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO**  
4.5. MEDICIÓN DE LA MATRIZ DE CORRELACIÓN INTERMODAL

---

Al multiplicar ambos lados de la Ec. (4.27) por  $\psi_k^*$  e integrando el resultado sobre  $\mathbf{x}$  y aplicando la relación de ortogonalidad (4.17), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\sum_j \sum_k c_{ij;kl} b_{j;n;k} = \lambda_n b_{i;n;l}, \quad (4.29)$$

el cual puede ser reescrito en forma matricial como sigue

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{xx} & \mathbf{C}_{xy} \\ \mathbf{C}_{xy}^\dagger & \mathbf{C}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{x,n} \\ \mathbf{B}_{y,n} \end{bmatrix} = \lambda_n \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{x,n} \\ \mathbf{B}_{y,n} \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

donde  $\mathbf{C}$  es una matriz cuadrada con elementos  $\mathbf{C}_{ij}$  dados por la ecuación (4.19) y  $\mathbf{B}_{i;n}$  es la matriz columna con elementos dados por la ecuación (4.23). El proceso de hallar la solución a la Ec.(4.30) es conocido como el problema de valores propios.

**Paso-4:**

Los eigenvalores o valores propios  $\lambda_n$  pueden ser encontrados resolviendo la ecuación característica

$$Det \left( \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{xx} & \mathbf{C}_{xy} \\ \mathbf{C}_{xy}^\dagger & \mathbf{C}_{yy} \end{bmatrix} - \lambda_n \mathbf{I} \right) = 0, \quad (4.31)$$

donde  $Det$  denota el determinante de la matriz, mientras que  $\mathbf{I}$  es la matriz unitaria. Por definición de la matriz  $\mathbf{C}$  compuesta por submatrices  $\mathbf{C}_{ij}$  es Hermitiana  $\mathbf{C}^\dagger = \mathbf{C}$ , asegurando que todos los eigenvalores  $\lambda_n$  serán reales.

Una vez que todos los eigenvalores son encontrados, uno puede calcular los coeficientes  $b_{i;n;k}$  resolviendo el sistema dado por la ecuación (4.30). Así, las funciones modales desconocidas pueden ser determinadas por la expresión

$$\varphi_{i;n}(\mathbf{x}) = \sum_k b_{i;n;k} \psi_k(\mathbf{x}), \quad (4.32)$$

Se puede notar que en la práctica uno necesita truncar la base de referencia por un número finito de las funciones, que depende del grado de desajuste entre la base de referencia y la base modal del campo [50]

## 4.5. Medición de la matriz de correlación intermodal

Al resolver la Ec. (4.23), los coeficientes  $c_{ij;kl}$  pueden ser conocidos. Se puede mostrar que los coeficientes pueden ser medidos por medio de un interferómetro Mach-Zender modificado mostrado en la Fig. (4.5) Consideramos que el campo electromagnético a la entrada del interferómetro está caracterizado por el vector de campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , los polarizadores P1 y P2 son utilizados para transmitir solo una componente ortogonal del campo  $E_x$  o  $E_y$ . Las placas rotadoras R1 y R2 sirven para alinear el plano polarización de la componente seleccionada para su posterior interferencia. Los moduladores espaciales de luz SLM1 Y SLM2 modifican independientemente las amplitudes de las componentes seleccionadas. La lente proyecta la transformada de Fourier del campo incidente en el plano focal.

La transmitancia de amplitud de cada modulador espacial está descrito por

$$t_k(\mathbf{x}) = t_0 |\psi_k(\mathbf{x})| \cos [Arg(\psi_k(\mathbf{x})) + 2\pi x p_0 + \beta_k], \quad (4.33)$$

**CAPÍTULO 4. DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LA ESTRUCTURA MODAL DE UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO**  
**4.6. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE VALORES Y FUNCIONES PROPIOS**

---

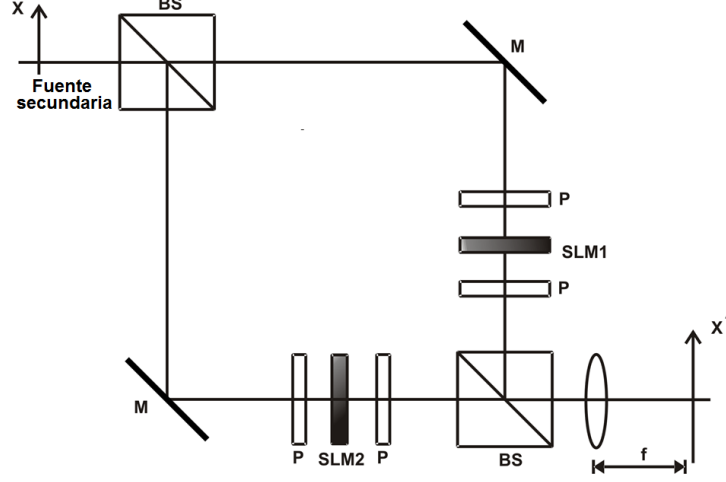


Figura 4.5: Sistema óptico para medir los coeficientes  $c_{ij;kl}$ , DH: divisor de haz, E: espejo, P: polarizador, SLM: Modulador espacial de luz, L: lente.

Donde  $t_0$  es una constante que provee la no negatividad de  $t_k(\mathbf{x})$ ,  $p_0$  y  $\beta_k$  son constantes cuyo significado será dado más adelante. La amplitud del campo en la distancia focal de la lente esta dado por

$$U_{ij;kl}(\mathbf{x}') = \int_D [E_i(\mathbf{x})t_k(\mathbf{x}) + E_j(\mathbf{x})t_l(\mathbf{x})] \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda f}\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}\right) d\mathbf{x}, \quad (4.34)$$

Donde  $\lambda$  es la longitud de onda y  $f$  es la distancia focal de la lente. Así, sustituyendo de la Ec. (4.34) en la Ec. (4.33), haciendo uso de la notación dada en la Ec. (4.24), uno encuentra que la amplitud del campo en el punto específico  $\mathbf{x}'_0 = (\lambda f p_0, 0)$  es el siguiente:

$$U_{ij;kl} = a_{i;k} \exp(-i\beta_k) + a_{j;l} \exp(-i\beta_l), \quad (4.35)$$

Así, haciendo uso de la notación dada por la Ec.(4.26), la intensidad promedio del campo en este punto es

$$I_{ij;kl} = \langle |U_{ij;kl}|^2 \rangle = c_{ii;kk} + c_{jj;ll} + c_{ij;kl} \exp(-i\beta_{kl}) + c_{ij;kl}^* \exp(-i\beta_{kl}), \quad (4.36)$$

donde  $\beta_{kl} = \beta_k - \beta_l$  se puede mostrar que, la intensidad medida dada por la Ec.(4.36) para dos casos particulares  $\beta_{kl} = 0$  y  $\beta_{kl} = -\pi/2$ . Uno encuentra que la parte real e imaginaria de esta dada como sigue

$$\text{Re}(c_{ij;kl}) = \frac{1}{2}I_{ij;kl}(0) - \frac{1}{8}I_{ii;kk}(0) - \frac{1}{8}I_{jj;ll}(0). \quad (4.37)$$

$$\text{Im}(c_{ij;kl}) = \frac{1}{2}I_{ij;kl}(-\pi/2) - \frac{1}{8}I_{ii;kk}(0) - \frac{1}{8}I_{jj;ll}(0). \quad (4.38)$$

Tomando en cuenta la simetría Hermitiana de las matrices  $C_{ij}$  y las ecuaciones (4.37) y (4.38) , se puede encontrar fácilmente que el número de medidas necesarias es igual a  $2K(2K + 1)$ .

## 4.6. Solución del problema de valores y funciones propios

Para llevar a cabo la evaluación experimental de nuestra técnica propuesta, consideremos que nuestra matriz de densidad espectral tiene forma diagonal. Tomando en cuenta esta consideración

**CAPÍTULO 4. DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LA ESTRUCTURA  
MODAL DE UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO**  
4.6. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE VALORES Y FUNCIONES PROPIOS

---

el problema se reduce de manera considerable ya que solo debemos resolver dos problemas independientes de valores propios, a partir de esto podemos considerar que cada elemento de la matriz asociada a la fuente secundaria puede ser representado mediante el modelo Shell- Gaussiano 1D de la siguiente manera [13].

$$W_{ii}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = E_0^2 \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2}{2\sigma_s^2}\right) \exp\left[-\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2}{2\sigma_\mu^2}\right]. \quad (4.39)$$

La fuente de radiación óptica con la densidad espectral mutua dada por la Ec.(4.39) es conocida como la fuente modelo Schell-Gaussiano. Esta fuente ha sido bien estudiada y para ella, ha sido obtenida la solución a la ecuación de Fredholm en forma de funciones propias [55]:

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{2c}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(x\sqrt{2c}) \exp(-cx^2) \quad (4.40)$$

y valores propios:

$$\lambda_n = E_0^2 \left(\frac{\pi}{a+b+c}\right)^{1/2} \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^n, \quad (4.41)$$

donde:

$$a = \frac{1}{4\sigma_s^2}, b = \frac{1}{2\sigma_s^2}, c = \sqrt{a^2 + 2ab}. \quad (4.42)$$

Cabe destacar que el modelo teórico [13] junto con su representación en modos coherentes Ecs.(4.40)-(4.42) tienen un carácter solo aproximado y siendo aplicado en el caso descrito en la sección anterior. Para aplicar esta técnica en la práctica, primero es necesario elegir una base de referencia ortogonal [53]. Para tal base es natural usar un conjunto de funciones con la estructura cercana a las funciones propias dadas por la Ec. (4.40), es decir:

$$\psi_k(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha 2^k k!}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) H\left(\frac{x}{\alpha}\right), \quad (4.43)$$

donde  $\alpha$  es un parámetro positivo, lo cual definimos más tarde. Utilizando la propiedad de polinomios de Hermite [29]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_m(x) H_l(x) dx = 2^m m! \sqrt{\pi} \delta_{ml}, \quad (4.44)$$

es posible mostrar que las funciones  $\psi_k(x)$  dadas por la Ec. (4.43) son ortonormales, la cual es la condición necesaria atribuida a la base de referencia por la definición (4.23). Notamos que el parámetro  $\alpha$  en la Ec.(4.43), se entiende como la escala espacial de la base ortogonal elegida. Por esta razón, es natural elegir este parámetro partiendo de la anchura efectiva de la fuente secundaria utilizada en los experimentos, es decir  $\alpha = \sigma_s$ . Entonces, la Ec.(4.43) toma la forma

$$\psi_k(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_s 2^k k!}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_s^2}\right) H\left(\frac{x}{\sigma_s}\right). \quad (4.45)$$

Con la elección de la base ortogonal de referencia en la forma de la Ec.(4.45), la transmitancia de amplitud de holograma  $t_{kl}(x)$  utilizada en la técnica propuesta en la sección 4.4, se define por la siguiente expresión:

$$t_{kl}(x) = t_0 + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_s}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_s^2}\right) \times$$

$$\left[ \left( \frac{1}{2^k k!} \right)^{1/2} H_k \left( \frac{x}{\sigma_s} \right) \cos(2\pi p_0 x) + \left( \frac{1}{2^l l!} \right)^{1/2} H_l \left( \frac{x}{\sigma_s} \right) \cos(2\pi p_0 x + \beta) \right]. \quad (4.46)$$

Recordamos que la constante  $t_0$  tiene que ser elegida para garantizar un valor positivo de  $t_{kl}(x)$ , es decir:

$$\begin{aligned} & \text{máx}_{x,kl} \left\{ 2 \left( \frac{1}{\pi \sigma_s} \right) 1/2 \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma_s^2} \right) \right\} \times \\ & \times \left[ \left( \frac{1}{2^k k!} \right)^{1/2} H_k \left( \frac{x}{\sigma_s} \right) \cos(2\pi p_0 x) + \left( \frac{1}{2^l l!} \right)^{1/2} H_l \left( \frac{x}{\sigma_s} \right) \cos(2\pi p_0 x + \beta) \right]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

ó bien,

$$t_0 = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma_s} \right)^{1/2} = 4 \left( \frac{1}{\sqrt{\pi i} \sigma_s} \right)^{1/2}. \quad (4.48)$$

Entonces la transmitancia de amplitud de holograma necesaria para la realización de la técnica propuesta puede ser descrita en forma normalizada como:

$$\begin{aligned} t_{kl}(x) &= 1 + 2 \left( \frac{1}{\sqrt{\pi i} 2^l l!} \right)^{1/2} H_k \left( \frac{x}{\sigma_s} \right) \cos(2\pi p_0 x) \\ &+ 2 \left( \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^l l!} \right)^{1/2} H_l \left( \frac{x}{\sigma_s} \right) \cos(2\pi p_0 x + \beta), \end{aligned} \quad (4.49)$$

Entonces como podemos observar las dimensiones de la matriz  $\mathbf{C}$  dependerá del número de funciones que tomemos de la base de referencia.

## 4.7. Conclusiones

En este capítulo hemos analizado dos diferentes formas de encontrar la RMC de un campo electromagnético parcialmente coherente y parcialmente polarizado. El primer enfoque se basa en la medición directa de función de densidad espectral empleando el experimento de Young, mientras que el segundo se basa en encontrar la RMC de la función de densidad espectral a partir del cálculo de los elementos  $C_{kl}$  de la matriz  $\mathbf{C}$  y resolver el problema de valores propios. En el siguiente capítulo nos enfocamos en la realización de los experimentos correspondientes al segundo enfoque discutido en esta sección.

## Capítulo 5

### Experimentos y resultados

#### 5.1. Introducción

En este capítulo nos enfocamos en la parte experimental de los métodos de medición de la matriz de densidad espectral discutidos en los capítulos 3 y 4. Primeramente vamos a caracterizar nuestra fuente primaria (láser He-Ne) utilizando el método de Young modificado. En segundo lugar vamos a generar una fuente secundaria empleando placas difusoras de fase [16,17], la cual será caracterizada mediante el mismo método que la fuente primaria. Posteriormente llevaremos a cabo los experimentos correspondientes para la medición de los elementos  $C_{kl}$  de las submatrices  $\mathbf{C}_{ij}$  para resolver el problema de valores dado por la Ec.(4.31) y de esta forma conocer las eigenfunciones  $\varphi_{i;n}(\mathbf{x})$  dadas por la Ec.(4.32) y los eigenvalores  $\lambda_n$  de la matriz de densidad espectral de nuestra fuente. Finalmente se hace una comparación de los resultados obtenidos a partir del método convencional para medir coherencia y los resultados obtenidos empleando la técnica propuesta en el capítulo 4(Sección 4.4).

#### 5.2. Caracterización de la fuente primaria

Como fuente primaria emplearemos un láser de He-Ne de la marca CVI Mielles Griot modelo 25-LHP-828-249 (ver figura 5.1), el cual presenta excelentes condiciones para experimentos de óptica en general, tales como : emisión en luz visible(=633nm), diámetro milimétrico (0.96mm), cuasi monocromático, alta estabilidad (75mW a la salida) y baja sensibilidad de temperatura.



Figura 5.1: Láser He-Ne utilizado como fuente primaria, linealmente polarizado

Para llevar a cabo la caracterización de nuestra fuente primaria, es decir, medir su grado de coherencia, utilizaremos el arreglo experimental mostrado en la Fig.(5.2), el cual representa un interferómetro Mach-Zender el cual nos servirá para reproducir el experimento de Young modificado.

En la Refs. [17,22] se muestra que la densidad espectral a la salida del esquema mostrado en la Fig. (5.2) esta dado

$$S_{ij}(\mathbf{x}') = S_i^{(1)}(\mathbf{x}') + S_j^{(2)}(\mathbf{x}') + 2\sqrt{S_i^{(1)}(\mathbf{x}')}\sqrt{S_j^{(1)}(\mathbf{x}')}\mu_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|\cos[\beta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - \delta(\mathbf{x})], \quad (5.1)$$

**CAPÍTULO 5. EXPERIMENTOS Y RESULTADOS**  
**5.2. CARACTERIZACIÓN DE LA FUENTE PRIMARIA**

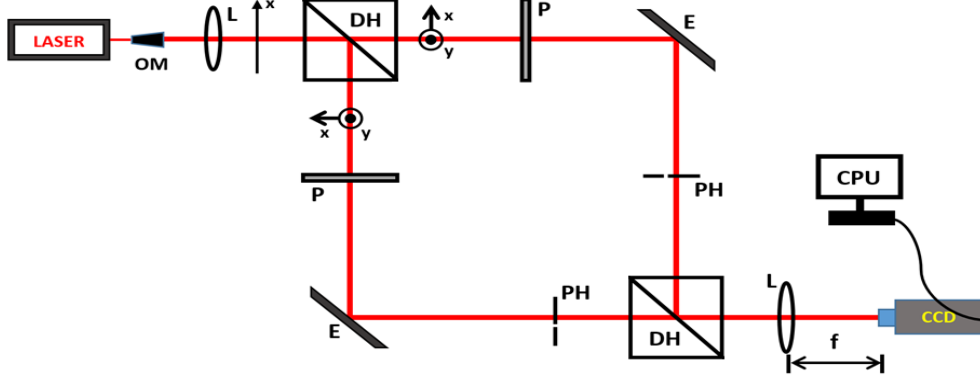


Figura 5.2: Arreglo experimental para la caracterización de la fuente primaria, OM: Objetivo de microscopio, DH:Divisor de haz, P: Polarizador, E: Espejo, L:Lente, PH:Pinhole.

donde  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  son las posiciones de los pinholes,  $i, j = x, y$  y  $S_x^{(1)}(\mathbf{x}')$  representa la densidad espectral del campo que llega al punto  $\mathbf{x}'$  si la abertura en el punto  $\mathbf{x}_2$  es cerrada,  $S_x^{(2)}(\mathbf{x}')$  tiene un significado análogo cuando la abertura en el punto  $\mathbf{x}_1$  es cerrada. La función  $\beta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  es la fase de la función compleja  $|\mu_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|$  y  $\delta(\mathbf{x})$  es un parámetro proporcional a la diferencia de camino óptico de las aberturas al punto  $\mathbf{x}'$  en el plano de observación.

Desde el punto de vista físico la Ec.(5.1) describe una imagen con estructura periódica, conocida como el patrón de interferencia de franjas. La medida del contraste de las franjas de interferencia es la visibilidad espectral  $V_{ij}(\mathbf{x}')$ , definida como

$$V_{ij}(\mathbf{x}') = \frac{S_{ij}^{(max)}(\mathbf{x}') - S_{ij}^{(min)}(\mathbf{x}')}{S_{ij}^{(max)}(\mathbf{x}') + S_{ij}^{(min)}(\mathbf{x}')} \quad (5.2)$$

donde  $S_{ij}^{(max)}(\mathbf{x}')$  y  $S_{ij}^{(min)}(\mathbf{x}')$  indican los valores extremos obtenidos de la ley de interferencia espectral. Si sustituimos la Ec. (5.1) con  $\cos[\beta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - \delta(\mathbf{x})] = \pm 1$  en la Ec. (5.2), encontramos que

$$|\mu_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| = \frac{S_i^{(1)}(\mathbf{x}') + S_j^{(2)}(\mathbf{x}')}{2[S_i^{(1)}(\mathbf{x}')S_j^{(2)}(\mathbf{x}')]^{\frac{1}{2}}} V_{ij}(\mathbf{x}'). \quad (5.3)$$

Entonces, midiendo, la visibilidad  $V_{ij}(\mathbf{x}')$  y las densidades espectrales  $S_i^{(1)}(\mathbf{x}')$  y  $S_j^{(2)}(\mathbf{x}')$  es posible determinar el coeficiente de correlación  $|\mu_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|$  o la función de densidad espectral  $W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  mediante

$$|W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| = |\mu_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| [S_i^{(1)}(\mathbf{x}')S_j^{(2)}(\mathbf{x}')]^{1/2}. \quad (5.4)$$

De esta forma con ayuda de los polarizadores y la placa difusora podemos medir las 4 componentes de la matriz  $\mathbf{W}$  [3].

Durante el experimento físico hacemos incidir sobre el interferómetro mostrado en la Fig.(5.2) un haz de luz polarizado circularmente, posteriormente mediante un expansor de haz logramos un haz de 1.0 cm de diámetro. Una vez que el haz se encuentra en el interferómetro Mach-Zender se colocan los polarizadores, los cuales nos ayudaran a hacer la selección de la componente del campo deseada, posteriormente colocamos los pinholes de  $200\mu\text{m}$  cada uno los cuales están montados sobre monturas de desplazamiento mecánicas modelo MTS25-Z8 . Finalmente a la salida del interferómetro colocamos un atenuador para controlar la intensidad y así evitar la saturación

## CAPÍTULO 5. EXPERIMENTOS Y RESULTADOS

### 5.2. CARACTERIZACIÓN DE LA FUENTE PRIMARIA

---

de la cámara, posteriormente hacemos viajar el haz aproximadamente 6m y colocamos una lente con  $f=100\text{mm}$  para enfocar el haz y hacerlo incidir a una cámara CCD previamente calibrada en intensidad [25] de la marca Pulnix modelo TM-1001 (targeta de video PDX1000) en el foco de la lente y así observar detalladamente el fenómeno de interferencia (Ver Fig.(5.3)).

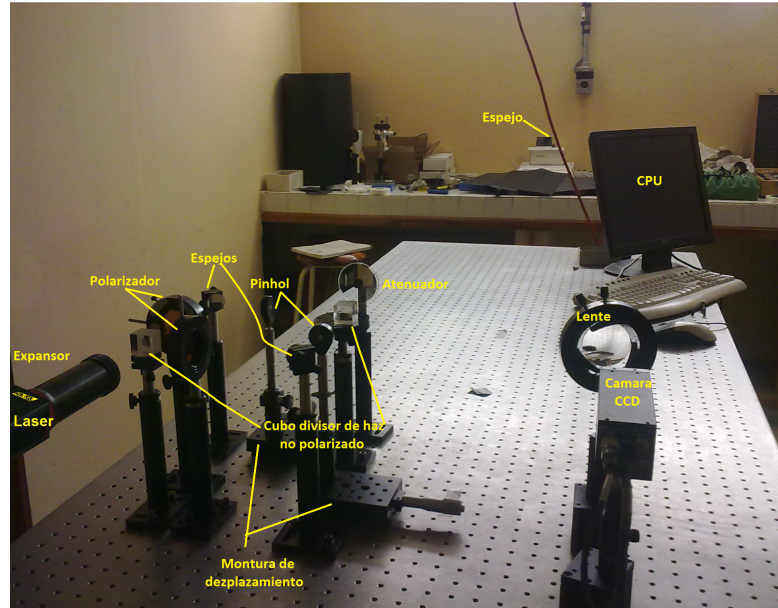


Figura 5.3: Arreglo experimental montado para la caracterización de la fuente primaria

### 5.2.1. Resultados

Una vez montado el arreglo experimental mostrado en la Fig.(5.2), empezamos por caracterizar las propiedades estadísticas de la fuente primaria (laser He-Ne), para lo cual calcularemos las componentes  $W_{xx}(\xi, -\xi)$  y  $W_{yy}(\xi, -\xi)$  de la matriz de densidad espectral, ya que son suficientes para calcular el grado de coherencia de nuestra fuente, esto se debe a que emplearemos la definición de coherencia dada por la Ec.(2.11).

Para el primer experimento obtenemos la interferencia entre las componentes xx, en la Fig.(5.4) se muestran los patrones de interferencia obtenidos para diferentes separaciones entre los pinholes

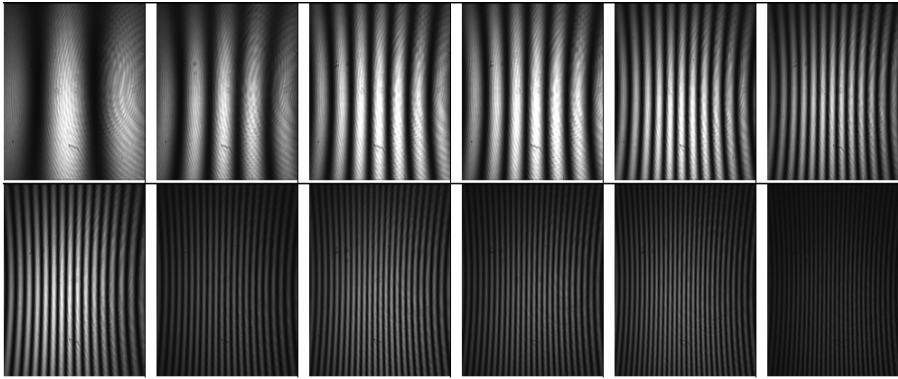


Figura 5.4: Patrones de interferencia asociados al elemento de la matriz de densidad espectral cruzada  $W_{xx}$ , en la primera fila para  $\xi = 0,5mm$ ;  $\xi = 1mm$ ;  $\xi = 1,5mm$ ;  $\xi = 2,0mm$ ;  $\xi = 2,5mm$ ;  $\xi = 3,0mm$  y en la segunda fila para  $\xi = 3,5mm$ ;  $\xi = 4mm$ ;  $\xi = 4,5mm$ ;  $\xi = 5,0mm$ ;  $\xi = 5,5mm$ ;  $\xi = 6,0mm$ , respectivamente.

Para el segundo experimento obtenemos la interferencia entre las componentes yy, en la Fig.(5.5) se muestran los patrones de interferencia obtenidos para diferentes separaciones entre los pinholes

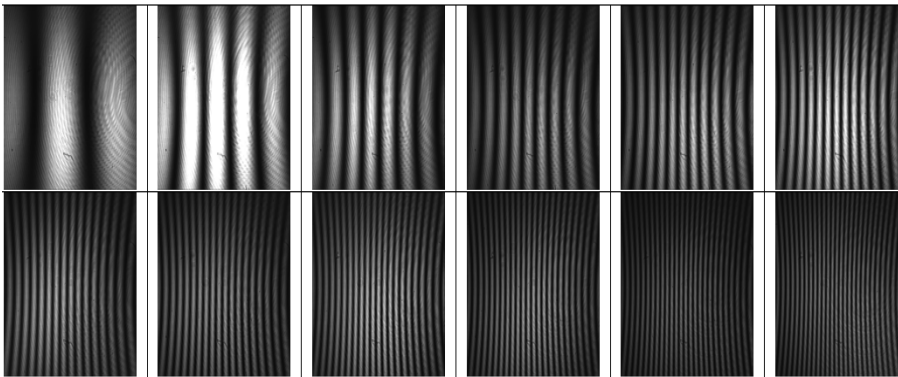


Figura 5.5: Patrones de interferencia asociados al elemento de la matriz de densidad espectral cruzada  $W_{yy}$ , en la primera fila para  $\xi = 0,5mm$ ;  $\xi = 1mm$ ;  $\xi = 1,5mm$ ;  $\xi = 2,0mm$ ;  $\xi = 2,5mm$ ;  $\xi = 3,0mm$  y en la segunda fila para  $\xi = 3,5mm$ ;  $\xi = 4mm$ ;  $\xi = 4,5mm$ ;  $\xi = 5,0mm$ ;  $\xi = 5,5mm$ ;  $\xi = 6,0mm$ , respectivamente.

Mediante el programa Matlab se analizaron los patrones de interferencia para obtener los valores de visibilidad y posteriormete determinar los coeficientes de la matriz de densidad espectral  $\mathbf{W}(\xi, -\xi)$  y poder encontrar los valores para el grado de coherencia.

**CAPÍTULO 5. EXPERIMENTOS Y RESULTADOS**  
**5.3. GENERACIÓN DE LA FUENTE SECUNDARIA**

En la figura (5.6) se muestran graficamente los datos obtenidos para el grado de coherencia de la fuente primaria.

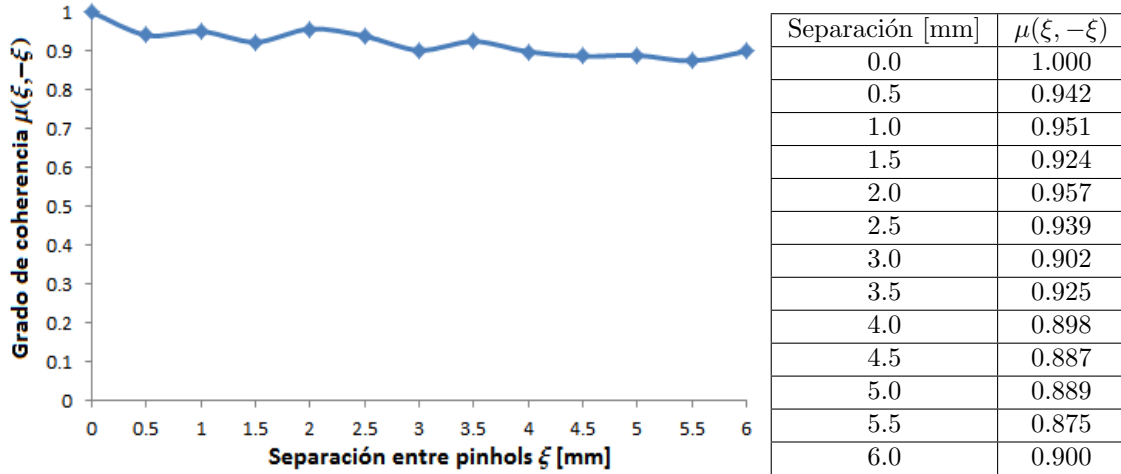


Figura 5.6: Grado de coherencia para la fuente primaria

Como podemos ver en la Fig.(5.6) nuestra fuente primaria tiene un grado de coherencia promedio del 0.96.

### 5.3. Generación de la fuente secundaria

Para la generación de la fuente secundaria realizaremos el experimento montado en la figura (5.7)

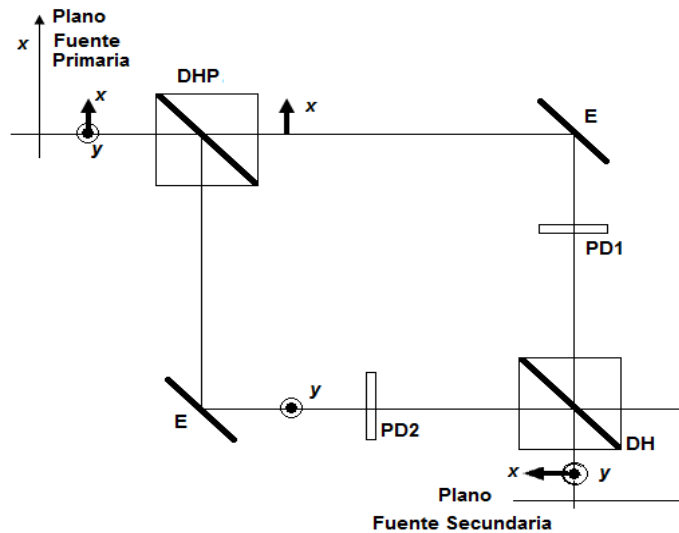


Figura 5.7: Esquema del experimento para la generación de la fuente secundaria. DHP: Divisor de haz polarizado, E: Espejo, PD1,2 : Placa difusora 1 y 2 respectivamente, DH: Divisor de haz no polarizado.

**CAPÍTULO 5. EXPERIMENTOS Y RESULTADOS**  
**5.4. CARACTERIZACIÓN DE LA FUENTE SECUNDARIA**

Como se puede observar primeramente tenemos nuestra fuente primaria el cual tiene un estado de polarización vertical, con ayuda de una placa retardadora de  $\lambda/2$  cambiamos su estado de polarización inicial a un estado de polarización circular, posteriormente expandimos el haz a 1cm aproximadamente. Finalmente hacemos girar las placas difusoras empleando unas monturas de la marca STANDA modelo 8MRU para lograr el cambio del grado de coherencia espacial del campo electromagnético.

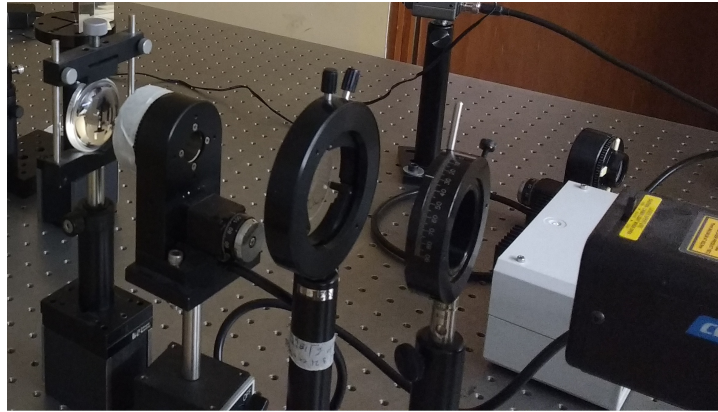


Figura 5.8: Areglo experimental montado para la generación de la fuente secundaria.

### 5.4. Caracterización de la fuente secundaria

Una vez generada la fuente secundaria (fuente parcialmente coherente y parcialmente polarizada) debemos de caracterizarla, es decir, medir su grado de coherencia y polarización (en nuestro caso nos enfocaremos únicamente en el grado de coherencia), para lograr este objetivo utilizamos el arreglo experimental mostrado en la Fig.(5.9)

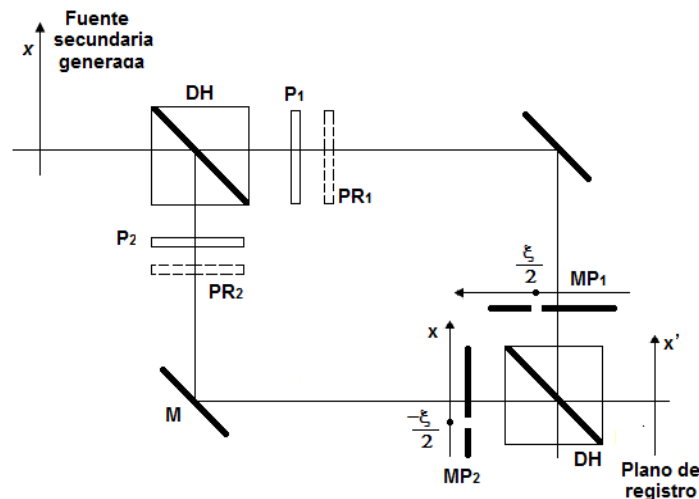


Figura 5.9: Ilustración esquemática de la técnica para la caracterización de la fuente secundaria. DH: Divisor de haz, M: Espejo, MP<sub>1</sub>, MP<sub>2</sub>: Pinholes Movable, P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>: Polarizadores, PR<sub>1</sub>, PR<sub>2</sub>: Placas Retardadoras.

**CAPÍTULO 5. EXPERIMENTOS Y RESULTADOS**  
**5.4. CARACTERIZACIÓN DE LA FUENTE SECUNDARIA**

Como se puede observar este arreglo es nuevamente un interferómetro mach-Zender en el cual se hará incidir en la entrada la fuente secundaria generada anteriormente y como en el caso de la fuente primaria nos ayudara a reproducir el interferómetro de Young modificado. Cabe mencionar que para nuestro caso no necesitaremos las placas retardadoras ya que como estamos trabajando con la definición de coherencia de Wolf nos interesan únicamente las correlaciones diagonales de la matriz de densidad espectral es decir  $W_{xx}$  y  $W_{yy}$ . En la figura (5.10) se muestra el arreglo físico montado en el laboratorio para la caracterización de la fuente secundaria.

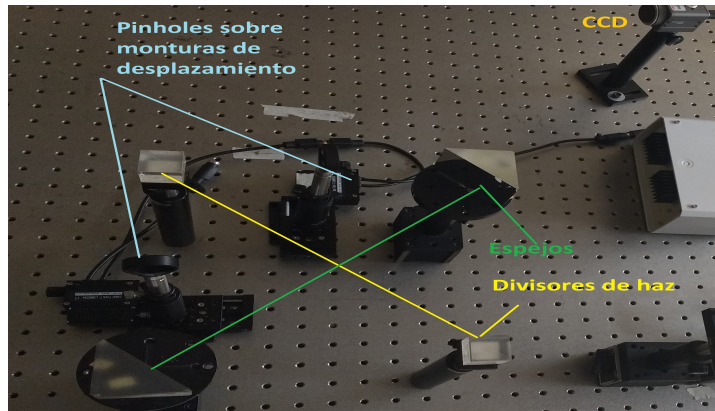


Figura 5.10: Ilustración física del arreglo experimental utilizado para la caracterización de la fuente secundaria

En la figura se muestra el arreglo propuesto completo y el arreglo montado para la generación y caracterización de una fuente secundaria

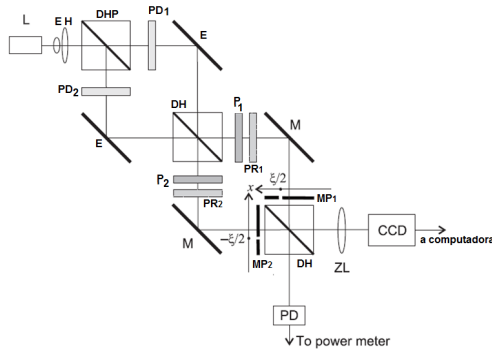


Figura 5.11: Ilustración esquemática de la técnica para la generación y caracterización de la fuente secundaria.

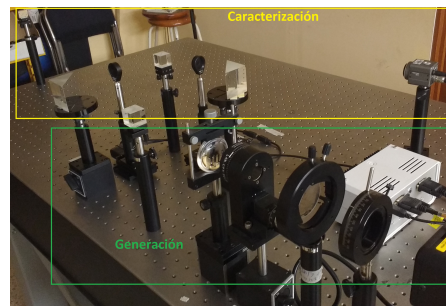


Figura 5.12: Arreglo experimental montado para la generación y caracterización de la fuente secundaria.

### Placa difusora dinámica de 10°

Primeramente generamos la fuente secundaria con una placa difusora dinámica de 10°, donde al realizar la interferencia entre las componentes xx, encontramos los patrones de interferencia mostrados en la Fig. (5.13)

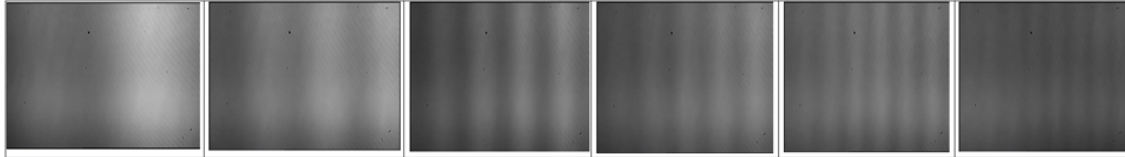


Figura 5.13: Patrones de interferencia asociados al elemento de la matriz de densidad espectral cruzada  $W_{xx}$  con la placa de 10° para  $\xi = 0,25mm$ ,  $\xi = 0,5mm$ ,  $\xi = 1,0mm$ ,  $\xi = 1,5mm$ ,  $\xi = 2,0mm$ ,  $\xi = 2,5mm$ , respectivamente.

Posteriormente realizamos la interferencia entre las componentes yy, de donde obtenemos los patrones de interferencia mostrados en la Fig.(5.14)

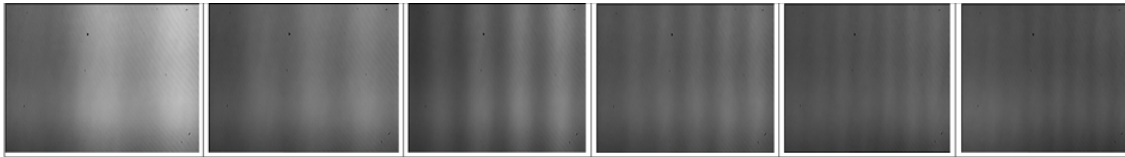


Figura 5.14: Patrones de interferencia asociados al elemento de la matriz de densidad espectral cruzada  $W_{yy}$  con la placa de 10° para  $\xi = 0,25mm$ ,  $\xi = 0,5mm$ ,  $\xi = 1,0mm$ ,  $\xi = 1,5mm$ ,  $\xi = 2,0mm$ ,  $\xi = 2,5mm$ , respectivamente.

### Placa difusora dinamica de 30°

Ahora generamos la fuente secundaria con una placa difusora dinámica de 30°, donde al realizar la interferencia entre las componentes xx encontramos patrones de interferencia mostrados en la Fig. (5.15) para diferentes separaciones entre los pinholes



Figura 5.15: Patrones de interferencia asociados al elemento de la matriz de densidad espectral cruzada  $W_{xx}$  con la placa de 30° para  $\xi = 0,25mm$ ,  $\xi = 0,5mm$ ,  $\xi = 1,0mm$ ,  $\xi = 1,5mm$ ,  $\xi = 2,0mm$ ,  $\xi = 2,25mm$ , respectivamente.

Después se realiza la interferencia entre las componentes yy, obtenemos los patrones de interferencia mostrados en la Fig.(5.16)

**CAPÍTULO 5. EXPERIMENTOS Y RESULTADOS**  
**5.4. CARACTERIZACIÓN DE LA FUENTE SECUNDARIA**



Figura 5.16: Patrones de interferencia asociados al elemento de la matriz de densidad espectral cruzada  $W_{yy}$  con la placa de  $10^\circ$  para  $\xi = 0,25mm$ ,  $\xi = 0,5mm$ ,  $\xi = 1,0mm$ ,  $\xi = 1,5mm$ ,  $\xi = 2,0mm$ ,  $\xi = 2,5mm$ , respectivamente.

**5.4.1. Resultados**

Mediante el programa matlab se realizó el análisis de los patrones obtenidos, se encontraron los valores máximos y mínimos de los patrones de interferencia, así como los valores correspondientes de la densidad espectral  $S(\xi)$  para posteriormente obtener los valores de la visibilidad. Con estos datos se obtienen los valores de  $W_{xx}(\xi, -\xi)$  y  $W_{yy}(\xi, -\xi)$  y finalmente se calcula el grado de coherencia de la fuente secundaria generada.

En en la Fig.(5.17) se muestra la graficas del grado de coherencia para la fuente secundaria generada por la placa difusora de  $10^\circ$ .

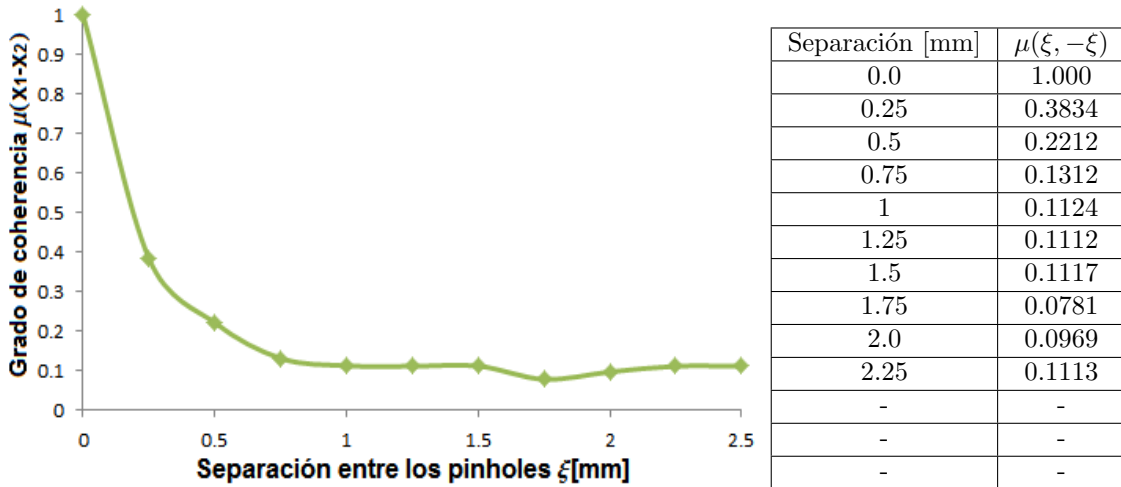


Figura 5.17: Grado de coherencia para la fuente secundaria utilizando una placa difusora de  $10^\circ$ .

En la Fig. (5.18) se muestra la grafica del grado de coherencia para la fuente secundaria generada por la placa difusora de  $30^\circ$

**CAPÍTULO 5. EXPERIMENTOS Y RESULTADOS**  
**5.4. CARACTERIZACIÓN DE LA FUENTE SECUNDARIA**

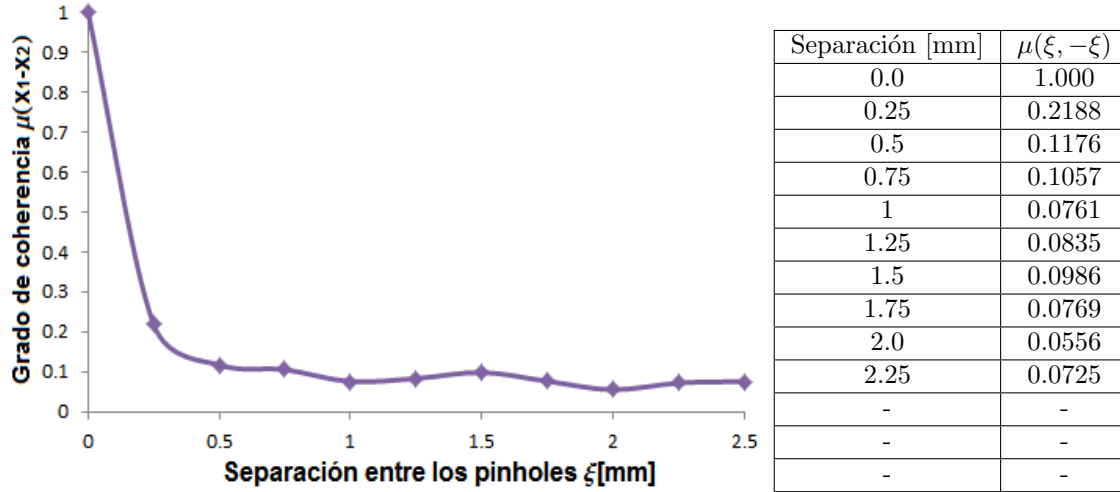


Figura 5.18: Grado de coherencia para la fuente secundaria utilizando una placa difusora de 30°.

En la Fig. (5.19) se hace una comparación del grado de coherencia para la fuente generada por las placas difusoras de 10° y 30° respectivamente.

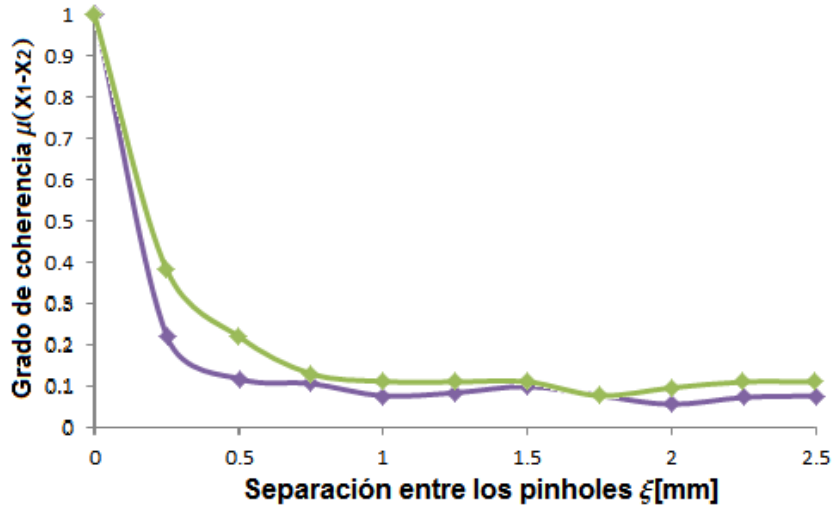


Figura 5.19: Grado de coherencia para la fuente secundaria.

De la Fig.(5.17) encontramos que el ancho de coherencia para una placa de 10° es  $\sigma_s = 0,5$ , mientras que de la Fig.(5.18) encontramos que el ancho de coherencia para una placa de 30° es  $\sigma_s = 0,5$ . Estos valores jugaran un rol importante ya que son indispensables para fabricar las transparencias  $t_{kl}$  para la medición de las componentes  $C_{kl}$  de la matriz  $\mathbf{C}$ .

### 5.5. Medición experimental de la matriz C

Para la medición de los coeficientes  $C_{kl}$  emplearemos el arreglo experimental mostrado en la Fig.(5.20).

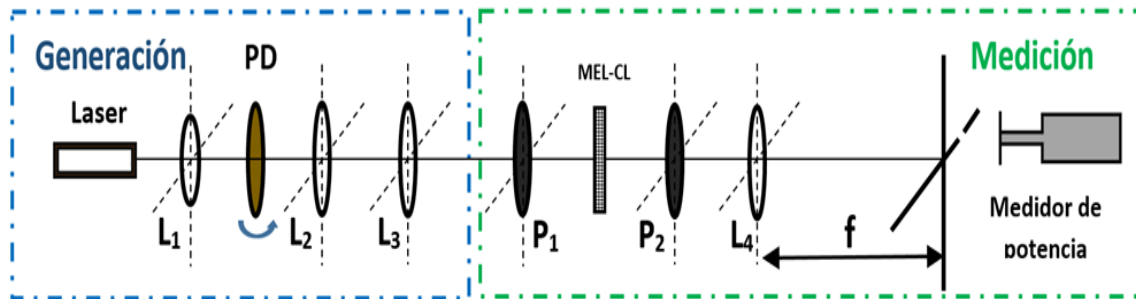


Figura 5.20: Sistema óptico experimental para la medición de los elementos de la matriz  $C$ .  $L_1, L_2, L_3, L_4$ : Lentes;  $P_1, P_2$ : Polarizadores; PD: Placa difusora; MEL-CL: Modulador espacial de luz de cristal líquido.

Como se puede observar el arreglo se divide en dos partes, en la primera generamos una fuente secundaria parcialmente coherente y parcialmente polarizada y en la segunda parte tenemos el sistema para medir de las componentes de la matriz  $C$  (ver Sección 5.3)

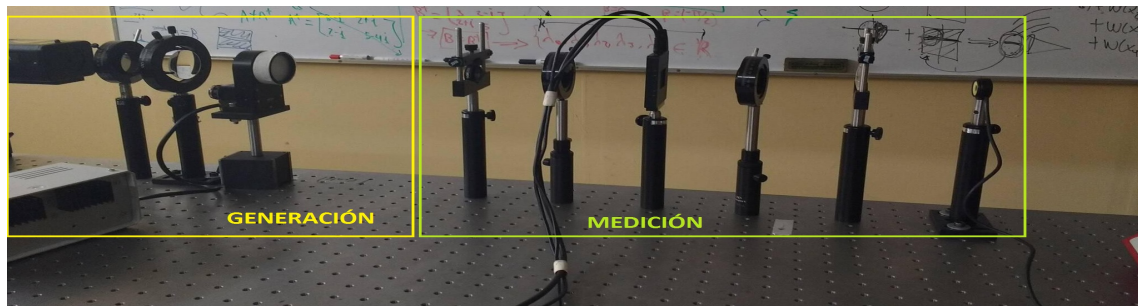


Figura 5.21: Arreglo experimental montado en el laboratorio para la medición de los elementos de la matriz  $C$ .

En la Fig. (5.21) Se muestra el arreglo experimental montado en el laboratorio el cual tiene como parte central el MEL-CL de la marca Holoeye 2002 colocado entre dos polarizadores. La orientación de los ejes principales de los polarizadores es ajustada de tal forma que el modulador trabaje en modo solo de Amplitud.

#### 5.5.1. Elección de la base de referencia

Como base de referencia emplearemos los polinomios de Hermite-Gauss, los cuales son eigenfunciones del modelo Shell- Gaussiano. Este modelo describe perfectamente una fuente electromagnética parcialmente coherente y parcialmente polarizada. La estructura matemática y su gráfica de los primeros 5 polinomios son mostrados en la Fig.(5.22)

**CAPÍTULO 5. EXPERIMENTOS Y RESULTADOS**  
**5.5. MEDICIÓN EXPERIMENTAL DE LA MATRIZ C**

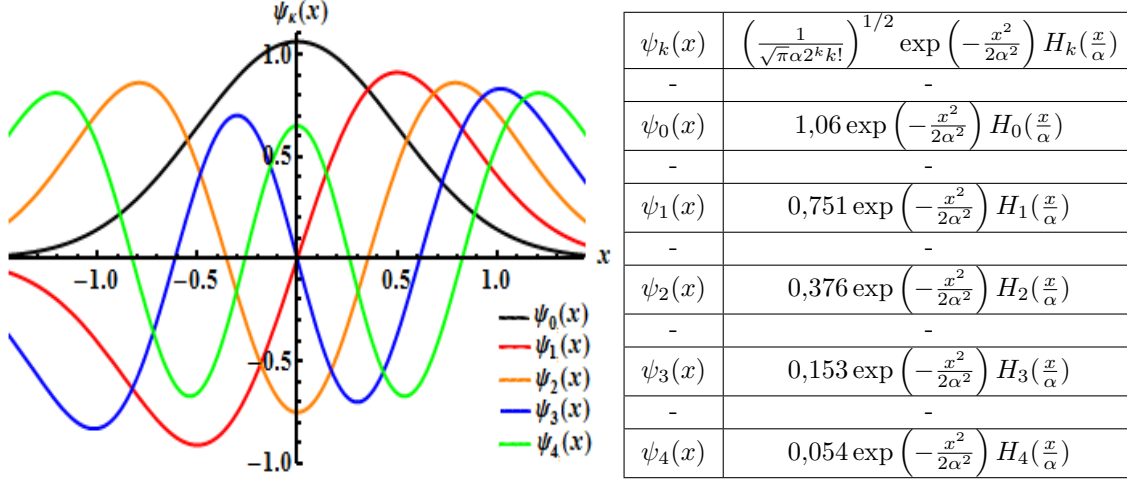


Figura 5.22: Primeros 5 polinomios Hermite-Gauss.

Los polinomios de Hermite-Gauss satisfacen la siguiente propiedad de ortogonalidad

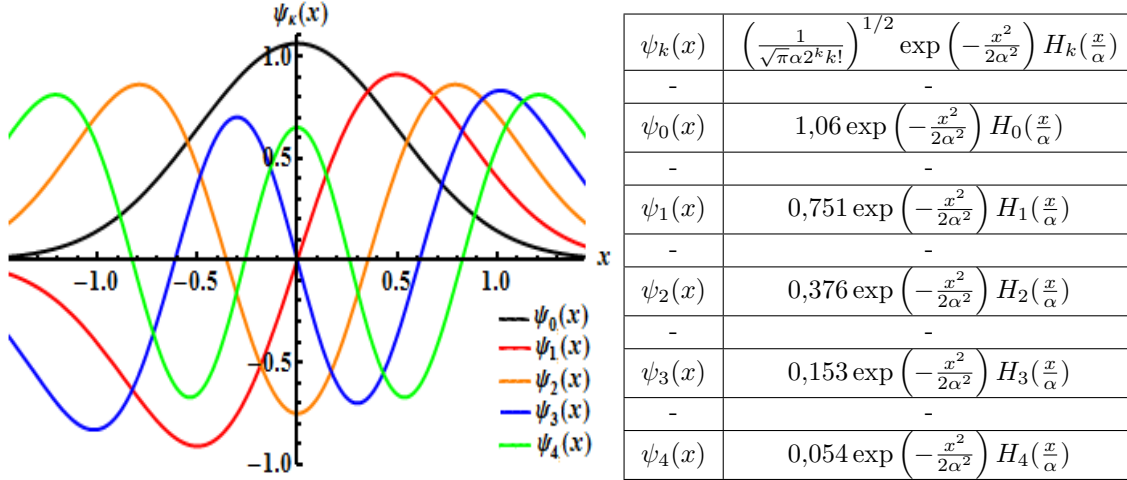


Figura 5.23: Primeros 5 polinomios Hermite-Gauss.

Los polinomios de Hermite-Gauss satisfacen la siguiente propiedad de ortogonalidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_m(x) H_l(x) dx = 2^m m! \sqrt{\pi} \delta_{ml}, \quad (5.5)$$

donde  $\alpha$  se puede entender como el factor de escala espacial de la base de referencia. Por esta razón, es natural elegir este parámetro partiendo de la anchura efectiva de la fuente secundaria empleada en los experimentos, es decir  $\alpha = \sigma_s$ . Entonces la base de referencia puede escribirse como

$$\psi_k(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_s 2^k k!}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_s^2}\right) H_k\left(\frac{x}{\sigma_s}\right), \quad (5.6)$$

donde  $\sigma_s = 0,5$  para una placa difusora de 10 grados y  $\sigma_s = 0,38$  para una placa difusora de 30 grados respectivamente. Es importante notar en este punto, que debido a que nuestra base de

**CAPÍTULO 5. EXPERIMENTOS Y RESULTADOS**  
5.5. MEDICIÓN EXPERIMENTAL DE LA MATRIZ C

---

referencia es una función real, entonces, la matriz  $\mathbf{C}$  definida por la Ec.(4.30) será una matriz real simétrica, por lo tanto la Ec.(4.38) será igual a cero.

**5.5.2. Medición de los coeficientes  $C_{kl}$**

Una vez elegida la base de referencia procedemos a la elaboración de las señales de control  $t_{kl}$  las cuales serán proyectadas en el MEL-CL del arreglo experimental mostrado en la Fig.(5.20). Por lo tanto, empleando la definición dada por la Ec.(4.46), nuestra señal de control tiene la forma

$$\begin{aligned} t_{kl}(x) = t_0 + 2 \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_s 2^k k!} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_s^2}\right) H_k\left(\frac{x}{\sigma_s}\right) \cos(2\pi p_0 x) \\ + 2 \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_s 2^l l!} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_s^2}\right) H_l\left(\frac{x}{\sigma_s}\right) \cos(2\pi p_0 x + \beta). \end{aligned} \quad (5.7)$$

**CAPÍTULO 5. EXPERIMENTOS Y RESULTADOS**  
**5.5. MEDICIÓN EXPERIMENTAL DE LA MATRIZ C**

Las señales de control que serán proyectadas en el MEL-CL son mostradas en la Fig.(5.24)

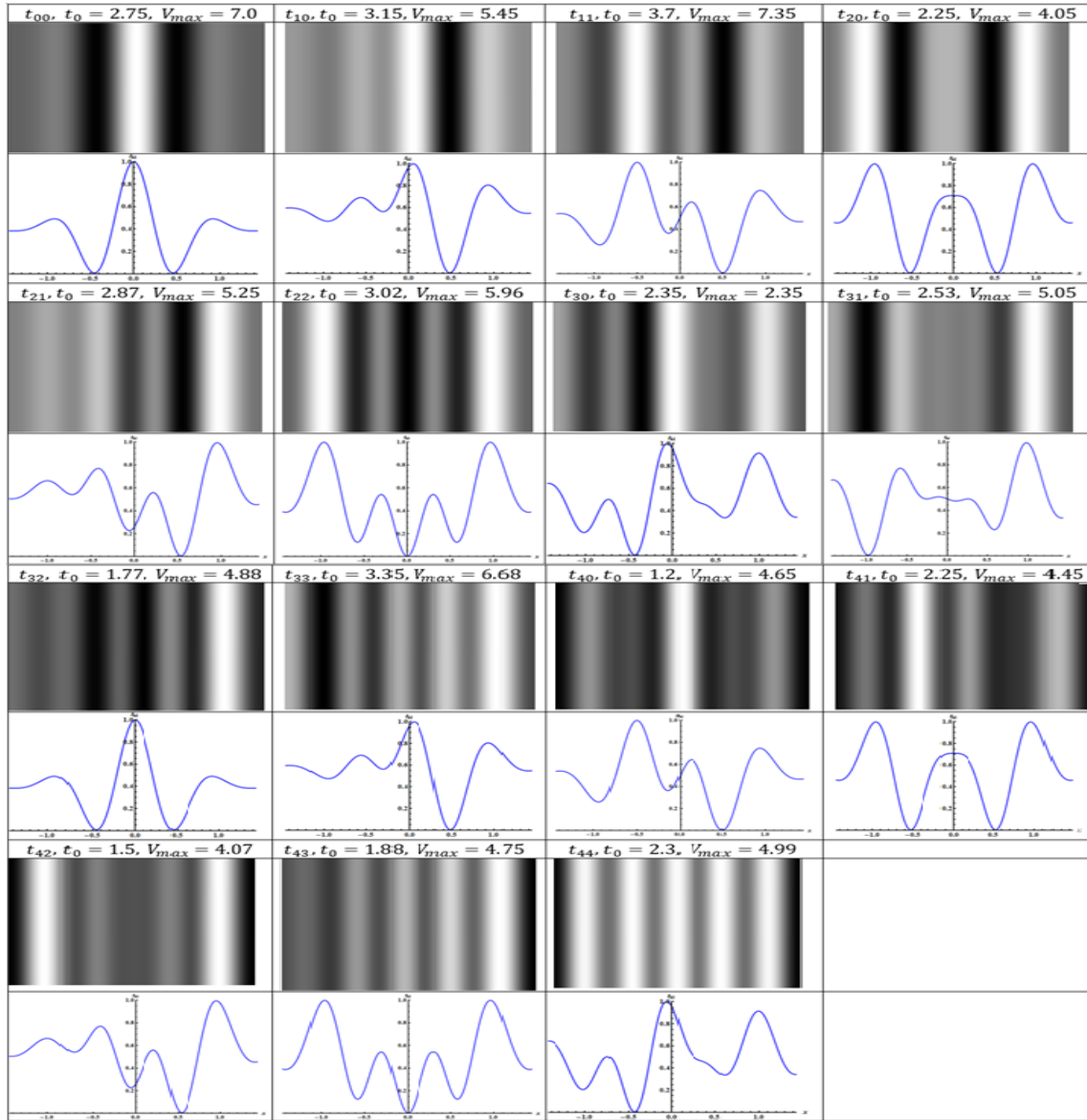


Figura 5.24: Señales de control que proyectara en el MEL-CL para medir los coeficientes  $C_{kl}$ . El comportamiento de  $t_{kl}(x)$  se muestra en el rango  $-1,5 \leq x \leq 1,5$

Para medir los coeficientes  $C_{ij}$  primeramente hacemos la correcta alineación de los polarizadores, de tal manera que el MEL-CL trabaje en modo solo de amplitud, posteriormente proyectamos las señales de control mostradas en la Fig.(5.23) y medimos las intensidades mediante el medidor de potencia. Las intensidades correspondientes a cada señal de control son mostradas en la Tabla 3.1

**CAPÍTULO 5. EXPERIMENTOS Y RESULTADOS**  
5.5. MEDICIÓN EXPERIMENTAL DE LA MATRIZ  $\mathbf{C}$

---

$I_{kl}$	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$
$k=0$	0.124	0.184	0.225	0.089	0.185
$k=1$	0.184	0.119	0.092	0.1	0.167
$k=2$	0.225	0.092	0.132	0.131	0.05
$k=3$	0.089	0.1	0.131	0.131	0.133
$k=4$	0.185	0.167	0.05	0.133	0.126

Tabla 5.1: Matriz de intensidades  $\mathbf{I}$ , para la placa difusora de 10 grados.

Empleando la definición dada por la Ec.(4.37) podemos encontrar de forma directa la matriz  $C_{kl}$ , la cual es mostrada en la Tabla 5.2

$C_{kl}$	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$
$k=0$	0.062	0.0616	0.0805	0.0126	0.0613
$k=1$	0.0616	0.119	0.0146	0.0188	0.0529
$k=2$	0.0805	0.0146	0.132	0.0326	0
$k=3$	0.0126	0.0188	0.0326	0.131	0.0344
$k=4$	0.0613	0.0529	0	0.0344	0.126

Tabla 5.2: Matriz  $\mathbf{C}$ , para la placa difusora de 10 grados.

Empleando el mismo procedimiento para una placa difusora de 30 grados, encontramos

$I_{kl}$	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$
$k=0$	0.156	0.412	0.678	0.354	0.107
$k=1$	0.412	0.420	0.752	0.528	0.197
$k=2$	0.678	0.752	0.924	0.219	0.715
$k=3$	0.354	0.528	0.219	0.508	0.185
$k=4$	0.107	0.197	0.715	0.185	0.064

Tabla 5.3: Matriz de intensidades  $I_{kl}$ , para la placa difusora de 30 grados.

donde haciendo nuevamente uso de la definición dada por la EC.(4.37) obtenemos Ahora que

$C_{kl}$	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$
$k=0$	0.039	0.134	0.204	0.094	0.034
$k=1$	0.134	0.105	0.208	0.148	0.038
$k=2$	0.204	0.208	0.231	0.219	0.234
$k=3$	0.094	0.148	0.219	0.127	0.028
$k=4$	0.034	0.038	0.234	0.028	0.016

Tabla 5.4: Matriz  $\mathbf{C}$ , para la placa difusora de 30 grados.

conocemos los valores numéricos es posible resolver el problema de valores propios y la reconstrucción modal.

## CAPÍTULO 5. EXPERIMENTOS Y RESULTADOS

### 5.6. CÁLCULO DE VALORES Y FUNCIONES PROPIOS DE LA MATRIZ $C$ Y LA RECONSTRUCCIÓN DE LA ESTRUCTURA MODAL DE LA FUENTE GENERADA

#### 5.6. Cálculo de valores y funciones propios de la matriz $C$ y la reconstrucción de la estructura modal de la fuente generada

El problema de valores propios dado por la Ec. (4.31) se puede calcular fácilmente mediante el uso del software Mathematica. Empleando primeramente este a la matriz mostrada en la Tabla 5.2, y encontramos que sus eigen-valores asociados son

$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
0.2638	0.1415	0.1174	0.0657	0.0185

Tabla 5.5: Eigen-valores correspondientes para matriz  $C$ , correspondiente a una placa difusora de  $10^\circ$  (Tabla 5.2)

Aplicando nuevamente el software encontramos que los eigen-valores correspondientes a la matriz correspondiente a una placa de 30 grados son los siguientes (Tabla 5.4)

$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
0.7141	0.20084	0.0817	0.0672	0.0098

Tabla 5.6: Eigen-valores correspondientes la matriz  $C$ , correspondiente a una placa difusora de  $30^\circ$  (Tabla 5.4)

Con todo lo anterior podemos calcular nuestra función  $W$  empleando la definición dada por la Ec.(2.36) y tomando en cuenta que  $x_1 = -\xi/2$ ,  $x_2 = \xi/2$  y  $\varphi_n(x) \approx \psi_n(x)$ . Por lo que empleando los valores dados por la Tabla 5.5, y las funciones dadas por la Ec.(4.40) podemos calcular la función de densidad espectral  $W(-\xi/2, \xi/2)$  correspondiente a una placa difusora de  $10^\circ$ , la cual es mostrada en la Fig.(5.24)

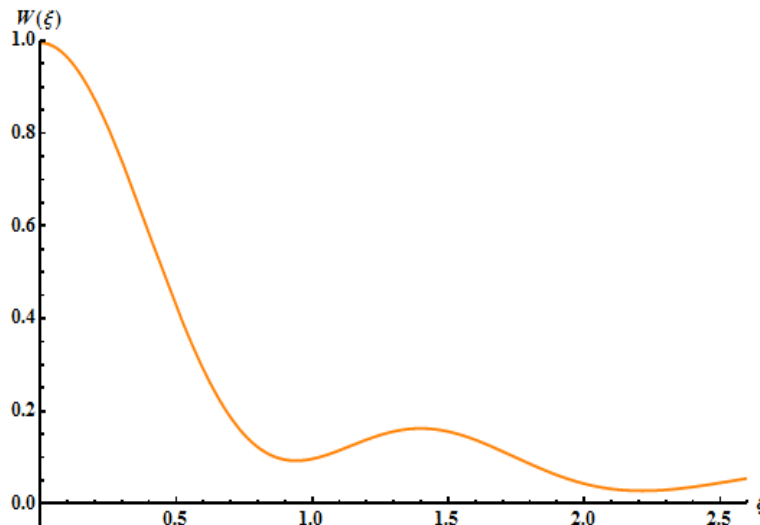


Figura 5.25:  $W(\xi)$  normalizada para una placa de 10 grados.

## CAPÍTULO 5. EXPERIMENTOS Y RESULTADOS

### 5.6. CÁLCULO DE VALORES Y FUNCIONES PROPIOS DE LA MATRIZ C Y LA RECONSTRUCCIÓN DE LA ESTRUCTURA MODAL DE LA FUENTE GENERADA

---

En la Fig.(5.25) se muestra la comparación de  $W$  medida empleando el experimento de Young modificado y los resultados obtenidos mediante el uso de nuestra técnica para una placa de  $10^\circ$

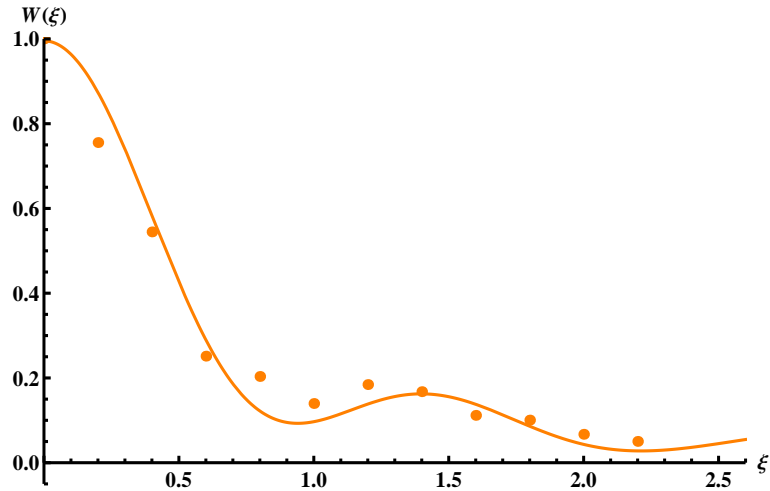


Figura 5.26: Comparación de resultados para una placa de  $10^\circ$ . Los puntos representan los resultados obtenidos mediante el experimento de Young modificado y las líneas continuas representan el resultado obtenido mediante nuestra técnica.

De igual manera encontramos la función de densidad espectral  $W(-\xi/2, \xi/2)$  correspondiente a una placa difusora de  $30^\circ$  grados, la cual es mostrada en la Fig.(5.26)

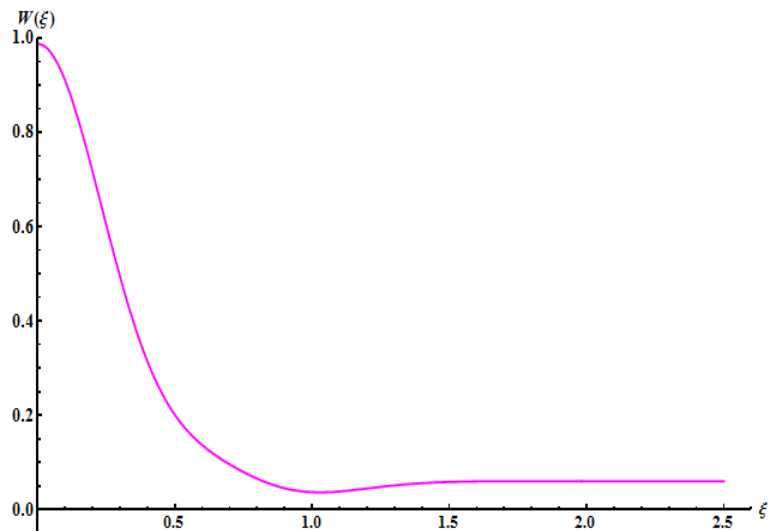


Figura 5.27:  $W(\xi)$  normalizada para una placa de  $30^\circ$  grados

En la Fig.(5.27) se muestra la comparación de  $W$  medida empleando el experimento de Young modificado y los resultados obtenidos mediante el uso de nuestra técnica para una placa de  $30^\circ$ .

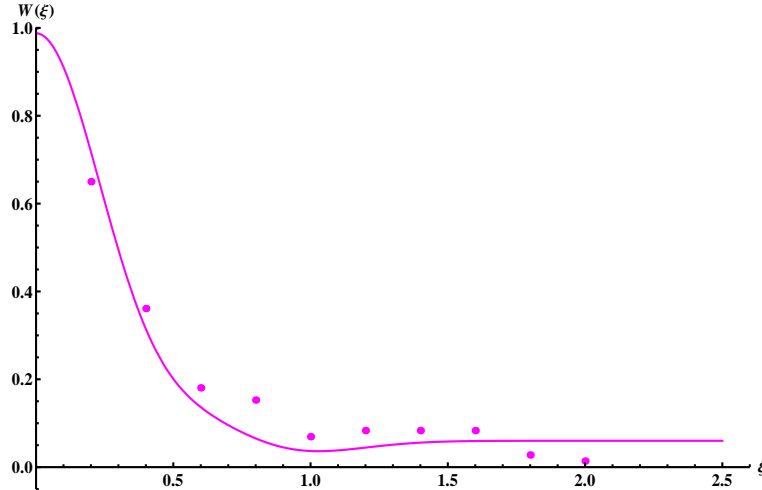


Figura 5.28: Comparación de resultados para una placa de  $30^\circ$ . Los puntos representan los resultados obtenidos mediante el experimento de Young modificado y las líneas continuas representan el resultado obtenido mediante nuestra técnica.

Notemos que el error cuadrático medio de nuestros resultados para las placas difusoras de  $10^\circ$  y  $30^\circ$  no es mayor al 5%, lo que puede considerarse como un resultado bastante bueno para un experimento físico real.

## 5.7. Conclusiones

En este capítulo primeramente se realizó la caracterización de la fuente primaria, la cual se pudo encontrar que es prácticamente coherente, ya que su grado de coherencia es de aproximadamente de 0.93 (ver figura 5.6). Posteriormente mediante el uso de placas difusoras se generó una fuente parcialmente coherente y parcialmente polarizada, la cual fue caracterizada empleando el interferómetro de Young modificado Fig.(5.9)-Fig.(5.19), lo cual sirvió para encontrar el ancho de coherencia de la fuente secundaria generada empleando placas de  $10^\circ$  y  $30^\circ$  de difusión siendo  $\sigma_s = 0,5$  y  $\sigma_s = 0,4$  respectivamente. Calculamos la función de densidad espectral  $W(\xi, -\xi)$  para la fuente secundaria generada por una placa difusora de  $10^\circ$  y  $30^\circ$  respectivamente empleando nuestra técnica propuesta, para lo cual fue necesario medir los coeficientes  $C_{ij}$  de la matriz  $\mathbf{C}$  y posteriormente resolver el problema de valores propios para conocer los respectivos  $\lambda_n$  y  $\varphi_n$ . Los principales resultados son mostrados en las Fig. (5.24)-Fig.(5.27)

## Capítulo 6

### Conclusiones generales

1. En este trabajo se propuso un nuevo método para determinar la estructura en modos coherentes de un campo electromagnético, la cual se basa en la medición de coherencia del campo en alguna base de referencia.
2. Se diseñaron los arreglos experimentales para la medición de los coeficientes  $C_{ij}$ , donde fue necesario emplear un MEL-CL que trabajara en modulación solo de amplitud.
3. Empleando el software Matlab, se diseñaron las señales de control que fueron proyectadas en en MEL-CL, siendo las más optimas las mostradas en la Fig.(5.24)
4. Se diseñaron los arreglos experimentales para la medición de la estructura modal y se aplicaron para la reconstrucción de un campo parcialmente coherente y polarizado generado en el laboratorio.
5. Se obtuvieron las correspondientes representaciones en modos coherentes de un par de fuentes secundarias generadas en el laboratorio utilizando placas difusoras de 10 y 30 grados respectivamente. Además se muestra gráficamente la comparación de la  $W(\xi)$  medida empleando el experimento de Young y empleando nuestra técnica propuesta Fig.(5.25) y Fig.(5.27).
6. Se participó en una estancia de investigación en el Instituto de Óptica de la Universidad de Rochester en donde se realizó un trabajo de investigación enfocado en técnicas de medición de coherencia que no incluyen interferometría, además se aplicaron estos métodos en la medición de los parámetros de Stokes generalizados (Anexo 4).
7. Participó de manera satisfactoria en el proyecto de investigación **OSA-EXC-13-G** apoyado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (**VIEP**).
8. Se participó en el proyecto apoyado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología con número de registro **165142**.

# Bibliografía

1. F. Gori, "Matrix treatment for partially polarized, partially coherent beams", *Opt. Lett.* **23**, 241- 243, (1998).
2. E. Wolf, Unified theory of coherence and polarization of random electromagnetic beams, *Phys. Lett. A* **312**, 263-267 (2003).
3. A.S. Ostrovsky, P. Martínez-Vara, M.Á. Olvera-Santamaría, and G. Martínez-Niconoff, "Vector coherence theory: An overview of basic concepts and definitions,in *Recent Research Developments in Optics*, Research Signpost, Kerala, India, ISBN: **978-81-308-0370-8**, pp. 113-132, 2009.
4. J. Tervo, T. Setälä, A. T. Friberg, "Degree of coherence for electromagnetic fields", *Opt. Express* **11**, 1137-1143 (2003).
5. J. Tervo, T. Setälä, A.T. Friberg, "Theory of partially coherent electromagnetic fields in the space-frequency domain", *J. Opt. Soc. Am. A* **21**, 2205-2215, 2004.
6. P. Réfrégier, F. Goudail, "Invariant degrees of coherence of partially polarized light", *Opt. Express* **13**, 6051-6060 (2005).
7. A. Luis, "Degree of coherence for vectorial electromagnetic fields as the distance between correlation matrices", *J. Opt. Soc. Am. A* **4**, 1063-1068 (2007).
8. S. G. Hanson, W. Wang, M. Jakobsen, M. Takeda, "Coherence and polarization of electromagnetic beams modulated by random phase screens and their changes through complex ABSD optical systems," *J. Opt. Soc. Am. A* **25**, 2338-2346 (2008).
9. O. Korotkova, B. G. Hoover, V. L. Gamiz, E. Wolf, "Coherence and polarization properties of far fields generated by quasi-homogeneous planar electromagnetic sources", *J. Opt. Soc. Am. A* **22**, 2547-2556 (2005).
10. M. Salem, E. Wolf, "Coherence-induced polarization changes light beams", *Opt. Lett.* **33**, 1180-1182 (2005).
11. E. Wolf, "Correlation-induced changes in the degree of polarization, the degree of coherence, and the spectrum of random electromagnetic beams on propagation", *Opt. Lett.* **28**, 1078-1079 (2003).
12. L. Mandel, E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, 1995.
13. A.S. Ostrovsky, *Coherent-Mode Representations in Optics*, SPIE Press, Bellingham, Washington USA, ISBN: **0-8194-6350-7**, 2006.

## CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES GENERALES

---

14. F. Gori, M. Santarsiero, R. Simon, G. Piquero, R. Borghi, G. Guatari, "Coherent-mode decomposition of partially polarized, partially coherent sources", *J. Opt. Soc. Am. A* **20**, 78-84 (2003).
15. K. Kim, E. Wolf, "A scalar-mode representation of stochastic, planar, electromagnetic sources", *Opt. Commun.* **261**, 19-22 (2005).
16. A.S. Ostrovsky, M.A. Olvera-Santamaría, C. Rickenstorff-Parrao, G. Martínez-Niconoff, V. Arrizon, "Two techniques for generating a secondary electromagnetic source with desired statistical properties", *Rev. Mex. Fís.* **55**, 153-155 (2009).
17. A.S. Ostrovsky, M.A. Olvera, C. Rickenstorff, G. Martínez-Niconoff, V. Arrizón, "Generation of a secondary electromagnetic source with desired statistical properties", *Opt. Commun.* **283**, 4490-4493 (2010).
18. A.S. Ostrovsky, G. Martínez-Niconoff, P. Martínez-Vara, M.A. Olvera-Santamaría, "The van Cittert-Zernike theorem for electromagnetic fields", *Opt. Express* **17**, 1746-1754 (2009).
19. G. Piquero, F. Gori, P. Romanini, M. Santarsiero, R. Borghi, A. Mondello, "Synthesis of partially polarized Gaussian Schell-model sources", *Opt. Commun.* **208**, 9-16 (2002).
20. T. Shirai, E. Wolf, "Coherence and polarization of electromagnetic beams modulated by random phase screen and their changes on propagation in free space", *J. Opt. Soc. Am. A* **21**, 1907-1916 (2004).
21. A.S. Ostrovsky, G. Martínez-Niconoff, V. Arrizon, P. Martínez-Vara, M.A. Olvera-Santamaría, C. Rickenstorff-Parrao, "Modulation of coherence and polarization using liquid crystal spatial light modulators", *Opt. Express* **17**, 5257-5264 (2009).
22. A. S. Ostrovsky, G. Rodríguez-Zurita, C. Meneses-Fabián, M. Á. Olvera-Santamaría, C. Rickenstorff-Parrao, "Experimental generating the partially coherent and partially polarized electromagnetic sources", *Opt. Express* **18**, 12864-12871 (2010).
23. A.S. Ostrovsky, G. Rodríguez, C. Meneses, M.A. Olvera, E. Juárez, "Simple technique for generating the partially coherent and partially polarized electromagnetic source", *J. of Physics: Conference Series*, **274**, 1-7 (2011).
24. E. Wolf, "New theory of partial coherence in the space-frequency domain. Part I: spectra and cross-spectra of steady-state sources", *J. Opt. Soc. Am. A* **72**, 343-351 (1982).
25. E. Wolf, "New theory of partial coherence in the space-frequency domain. Part II: Steady-state fields and higher-order correlations", *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 76-84 (1986).
26. H. Gamo Matrix Treatment of partial Coherence, *Progress in Optics III*, Chap. 3, E. Wolf, Ed., North-Holland, Amsterdam, pp. 187-332, 1964.
27. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 7th ed., Cambridge University Press, 1999.
28. M. J. Bastiaans, "New class of uncertainty relations for partially coherent light", *J. Opt. Soc. Am. A* **1**, 711-715 (1984)
29. L. Mandel, E. Wolf, *Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light*, Cambridge University Press, 2007.
30. E. Kreyszig, *Introductory Analysis with Applications*, Wiley, New York, 1978.
31. A.S. Ostrovsky, et al., "Generation of a secondary electromagnetic source with desired statistical properties", *Opt. Commun.* (2010), doi:10.1016/j.optcom.2010.04.080

## CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES GENERALES

---

32. A. Papoulis, *Systems and Transforms whit Applications in Optics*, McGraw-Hill, New York, 1968.
33. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, 2d ed. McGraw-Hill, New York, 1996.
34. B. J. Thomson, *Image dormation whit partially coherent light*, *Progress in Optics* , E. Wolf, Ed., North-Holland, Amsterdan, Vol. 7, pp. 191-202, 1969.
35. M. Schetzen, *The Volterra and Wiener Theories of Non-Linear Systems*, Wiley, New York 1980.
36. V. Volterra, *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations*, Dover, New York ,1959.
37. B. E. A. Saleh, *Optical bilinear transforms General properties*, *Opt. Acta*, Vol. 26, No. 6, pp. 777- 799, 1979.
38. J. W. Goodman, *Statistical Optics*, Wiley, New York, 1985.
39. . E. C. Kintner, *Method for calculation of partially coherent imagery*, *Appl. Opt.*, Vol. 17, No. 17, pp. 2747-2753 ,1978.
40. S. Subramanian, *Rapid calculation of defocused partially coherent images*, *Appl. Opt.*, Vol. 20, No. 10, pp. 1854-1857, 1981.
41. B. E. A. Saleh and M. Rabbani, *Simulation of partially coherent imagery in the space and frequency domains by modal expansions*, *Appl. Opt.*, Vol. 21, No. 15, pp. 2770-2777, 1982.
42. R. Martínez-Herrero and P. M. Mejías, *Relation between the expansions of the correlation function at the object and image planes for partially coherent illumination*, *Opt. Commun.*, Vol. 37, No. 4, pp. 234-238, 1981.
43. J. Duvernoy, *Volterra-Wiener partially coherent imaging systems: Threedimensional objects and generalized G functionals*, *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 7, No. 5, pp. 809-819, 1990.
44. J. van der Gracht, *Simulation of partially coherent imaging by outer-product expansion*, *Appl. Opt.*, Vol. 33, No. 17, pp. 3725-3731, 1994.
45. S. Withington, M. P. Hobson, and R. H. Berry, *Representing the behavior of partially coherent optical systems by using overcomplete basis sets*, *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 21, No. 2, pp. 207-217, 2004.
46. A. S. Ostrovsky, O. Ramos-Romero, and M. V. Rodríguez-Solís, *Coherent mode representation of partially coherent imagery*, *Opt. Rev.*, Vol. 3, No. 6B, pp. 492-496, 1996.
47. A. S. Ostrovsky, O. Ramos-Romero, and G. Martínez-Niconoff, *Fast algorithm for bilinear transforms in optics*, *Proc. SPIE*, Vol. 4418, pp. 88-95, 2000.
48. A. S. Ostrovsky, G. Martínez-Niconoff, and J. C. Ramírez-San-Juan, *On the modal representation of partially coherent imagery*, *Proc. SPIE*, Vol. 4419, pp. 431-434, 2001.
49. A. S. Ostrovsky, O. Ramos-Romero, G. Martínez-Niconoff, and J. C. Ramírez- San-Juan, *On the modal representation of partially coherent imagery*, *Rev. Mex. Fís.*, Vol. 47, No. 5, pp. 404-407, 2001.
50. A. S. Ostrovsky, O. Ramos-Romero, G. Martínez-Niconoff, and J. C. Ramírez- San-Juan, *Modal theory of partially coherent imagery*, *Proc. SPIE*, Vol. 4436, pp. 109-115, 2001.

## CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES GENERALES

---

51. A. S. Ostrovsky, O. Ramos-Romero, and G. Martínez-Niconoff, Fast algorithm for bilinear transforms in optics, *Rev. Mex. Fís.*, Vol. 48, No. 3, pp. 186-191, 2002.
52. A. S. Ostrovsky, O. Ramos-Romero, G. Martínez-Niconoff, and J. C. Ramírez- San-Juan, Fast algorithm for computer simulation of optical systems with partially coherent illumination, *WSEAS Trans. on Syst.*, Vol. 1, No. 1, pp. 149-153, 2002.
53. G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, New York, USA, pp. 871-876, 2001
54. F. Ferreira and M. Belsley, Holographic spatial coherence analysis of a laser, *Opt. Lett.* 38(21),4350-4353, 2013.
55. A. Starikov and E. Wolf, Coherent-mode representation of Gaussian Schell model source and of their radiation field,, *J. Opt. Soc. Am.*, Vol. 72, No. 7, pp. 923-928, 1982.

# Anexos

## Publicaciones del autor

### Articulos en revistas indexadas

1. Construction of the Coherent Mode Representation of an Optical Planar Source from the Results of Young Experiment, Journal of Physical Science and Application 4 (3) (2014). (Editorial David Publishing).
2. Experimental determining the coherent-mode structure of vector electromagnetic field through its decomposition in reference basis ,Optics Express, Vol. 22, Issue 21, pp. 26232-26239 (2014)).

### Extensos

1. orthogonal decomposition of a optical random field using a spatial modulator of light of liquid crystal con ISBN: 978-959-7231-00-4.

### Ponencias en congresos

#### Congresos Nacionales:

1. LVII Congreso Nacional de Física, el cual se realizó del 5 al 10 de octubre de 2014 en Mazatlán, Sinaloa. Con el trabajo titulado Determinación experimental de la estructura modal de un campo electromagnético vectorial a través de su descomposición en una base de referenci.
2. LVIII Congreso Nacional de Física, el cual se realizó del 4 al 9 de Octubre de 2015 en Merida, Yucatan. Con el trabajo titulado Modulación del grado de coherencia y grado de polarización de un campo electromagnético utilizando una pantalla de cristal líquido de reflexión.

#### Congresos Internacionales:

1. Latin America Optics and Photonics Conference (LAOP), el cual se realizó del 16 al 21 November 2014 en la ciudad de Cancun, Mexico . Con el trabajo titulado ".Experimental determining the coherent-mode structure of vector electromagnetic field through its decomposition in reference".
2. Mexican Optics and Photonics Meeting (MOPM),el cual se realizó del 9 al 11 de Septiembre 2015 en la ciudad de León Guanajuato, Mexico . Con el trabajo titulado ".Experimental determining the coherent-mode structure of vector electromagnetic field through its decomposition in reference".

## CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES GENERALES

---

3. VIII Taller Internacional TECNOLASER 2016 el cual se realizó del 29 de Marzo al 1 de Abril del 2015 en la ciudad de la Habana, Cuba. Con el trabajo titulado "Orthogonal decomposition of a optical random field using a spatial modulator of light of liquid crystal".
4. Frontier in optics, el cual se realizó del 17 al 21 de Octubre de 2016 en la ciudad de Rochester, NY. USA.

# Experimental determining the coherent-mode structure of vector electromagnetic field through its decomposition in reference basis

Esteban Vélez-Juárez,<sup>1</sup> Gabriel Martínez-Niconoff,<sup>2</sup> Javier Muñoz-López,<sup>2</sup>  
and Andrey S. Ostrovsky<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla 72000, Mexico

<sup>2</sup>Área de Óptica, Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Puebla 72000, Mexico

\*andreyo@fcfm.buap.mx

**Abstract:** A technique for experimental determining the coherent-mode structure of electromagnetic field is proposed. This technique is based on the coherence measurements of the field in some reference basis and represents a nontrivial vector generalization of the dual-mode field correlation method recently reported by F. Ferreira and M. Belsley [Opt. Lett. **38**(21), 4350 (2013)]. The justifiability and efficiency of the proposed technique is illustrated by an example of determining the coherent-mode structure of some specially generated and experimentally characterized secondary electromagnetic source.

©2014 Optical Society of America

**OCIS codes:** (030.1640) Coherence; (030.4070) Modes; (050.1970) Diffractive optics; (230.6120) Spatial light modulators.

---

## References and links

1. H. Gamo, "Matrix treatment of partial coherence," in *Progress in Optics III*, E. Wolf, ed. (North-Holland, 1964).
2. E. Wolf, "New theory of partial coherence in the space-frequency domain. Part 1: Spectra and cross spectra of steady-state source," J. Opt. Soc. Am. A **72**(3), 343–351 (1982).
3. L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University, 1995).
4. E. Wolf, *Introduction to the Coherence and Polarization of Light* (Cambridge University, 2007).
5. A. S. Ostrovsky, *Coherent-Mode Representations in Optics* (SPIE, 2006).
6. F. Gori, M. Santarsiero, R. Simon, G. Piquero, R. Borghi, and G. Guattari, "Coherent-mode decomposition of partially polarized, partially coherent sources," J. Opt. Soc. Am. A **20**(1), 78–84 (2003).
7. J. Tervo, T. Setälä, and A. T. Friberg, "Theory of partially coherent electromagnetic fields in the space-frequency domain," J. Opt. Soc. Am. A **21**(11), 2205–2215 (2004).
8. K. Kim and E. Wolf, "A scalar-mode representation of stochastic, planar, electromagnetic sources," Opt. Commun. **261**(1), 19–22 (2005).
9. F. Gori, "Matrix treatment for partially polarized, partially coherent beams," Opt. Lett. **23**(4), 241–243 (1998).
10. J. Tervo, T. Setälä, and A. T. Friberg, "Degree of coherence for electromagnetic fields," Opt. Express **11**(10), 1137–1143 (2003).
11. F. Ferreira and M. Belsley, "Holographic spatial coherence analysis of a laser," Opt. Lett. **38**(21), 4350–4353 (2013).
12. A. Starikov, "Effective number of degrees of freedom of partially coherent source," J. Opt. Soc. Am. A **72**(11), 1538–1544 (1982).
13. A. S. Ostrovsky, G. Rodríguez-Zurita, C. Meneses-Fabián, M. Á. Olvera-Santamaría, and C. Rickenstorff-Parrao, "Experimental generating the partially coherent and partially polarized electromagnetic source," Opt. Express **18**(12), 12864–12871 (2010).
14. C. Rickenstorff and A. S. Ostrovsky, "Measurement of the amplitude and phase modulation of a liquid crystal spatial light modulator," Superficies Vacío **23**(S), 36–39 (2009).

---

## 1. Introduction

The coherent-mode representation of an optical field broached the first time by Gamo [1] and later on developed by Wolf [2–4] is an essential tool in describing the processes and systems in optics [5]. Not so long ago the theory of coherent-mode representation, originally developed for scalar optical fields, has been generalized to the case of vector electromagnetic fields [6–8]. This representation is defined through the solution of the Fredholm integral equation with a kernel taken as the cross-spectral density matrix of the field. However, in

practice the cross-spectral density matrix of the field as a rule is unknown *a priori*. In theory the cross-spectral density matrix of the field can be measured with four special Young's interference experiment [9,10], but in practice such a measurement is unfeasible in view of enormous volume of data to be processed.

Recently a new promising approach to the problem of experimental determining the coherent-mode structure of a scalar optical field has been proposed by F. Ferreira and M. Belsley [11]. This approach is based on the decomposition of a scalar field in some subsidiary orthogonal basis, which allows considerable simplification of the coherence measurements process. Here we propose the generalization of this approach to the case of a vector electromagnetic field. The justifiability and efficiency of the proposed technique is illustrated by an example of determining the coherent-mode structure of some specially generated and experimentally characterized secondary electromagnetic source.

## 2. Coherent-mode structure of electromagnetic field

We start recalling the basic concepts of the theory of partially coherent electromagnetic fields in the space-frequency domain [7]. According to this theory the second-order statistical properties of a stochastic stationary electromagnetic field occupying some finite domain  $D$  in some plane normal to the direction of propagation and at some frequency  $\nu$  may be completely characterized by the so-called cross-spectral density matrix (for brevity we omit the explicit dependence of the considered quantities on  $\nu$ )

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} W_{xx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & W_{xy}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ W_{yx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & W_{yy}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

where

$$W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle E_i^*(\mathbf{x}_1) E_j(\mathbf{x}_2) \rangle, \quad (i, j = x, y), \quad (2)$$

with  $E_i$  and  $E_j$  being the orthogonal components of the electric field vector  $\mathbf{E}$  at two points  $\mathbf{x}_1$  and  $\mathbf{x}_2$ , asterisk denoting the complex conjugate, and the angle brackets denoting the average over the statistical ensemble. Furthermore, the correlation properties of a partially coherent and partially polarized electromagnetic field may be characterized quantitatively using the degree of coherence and degree of polarization defined by the formulas, respectively,

$$\eta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \left( \frac{\text{Tr}[\mathbf{W}^\dagger(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)]}{\text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) \text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2)} \right)^{1/2}, \quad (3)$$

$$P(\mathbf{x}) = \left( 1 - \frac{4 \text{Det} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{[\text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x})]^2} \right)^{1/2}, \quad (4)$$

where Tr stands for the trace, Det denotes the determinant of matrix, and the dagger denotes the Hermitian conjugation. As has been shown in [7], under very general conditions the cross-spectral density matrix  $\mathbf{W}$  may be represented in the form of series, i.e.,

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_n \lambda_n \mathbf{W}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (5)$$

where  $\mathbf{W}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  is the  $2 \times 2$  matrix with elements

$$W_{ij;n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \varphi_{i;n}^*(\mathbf{x}_1) \varphi_{j;n}(\mathbf{x}_2). \quad (6)$$

In Eq. (5)  $\lambda_n$  and  $\varphi_n^{(i)}(\mathbf{x})$  are the eigenvalues and the eigenfunctions of two coupled integral equations

$$\sum_j \int_D W_{ij;n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \varphi_{j;n}(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 = \lambda_n \varphi_{i;n}(\mathbf{x}_2). \quad (7)$$

The eigenvalues are real and nonnegative, and the eigenfunctions satisfy the orthonormality condition

$$\int_D \varphi_{i;n}^*(\mathbf{x}) \varphi_{j;n}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{nm}, \quad (8)$$

where  $\delta_{nm}$  is the Kronecker symbol. Each matrix  $\mathbf{W}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  in Eq. (5) can be associated with an elementary mode of the field which is completely coherent ( $\eta_n = 1$ ) and completely polarized ( $P_n = 1$ ). Therefore the set of  $\lambda_n$  and  $\varphi_{i;n}(\mathbf{x})$  is referred to as the coherent-mode structure of the field.

### 3. Decomposition of the coherent-mode structure in reference basis

Now, adopting the main idea of [11] originally formulated for a scalar field, we will show that the coherent-mode structure of a vector electromagnetic field may be defined in a more practical way. To do this, we assume that the realizations of each orthogonal component  $E_i$  of the electric field vector can be expanded in some orthogonal basis  $\{\psi_k(\mathbf{x})\}$ , which we will refer to the reference basis, as follows:

$$E_i(\mathbf{x}) = \sum_k a_{i;k} \psi_k(\mathbf{x}), \quad (9)$$

$$\int_D \psi_k^*(\mathbf{x}) \psi_l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{kl}, \quad (10)$$

$$a_{i;k} = \int_D E_i(\mathbf{x}) \psi_k^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (11)$$

Substituting for  $E_i$  from Eq. (9) into Eq. (2), we obtain

$$W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_k \sum_l c_{ij;kl} \psi_k^*(\mathbf{x}_1) \psi_l(\mathbf{x}_2), \quad (12)$$

where

$$c_{ij;kl} = \langle a_{i;k}^* a_{j;l} \rangle. \quad (13)$$

Substituting from Eq. (12) into Eq. (7), we find

$$\sum_j \sum_k \sum_l c_{ij;kl} b_{j;n;k} \psi_l(\mathbf{x}) = \lambda_n \varphi_{i;n}(\mathbf{x}), \quad (14)$$

where

$$b_{j;n;k} = \int_D \varphi_{j;n}(\mathbf{x}) \psi_k^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (15)$$

Finally, multiplying both sides of Eq. (14) by  $\psi_s^*(\mathbf{x})$  and integrating the result over  $\mathbf{x}$  with due regard for the orthogonality relation (10), we obtain the system of algebraic equations

$$\sum_j \sum_k c_{ij;kl} b_{j;n;k} = \lambda_n b_{i;n;l}. \quad (16)$$

This system can be written in matrix form as follows:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{xx} & \mathbf{C}_{xy} \\ \mathbf{C}_{xy}^\dagger & \mathbf{C}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{x;n} \\ \mathbf{B}_{y;n} \end{bmatrix} = \lambda_n \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{x;n} \\ \mathbf{B}_{y;n} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

where  $\mathbf{C}_{ij}$  is the square matrix with elements given by Eq. (13) and  $\mathbf{B}_{i;n}$  is the column matrix with elements given by Eq. (15). The eigenvalues  $\lambda_n$  can be found by solving the characteristic equation

$$\text{Det} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{xx} & \mathbf{C}_{xy} \\ \mathbf{C}_{xy}^\dagger & \mathbf{C}_{yy} \end{bmatrix} - \lambda_n \mathbf{I} \right) = 0. \quad (18)$$

By virtue of definition (13) the matrix  $\mathbf{C}$  composed of sub-matrices  $\mathbf{C}_{ij}$  is Hermitian ( $\mathbf{C}^\dagger = \mathbf{C}$ ), assuring that all eigenvalues will be real as stated in the previous section. Once the eigenvalues  $\lambda_n$  have been found, one can calculate the coefficients  $b_{i;n;k}$  solving the corresponding system given by Eq. (17). Then, the unknown modal functions  $\varphi_{i;n}(\mathbf{x})$  can be determined in form of the expansions

$$\varphi_{i;n}(\mathbf{x}) = \sum_k b_{i;n;k} \psi_k(\mathbf{x}). \quad (19)$$

It must be noted that in practice one needs truncating the complete reference basis by finite number  $K$  of functions  $\psi_k(\mathbf{x})$ , which depends on the field complexity and the degree of mismatch between the reference basis and actual modal basis of the field [11]. In fact, the number  $K$  is limited by the admissible complexity of field correlation measurements (see next section) and cannot exceed a few tens. On the other hand,  $K$  determines the number of sought-for coherent modes  $\varphi_n(\mathbf{x})$ . As well known [12], the effective number of coherent modes depends on the degree of coherence of the field and can take a very great value for rather incoherent field. Thus, the proposed technique may be effectively used only for fairly coherent fields. At first sight this circumstance restricts seriously our technique in its possible applications. However, we remark that a field with a low enough degree of coherence frequently can be considered approximately as completely incoherent, when the concept of the coherent-mode structure and, hence, the proposed technique lose in general their practical sense.

#### 4. Measurement of matrix $\mathbf{C}$

To solve Eq. (17), the coefficients  $c_{ij,kl}$  must be known. Below we show that these coefficients can be measured by means of the modified Mach-Zehnder interferometer sketched schematically in Fig. 1.

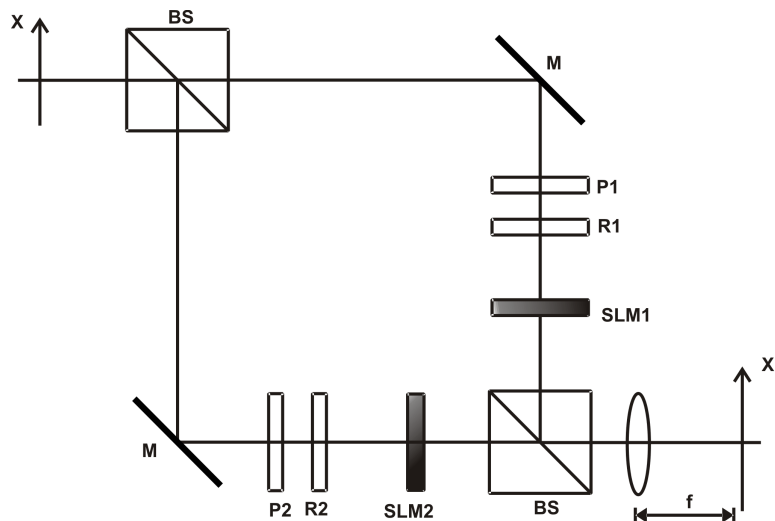


Fig. 1. Optical system for measuring coefficients  $c_{ij,kl}$ : BS, beam splitter; M, mirror; P, polarizer; R, polarization rotator; SLM, spatial light modulator; L, lens.

Let us consider that the electromagnetic field at the input of interferometer is characterized by the electric field vector  $\mathbf{E}$ , and let polarizers P1 and P2 be chosen to transmit only one orthogonal component  $E_x$  or  $E_y$ . The polarization rotators R1 and R2 serve to align the polarization planes of the selected orthogonal components allowing their posterior interference. The spatial light modulators SLM1 and SLM2 modify independently the amplitudes of selected components. The lens L projects the Fourier transform of the incident field onto its back focal plane.

Let the amplitude transmittance of each spatial light modulator be described by

$$t_k(\mathbf{x}) = t_0 + 2|\psi_k(\mathbf{x})| \cos[\text{Arg}(\psi_k(\mathbf{x})) + 2\pi x p_0 + \beta_k], \quad (20)$$

where  $t_0$  is a constant chosen to provide the non-negativity of  $t_k(\mathbf{x})$ , and  $p_0$  and  $\beta_k$  are the constants whose meaning will be defined below. The amplitude of the field in the back focal plane of lens L is given by

$$U_{ij;kl}(\mathbf{x}') = \int_D [E_i(\mathbf{x})t_k(\mathbf{x}) + E_j(\mathbf{x})t_l(\mathbf{x})] \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda f}\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}\right) d\mathbf{x}, \quad (21)$$

where  $\lambda$  is the wavelength of illumination and  $f$  is the lens focal distance. Then, substituting from Eq. (20) into Eq. (21) with due regard of notation (11), one finds that the field amplitude at the specific point  $\mathbf{x}'_0 = (\lambda f p_0, 0)$  is as follows:

$$U_{ij;kl} = a_{i;k} \exp(-i\beta_k) + a_{j;l} \exp(-i\beta_l). \quad (22)$$

Thus, the average intensity of the field at this point with due regard of notation (13) appears to be

$$I_{ij;kl}(\beta_{kl}) = \langle |U_{ij;kl}|^2 \rangle = c_{ii;kk} + c_{jj;ll} + c_{ij;kl} \exp(i\beta_{kl}) + c_{ij;kl}^* \exp(-i\beta_{kl}), \quad (23)$$

where  $\beta_{kl} = \beta_k - \beta_l$ . It can be readily shown that, measuring the intensity given by Eq. (23) for two particular values  $\beta_{kl} = 0$  and  $\beta_{kl} = -\pi/2$ , one can find the real and imaginary parts of  $c_{ij;kl}$  as follows:

$$\text{Re}(c_{ij;kl}) = \frac{1}{2} I_{ij;kl}(0) - \frac{1}{8} I_{ii;kk}(0) - \frac{1}{8} I_{jj;ll}(0), \quad (24)$$

$$\text{Im}(c_{ij;kl}) = \frac{1}{2} I_{ij;kl}(-\pi/2) - \frac{1}{8} I_{ii;kk}(0) - \frac{1}{8} I_{jj;ll}(0). \quad (25)$$

Taking into account the Hermitian symmetry of matrices  $\mathbf{C}_{ij}$  and Eqs. (24) and (25), it can be easily found that the number of needed measurements is equal to  $2K(2K+1)$ .

## 5. Experiments and results

To illustrate the justifiability and efficiency of the proposed technique, we determined the coherent-mode structure of some electromagnetic source whose cross-spectral density matrix can be measured directly in experiment and hence be known *a priori*. Such a source has been generated by means of partial destructing the coherence of linearly polarized laser radiation using a rather simple technique reported by us recently in [13] and sketched in Fig. 2.

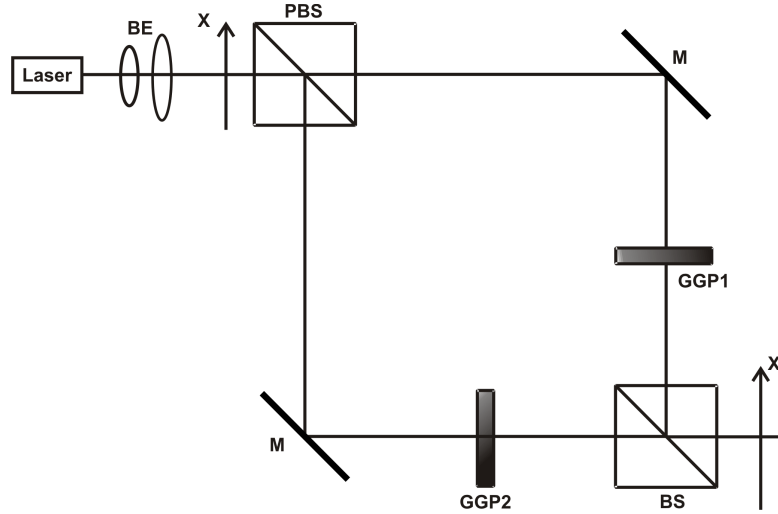


Fig. 2. Schematic illustration of the technique for generating the partially coherent and partially polarized electromagnetic source: BE, beam expander; BS, beam splitter; PBS, polarizing beam splitter; M, mirror; GGP, rotating ground glass plate.

The complex amplitude transmittance of each rotating ground glass plate is assumed being described by the function

$$t_{x(y)}(\mathbf{x}) = \exp[i\phi_{x(y)}(\mathbf{x})], \quad (26)$$

where  $\phi_x(\mathbf{x})$  and  $\phi_y(\mathbf{x})$  are the real random processes which obey Gaussian statistics with zero mean and second-order correlation given by the expressions

$$\langle \phi_{x(y)}(\mathbf{x}_1)\phi_{x(y)}(\mathbf{x}_2) \rangle = \sigma^2 \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2}{2\gamma_{x(y)}^2}\right), \quad (27)$$

$$\langle \phi_x(\mathbf{x}_1)\phi_y(\mathbf{x}_2) \rangle = 0, \quad (28)$$

$$\sigma = \sqrt{|\phi_{x(y)}(\mathbf{x})|^2}. \quad (29)$$

Then, considering that the polarization plane of the primary source radiation makes an angle of  $45^\circ$  with  $x$  direction, the cross-spectral density matrix of generated secondary source can be well approximated as follows (see [13]):

$$\mathbf{W}^{SS}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \approx \frac{S_0}{2} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2}{4\alpha^2}\right) \begin{bmatrix} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2}{2(\gamma_x / \sigma)^2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2}{2(\gamma_y / \sigma)^2}\right) \end{bmatrix}, \quad (30)$$

where  $S_0$  is the spectral density (intensity) at the origin of primary source and  $\alpha$  is the effective (rms) size of this source. It must be noted that Eq. (30) describes the so-called Gaussian Schell-model source, whose coherent-mode structure is well known [3,4]. We generated this source using a He-Ne laser ( $\lambda = 633\text{nm}$ ) as a primary source and a pair of ground glass plates with diffusion angles of  $10^\circ$  and  $30^\circ$ , considering the

parameters  $\alpha$  and  $\gamma_{x(y)}$  to be unknown. The elements of matrix  $\mathbf{W}^{\text{SS}}$  for different pairs of points  $(x_1 = -\xi/2, y_1 = 0)$  and  $(x_2 = \xi/2, y_2 = 0)$  were measured in the modified Young's experiment sketched in Fig. 3 (see [13]). The obtained measurement data were fitted by the theoretical curve in accordance with Eq. (30).

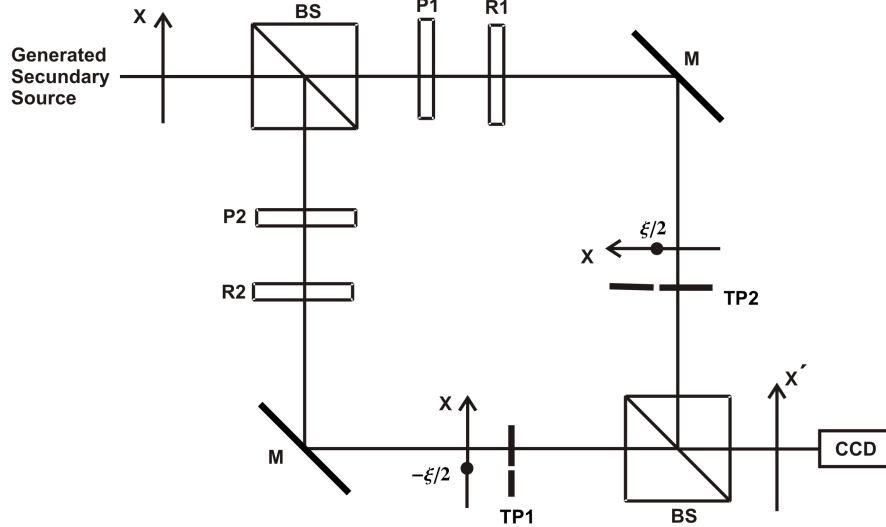


Fig. 3. Schematic illustration of modified Young experiment for measuring the cross-spectral density matrix of generated secondary source: BS, beam splitter; M, mirror; TP, translating pinhole; P, polarizer; R, polarization rotator. (The purpose of P and R is just the same as in technique sketched in Fig. 1.)

Further, employing the technique described in the previous section, we measured the coefficients  $c_{ij;kl}$  for the generated source. When doing this, as the reference basis we chose the set of orthonormal Hermite-Gaussian functions

$$\psi_k(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha^2 k!}} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) H_k\left(\frac{x}{\alpha}\right), \quad (31)$$

which are the actual coherent modes of a 1-D Gaussian Schell-model source [3,4]. To simplify our experiment, we truncated the reference basis by  $K = 5$  terms. To encode the reference basis functions in accordance with Eq. (20), we employed two identical computer-controlled liquid-crystal spatial light modulators LC2002 from HoloEye Photonics AG, providing the amplitude-only operating mode with appropriate adjustment of polarization axes and special gamma-correction of the control signal [14]. The control video signals were generated in PC using Matlab software routines and then displayed by turns onto the liquid-crystal screen with accuracy of 256 gray levels and resolution  $800 \times 600$  pixels. To provide the reliability of measurements, we undertook a special preliminary joint calibration of the amplitude transmittances in both arms of the interferometer (Fig. 1). For this purpose we made efforts to attain the minimum level ( $\approx 0$ ) of the signal registered at the output of optical system applying to the spatial light modulators two orthogonal control signals and illuminating them with the same completely coherent uniform field.

The realized measurements showed that the coefficients  $c_{ij;kl}$  with  $i \neq j$  were almost zero while the coefficients  $c_{ij;kl}$  with  $i = j$  had non-zero real values, a fact that could be expected due to the nature of theoretical model given by Eq. (30). This circumstance allowed us to replace the eigenvalue problem presented by Eq. (18) by two independent eigenvalues

problems for sub-matrices  $C_{xx}$  and  $C_{yy}$ . To solve these problems, we used standard Matlab program. Once the eigenvalues have been found we computed the eigenfunctions  $\varphi_{i,n}(x)$  in accordance with Eq. (19) and then the cross-spectral densities  $W_{ii}(x_1, x_2)$  in accordance with Eq. (5). The results of computation are presented in Fig. 4 by solid curves. For comparison the results of direct measurements are shown by dotted curves. A slight mismatch of these curves (less than 5%) is due to an inevitable measurement error.

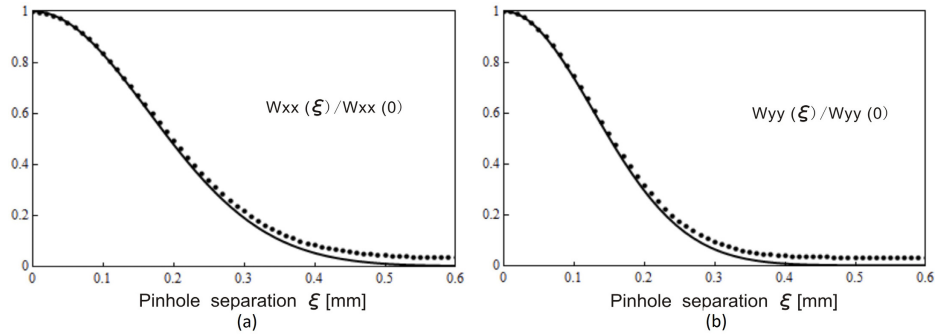


Fig. 4. Normalized cross-spectral densities of generated secondary source measured in experiment (dotted curves) and determined in accordance with the proposed technique (solid curves) for ground glass plates with diffusion angles of  $10^\circ$  (a) and  $30^\circ$  (b).

## 6. Conclusions

We have proposed a technique of experimental determining the coherent-mode structure of electromagnetic field. This technique is based on the coherence measurements of the field in some reference basis and represents a nontrivial vector generalization of the dual-mode field correlation method recently reported by F. Ferreira and M. Belsley for a scalar case [11]. Of course the proposed technique needs more physical and computational effort, but it is the price of vector generalization. The justifiability and efficiency of the proposed technique has been demonstrated with an example of determining the coherent-mode structure of some specially generated and experimentally characterized secondary electromagnetic source.

## Acknowledgments

This work was supported by the Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (project VIEP OSA-EXC-14) and by the National Council for Science and Technology of Mexico (project CB-165142).

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
POSGRADO EN FÍSICA APLICADA

**INFORME DE ACTIVIDADES REALIZADAS DURANTE LA ESTANCIA DE  
INVESTIGACIÓN EN EL INSTITUTO DE ÓPTICA DE LA UNIVERSIDAD DE  
ROCHESTER**

**1 DE SEPTIEMBRE 2016 – 28 DE FEBRERO 2017**

Alumno: **M.C. Esteban Vélez Juárez**

Asesores Universidad de Rochester: **Dr. Miguel A. Alonso**

**Dr. Thomas G. Brown**

Asesor BUAP: **Dr. Andrey S. Ostrovsky**

Programa: **Doctorado**

## **Introducción**

El objetivo general de la estancia de investigación estuvo enfocado en el estudio de la medición de coherencia de una fuente parcialmente coherente y parcialmente polarizada mediante técnicas que no involucraran el proceso de interferencia. Con el objetivo anterior las actividades se enfocaron en los trabajos recientemente publicados por el grupo de investigación del Dr. Miguel A. Alonso [1,2], los cuales fueron reproducidos y aplicados en el laboratorio de óptica que está bajo responsabilidad del Dr. Thomas G. Brown.

Posteriormente fue revisada la descripción del campo electromagnético mediante los parámetros de Stokes y su respectiva representación en la esfera de Poincaré [3], así como el estudio a profundidad de las técnicas empleadas para la medición de dichos parámetros. Lo mencionado anteriormente fue realizado con el objetivo de lograr la comprensión plena de los parámetros de Stokes generalizados y su conexión con la matriz de densidad espectral [3-5].

Finalmente, con el propósito de reforzar los conceptos de coherencia y polarización y obtener así un mayor y más sólido conocimiento para lograr el objetivo planteado en la estancia se ingresó al curso “Modern Coherence Theory”, impartido por el Dr. Miguel Alonso a estudiantes de posgrado del Instituto de Óptica y del Departamento de Física de la Universidad de Rochester.

En las siguientes líneas se describen de manera más detallada y específica las actividades realizadas durante esta estancia académica.

## **Cronograma de actividades realizadas por bimestre**

### **1er Bimestre (Septiembre-Octubre)**

1.- Se realizó un amplio estudio de diferentes métodos utilizados en la medición de la función de densidad espectral para una fuente parcialmente coherente espacialmente [1,2]. Los métodos investigados hacían uso de la comparación de dos medidas de intensidad radiante con las variantes:

- a) con y sin un pequeño obstáculo en el mismo plano
- b) una pantalla oscura con y sin una pequeña apertura en el mismo plano
- c) una combinación de las dos anteriores.

2.- En este bimestre se inició a tomar el curso “Modern Coherence Theory” impartido por el Dr. Miguel A. Alonso dirigido a alumnos de posgrado del instituto.

3.- Se tuvo participación en el congreso “Frontiers in Optics” el cual tomó lugar en la ciudad de Rochester, New York, USA del 17 Oct 2016 - 21 Oct 2016, evento durante el cual fueron celebrados los 100 años de la “Optical Society of America” y se contó con la asistencia de siete premios Nobel en Física.

### **2do Bimestre (Noviembre-Diciembre)**

1.- Se concluyó de manera satisfactoria el curso “Modern Coherence Theory”, el cual sirvió para reforzar y ampliar los conceptos de la teoría de coherencia.

2.- Se montaron en el laboratorio los experimentos correspondientes y la captura de imágenes, posteriormente se programaron los algoritmos necesarios (Matlab) para el procesamiento de imágenes y de esta manera obtener el grado de coherencia empleando las técnicas estudiadas anteriormente.

3.- Se profundizó en la representación de un campo electromagnético mediante los parámetros de Stokes y su correspondiente interpretación en la esfera de Poincaré, posteriormente estudiamos y entendimos diferentes métodos utilizados para la medición de dichos parámetros [3].

4.- Una vez entendido el concepto de los parámetros de Stokes estudiamos la teoría generalizada de estos parámetros y su conexión con la matriz de densidad espectral del campo [4-6].

5.- Se envió un trabajo para participar en el congreso CLEO que se llevara a cabo en San José, California, USA, del 14-19 de mayo del 2017.

### **3er Bimestre (Enero-Febrero)**

1.- Para corroborar los métodos estudiados para la medición de los parámetros de Stokes procedimos a montar el arreglo correspondiente al método de superposición

de estados ortogonales y se caracterizó utilizando un estado de polarización a  $45^\circ$ , un estado de polarización circular a derecha y un estado circular a izquierdas.

2.- Se hicieron las mediciones, análisis y cálculos de los grados de coherencia para los diferentes estados de polarización empleados (Vertical, Horizontal, Lineal  $+45^\circ$ , Lineal  $-45^\circ$ , Circular derecha, Circular Izquierda)

3.- Se insertó un material estresado para cambiar de manera no homogénea el grado de coherencia y polarización de la fuente secundaria y se midieron los grados de coherencia correspondientes para los diferentes estados de polarización.

Con todo lo anterior podemos concluir que los objetivos planteados en el Proyecto de estancia fueron cumplidos total y satisfactoriamente y se espera que todos los resultados obtenidos impactaran directamente en el trabajo de investigación del estudiante.

## **Agradecimientos**

La estancia de investigación se llevó a cabo bajo la supervisión del Dr. Miguel A. Alonso a quien le agradezco su tiempo, consejos, supervisión, pero sobre todo la oportunidad de trabajar con su grupo de investigación durante este tiempo. De manera muy particular extiendo mis agradecimientos al Dr. Thomas G. Brown por haberme permitido trabajar en su laboratorio, por su ayuda, pero sobre todo por compartir su experiencia conmigo.

Finalmente quiero agradecer a Katelynn A. Sharma por sus consejos y apoyo que me brindo durante estos 6 meses.

## **Bibliografía**

1.- Katelynn A. Sharma, Thomas G. Brown, and Miguel A. Alonso, "Phase-space approach to lens less measurement of optical field correlations," *Opt. Expr.* **24**, 16099-16110(2016)

2.- James K. Wood, Katelynn A. Sharma, Seongkeun, Thomas G. Brown, and Miguel A. Alonso, "Using shadows to measure spatial coherence," *Opt. Expr.* **24**, 16099-16110(2016)

3.- Edward Collett, *Polarized light (Fundamentals and applications)*, (Marcel Dekker, 1992), Chapters 3, 4, 6.

4.- Emil Wolf, *Introduction to the theory of coherence and polarization light*, (Cambridge, 2007), Chapter 9.

5.- Korotkova, Olga and Wolf, Emil "Generalized stokes parameters of random electromagnetic beams", (2005). *Physics Articles and Papers*. Paper.**24**.

6.- Ari T. Friberg and Tero Setälä, "Electromagnetic theory of optical coherence" *J. Opt. Soc. Am. A* **12**, 2431-2442(2016).



Las componentes de un campo eléctrico pueden oscilar en una dirección normal a la dirección de propagación de la onda (la cual es paralela al vector  $\mathbf{k}$ ). Supongamos que la onda se propaga en la dirección  $z$ . Por lo tanto el campo eléctrico puede oscilar en cualquier dirección en el plano  $x$ - $y$ . La dirección actual de oscilación del campo determina la polarización de la onda. La descripción matemática para esta oscilación es la siguiente:

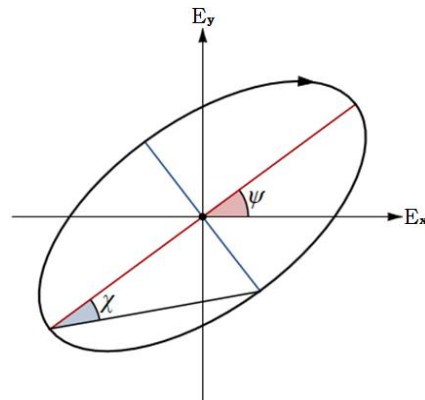
$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \delta_x) \quad (1a)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \delta_y) \quad (1b)$$

donde  $\delta_x, \delta_y, E_{0x}$  y  $E_{0y}$  son las fases y las amplitudes correspondientes a las componentes del campo. Otra forma de escribir la Ec.(1) es:

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta. \quad (2)$$

La Ec.(2) representa un estado de polarización elíptico rotado un ángulo  $\psi$  y elipticidad  $\chi$  como podemos observar en la Fig.(1). Ahora si cambiamos  $\delta = \delta_x - \delta_y$ ,  $E_{0x}$  y  $E_{0y}$  podemos encontrar diferentes estados de polarización (Los más comunes son mostrados en la Tabla.1



**Fig.1** Representación grafica de la Ec. (2).

Otra forma de representar los estados de polarización en términos de observables es utilizando los parámetros de Stokes de Polarización, los cuales son expresados matemáticamente como

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2, \quad 3a)$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2, \quad 3b)$$

$$S_2 = 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta, \quad 3c)$$

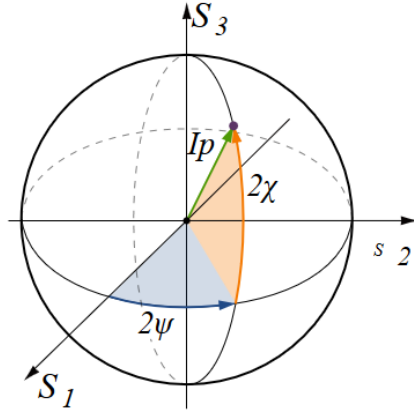
$$S_3 = 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta, \quad 3d)$$

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, \quad 3e)$$

$$\tan 2\psi = \frac{S_2}{S_1}, \quad 3f) \quad (3)$$

$$\tan 2\chi = \frac{S_3}{S_0}, \quad 3g)$$

La representación grafica de la Ec.(3) es mostrada en la Fig. (2)



**Fig. 2** Representación gráfica de la esfera de Poincaré y los parámetros de Stokes.

Los estados de polarización más comunes son mostrados en la Tabla.-1

State	Parameters $E_{0x}, E_{0y}, \delta = \delta_x - \delta_y$	Stokes Parameters $S = (S_0, S_1, S_2, S_3)$
Linearly polarized (horizontal)	$E_y = 0$	(1, 1, 0, 0)
Linearly polarized (Vertical)	$E_x = 0$	(1, -1, 0, 0)
Linearly polarized (+45°)	$E_{0x} = E_{0y}, \delta = \pi$	(1, 0, 1, 0)
Linearly polarized (-45°)	$E_{0x} = E_{0y}, \delta = -\pi$	(1, 0, -1, 0)
Right-hand circularly polarized	$E_{0x} = E_{0y}, \delta = \pi/2$	(1, 0, 0, 1)
Left-hand circularly polarized	$E_{0x} = E_{0y}, \delta = -\pi/2$	(1, 0, 0, -1)

**Table. 1** Los estados de polarización más comunes y sus correspondientes parámetros de Stokes.

La definición dada para los parámetros de Stokes en la Ec. (3) puede ser escrita en términos de la matriz de Polarización, es decir

$$S_0 = W_{xx}(\mathbf{x}) + W_{yy}(\mathbf{x}), \quad 4a)$$

$$S_1 = W_{xx}(\mathbf{x}) - W_{yy}(\mathbf{x}), \quad 4b)$$

$$S_2 = W_{xy}(\mathbf{x}) + W_{yx}(\mathbf{x}), \quad 4c)$$

$$S_3 = i[W_{yx}(\mathbf{x}) - W_{xy}(\mathbf{x})], \quad 4d)$$

donde  $W_{ij}(\mathbf{x}) = \langle E_i^*(\mathbf{x})E_j(\mathbf{x}) \rangle$  con  $(i, j) \in (x, y)$ . Estos parámetros de Stokes son cantidades reales que tienen la siguiente interpretación:  $S_0(\mathbf{x})$  es la densidad espectral en el punto  $\mathbf{x}$ , mientras  $S_1(\mathbf{x}), S_2(\mathbf{x}), S_3(\mathbf{x})$  nos dan las diferencias de intensidades entre las polarizaciones  $x$  y  $y$ , polarización lineal a  $+\pi/4$  y  $-\pi/4$ , y polarización circular derecha e izquierda.

Si queremos analizar la evolución espacial del estado de coherencia y polarización del haz, empleamos los parámetros de Stokes generalizados

$$S_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = W_{xx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + W_{yy}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad 5a)$$

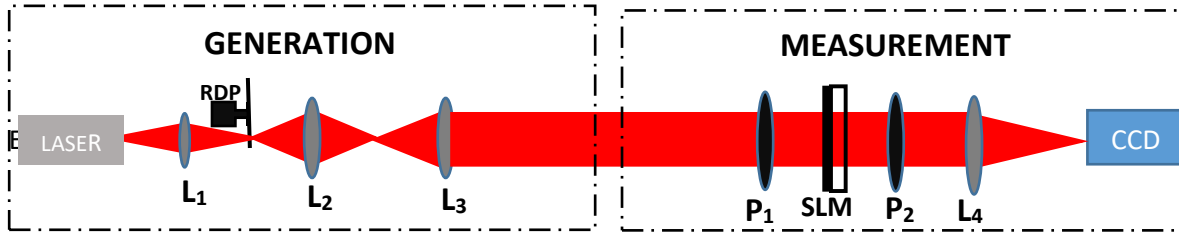
$$S_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = W_{xx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - W_{yy}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad 5b)$$

$$S_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = W_{xy}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + W_{yx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad 5c)$$

$$S_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = i[W_{yx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - W_{xy}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)], \quad 5d)$$

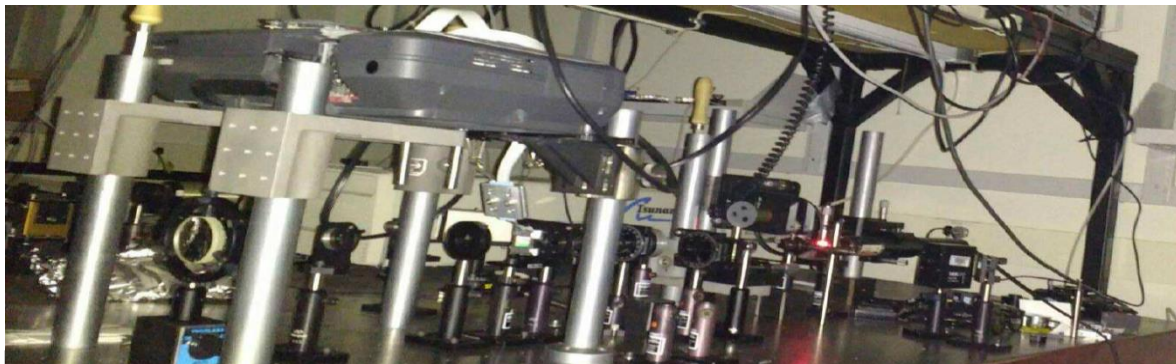
Donde  $W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle E_i^*(\mathbf{x}_1)E_j(\mathbf{x}_2) \rangle$ ,  $i, j = x, y$  es la función de densidad espectral cruzada y las cantidades representan la realización de las componentes del campo,  $\mathbf{x}_{12}$  denotan 2 puntos espaciales, el asterisco y el paréntesis triangular denotan el complejo conjugado y el promedio en el ensamble, respectivamente.

Para medir las cantidades  $W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  hemos empleado la técnica reportada en el artículo [1]. Esta técnica mide  $W_{ij}$  por escaneo de pequeños obstáculos sobre el plano de prueba y mide la intensidad radiante resultante. En la Fig.(3) se muestra el arreglo experimental.

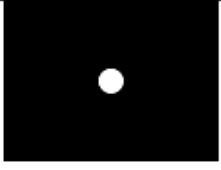

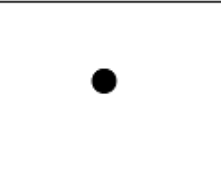



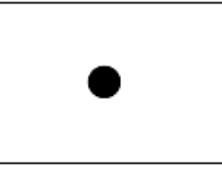
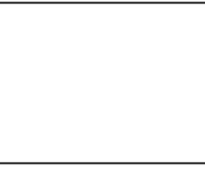


**Fig. 3** Diagrama del arreglo experimental para la generación de una fuente parcialmente coherente y la Medición de  $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ .  $L_1, L_2, L_3$  y  $L_4$ : Lentes;  $P_1, P_2$ : Polarizadores, **RDP**: Placa difusora rotatoria., **SLM**: Modulador espacial de luz.

EL arreglo experimental montado físicamente en el laboratorio es mostrado en la Fig. (4)

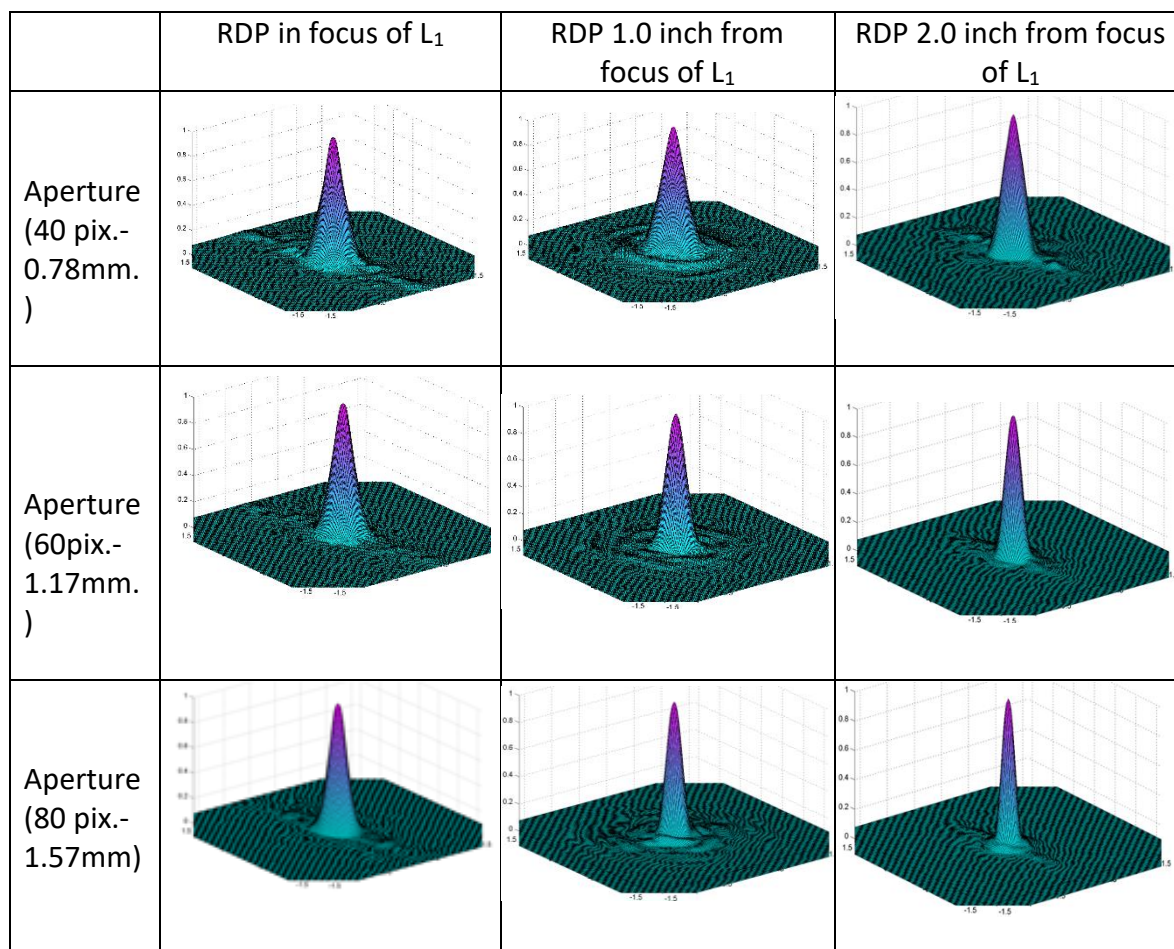


**Fig. 4** Diagrama del arreglo experimental para la generación de una fuente parcialmente coherente y la Medición de  $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ .

	Apertura	Fondo	Obstáculo	Blanco
Aperture (40 pix.-0.78mm.)				
Aperture (60pix.-1.17mm.)				

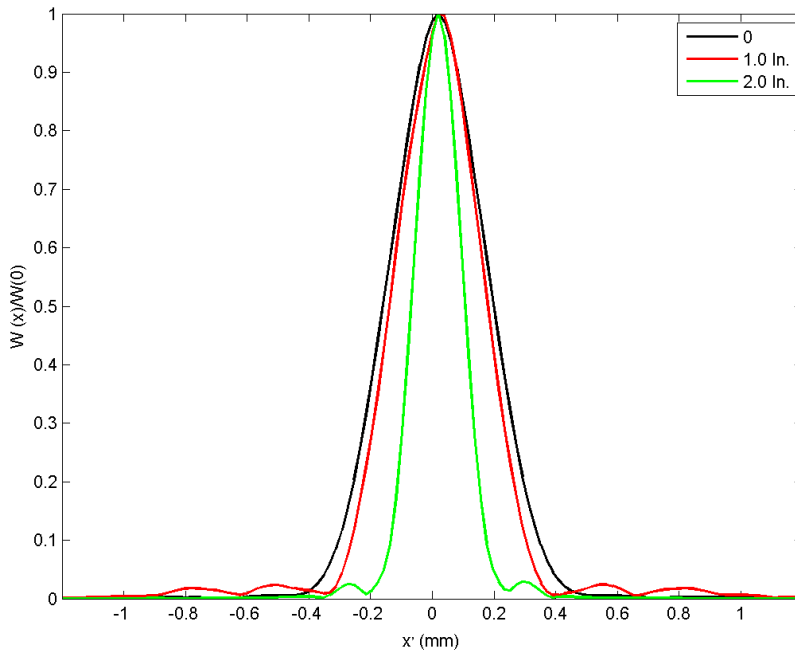
**Fig. 5** Aperturas empleadas para la Medicion de  $W(x_1, x_2)$  .

Proyectando las aperturas y sombras mostradas en la Fig. (6) y encontramos que  $W(x_1, x_2)$  tiene la siguiente forma, para tres diferentes grados de coherencia de la fuente



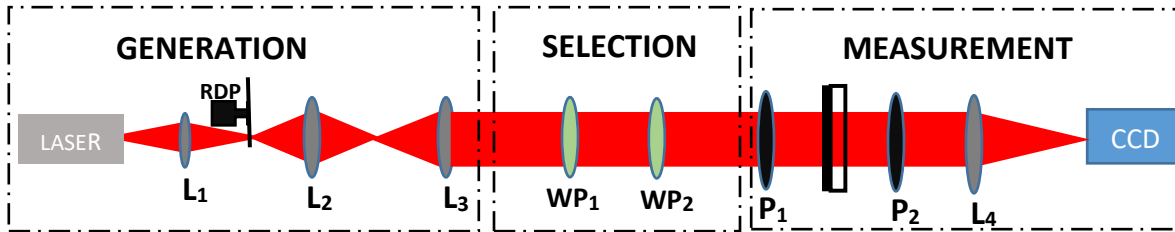
**Fig. 6**  $W(x_1, x_2)$  calculada empleando la técnica descrita en [1] para dos diferentes tamaño de apertura y 3 diferentes grados de coherencia de la fuente.

El perfil de  $W$



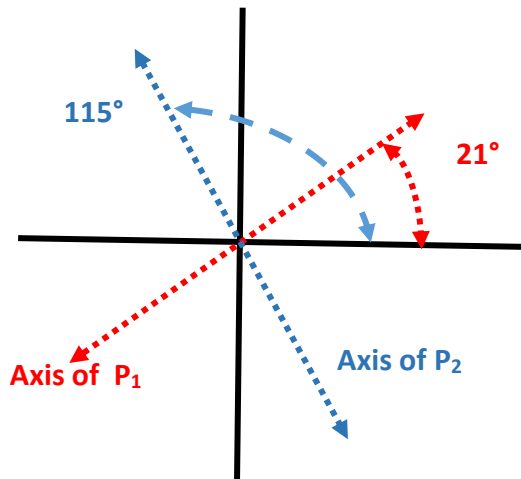
**Fig. 7** Cambio del ancho de coherencia para 3 diferentes posiciones de RDP con una apertura de 60 pixels.

Para medir los parámetros de Stokes generalizados empleamos 2 placas de  $\lambda/2$  para general los estados ortogonales, el arreglo experimental es mostrado en la Fig. (8)



**Fig. 8** Same optical set-up as Fig. 2, we only add 2 wave plates  $\lambda/2$  (WP<sub>1</sub> and WP<sub>2</sub>)

Para una mejor selección de los estados ortogonales encontramos los ejes de transmisión de los polarizadores, los cuales son mostrados en la Fig. (9)



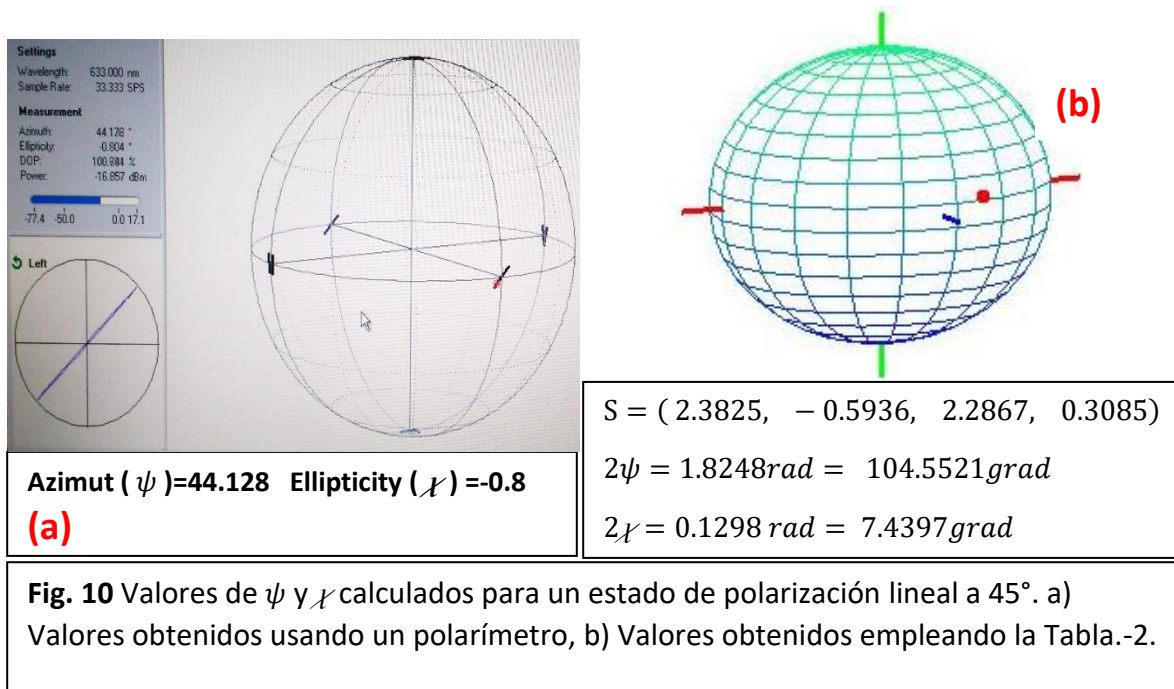
**Fig. 9** Diagram that show the transmission axes of P<sub>1</sub> and P<sub>2</sub>.

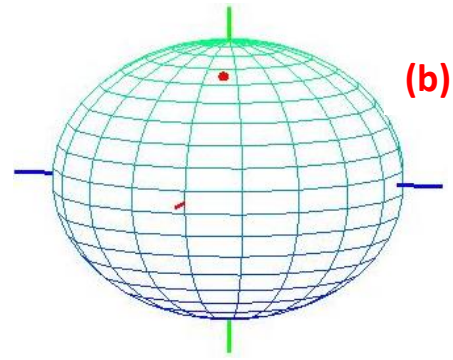
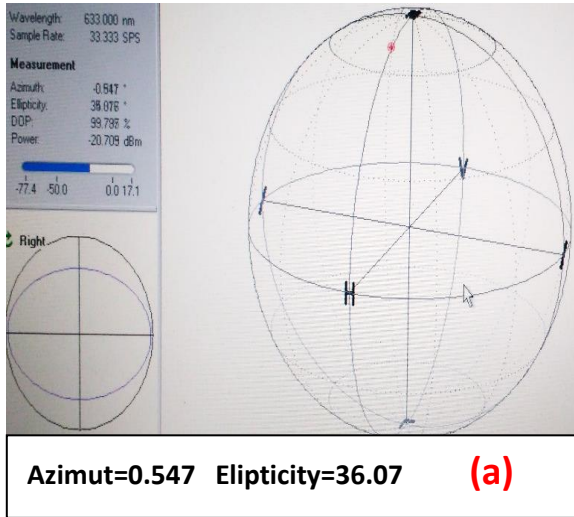
Las posiciones de las placas  $\lambda/4$  son mostradas en la Tabla.-2

Polarization state	1st wave plate	2nd wave plate	
P	10	10	Position P <sub>1</sub>
L+45	33	33	101
Orth	56	56	
L-45	78	78	Position P <sub>2</sub>
H	100	100	133
CR	66	out	
CL	156	out	

**Table. 2** Posición de las placas  $\lambda/2$  para la selección del estado de polarización respecto al eje de P<sub>1</sub>; P: Paralelo, Ort: Ortogonal, L±45: Lineal a ±45°; RC and LC: Polarización circular derecha e izquierda respectivamente.

Primeramente hacemos la caracterización del sistema mostrado en la Fig. (8) y lo comparamos con las mediciones tomadas con un polarímetro. Para este caso no empleamos la placa difusora, y además hacemos la comparación para 3 casos, polarización del láser, polarización casi circular derecha y polarización casi circular izquierda, estos dos últimos se logran utilizando los vidrios de unos lentes de cine. Los resultados son mostrados en las Fig.(10)-Fig.(12)



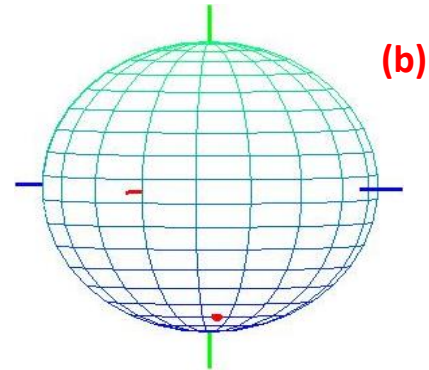
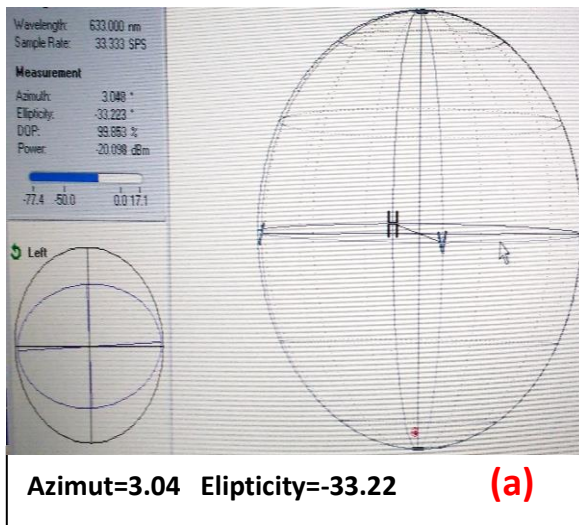


$$S = (1.0866, 0.2907, -0.0732, 1.0444)$$

$$2\psi = -0.2467 \text{ rad} = -14.1336 \text{ grad}$$

$$2\chi = 1.2913 \text{ rad} = 73.9849 \text{ grad}$$

**Fig. 11** Valores de  $\psi$  y  $\chi$  calculados para un estado de polarización casi circular derecho (Vidrio derecho de unos lentes 3D). a) Valores obtenidos usando un polarímetro, b) Valores obtenidos empleando la Tabla.-2.

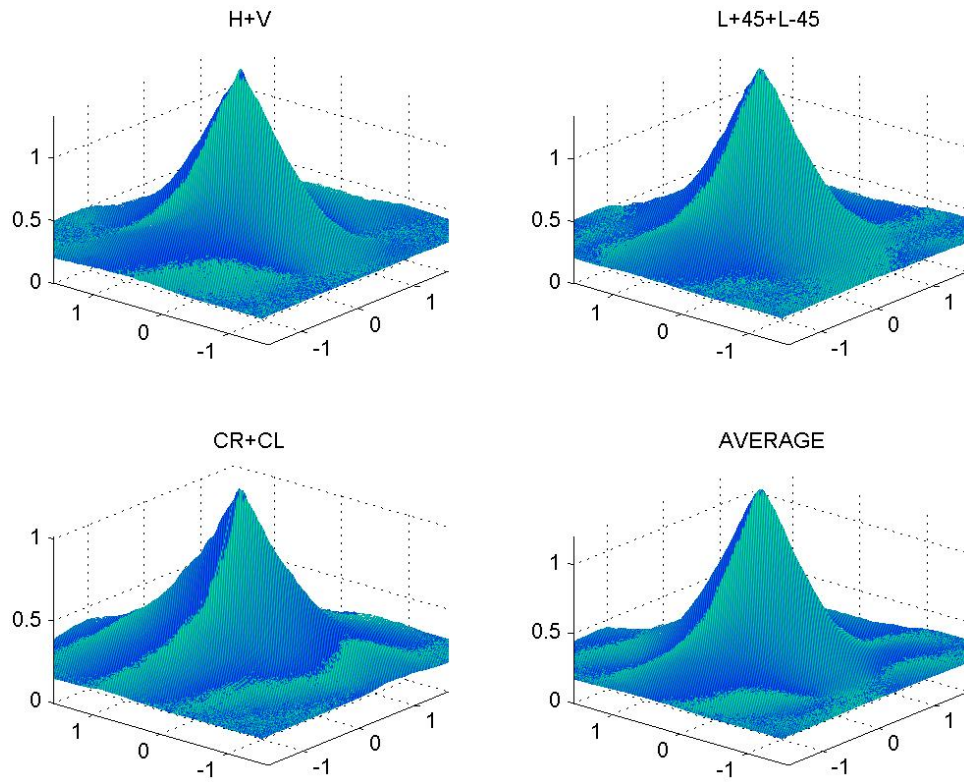


$$S = (1.3037, 0.5343, 0.2937, -1.1524)$$

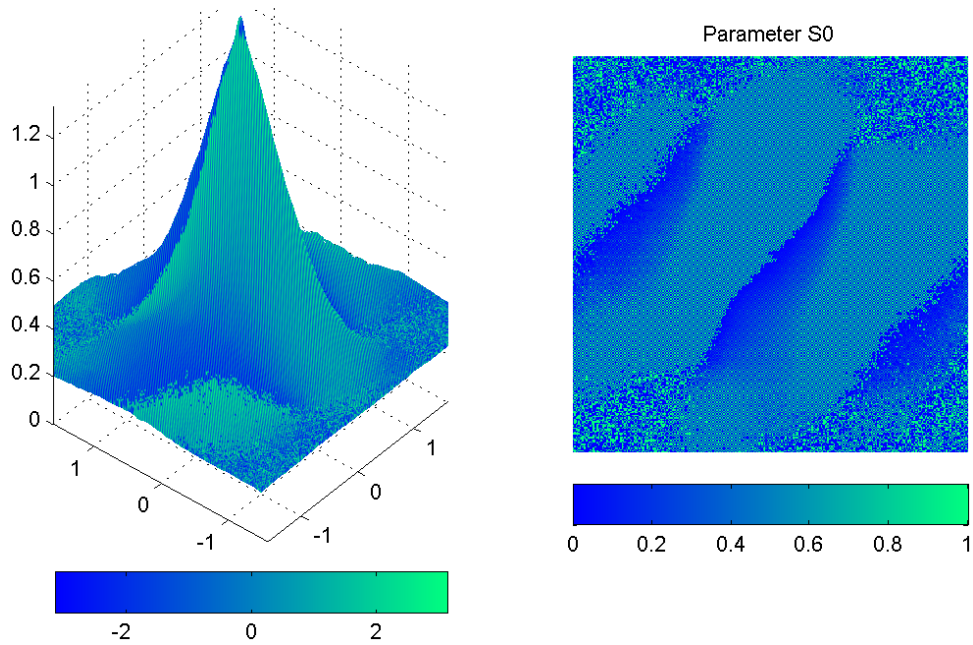
$$2\psi = 0.5026 \text{ rad} = 28.7972 \text{ grad}$$

$$2\chi = -1.0842 \text{ rad} = -62.1180 \text{ grad}$$

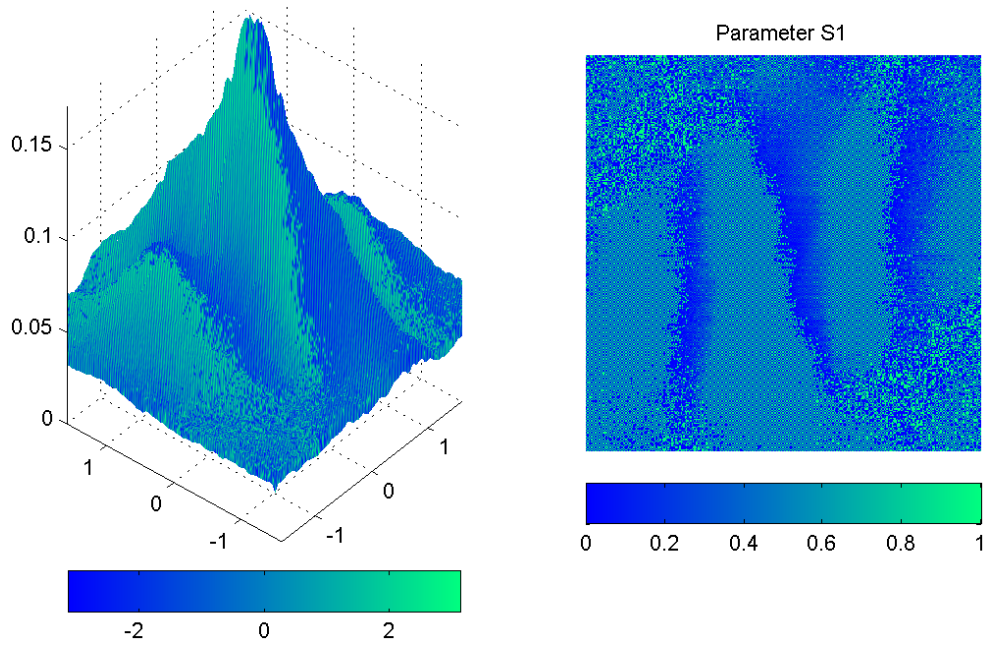
**Fig. 12** Valores de  $\psi$  y  $\chi$  calculados para un estado de polarización casi circular izquierdo (Vidrio izquierdo de unos lentes 3D). a) Valores obtenidos usando un polarímetro, b) Valores obtenidos empleando la Tabla.-2.



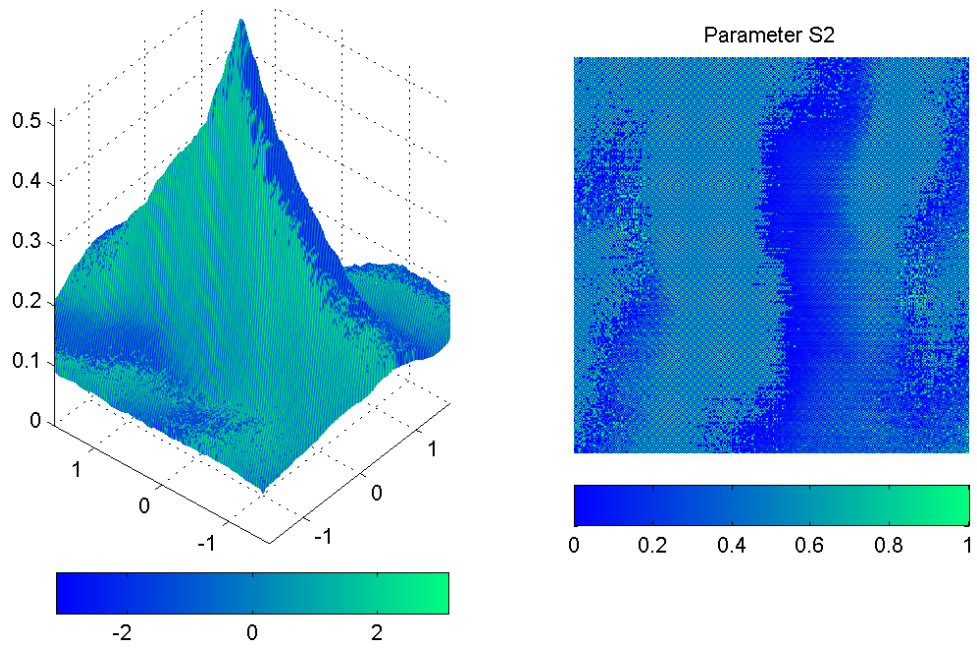
**Fig. 9** Comparison of  $S_0(x_1, x_2)$  using different combinations



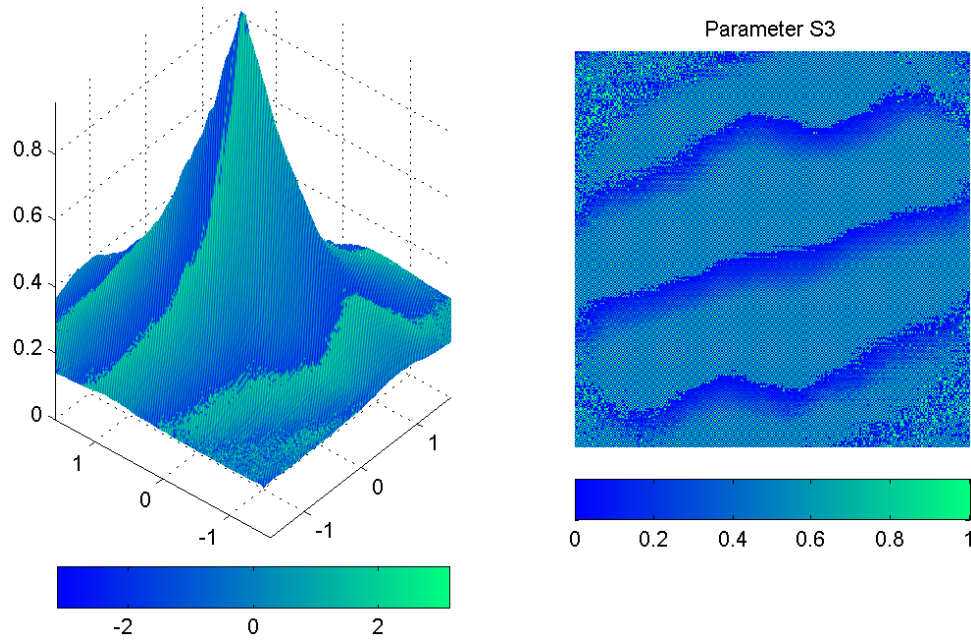
**Fig. 10** Abs of  $S_0(x_1, x_2)$  and its phase distribution calculated using the Eq.(4a).



**Fig. 11** Abs of  $S_1(x_1, x_2)$  and its phase distribution calculated using the Eq.(4b).



**Fig. 12** Abs of  $S_2(x_1, x_2)$  and its phase distribution calculated using the Eq.(4c).



**Fig. 13** Abs of  $S_3(x_1, x_2)$  and its phase distribution calculated using the Eq.(4d).

## CONCLUSIONES

Se aplicó el método de sombras y apertura para medir coherencia espacial, y de esta forma poder fue posible medir los parámetros de Stokes generalizados para un material estresado.