



---

---

---

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Postgrado en Ciencias Matemáticas

---

---

**Desarrollo de la  $p$  - versión del Método de  
Rayos Generales para el Primer Problema de  
Frontera Móvil para la Ecuación del Calor**

Tesis presentada para obtener el título de:

Doctor en Ciencias Matemáticas

Presenta:

M.C. Armando Espíndola Pozos

Director de tesis:

Dr. Alexandre I. Grebennikov

Puebla, Puebla, Agosto del 2016



# Agradecimientos

## Agradezco:

- ✓ A mi Asesor de tesis el Dr. Alexandre I. Grebennikov, por guiarme en ésta investigación y por su firme apoyo.
- ✓ A la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas por brindarme el espacio y los medios para realizar este trabajo de investigación
- ✓ A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla por darme la oportunidad de efectuar mis estudios de postgrado y superarme académicamente.
- ✓ Al CONACYT por el apoyo económico que otorga a la Educación Superior, del cual fui beneficiado, durante mi instancia en el Doctorado en Ciencias Matemáticas.
- ✓ A mi esposa e hijas.
- ✓ Al jurado de la tesis por sus valiosas observaciones al trabajo de investigación realizado.
- ✓ A mis amigos y compañeros del posgrado



# Índice general

SÍMBOLOS .....	V
INTRODUCCIÓN.....	VII
PROBLEMA DE ESTUDIO Y APORTACIONES .....	XI
OBJETIVO GENERAL .....	XIII
OBJETIVOS PARTICULARES.....	XIII
ESTRUCTURA DE LA TESIS .....	XV
<b>CAPÍTULO 1 .....</b>	<b>1</b>
MATERIAL AUXILIAR.....	1
1.1. PRIMER PROBLEMA CON FRONTERA MÓVIL PARA LA ECUACIÓN DEL CALOR.....	1
1.2. TRASFORMADA DIRECTA DE RADON .....	3
1.3. PROPIEDADES DE LA TRASFORMADA DE RADON .....	5
1.3.1. <i>Propiedad de linealidad</i> .....	5
1.3.2. <i>Propiedad de escala</i> .....	5
1.3.3. <i>Propiedad de soporte compacto</i> .....	5
1.3.4. <i>Propiedad de simetría y periodicidad</i> .....	6
1.3.5. <i>Propiedad de Traslación</i> .....	6
1.3.6. <i>Propiedad de Rotación</i> .....	6
1.3.7. <i>Transformada de Radon de la derivada de una función definida en todo el plano</i> .....	7
1.3.8. <i>Transformada de Radon de derivadas parciales de funciones definidas en un círculo acotado de radio <math>r</math></i> 8	
1.4. TRANSFORMADA INVERSA DE RADON .....	16
1.5. TEOREMA DEL SOPORTE .....	16
<b>CAPÍTULO 2 .....</b>	<b>19</b>
DESARROLLO DE LA $P$ - <i>VERSIÓN DEL MRG</i> PARA EL PRIMER PROBLEMA DE FRONTERA MÓVIL PARA LA ECUACIÓN DEL CALOR UNIDIMENSIONAL .....	19
2.1 PRIMER PROBLEMA DE FRONTERA MÓVIL PARA LA ECUACIÓN DEL CALOR UNIDIMENSIONAL.....	19
2.2 ESQUEMA DE LA $P$ - <i>VERSIÓN DEL MÉTODO DE RAYOS GENERALES</i> .....	20
2.3 DESARROLLO DE LA $P$ - <i>VERSIÓN DEL MÉTODO DE RAYOS GENERALES</i> .....	21
<b>CAPÍTULO 3 .....</b>	<b>25</b>
DESARROLLO DE LA $P$ - <i>VERSIÓN DEL MRG</i> PARA EL PRIMER PROBLEMA DE FRONTERA MÓVIL PARA LA ECUACIÓN DEL CALOR BIDIMENSIONAL.....	25
3.1 PRIMER PROBLEMA DE FRONTERA MÓVIL PARA LA ECUACIÓN DEL CALOR BIDIMENSIONAL.....	25

3.2	ESQUEMA DE LA $P$ - VERSIÓN DEL MÉTODO DE RAYOS GENERALES.....	26
3.3	DESARROLLO DE LA $P$ – VERSIÓN DEL MÉTODO DE RAYOS GENERALES .....	27
3.4	ERROR DE APROXIMACIÓN DE LA $P$ – VERSIÓN DEL $MRG$ .....	32
<b>CAPÍTULO 4 .....</b>		<b>37</b>
	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS .....	37
4.1	EXPERIMENTO NUMÉRICO PARA EL CASO UNIDIMENSIONAL .....	37
4.1.1	<i>Ejemplo 1</i> .....	38
4.2	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS PARA EL CASO BIDIMENSIONAL.....	40
4.2.1	<i>Ejemplo 1</i> .....	40
4.2.2	<i>Ejemplo 2</i> .....	43
4.2.3	<i>Ejemplo 3</i> .....	46
<b>ANEXO.....</b>		<b>51</b>
A.	IMPLEMENTACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE RADON.....	51
B.	ALGORITMO Y PROGRAMAS EN MATLAB DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA $P$ - VERSIÓN DEL $MRG$ PARA EL CASO UNIDIMENSIONAL .....	53
C.	ALGORITMO Y PROGRAMAS EN MATLAB DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA $P$ - VERSIÓN DEL $MRG$ EN EL CASO BIDIMENSIONAL .....	57
	BIBLIOGRAFÍA.....	63

# Símbolos

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$	Espacio de las funciones definidas en el plano infinitamente derivables y de soporte compacto.
$\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$	Espacio de las funciones definidas en el plano dos veces derivables de rápido decaimiento.
$C_0^{2,1}(\Omega)$	Espacio de las funciones definidas en el plano, dos veces derivables con respecto a las variables espaciales, una vez derivable con respecto al tiempo $t$ y nulas en $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ , donde $\Omega$ es un conjunto convexo acotado.
$C^{2,1}(\Omega)$	Espacio de las funciones definidas en $\Omega$ , dos veces derivables con respecto a las variables espaciales y una vez derivable con respecto al tiempo $t$ .
$\Omega_t$	$\{(x, y): x^2 + y^2 < (r-t)^2, t \in [0, r] \text{ fijo}\} \subset \mathbb{R}^2$ donde $0 < r < \infty$ , círculo de radio $r-t$ .
$\hat{f}$ ó $R[f]$	Transformada de Radon de una función $f(x, y)$ .
$\tilde{f}(p, \tau, \varphi)$	Parametrización en coordenadas de Radon de la función $f(x, y)$ .
$\frac{\partial f}{\partial x}$	Parametrización en coordenadas de Radon de la derivada espacial de la función $f(x, y)$ con respecto de $x$ .



# Introducción

Existen problemas en la vida real que describen procesos termodinámicos que se estudian en áreas aplicadas de la física, los cuales se modelan con la ecuación del calor, véase [1], [14], [15] y [19]. En la literatura Italiana (Fasano-Primicerio's group), los problemas relacionados con la ecuación del calor o difusión se clasifican con respecto a sus condiciones de frontera de la siguiente manera.

**Problemas con frontera:**  $\begin{cases} \text{fija,} \\ \text{móvil,} \\ \text{libre, (tipo implícito o tipo explícito).} \end{cases}$

A continuación se hace una descripción de cada uno de estos problemas para la ecuación del calor en el espacio unidimensional, véase [18, p. 5]:

**Problemas de frontera fija**, estas son estudiadas en un dominio  $(x_1, x_2) \times (0, T)$ .

- i)  $u_t - u_{xx} = f(x, t), \quad x_1 < x < x_2, \quad 0 < t < T,$
- ii)  $u(x, 0) = h(x), \quad x_1 < x < x_2,$
- iii)  $u(x_1, t) = f_1(x) \quad \text{ó} \quad u_x(x_1, t) = f_1(x), \quad 0 < t < T,$
- iv)  $u(x_2, t) = f_2(x) \quad \text{ó} \quad u_x(x_2, t) = f_1(x), \quad 0 < t < T,$

**Problemas de frontera móvil**, (MBP), estas son estudiadas por ejemplo en un dominio  $\{(x,t): s_1(t) < x < s_2(t), 0 < t < T\}$  con  $s_1(t) < s_2(t)$ , funciones dadas en  $(0,T)$ , es decir, el dominio espacial de la función desconocida varía con el tiempo por una ley de movimiento conocida a priori tal como:

- i)  $u_t - u_{xx} = f(x,t), \quad s_1(t) < x < s_2(t), \quad 0 < t < T,$
- ii)  $u(x,0) = h(x), \quad s_1(0) < x < s_2(0),$
- iii)  $u(s_1(t),t) = f_1(t) \quad \text{ó} \quad u_x(s_1(t),t) = f_1(t), \quad 0 < t < T,$
- iv)  $u(s_2(t),t) = f_2(t) \quad \text{ó} \quad u_x(s_2(t),t) = f_1(t), \quad 0 < t < T.$

**Problemas de frontera libre**, (FBP), son aquellas en los que el dominio espacial de la función desconocida varía con el tiempo debido a una ley de movimiento que no se conoce a priori. El hecho de no saber el límite o parte de ella, determina, por supuesto, la necesidad matemática para imponer nuevas condiciones a la función desconocida que dependerá de los problemas físicos estudiados.

Uno de los más importantes FBP es el llamado problema de Stefan (Lamé-Clapeyron (1981), Stefan (1989-1991)). Su formulación matemática, está dada de la siguiente manera: Encontrar  $T > 0, u(x,t)$  y  $x = s(t)$  tal que cumplan, por ejemplo, las siguientes condiciones

- i)  $u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < s(t), \quad 0 < t < T,$
- ii)  $s(0) = b,$
- iii)  $u(x,0) = h(x), \quad 0 \leq x \leq b,$
- iv)  $u(s(t),t) = 0, \quad 0 < t < T,$
- v)  $u_x(s(t),t) = -s(t), \quad 0 < t < T,$  llamada condición de Stefan,
- vi)  $u(0,t) = f(t) \quad \text{ó} \quad u_x(0,t) = f(t), \quad 0 < t < T.$

En este trabajo nos enfocamos a los problemas de frontera móvil, los cuales se describen en las secciones 2.1 y 3.1 de esta tesis.

Al hacer una revisión de la bibliografía presentada en este trabajo, se encontró que existen al menos dos métodos para resolver el Primer problema de frontera móvil para la ecuación del calor, uno es en forma analítica, utilizando fórmulas de Green, véase [19, pp. 492 - 496] y otro es en forma numérica aplicando el Método de Elemento Finito, véase [9, p. 1349], cabe mencionar que no se encontró ningún ejemplo donde se aplica el método analítico utilizando fórmulas de Green y sólo se encontró un ejemplo donde se aplica el método de Elemento Finito el cual se enuncia en el capítulo 4 sección 4.2.



# Problema de estudio y aportaciones

## Problema de estudio

En este trabajo se plantea un nuevo método numérico, que llamaremos *p – versión del Método de Rayos Generales*, para resolver el Primer problema con frontera móvil para la ecuación del calor, en el espacio de funciones dos veces derivables de soporte compacto definidas en la recta real o en el plano con soporte en un dominio convexo acotado cuyo valor en la frontera móvil y el de su primera derivada espacial son cero.

## Aportaciones

En esta tesis se resolvió de forma numérica el Primer problema con frontera móvil para la ecuación del calor en el espacio de funciones dos veces derivables de soporte compacto definidas en la recta real o en el plano con soporte en un dominio convexo acotado cuyo valor en la frontera móvil y el de su primera derivada espacial son cero.

El primer resultado es la propuesta y aplicación de un nuevo método numérico para resolver el Problema de frontera móvil para la ecuación del calor, en el espacio de funciones dos veces derivables de soporte compacto en un dominio convexo acotado cuyo valor en la frontera móvil y el de su primera derivada espacial es cero, al cual llamamos *p – versión del Método de Rayos Generales*, (*p – versión del MRG*) el cual está basado en el uso de la Transformada Directa Radon, (TDR) y el de la Transformada Inversa de Radon, (TIR), ver los capítulos 2 y 3. Debido a que la Transformada Inversa de Radon se construye con la Transformada Discreta de Fourier se infiere que la *p – versión del MRG*, se realiza de manera rápida, véase [2] y [10]. El método propuesto está inspirado del Método de Rayos Generales el cual fue desarrollado para Ecuaciones Diferenciales Parciales del tipo

Elípticas en los años 2003-2007 para hallar la solución de problemas de contorno en dominios de forma geométrica compleja, véase [4] y [5].

El segundo resultado en este trabajo es el teorema relacionado con la transformada directa de Radon de las primeras y segundas derivadas espaciales de una función definida en un dominio circular acotado, el cual no existe en la bibliografía revisada, ver sección 1.3.8 del capítulo 1.

El tercer resultado es la elaboración de algoritmos y programas en Matlab que muestran la viabilidad de la  $p$  – *versión del MRG*, véase el anexo de esta tesis.

## Objetivo General

Desarrollar la  $p$  – versión del MRG para obtener la solución del Primer problema con frontera móvil para la ecuación del calor e implementarlo en un algoritmo computacional.

## Objetivos particulares

1. Desarrollar la  $p$  – versión del MRG, para obtener la solución explícita del primer problema con frontera móvil para la ecuación del calor en el espacio unidimensional.
2. Desarrollar la  $p$  – versión del MRG para obtener la solución explícita del primer problema con frontera móvil para la ecuación del calor en el caso bidimensional
3. Hacer la implementación de las fórmulas obtenidas en el software Matlab para ejemplificar la validez del método desarrollado.
4. Comparar los resultados obtenidos al aplicar el método con las soluciones exactas de ejemplos sintéticos.



# Estructura de la tesis

La tesis está dividida de la siguiente manera: Una introducción, el problema de estudio, las aportaciones del trabajo y cuatro capítulos:

En el primer capítulo se encuentran algunos conceptos y resultados relevantes para el desarrollo de la investigación como son: Existencia y unicidad del Primer problema con frontera móvil para la ecuación del calor, la TDR y sus propiedades, un teorema acerca de la transformada directa de Radon las primeras y segundas derivadas espaciales de una función definida en un dominio circular acotado en el plano, la TIR, y se concluye este capítulo con el teorema del soporte.

En el segundo capítulo se plantea un esquema y el desarrollo de la  $p$  – versión del MRG para resolver el Primer problema con frontera móvil para la ecuación del calor en el caso unidimensional.

En el tercer capítulo se plantea un esquema y el desarrollo de la  $p$  – versión del MRG para resolver el Primer problema con frontera móvil para la ecuación del calor para el caso bidimensional justificando el uso de la TDR de la solución y de su segundas derivadas parciales en todo el plano y se determina una cota del error de aproximación de la  $p$  – versión del MRG.

En el cuarto capítulo se hace la implementación del método propuesto ( $p$  – versión del MRG), con un ejemplo sintético en el caso unidimensional y tres ejemplos sintéticos en el caso bidimensional en el software Matlab.

Se continúa con las conclusiones del trabajo, las publicaciones hechas, las perspectivas que se pueden desprender de la investigación, los anexos y por último la bibliografía.

# Capítulo 1

## Material auxiliar

En este capítulo se inicia con algunos conceptos acerca del primer problema con frontera móvil para la ecuación del calor como son: Solución clásica, principio del máximo débil, principio del máximo fuerte, existencia y unicidad.

### 1.1. Primer problema con frontera móvil para la ecuación del calor

Se comienza definiendo la solución clásica la cual vamos a trabajar en esta tesis al resolver el Primer problema con frontera móvil para la ecuación del calor en un dominio circular acotado para el caso bidimensional, véase [19, pp. 200 y 492]:

#### *Definición 1.1.1*

*La función  $u(x, y, t) \in C^{2,1}\left(\bigcup_{0 < t < r} \Omega_t\right) \cap C\left(\overline{\bigcup_{0 \leq t \leq r} \Omega_t}\right)$  que satisface la ecuación del calor (3.1), la condición inicial (3.2) y la condición de frontera (3.3), se llama solución clásica del Primer problema de frontera móvil para la ecuación.*

Los teorema 1, 2 y 3 que a continuación se mencionan, se pueden ver [14, pp. 391-398], [18, p. 5] y [19 pp. 198, 492].

#### *Teorema 1.1.1. Principio del máximo débil*

*Si  $u(x, y, t) \in C\left(\overline{\bigcup_{0 \leq t \leq r} \Omega_t}\right)$ ,  $u_t, \Delta u \in C\left(\overline{\bigcup_{0 \leq t \leq r} \Omega_t}\right)$  y  $u_t - \Delta u \leq 0$  en  $\bigcup_{0 < t < r} \Omega_t$ , entonces*

$$\max_{\bigcup_{0 < t < r} \Omega_t} u = \max_{\partial \bigcup_{0 \leq t \leq r} \Omega_t} u \quad \text{ó} \quad \max_{\text{condición inicial}} u$$

**Teorema 1.1.2.** Principio del máximo fuerte

Sea  $u(x, y, t) \in C\left(\overline{\bigcup_{0 \leq t \leq r} \Omega_t}\right)$ ,  $u_t, \Delta u \in C\left(\overline{\bigcup_{0 \leq t \leq r} \Omega_t}\right)$  y  $u_t - \Delta u \leq 0$  en  $\bigcup_{0 < t < r} \Omega_t$ .

Si  $(x_1, y_1, t_1) \in \bigcup_{0 < t < r} \Omega_t$  tal que  $u(x_1, y_1, t_1) = M = \max_{\bigcup_{0 < t < r} \Omega_t} u$ , entonces  $u = M$ .

El Primer problema con frontera móvil para la ecuación del calor (3.1)-(3.3) no puede tener más de una solución clásica.

**Teorema 1.1.3.** Teorema de unicidad

Si dos funciones  $u_1(x, y, t)$  y  $u_2(x, y, t)$  definidas y continuas en la región  $\bigcup_{0 \leq t \leq r} \Omega_t$ , satisfacen la ecuación del calor,  $\frac{du(x, y, t)}{dt} - \Delta u(x, y, t) = \psi(x, y, t)$ , en  $\bigcup_{0 < t < r} \Omega_t$  y a iguales condiciones iniciales,  $u_1(x, y, 0) = u_2(x, y, 0) = f(x, y)$ , en  $\overline{\Omega_0}$ , y a iguales condiciones de frontera,  $u_1(x, y, t) = u_2(x, y, t) = 0$ , en  $\partial \bigcup_{0 < t < r} \Omega_t$ , entonces  $u_1(x, y, t) = u_2(x, y, t)$  en  $\bigcup_{0 \leq t \leq r} \Omega_t$ .

A continuación se enuncia la definición de la Transformada Directa de Radon de una función dos veces derivables de soporte compacto o de rápido decrecimiento definida en el plano.

## 1.2. Transformada Directa de Radon

La Transformada Directa de Radon de la función  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  ó  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  es una familia de integrales de  $f$  sobre una línea recta  $l$ , donde esta recta queda determinada por dos parámetros  $p$  y  $\varphi$ . La variable  $p$  es la distancia de la recta  $l$  al origen y  $\varphi$  es el ángulo formado por el eje  $X$  y el segmento perpendicular del origen a la recta  $l$ , véase la Figura 3.

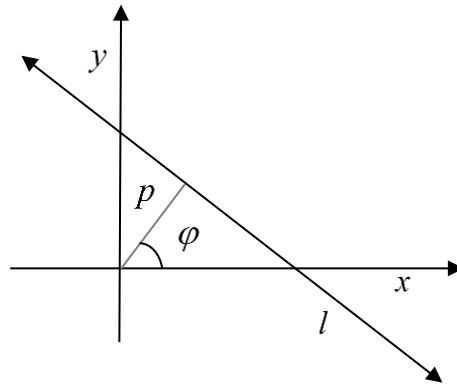


Figura 3. Representación de una recta

La ecuación de la recta  $l$  que se utilizará será en su forma normal

$$x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi = p,$$

así que para cualquier punto  $(x, y)$  que pertenezca a la recta  $l$  se tiene:

$$x = p \cos \varphi - \tau \operatorname{sen} \varphi,$$

$$y = p \operatorname{sen} \varphi + \tau \cos \varphi, \text{ con } \tau \in \mathbb{R}$$

**Observación 1.2.1.** A cada punto del espacio  $(p, \varphi)$  le corresponde una línea recta del dominio espacial  $(x, y)$  y la función  $\hat{f}_\varphi(p)$  es la proyección en una dimensión de  $f(x, y)$  a un ángulo  $\varphi$ , véase [11].

**Definición 1.2.1.**

Sea  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  ó  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ , la TDR de una función  $f$ , se denota  $R[f(x, y)](p, \varphi)$  ó  $\hat{f}_\varphi(p)$  y se define

$$\hat{f}_\varphi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p \cos \varphi - \tau \operatorname{sen} \varphi, p \operatorname{sen} \varphi + \tau \cos \varphi) d\tau, \quad (1.1)$$

con  $-\infty < p < \infty$ ,  $0 \leq \varphi < \pi$ , siempre que exista la integral.

A continuación damos la definición de la transformada directa de Radon restringida a un dominio acotado convexo del plano.

**Definición 1.2.2.**

Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  un dominio acotado convexo y  $f \in C(D)$ , entonces la TDR de la función  $f$  se define de la siguiente manera:

$$\hat{f}_\varphi(p) = \int_{-g_1(p)}^{g_2(p)} f(p \cos \varphi - \tau \operatorname{sen} \varphi, p \operatorname{sen} \varphi + \tau \cos \varphi) d\tau, (p, \varphi) \in \hat{\Omega}, \quad (1.2)$$

$$\hat{\Omega} = \{(p, \varphi) : r_0(\varphi + \pi) \leq p \leq r_0(\varphi), 0 \leq \varphi < \pi\},$$

$r_0 \in C^1([0, \pi])$  es una función polar que describe la frontera.

$g_1(p)$  y  $g_2(p)$  representan la longitud del segmento  $\overline{ab}$  y  $g_2(p)$  es longitud del segmento  $\overline{ac}$ , véase la Figura 4.

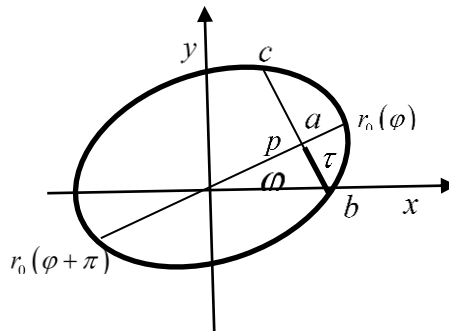


Figura 4. Dominio de la función  $f$ .

En el caso de que una función este definida en el plano, sea dos veces derivable con respecto a las variables espaciales, una vez derivable con respecto al tiempo  $t$  y nulas en  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ , donde  $\Omega$  es un dominio convexo acotado, ( $f \in C_0^{2,1}(\Omega)$ ) las definiciones (1.2.1) y (1.2.2) coinciden.

A continuación se enuncian algunas propiedades de la TDR, véase [11, p. 439] y [17].

### 1.3. Propiedades de la Transformada de Radon

Sean  $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ ,  $R[f(x, y)]$  y  $R[g(x, y)]$  las TDR de las funciones  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  respectivamente y sean  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

#### 1.3.1. Propiedad de linealidad

$$R[af(x, y) + bg(x, y)] = aR[f(x, y)] + bR[g(x, y)]. \quad (1.3)$$

#### 1.3.2. Propiedad de escala

Un ajuste de escala en las coordenadas  $(x, y)$  de  $f(x, y)$  resulta en un ajuste de escala de la coordenada  $p$  junto con un ajuste a la escala de amplitud de  $\hat{f}(p, \varphi)$ :

$$R[f(ax, ax)] = \frac{1}{|a|} \hat{f}(ap, \varphi), \quad \text{con } a \neq 0. \quad (1.4)$$

#### 1.3.3. Propiedad de soporte compacto

Las proyecciones  $\hat{f}(p, \varphi)$  son de soporte compacto en el espacio  $(p, \varphi)$ , si la función  $f(x, y)$  es de soporte compacto en el espacio  $(x, y)$ , es decir

$$\text{Si } f(x, y) = 0 \text{ para } |x| > c \text{ y } |y| > c, \text{ entonces } \hat{f}(p, \varphi) = 0 \text{ para } |p| > \sqrt{2c}, \quad (1.5)$$

donde  $c$  es una contante.

### 1.3.4. Propiedad de simetría y periodicidad

Simetría

$$(i) \quad \hat{f}(p, \varphi) = \hat{f}(-p, \varphi \pm \pi). \quad (1.6)$$

Periodicidad

$$(ii) \quad \hat{f}(p, \varphi) = \hat{f}(p, \varphi + 2k\pi). \quad (1.7)$$

### 1.3.5. Propiedad de Traslación

Una traslación en  $f(x, y)$  resulta en un cambio de  $\hat{f}(p, \varphi)$  por una distancia igual a la proyección de la traslación del vector en la línea  $x \cos \varphi + y \sin \varphi = p$ .

$$R[f(x + x_0, y + y_0)] = \hat{f}(p + p_0, \varphi), \quad (1.8)$$

donde  $p_0 = x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi$ .

### 1.3.6. Propiedad de Rotación

Una rotación del objeto por un ángulo  $\varphi_0$  causa una traslación de su TDR en la variable  $\varphi$ . Si la función  $f(x, y)$  la escribimos en coordenadas polares,  $h(r, \alpha)$ , entonces

$$R[h(r, \alpha + \varphi_0)](p, \varphi) = \hat{f}(p, \varphi + \varphi_0), \quad (1.9)$$

véase [17].

### 1.3.7. Transformada de Radon de la derivada de una función definida en todo el plano

#### Teorema 1.3.7.1

Si  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  ó  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ , entonces:

$$\text{i) } \left( \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right)^\wedge (p, \varphi) = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial p} \hat{f}(p, \varphi). \quad (1.10)$$

$$\text{ii) } \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \right)^\wedge (p, \varphi) = \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial p^2} \hat{f}(p, \varphi). \quad (1.11)$$

$$\text{iii) } \left( \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right)^\wedge (p, \varphi) = \text{sen} \varphi \frac{\partial}{\partial p} \hat{f}(p, \varphi). \quad (1.12)$$

$$\text{iv) } \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \right)^\wedge (p, \varphi) = \text{sen}^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial p^2} \hat{f}(p, \varphi). \quad (1.13)$$

$$\text{v) } (\Delta f(x, y))^\wedge (p, \varphi) = \frac{\partial^2}{\partial p^2} \hat{f}(p, \varphi). \quad (1.14)$$

#### Observación 1.3.7.1

En general las expresiones (1.10) - (1.14) no se cumplen para funciones extendidas al plano de funciones dos veces derivables definidas en un círculo de radio  $r$ . La extensión consiste en hacer cero el valor de la función en el complemento del círculo de radio  $r$ , como lo muestra el siguiente ejemplo.

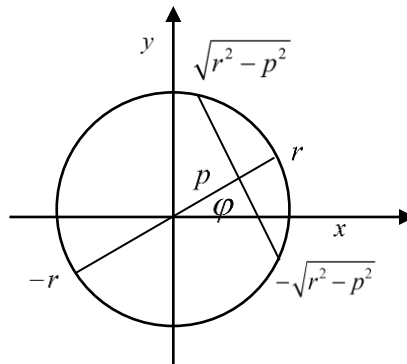


Figura 5. Círculo de radio  $r$ .

### **Ejemplo 1.3.7.1**

Se probará que  $\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right)^\wedge(p, \varphi) = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial p} \hat{f}(p, \varphi)$  no se cumple para la función extensión

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{si } x^2 + y^2 < r^2, \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 \geq r^2, \end{cases} \quad \text{véase la Figura 5.}$$

Prueba.

Por un lado

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^\wedge(p, \varphi) = \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)^\wedge(p, \varphi) = (0)^\wedge(p, \varphi) = 0. \quad (1.15)$$

Y por otro lado

$$\cos \varphi \frac{\partial}{\partial p} \hat{f}(p, \varphi) = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial p} (2c\sqrt{r^2 - p^2}) = \cos \varphi \frac{-2cp}{\sqrt{r^2 - p^2}} \neq 0. \quad (1.16)$$

Por lo tanto de (1.15) y (1.16) se concluye que la propiedad 1.3.7 i) en general no se cumple para funciones definidas en un círculo de radio  $r$  acotado.

A continuación se enuncia y se demuestra un teorema de la Transformada de Radon de derivadas parciales de funciones definidas en un círculo de radio  $r$  acotado.

### **1.3.8. Transformada de Radon de derivadas parciales de funciones definidas en un círculo acotado de radio $r$**

Se comienza enunciando la Regla de Derivación de Leibniz, véase [3], para una función parametrizada en coordenadas de Radon, la cual se utiliza en las demostraciones del siguiente teorema.

Dada una función parametrizada  $\tilde{f}$  en coordenadas de Radon de una función  $f$  en coordenadas rectangulares definida en un círculo de radio  $r$ ,

$$f(x, y) = \tilde{f}(p \cos \varphi - \tau \operatorname{sen} \varphi, p \operatorname{sen} \varphi + \tau \cos \varphi) = \tilde{f}(p, \tau, \varphi), \quad (1.17)$$

cumple:

$$\frac{\partial}{\partial p} \int_{-g(p)}^{g(p)} f(p, \tau, \varphi) d\tau = g'(p) [f(p, -g(p), \varphi) + f(p, g(p), \varphi)] + \int_{-g(p)}^{g(p)} \frac{\partial f(p, \tau, \varphi)}{\partial p} d\tau, \quad (1.18)$$

siempre que

1.  $f(p, \tau, \varphi)$  sea integrable,
2.  $\frac{\partial f(p, \tau, \varphi)}{\partial p}$  exista,
3.  $\frac{\partial f(p, \tau, \varphi)}{\partial p}$  sea integrable,
4.  $g(p) = \sqrt{r^2 - p^2}$ ,  $-r < p < r$  con  $0 < r < \infty$ .

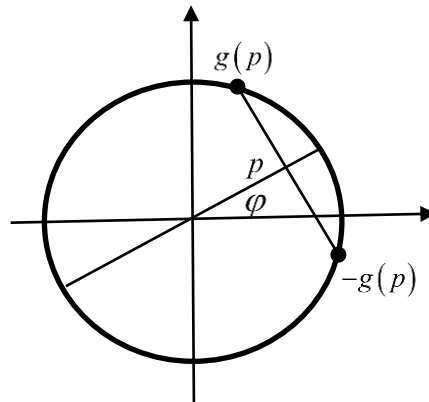


Figura 6. Círculo de radio  $r$  de la función  $f$ .

El siguiente teorema es una aportación de este trabajo, véase [6].

**Teorema 1.3.8.1**

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  es un círculo acotado de radio  $r$ . Si  $f \in C^2(\Omega)$ , entonces:

$$\begin{aligned} \text{a) } R \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] &= \cos \varphi \left( \frac{\partial \hat{f}}{\partial p} - g'(p) \left[ \tilde{f}(p, g(p), \varphi) + \tilde{f}(p, -g(p), \varphi) \right] \right) \\ &\quad - \text{sen } \varphi \left( \tilde{f}(p, g(p), \varphi) - \tilde{f}(p, -g(p), \varphi) \right). \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } R \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right] &= \text{sen } \varphi \left( \frac{\partial \hat{f}}{\partial p} - g'(p) \left[ \tilde{f}(p, g(p), \varphi) + \tilde{f}(p, -g(p), \varphi) \right] \right) \\ &\quad - \cos \varphi \left( \tilde{f}(p, g(p), \varphi) - \tilde{f}(p, -g(p), \varphi) \right). \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } R \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial p^2} \\ &\quad - \cos^2 \varphi g'(p) \left[ \frac{\partial \tilde{f}(p, g(p), \varphi)}{\partial p} + \frac{\partial \tilde{f}(p, -g(p), \varphi)}{\partial p} \right] \\ &\quad - \cos^2 \varphi g''(p) \left[ \tilde{f}(p, g(p), \varphi) + \tilde{f}(p, -g(p), \varphi) \right] \\ &\quad - \text{sen } \varphi \cos \varphi \left[ \frac{\partial \tilde{f}(p, g(p), \varphi)}{\partial p} + \frac{\partial \tilde{f}(p, -g(p), \varphi)}{\partial p} \right] \\ &\quad - \cos \varphi g'(p) \left[ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(p, g(p), \varphi) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(p, -g(p), \varphi) \right] \\ &\quad - \text{sen } \varphi \left[ \widetilde{\frac{\partial f}{\partial x}}(p, g(p), \varphi) - \widetilde{\frac{\partial f}{\partial x}}(p, -g(p), \varphi) \right]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned}
d) \quad R \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] &= \text{sen}^2 \varphi \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial p^2} \\
&- \text{sen}^2 \varphi g'(p) \left[ \frac{\partial \tilde{f}(p, g(p), \varphi)}{\partial p} + \frac{\partial \tilde{f}(p, -g(p), \varphi)}{\partial p} \right] \\
&- \text{sen}^2 \varphi g''(p) \left[ \tilde{f}(p, g(p), \varphi) + \tilde{f}(p, -g(p), \varphi) \right] \\
&- \text{sen} \varphi \cos \varphi \left[ \frac{\partial \tilde{f}(p, g(p), \varphi)}{\partial p} - \frac{\partial \tilde{f}(p, -g(p), \varphi)}{\partial p} \right] \quad (1.22) \\
&- \text{sen} \varphi g'(p) \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(p, g(p), \varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}(p, -g(p), \varphi) \right] \\
&- \cos \varphi \left( \widetilde{\frac{\partial f}{\partial y}(p, g(p), \varphi)} - \widetilde{\frac{\partial f}{\partial y}(p, -g(p), \varphi)} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e) \quad R[\Delta f(x, y)](p, \varphi) &= \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial p^2} \\
&- g'(p) \left[ \frac{\partial \tilde{f}(p, g(p), \varphi)}{\partial p} + \frac{\partial \tilde{f}(p, -g(p), \varphi)}{\partial p} \right] \\
&- g''(p) \left[ \tilde{f}(p, g(p), \varphi) + \tilde{f}(p, -g(p), \varphi) \right] \\
&- 2 \text{sen} \varphi \cos \varphi \left[ \frac{\partial \tilde{f}(p, g(p), \varphi)}{\partial p} + \frac{\partial \tilde{f}(p, -g(p), \varphi)}{\partial p} \right] \quad (1.23) \\
&- (\cos \varphi g'(p) + \text{sen} \varphi) \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(p, g(p), \varphi) + \frac{\partial f}{\partial x}(p, -g(p), \varphi) \right] \\
&- (\text{sen} \varphi g'(p) + \cos \varphi) \left[ \widetilde{\frac{\partial f}{\partial y}(p, g(p), \varphi)} + \widetilde{\frac{\partial f}{\partial y}(p, -g(p), \varphi)} \right].
\end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial \tilde{f}(p, g(p), \varphi)}{\partial p} = \left( \cos \varphi \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{\substack{x=p \cos \varphi - g(p) \operatorname{sen} \varphi \\ y=p \operatorname{sen} \varphi + g(p) \cos \varphi}} \quad y$$

$$\frac{\partial \tilde{f}(p, -g(p), \varphi)}{\partial p} = \left( \cos \varphi \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{\substack{x=p \cos \varphi + g(p) \operatorname{sen} \varphi \\ y=p \operatorname{sen} \varphi - g(p) \cos \varphi}} \quad .$$

***Demostración del a).***

Derivando la función parametrizada  $\tilde{f}$  de la función  $f(x, y)$  con respecto a  $p$  y  $\tau$ , se tiene:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial p}, \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau}. \quad (1.25)$$

De la parametrización de Radon (1.17), se tiene que  $\frac{\partial x}{\partial p} = \cos \varphi$ ,  $\frac{\partial y}{\partial p} = \operatorname{sen} \varphi$ ,  $\frac{\partial x}{\partial \tau} = -\operatorname{sen} \varphi$  y

$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \cos \varphi$ , por lo cual

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial p} = \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} = -\operatorname{sen} \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (1.27)$$

Despejando  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}$  de (1.27) y sustituyendo en (1.26) se obtiene

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial p} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau}. \quad (1.28)$$

Integrando (1.28) con respecto a  $\tau$

$$\int_{-g(p)}^{g(p)} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p} d\tau = \frac{1}{\cos \varphi} \int_{g(p)} \frac{\partial f}{\partial x} d\tau + \frac{\text{sen } \varphi}{\cos \varphi} \int_{-g(p)}^{g(p)} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} d\tau$$

$$\int_{-g(p)}^{g(p)} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p} d\tau = \frac{1}{\cos \varphi} R \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] + \frac{\text{sen } \varphi}{\cos \varphi} \left[ \tilde{f}(p, g(p), \varphi) - \tilde{f}(p, -g(p), \varphi) \right]. \quad (1.29)$$

Sustituyendo el valor de  $\int_{-g(p)}^{g(p)} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p} d\tau$  en la Regla de Leibniz

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \int_{-g(p)}^{g(p)} f(p, \tau, \varphi) d\tau &= \left[ f(p, -g(p), \varphi) + f(p, g(p), \varphi) \right] g'(p) \\ &+ \frac{1}{\cos \varphi} R \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] + \frac{\text{sen } \varphi}{\cos \varphi} \left[ \tilde{f}(p, g(p), \varphi) - \tilde{f}(p, -g(p), \varphi) \right]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

El lado izquierdo de (1.30) es igual a  $\frac{\partial \hat{f}}{\partial p}$ , ahora despejando  $R \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]$  se tiene

$$\begin{aligned} R \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] &= \cos \varphi \left( \frac{\partial \hat{f}}{\partial p} - g'(p) \left[ \tilde{f}(p, g(p), \varphi) + \tilde{f}(p, -g(p), \varphi) \right] \right) \\ &- \text{sen } \varphi \left( \tilde{f}(p, g(p), \varphi) - \tilde{f}(p, -g(p), \varphi) \right). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Así queda demostrada la expresión (1.19) del teorema 1.3.8.1. De manera análoga se demuestra la expresión (1.20).

### ***Demostración del c)***

Se sabe que

$$R \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] = R \left[ \frac{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial x} \right]. \quad (1.32)$$

Usando (1.19) dos veces y distribuyendo las derivadas se tiene

$$\begin{aligned}
R\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] &= \cos \varphi \left( \begin{aligned} &\cos \varphi \left[ \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial p^2} - g'(p) \left[ \frac{\partial \tilde{f}(p, g(p), \varphi)}{\partial p} + \frac{\partial \tilde{f}(p, -g(p), \varphi)}{\partial p} \right] \right] \\ &- g''(p) \left[ \tilde{f}(p, g(p), \varphi) + \tilde{f}(p, -g(p), \varphi) \right] \\ &- \sin \varphi \left[ \frac{\partial \tilde{f}(p, g(p), \varphi)}{\partial p} - \frac{\partial \tilde{f}(p, -g(p), \varphi)}{\partial p} \right] \\ &- g'(p) \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(p, g(p), \varphi) + \frac{\partial f}{\partial x}(p, -g(p), \varphi) \right] \end{aligned} \right) \\
&\quad - \sin \varphi \left( \overline{\frac{\partial f}{\partial x}(p, g(p), \varphi)} - \overline{\frac{\partial f}{\partial x}(p, -g(p), \varphi)} \right), \tag{1.33}
\end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned}
R\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial p^2} \\
&\quad - \cos^2 \varphi g'(p) \left[ \frac{\partial \tilde{f}(p, g(p), \varphi)}{\partial p} + \frac{\partial \tilde{f}(p, -g(p), \varphi)}{\partial p} \right] \\
&\quad - \cos^2 \varphi g''(p) \left[ \tilde{f}(p, g(p), \varphi) + \tilde{f}(p, -g(p), \varphi) \right] \\
&\quad - \sin \varphi \cos \varphi \left[ \frac{\partial \tilde{f}(p, g(p), \varphi)}{\partial p} - \frac{\partial \tilde{f}(p, -g(p), \varphi)}{\partial p} \right] \\
&\quad - \cos \varphi g'(p) \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(p, g(p), \varphi) + \frac{\partial f}{\partial x}(p, -g(p), \varphi) \right] \\
&\quad - \sin \varphi \left( \overline{\frac{\partial f}{\partial x}(p, g(p), \varphi)} - \overline{\frac{\partial f}{\partial x}(p, -g(p), \varphi)} \right). \tag{1.34}
\end{aligned}$$

Es lo que se quería demostrar. De manera análoga se demuestra la expresión (1.22).

***Demostración del e)***

$$R[\Delta f(x, y)](p, \varphi) = R\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]$$

$$= R \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] + R \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right].$$

Sustituyendo los valores de  $R \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]$  y  $R \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]$  de las expresiones (1.21) y (1.22) respectivamente se obtiene la expresión (1.23).

El siguiente teorema establece las condiciones para que la transformada de Radon de la derivada de una función dos veces derivable de soporte compacto definida en todo el plano coincida con la transformada de Radon de la derivada de una función definida en un dominio acotado.

**Teorema 1.3.8.2**

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un círculo de radio  $r$  acotado. Si  $f$  es una función definida en el plano, dos veces derivable con respecto a las variables espaciales, una vez derivable con respecto al tiempo  $t$  y nulas en  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ , ( $f \in C_0^{2,1}(\Omega)$ ), entonces las expresiones (1.10) - (1.14) coinciden con las expresiones (1.19) - (1.23) respectivamente.

**Demostración.**

Sólo probaremos que las expresiones (1.10) y (1.19) coinciden, es decir

$$\begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial \hat{f}}{\partial p} &= \cos \varphi \left( \frac{\partial \hat{f}}{\partial p} - g'(p) \left[ \tilde{f}(p, g(p), \varphi) + \tilde{f}(p, -g(p), \varphi) \right] \right) \\ &\quad - \operatorname{sen} \varphi \left( \tilde{f}(p, g(p), \varphi) - \tilde{f}(p, -g(p), \varphi) \right), \end{aligned}$$

la cual se cumple por la hipótesis que el valor de la función en la frontera es cero

$$\tilde{f}(p, g(p), \varphi) = \tilde{f}(p, -g(p), \varphi) = 0 .$$

Otro concepto fundamental en el trabajo de investigación es la Transformada Inversa de Radon la cual se deduce de la composición del operador de Retroproyección y la transformada de Fourier, véase [8], [10] y [11].

## 1.4. Transformada Inversa de Radon

### Definición 1.4.1.

La Transformada Inversa de Radon de  $\hat{f}_\varphi(p)$  se define como:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}_\varphi(x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi, \varphi)}{x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi - p} dp d\varphi, \quad (1.35)$$

donde  $-\infty < p < \infty$  y  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , véase [9].

Finalmente concluimos este capítulo con el teorema del soporte y un corolario.

## 1.5. Teorema del soporte

Este teorema garantiza que cuando se tenga que la TDR de una función es cero en el exterior de la bola con centro en el origen y radio  $A$ , la inversa también es cero en el exterior de la bola, véase [8, pp. 10-13]

### Teorema 1.5.1. Teorema del soporte

Sea  $l$  una recta normal arbitraria,  $x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi = p$  y sea  $f \in C(\mathbb{R}^2)$

Si se cumplen las siguientes condiciones:

- i) Para cada entero  $k > 0$ ,  $|(x, y)|^k f(x, y)$  está acotada.
- ii) Existe una constante  $A > 0$  tal que

$$R[f(x, y)](\varphi, p) = 0 \text{ para } d(0, l) > A, \quad (1.36)$$

$d$ , denota la distancia Euclidiana, entonces

$$f(x, y) = 0 \text{ para } |(x, y)| > A. \quad (1.37)$$

**Corolario 1.5.1.**

Si  $f \in C(\mathbb{R}^2)$  que cumple (i) del teorema del soporte y

$$R[f(x, y)](\varphi, p) = 0 \tag{1.38}$$

para toda recta  $l$  que es disjunta a un conjunto convexo compacto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , entonces

$$f(x, y) = 0 \text{ para } (x, y) \notin \Omega. \tag{1.39}$$



# Capítulo 2

## Desarrollo de la $p$ - versión del MRG para el Primer Problema de Frontera Móvil para la Ecuación del Calor Unidimensional

A lo largo de este capítulo, salvo se diga lo contrario, trabajaremos con funciones definidas en la recta real, dos veces derivables y nulas en  $\mathbb{R} \setminus D$ , donde  $D$  es el intervalo cerrado  $[-(1-t^2), (1-t^2)]$  con  $t \in [0, 1]$ .

En este capítulo se plantea el esquema y el desarrollo la  $p$  - versión del MRG para obtener la solución numérica del Primer problema de frontera móvil para la ecuación del calor en un intervalo acotado para el caso unidimensional, véase (2.1)-(2.3).

### 2.1 Primer Problema de Frontera Móvil para la Ecuación del Calor Unidimensional

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = \psi_1(x, t), \quad x \in \bigcup_{0 < t < T} D_t, \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \overline{D_0}, \quad (2.2)$$

$$u(s_1(t), t) = 0 \quad \text{y} \quad u(s_2(t), t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

donde:

$$D_t = \{x \in \mathbb{R} : s_1(t) < x < s_2(t) \text{ con } t \in [0, T] \text{ fijo}\},$$

$s_1, s_2 \in C^1([0, T])$  tal que  $s_1(t) < s_2(t)$  para  $t \in (0, T)$ , además de que  $s_1(0) = s_2(0)$  y  $s_1(T) = s_2(T)$  se exige que la figura que se forma sea un círculo, (figura convexa).

$\psi_1 \in C_0^{2,1}\left(\bigcup_{0 < t < T} D_t\right)$ , véase la Figura 1.

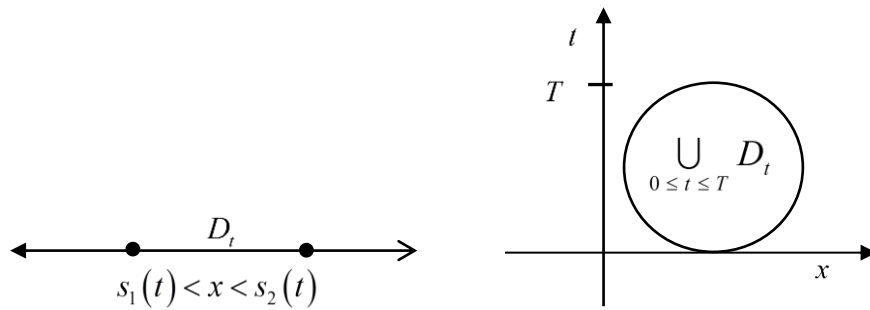


Figura 1. Región convexa con frontera móvil

## 2.2 Esquema de la $p$ – versión del Método de Rayos Generales

La  $p$  - versión del MRG está constituida de los siguientes cuatro pasos:

1. Se considera a la variable tiempo,  $t$ , como una variable espacial.
2. Se aplica la TDR al problema del paso anterior para construir una familia de EDO sobre la variable  $p$  con respecto a la función,  $u_\phi(p)$ .
3. Se resuelve la familia de EDO con condiciones de frontera homogéneas.
4. Se calcula la Transformada Inversa de Radon de la solución obtenida.

## 2.3 Desarrollo de la $p$ – versión del Método de Rayos Generales

A continuación se hace el desarrollo del esquema de la sección 2.2 del Primer problema con frontera móvil para la ecuación del calor, (2.1) - (2.3).

### Desarrollo del paso 1

La función  $\psi_1$  es una función definida en el plano  $x t$ .

### Desarrollo del paso 2

Aplicación de la TDR a la ecuación (2.1) para obtener una familia de EDO sobre la variable  $p$  con respecto de la función  $\hat{u}_\varphi(p)$

$$R[u_t(x,t) - u_{xx}(x,t)] = R[\psi(x,t)].$$

Por la propiedad de linealidad de la TDR, (1.3) y por las propiedades TDR de las derivadas de una función dadas por las ecuaciones (1.11) y (1.12) se tiene

$$\text{sen}\varphi \frac{\partial \hat{u}_\varphi(p)}{\partial p} - \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \hat{u}_\varphi(p)}{\partial p^2} = \hat{\psi}_\varphi(p)$$

y cambiando la notación  $\frac{\partial \hat{u}_\varphi(p)}{\partial p}$  por  $\hat{u}'_\varphi(p)$ , la ecuación anterior se escribe

$$\text{sen}\varphi \hat{u}'_\varphi(p) - \cos^2 \varphi \hat{u}''_\varphi(p) = \hat{\psi}_\varphi(p).$$

Por lo tanto

$$\hat{u}''_\varphi(p) - \frac{\text{sen}\varphi}{\cos^2 \varphi} \hat{u}'_\varphi(p) = -\frac{\hat{\psi}_\varphi(p)}{\cos^2 \varphi} \text{ con } (p, \varphi) \in \hat{\Omega}, \quad (2.4)$$

donde  $\hat{\Omega}(p, \varphi) = \{(p, \varphi) : -r_0(\varphi + \pi) \leq p \leq r_0(\varphi), 0 \leq \varphi < \pi, \text{ y } r_0 \in C([0, \pi])\}$  es el dominio de los parámetros  $p$  y  $\varphi$ . Para cada valor fijo del parámetro  $\varphi$  se tienen dos puntos frontera de la variable  $p$ ,  $p_0 = -r_0(\varphi + \pi)$  y  $p_1 = r_0(\varphi)$ .

Por el teorema del soporte, (1.5.1), se supondrá que las condiciones de frontera son cero

$$u(p_0)=0 \text{ y } u(p_1)=0.$$

### Desarrollo del paso 3

Resolución de la familia de EDO construida; fijando el ángulo  $\varphi$  con condiciones de frontera cero, se hace en dos casos.

#### Caso 1

Considerando  $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$  y tomando  $\hat{w}_\varphi(p) = \hat{u}'_\varphi(p)$  tenemos

$$\hat{w}'_\varphi(p) - k \hat{w}_\varphi(p) = -\frac{\hat{\psi}_\varphi(p)}{\cos^2 \varphi}, \text{ con } k = \frac{\text{sen } \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\left[ e^{-kp} w_\varphi(p) \right]' = -e^{-kp} \frac{\hat{\psi}_\varphi(p)}{\cos^2 \varphi},$$

$$\hat{w}_\varphi(p) = -e^{kp} \int_{p_0}^p e^{-k\xi_1} \frac{\hat{\psi}_\varphi(\xi_1)}{\cos^2 \varphi} d\xi_1 + c e^{kp}.$$

Entonces

$$\hat{u}_\varphi(p) = -\int_{p_0}^p e^{k\xi_2} \int_{p_0}^{\xi_2} \left( e^{-k\xi_1} \frac{\hat{\psi}_\varphi(\xi_1)}{\cos^2 \varphi} d\xi_1 \right) d\xi_2 + c_1 \int_{p_0}^p e^{k\xi_2} d\xi_2 + c_2,$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son las constantes de integración las cuales se determinan con las condiciones iniciales y de frontera.

Para  $p = p_0$ , se tiene que  $c_2 = 0$ .

Para  $p = p_1$ , se obtiene que

$$c_1 = \frac{\int_{p_0}^{p_1} e^{k\xi_2} \int_{p_0}^{\xi_2} \left( e^{-k\xi_1} \frac{\hat{\psi}_\varphi(\xi_1)}{\cos^2 \varphi} d\xi_1 \right) d\xi_2}{\int_{p_0}^{p_1} e^{k\xi_2} d\xi_2}.$$

Por lo tanto,

$$\hat{u}_\varphi(p) = -\int_{p_0}^p e^{k\xi_2} \int_{p_0}^{\xi_2} \left( e^{-k\xi_1} \frac{\hat{\psi}_\varphi(\xi_1)}{\cos^2 \varphi} d\xi_1 \right) d\xi_2 + \frac{\int_{p_0}^{p_1} e^{k\xi_2} \int_{p_0}^{\xi_2} \left( e^{-k\xi_1} \frac{\hat{\psi}_\varphi(\xi_1)}{\cos^2 \varphi} d\xi_1 \right) d\xi_2}{\int_{p_0}^{p_1} e^{k\xi_2} d\xi_2} \int_{p_0}^p e^{k\xi_2} d\xi_2. \quad (2.5)$$

## Caso 2

Considerando  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , tenemos  $\cos^2 \varphi = 0$  y  $\text{sen } \varphi = 1$ , entonces la ecuación

$\text{sen } \varphi \hat{u}'_\varphi(p) - \cos^2 \varphi \hat{u}''_\varphi(p) = \hat{\psi}_\varphi(p)$  se reescribe como sigue  $\hat{u}'_\varphi(p) = \hat{\psi}_\varphi(p)$ , que al integrar en ambos miembros de la ecuación se tiene

$$\hat{u}_\varphi(p) = \int_{p_0}^p \hat{\psi}_\varphi(t) dt.$$

Por lo tanto,

$$\hat{u}_\varphi(p) = \begin{cases} -\int_{p_0}^p e^{k\xi_2} \int_{p_0}^{\xi_2} \left( e^{-k\xi_1} \frac{\hat{\psi}_\varphi(\xi_1)}{\cos^2 \varphi} d\xi_1 \right) d\xi_2 + \frac{\int_{p_0}^{p_1} e^{k\xi_2} \int_{p_0}^{\xi_2} \left( e^{-k\xi_1} \frac{\hat{\psi}_\varphi(\xi_1)}{\cos^2 \varphi} d\xi_1 \right) d\xi_2}{\int_{p_0}^{p_1} e^{k\xi_2} d\xi_2} \int_{p_0}^p e^{k\xi_2} d\xi_2, & \varphi \neq \frac{\pi}{2} \\ \int_{p_0}^p \hat{\psi}_\varphi(t) dt, & \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (2.6)$$

## Desarrollo del paso 4

Obtención de la solución  $u(x,t)$ , la cual se obtiene al aplicar la TIR de la solución obtenida en el paso 3.

$$u(x,t) = R^{-1}[\hat{u}_\varphi(p)]. \quad (2.7)$$



# Capítulo 3

## Desarrollo de la $p$ - versión del MRG para el Primer Problema de Frontera Móvil para la Ecuación del Calor Bidimensional

En este capítulo se plantea el esquema y el desarrollo la  $p$  - versión del MRG para obtener la solución numérica del Primer problema de frontera móvil para la ecuación del calor en un dominio circular acotado para el caso bidimensional, ver (3.1) - (3.3).

### 3.1 Primer problema de frontera móvil para la ecuación del calor bidimensional

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} - \Delta u(x, y, t) = \psi_2(x, y, t), \quad (x, y) \in \bigcup_{0 < t < r} \Omega_t, \quad (3.1)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (x, y) \in \overline{\Omega_0}, \quad (3.2)$$

$$u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial \bigcup_{0 < t < r} \Omega_t, \quad (3.3)$$

donde:

$\psi_2 \in C^{2,1} \left( \bigcup_{0 \leq t \leq r} \Omega_t \right)$ ,  $f \in C^1(\Omega_0)$  son funciones dadas,

$\Omega_t = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 < (r-t)^2, t \in [0, r] \text{ fijo} \right\} \subset \mathbb{R}^2$  dominio convexo,

$\partial \bigcup_{0 < t < r} \Omega_t$  es la frontera de  $\bigcup_{0 < t < r} \Omega_t$ , véase la Figura 2.

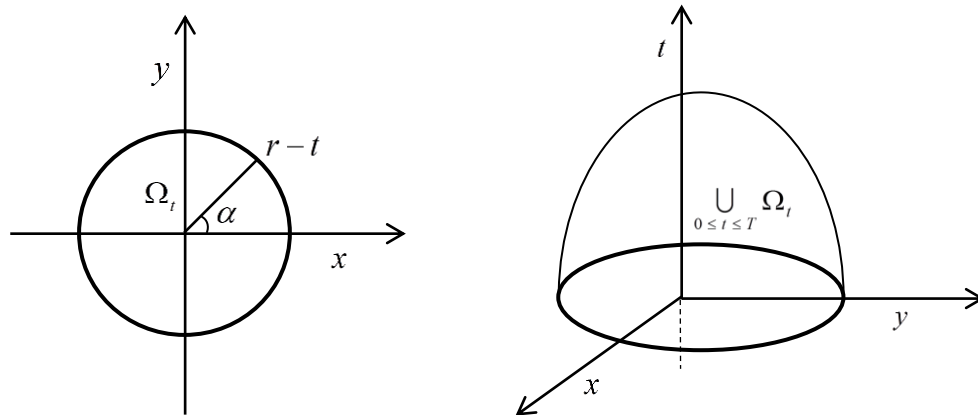


Figura 2. Región convexa con frontera móvil.

### 3.2 Esquema de la $p$ - versión del Método de Rayos Generales

La  $p$  - versión del MRG está constituida de seis pasos:

1. Se considera en diferencias finitas la derivada de  $u(x, y, t)$  con respecto al tiempo.
2. Se extiende la solución  $u(x, y, t_i)$  y las funciones  $\psi_2(x, y, t_i)$  y  $f(x, y)$  a todo el plano a todo el plano  $\mathbb{R}^2$  haciendo  $u(x, y, t_i) = 0$ ,  $\psi_2(x, y, t_i) = 0$  para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{t_i}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N$  y  $f(x, y) = 0$  si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0$ .
3. Se aplica la Transformada Directa de Radon a la ecuación aproximada para un tiempo  $t_i$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ , que se obtuvo en el paso 1, con la finalidad de convertir la EDP a una familia de EDO con condiciones de frontera homogéneas sobre la variable  $p$ , teniendo en cuenta que si la solución extendida  $u(x, y, t_i)$  no

tiene derivadas continuas de segundo orden en todo el plano o bien los valores de la función y sus primeras derivadas parciales sobre  $x$  y  $y$  no son cero en la frontera de  $\Omega_{t_i}$ , se aplica la Transformada Directa de Radon a una aproximación  $u^\varepsilon(x, y, t_i)$ , ver (3.13) a la solución  $u(x, y, t_i)$  la cual es dos veces derivable con respecto a las variables espaciales, una vez derivable con respecto al tiempo  $t$  y nulas en  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{t_i}$ , donde  $\Omega_{t_i}$  es un círculo de radio  $r - t_i$  acotado.

O bien

Suponiendo que la solución extendida  $u(x, y, t_i)$  al plano sea dos veces derivable con respecto a las variables espaciales, una vez derivable con respecto al tiempo  $t$  y nulas en  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{t_i}$ , donde  $\Omega_{t_i}$  es un círculo de radio  $r - t_i$  acotado.

4. Se resuelve la familia de EDO con condiciones de frontera homogéneas.
5. Se calcula la TIR de la solución obtenida.
6. La solución aproximada del problema (3.1) - (3.3) se obtiene de manera recursiva desde  $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_N$ .

### **3.3 Desarrollo de la $p$ – versión del Método de Rayos Generales**

A continuación se hace el desarrollo del esquema de la sección 3.2 del Primer problema con frontera móvil para la ecuación del calor, (3.1) - (3.3).

#### **Desarrollo del paso 1**

Se hace la aproximación en diferencias finitas la derivada de  $u(x, y, t)$  con respecto al tiempo

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) \approx \frac{u(x, y, t_i) - u(x, y, t_{i-1})}{h} \quad (3.4)$$

donde  $h \rightarrow 0$  es el tamaño de paso en el tiempo,  $i = 1, 2, \dots, N$  y  $t_0 = 0$ .

Entonces el Primer problema con frontera móvil (3.1) - (3.3) se reescribe de la siguiente forma:

$$\Delta u(x, y, t_i) - \frac{1}{h} u(x, y, t_i) = \psi_0(x, y, t_i), \quad (x, y) \in \Omega_{t_i}, \quad 0 < t_i < r, \quad (3.5)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (x, y, 0) \in \overline{\Omega_0}, \quad (3.6)$$

$$u(x, y, t_i) = 0, \quad (x, y, t_i) \in \partial\Omega_{t_i}, \quad 0 < t_i < r, \quad (3.7)$$

donde:

$$u(x, y, t_0) = u(x, y, 0) \text{ y } \psi_0(x, y, t_i) = -\psi(x, y, t_i) - \frac{u(x, y, t_{i-1})}{h} \text{ si } (x, y, t_i) \in \Omega_{t_i},$$

con  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ .

### Desarrollo del paso 2

Se extiende la solución  $u(x, y, t_i)$  y las funciones  $\psi_0(x, y, t_i)$  y  $f(x, y)$  a todo el plano  $\mathbb{R}^2$  tal que  $u(x, y, t_i) = 0$ ,  $\psi_0(x, y, t_i) = 0$  para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{t_i}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N$  y  $f(x, y) = 0$  si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0$ .

### Desarrollo del paso 3

Se construye la familia de EDO sobre la variable  $p$  con respecto de la función  $\hat{u}_i(p, \varphi)$ , aplicando la Transformada Directa de Radon a la ecuación (3.5).

$$R \left[ \Delta u(x, y, t_i) - \frac{1}{h} u(x, y, t_i) \right] = R \left[ \psi_0(x, y, t_i) \right], \quad (x, y, t_i) \in \Omega, \quad 0 < t_i < r,$$

Por la linealidad de la Transformada (1.3) y la propiedad de la Transformada Directa de Radon a derivadas de una función, (1.14) se tiene

$$\frac{d^2 \hat{u}_i(p, \varphi)}{dp^2} - \frac{1}{h} \hat{u}_i(p, \varphi) = \hat{\psi}_{0, t_i}(p, \varphi). \quad (3.8)$$

#### Desarrollo del paso 4

Se resuelve la familia de EDO construida; fijando el ángulo  $\varphi$  con condiciones de frontera cero, véase [22].

Para simplificar la notación se considera el tamaño de paso  $h$  como  $\frac{1}{m^2}$ ,  $m > 0$ .

Así la solución general de la ecuación homogénea,  $\hat{u}_{i, \text{homogénea}}$ , asociada a la ecuación (3.8) es

$$\hat{u}_{i, \text{homogénea}} = c_1 e^{-mp} + c_2 e^{mp} \quad (3.9)$$

Una solución particular,  $\hat{u}_{i, \text{particular}}$ , de la ecuación (3.8) es:

$$\hat{u}_{i, \text{particular}} = e^{-mp} \int_{-(r-t_i)}^p \frac{\hat{\psi}_{t_i, 0}(\xi, \varphi) e^{m\xi}}{-2m} d\xi + e^{mp} \int_{-(r-t_i)}^p \frac{\hat{\psi}_{t_i, 0}(\xi, \varphi) e^{-m\xi}}{2m} d\xi. \quad (3.10)$$

Por lo tanto la solución de la ecuación (3.8), considerando las condiciones de frontera homogéneas es

$$\hat{u}_i = c_1 e^{-mp} + c_2 e^{mp} + e^{-mp} \int_{-(r-t_i)}^p \frac{\hat{\psi}_{t_i, 0}(\xi, \varphi) e^{m\xi}}{-2m} d\xi + e^{mp} \int_{-(r-t_i)}^p \frac{\hat{\psi}_{t_i, 0}(\xi, \varphi) e^{-m\xi}}{2m} d\xi \quad (3.11)$$

donde:

$$c_1 = \frac{e^{-2m(r-t_i)} \int_{-(r-t_i)}^{(r-t_i)} \frac{\hat{\psi}_0(\xi, \varphi) e^{m\xi}}{-2m} d\xi + \int_{-(r-t_i)}^{(r-t_i)} \frac{\hat{\psi}_0(\xi, \varphi) e^{-m\xi}}{2m} d\xi}{\left( e^{2m(r-t_i)} - e^{-2m(r-t_i)} \right)} \text{ y}$$

$$c_2 = -c_1 e^{2m(r-t_i)}.$$

### Desarrollo del paso 5

Se obtiene la solución  $u(x, y, t_i)$  aplicando la Transformada Inversa de Radon a la función  $\hat{u}_{t_i}$  obtenida en el paso anterior.

$$u(x, y, t_i) = R^{-1}[\hat{u}_{t_i}(p, \varphi)]. \quad (3.12)$$

### Desarrollo del paso 6

Se obtiene la solución aproximada  $\tilde{u}(x, y, t)$ , la cual se hace de manera recursiva desde  $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_N$ .

### Justificación del paso 3

*La aplicación de la transformada directa de Radon de  $\Delta u(x, y, t_i)$  en el círculo  $\Omega_{t_i}$  contenido en el plano.*

En el caso de que la función extendida  $u(x, y, t_i)$  tenga derivadas continuas de segundo orden en todo el plano y los valores de la función y sus primeras derivadas parciales sobre  $x$  y  $y$  son cero en la frontera de  $\Omega_{t_i}$ , ésta expresión coincide con

$$R[\Delta u(x, y, t_i)] = \frac{d^2 \hat{u}(p, \varphi)}{dp^2} \text{ con } t_i \text{ fijo, véase [7]}$$

En el caso que la función extendida  $u(x, y, t_i)$  no tenga derivadas continuas de segundo orden en todo el plano o bien los valores de la función y sus primeras derivadas parciales sobre  $x$  y  $y$  no son cero en la frontera de  $\Omega_{t_i}$ , se construye una aproximación a la solución  $u(x, y, t_i)$  la cual puedan aplicarse los pasos 3, 4, 5 y 6 de la  $p$ -versión del MRG. Esta solución aproximada contiene un polinomio de Hermite de orden cinco  $P_5(x, y, t_i) = \bar{P}_5(r)$  que depende de la variable  $r$  tal que  $r < r_0 - \varepsilon$ , definido en  $\Omega_{t_i}^\varepsilon \subset \Omega_{t_i}$ , véase la Figura 2.1 la cual satisface las siguientes condiciones

$$\bar{P}_5^{(k)}(r_0 - \varepsilon) = \frac{\partial^k u_0}{\partial r^k}(r_0 - \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2,$$

$$\bar{P}_5^{(k)}\left(r_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0, \quad k = 0, 1, 2.$$

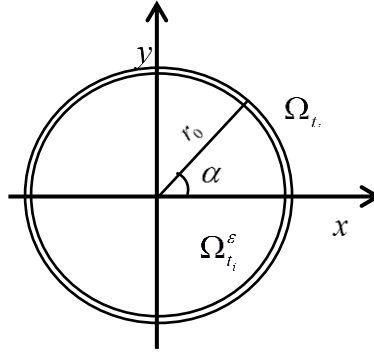


Figura 2.1 Región para la solución aproximada.

La aproximación es la siguiente.

$$u^\varepsilon(x, y, t_i) = \begin{cases} u(x, y, t_i), & (x, y) \in \Omega_{t_i}^\varepsilon, \\ P_5(x, y, t_i), & (x, y) \in \Omega_{t_i}^{\varepsilon/2} / \Omega_{t_i}^\varepsilon, \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \Omega_{t_i}^{\varepsilon/2}, \end{cases} \quad (3.13)$$

La aproximación  $u^\varepsilon(x, y, t_i)$  tiene derivadas continuas de segundo orden en todo el plano y los valores de la función y sus primeras derivadas parciales sobre  $x$  y  $y$  son cero en la frontera de  $\Omega_{t_i}$ .

Las funciones  $u(x, y, t_i)$  y  $\Delta u(x, y, t_i)$  sólo difieren de las funciones aproximadas  $u^\varepsilon(x, y, t_i)$  y  $\Delta u^\varepsilon(x, y, t_i)$  en el subdominio  $\Omega_{t_i} / \Omega_{t_i}^\varepsilon$ , sin embargo al hacer  $\varepsilon$  suficientemente pequeño los resultados numéricos de la transformada directa de Radon de las funciones  $u(x, y, t_i)$  y  $u^\varepsilon(x, y, t_i)$  así como de sus Laplacianos  $\Delta u(x, y, t_i)$  y  $\Delta u^\varepsilon(x, y, t_i)$  no difieren, es decir

$$R[\Delta u(x, y, t_i)] = R[\Delta u^\varepsilon(x, y, t_i)] = \frac{d^2 u^\varepsilon(p, \varphi)}{dp^2}.$$

Por lo cual es viable aplicar en forma numérica la transformada directa de Radon a la ecuación (3.5) el cual constituye el paso 3 del esquema de la *p* - versión de MRG para resolver el primer problema de frontera móvil para la ecuación del calor.

### 3.4 Error de aproximación de la *p* – versión del MRG

La cota del error que se obtiene al aproximar la solución por la *p* – versión del MRG del problema (3.1) - (3.3) es por aproximar en diferencias finitas la derivada con respecto de *t*, por el cálculo de las integrales en forma numérica (regla del trapecio), y por el redondeo de los valores, véase [21].

$$|u(x, y, t) - u_{\text{aprox}}(x, y, t)| \leq O(h) + O(h^2) + \text{error de redondeo} \quad (3.14)$$

A continuación se da la justificación de la desigualdad (3.14).

#### Error de la primera derivada por Diferencia finita

De la expansión de la serie de Taylor para  $u(x, y, t+h)$  alrededor de *t* se tiene:

$$\begin{aligned} u(x, y, t+h) &= u(x, y, t) + h \frac{du(x, y, t)}{dt} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2u(x, y, t)}{dt^2} + \dots \\ \frac{u(x, y, t+h) - u(x, y, t)}{h} &= \frac{du(x, y, t)}{dt} + \frac{h}{2} \frac{d^2u(x, y, t)}{dt^2} + \dots \\ \frac{u(x, y, t+h) - u(x, y, t)}{h} &= \frac{du(x, y, t)}{dt} + O(h) \\ \frac{du}{dt}(x, y, t) &= \frac{u(x, y, t+h) - u(x, y, t)}{h} - O(h). \end{aligned} \quad (3.15)$$

$O(h)$  denota el término de error de truncamiento para  $h \ll 1$  y significa que: el error es proporcional al tamaño de paso *h*.

## Error por redondeo

Supongamos que los valores de las funciones

$$u(x, y, t+h) \text{ y } u(x, y, t)$$

son redondeadas a

$$w_1 = u(x, y, t+h) + e_1, \quad w_0 = u(x, y, t) + e_0$$

para algún número positivo  $e$ ,  $|e_i| < e$  con  $i = 0, 1$ .

$$\begin{aligned} D_{w_1(x, y, t)} &= \frac{w_1 - w_0}{h} \\ &= \frac{u(x, y, t+h) + e_1 - u(x, y, t) - e_0}{h} \\ &= \frac{u(x, y, t+h) - u(x, y, t)}{h} + \frac{e_1 - e_0}{h} \end{aligned}$$

Usando la expresión (3.15) ternemos

$$= \frac{du(x, y, t)}{dt} + \frac{h}{2} \frac{d^2u(x, y, \xi)}{dt^2} + \frac{e_1 - e_0}{h}$$

Por lo tanto la estimación del error por redondeo es:

$$\begin{aligned} \left| D_{w_1(x, y, t)} - \frac{du}{dt}(x, y, t) \right| &\leq \left| \frac{e_1 - e_0}{h} \right| + \left| \frac{h}{2} \frac{d^2u(x, y, \xi)}{dt^2} \right| \\ &\leq \frac{2e}{h} + \frac{h|K_1|}{2} \end{aligned} \tag{3.16}$$

con  $\xi \in [t, t+h]$  y  $K_1 = \frac{d^2u(x, y, \xi)}{dt^2}$ .

El lado derecho de la desigualdad es una cota superior del error, que consiste en dos partes: la primera es un error de redondeo en proporción inversa al tamaño de paso  $h$  y la segunda es un error de truncamiento el cual es directamente proporcional al tamaño de paso  $h$ .

Esta cota superior puede ser minimizada con respecto al tamaño de paso  $h$ , tomando

$$h = \sqrt{\frac{2e}{|K_1|}}.$$

## Error de la integración numérica

La integración numérica de una función  $f(x)$  sobre un intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$  por la regla del trapecio es:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \cong \frac{h}{2} (f(x_k) + f(x_{k+1})) \quad (3.17)$$

donde  $h = x_{k+1} - x_k$ .

A continuación se deduce el error de integración de la regla del trapecio.

Se toma la expansión de la serie de Taylor para la función integral

$$g(x) = \int_{x_k}^x f(t) dt \text{ con } g'(x) = f(x), \quad g''(x) = f'(x), \quad g'''(x) = f''(x) \quad (3.18)$$

alrededor de la cota inferior  $x_k$  del intervalo de integración para escribir

$$g(x) = g(x_k) + g'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2} g''(x_k)(x - x_k)^2 + \frac{1}{3!} g'''(x_k)(x - x_k)^3 + \dots$$

Entonces al sustituir la ecuación (3.18) junto con  $x = x_{k+1}$  y  $h = x_{k+1} - x_k$  se obtiene la expresión siguiente

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = 0 + h f(x_k) + \frac{h^2}{2} f'(x_k) + \frac{h^3}{3!} f''(x_k) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x_k) + \dots \quad (3.19)$$

Así el error de integración sobre un intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$  por la regla del trapecio es proporcional a  $h^3$ .

Ya que al restar la ecuación (3.17) de la ecuación (3.19) tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx &= \frac{h}{2}(f(x_k) + f(x_{k+1})) \\
&= hf(x_k) + \frac{h^2}{2}f'(x_k) + \frac{h^3}{3!}f''(x_k) + \frac{h^4}{4!}f'''(x_k) + \dots \\
&\quad - \frac{h}{2}\left(f(x_k) + \left(f(x_k) + hf'(x_k) + \frac{h^2}{2}f''(x_k) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_k) + \dots\right)\right) \\
&= -\frac{h^3}{12}f''(x_k) - \frac{h^4}{24}f^{(3)}(x_k) + -\frac{h^5}{80}f^{(4)}(x_k) + \dots \\
&= O(h^3).
\end{aligned}$$

En general la integración numérica de una función  $f(x)$  sobre un intervalo  $[a, b]$  por la regla del trapecio es:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \\
&\cong \frac{h}{2} \left[ (f(x_0) + f(x_1)) + (f(x_1) + f(x_2)) + \dots + (f(x_{N-2}) + f(x_{N-1})) + (f(x_{N-1}) + f(x_N)) \right] \quad (3.20) \\
&\cong h \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) \right]
\end{aligned}$$

donde el error es proporcional a  $h^2$ , es decir, el error es N veces el error sobre un intervalo  $[x, x+h]$ .

Entonces, el error de la integral en  $[a, b]$  es igual a

$$N * O(h^3) = \frac{b-a}{h} O(h^3) = O(h^2) \quad (3.21)$$

Por lo tanto las expresiones (3.15), (3.16) y (3.21) justifican la desigualdad (3.14)



# Capítulo 4

## Experimentos Numéricos

En este capítulo mostraremos un ejemplo sintético para el caso unidimensional, y tres para el caso bidimensional en regiones circulares. Los algoritmos y programas de la *p*-versión del MRG se realizan en el software Matlab, véase el anexo B y C.

Los experimentos numéricos se presentarán en dos columnas, en la primera columna se mostrará la gráfica de la solución exacta o bien la solución obtenida por el método de Elemento Finito y en la segunda columna la gráfica de la solución aproximada obtenida por el método propuesto la *p*-versión del MRG.

### 4.1 Experimento numérico para el caso unidimensional

Las funciones dadas en el siguiente ejemplo pertenecen al espacio de las funciones definidas en la recta real, dos veces derivable y nulas en  $\mathbb{R} \setminus D$ , donde  $D$  es el intervalo  $[-(1-t^2), (1-t^2)]$ .

La implementación de la *p*-versión del MRG en el espacio unidimensional se hará para el siguiente problema sintético.

### 4.1.1 Ejemplo 1

Resolver.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \begin{cases} 2(1-t) - 2(1-t+2x^2)e^{x^2+t^2-1}, & x^2 < 1-t^2, \quad -1 < t < 1, \\ 0, & x^2 \geq 1-t^2, \quad -1 < t < 1, \end{cases} \\ u(x, -1) = 0, \quad x = 0, \\ u(x, t) = 0, \quad x^2 = 1-t^2, \quad 0 < t \leq 1, \end{cases} \quad (4.1)$$

La solución exacta del problema es

$$u(x, t) = \begin{cases} -x^2 - t^2 + e^{x^2+t^2-1}, & x^2 < 1-t^2, \quad -1 < t < 1, \\ 0, & x^2 \geq 1-t^2, \quad -1 < t < 1, \end{cases} \quad (4.2)$$

y la solución numérica obtenida por la  $p$  - versión del Método de Rayos Generales es:

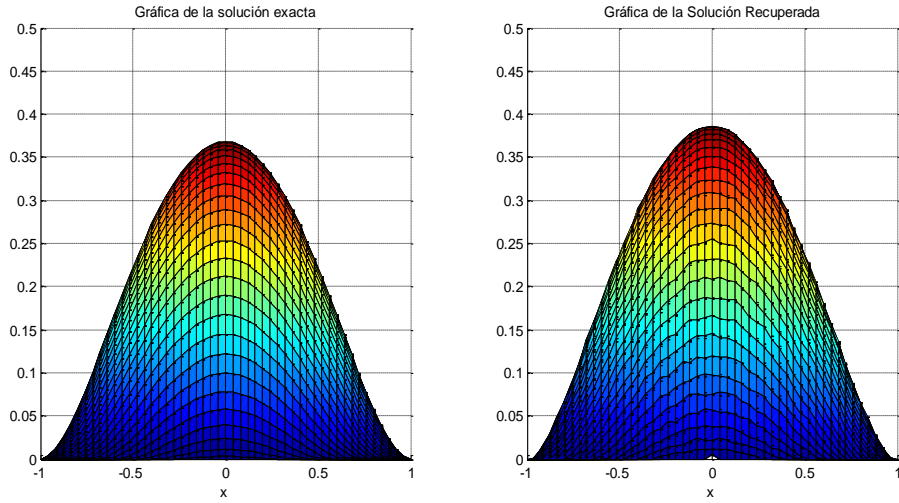
$$u(x, t) = R^{-1}[\hat{u}_\varphi(p)],$$

donde

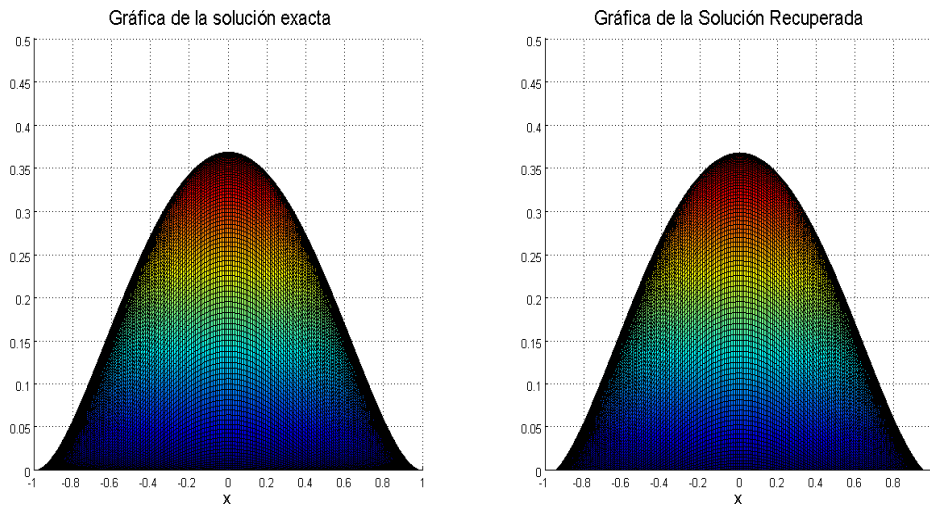
$$\hat{u}_\varphi(p) = \begin{cases} -\int_{p_0}^p e^{k\xi_2} \int_{p_0}^{\xi_2} \left( e^{-k\xi_1} \frac{\hat{\psi}_\varphi(\xi_1)}{\cos^2 \varphi} d\xi_1 \right) d\xi_2 + \frac{\int_{p_0}^{p_1} e^{k\xi_2} \int_{p_0}^{\xi_2} \left( e^{-k\xi_1} \frac{\hat{\psi}_\varphi(\xi_1)}{\cos^2 \varphi} d\xi_1 \right) d\xi_2}{\int_{p_0}^{p_1} e^{k\xi_2} d\xi_2} \int_{p_0}^p e^{k\xi_2} d\xi_2, & \varphi \neq \frac{\pi}{2}, \\ \int_{p_0}^p \hat{\psi}_\varphi(t) dt, & \varphi = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\text{donde } \psi(x, y, t_i) = \begin{cases} 2(1-t) - 2(1-t+2x^2)e^{x^2+t^2-1}, & x^2 < 1-t^2, \quad -1 < t < 1, \\ 0, & x^2 \geq 1-t^2, \quad -1 < t < 1, \end{cases}$$

En las Figuras 4.1.1 y 4.1.2 se muestran las gráficas de las soluciones, la exacta y la aproximada por la  $p$  - versión del MRG, al considerar  $-1 \leq t \leq 1$  como una variable espacial.



**Figura 4.1.1** Gráficas de la solución exacta y aproximada  
 Para 51 nodos, error relativo 6 por ciento.



**Figura 4.1.2** Gráficas de la solución exacta y aproximada  
 Para 179 nodos, error relativo 0.7 por ciento

## 4.2 Experimentos numéricos para el caso bidimensional

Las funciones dadas en el siguiente ejemplo pertenecen al espacio de las funciones definidas en el plano, dos veces derivables con respecto a las variables espaciales, una vez derivable con respecto al tiempo  $t$  y nulas en  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ , donde  $\Omega$  es el círculo de radio  $1-t$  con  $0 \leq t \leq 1$ .

La implementación de la  $p$ -versión del MRG en el espacio bidimensional se hará para el siguiente problema sintético.

### 4.2.1 Ejemplo 1

Resolver

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} - \Delta u(x, y, t) = \psi_2(x, y, t), \\ u(x, y, 0) = \begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)^4, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1, \\ 0, & \sqrt{x^2 + y^2} > 1, \end{cases} \\ u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial \bigcup_{0 < t < 1} \Omega_t, \end{cases} \quad (4.4)$$

donde:

$\Omega_t = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} < 1-t, 0 < t < 1\} \subset \mathbb{R}^2$  es un dominio convexo acotado,

$\partial \bigcup_{0 \leq t \leq 1} \Omega_t$  es la frontera móvil de  $\bigcup_{0 \leq t \leq 1} \Omega_t$ ,

$$\psi_2 = \begin{cases} -8(1+t)(x^2 + y^2 - (1-t)^2)^3 - 48(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - (1-t)^2)^2, & (x, y) \in \bigcup_{0 < t < 1} \Omega_t, \\ 0, & (x, y) \notin \bigcup_{0 < t < 1} \Omega_t. \end{cases}$$

La solución exacta al problema con frontera móvil es la función

$$u(x, y, t) = \begin{cases} (x^2 + y^2 - (1-t)^2)^4, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1-t, \\ 0, & \sqrt{x^2 + y^2} > 1-t. \end{cases} \quad (4.5)$$

Y la solución numérica obtenida por la  $p$ -versión del MRG para un tiempo  $t_i$  es:

$$u(x, y, t_i) = R^{-1}[\hat{u}_i(p, \varphi)], \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, N$$

donde

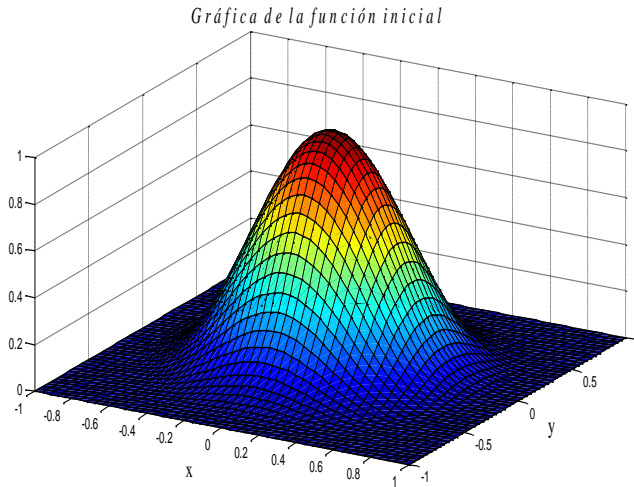
$$\hat{u}_{t_i}(p, \varphi) = c_1 e^{-mp} + c_2 e^{mp} + e^{-mp} \int_{-(1-t_i)}^p \frac{\hat{\psi}_0(\xi, \varphi) e^{m\xi}}{-2m} d\xi + e^{mp} \int_{-(1-t_i)}^p \frac{\hat{\psi}_0(\xi, \varphi) e^{-m\xi}}{-2m} d\xi,$$

$$c_1 = \frac{e^{-m(1-t_i)} \int_{-(1-t_i)}^{(1-t_i)} \frac{\hat{\psi}_0(\xi, \varphi) e^{m\xi}}{-2m} d\xi + e^{m(1-t_i)} \int_{-(1-t_i)}^{(1-t_i)} \frac{\hat{\psi}_0(\xi, \varphi) e^{-m\xi}}{2m} d\xi}{(e^{2m(1-t_i)} - e^{-2m(1-t_i)})},$$

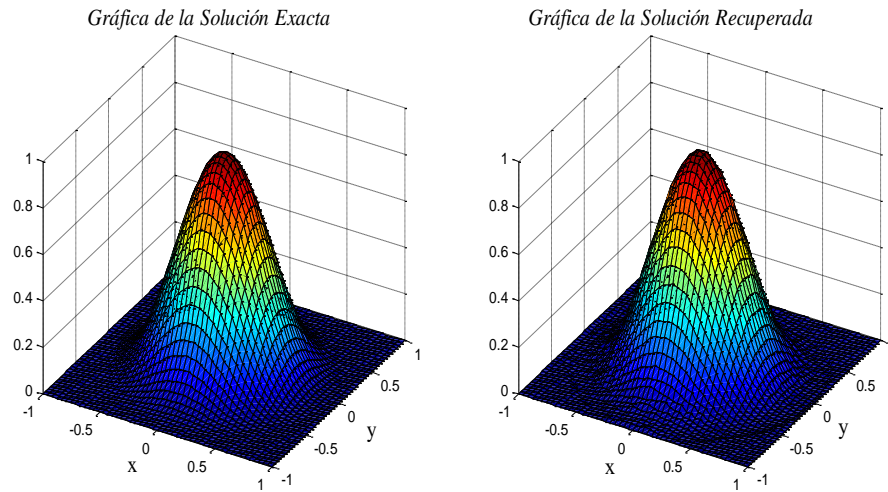
$$c_2 = -c_1 e^{2m(1-t_i)}, \text{ y}$$

$$\begin{aligned} \psi_0(x, y, t_i) = & 8(1+t_i)(x^2 + y^2 - (1-t_i)^2)^3 + 48(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - (1-t_i)^2)^2 \\ & + m^2 u_{t_{i-1}}(x, y, t_{i-1}). \end{aligned}$$

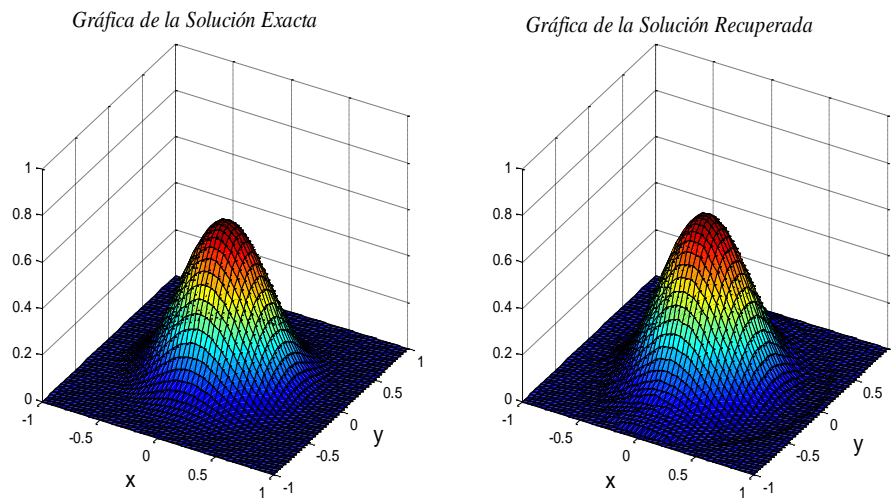
En las Figuras 4.3 - 4.6 se muestran las gráficas de las soluciones que corresponden a la solución exacta y a la solución aproximada por el método propuesto la  $p$ -versión del MRG para los siguientes tiempos  $t = 0, 0.01, 0.05$  y  $0.1$  considerando 51 nodos en el intervalo  $[-1, 1]$  y con un tamaño de paso  $h = \frac{1}{100}$  respecto del tiempo.



**Figura 4.2.3** En el tiempo  $t = 0$ .

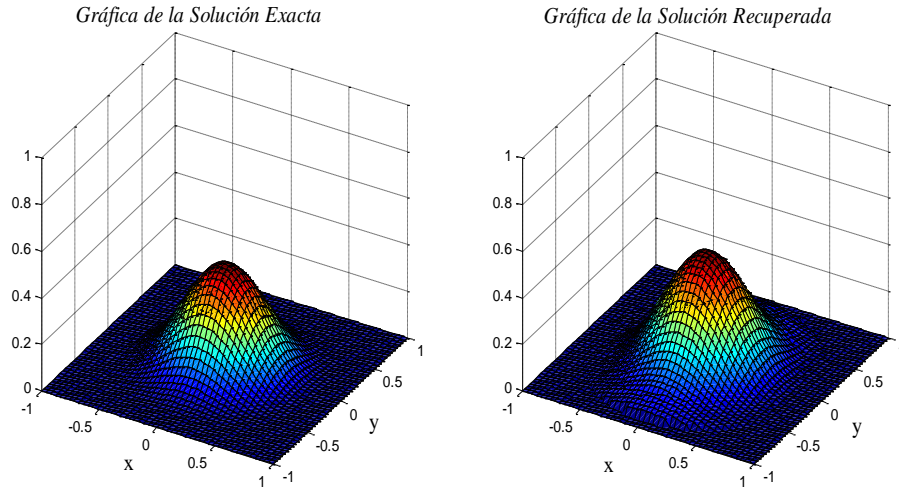


**Figura 4.2.4** Error relativo 0.0156, Error absoluto 0.0242 en  $t = 0.01$



**Figura 4.2.5** Error relativo 0.0683, Error absoluto 0.0593 en  $t = 0.05$

Para la siguiente Figura se realizaron diez iteraciones.



**Figura 4.2.6** Error relativo 0.237, Error absoluto 0.0772 en  $t = 0.1$

## 4.2.2 Ejemplo 2

El problema con frontera móvil homogénea que se propone corresponde al Modelo de Difusión de Oxígeno en un medio absorbente.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(x, y, t) - \Delta u(x, y, t) = \begin{cases} -1, & (x, y) \in \bigcup_{0 < t < 1} \Omega_t, \\ 0, & (x, y) \notin \bigcup_{0 < t < 1} \Omega_t, \end{cases} \\ u(x, y, 0) = \begin{cases} -\sqrt{x^2 + y^2} + e^{\sqrt{x^2 + y^2} - 1}, & (x, y) \in \Omega_0, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega_0, \end{cases} \\ u(x, y, t) = 0, & (x, y) \in \partial \bigcup_{0 < t < 1} \Omega_t, \end{array} \right. \quad (4.6)$$

donde:

$$\Omega_t = \left\{ (x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 - t, \quad 0 < t < 1 \right\} \text{ es un dominio acotado,}$$

$\partial \bigcup_{0 \leq t \leq 1} \Omega_t$  es la frontera móvil de  $\bigcup_{0 \leq t \leq 1} \Omega_t$ ,

En este caso no se cuenta con la solución analítica exacta, pero si con gráficas de la solución aproximada obtenida por el método de Elemento Finito, en tres tiempos,  $t = 0, 0.05$ , y  $0.1$  con un tamaño de paso  $h = 0.01$ , véase [9], las cuales las comparamos con las gráficas de la solución aproximada por nuestro método propuesto.

La solución numérica obtenida en forma explícita por la  $p$ -versión del MRG es:

$$u(x, y, t_i) = R^{-1}[\hat{u}_i(p, \varphi)], \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, N,$$

donde:

$$\hat{u}(p, \varphi) = c_1 e^{-mp} + c_2 e^{mp} + e^{-mp} \int_{-(1-t_i)}^p \frac{\hat{\psi}_0(\xi, \varphi) e^{m\xi}}{-2m} d\xi + e^{mp} \int_{-(1-t_i)}^p \frac{\hat{\psi}_0(\xi, \varphi) e^{-m\xi}}{-2m} d\xi,$$

$$c_1 = \frac{e^{-m(1-t_i)} \int_{-(1-t_i)}^{(1-t_i)} \frac{\hat{\psi}_0(\xi, \varphi) e^{m\xi}}{-2m} d\xi + e^{m(1-t_i)} \int_{-(1-t_i)}^{(1-t_i)} \frac{\hat{\psi}_0(\xi, \varphi) e^{-m\xi}}{2m} d\xi}{\left( e^{2m(1-t_i)} - e^{-2m(1-t_i)} \right)},$$

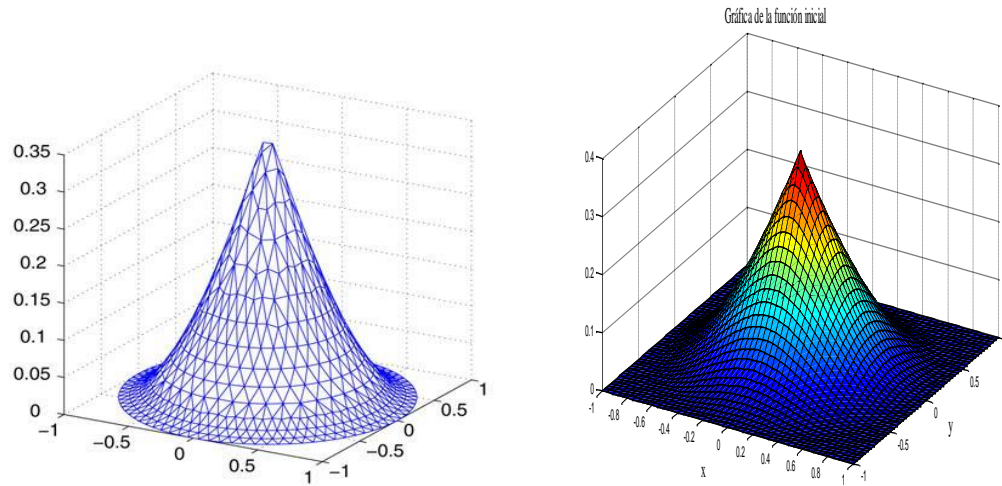
$$c_2 = -c_1 e^{2m(1-t_i)}, \text{ y}$$

$$\psi_0(x, y, t_i) = 1 + m^2 u_{t_{i-1}}(x, y, t_{i-1}).$$

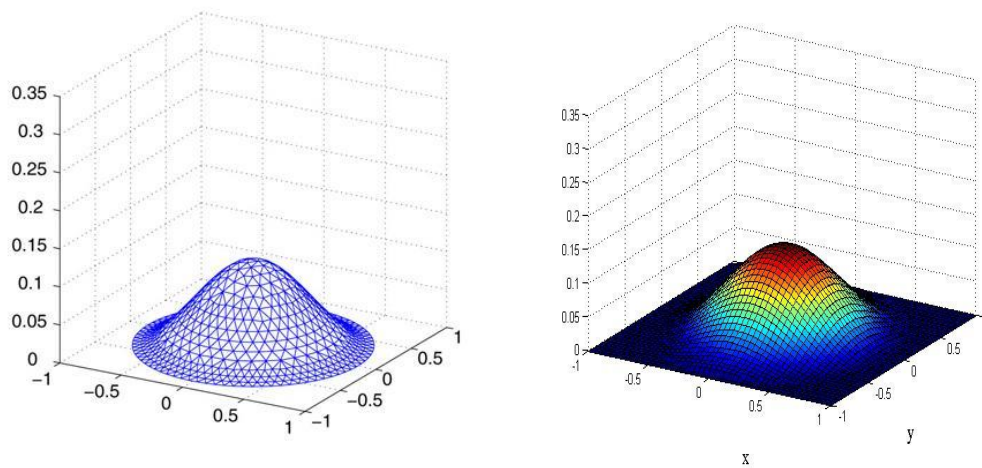
A continuación se muestran las gráficas de las soluciones.

En cada Figura 4.2.7 – 4.2.9 se muestran las gráficas de la solución aproximada por el método de Elemento Finito y la solución aproximada por el método propuesto, para diferentes tiempos  $t = 0, 0.05$  y  $0.1$  considerando 51 nodos en el intervalo  $[-1, 1]$  y con un

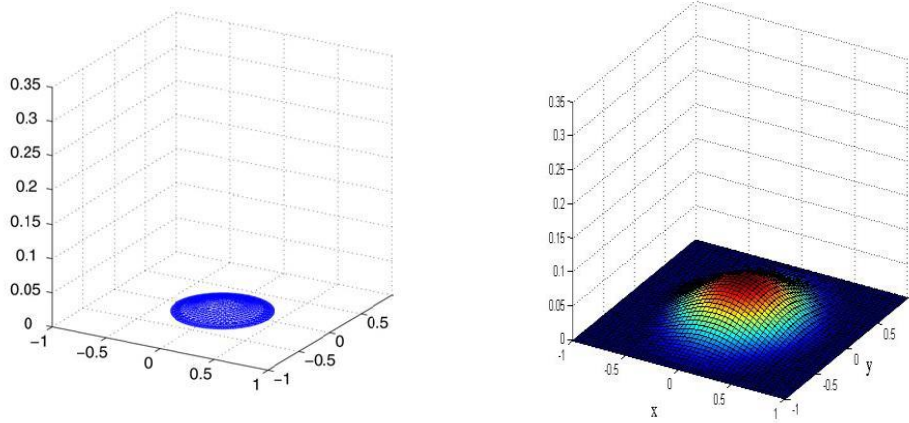
tamaño de paso  $h = \frac{1}{100}$  respecto del tiempo.



**Figura 4.2.7** Gráficas de la solución por elemento finito y la  $p$ -versión del MRG para  $t = 0$ .



**Figura 4.2.8** Gráficas de la solución por elemento finito y la  $p$ -versión del MRG para  $t = 0.05$



**Figura 4.2.9** Gráfica de la solución aproximada por la  $p$ -versión del MRG para  $t = 0.1$

### 4.2.3 Ejemplo 3

El siguiente ejemplo con frontera móvil homogénea es una adaptación del problema que se encuentra resuelto por el método de elemento finito en el Software Matlab in doc parabolic para una frontera fija, la adaptación consistió en modificar el dominio rectangular a un dominio circular y la condición de frontera fija a una frontera móvil. Cabe resaltar que no se cuenta con la solución analítica exacta del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(x, y, t) - \Delta u(x, y, t) = \begin{cases} -1, & (x, y) \in \bigcup_{0 < t < 1} \Omega_t, \\ 0, & (x, y) \notin \bigcup_{0 < t < 1} \Omega_t, \end{cases} \\ u(x, y, 0) = \begin{cases} 1, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 0.4, \\ 0, & \sqrt{x^2 + y^2} > 0.4, \end{cases} \\ u(x, y, t) = 0, & (x, y) \in \partial \bigcup_{0 < t < 1} \Omega_t, \end{array} \right. \quad (4.7)$$

donde

$\Omega_t = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1-t, \ 0 < t < 1\}$  es un dominio acotado ,

$\partial \bigcup_{0 \leq t \leq 1} \Omega_t$  es la frontera móvil de  $\bigcup_{0 \leq t \leq 1} \Omega_t$ ,

En las Figuras 4.10 – 4.13 se muestran las soluciones aproximadas por la *p*-versión del *MRG* para diferentes tiempos  $t=0, 0.01, 0.05$  y  $0.1$  considerando 51 nodos en el intervalo  $[-1,1]$  y con un tamaño de paso  $h=0.01$  respecto del tiempo.

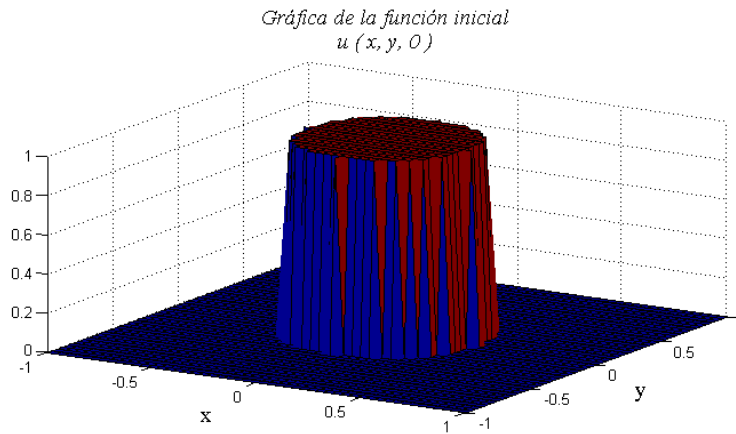


Figura 4.2.10 Gráfica de la solución aproximada por la *p*-versión del *MRG* para  $t=0$ .

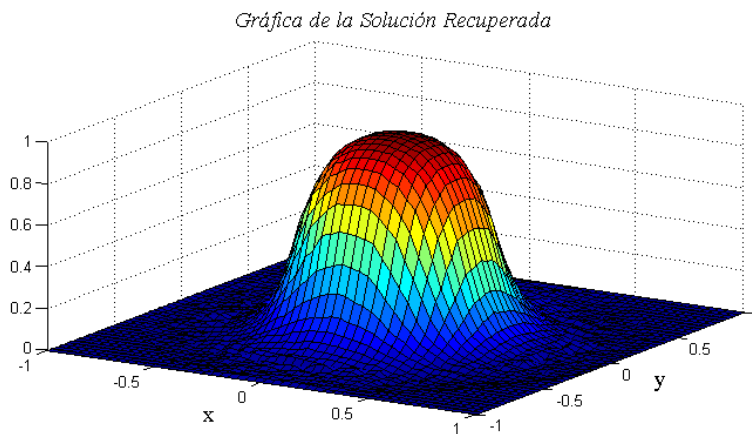


Figura 4.11 Gráfica de la solución aproximada por la *p*-versión del *MRG* para  $t=0.01$ .

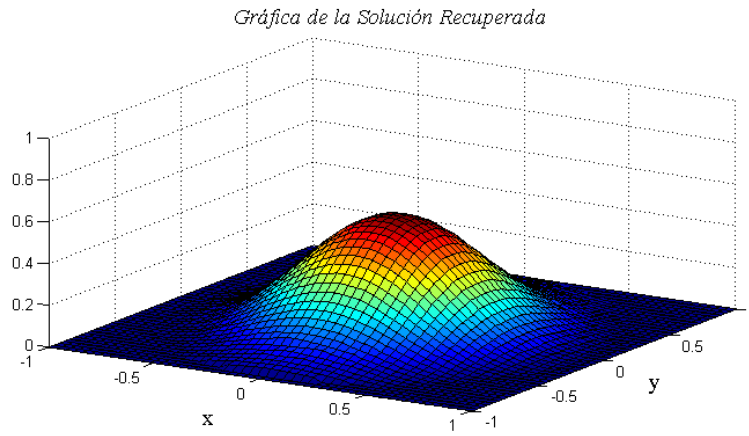


Figura 4.12 Gráfica de la solución aproximada por la *p* - versión del MRG para  $t = 0.05$ .

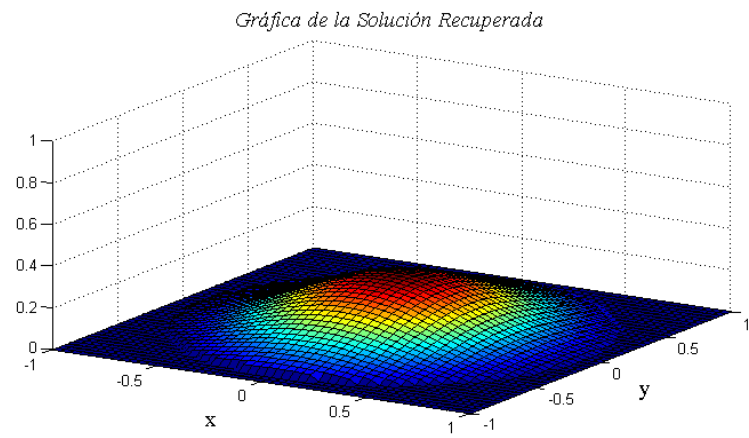


Figura 4.13 Gráfica de la solución aproximada por la *p* - versión del MRG para  $t = 0.1$ .

# Conclusiones

1. Se desarrolló la *p* - versión del MRG para resolver de forma numérica el Primer problema con frontera móvil para la ecuación del calor unidimensional.
2. Se obtuvo una solución numérica explícita al Primer problema con frontera móvil para la ecuación del calor bidimensional en un dominio circular de radio  $r-t$  aplicando la *p* - versión del MRG.
3. Los resultados obtenidos en la *p* - versión del MGR son originales.
4. Se realizaron experimentos numéricos con ejemplos sintéticos en el Software Matlab, para ejemplificar la validez de la *p* - versión del MRG.

# Publicaciones

1. Grebennikov, A. & Espíndola, P.. (2009). ***Solución de Problemas Termodinámicos por el Método de Rayos Generales***. Memorias del XXIV Congreso Nacional de Termodinámica, Puebla México, ISBN-978-607-7593-02-7, pp. 578 - 579.
2. Grebennikov, A. & Espíndola, P.. (Abril, 2010). ***Mathematical and Computer Investigation of Heat Conductive Properties of Materials by General Ray Method***. Journal Of Materials Science And Engineering, 4, serie No. 29. ISSN 1934-8959, USA.
3. Espíndola P. A., Grebenikov A. & Cortés C. A. . (Sept. 2014). ***Transformada de Radon de la derivada parcial de una función en un dominio acotado en el plano***. Revista Iberoamericana de Ciencias, Vol. 1, No. 4, ISSN 2334-2501.

4. Espíndola P. A. & Grebenikov A..(2016). *Development Of P - Version of General Ray Method for Parabolic Equations with Mobile Boundary Conditions*. International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR), Volume 4, Issue 1, January 2016, pp. 78-87. ISSN 2347-307X (Print) & ISSN 2347-3142 (Online), [www.arcjournals.org](http://www.arcjournals.org).

## Perspectivas

1. Desarrollar la *p*-versión del MRG para el primer problema con frontera móvil para la ecuación del calor unidimensional y bidimensional en un dominio acotado e implementarlo en un algoritmo computacional sin extender las funciones a todo el plano, es decir, utilizar las propiedades de la transformada de Radon de la derivada en dominios acotados.
2. Hacer comparaciones numéricas con otros métodos numéricos en calidad y rapidez.
3. Generalizar los resultados para problemas de contorno con tres variables espaciales.
4. Generalizar la solución clásica del Primer problema con frontera móvil para la ecuación del calor de *p* - versión del MRG a una solución débil.

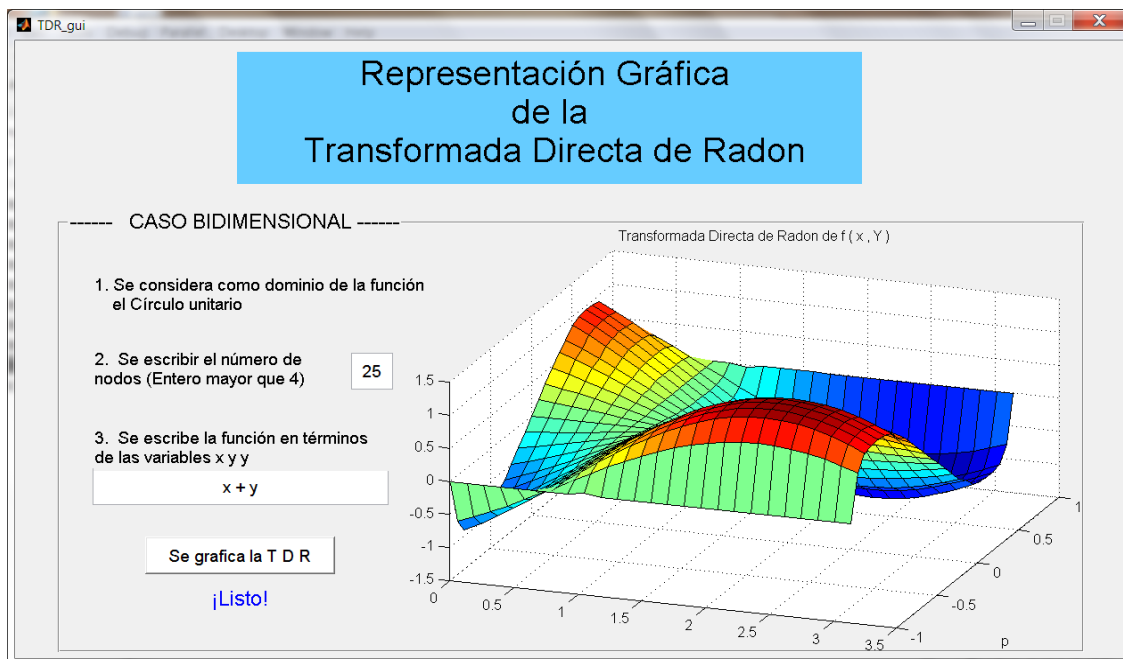
# Anexo

## A. Implementación de la Transformada de Radon

En la tesis trabaja con matrices cuadradas de tamaño  $n$  que representan las imágenes de las funciones definidas en un dominio acotado del plano que se utilizan en la resolución de la ecuación del calor.

El comando `radon` del software Matlab de una matriz cuadrada de tamaño  $n$  devuelve una matriz rectangular de  $m$  por  $n$ , con  $m > n$ , donde las primeras y últimas filas de ésta matriz son. Por esta razón se realizaron algoritmos y programas en Matlab de la transformada de Radon una matriz cuadrada de tamaño  $n$  y obtener como salida otra matriz del mismo tamaño.

A continuación se muestra su representación gráfica en Interfaz de Usuario Gráfico, (GUI), de Matlab.

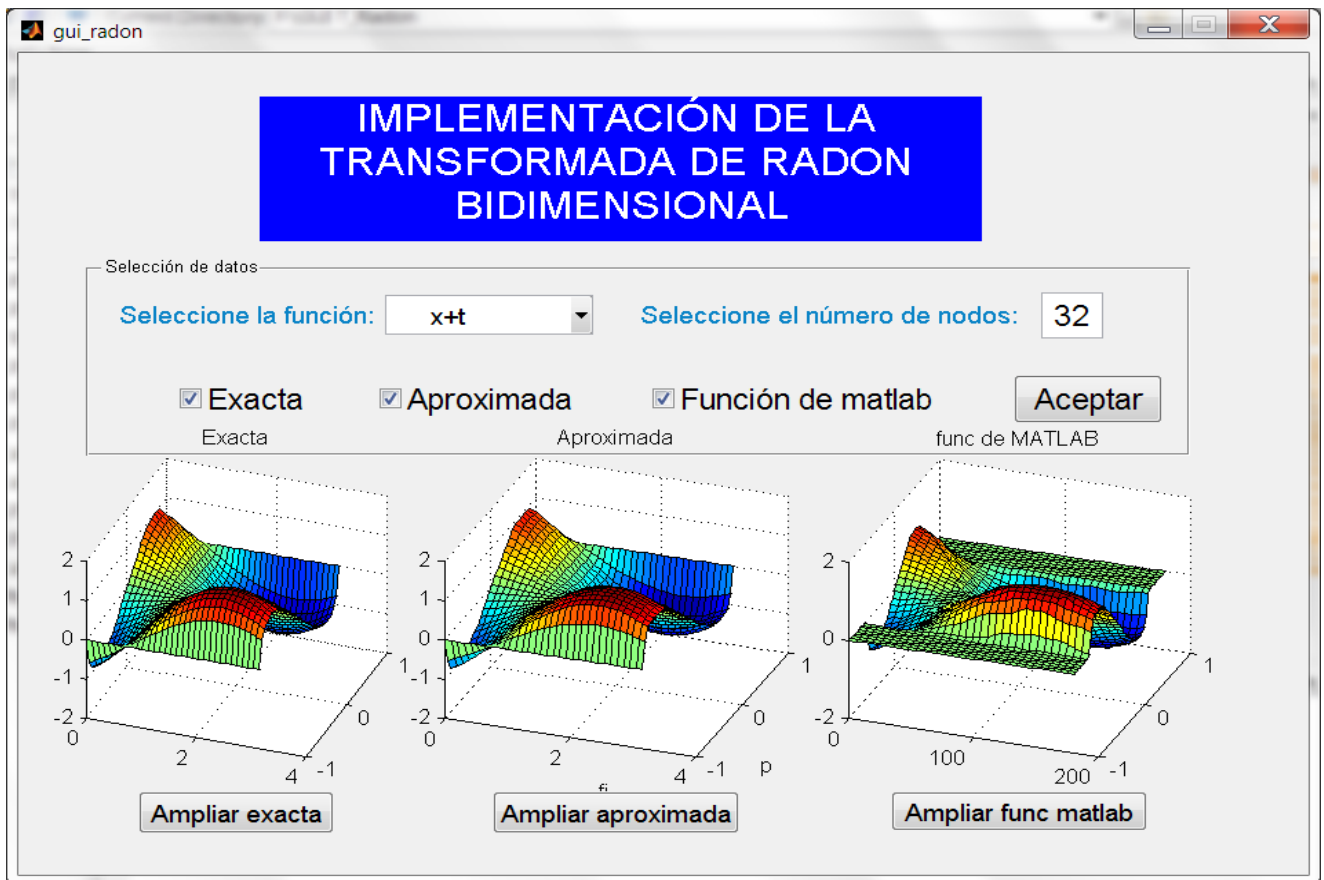


A continuación se muestra la gráfica de la Transformada Directa de Radon de la función  $f(x,t)$  definida en el círculo de radio 1 en el plano de tres maneras:

La primera corresponde a la  $R[x+t](p, \varphi)$  determinada analíticamente,

la segunda corresponde a la obtenida nuestro programa propuesto y

la tercera se obtiene usando el comando radon de Matlab.



### *Observación A.1*

El resultado obtenido por el algoritmo propuesto es el adecuado para trabajar en nuestra investigación.

## B. Algoritmo y programas en Matlab de la implementación de la $p$ - versión del MRG para el caso unidimensional.

Los siguientes dos programas corresponden al ejemplo 1 de la sección 4.1.1

```
% Solución Numérica de la Ecuación  $u_t - u_{xx} = \Psi$ 
functionuaprox = SolucRadon(n);

% Se corre el programa en la ventana de comandos con la siguiente expresión.
% functionuaprox = SolucRadon(51);

[TDRpsi,tamano] = PsiG(n);
PsiGorro = TDRpsi;
% % Se calcula  $\exp(-k*p)/\cos^2$  % %
p=linspace(-1,1,n);
hp = 2/(n-1);
fi = linspace(0,pi,n);
hfi = pi/(n-1);

% % Se calcula  $\exp(k*p)/\cos^2$  % %
for i=1:n
    for j=1:n
        if (fi(j) > (pi/2 - 1*0.0349) && fi(j) < (pi/2 + 1*0.0349) )
            Exp1(i,j) = 1;
        else
            Exp1(i,j) = (exp(- sin(fi(j))/cos(fi(j))*p(i)))/cos(fi(j))^2;
        end
    end
end
Exp1;

% % Se calcula  $\exp(k*p)$  % %
for i=1:n
    for j=1:n
        % % % % El ángulo fi diferente de 90 grados
        if (fi(j) > (pi/2 - 1*0.0349) && fi(j) < (pi/2 + 1*0.0349))
            Exp(i,j) = 1;
        else
            Exp(i,j) = exp(- sin(fi(j))/cos(fi(j))*p(i));
        end
    end
end
Exp;
```

```

% % Se calcula la integral de PsiGorro*exp(-k*p))/cos^2
altura = zeros(n,n);
integralinterna = zeros(n,n);
for j = 1:n
    % % % Calculamos PsiGorro*exp(-k*p))/cos^2
    Integrando1 = PsiGorro(:,j).*Exp1(:,j);
    suma1=0;
    for i=1:n
        % % Saca las alturas de los rectángulos
        altura(i,j) = hp*Integrando1(i);
        suma1 = suma1 + altura(i,j);
        integralinterna(i,j) = suma1;
    end
end
integralinterna;

% % Se calcula la Integraleexterna(exp(k p)*integralinterna)
integraleexterna=zeros(n,n);
for j=1:n
    % % % Se calcula exp(k p)*integralinterna
    Integrando2(:,j) = Exp(:,j).*integralinterna(:,j);
    suma2=0;
    for i=1:n
        % % % Saca las alturas de los rectángulos
        altura(i,j) = hp*Integrando2(i);
        suma2 = suma2 + altura(i,j);
        integraleexterna(i,j) = suma2;
    end
end
integraleexterna;

% % Se calcula la Integral de exp(k p)
integral=zeros(n,n);
for j=1:n
    % % % Se calcula exp(k p)
    Exp(:,j);
    suma3=0;
    for i=1:n
        % % % Saca las alturas de los rectángulos
        altura(i,j) = hp*Exp(i);
        suma3 = suma3 + altura(i,j);
        integral(i,j) = suma3;
    end
end
end
% % integral;

```

```

C1=0;
C1 = integralexterna(n,:)/integral(n,:);

% % La solución al problema de contorno móvil es:
integralexterna(:,(n-1)/2 + 1)=integralinterna(:,(n-1)/2 + 1);
ugorro = - integralexterna + C1*integral;

% % % % Recuperación de la solución u usando la TIR
theta1 = linspace(0,359,n);
I=iradon(ugorro,theta1,'nearest','Hann',1,n);
uaprox = I;
% % % % Solución exacta: u(x,t)= - x^2 - t^2 + exp(x^2 + t^2 -1);
x=linspace(-1,1,n);
t=linspace(-1,1,n);
for i=1:n
    for j=1:n
        if x(j)^2 <= 1 - t(i)^2
            solexacta(i,j) = - x(i)^2 - t(j)^2 + exp(x(i)^2 + t(j)^2 -1);
        else
            solexacta(i,j) = 0; uaprox(j,i) = 0;
        end
    end
end
end

% % % % Graficas de las solución exacta y recuperada      % % % %

% % Solución Exacta
figure(n)
subplot(1,2,1)
surf(x,t, solexacta)
title('Gráfica de la solución exacta')
xlabel('x'), ylabel('t'), axis([-1 1 -1 1 0 0.5]), view(30,32)

% % Solución Aproximada
subplot(1,2,2)
surf(x,t,uaprox)
title('Gráfica de la Solución Recuperada')
xlabel('x'), ylabel('t'), axis([-1 1 -1 1 0 0.5]), view(30,32)
ErrorRelativo = norm(solexacta - uaprox,inf)/norm(solexacta,inf)
% % ErrorAbsoluto = norm(solexacta - uaprox ,inf)
end

```

## Expresión del lado Derecho de la ecuación a resolver

```
% % % Ejemplo 1
% La función Psi = 2(1 - t) - 2(1 - t + 2 x^2) exp(x^2 + t^2 - 1);
function [TDRpsi,tamano] = PsiG(n);
% n=51;
t = linspace(-1,1,n);
x = linspace(-1,1,n);
for i = 1:n
    for j = 1:n
        if x(j)^2 <= 1 - t(i)^2
            z(i,j) = 2*(1-t(i)) - 2*(1 - t(i) + 2*x(j)^2)*exp(x(j)^2 + t(i)^2 - 1);
        else
            z(i,j) = 0;
        end
    end
end
end

% surf(x,t,z), xlabel('eje x'), ylabel('eje t'), axis([-1 1 -1 1 0 5])
theta = linspace(0,179,n);
[R, xp] = radon(z, theta);
tamano = length(xp);
% % Hacemos la matriz de la TDR de psi de tamaño n x n.
TDRpsi = R((tamano-n)/2 + 1 : tamano - ((tamano-n)/2), :);
end
```

### C. Algoritmo y programas en matlab de la implementación de la *p* - versión del MRG en el caso bidimensional.

Los siguientes tres programas corresponden al ejemplo 1,2 y 3 de la sección 4.2

```

% % % Solución Numérica de la Ecuación  $u_t - \text{Laplaciano}(u) = \text{Psi}$ 
% % % equivalente  $\text{Laplaciano}(u) - m^2 * u = \text{PsiCero}$ 
% % %  $n$  = número de nodos
% % %  $n_{\text{fig}}$  = número de figura
% % %  $(1-t)$  = radio de la circunferencia
% % %  $h=1/m^2$  es el tamaño de paso
% % % TF tiempo final=0.01,0.02, . . . , 0.09

funcionuaprox = SolucRadon(n,Tiempo);
% % % % % SolucRadon(51,0.1);

for TF = 0.01 : 0.01 : Tiempo
    x = linspace(-1,1,n); y = x;
    % Condición tamaño de paso ,  $h=1/100$ ;
    m = 10;
    h=1/m^2;
    % % % % % % % % % % % % % % % % % %
    % % Calculamos la TDR de la función PsiCero
    funcPsi=Psi(n,TF);
        if (TF==0.01)
            u = inicial(n);
        end

PsiCero = funcPsi - m^2*u;
theta = linspace(0,179,n);
[R, xp] = radon(PsiCero,theta);
tamano=length(xp);
% % [N M]= size(R)

% % Hacemos la matriz de la TDR(psicero) de tamaño  $n \times n$ .
PsiGorro = R((tamano-n)/2 + 1 :tamano-((tamano-n)/2),:);
p = linspace(-1,1,n);
hp = 2/(n-1);

% % % Calculamos la integral de  $(\text{PsiCeroGorro}(X_i, f_i) * \exp(m * X_i)) / -2m$ 
% % % cuyos límites de integración son  $-(1-t)$  y  $p$ .
altura1=zeros(n,n);
altura2=zeros(n,n);
integral3=zeros(n,n);
integral4=zeros(n,n);

```

```

for j=1:n
    % % Calculamos PsiCeroGorro*exp(m*chi)/(-2m)
    Integrando1 = PsiGorro(:,j).*exp(m*p)/(-2*m);
    Integrando2 = PsiGorro(:,j).*exp(-m*p)/(2*m);
    suma3=0;
    suma4=0;
    for i=1:n
        % % Saca las alturas de los rectángulos
        altura1(i,j) = hp*Integrando1(i);
        altura2(i,j) = hp*Integrando2(i);
        % % Saca las sumas parciales de los rectangulos
        suma3 = suma3 + altura1(i,j);
        suma4 = suma4 + altura2(i,j);
        integral3(i,j) = suma3;
        integral4(i,j) = suma4;
    end
end

% % % Calculamos exp(-mp)*Int(PsiGorro*exp(m*Xi)/(-2m))

for j=1:n
    sumando3(:,j) = exp(-m*p)'*integral3(:,j);
    sumando4(:,j) = exp(m*p)'*integral4(:,j);
end

% % % Calculamos los coeficientes c1 y c2
C1=zeros(n,n);
C2=zeros(n,n);
C1 = (exp(-2*m*(1-TF))*integral3(n,:) + integral4(n,:))/(exp(2*m*(1-TF))-...
exp(-2*m*(1-TF)));
% sinh(2*m*(1-TF))*2 == exp(2*m*(1-t1))- exp(-2*m*(1-t1))
C2 = - C1.*exp(2*m*(1-TF));

% % % % % 2* sinh(2*m*(1-t1))=(exp(2*m*(1-t1))- exp(-2*m*(1-t1)));

% % Calculamos el 1° y 2° sumando
for i=1:n
    Aux(:,i) = exp(-m*p)'*C1(:,i) + exp(m*p)'*C2(:,i);
end

% % La solución al problema de contorno móvil es uGorro
uGorro1 = (Aux + sumando3 + sumando4);

% % % Recuperación de la solución u usando la TIR
theta1 = linspace(0,179,n);
I=iradon(uGorro1,theta1,'nearest','Hann',1,n);
u = I;

```

```

% % % Solución exacta en t = TF del ejemplo % % % %
% % %  $u(x,y) = (x(i)^2 + y(j)^2 - (1-t)^2)^4$ ; % % % %
for i=1:n
    for j=1:n
        if sqrt(x(i)^2 + y(j)^2) < 1-TF
            solexacta(i,j) = ( x(i)^2 + y(j)^2 - (1-TF)^2 )^4;
        else
            solexacta(i,j) = 0;
            u(i,j) = 0;
        end
    end
end
end

% % % % % Caomparación de la solución recuperada y la exacta % % % %
figure(floor(TF *100))

% % Solución Exacta
subplot(1,2,1)
% mesh(x,y,solexacta)
surf(x,y,solexacta)
xlabel('x'), ylabel('y');
% title('Gráfica de la solución exacta')
% title({'Graph of the exact solution';'u(x,y,t)'});[ 'for t = ',num2str(TF)]})
title({'Gráfica de la Solución Exacta'});'u(x,y,t)'});[ 'para t = ',num2str(TF)]})
% title({'Plot of the exact solution';'u(x,y,t)';[ 'to t = ',num2str(TF)]})
axis([-1 1 -1 1 0 1]), view(30,32) % % view(60,25)
% hold on

% % % SoluciónAproximada
subplot(1,2,2)
surf(x,y,u)
xlabel('x'), ylabel('y');

% title({'Graph of the approximate solution';'u(x,y,t)'});[ 'para t = ',num2str(TF)]})
title({'Gráfica de la Solución Recuperada'});'u(x,y,t)'});[ 'para t = ',num2str(TF)]})
axis([-1 1 -1 1 0 1]), view(30,32)

% % % % % Error % % % % % % %
% % % ErrorAbsolutoInfinita = norm(solexacta - u, inf)
% % % ErrorAbsolutonor2 = norm(solexacta - u,2)
% % % ErrorRelativoinf = norm(solexacta - u,inf)/norm(solexacta,inf)
% % % ErrorRelativonorm2 = norm(solexacta - u,2)/norm(solexacta,2)
end
end

```

## Expresión del lado Derecho de la ecuación a resolver

```

function funcPsi = Psi( n, TF );

x = linspace(-1,1,n);
y=x;
for i=1:n
    for j=1:n
        if sqrt(x(i)^2 + y(j)^2) <= 1 - TF

            % % % % % % %           Ejemplo 1           % % % % %
            % % - Psi(x,y,t)= 8*(1+t1)*( x(i)^2 + y(j)^2 -(1-t1)^2 )^3 +
            % %           48*(x(i)^2 + y(j)^2)*( x(i)^2 + y(j)^2 -(1-t1)^2 )^2;
            funcPsi(i,j) = 8*(1+TF)*( x(i)^2 + y(j)^2 -(1-TF)^2 )^3 + ...
            48*(x(i)^2 + y(j)^2)*( x(i)^2 + y(j)^2 -(1-TF)^2 )^2;

            % % % % % % %           Ejemplo 2           % % % % %
            % % - Psi(x,y,t)= 1;
            %           funcPsi(i,j)= 1;

            % % % % % % %           Ejemplo 3           % % % % %
            % % - Psi(x,y,t)= 1;
            %           funcPsi(i,j)= 1;

        else
            funcPsi(i,j) = 0;
        end
    end
end

end

% surf(x,y,funcPsi)
end

```

## Condición inicial

```
function funcInicial = finicial( n )

x = linspace(-1,1,n);
y=x;

for i=1:n
    for j=1:n
        if sqrt(x(i)^2 + y(j)^2) < 1
            % % % % % % % % % Ejemplo 1 % % % % % % % %
            funcInicial(i,j) = (x(i)^2 + y(j)^2 - 1)^4;

            % % % % % % % % % Ejemplo 2 % % % % % % % %
            % % funcInicial(i,j) = -sqrt(x(i)^2 + y(j)^2) + exp(sqrt(x(i)^2 + ...
            y(j)^2)-1);

            % % % % % % % % % Ejemplo 3 % % % % % % % %
            % if sqrt(x(i)^2 + y(j)^2) <= (0.4)
            % funcInicial(i,j) = 1;

        else
            funcInicial(i,j)=0;
        end
    end
end

end
% surf(x,y,funcInicial)
% xlabel('x'), ylabel('y');
% title({'Gráfica de la Solución u(x,y,0)', ''})
% axis([-1 1 -1 1 0 1]), view(30,32) %% view(-62,24)
end
```



# Bibliografía

- [1] Burden, L. & Faires, J. (2011). *Numerical Analysis*. Boston USA: Cengage Learning.
- [2] Brigham, E. (1988). *The Fast Fourier Transform and its Applications*. Prentice Hall.
- [3] Cañizo, J. A. (julio, 2004). *Derivación bajo la integral*. Recuperada en <http://web.mat.bham.ac.uk/j.a.canizo/tex/dbi.pdf>.
- [4] Grebennikov A. I. (2003). *Fast algorithm for solution of Dirichlet problem for Laplace equation*. WSEAS Transaction on Computers Journal, 4, 1039 - 1043.
- [5] Grebennikov A. I. (2007). *General Ray Method for Solution of Boundary Value Problems for Elliptic Partial Differential Equations*, APLIEMATH III. Memorias del Congreso Internacional en Matemáticas Aplicadas, Instituto Politécnico Nacional, pp. 200 - 209.
- [6] Grebennikov A., Cortés A. and Espíndola A. (2014). *Transformada de Radon de la derivada parcial de una función en un dominio acotado en el plano*, Revista Iberoamericana de Ciencias (REIBCI) , Volumen 1, No. 4, pp. 169 – 176.
- [7] Grebennikov A. I. (2014). *On Theoretical Foundation of p-Version of General Ray Method for Solution of the Dirichlet Boundary Value Problems for Poisson Equation in Plane Domains*, International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR) Volume 2, Issue 12, pp. 960-965.
- [8] Helgason, S. (1999). *The Radon Transform*. Boston-Besel\_Berlin: Birkhauser.
- [9] Hubbar, M. E., Baines, M. J. & Jimack, P. K. (2009). *Consistent Dirichlet boundary conditions for numerical solution of moving boundary problems*. Applied Numerical Mathematics, 59, (6), PP. 1337-1353.
- [10] Hwei, P. (1998). *Hsu Análisis de Fourier*. Prentice Hall.

- [11] Jain, K. (1989). *Fundamentals of Digital Image Processing*. Prentice Hall.
- [12] Kartashov, E. M. (2001). *Analytical methods in theory of thermo-conductions in solids*. Moscow: High School.
- [13] Kudinov, V. A., Kartashov, E. M. & Kalashnikov, V. V. (2005). *Analytical solutions of thermo mass conductions and thermo elasticity for multi-level constructions*. Moscow: High School.
- [14] Mijailov, V. P. (1982). *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*. Moscú: Mir.
- [15] Samarsky, A. A. (1977). *Theory of Difference Schemes*. Moscow: Mir.
- [16] Sanz, J. L. C., Hinkle, E. B., & Jain, A. K. (1988). *Radon and Projection Transform-Based Computer Vision, Algorithms, A Pipeline Architecture, and Industrial Applications*. Berlin, Germany: Springer-Verlag.
- [17] Stanley, R. (1983). *The Radon Transform and Some of its Applications*. Jhon Wiley & Sons, Inc..
- [18] Tarzia, D. A. (2000). *MAT Serie A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMATICA*. Argentina: FCE-UA.
- [19] Tijonov, A.N. & Samarsky, A. A. (1980). *Ecuaciones de Física y Matemática*. Moscow: Mir.
- [20] Timothy, G. (2010). *The Mathematics of Medical Imaging*. New York: Springer.
- [21] Won, Y. (2005). *Applied Numerical Methods Using MATLAB*. Wiley-Interscience.
- [22] Zill, D. G. (2009). *A First Course in Differential Equations whit Modeling Applications*. Belmont USA: CENGAGE Learning.
- [23] Zuazua, E. (2009). *Métodos Numéricos de Resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Bilbao, Spain: Basque Center for Applied Mathematics.