



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS
POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PARTICIÓN PRIMAL-DUAL DEL ESPACIO DE
PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL
SEMI-INFINITA.

Tesis para obtener el grado de:
Doctor en Ciencias Matemáticas

Presenta:
Abraham Benito Barragán Amigón

Directores de tesis:
Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar
y
Dr. Maxim Ivanov Todorov

Puebla, Puebla. Agosto 2017



BUAP

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el(la) C:

ABRAHAM BENITO BARRAGÁN AMIGÓN

estudiante del Doctorado en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 21 de febrero de 2017, con la tesis titulada:

***“PARTICIÓN PRIMAL-DUAL DEL ESPACIO DE PROBLEMAS
DE PROGRAMACIÓN LINEAL SEMI-INFINITA”***

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.

H. Puebla de Z, a 16 de agosto de 2017

DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO
COORDINADOR DEL POSTGRADO
EN MATEMÁTICAS.



DR.FMR/mtrv

80 AÑOS
DE UNIVERSIDAD

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. 111 A,
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Dedicatoria

A Valeria, Jocelyn y mi hijo Abraham.

Agradecimientos

A Dios por permitirme vivir este momento.

A la doctora Lidia Aurora Hernández Rebollar por iniciarme en el estudio de esta rama de las matemáticas, por su motivación y confianza para terminar este trabajo.

Al doctor Maxim Ivanov Todorov por su paciencia, por su gran contribución en la elaboración del trabajo, a su tiempo y a sus consejos.

Agradezco a la comisión revisora integrada por los doctores en matemáticas: Miguel Antonio Jiménez Pozo, Francisco Javier Mendoza Torres, Jorge Bustamante González, Gabriel Kantún Montiel y Francisco Guerra Vázquez por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo.

Gracias al personal administrativo de la FCFM por su trato amable y su disponibilidad.

Gracias al CONACYT por la beca con la cual sostuve mis estudios de postgrado.

A toda mi familia por su amor, unión, sus consejos y por nunca dejar de creer en mí.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Par primal-dual	5
1.2. Partición primal-dual	12
1.3. Primer refinamiento. Caso continuo	15
1.4. Segundo refinamiento. Caso continuo, parte uno . . .	19
2. Estabilidad	27
2.1. Estabilidad de los problemas consistentes e inconsis- tentes	27
2.2. Estabilidad primal-dual. Caso continuo	34
2.3. Estabilidad primal-dual. Caso general	44
3. Continuación del segundo refinamiento. Caso conti- nuo	63
3.1. Segundo refinamiento, parte dos	63
3.2. Estabilidad	73
4. Caso de coeficientes acotados	78
4.1. Partición primal-dual	78
4.2. Estabilidad primal-dual	81
4.3. Primera partición refinada primal-dual	82
Conclusiones	101

Símbolos	105
Bibliografía	109

Introducción

Generalmente, un problema de programación lineal semi-infinita consiste en minimizar una función lineal en el espacio n -dimensional cuyas variables están sujetas a un número infinito de restricciones. Las restricciones vienen expresadas por un sistema de desigualdades determinadas por dos funciones que pueden ser continuas, acotadas o no acotadas. Cuando el sistema de desigualdades tiene solución, se dice que el problema es consistente. Además, si el valor óptimo del problema es finito, se dice que el problema es acotado. Si el problema es acotado y existe un punto donde se alcance el óptimo, llamado punto óptimo, se dice que el problema es soluble. A cada problema se le asocia su problema dual el cual es un problema de maximización y puede ser utilizado para obtener la solución del problema original. Al par de problemas se le llama par primal-dual. Este par puede clasificarse de diversas maneras al considerar la consistencia, acotación y solubilidad de los problemas. En el caso continuo, es decir, cuando las funciones que definen a las desigualdades son continuas Goberna y Todorov en [11], definen la llamada partición primal-dual, en ésta se estudian los distintos conjuntos que se generan al considerar la consistencia y la acotación de los problemas. Por otro lado, en el caso general, es decir, cuando las funciones que definen a las desigualdades son arbitrarias Ochoa y Vera de Serio han reportado un estudio análogo en [13]. Una partición más es considerada y estudiada en [10] por Goberna y Todorov, en el caso continuo. Esta última partición, llamada primera partición refinada primal-dual, resulta al considerar la consistencia, la acotación del valor óptimo y la acotación del conjunto de puntos óptimos.

En [2] se inició un estudio del caso continuo, en el que se estudiaron algunos de los conjuntos que se generan al considerar la consistencia, acotación y solubilidad de los problemas. Lo anterior permitió definir la llamada segunda partición refinada primal-dual que resulta ser una partición más natural que la considerada en [10]. Con este estudio se abrió un camino amplio de investigación en el que se dejaron varios problemas abiertos.

En esta tesis se resuelven algunos de los problemas propuestos en [2]. Además, se presentan nuevos resultados en el caso cuando las funciones que definen a las restricciones son acotadas (caso acotado), con lo cual se extienden los resultados obtenidos en [10].

En el capítulo 1 se presenta la notación a seguir y los resultados básicos de la programación lineal semi-infinita que serán usados en el resto del trabajo. También se presenta un resumen tomado de [10 y 11] de las condiciones que caracterizan a los conjuntos que se generan con la partición primal-dual y la primera partición refinada primal-dual.

En el capítulo 2 se revisan los resultados de [11 y 13] y se desarrollan algunas demostraciones para facilitar su comprensión.

Los resultados nuevos se presentan en los capítulos 3 y 4. En la sección 3.1 se caracterizan algunos de los conjuntos de la segunda partición refinada primal-dual y se presentan condiciones necesarias para otros conjuntos de la misma partición. Además, por medio de ejemplos, se muestra que los conjuntos son no vacíos y que las condiciones obtenidas sólo son necesarias. En la sección 3.2 se estudian algunas propiedades topológicas de los conjuntos que resultan de la segunda partición refinada primal-dual, como lo son, su interior y su densidad en otro conjunto. En el capítulo 4 se presentan los resultados que se obtuvieron al estudiar la partición

primal-dual y la primera partición refinada primal-dual en el caso acotado.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Par primal-dual

Se inicia esta sección con notaciones básicas. Si \mathbf{x} es un vector en \mathbb{R}^n , \mathbf{x}' denotará su transpuesta y $\|\mathbf{x}\|$ denotará su norma Euclidiana. Además, el **vector nulo** en \mathbb{R}^n será denotado por $\mathbf{0}_n$ y el **elemento j -ésimo** de la base canónica de \mathbb{R}^n será denotado por \mathbf{e}_j .

Dado un conjunto diferente del vacío $X \subset \mathbb{R}^n$, $\text{conv } X$ y $\text{cone } X$ denotarán la **envoltura convexa** y la **envoltura cónica** de X , respectivamente ($\text{cone } \emptyset = \{\mathbf{0}_n\}$). Si C es un conjunto convexo, su dimensión se denotará por $\dim C$ ($\dim \emptyset = -1$). Además, si C es un conjunto convexo y diferente del vacío, se define su **cono de recesión** $O^+(C)$ como:

$\text{cone } \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} \in C \text{ para cada } \mathbf{x} \in C \text{ y para cada } \alpha > 0\}$.

Si X es un subconjunto de cualquier espacio topológico, $\text{int } X$, $\text{cl } X$ y $\text{front } X$ denotarán el interior, la clausura y la frontera de X , respectivamente.

La programación lineal semi-infinita (PLSI) trata con problemas de optimización con objetivo lineal y restricciones lineales, en los cuales el número de restricciones o la dimensión del espacio de

las variables de decisión, pero no ambos, es infinito.

El problema primal de programación lineal semi-infinita generalmente se plantea de la forma siguiente

$$P : \quad \inf \mathbf{c}' \mathbf{x} \\ \text{s.a. } \mathbf{a}'_t \mathbf{x} \geq b_t, \quad t \in T,$$

donde \mathbf{c} , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, T es un conjunto de índices no vacío (posiblemente infinito), $\mathbf{a} : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ es función con $\mathbf{a}(t) := \mathbf{a}'_t := (a_1(t), \dots, a_n(t))$ y b es función, $b : T \rightarrow \mathbb{R}$ con $b(t) := b_t$. Además, cada desigualdad $\mathbf{a}'_t \mathbf{x} \geq b_t$ es lineal.

Observación 1.1. Si T es un conjunto finito (véase [4 y 7]), P es llamado problema de programación lineal ordinaria (PLO) y puede considerarse como uno de programación lineal semi-infinita.

Se denotará por σ al sistema de desigualdades del problema P , es decir,

$$\sigma := \{\mathbf{a}'_t \mathbf{x} \geq b_t, \quad t \in T\}.$$

F denotará al conjunto de soluciones (**conjunto factible**) de σ . Se dirá que P es **consistente** si $F \neq \emptyset$, de lo contrario, se dirá que P es **inconsistente**.

Asociados a cada problema P , se tienen los dos conjuntos convexos siguientes:

$$G := \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix}, \quad t \in T \right\},$$

y

$$H := G + \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Además, los tres conos convexos:

Cono de primer momento

$$M := \text{cone} \{ \mathbf{a}_t, t \in T \},$$

cono de segundo momento

$$N := \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T \right\},$$

y **cono característico**

$$K := \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T; \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

El teorema generalizado de Gale, [9, Corolario 3.1.1], establece que $\sigma \neq \emptyset$ si y sólo si $(\mathbf{0}_n, 1)' \notin \text{cl } N$. En tal caso, el lema no homogéneo de Farkas, [9, Corolario 3.1.2], establece que la inecuación $\mathbf{c}'\mathbf{x} \geq d$ es válida para todo $\mathbf{x} \in F$ si y sólo si

$$(\mathbf{c}, d)' \in \text{cl } K \text{ (véase, también [1]).}$$

En lo que sigue se denotará por \mathbb{R}_+ y \mathbb{R}_- al conjunto de números reales positivos y negativos incluyendo al cero, respectivamente. Además, \mathbb{R}_+^0 y \mathbb{R}_-^0 denotarán al conjunto de números reales positivos y negativos sin incluir al cero, respectivamente.

Sea T un conjunto diferente del vacío. Se definen los conjuntos siguientes:

$$\mathbb{R}^T := \{ \lambda : T \rightarrow \mathbb{R} \mid \lambda \text{ es función} \},$$

$$\mathbb{R}^{(T)} := \{ \lambda \in \mathbb{R}^T \mid \lambda(t) = 0 \text{ excepto un número finito de índices} \}$$

y

$$\mathbb{R}_+^{(T)} := \{ \lambda : T \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid \lambda \in \mathbb{R}^{(T)} \}.$$

Al conjunto $\mathbb{R}^{(T)}$ se le llama **conjunto de sucesiones generalizadas** y a $\mathbb{R}_+^{(T)}$ se le llama **conjunto de sucesiones generalizadas no negativas**.

Observación 1.2. $\mathbb{R}^{(T)}$ es un espacio lineal con la suma usual de funciones y la multiplicación por un escalar. Por otro lado, $\mathbb{R}_+^{(T)}$ es un cono convexo.

El espacio lineal $\mathbb{R}^{(T)}$ será dotado con las normas:

$$\|\lambda\|_1 := \sum_{t \in T} |\lambda_t|$$

y

$$\|\lambda\|_\infty := \max_{t \in T} |\lambda_t|.$$

Si P es un problema de PLSI, se pretende buscar cotas inferiores para $\mathbf{c}'\mathbf{x}$ con $\mathbf{x} \in F$. El problema dual, D , consistirá en hallar el supremo de dichas cotas, porque de esa forma el valor óptimo del problema dual D se acercará al valor óptimo del problema primal P todo lo posible.

Dado P consistente, sea $\mathbf{x} \in F$. Si $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ satisface

$$\sum_{t \in T} \lambda_t \mathbf{a}_t = \mathbf{c},$$

entonces

$$\mathbf{c}'\mathbf{x} = \sum_{t \in T} \lambda_t \mathbf{a}_t' \mathbf{x} \geq \sum_{t \in T} \lambda_t b_t,$$

de donde

$$\sum_{t \in T} \lambda_t b_t$$

es una cota inferior para el valor óptimo de P . De este modo, el problema dual de P se plantea como sigue

$$\begin{aligned} D : \quad & \text{Sup} \quad \sum_{t \in T} \lambda_t b_t \\ & \text{s.a.} \quad \sum_{t \in T} \lambda_t \mathbf{a}_t = \mathbf{c} \\ & \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}. \end{aligned}$$

Se denotará por Λ al conjunto factible del problema D , es decir,

$$\Lambda := \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \mid \sum_{t \in T} \lambda_t \mathbf{a}_t = \mathbf{c} \right\}.$$

Se dirá que D es consistente si $\Lambda \neq \emptyset$, de lo contrario, se dirá que D es inconsistente.

Al par de problemas P y D se le llama **par primal-dual**. Además, como en P y D se utilizan los mismos datos, ambos problemas pueden representarse por la tripleta $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c})$.

Se denotarán por $v^P(\pi)$ y $v^D(\pi)$ los **valores óptimos** de P y D , respectivamente. Se define como es usual $v^P(\pi) = +\infty$ y $v^D(\pi) = -\infty$, respectivamente, cuando los correspondientes problemas sean inconsistentes.

Teorema 1.1. (*Teorema de dualidad débil*) $v^P(\pi) \geq v^D(\pi)$.

La demostración se sigue de manera inmediata de la construcción del problema dual.

Definición 1.1. Sean $v^P(\pi)$ y $v^D(\pi)$ los valores óptimos del problema primal y del problema dual, respectivamente, de un parámetro π dado. Se le llama **hueco dual** a la diferencia

$$\delta(\pi) := v^P(\pi) - v^D(\pi).$$

Por el teorema de dualidad débil, siempre se tiene que $\delta(\pi) \geq 0$. Cuando $\delta(\pi) = 0$, se dice que no hay hueco dual.

Se define el conjunto de soluciones óptimas (**conjunto óptimo**)

$$F^* := \{\mathbf{x} \in F \mid \mathbf{c}'\mathbf{x} = v^P(\pi)\} \text{ y } \Lambda^* := \left\{ \lambda \in \Lambda \mid \sum_{t \in T} \lambda_t b_t = v^D(\pi) \right\}$$

de los problemas P y D , respectivamente.

Se dirá que P (D) es soluble, si $F^* \neq \emptyset$ ($\Lambda^* \neq \emptyset$), de lo contrario se dirá que P (D) es no soluble.

El **espacio de parámetros** Π se define como el conjunto de todas las tripletas $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c})$ con n y T fijos, equipado con la pseudométrica que se genera al considerar la distancia extendida $d : \Pi \times \Pi \rightarrow [0, +\infty]$, definida por

$$d(\pi^1, \pi^2) := \max \left\{ \|\mathbf{c}^1 - \mathbf{c}^2\|_\infty, \sup_{t \in T} \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t^2 \\ b_t^2 \end{pmatrix} \right\|_\infty \right\}.$$

Aquí, $\pi^i = (\mathbf{a}^i, b^i, \mathbf{c}^i) \in \Pi$, $i = 1, 2$ y $\|\cdot\|_\infty$ denota la norma del máximo.

Observación 1.3. *Si T es un espacio topológico compacto de Hausdorff y las funciones \mathbf{a} y b son continuas, Π es un espacio métrico.*

Si se considera al problema primal, en Π se definen los conjuntos siguientes:

Conjunto de parámetros con problema primal consistente

$$\Pi_C^P := \{\pi \in \Pi \mid F \neq \emptyset\}.$$

Conjunto de parámetros con problema primal inconsistente

$$\Pi_{IC}^P := \{\pi \in \Pi \mid F = \emptyset\}.$$

Conjunto de parámetros con problema primal soluble

$$\Pi_s^P := \{\pi \in \Pi_C^P \mid -\infty < v^P(\pi) \text{ y } F^* \neq \emptyset\}.$$

Conjunto de parámetros con problema primal no soluble

$$\Pi_n^P := \{\pi \in \Pi_C^P \mid -\infty < v^P(\pi) \text{ y } F^* = \emptyset\}.$$

Conjuntos similares a los anteriores son definidos en Π si se considera al problema dual.

$$\Pi_C^D := \{\pi \in \Pi \mid \Lambda \neq \emptyset\},$$

$$\begin{aligned}\Pi_{IC}^D &:= \{\pi \in \Pi \mid \Lambda = \emptyset\}, \\ \Pi_s^D &:= \{\pi \in \Pi_C^D \mid v^D(\pi) < \infty \text{ y } \Lambda^* \neq \emptyset\}, \\ \Pi_n^D &:= \{\pi \in \Pi_C^D \mid v^D(\pi) < \infty \text{ y } \Lambda^* = \emptyset\}.\end{aligned}$$

Estos son: conjunto de parámetros con problema dual consistente, conjunto de parámetros con problema dual inconsistente, conjunto de parámetros con problema dual soluble y el conjunto de parámetros con problema dual no soluble.

El resultado siguiente proporciona una caracterización de los conjuntos Π_C^P y Π_C^D . La caracterización del conjunto Π_C^P se sigue de [9, Teorema 4.4 y Teorema 4.5], mientras que la caracterización del conjunto Π_C^D se sigue de la construcción del problema dual.

Proposición 1.1. *Sea π un parámetro en Π . Entonces*

(i) $\pi \in \Pi_C^P$ si y sólo si $(\theta_1^n) \notin \text{cl } N$, lo cual es equivalente a que

$$\text{cl } K = (\text{cl } M) \times \mathbb{R};$$

(ii) $\pi \in \Pi_C^D$ si y sólo si $\mathbf{c} \in M$.

En lo que sigue, cuando se consideren varios parámetros, estos, sus problemas y sus conjuntos asociados serán distinguidos por medio de supraíndices y subíndices: $\pi^i, P_i, D_i, F_i, F_i^*, \Lambda_i, \Lambda_i^*, M_i, N_i, K_i$.

Se concluye esta sección, con dos definiciones básicas que serán utilizadas en el desarrollo de la teoría.

Definición 1.2. *Sea $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c}) \in \Pi$. π satisface la **condición de Slater** si existe $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, llamado **punto de Slater** tal que,*

$$\mathbf{a}_i' \bar{\mathbf{x}} > b_t \text{ para todo } t \in T.$$

Observación 1.4. *Si un parámetro π satisface la condición de Slater, entonces el problema primal asociado a él es consistente.*

Definición 1.3. Sea $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c}) \in \Pi$. π satisface la **condición fuerte de Slater** si existen $\epsilon > 0$ y $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, llamado **punto fuerte de Slater** tal que,

$$\mathbf{a}'_t \bar{\mathbf{x}} \geq b_t + \epsilon \text{ para todo } t \in T.$$

Observación 1.5. Si un parámetro π satisface la condición fuerte de Slater, también satisface la condición de Slater. Sin embargo, no todo parámetro que satisface la condición de Slater satisface la condición fuerte de Slater (véase el Ejemplo 4.4 en esta tesis).

1.2. Partición primal-dual

Si se considera al espacio de todos los problemas, un problema en el espacio puede clasificarse como consistente o inconsistente pero no ambos. Si además de la consistencia se considera la acotación, el problema puede clasificarse como inconsistente, acotado o no acotado. En esta sección se presenta un resumen de los resultados, obtenidos en [11], que caracterizan a cada conjunto resultante de considerar la consistencia y la acotación del par primal-dual.

El estudio del par primal-dual es importante por varias razones. Por ejemplo, en programación lineal ordinaria la solución del problema primal y el problema dual puede reducirse a la solución de un sistema de desigualdades asociado a dicha pareja si y sólo si ambos problemas son acotados, es decir, ambos problemas son consistentes y sus valores optimales son finitos. Cabe mencionar que ésta es la clase de problemas en programación lineal ordinaria que pueden ser resueltos por medio de los métodos numéricos para los sistemas de desigualdades lineales. Lo anterior no se cumple en general en la programación lineal semi-infinita, por esta razón es que Goberna, Todorov, Ochoa, Vera de Serio y otros (véase [10, 11 y 13]) han investigado, en particular, condiciones bajo las cuales el par primal-dual en programación lineal semi-infinita pueda ser

resuelto de una manera similar.

En programación lineal semi-infinita, el problema primal puede ser clasificado en inconsistente (IC) o consistente (C). En el último caso puede clasificarse en acotado (A), es decir, con valor optimal finito o no acotado (NA). Esta clasificación genera la partición siguiente del espacio de parámetros, a la que se le llama partición primal,

$$\{\Pi_{IC}^P, \Pi_A^P, \Pi_{NA}^P\}.$$

Los dos conjuntos Π_A^P y Π_{NA}^P son llamados conjunto de parámetros con problema primal acotado y conjunto de parámetros con problema primal no acotado, respectivamente. Estos conjuntos son definidos como:

$$\Pi_A^P := \{\pi \in \Pi_C^P \mid F \neq \emptyset \text{ y } -\infty < v^P(\pi)\}$$

y

$$\Pi_{NA}^P := \{\pi \in \Pi_C^P \mid F \neq \emptyset \text{ y } -\infty = v^P(\pi)\},$$

respectivamente. Los conjuntos Π_{IC}^P y Π_C^P ya fueron definidos en la sección 1.1. Otra partición, llamada partición dual,

$$\{\Pi_{IC}^D, \Pi_A^D, \Pi_{NA}^D\}$$

es obtenida al considerar el problema dual. En esta partición

$$\Pi_A^D := \{\pi \in \Pi_C^D \mid \Lambda \neq \emptyset \text{ y } v^D(\pi) < \infty\}$$

y

$$\Pi_{NA}^D := \{\pi \in \Pi_C^D \mid \Lambda \neq \emptyset \text{ y } v^D(\pi) = \infty\},$$

son llamados conjunto de parámetros con problema dual acotado y conjunto de parámetros con problema dual no acotado, respectivamente. Los conjuntos Π_{IC}^D y Π_C^D ya fueron definidos en la sección 1.1. Una partición más, a la que se le llama partición primal-dual, se obtiene con las intersecciones a pares no vacías de la partición primal y la partición dual. En la Tabla 1 se enumeran los conjuntos (estados) de la partición primal-dual, algunos conjuntos son vacíos por el Teorema de Dualidad Débil (Teorema 1.1).

$D \setminus P$	IC	A	NA
IC	4	5	2
A	6	1	
NA	3		

Tabla 1

Se denotará por Π_i al conjunto de parámetros enumerado en la casilla $i = 1, 2, \dots, 6$. Así,

$$\Pi_1 := \Pi_A^P \cap \Pi_A^D, \quad \Pi_2 := \Pi_{NA}^P \cap \Pi_{IC}^D, \quad \Pi_3 := \Pi_{IC}^P \cap \Pi_{NA}^D,$$

$$\Pi_4 := \Pi_{IC}^P \cap \Pi_{IC}^D, \quad \Pi_5 := \Pi_A^P \cap \Pi_{IC}^D \text{ y } \Pi_6 := \Pi_{IC}^P \cap \Pi_A^D.$$

Por ejemplo, $\pi \in \Pi_1$ si el problema primal y el problema dual son acotados.

Observación 1.6. Π_5 y Π_6 son vacíos en programación lineal ordinaria debido al Teorema de Dualidad [7, Proposición 4.2].

En los resultados siguientes se caracterizan a los conjuntos que se generan en la partición primal-dual.

Lema 1.1. [11, Lema 3] Si $\pi \in \Pi_C^P$, entonces $v^P(\pi) \neq -\infty$ si y sólo si

$$(\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R}) \cap cl N \neq \emptyset. \quad (1.1)$$

Corolario 1.1. [11, Corolario 1(i)] $\pi \in \Pi_2$ si y sólo si

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl N \text{ y } (\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R}) \cap cl N = \emptyset.$$

Corolario 1.2. [11, Corolario 1(ii)] $\pi \in \Pi_5$ si y sólo si

$$\mathbf{c} \notin M, \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl N \text{ y } (\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R}) \cap cl N \neq \emptyset.$$

Lema 1.2. [11, Lema 4] Si $\pi \in \Pi_C^D$, entonces $v^D(\pi) \neq +\infty$ si y sólo si

$$\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R} \not\subseteq K. \quad (1.2)$$

Corolario 1.3. [11, Corolario 2(i)] $\pi \in \Pi_3$ si y sólo si

$$\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R} \subseteq K.$$

Corolario 1.4. [11, Corolario 2(ii)] $\pi \in \Pi_6$ si y sólo si

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in cl N, \quad \mathbf{c} \in M \quad y \quad \{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R} \not\subseteq K.$$

En la Tabla 2 se resumen las caracterizaciones de los conjuntos Π_i , $i = 1, \dots, 6$ en términos de M y N ($\lceil(1.1)$, $\lceil(1.2)$ denotan que no se cumple (1.1) y (1.2), respectivamente).

	$\mathbf{c} \notin M$	$\mathbf{c} \in M$ y (1.2)	$\mathbf{c} \in M$ y $\lceil(1.2)$
$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in cl N$	Π_4	Π_6	Π_3
$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl N$ y (1.1)	Π_5	Π_1	
$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl N$ y $\lceil(1.1)$	Π_2		

Tabla 2

1.3. Primer refinamiento. Caso continuo

En las siguientes dos secciones se trabajará en el caso continuo, es decir, con problemas donde T es un espacio topológico compacto de Hausdorff infinito, y las funciones \mathbf{a} y b son continuas en él. En este caso, los problemas también son llamados problemas de programación lineal semi-infinita continua.

La continuidad de las funciones \mathbf{a} y b garantizan buenas propiedades teóricas, entre ellas, la convergencia de los algoritmos de discretización en la programación lineal semi-infinita (véase [9, Capítulo 11]).

En [10] se clasifica al problema primal P acotado de dos maneras. La primera, como soluble con conjunto optimal acotado (S), si su conjunto optimal es diferente del vacío y acotado, y la segunda, como no soluble o soluble con conjunto optimal no acotado (N), si su conjunto optimal es vacío o es no acotado. De la clasificación anterior resultan la primera partición refinada primal del espacio de parámetros

$$\{\Pi_{IC}^P, \Pi_S^P, \Pi_N^P, \Pi_{NA}^P\}.$$

En la partición, Π_S^P es llamado conjunto de parámetros con problema primal soluble y conjunto optimal acotado, y se define como:

$$\Pi_S^P := \{\pi \in \Pi_C^P \mid F^* \neq \emptyset \text{ y } F^* \text{ es acotado}\}.$$

El conjunto de parámetros con problema primal no soluble o soluble con conjunto optimal no acotado es Π_N^P . Este conjunto está definido como:

$$\Pi_N^P := \{\pi \in \Pi_C^P \mid F^* = \emptyset \text{ o } F^* \text{ es no acotado}\}.$$

Los conjuntos Π_{IC}^P y Π_{NA}^P ya fueron definidos en la sección 1.1. y la sección 1.2, respectivamente. La primera partición refinada dual del espacio de parámetros

$$\{\Pi_{IC}^D, \Pi_S^D, \Pi_N^D, \Pi_{NA}^D\},$$

resulta de considerar al problema dual D , en ésta

$$\Pi_S^D := \{\pi \in \Pi_C^D \mid \Lambda^* \neq \emptyset \text{ y } \Lambda^* \text{ es acotado}\}$$

y

$$\Pi_N^D := \{\pi \in \Pi_C^D \mid \Lambda^* = \emptyset \text{ o } \Lambda^* \text{ es no acotado}\}$$

son, el conjunto de parámetros con problema dual soluble con conjunto optimal acotado, y el conjunto de parámetros con problema dual no soluble o soluble con conjunto optimal no acotado, respectivamente. Los conjuntos Π_{IC}^D y Π_{NA}^D ya fueron definidos en la sección 1.1. y la sección 1.2, respectivamente.

El resultado siguiente se utiliza en [10] para obtener una caracterización del conjunto Π_S^P . La caracterización es cierta en el caso general, es decir, donde T es un conjunto diferente del vacío, y las funciones \mathbf{a} y b son arbitrarias. En particular, el resultado es cierto en el caso continuo.

Corolario 1.5. [9, Corolario 9.3.1] *Dado un problema consistente P , las condiciones siguientes son equivalentes.*

- (i) F^* es diferente del vacío y acotado;
- (ii) $\mathbf{c} \in \text{int } M$.

El resultado siguiente se presenta en [9], en el caso continuo y es utilizado en [10] para obtener una caracterización del conjunto Π_S^D .

Teorema 1.2. [9, Teorema 9.8] *Si P es un problema consistente en PLSI, con problema dual D consistente, entonces las condiciones siguientes son equivalentes.*

- (i) Λ^* es diferente del vacío y acotado;
- (ii) π satisface la condición de Slater.

En [10] se demuestra el lema siguiente.

Lema 1.3. *Las afirmaciones siguientes son verdaderas:*

- (i) $\pi \in \Pi_S^P$ si y sólo si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{cl } K$ y $\mathbf{c} \in \text{int } M$.
- (ii) $\pi \in \Pi_S^D$ si y sólo si $\mathbf{c} \in M$ y π satisface la condición de Slater.

Una partición que resulta ser un refinamiento de la partición primal-dual, definida en la sección 1.2, resulta de las intersecciones por pares no vacías de la primera partición refinada primal y la primera partición refinada dual. Este refinamiento es llamado primera partición refinada primal-dual. En la Tabla 3 se muestra el refinamiento.

$D \setminus P$	IC	A		NA
		S	N	
IC	Π_4		Π_5	Π_2
A	S		Π_1^1	Π_1^3
	N	Π_6	Π_1^2	Π_1^4
NA	Π_3			

Tabla 3

En el refinamiento,

$$\Pi_1^1 := \Pi_S^P \cap \Pi_S^D, \quad \Pi_1^2 := \Pi_S^P \cap \Pi_N^D,$$

$$\Pi_1^3 := \Pi_N^P \cap \Pi_S^D \quad \text{y} \quad \Pi_1^4 := \Pi_N^P \cap \Pi_N^D.$$

Los otros conjuntos ya fueron definidos en la Sección 1.2.

El razonamiento siguiente es utilizado en [10] para mostrar que

$$\Pi_S^P \cap \Pi_{IC}^D = \emptyset = \Pi_{IC}^P \cap \Pi_S^D,$$

con lo cual se obtiene que $\Pi_N^P \cap \Pi_{IC}^D = \Pi_5$ y $\Pi_{IC}^P \cap \Pi_N^D = \Pi_6$.

Primero, si $\pi \in \Pi_S^P \cap \Pi_{IC}^D$, entonces $\mathbf{c} \in \text{int } M$ y $\mathbf{c} \notin M$, lo cual es una contradicción, por lo tanto, $\Pi_S^P \cap \Pi_{IC}^D = \emptyset$. Segundo, si $\pi \in \Pi_{IC}^P \cap \Pi_S^D$, entonces π tiene problema primal inconsistente y π satisface la condición de Slater, nuevamente se tiene una contradicción (Observación 1.4), por lo tanto, $\Pi_{IC}^P \cap \Pi_S^D = \emptyset$.

En programación lineal ordinaria se tiene $\Pi_1^i = \emptyset$ para $i = 2, 3, 4$ debido al Teorema de Dualidad. Sin embargo, en [10] se demuestra que en el caso continuo los conjuntos anteriores son no vacíos.

Teorema 1.3. [10, Teorema 3.1] $\Pi_1^i \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, 4$.

En el teorema siguiente se presentan las condiciones que caracterizan a los conjuntos que se generan con la primera partición refinada primal-dual. Cada condición fue obtenida en [10] y se deduce del Lema 1.3.

Teorema 1.4. [10, Teorema 3.3] *Las afirmaciones siguientes son verdaderas:*

- (i) $\pi \in \Pi_1^1$ si y sólo si $\mathbf{c} \in \text{int } M$ y π satisface la condición de Slater;
- (ii) $\pi \in \Pi_1^2$ si y sólo si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{cl } K$, $\mathbf{c} \in \text{int } M$ y π no satisface la condición de Slater;
- (iii) $\pi \in \Pi_1^3$ si y sólo si $\mathbf{c} \in M \setminus \text{int } M$ y π satisface la condición de Slater;
- (iv) $\pi \in \Pi_1^4$ si y sólo si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{cl } K$, $\mathbf{c} \in M \setminus \text{int } M$ y π no satisface la condición de Slater.

1.4. Segundo refinamiento. Caso continuo, parte uno

En esta sección se considera un refinamiento más natural de la partición primal-dual considerada en la sección 1.2. Para esto, se clasifica a los parámetros con problema primal acotado en los que tienen problema primal soluble (s), sin importar el acotamiento del conjunto optimal, y los que tienen problema primal no soluble (n). Una clasificación similar se hace para los parámetros con problema dual acotado.

La clasificación de los parámetros con problemas acotados genera nuevas particiones del espacio de parámetros, estas

particiones son llamadas:

Segunda partición refinada primal

$$\{\Pi_{IC}^P, \Pi_s^P, \Pi_n^P, \Pi_{NA}^P\},$$

y segunda partición refinada dual

$$\{\Pi_{IC}^D, \Pi_s^D, \Pi_n^D, \Pi_{NA}^D\}.$$

Todos los conjuntos que se muestran en las dos particiones ya fueron definidos en la Sección 1.1 y la Sección 1.2.

El nuevo refinamiento de la partición primal-dual es llamado segunda partición refinada primal-dual y resulta de las intersecciones no vacías por pares de las dos particiones anteriores. Este refinamiento se muestra en la Tabla 4.

$D \setminus P$	IC	A		NA
		s	n	
IC	Π_4	$\hat{\Pi}_5^1$	$\hat{\Pi}_5^2$	Π_2
A	s	$\hat{\Pi}_6^1$	$\hat{\Pi}_1^1$	
	n	$\hat{\Pi}_6^2$	$\hat{\Pi}_1^2$	
NA	Π_3			

Tabla 4

En el nuevo refinamiento,

$$\begin{aligned}\widehat{\Pi}_1^1 &:= \Pi_s^P \cap \Pi_s^D, & \widehat{\Pi}_1^2 &:= \Pi_s^P \cap \Pi_n^D, \\ \widehat{\Pi}_1^3 &:= \Pi_n^P \cap \Pi_s^D, & \widehat{\Pi}_1^4 &:= \Pi_n^P \cap \Pi_n^D, \\ \widehat{\Pi}_5^1 &:= \Pi_s^P \cap \Pi_{IC}^D, & \widehat{\Pi}_5^2 &:= \Pi_n^P \cap \Pi_{IC}^D, \\ \widehat{\Pi}_6^1 &:= \Pi_{IC}^P \cap \Pi_s^D & \text{y } \widehat{\Pi}_6^2 &:= \Pi_{IC}^P \cap \Pi_n^D.\end{aligned}$$

Los conjuntos Π_2 , Π_3 y Π_4 son los que se definieron en la partición primal-dual.

Los ejemplos a continuación son tomados de [2] y con ellos se muestra que $\widehat{\Pi}_1^i \neq \emptyset$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Sin embargo, en programación lineal ordinaria se tiene $\widehat{\Pi}_1^2 = \widehat{\Pi}_1^3 = \widehat{\Pi}_1^4 = \emptyset$, debido al Teorema de Dualidad. Los conjuntos $\widehat{\Pi}_5^1$, $\widehat{\Pi}_5^2$, $\widehat{\Pi}_6^1$ y $\widehat{\Pi}_6^2$ son estudiados en la sección 3.1 como trabajo nuevo.

En el ejemplo siguiente $\pi^1 \in \widehat{\Pi}_1^1$ con lo cual se muestra que $\widehat{\Pi}_1^1 \neq \emptyset$.

Ejemplo 1.1. Considérese en \mathbb{R}^2 el problema:

$$\begin{aligned}P_1 : & \quad \text{mín } x_1 \\ & \text{s.a } x_1 + t^2 x_2 \geq 0, \quad t \in [0, 1].\end{aligned}$$

P_1 es consistente, acotado y soluble, con $v^P(\pi^1) = 0$ y $F_1^* = \{0\} \times \mathbb{R}^+$.

El problema dual de P_1 es:

$$\begin{aligned}D_1 : & \quad \text{máx } \sum_{t \in [0,1]} \lambda_t 0 \\ & \text{s.a } \sum_{t \in [0,1]} \lambda_t \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^{([0,1])}.\end{aligned}$$

La función $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(0,1)}$, donde

$$\lambda_t = \begin{cases} 1, & \text{si } t = 0, \\ 0, & \text{si } t \in (0, 1], \end{cases}$$

es solución factible para el problema D_1 , con $v^D(\pi^1) = 0$. Como todo punto factible es óptimo, en este caso, se sigue que D_1 es soluble. Por lo tanto, $\pi^1 \in \widehat{\Pi}_1^1$. □

En el ejemplo siguiente $\pi^2 \in \widehat{\Pi}_1^2$ con lo cual se muestra que $\widehat{\Pi}_1^2 \neq \emptyset$.

Ejemplo 1.2. Considérese en \mathbb{R}^2 el problema:

$$P_2 : \quad \begin{aligned} & \text{mín } x_2 \\ & \text{s.a. } x_1 + rx_2 \geq -r^2, \quad r \in [0, 1] \\ & \quad \quad -x_1 + sx_2 \geq -s^2, \quad s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

El problema es consistente, acotado y soluble, con

$$F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0 \right\}, \quad v^P(\pi^2) = 0 \quad \text{y} \quad F_2^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

El problema dual de P_2 es:

$$D_2 : \quad \begin{aligned} & \text{máx} \left(\sum_{r \in [0, 1]} \left(-\lambda_r r^2 \right) + \sum_{s \in [0, 1]} \left(-\gamma_s s^2 \right) \right) \\ & \text{s.a.} \quad \sum_{r \in [0, 1]} \lambda_r \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} + \sum_{s \in [0, 1]} \gamma_s \begin{pmatrix} -1 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \quad \quad \lambda, \gamma \in \mathbb{R}_+^{([0, 1])}. \end{aligned}$$

D_2 es consistente, $v^D(\pi^2) = 0$, pero $\Lambda_2^* = \emptyset$, es decir, D_2 es no soluble. Como se mencionó antes, π^2 está en $\widehat{\Pi}_1^2$. □

En el ejemplo siguiente $\pi^3 \in \widehat{\Pi}_1^3$ con lo cual se muestra que $\widehat{\Pi}_1^3 \neq \emptyset$.

Ejemplo 1.3. Considérese en \mathbb{R}^2 el problema

$$P_3 : \quad \begin{array}{l} \text{mín } x_1 \\ \text{s.a } x_1 + t^2 x_2 \geq 2t, \quad t \in [0, 1]. \end{array}$$

$F_3 \neq \emptyset$, $v^P(\pi^3) = 0$ pero $F_3^* = \emptyset$, es decir, P_3 es no soluble.

El problema dual de P_3 es:

$$D_3 : \quad \begin{array}{l} \text{máx } \sum_{t \in [0,1]} \lambda_t 2t \\ \text{s.a } \sum_{t \in [0,1]} \lambda_t \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda \in \mathbb{R}_+^{([0,1])}. \end{array}$$

D_3 es consistente y soluble con $v^D(\pi^3) = 0$. Por lo tanto, $\pi^3 \in \widehat{\Pi}_1^3$. \square

En el ejemplo siguiente $\pi^4 \in \widehat{\Pi}_1^4$ con lo cual se muestra que $\widehat{\Pi}_1^4 \neq \emptyset$.

Ejemplo 1.4. Considérese en \mathbb{R}^3 el problema siguiente, con $\alpha > 0$

$$P_4 : \quad \begin{array}{l} \text{mín}(x_1 + \alpha x_3) \\ \text{s.a } x_1 + t^2 x_2 \geq 2t, \quad t \in [0, 1] \\ \quad \quad \quad s x_3 \geq -s^2, \quad s \in [0, 1] \\ \quad \quad \quad -r x_3 \geq -r^2, \quad r \in [0, 1]. \end{array}$$

P_4 es consistente, $v^P(\pi^4) = 0$ y $F_4^* = \emptyset$.

El problema dual de P_4 es:

$$D_4 : \quad \text{máx} \left(\sum_{t \in [0,1]} \lambda_t 2t - \sum_{s \in [0,1]} \beta_s s^2 - \sum_{r \in [0,1]} \gamma_r r^2 \right)$$

$$s.a \sum_{t \in [0,1]} \lambda_t \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{s \in [0,1]} \beta_s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} + \sum_{r \in [0,1]} \gamma_r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^{([0,1])}.$$

D_4 es consistente, $v^D(\pi^4) = 0$ y D_4 es no soluble. □

En el teorema siguiente se presentan los resultados que se obtuvieron en [2], los cuales consisten en condiciones necesarias o suficientes, pero no ambas, para que un parámetro esté en alguno de los conjuntos que resultan en el nuevo refinamiento. Las condiciones que se presentan son para los conjuntos $\widehat{\Pi}_1^1$, $\widehat{\Pi}_1^2$, $\widehat{\Pi}_1^3$ y $\widehat{\Pi}_1^4$. Condiciones para los conjuntos $\widehat{\Pi}_5^1$, $\widehat{\Pi}_5^2$, $\widehat{\Pi}_6^1$ y $\widehat{\Pi}_6^2$ son presentadas en la sección 3.1 como trabajo nuevo.

Teorema 1.5. *Sea $\pi \in \Pi$ un parámetro con problemas primal y dual acotados. Las afirmaciones siguientes son verdaderas:*

- (i) *Si $\mathbf{c} \in \text{int } M$ y π satisface la condición de Slater, entonces $\pi \in \widehat{\Pi}_1^1$;*
- (ii) *Si $\pi \in \widehat{\Pi}_1^2$, entonces π no satisface la condición de Slater;*
- (iii) *Si $\pi \in \widehat{\Pi}_1^3$, entonces $\mathbf{c} \in M \setminus \text{int } M$;*
- (iv) *Si $\pi \in \widehat{\Pi}_1^4$, entonces $\mathbf{c} \in M \setminus \text{int } M$ y π no satisface la condición de Slater.*

La dificultad de obtener una caracterización de los nuevos conjuntos $\widehat{\Pi}_1^i$, $i = 1, 2, 3, 4$, en términos de los datos \mathbf{a} , b y \mathbf{c} , viene del hecho de que no se cuenta con una caracterización de los problemas duales solubles en términos de los datos mencionados. Por el contrario, los problemas duales solubles con conjunto optimal acotado son caracterizados en el Lema 1.3.

Los ejemplos a continuación son analizados en [2], con ellos se muestra que las condiciones presentadas en el teorema anterior sólo son suficientes o necesarias, respectivamente.

Con el ejemplo siguiente se muestra que, si un parámetro π no satisface la condición de Slater esto no es condición suficiente para que $\pi \in \Pi_1^2$.

Ejemplo 1.5. Considérese el problema

$$P_5 : \quad \begin{array}{l} \text{mín } x_2 \\ \text{s.a } x_1 \geq 0 \\ \quad -x_1 \geq 0 \\ \quad x_2 \geq 0. \end{array}$$

P_5 es consistente, $v^P(\pi^5) = 0$ y $F_5^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Además, π^5 no satisface la condición de Slater.

El problema dual de P_5 es:

$$D_5 : \quad \begin{array}{l} \text{máx } (\lambda_1 0 + \lambda_2 0 + \lambda_3 0) \\ \text{s.a } \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0. \end{array}$$

$v^D(\pi^5) = 0$ y $\Lambda_5 = \Lambda_5^* = \{(\lambda_1, \lambda_1, 1) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_1 \geq 0\}$.

□

En el Ejemplo 1.1. $\pi^1 \in \widehat{\Pi}_1^1$ y $\mathbf{c} \notin \text{int } M_1$. Por otro lado, en el Ejemplo 1.5, $\pi^5 \in \widehat{\Pi}_1^1$ y π^5 no satisface la condición de Slater. Luego, con estos ejemplos, se muestra que $\mathbf{c} \in \text{int } M$ y que π satisfaga la condición de Slater no es condición necesaria para que $\pi \in \widehat{\Pi}_1^1$.

En el Ejemplo 1.1. $\mathbf{c} \in M_1 / \text{int } M_1$ y $\pi^1 \notin \widehat{\Pi}_1^3$. Así, se muestra que $\mathbf{c} \in M / \text{int } M$ no es condición suficiente para que $\pi \in \widehat{\Pi}_1^3$.

Con el ejemplo siguiente se muestra que $\mathbf{c} \in M / \text{int } M$ y que π no satisfaga la condición de Slater no es condición suficiente para

que $\pi \in \widehat{\Pi}_1^4$.

Ejemplo 1.6. Considérese en \mathbb{R}^2 el problema:

$$P_6 : \quad \begin{array}{l} \text{mín } x_1 \\ \text{s.a } x_1 \geq 0 \\ \quad -x_1 \geq 0 \\ \quad x_2 \geq 0. \end{array}$$

P_6 es consistente, $v^P(\pi^6) = 0$ y $F_6^* = \{0\} \times \mathbb{R}_+$. Además, π^6 no satisface la condición de Slater y $\mathbf{c}^6 \in M_6 \setminus \text{int } M_6$.

El problema dual de P_6 es:

$$D_6 : \quad \begin{array}{l} \text{máx } (\lambda_1 0 + \lambda_2 0 + \lambda_3 0) \\ \text{s.a } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0. \end{array}$$

$v^D(\pi^6) = 0$ y $\Lambda_6 = \Lambda_6^* = \{(1 + \lambda_2, \lambda_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_2 \geq 0\}$.

□

Capítulo 2

Estabilidad

2.1. Estabilidad de los problemas consistentes e inconsistentes

En este capítulo se estudian los resultados presentados en [11 y 13]. En el capítulo se consideran resultados que sólo son ciertos en el caso continuo y resultados que son ciertos en el caso general, es decir, donde T es un conjunto diferente del vacío, y las funciones \mathbf{a} y b son arbitrarias. Las demostraciones de algunos resultados son desarrolladas con el propósito de facilitar su comprensión. Las demostraciones del Teorema 2.4 y la Observación 2.2 son aportaciones propias.

Los resultados en esta sección caracterizan a los conjuntos

$$\textit{int } \Pi_C^P, \textit{ int } \Pi_{IC}^P, \textit{ front } \Pi_C^P,$$

$$\textit{int } \Pi_C^D \textit{ e } \textit{ int } \Pi_{IC}^D.$$

El resultado siguiente caracteriza el interior del conjunto de parámetros con problema primal consistente y el interior del conjunto de parámetros con problema primal inconsistente en el caso continuo, la demostración se encuentra en [8 y 16].

Lema 2.1. [11, Lema 2] *Las afirmaciones siguientes son verdaderas:*

- (i) $\pi \in \text{int } \Pi_C^P$ si y sólo si π satisface la condición de Slater, lo cual es equivalente a que $\mathbf{0}_{n+1} \notin G$.
- (ii) $\pi \in \text{int } \Pi_{IC}^P$ si y sólo si $\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int } N$.

Para obtener la caracterización del interior del conjunto de parámetros con problema primal consistente en el caso general, son muy importantes las condiciones dadas por la semicontinuidad inferior, según Berge, del mapeo factible multivaluado (de punto a conjunto) $\mathfrak{F} : \Pi \rightarrow \mathbb{R}^n$. El mapeo \mathfrak{F} asigna a cada parámetro $\pi \in \Pi$, el conjunto factible F de su problema primal P .

Para el mapeo multivaluado anterior, se consideran los siguientes tipos de continuidad.

Definición 2.1. Sean X y Y dos espacios topológicos y $\mathfrak{M} : X \rightarrow Y$ un mapeo multivaluado. Sea $\mathbf{x} \in X$, se dice que \mathfrak{M} es semicontinuo inferiormente según Berge (sci-B), en \mathbf{x} , si para todo abierto $W \subset Y$ tal que, $W \cap \mathfrak{M}(\mathbf{x}) \neq \emptyset$, existe un abierto $V \subset X$, con $\mathbf{x} \in V$ tal que, $W \cap \mathfrak{M}(\mathbf{x}^1) \neq \emptyset$ para todo $\mathbf{x}^1 \in V$.

Definición 2.2. Sean X y Y dos espacios topológicos y $\mathfrak{M} : X \rightarrow Y$ un mapeo multivaluado. Sea $\mathbf{x} \in X$, se dice que \mathfrak{M} es semicontinuo superiormente según Berge (scs-B), en \mathbf{x} , si para todo abierto $W \subset Y$ tal que, $\mathfrak{M}(\mathbf{x}) \subset W$, existe un abierto $V \subset X$, con $\mathbf{x} \in V$ tal que, $\mathfrak{M}(\mathbf{x}^1) \subset W$ para todo $\mathbf{x}^1 \in V$.

Definición 2.3. Sean X y Y dos espacios topológicos y $\mathfrak{M} : X \rightarrow Y$ un mapeo multivaluado. Si $\mathbf{x} \in X$, se dice que \mathfrak{M} es continuo según Berge en \mathbf{x} , si \mathfrak{M} es tanto semicontinuo inferiormente como semicontinuo superiormente según Berge en \mathbf{x} .

En los tres resultados a continuación se presentan caracterizaciones del $\text{int } \Pi_C^P$, $\text{front } \Pi_C^P$ e $\text{int } \Pi_{IC}^P$. Estos resultados son válidos en el caso general.

En [2] se desarrollan los detalles de la demostración del teorema siguiente.

Teorema 2.1. *Sea $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c})$ un parámetro en Π_C^P . Las afirmaciones siguientes son equivalentes.*

- (i) \mathfrak{F} es sci-B en π ;
- (ii) $\pi \in \text{int } \Pi_C^P$;
- (iii) π satisface la condición fuerte de Slater;
- (iv) $\pi^1 = (\mathbf{a}, b^1, \mathbf{c}) \in \Pi_C^P$ para b^1 suficientemente cercano a b ;
- (v) $\mathbf{0}_{n+1} \notin \text{cl } G$.

Teorema 2.2. [13, Teorema 2] *Sea π un parámetro en Π tal que, $(\mathbf{0}_n, 1)' \notin O^+(\text{cl } G)$. Entonces las afirmaciones siguientes son verdaderas:*

- (i) $\pi \in \text{int } \Pi_C^P$ si y sólo si $\mathbf{0}_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \text{cl } H$;
- (ii) $\pi \in \text{int } \Pi_{IC}^P$ si y sólo si $\mathbf{0}_{n+1} \in \text{int } H$;
- (iii) $\pi \in \text{front } \Pi_C^P$ si y sólo si $\mathbf{0}_{n+1} \in \text{front } H$.

Proposición 2.1. [13, Proposición 3.3] *Sea π un parámetro en Π . Si $(\mathbf{0}_n, 1)' \in O^+(\text{cl } G)$, entonces $\pi \in \text{int } \Pi_{IC}^P$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\pi \in \Pi$. Por [6, proposición 1],

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in O^+(\text{cl } G) \Leftrightarrow d_{\text{front } \Pi_C^P}(\pi) = \infty, \quad (2.1)$$

donde

$$d_{\text{front } \Pi_C^P}(\pi) := \inf \{d(\pi, \pi^1) : \pi^1 \in \text{front } \Pi_C^P\}.$$

Supongamos que $(\mathbf{0}_n, 1)' \in O^+(\text{cl } G)$, entonces

$$d_{\text{front } \Pi_C^P}(\pi) = +\infty.$$

Luego, para cualquier $\pi^1 \in \Pi$, con $d(\pi, \pi^1) < \infty$, se cumple que

$$d_{\text{front } \Pi_C^P}(\pi^1) = +\infty,$$

de lo contrario, $d_{front} \Pi_C^P(\pi) < \infty$. Entonces, por (2.1),

$$(\mathbf{0}_n, 1)' \in O^+(cl G_1),$$

lo cual implica $\pi^1 \in \Pi_{IC}^P$. □

Para las demostraciones de algunos resultados se utiliza el lema siguiente, que es un resultado para conos convexos.

Lema 2.2. [13, Lema 3.4] *Sea T un conjunto diferente del vacío. Si $\mathbf{a} \in \text{int cone } \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que,*

$$\mathbf{a}^1 \in \text{int cone } \{\mathbf{a}_t^1, t \in T\} \text{ para todo } \mathbf{a}^1 \in \mathbb{R}^n \text{ y } \mathbf{a}_t^1 \in \mathbb{R}^n, t \in T,$$

con

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{a}^1\|_\infty < \epsilon \text{ y } \sup_{t \in T} \|\mathbf{a}_t - \mathbf{a}_t^1\|_\infty < \epsilon.$$

El resultado siguiente es un resultado para conos convexos y es válido sólo en el caso continuo.

Lema 2.3. [11, Lema 1] *Sea T un espacio compacto de Hausdorff, $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{a} \in C(T)^n$. Las afirmaciones siguientes son válidas:*

- (i) *Si $\mathbf{0}_n \neq \bar{\mathbf{x}} \notin \text{int cone } \{\mathbf{a}(t), t \in T\}$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\mathbf{a}^1 \in C(T)^n$ tal que, $\bar{\mathbf{x}} \notin \text{cone } \{\mathbf{a}^1(t), t \in T\}$ y $\|\mathbf{a}^1 - \mathbf{a}\|_\infty < \epsilon$.*
- (ii) *Si $\mathbf{0}_n \neq \bar{\mathbf{x}} \in \text{cone } \{\mathbf{a}(t), t \in T\}$ y $|T| \geq n$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\mathbf{a}^1 \in C(T)^n$ tal que, $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int cone } \{\mathbf{a}^1(t), t \in T\}$ y $\|\mathbf{a}^1 - \mathbf{a}\|_\infty < \epsilon$.*
- (iii) *Si $\bar{\mathbf{x}} \in \text{conv } \{\mathbf{a}(t), t \in T\}$ y $|T| \geq n + 1$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\mathbf{a}^1 \in C(T)^n$ tal que, $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int cone } \{\mathbf{a}^1(t), t \in T\}$ y $\|\mathbf{a}^1 - \mathbf{a}\|_\infty < \epsilon$.*

El resultado siguiente caracteriza el interior del conjunto de parámetros con problema dual consistente y el interior del conjunto de parámetros con problema dual inconsistente. Este resultado es válido en el caso general.

Teorema 2.3. [13, Teorema 3.5] Sea $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c})$ un parámetro en Π . Entonces

- (i) $\pi \in \text{int } \Pi_C^D$ si y sólo si $\mathbf{c} \in \text{int } M$;
(ii) $\pi \in \text{int } \Pi_{IC}^D$ si y sólo si $\mathbf{0}_n \notin \text{cl conv } \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$ y $\mathbf{c} \notin \text{cl } M$.

DEMOSTRACIÓN. (i) Sea $\pi \in \text{int } \Pi_C^D \subset \Pi_C^D$, se cumple que $\mathbf{c} \in M$. Si $\mathbf{c} \in \text{front } M$, entonces existe $\{\mathbf{c}^r\}_{r=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n \setminus M$ tal que, $\mathbf{c}^r \rightarrow \mathbf{c}$ cuando $r \rightarrow \infty$. Haciendo $\pi^r = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c}^r)$, se tiene $\pi^r \rightarrow \pi$ y $\mathbf{c}^r \notin M_r = M$. Luego $\pi^r \in \Pi_{IC}^D$ para todo $r \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción, pues por hipótesis $\pi \in \text{int } \Pi_C^D$. Por consiguiente, $\mathbf{c} \in \text{int } M$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{c} \in \text{int } M$. Entonces, por el Lema 2.2, existe $\epsilon > 0$ tal que, $\mathbf{c}^1 \in \text{int } M_1$ si

$$\|\mathbf{c} - \mathbf{c}^1\|_\infty < \epsilon \text{ y } \sup_{t \in T} \|\mathbf{a}_t - \mathbf{a}_t^1\|_\infty < \epsilon.$$

Por lo tanto, $\pi \in \text{int } \Pi_C^D$.

- (ii) Supongamos que $\pi \in \text{int } \Pi_{IC}^D$. Si $\mathbf{c} \in \text{cl } M$, existe

$$\{\mathbf{c}^r\}_{r=1}^\infty \subset M \text{ tal que, } \mathbf{c}^r \rightarrow \mathbf{c}.$$

Sea $\pi^r = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c}^r)$. Entonces $\pi^r \in \Pi_C^D$ y $\pi^r \rightarrow \pi$, lo cual contradice que $\pi \in \text{int } \Pi_{IC}^D$. Por lo tanto, $\mathbf{c} \notin \text{cl } M$.

Ahora, supongamos que

$$\mathbf{0}_n \in \text{cl conv } \{\mathbf{a}_t, t \in T\}. \quad (2.2)$$

Por hipótesis, $\pi \in \text{int } \Pi_{IC}^D$, de donde existe $\epsilon > 0$ tal que,

$$B(\pi, \epsilon) \subset \Pi_{IC}^D.$$

Sea $\delta > 0$ tal que,

$$\pi^1 = (\mathbf{a} + \delta \mathbf{c}, b, \mathbf{c}) \in B(\pi, \epsilon),$$

donde $(\mathbf{a} + \delta \mathbf{c})_t = \mathbf{a}_t + \delta \mathbf{c}$ para todo $t \in T$. Entonces $\pi^1 \in \text{int } \Pi_{IC}^D$ y, por lo tanto, $\mathbf{c} \notin \text{cl } M_1$. Por (2.2), existe $\{\lambda^r\}_{r=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$, con $\sum_{t \in T} \lambda_t^r = 1$ para todo r y

$$\mathbf{0}_n = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{t \in T} \lambda_t^r \mathbf{a}_t.$$

Entonces

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{t \in T} \lambda_t^r (\mathbf{a}_t + \delta \mathbf{c}) = \delta \mathbf{c},$$

lo cual implica la contradicción siguiente

$$\mathbf{c} \in \text{cl } M_1 = \text{cl cone } \{(\mathbf{a} + \delta \mathbf{c})_t, t \in T\}.$$

Se concluye que, $\mathbf{0}_n \notin \text{cl conv } \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$.

Recíprocamente, supongamos que

$$\mathbf{c} \notin \text{cl } M \text{ y que } \mathbf{0}_n \notin \text{cl conv } \{\mathbf{a}_t, t \in T\}.$$

La primera afirmación implica, por el Teorema de Separación para conos (véase [7, Corolario 3.1]), la existencia de un vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, con $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}_n$, tal que, $\mathbf{c}'\mathbf{w} < 0 \leq \mathbf{a}'_t\mathbf{w}$ para todo $t \in T$. Además, la segunda afirmación implica, por el Teorema de Separación (véase [7, Teorema 3.2]), la existencia de un vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}_n$, y $\delta > 0$ tal que,

$$\mathbf{a}'_t\mathbf{u} \geq \delta > 0 \text{ para todo } t \in T.$$

Entonces para todo $\mu > 0$,

$$\mathbf{a}'_t(\mathbf{u} + \mu \mathbf{w}) \geq \delta > 0 \text{ para todo } t \in T.$$

Eligiendo $\mu > 0$, con $\mathbf{c}'(\mathbf{u} + \mu \mathbf{w}) < 0$, se tiene que $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mu \mathbf{w}$ satisface

$$\mathbf{c}'\mathbf{y} < 0 \text{ y } \mathbf{a}'_t\mathbf{y} \geq \delta \text{ para todo } t \in T. \quad (2.3)$$

Así, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que, $(\mathbf{c}^1)' \mathbf{y} < 0$, siempre que $\|\mathbf{c}^1 - \mathbf{c}\|_\infty < \epsilon_1$. Ahora, para $\pi^1 \in \Pi$ con $d(\pi, \pi^1) < \epsilon_2$, donde $\epsilon_2 = \frac{\delta}{2n\|\mathbf{y}\|_\infty}$, se obtiene

$$|(\mathbf{a}_t^1)' \mathbf{y} - \mathbf{a}_t' \mathbf{y}| \leq n \|\mathbf{a}_t^1 - \mathbf{a}_t\|_\infty \|\mathbf{y}\|_\infty < \frac{\delta}{2},$$

que junto con (2.3), implica $(\mathbf{a}_t^1)' \mathbf{y} > \frac{\delta}{2}$ para todo $t \in T$. Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\} > 0$. Si $d(\pi, \pi^1) < \epsilon$, entonces

$$(\mathbf{c}^1)' \mathbf{y} < 0 \text{ y } (\mathbf{a}_t^1)' \mathbf{y} \geq \frac{\delta}{2} > 0 \text{ para todo } t \in T,$$

de donde $\mathbf{c}^1 \notin cl M_1$, por consiguiente, $\pi^1 \in \Pi_{IC}^D$. Se concluye que $\pi \in int \Pi_{IC}^D$. □

El resultado siguiente se presentó, sin demostración, en [11] para el caso continuo. La demostración que a continuación se muestra es una aportación original y es válida en el caso general.

Teorema 2.4. *Sea $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c}) \in \Pi$. Entonces $\pi \in int \Pi_{IC}^D$ si y sólo si existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que, $\mathbf{c}' \mathbf{y} < 0$ y $\mathbf{a}_t' \mathbf{y} > 0$ para todo $t \in T$.*

DEMOSTRACIÓN. Se demostrará que $\mathbf{0}_n \notin cl conv \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$ y $\mathbf{c} \notin cl M$ si y sólo si existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que,

$$\mathbf{c}' \mathbf{y} < 0 \text{ y } \mathbf{a}_t' \mathbf{y} > 0 \text{ para todo } t \in T. \quad (2.4)$$

Supongamos que $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ satisface (2.4). Si

$$\mathbf{0}_n \in cl conv \{\mathbf{a}_t, t \in T\},$$

entonces existe $\{\lambda^r\}_{r=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$, con $\sum_{t \in T} \lambda_t^r = 1$ para todo r y

$$\mathbf{0}_n = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{t \in T} \lambda_t^r \mathbf{a}_t. \quad (2.5)$$

Multiplicando ambos lados de (2.5) por $\bar{\mathbf{y}}$, se obtiene la contradicción siguiente:

$$0 = \mathbf{0}_n' \bar{\mathbf{y}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{t \in T} \lambda_t^r \mathbf{a}_t' \bar{\mathbf{y}} > \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{t \in T} \lambda_t^r 0 = \lim_{r \rightarrow \infty} 0.$$

Por lo tanto, $\mathbf{0}_n \notin cl\ conv \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$. Similarmente, supongamos que $\mathbf{c} \in cl M$, entonces existe $\{\lambda^r\}_{r=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que,

$$\mathbf{c} = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{t \in T} \lambda_t^r \mathbf{a}_t.$$

Luego,

$$\mathbf{c}' \bar{\mathbf{y}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{t \in T} \lambda_t^r \mathbf{a}_t' \bar{\mathbf{y}} > \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{t \in T} \lambda_t^r 0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{t \in T} 0 = 0,$$

lo cual contradice (2.4). Por lo tanto, $\mathbf{c} \notin cl M$.

La demostración de la afirmación recíproca se deduce de la demostración de la segunda parte de (ii) del Teorema 2.3. □

2.2. Estabilidad primal-dual. Caso continuo

En esta sección se estudian los resultados presentados en [11] donde se considera el caso continuo, es decir, se consideran parámetros donde T es un espacio topológico compacto de Hausdorff infinito y las funciones \mathbf{a} y b son continuas en él. Los resultados caracterizan a los parámetros $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c}) \in \Pi$ que son estables, relativo a los conjuntos que se generan con la partición primal-dual considerada en la sección 1.2. Se dice que los parámetros son estables cuando después de perturbaciones suficientemente pequeñas de los datos \mathbf{a} , b y \mathbf{c} , los parámetros resultantes se encuentran en el mismo conjunto que el parámetro considerado antes de las perturbaciones.

$$\text{Caso } \Pi_1 = \Pi_A^P \cap \Pi_A^D.$$

Teorema 2.5. $\pi \in int \Pi_1$ si y sólo si π satisface la condición de Slater y $\mathbf{c} \in int M$. Además, $int \Pi_1$ es denso en Π_1 .

DEMOSTRACIÓN. Como $\Pi_1 = \Pi_C^P \cap \Pi_C^D$, entonces

$$\text{int } \Pi_1 = \text{int } \Pi_C^P \cap \text{int } \Pi_C^D.$$

Sea $\pi \in \text{int } \Pi_1$, por el Lema 2.1 parte (i) y el Teorema 2.3 parte (i), se tiene que π satisface la condición de Slater y $\mathbf{c} \in \text{int } M$. Nuevamente, con Lema 2.1 y el Teorema 2.3 se obtiene la prueba de la afirmación inversa.

La densidad es un caso particular de [15, Teorema 1.8].

□

Caso $\Pi_2 = \Pi_{NA}^P \cap \Pi_{IC}^D$.

Teorema 2.6. $\pi \in \text{int } \Pi_2$ si y sólo si existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que,

$$\mathbf{c}'\mathbf{y} < 0 \text{ y } \mathbf{a}_t'\mathbf{y} > 0 \text{ para todo } t \in T. \quad (2.6)$$

Además, $\text{int } \Pi_2$ es denso en Π_2 .

DEMOSTRACIÓN. Como $\Pi_2 \subset \Pi_C^P \cap \Pi_{IC}^D$, entonces

$$\text{int } \Pi_2 \subset \text{int } \Pi_C^P \cap \text{int } \Pi_{IC}^D.$$

(\Rightarrow) Sea $\pi \in \text{int } \Pi_2$. Entonces $\pi \in \text{int } \Pi_C^P$ y $\pi \in \text{int } \Pi_{IC}^D$, por el Teorema 2.4, existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que, $\mathbf{c}'\mathbf{y} < 0$ y $\mathbf{a}_t'\mathbf{y} > 0$ para todo $t \in T$.

(\Leftarrow) Supongamos que existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y satisface (2.6). Como $\mathbf{a}_t'\mathbf{y} > 0$, para todo $t \in T$, la condición de Slater se cumple. En efecto, si

$$\mathbf{o}_{n+1} \in \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T \right\},$$

entonces

$$\mathbf{o}_{n+1} = \sum_{t \in T} \lambda_t \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$, con $\sum_{t \in T} \lambda_t = 1$. Multiplicando (2.7) por $(\mathbf{y}, 0)$, se obtiene

$$0 = \sum_{t \in T} \lambda_t \mathbf{a}_t \mathbf{y} > 0,$$

lo cual es imposible. Ahora, como (2.6) se cumple para el vector \mathbf{y} , se puede definir un subconjunto abierto de Π . En efecto, por la suposición de continuidad, existe $\epsilon > 0$ tal que,

$$\pi^1 = (\mathbf{a}^1, b^1, \mathbf{c}^1) \in \Pi$$

también satisface (2.6) si $d(\pi^1, \pi) < \epsilon$. Luego, la condición de Slater sobre π^1 garantiza que N_1 es cerrado (véase [9, Teorema 5.3]) y $\pi^1 \in \Pi_C^P$.

Si $(\{\mathbf{c}^1\} \times \mathbb{R}) \cap N_1 \neq \emptyset$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}^1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \sum_{t \in T} \lambda_t \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Multiplicando ambos lados de (2.8) por $(\mathbf{y}, 0)$, se obtiene la contradicción siguiente:

$$0 > (\mathbf{c}^1)' \mathbf{y} = \sum_{t \in T} \lambda_t (\mathbf{a}_t^1)' \mathbf{y} \geq 0.$$

En consecuencia,

$$(\{\mathbf{c}^1\} \times \mathbb{R}) \cap N_1 = \emptyset.$$

Además, como $N_1 = cl N_1$ (por ser N_1 cerrado), se sigue que $v^P(\pi^1) = -\infty$ (véase Lema 1.1). Así, por el Corolario 1.1, $\pi^1 \in \Pi_2$. Por lo tanto, $\pi \in int \Pi_2$.

Para demostrar la densidad de $int \Pi_2$ en Π_2 , sea

$$\pi^\infty = (\mathbf{a}^\infty, b^\infty, \mathbf{c}^\infty) \in \Pi_2.$$

Consideremos un $\bar{\mathbf{x}} \in F_\infty$. Se cumple que $\mathbf{c}^\infty \notin M_\infty$.

Si M_∞ es cerrado, entonces existe $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ tal que, $\mathbf{d}' \mathbf{c}^\infty < 0$ y $\mathbf{d}' \mathbf{z} \geq 0$ para todo $\mathbf{z} \in M_\infty$ (véase [7, Corolario 3.1]). Para cada $r \in \mathbb{N}$, se hace

$$\mathbf{a}_t^r = \mathbf{a}_t^\infty + \frac{\mathbf{d}}{r}, \quad b_t^r = b_t^\infty + \frac{\mathbf{d}' \bar{\mathbf{x}} - 1}{r} \quad \text{para todo } t \in T, \quad \text{y } \mathbf{c}^r = \mathbf{c}^\infty.$$

Luego, la sucesión $\{\pi^r\}_{r=1}^\infty$, donde $\pi^r = (\mathbf{a}^r, b^r, \mathbf{c}^r)$, converge a π^∞ . Además,

$$\mathbf{d}' \mathbf{c}^r = \mathbf{d}' \mathbf{c}^\infty < 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{d}' \mathbf{a}_t^r = \mathbf{d}' \mathbf{a}_t^\infty + \frac{\|\mathbf{d}\|^2}{r} > 0 \quad \text{para todo } t \in T.$$

Entonces, por la primera parte de este teorema, $\{\pi^r\}_{r=1}^\infty \subset \text{int } \Pi_2$. Por lo tanto, $\text{int } \Pi_2$ es denso en Π_2 .

Si M_∞ no es cerrado, como $\mathbf{c}^\infty \notin M_\infty$, dos casos pueden suceder:

a) $\mathbf{c}^\infty \in \text{front } M_\infty$. Entonces existe una sucesión

$$\{\mathbf{c}^r\}_{r=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n \setminus \text{cl } M_\infty$$

tal que, $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{c}^r = \mathbf{c}^\infty$. Para cada $r \in \mathbb{N}$, existe $\mathbf{d}^r \in \mathbb{R}^n$ con $\|\mathbf{d}^r\| = 1$ tal que, $(\mathbf{d}^r)' \mathbf{c}^r < 0$ y $(\mathbf{d}^r)' \mathbf{z} \geq 0$ para todo $\mathbf{z} \in \text{cl } M_\infty$. Para cada $r \in \mathbb{N}$, se hace

$$\mathbf{a}_t^r = \mathbf{a}_t^\infty + \frac{\mathbf{d}^r}{r} \quad \text{y} \quad b_t^r = b_t^\infty + \frac{(\mathbf{d}^r)' \bar{\mathbf{x}} - 1}{r} \quad \text{para todo } t \in T.$$

La sucesión $\{\pi^r\}_{r=1}^\infty$, donde $\pi^r = (\mathbf{a}^r, b^r, \mathbf{c}^r)$, converge a $\pi^\infty = (\mathbf{a}^\infty, b^\infty, \mathbf{c}^\infty)$. Además,

$$(\mathbf{d}^r)' \mathbf{c}^r < 0 \quad \text{y} \quad (\mathbf{d}^r)' \mathbf{a}_t^r = (\mathbf{d}^r)' \mathbf{a}_t^\infty + \frac{\|\mathbf{d}^r\|^2}{r} > 0 \quad \text{para todo } t \in T.$$

Por la primera parte de este teorema, $\{\pi^r\}_{r=1}^\infty \subset \text{int } \Pi_2$. Por lo tanto, $\text{int } \Pi_2$ es denso en Π_2 .

b) $\mathbf{c}^\infty \in \mathbb{R}^n \setminus cl M_\infty$. Se desarrolla un razonamiento igual al caso cuando M es cerrado. □

Caso $\Pi_3 = \Pi_{IC}^P \cap \Pi_{NA}^D$.

Teorema 2.7. $\pi \in int \Pi_3$ si y sólo si $\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in int N$. Además, $int \Pi_3$ es denso en Π_3 .

DEMOSTRACIÓN. Primero se demostrará que la condición $\pi \in int \Pi_3$ es equivalente a

$$(\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R}) \cup \{(\mathbf{0}_n, 1)\} \subset int K. \quad (2.9)$$

Supongamos que $\pi \in int \Pi_3$ y que (2.9) no se cumple. Como $\Pi_3 \subset \Pi_{IC}^P$, entonces $int \Pi_3 \subset int \Pi_{IC}^P$, luego, por ii) del Lema 2.1,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in int N.$$

Ya que $N \subset K$, se tiene

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in int K.$$

Como por hipótesis $(\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R}) \cup \{(\mathbf{0}_n, 1)\} \not\subset int K$, se debe cumplir que $(\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R}) \not\subset int K$. Además, puesto que $\pi \in int \Pi_3 \subset \Pi_3$, por el Corolario 1.3,

$$(\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R}) \subset K.$$

Entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que, $(\mathbf{c}, \alpha)' \in front K$. Por el Teorema del Hiperplano de Apoyo para conos (véase [7, Teorema 3.3]), existe $(\mathbf{d}, \gamma)' \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}_{n+1}\}$ tal que,

$$(\mathbf{d}, \gamma) \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \alpha \end{pmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

y

$$(\mathbf{d}, \gamma) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \geq 0 \text{ para todo } \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in cl K. \quad (2.11)$$

En particular, $(\mathbf{d}, \gamma) \binom{\mathbf{0}_n}{-1} \geq 0$, se sigue que $-\gamma \geq 0$. De (2.11) se tiene

$$\mathbf{a}'_t \mathbf{d} + \gamma b_t \geq 0 \text{ para todo } t \in T \text{ y } \gamma \leq 0. \quad (2.12)$$

De acuerdo a (2.12), dos casos son posibles:

1) $\gamma < 0$. Entonces $-\frac{\mathbf{a}'_t \mathbf{d}}{\gamma} - b_t \geq 0$ para todo $t \in T$, de donde $-\gamma^{-1} \mathbf{d} \in F$. Así, $\pi \in \Pi_C^P$ que es una contradicción, puesto que por hipótesis $\pi \in \text{int } \Pi_3$.

2) $\gamma = 0$. Entonces, de (2.10), se tiene que $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}_n$ y $\mathbf{c}' \mathbf{d} = 0$. Consideremos la sucesión

$$\pi^r = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c} - \frac{\mathbf{d}}{r}), \quad r = 1, 2, \dots$$

Si $\pi^r \in \Pi_3$, por el Corolario 1.3, $(\mathbf{c} - \frac{\mathbf{d}}{r}, 0) \in K_r = K$ y por (2.11), se obtiene la contradicción siguiente

$$0 \leq \mathbf{d}'(\mathbf{c} - \frac{\mathbf{d}}{r}) = -\frac{\|\mathbf{d}\|^2}{r} < 0.$$

Entonces $\{\pi^r\}_{r=1}^\infty \subset \Pi \setminus \Pi_3$ y $\lim_{r \rightarrow \infty} \pi^r = \pi$, lo cual es una contradicción puesto que por hipótesis $\pi \in \text{int } \Pi_3$. Se concluye que

$$(\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R}) \cup \{(\mathbf{0}_n, 1)\} \subset \text{int } K.$$

Recíprocamente, supongamos que π satisface (2.9). Se puede representar a K como $K = \{(\mathbf{a}_t, b_t)', t \in \tilde{T}\}$, donde $\tilde{T} = T \cup \{s\}$ es un espacio topológico compacto de Hausdorff, s es un punto aislado de \tilde{T} , $(\mathbf{a}_s, b_s)' = (\mathbf{0}_n, -1)'$ y $(\mathbf{a}, b)' \in C(\tilde{T})^{n+1}$. Como $\{(\mathbf{c}, 0)', (\mathbf{0}_n, 1)'\} \subset \text{int } K$, por el Lema 2.2, existe $\epsilon > 0$ tal que, $\{(\mathbf{c}^1, 0)', (\mathbf{0}_n, 1)'\} \subset \text{int } K_1$ para todo $\pi^1 = (\mathbf{a}^1, b^1, \mathbf{c}^1) \in \Pi$ que satisface $d(\pi^1, \pi) < \epsilon$. Para tal parámetro π^1 , se tiene

$$\{(\mathbf{0}_n, 1)', (\mathbf{0}_n, -1)'\} \subset K_1 \text{ y } (\mathbf{c}^1, 0)' \in K_1,$$

lo cual implica $\{\mathbf{c}^1\} \times \mathbb{R} \subset K_1$. En efecto, sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}_+$, entonces

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}^1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in K_1.$$

Por otro lado, si $\alpha \in \mathbb{R}_-$, entonces

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}^1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\alpha) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ -1 \end{pmatrix} \in K_1.$$

Luego, $\{\mathbf{c}^1\} \times \mathbb{R} \subset K_1$, por el Corolario 1.3, $\pi^1 \in \Pi_3$. Por lo tanto, $\pi \in \text{int } \Pi_3$.

Queda por demostrar que (2.9) es equivalente a $(\mathbf{0}_n, 1)' \in \text{int } N$.

Si (2.9) es cierto, $\pi \in \text{int } \Pi_3 \subset \Pi_3 \subset \Pi_{IC}^P$, de donde

$$(\mathbf{0}_n, 1)' \in \text{cl } N.$$

Por [9, Lema 4.1], $(\mathbf{0}_n, 1)' \in \text{cl } K$. Si $(\mathbf{0}_n, 1)' \notin \text{int } N$, entonces $(\mathbf{0}_n, 1)' \in \text{front } N$ y existe un hiperplano de apoyo para $\text{cl } N$ en $(\mathbf{0}_n, 1)'$ (véase [7, Teorema 3.3]), que también resulta ser un hiperplano de apoyo para $\text{cl } K$ en $(\mathbf{0}_n, 1)'$. Así, $(\mathbf{0}_n, 1)' \in \text{front } K$, lo cual es una contradicción puesto que por hipótesis

$$(\mathbf{0}_n, 1)' \in \text{int } K.$$

Por lo tanto, $(\mathbf{0}_n, 1)' \in \text{int } N$.

Ahora, supongamos que $(\mathbf{0}_n, 1)' \in \text{int } N$. Se demostrará que

$$\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R} \subset \text{int } K.$$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Como

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{c}}{\rho} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int } N,$$

entonces $(\frac{c}{\rho}, 1)' \in \text{int } N$ para ρ suficientemente grande tal que, $\alpha < \rho$. En tal caso, $\rho(\frac{c}{\rho}, 1)' = (c, \rho)' \in \text{int } N$ y se tiene

$$\begin{pmatrix} c \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \rho \end{pmatrix} + (\rho - \alpha) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{int } N + (\rho - \alpha) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ -1 \end{pmatrix} \subset \text{int } K,$$

puesto que $\text{int } N \subset \text{int } K$ y $(\mathbf{0}_n, -1)'$ es una dirección de recesión de K . Por lo tanto, $\{c\} \times \mathbb{R} \subset \text{int } K$. Así, se cumple (2.9).

Para demostrar que $\text{int } \Pi_3$ es denso en Π_3 , sea

$$\pi^\infty = (\mathbf{a}^\infty, b^\infty, \mathbf{c}^\infty) \in \Pi_3.$$

Como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int } N_\infty = \text{int cone } \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t^\infty \\ b_t^\infty \end{pmatrix}, t \in T \right\},$$

dado $r = 1, 2, \dots$, por el Lema 2.3(ii), existe $(\mathbf{a}_t^r, b_t^r) \in C(T)^{n+1}$ tal que,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int cone } \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t^r \\ b_t^r \end{pmatrix}, t \in T \right\} = \text{int } N_r \quad (2.13)$$

y

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t^\infty \\ b_t^\infty \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t^r \\ b_t^r \end{pmatrix} \right\|_\infty < \frac{1}{r}.$$

Si hacemos $\mathbf{c}^r = \mathbf{c}^\infty$ y $\pi^r = (\mathbf{a}^r, b^r, \mathbf{c}^r)$ para todo $r = 1, 2, \dots$, se obtiene $\lim_{r \rightarrow \infty} \pi^r = \pi^\infty$ y $\{\pi^r\}_{r=1}^\infty \subset \text{int } \Pi_3$ (por la primera parte de este teorema). Por lo tanto, $\text{int } \Pi_3$ es denso en Π_3 . □

Caso $\Pi_4 = \Pi_{IC}^P \cap \Pi_{IC}^D$.

Teorema 2.8. $\text{int } \Pi_4 = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\pi \in \text{int } \Pi_4$. Por la afirmación (ii) del Lema 2.1 y el Teorema 2.4, se tiene $\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int } N$ y existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que, $\mathbf{c}'\mathbf{y} < 0$ y $\mathbf{a}'_t\mathbf{y} > 0$ para todo $t \in T$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{t \in T} \lambda_t \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix}.$$

Entonces $\sum_{t \in T} \lambda_t \mathbf{a}_t = \mathbf{0}_n$ y $\sum_{t \in T} \lambda_t b_t = 1$, de donde $\sum_{t \in T} \lambda_t > 0$. Además, multiplicando por \mathbf{y} ambos lados de la ecuación

$$\sum_{t \in T} \lambda_t \mathbf{a}_t = \mathbf{0}_n,$$

se obtiene $\sum_{t \in T} \lambda_t (\mathbf{a}'_t \mathbf{y}) = 0$, lo cual es imposible, ya que $\lambda_t > 0$ para algún $t \in T$ y $\mathbf{a}'_t \mathbf{y} > 0$ para todo $t \in T$. Por consiguiente, $\text{int } \Pi_4 = \emptyset$. □

$$\text{Caso } \Pi_5 = \Pi_A^P \cap \Pi_{IC}^D.$$

Teorema 2.9. $\text{int } \Pi_5 = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\pi \in \text{int } \Pi_5$. Entonces $\pi \in \text{int } \Pi_C^P$, por el Lema 2.1(i), π satisface la condición de Slater. Esto implica que N es cerrado, entonces, por el Corolario 1.2, $(\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R}) \cap N \neq \emptyset$. Así, $\mathbf{c} \in M$, lo cual es una contradicción puesto que $\pi \in \Pi_5$. Por lo tanto, $\text{int } \Pi_5 = \emptyset$. □

$$\text{Caso } \Pi_6 = \Pi_{IC}^P \cap \Pi_A^D.$$

Teorema 2.10. $\text{int } \Pi_6 = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\pi \in \text{int } \Pi_6$. Como $\Pi_6 \subset \Pi_{IC}^P$, por el Lema 2.1(ii), se tiene $(\mathbf{0}_n, 1)' \in \text{int } N$. Por otro lado, ya que

$$\Pi_6 \subset \Pi_A^D \subset \Pi_C^D,$$

se tiene $\mathbf{c} \in M$. Así, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que, $(\mathbf{c}, \alpha)' \in N$. En efecto, supongamos que

$$\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R} \cap N = \emptyset.$$

Como $\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int } N$, existe $\epsilon_1 \in \mathbb{R}$, con $\epsilon_1 > 0$ tal que,

$$B\left(\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix}, \epsilon_1\right) \subset N.$$

Si $\mathbf{c} = \mathbf{0}_n$, de inmediato se tiene una contradicción puesto que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int } N \subset N.$$

Si $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}_n$, sea $\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$, entonces

$$\frac{\epsilon_1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\frac{\mathbf{c}}{\|\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \beta \end{pmatrix}\|}}{\beta + \frac{2}{\epsilon_1} \|\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \beta \end{pmatrix}\|}} \\ \frac{\|\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \beta \end{pmatrix}\|}{\|\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \beta \end{pmatrix}\|} \end{pmatrix} = \frac{\epsilon_1}{2} \frac{\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \beta \end{pmatrix}}{\|\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \beta \end{pmatrix}\|} + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in B\left(\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix}, \epsilon_1\right) \subset N.$$

Como N es un cono, se tiene la contradicción siguiente:

$$\frac{2\|\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \beta \end{pmatrix}\|}{\epsilon_1} \begin{pmatrix} \frac{\epsilon_1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\frac{\mathbf{c}}{\|\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \beta \end{pmatrix}\|}}{\beta + \frac{2}{\epsilon_1} \|\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \beta \end{pmatrix}\|}} \\ \frac{\|\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \beta \end{pmatrix}\|}{\|\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \beta \end{pmatrix}\|} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \beta + \frac{2}{\epsilon_1} \|\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \beta \end{pmatrix}\| \end{pmatrix} \in N.$$

Ahora, se demostrará que $\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \gamma \end{pmatrix} \in K$ para todo $\gamma \in \mathbb{R}$. Dado $\gamma \in \mathbb{R}$, dos casos son posibles:

1) $\gamma \leq \alpha$. Entonces

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \alpha \end{pmatrix} + (\alpha - \gamma) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ -1 \end{pmatrix} \in N + K \subset K + K \subset K.$$

2) $\gamma > \alpha$. Entonces

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \alpha \end{pmatrix} + (\gamma - \alpha) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in N \subset K.$$

En ambos casos $(\mathbf{c}, \gamma) \in K$. Así, $\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R} \subset K$, luego, por el Corolario 1.3, se tiene $\pi \in \Pi_3$ lo cual contradice que $\pi \in \Pi_6$. \square

2.3. Estabilidad primal-dual. Caso general

En esta sección se estudian los resultados presentados en [13] donde se considera el caso general, es decir, se consideran parámetros donde T es un conjunto diferente del vacío y las funciones \mathbf{a} y \mathbf{b} son arbitrarias. Con los resultados se caracterizan a los parámetros $\pi = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \Pi$ que son estables, relativo a los conjuntos que se generan con la partición primal-dual considerada en la sección 1.2. En particular, los resultados son ciertos en el caso continuo.

$$\text{Caso } \Pi_1 = \Pi_A^P \cap \Pi_A^D.$$

El teorema siguiente muestra que la caracterización del $\text{int } \Pi_1$, en el caso general, es similar a la que se presenta en el caso continuo. Sin embargo, en el caso general, la condición Slater es sustituida por la condición fuerte de Slater debido a que estas dos condiciones no son equivalentes en este caso, contrario a lo que ocurre en el caso continuo (véase [9, Teorema 6.9]).

Teorema 2.11. *Sea $\pi = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \Pi$. Entonces $\pi \in \text{int } \Pi_1$ si y sólo si π satisface la condición fuerte de Slater y $\mathbf{c} \in \text{int } M$. Además, $\text{int } \Pi_1$ es denso en Π_1 si $|T| \geq n$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\Pi_1 = \Pi_C^P \cap \Pi_C^D$, entonces

$$\text{int } \Pi_1 = \text{int } \Pi_C^P \cap \text{int } \Pi_C^D.$$

Sea $\pi \in \text{int } \Pi_1$. Del Teorema 2.1 y el Teorema 2.3(i), se obtiene que π satisface la condición fuerte de Slater y $\mathbf{c} \in \text{int } M$. Con los mismos teoremas se obtiene la prueba de la afirmación inversa.

Para demostrar que $\text{int } \Pi_1$ es denso en Π_1 , supongamos que $|T| \geq n$. Sea $\pi \in \Pi_1$ y algún $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ fijo tal que,

$$\mathbf{a}'_t \bar{\mathbf{x}} \geq b_t \text{ para todo } t \in T.$$

Ahora, como $\mathbf{c} \in M$, por el Teorema de Carathéodory para conos (véase [14, Corolario 17.1.2]), se sigue la existencia de escalares no negativos $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ($m \leq n$) y vectores linealmente independientes $\{\mathbf{a}_{t_i}, i = 1, \dots, m\}$ tales que,

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}_{t_i}.$$

Sean $t_{m+1}, \dots, t_n \in T \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$, $n - m$ elementos diferentes en T . Seleccionamos $\beta > 1$ tal que, $\|\cdot\| \leq \beta \|\cdot\|_\infty$ y r un entero positivo. Elijamos $\mathbf{v}_i^r = \mathbf{0}_n$, para $i = 1, \dots, m$; y $\mathbf{v}_i^r \in \mathbb{R}^n$ tales que,

$$\|\mathbf{v}_i^r\|_\infty < \frac{1}{2r\beta^2(\|\bar{\mathbf{x}}\|_\infty + 1)},$$

$i = m + 1, \dots, n$ y el conjunto $\{\mathbf{a}_{t_i} + \mathbf{v}_i^r, i = 1, \dots, n\}$ que constituya una base de \mathbb{R}^n . Observamos que

$$|(\mathbf{v}_i^r)' \bar{\mathbf{x}}| \leq \|\mathbf{v}_i^r\| \|\bar{\mathbf{x}}\| \leq \beta^2 \|\mathbf{v}_i^r\|_\infty \|\bar{\mathbf{x}}\|_\infty < \frac{1}{2r}.$$

Sea $\mathbf{a}^r : T \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde:

$$\mathbf{a}_t^r = \begin{cases} \mathbf{a}_t + \mathbf{v}_i^r, & \text{si } t = t_i, i = 1, \dots, n. \\ \mathbf{a}_t, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se tiene que $\|\mathbf{a}_t - \mathbf{a}_t^r\|_\infty < \frac{1}{r}$ y $\mathbf{c} \in M_r$. Además, $\dim M_r = n$, ya que $\text{aff } M_r = \mathbb{R}^n$. Por consiguiente, $\text{int } M_r \neq \emptyset$. Entonces, por el Teorema de Accesibilidad (véase [14, Teorema 6.1]), existe $\mathbf{c}^r \in \text{int } M_r$ tal que, $\|\mathbf{c} - \mathbf{c}^r\|_\infty < \frac{1}{r}$. Se demostrará que $\bar{\mathbf{x}}$ es un punto fuerte de Slater para $\pi^r = (\mathbf{a}^r, b - \frac{1}{r}, \mathbf{c}^r)$. Si $t = t_i$, para algún $i = 1, \dots, n$, entonces

$$(\mathbf{a}_t^r)' \bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{a}_t + \mathbf{v}_i^r)' \bar{\mathbf{x}} \geq b_t + (\mathbf{v}_i^r)' \bar{\mathbf{x}} > b_t - \frac{1}{2r}.$$

Así, se obtiene que

$$(\mathbf{a}_t^r)' \bar{\mathbf{x}} \geq b_t - \frac{1}{2r} = \left(b_t - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2r}. \quad (2.14)$$

Si $t \neq t_i$, entonces $\bar{\mathbf{x}}$ satisface (2.14), de donde $\bar{\mathbf{x}}$ es un punto fuerte de Slater para π^r . Por consiguiente, $\pi^r \in \text{int } \Pi_1$ y $d(\pi, \pi^r) < \frac{1}{r}$. Por lo tanto, $\text{int } \Pi_1$ es denso en Π_1 . □

Caso $\Pi_2 = \Pi_{NA}^P \cap \Pi_{IC}^D$.

De acuerdo con el Teorema 2.6, en el caso continuo, la existencia de un $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que, (2.6) se cumpla es equivalente a $\pi \in \text{int } \Pi_2$. Se demostrará que esto se sigue cumpliendo en el caso general.

El siguiente lema establece otra condición geométrica equivalente a (2.6).

Lema 2.4. *Sea $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c}) \in \Pi$. Entonces existe $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$ tal que,*

$$\mathbf{c}'\bar{\mathbf{y}} < 0 \text{ y } \mathbf{a}_t'\bar{\mathbf{y}} \geq \delta \text{ para todo } t \in T, \quad (2.15)$$

si y sólo $\mathbf{0}_n \notin \text{cl conv } \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$ y $\mathbf{c} \notin \text{cl } M$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$ satisfacen (2.15).

Si $\mathbf{0}_n \in \text{cl conv } \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$, entonces existe $\{\lambda^r\}_{r=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$, con $\sum_{t \in T} \lambda_t^r = 1$ para todo r y

$$\mathbf{0}_n = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{t \in T} \lambda_t^r \mathbf{a}_t. \quad (2.16)$$

Multiplicando ambos lados de (2.16) por $\bar{\mathbf{y}}$, se obtiene la contradicción siguiente:

$$0 = \mathbf{0}_n'\bar{\mathbf{y}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{t \in T} \lambda_t^r \mathbf{a}_t'\bar{\mathbf{y}} \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{t \in T} \lambda_t^r \delta = \delta \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{t \in T} \lambda_t^r = \delta > 0.$$

Por lo tanto, $\mathbf{0}_n \notin \text{cl conv } \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$.

Similarmente, supongamos que $\mathbf{c} \in cl M$, entonces existe

$$\{\lambda^r\}_{r=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$$

tal que,

$$\mathbf{c} = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{t \in T} \lambda_t^r \mathbf{a}_t.$$

De donde

$$\mathbf{c}'\bar{\mathbf{y}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{t \in T} \lambda_t^r \mathbf{a}_t' \bar{\mathbf{y}} \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{t \in T} \lambda_t^r \delta \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{t \in T} 0\delta = 0,$$

lo cual contradice (2.15). Por lo tanto, $\mathbf{c} \notin cl M$.

Recíprocamente, supongamos que

$$\mathbf{c} \notin cl M \text{ y } \mathbf{0}_n \notin cl conv \{\mathbf{a}_t, t \in T\}.$$

La primera afirmación implica la existencia de un vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, con $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}_n$, tal que,

$$\mathbf{c}'\mathbf{w} < 0 \leq \mathbf{a}_t'\mathbf{w} \text{ para todo } t \in T \text{ (véase [7, Corolario 3.1])}.$$

Además, la segunda afirmación implica la existencia de un vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, con $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}_n$, y $\delta > 0$ tal que,

$$\mathbf{a}_t'\mathbf{u} \geq \delta > 0 \text{ para todo } t \in T \text{ (véase [7, Teorema 3.2])}.$$

Entonces, para todo $\mu > 0$,

$$\mathbf{a}_t'(\mathbf{u} + \mu\mathbf{w}) \geq \delta > 0 \text{ para todo } t \in T.$$

Eligiendo $\mu > 0$, con $\mathbf{c}'(\mathbf{u} + \mu\mathbf{w}) < 0$, se tiene que $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{u} + \mu\mathbf{w}$ satisface

$$\mathbf{c}'\bar{\mathbf{y}} < 0 \text{ y } \mathbf{a}_t'\bar{\mathbf{y}} \geq \delta \text{ para todo } t \in T.$$

Esto último completa la demostración. □

Teorema 2.12. *Sea $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c}) \in \Pi_C^P$. Entonces $\pi \in \text{int } \Pi_2$ si y sólo si $\mathbf{O}_n \notin \text{cl conv } \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$ y $\mathbf{c} \notin \text{cl } M$. Además, $\text{int } \Pi_2$ es denso en Π_2 .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\pi \in \text{int } \Pi_2$. Entonces $\pi \in \text{int } \Pi_{IC}^D$, por el Teorema 2.3(ii), $\mathbf{O}_n \notin \text{cl conv } \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$ y $\mathbf{c} \notin \text{cl } M$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{O}_n \notin \text{cl conv } \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$ y $\mathbf{c} \notin \text{cl } M$. Por el Lema 2.4, existe $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$ tal que, (2.15) es válida. Ahora,

$$\mathbf{O}_{n+1} \notin \text{cl conv } \{(\mathbf{a}_t, b_t)', t \in T\},$$

porque de lo contrario,

$$\mathbf{O}_n \in \text{cl conv } \{\mathbf{a}_t, t \in T\},$$

lo cual sería una contradicción. Como por hipótesis $\pi \in \Pi_C^P$, la condición

$$\mathbf{O}_{n+1} \notin \text{cl conv } \{(\mathbf{a}_t, b_t)', t \in T\}$$

implica, por el Teorema 2.1, $\pi \in \text{int } \Pi_C^P$. Luego, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que, $\pi^1 \in \Pi_C^P$ si $d(\pi, \pi^1) < \epsilon_1$, con $\pi^1 = (\mathbf{a}^1, b^1, \mathbf{c}^1)$. Por otro lado, como

$$\mathbf{c}'\bar{\mathbf{y}} < 0 \text{ y } \mathbf{a}_t'\bar{\mathbf{y}} \geq \delta \text{ para todo } t \in T, \quad (2.17)$$

entonces existe $\epsilon_2 > 0$ tal que, $(\mathbf{c}^2)'\bar{\mathbf{y}} < 0$ siempre que $\|\mathbf{c}^2 - \mathbf{c}\|_\infty < \epsilon_2$. Ahora, si $d(\pi, \pi^3) < \epsilon_3$, donde $\epsilon_3 = \frac{\delta}{2n\|\bar{\mathbf{y}}\|_\infty} > 0$, se tiene

$$|(\mathbf{a}_t^3)'\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{a}_t'\bar{\mathbf{y}}| \leq \|\mathbf{a}_t^3 - \mathbf{a}_t\| \|\bar{\mathbf{y}}\| \leq n^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{a}_t^3 - \mathbf{a}_t\|_\infty n^{\frac{1}{2}} \|\bar{\mathbf{y}}\|_\infty$$

y

$$n^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{a}_t^3 - \mathbf{a}_t\|_\infty n^{\frac{1}{2}} \|\bar{\mathbf{y}}\|_\infty = n \|\mathbf{a}_t^3 - \mathbf{a}_t\|_\infty \|\bar{\mathbf{y}}\|_\infty < \frac{\delta}{2},$$

luego,

$$-\frac{\delta}{2} < (\mathbf{a}_t^3)'\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{a}_t'\bar{\mathbf{y}}.$$

De la desigualdad anterior y como (2.17) se cumple, se obtiene que $(\mathbf{a}_t^3)' \bar{\mathbf{y}} > \frac{\delta}{2}$ para todo $t \in T$. Si

$$\epsilon_4 = \min\{\epsilon_2, \epsilon_3\},$$

entonces $d(\pi, \pi^4) < \epsilon_4$, implica

$$(\mathbf{c}^4)' \bar{\mathbf{y}} < 0 \text{ y } (\mathbf{a}_t^4)' \bar{\mathbf{y}} \geq \frac{\delta}{2} > 0 \text{ para todo } t \in T.$$

Consideremos $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_4\} > 0$. Si $d(\pi, \pi^1) < \epsilon$, por el Lema 2.4, $\mathbf{c}^1 \notin cl M_1$. Por lo tanto, $(\{\mathbf{c}^1\} \times \mathbb{R}) \cap cl N_1 = \emptyset$, de lo contrario $\mathbf{c}^1 \in cl M_1$, entonces, por el Corolario 1.1, $\pi^1 \in \Pi_2$ (notemos que $(\mathbf{0}_n, 1)' \notin cl N_1$ porque $\pi^1 \in \Pi_C^P$). Por lo tanto, $\pi \in int \Pi_2$.

Para demostrar que $int \Pi_2$ es denso en Π_2 , sea $\pi \in \Pi_2$. Entonces existe $\bar{\mathbf{x}}$ tal que,

$$\mathbf{a}_t' \bar{\mathbf{x}} \geq b_t \text{ para todo } t \in T,$$

y $\mathbf{c} \notin M$. El hecho de que $\mathbf{c} \notin M$, implica la existencia de una sucesión

$$\{\mathbf{c}^r\}_{r=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n \setminus cl M$$

tal que, $\mathbf{c}^r \rightarrow \mathbf{c}$. Ahora, para cada r , existe $\mathbf{d}^r \in \mathbb{R}^n$ con $\|\mathbf{d}^r\| = 1$ y $(\mathbf{c}^r)' \mathbf{d}^r < 0$ y $\mathbf{z}' \mathbf{d}^r \geq 0$ para todo $\mathbf{z} \in cl M$ (véase [7, Corolario 3.1]). Consideremos $\pi^r = (\mathbf{a}^r, b^r, \mathbf{c}^r)$, donde

$$\mathbf{a}_t^r = \mathbf{a}_t + \frac{1}{r} \mathbf{d}^r \text{ y } b_t^r = b_t + \frac{(\mathbf{d}^r)' \bar{\mathbf{x}} - 1}{r} \text{ para todo } t \in T.$$

Observamos que $\bar{\mathbf{x}}$ es un punto factible para π^r , ya que

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_t^r)' \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}_t' \bar{\mathbf{x}} + \frac{1}{r} (\mathbf{d}^r)' \bar{\mathbf{x}} \geq b_t + \frac{1}{r} (\mathbf{d}^r)' \bar{\mathbf{x}} \geq \\ &\geq b_t + \frac{(\mathbf{d}^r)' \bar{\mathbf{x}}}{r} - \frac{1}{r} = b_t + \frac{(\mathbf{d}^r)' \bar{\mathbf{x}} - 1}{r}, \end{aligned}$$

luego, $\pi^r \in \Pi_C^P$ para $r = 1, 2, \dots$. Además, $\pi^r \rightarrow \pi$ y, para todo $t \in T$,

$$(\mathbf{a}_t^r)' \mathbf{d}^r = \mathbf{a}_t' \mathbf{d}^r + \frac{(\|\mathbf{d}^r\|)^2}{r} \geq 0 + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} > 0,$$

y $(\mathbf{c}^r)' \mathbf{d}^r < 0$ $r = 1, 2, \dots$. Entonces, por el Lema 2.4 (para $\delta = \frac{1}{r}$ y $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{d}^r$), $\mathbf{c}^r \notin \text{cl } M_r$ y $\mathbf{0}_n \notin \text{cl conv}\{\mathbf{a}_t^r, t \in T\}$ para cada r , lo cual implica $\pi^r \in \text{int } \Pi_2$ (por la primera parte de este teorema). Por lo tanto, $\text{int } \Pi_2$ es denso en Π_2 . □

Caso $\Pi_3 = \Pi_{IC}^P \cap \Pi_{NA}^D$.

En el caso general se tienen que separar los casos $M = \mathbb{R}^n$ y $M \neq \mathbb{R}^n$. Esta situación no sucede en el caso continuo porque ahí $M = \mathbb{R}^n$, siempre que $\pi \in \text{int } \Pi_3$. Sin embargo, en el caso general, existen parámetros $\pi \in \text{int } \Pi_3$ tales que, $M \neq \mathbb{R}^n$ como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.1. Considérese el problema siguiente en \mathbb{R} .

$$P_7 : \quad \inf \mathbf{x} \\ \text{s.a } \mathbf{x} \geq m,$$

donde $\mathbf{c}^7 := 1$, $\mathbf{a}^7 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ y $b^7 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ son definidas como sigue:

$$\mathbf{a}_m^7 := 1 \text{ y } b_n^7 := m \text{ para todo } m = 1, 2, \dots$$

Sea $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c}) \in \Pi$. Si $d(\pi^7, \pi) < \epsilon$, con $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ y $\pi^7 := (\mathbf{a}^7, b^7, \mathbf{c}^7)$, entonces $M \neq \mathbb{R}$ y $\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R} \subset K$. Por el Corolario 1.3, $\pi \in \Pi_3$. De esta manera, $\pi^7 \in \text{int } \Pi_3$, con $M_7 \neq \mathbb{R}^n$. □

Para la prueba del Teorema 2.13, se usan las dos observaciones siguientes, las cuales son presentadas en [13].

Observación 2.1.

$$\pi \in \Pi_{IC}^P \text{ y } M = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int } N. \quad (2.18)$$

La demostración la puede hallar en [9, Teorema 6.3].

La demostración de la observación siguiente es una aportación propia.

Observación 2.2. $\mathbf{0}_n \in \text{int } M$ si y sólo si $M = \mathbb{R}^n$.

DEMOSTRACIÓN. \Rightarrow Supongamos que $\mathbf{0}_n \in \text{int } M$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que, $B(\mathbf{0}_n, \epsilon) \subset M$. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$, se cumple que $\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}_n, \epsilon) \subset M$, de donde $\mathbf{x} \in M$. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$, entonces $\mathbf{y} = \frac{\epsilon \mathbf{x}}{2\|\mathbf{x}\|} \in B(\mathbf{0}_n, \epsilon) \subset M$. Así, para todo $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \mathbf{y} \in M$, en particular, para $\alpha_0 = \frac{2\|\mathbf{x}\|}{\epsilon}$ se cumple que $\mathbf{x} = \alpha_0 \mathbf{y} \in M$. Se concluye que $\mathbb{R}^n \subset M$. Por otro lado, por definición $M \subset \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $M = \mathbb{R}^n$.

\Leftarrow La demostración de la afirmación recíproca se deduce trivialmente. □

Teorema 2.13. Sea $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c}) \in \Pi$. Las afirmaciones siguientes son verdaderas.

- (i) $\pi \in \text{int } \Pi_3$ y $M = \mathbb{R}^n$ si y sólo si $\begin{pmatrix} 0^n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int } N$;
- (ii) $\pi \in \text{int } \Pi_3$ y $M \neq \mathbb{R}^n$ si y sólo si $\mathbf{0}_n \notin \text{int conv } \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$, $(\mathbf{0}_n, 1)' \in O^+(\text{cl } G)$ y $\mathbf{c} \in \text{int } M$.

Además, $\text{int } \Pi_3$ es denso en Π_3 .

DEMOSTRACIÓN. (i) Supongamos que $\pi \in \text{int } \Pi_3$ y $M = \mathbb{R}^n$, por (2.18), $\begin{pmatrix} 0^n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int } N$.

Recíprocamente, supongamos que $\begin{pmatrix} 0^n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int } N$. Por el Lema 2.2, existe $\epsilon > 0$ tal que, $\begin{pmatrix} 0^n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int } N_1$, siempre que $d(\pi, \pi^1) < \epsilon$. Sea $\pi^1 = (\mathbf{a}^1, b^1, \mathbf{c}^1)$, donde $d(\pi, \pi^1) < \epsilon$, entonces $\mathbf{0}_n \in \text{int } M_1$ y en consecuencia $M_1 = \mathbb{R}^n$. Así, $\mathbf{c}^1 \in M_1$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que, $\begin{pmatrix} \mathbf{c}^1 \\ \alpha \end{pmatrix} \in N_1$. En efecto, supongamos que $\{\mathbf{c}^1\} \times \mathbb{R} \cap N_1 = \emptyset$. Como $\begin{pmatrix} 0^n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int } N_1$, existe $\epsilon_1 \in \mathbb{R}$, con $\epsilon_1 > 0$, tal que, $B(\begin{pmatrix} 0^n \\ 1 \end{pmatrix}, \epsilon_1) \subset N_1$.

Si $\mathbf{c}^1 = \mathbf{0}_n$, de inmediato se tiene una contradicción puesto que $\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int } N_1 \subset N_1$. Sea $\begin{pmatrix} \mathbf{c}^1 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$, donde $\mathbf{c}^1 \neq \mathbf{0}_n$, entonces

$$\frac{\epsilon_1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{c}^1}{\|(\frac{\mathbf{c}^1}{\alpha})\|} \\ \frac{\alpha + \frac{2}{\epsilon_1} \|(\frac{\mathbf{c}^1}{\alpha})\|}{\|(\frac{\mathbf{c}^1}{\alpha})\|} \end{pmatrix} = \frac{\epsilon_1}{2} \frac{\begin{pmatrix} \mathbf{c}^1 \\ \alpha \end{pmatrix}}{\|(\frac{\mathbf{c}^1}{\alpha})\|} + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in B\left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}, \epsilon_1\right) \subset N_1.$$

Esto implica la contradicción siguiente:

$$\frac{2\|(\frac{\mathbf{c}^1}{\alpha})\|}{\epsilon_1} \frac{\epsilon_1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{c}^1}{\|(\frac{\mathbf{c}^1}{\alpha})\|} \\ \frac{\alpha + \frac{2}{\epsilon_1} \|(\frac{\mathbf{c}^1}{\alpha})\|}{\|(\frac{\mathbf{c}^1}{\alpha})\|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^1 \\ \alpha + \frac{2}{\epsilon_1} \|(\frac{\mathbf{c}^1}{\alpha})\| \end{pmatrix} \in N_1.$$

Ahora, se demostrará que $\begin{pmatrix} \mathbf{c}^1 \\ \gamma \end{pmatrix} \in K_1$ para todo $\gamma \in \mathbb{R}$.

Si $\gamma \geq \alpha$, entonces

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}^1 \\ \gamma \end{pmatrix} = (\gamma - \alpha) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{c}^1 \\ \alpha \end{pmatrix} \in N_1 + N_1 \subset N_1 \subset K_1.$$

Similarmente, si $\gamma < \alpha$, se tiene

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}^1 \\ \gamma \end{pmatrix} = (\alpha - \gamma) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{c}^1 \\ \alpha \end{pmatrix} \subset K_1 + K_1 \subset K_1.$$

Entonces $d(\pi, \pi^1) < \epsilon$, implica que $\{\mathbf{c}^1\} \times \mathbb{R} \subset K_1$. Por el Corolario 1.3, $\pi^1 \in \Pi_3$. Por lo tanto, $\pi \in \text{int } \Pi_3$.

(ii) Supongamos que $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c}) \in \text{int } \Pi_3$ y $M \neq \mathbb{R}^n$. Entonces $\pi \in \text{int } \Pi_G^D$, en consecuencia, $\mathbf{c} \in \text{int } M$ (Teorema 2.3(i)). Ahora, la hipótesis de que $M \neq \mathbb{R}^n$, implica que $\mathbf{0}_n \notin \text{int conv } \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$, pues de lo contrario, $M = \mathbb{R}^n$. Queda por demostrar que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in O^+(\text{cl } G).$$

Supongamos lo contrario, es decir, $\begin{pmatrix} \mathbf{o}_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin O^+(cl G)$. Por el Teorema 2.2(ii), $\mathbf{o}_{n+1} \in int H$ (pues $\pi \in int \Pi_{IC}^P$), entonces su proyección sobre \mathbb{R}^n , implica

$$\mathbf{o}_n \in int conv \{\mathbf{a}_t, t \in T\}.$$

Esto contradice la condición de que $\mathbf{o}_n \notin int conv \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$. Como resultado, $\begin{pmatrix} \mathbf{o}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in O^+(cl G)$.

Recíprocamente, supongamos que

$$\mathbf{o}_n \notin int conv \{\mathbf{a}_t, t \in T\}, \begin{pmatrix} \mathbf{o}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in O^+(cl G) \text{ y } \mathbf{c} \in int M.$$

La última condición implica, por el Lema 2.2, la existencia de algún $\epsilon > 0$ tal que, $\mathbf{c}^1 \in int M_1$, siempre que $d(\pi, \pi^1) < \epsilon$. Además, la condición

$$\begin{pmatrix} \mathbf{o}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in O^+(cl G),$$

implica $\pi^1 \in \Pi_{IC}^P$, siempre que $d(\pi, \pi^1) < \epsilon$ (véase la Proposición 2.1). En tal caso, por la Proposición 1.1,

$$(cl M_1) \times \mathbb{R} = cl K_1.$$

Además, existe $\delta > 0$ tal que,

$$B(\mathbf{c}^1, \delta) \times \mathbb{R} \subset cl M_1 \times \mathbb{R} = cl K_1,$$

lo cual implica $(\mathbf{c}^1, r)' \in int cl K_1 = int K_1 \subset K_1$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Entonces, por el Corolario 1.3, $\pi^1 \in \Pi_3$, siempre que

$$d(\pi, \pi^1) < \epsilon.$$

Así, se concluye que $\pi \in int \Pi_3$. Finalmente, la suposición de que

$$\mathbf{o}_n \notin int conv \{\mathbf{a}_t, t \in T\},$$

implica la existencia de algún vector $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}_n\}$ tal que, $\mathbf{a}'_t \mathbf{y} \geq 0$ para todo $t \in T$. Entonces $M \neq \mathbb{R}^n$. Así, la prueba de (ii) está

completa.

Para demostrar que $\text{int } \Pi_3$ es denso en Π_3 , sea $\pi \in \Pi_3$.

Si $M = \mathbb{R}^n$, tomando en cuenta que π tiene problema primal inconsistente, se obtiene, por (2.18), que $\begin{pmatrix} \theta_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int } N$. Por lo tanto, como aplicación de la afirmación (i) de este teorema, $\pi \in \text{int } \Pi_3$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que, $B(\pi, \epsilon) \subset \Pi_3$, luego, para cada $r = 1, 2, \dots$, se puede encontrar $\pi^r \in B(\pi, \frac{\epsilon}{r})$ tal que, $\{\pi^r\} \rightarrow \pi$ y $\pi^r \in \text{int } \Pi_3$. Por lo tanto, $\text{int } \Pi_3$ es denso en Π_3 .

Si $M \neq \mathbb{R}^n$, entonces $\theta_n \notin \text{int conv } \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$, lo cual implica $\theta_{n+1} \notin \text{int } H$. (de lo contrario, $\theta_n \in \text{int conv } \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$). Se consideran dos casos:

$$1) \begin{pmatrix} \theta_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin O^+(\text{cl } G);$$

$$2) \begin{pmatrix} \theta_n \\ 1 \end{pmatrix} \in O^+(\text{cl } G).$$

Supongamos que

$$\begin{pmatrix} \theta_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin O^+(\text{cl } G).$$

Entonces, el Teorema 2.2(iii), implica $\theta_{n+1} \in \text{front } H$. Por [5, Teorema 4], $\pi \in \text{front } \Pi_{FIC}$, donde Π_{FIC} es el conjunto de parámetros con problema primal inconsistente que tiene un sistema finito de restricciones inconsistente. Entonces, para cada $r \in \mathbb{N}$, existe $\pi^r = (\mathbf{a}^r, b^r, \mathbf{c}) \in \Pi_{FIC}$ tal que,

$$d(\pi, \pi^r) < \frac{1}{3r}.$$

Aplicando [9, Teorema 4.4], se tiene que $\begin{pmatrix} \theta_n \\ 1 \end{pmatrix} \in N_r$. Entonces existen escalares no negativos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ($1 \leq m \leq n+1$) y

vectores linealmente independientes $\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{t_i}^r \\ b_{t_i}^r \end{pmatrix}, i = 1, \dots, m \right\}$ tales que,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{t_i}^r \\ b_{t_i}^r \end{pmatrix}.$$

Sean $t_{m+1}, \dots, t_{n+1} \in T \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$, $(n+1) - m$ elementos diferentes en T . Se elijen $\mathbf{v}_i^r := \mathbf{0}_{n+1}$, para $i = 1, \dots, m$; y $\mathbf{v}_i^r \in \mathbb{R}^{n+1}$ tales que,

$$\|\mathbf{v}_i^r\|_\infty < \frac{1}{3r},$$

$i = m + 1, \dots, n + 1$ y el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{t_i}^r \\ b_{t_i}^r \end{pmatrix} + \mathbf{v}_i^r, i = 1, \dots, n + 1 \right\}$ que constituya una base de \mathbb{R}^{n+1} . Ahora, se hace

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_t^r \\ d_t^r \end{pmatrix} := \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{t_i}^r \\ b_{t_i}^r \end{pmatrix} + \mathbf{v}_i^r, & \text{si } t = t_i, i = 1, \dots, n + 1. \\ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t^r \\ b_t^r \end{pmatrix}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y $\pi^{r_1} = (\mathbf{c}^r, d^r, \mathbf{c})$. Como resultado,

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{t_i}^r \\ b_{t_i}^r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{t_i}^r \\ d_{t_i}^r \end{pmatrix} \right\|_\infty < \frac{1}{3r}$$

y

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{t_i}^r \\ d_{t_i}^r \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots, n + 1 \right\}.$$

El último cono es finitamente generado, de modo que se puede aplicar una rotación conveniente (para más detalles puede consultar la prueba en [11] del Lema 2.3(ii)) a fin de obtener un conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{t_i}^* \\ b_{t_i}^* \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots, n + 1 \right\}$ tal que,

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{t_i}^r \\ d_{t_i}^r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{t_i}^* \\ b_{t_i}^* \end{pmatrix} \right\|_\infty < \frac{1}{3r},$$

para $i = 1, \dots, n + 1$, y $\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int cone} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{t_i}^* \\ b_{t_i}^* \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n + 1 \right\}$.

Ahora, para cada $t \in T$, se considera $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{t_i}^{r_2} \\ b_{t_i}^{r_2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ definidos por

$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_t^{r_2} \\ b_t^{r_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{t_i}^* \\ b_{t_i}^* \end{pmatrix}$ si $t \in \{t_1, \dots, t_{n+1}\}$ y $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_t^{r_2} \\ b_t^{r_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t^r \\ b_t^r \end{pmatrix}$ si $t \notin \{t_1, \dots, t_{n+1}\}$.

Así, $\pi^{r_2} = (\mathbf{a}^{r_2}, b^{r_2}, \mathbf{c})$ satisface $d(\pi, \pi^{r_2}) < \frac{1}{r}$. En efecto,

$$d(\pi, \pi^{r_2}) \leq d(\pi, \pi^r) + d(\pi^r, \pi^{r_2}) \leq \frac{1}{3r} + d(\pi^r, \pi^{r_1}) + d(\pi^{r_1}, \pi^{r_2})$$

y

$$\frac{1}{3r} + d(\pi^r, \pi^{r_1}) + d(\pi^{r_1}, \pi^{r_2}) \leq \frac{1}{3r} + \frac{1}{3r} + \frac{1}{3r} = \frac{1}{r}.$$

Además,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int cone} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{t_i}^* \\ b_{t_i}^* \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n+1 \right\}$$

y

$$\text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{t_i}^* \\ b_{t_i}^* \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n+1 \right\} \subset \text{int cone} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t^{r_2} \\ b_t^{r_2} \end{pmatrix}, t \in T \right\},$$

implica, por la afirmación (i) de este teorema, que $\pi^{r_2} \in \text{int } \Pi_3$. Así, es posible construir una sucesión de parámetros en $\text{int } \Pi_3$ que converge a π .

En el caso de que $\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in O^+(\text{cl } G)$, se tiene $d_{\text{from } \Pi_C^D}(\pi) = +\infty$. Entonces para cada $\pi^1 \in \Pi$ tal que, $d(\pi, \pi^1) < \infty$, se cumple

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in O^+(\text{cl } G_1).$$

Por hipótesis, $\pi \in \Pi_C^D$, entonces $\mathbf{c} \in M$, esto implica la existencia de escalares no negativos $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ($m \leq n$) y vectores linealmente independientes $\{\mathbf{a}_{t_i}, i = 1, \dots, m\}$ tales que,

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}_{t_i} \quad (\text{véase [14, Corolario 17.1.2]}).$$

Sean $t_{m+1}, \dots, t_n \in T \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$, $n - m$ elementos diferentes. Sea r un entero positivo. Elijamos $\mathbf{v}_i^r = \mathbf{0}_n$ para $i = 1, \dots, m$; y $\mathbf{v}_i^r \in \mathbb{R}^n$ tales que,

$$\|\mathbf{v}_i^r\|_\infty < \frac{1}{r},$$

$i = m + 1, \dots, n$ y el conjunto $\{\mathbf{a}_{t_i} + \mathbf{v}_i^r, i = 1, \dots, n\}$ que constituya una base de \mathbb{R}^n . Consideremos $\mathbf{a}^r : T \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde:

$$\mathbf{a}_t^r = \begin{cases} \mathbf{a}_t + \mathbf{v}_i^r, & \text{si } t = t_i, i = 1, \dots, n. \\ \mathbf{a}_t, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como resultado, $\|\mathbf{a}_t - \mathbf{a}_t^r\|_\infty < \frac{1}{r}$ y $\mathbf{c} \in M_r$. Además, como $\text{aff } M_r = \mathbb{R}^n$, se obtiene que $\dim M_r = n$. Por consiguiente, $\text{int } M_r \neq \emptyset$. Entonces existe $\mathbf{c}^r \in \text{int } M_r$ tal que, $\|\mathbf{c} - \mathbf{c}^r\|_\infty < \frac{1}{r}$ (véase [14, Teorema 6.1]). Consideremos $\pi^r = (\mathbf{a}^r, b - \frac{1}{r}, \mathbf{c}^r)$, se tiene que $\pi^r \rightarrow \pi$. Además, se cumple

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in O^+ (\text{cl } G_r) \text{ para } r \text{ suficientemente grande.}$$

Luego, $\pi^r \in \Pi_{IC}^P$. Supongamos que $\mathbf{0}_n \in \text{int conv } \{\mathbf{a}_t^r, t \in T\}$, entonces $M = \mathbb{R}^n$ y por (2.26), se sigue que $\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int } N_r$. Por la afirmación (i) de este teorema, $\pi^r \in \text{int } \Pi_3$. Ahora, si

$$\mathbf{0}_n \notin \text{int conv } \{\mathbf{a}_t^r, t \in T\},$$

considerando que las afirmaciones $\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in O^+(\text{cl } G_r)$ y $\mathbf{c}^r \in M_r$ son válidas, se obtiene (por la afirmación (ii) de este teorema) que $\pi^r \in \text{int } \Pi_3$, con $M_r \neq \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, en este caso, también existe una sucesión en $\text{int } \Pi_3$ que converge a π .

□

Observación 2.3. *El teorema anterior muestra que si la función $b : T \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada, entonces no se cumple que $\pi \in \text{int } \Pi_3$ y $M \neq \mathbb{R}^n$ simultáneamente. Así, en el caso continuo, la afirmación $\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{int } N$ caracteriza al $\text{int } \Pi_3$.*

$$\text{Caso } \Pi_4 = \Pi_{IC}^P \cap \Pi_{IC}^D.$$

De acuerdo al Teorema 2.8, el $\text{int } \Pi_4$ es vacío en el caso continuo. El ejemplo siguiente muestra que, en el caso general, existen parámetros $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c})$ que son estables con respecto al conjunto Π_4 . Así,

$int \Pi_4 \neq \emptyset$.

Ejemplo 2.2. Considérese el siguiente problema inconsistente en \mathbb{R} .

$$P_8 : \quad \inf -\mathbf{x}$$

$$s.a \quad \mathbf{x} \geq m \text{ para todo } m = 1, 2, \dots,$$

donde $\mathbf{c}^8 := -1$, $\mathbf{a}^8 : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ y $b^8 : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ son definidas de la manera siguiente:

$$\mathbf{a}_m^8 := 1 \text{ y } b_m^8 := m \text{ para toda } m = 1, 2, \dots$$

Haciendo $\pi^8 := (\mathbf{a}^8, b^8, \mathbf{c}^8)$, se tiene que

$$M = \mathbb{R}_+, \quad K = (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}_{++}), \quad c \notin cl M \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in cl N,$$

para todo $\pi = (a, b, c)$ tal que, $d(\pi^8, \pi) < \epsilon$, con $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. En consecuencia, $\pi^8 \in int \Pi_4$. □

El teorema siguiente establece una caracterización del interior de Π_4 , mientras que con el Ejemplo 2.3, se mostrará que el $int \Pi_4$ no es denso en Π_4 incluso cuando $int \Pi_4 \neq \emptyset$.

Teorema 2.14. Sea $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c}) \in \Pi$. Entonces $\pi \in int \Pi_4$ si y sólo si $\mathbf{0}_n \notin cl conv \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$, $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in O^+(cl G)$ y $\mathbf{c} \notin cl M$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\pi \in int \Pi_4$. Entonces $\pi \in int \Pi_{IC}^D$. Luego, por el Teorema 2.3(ii),

$$\mathbf{0}_n \notin cl conv \{\mathbf{a}_t, t \in T\} \text{ y } \mathbf{c} \notin cl M.$$

Queda por demostrar que $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in O^+(cl G)$. Supongamos lo contrario, es decir, $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin O^+(cl G)$. Por el Teorema 2.2, los tres casos siguientes son posibles.

(i) $\mathbf{0}_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus cl H$;

- (ii) $\mathbf{0}_{n+1} \in \text{int } H$;
- (iii) $\mathbf{0}_{n+1} \in \text{front } H$.

Como $\mathbf{0}_n \notin \text{cl conv } \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$, los casos (ii) y (iii) no son posibles, de lo contrario,

$$\mathbf{0}_n \in \text{int conv } \{\mathbf{a}_t, t \in T\} \text{ y } \mathbf{0}_n \in \text{front conv } \{\mathbf{a}_t, t \in T\}.$$

Así, sólo (i) puede ser posible. Entonces, por el Teorema 2.2(i), $\pi \in \text{int } \Pi_C^P$, lo cual es una contradicción puesto que por hipótesis $\pi \in \text{int } \Pi_4 \subset \text{int } \Pi_{IC}^P$. Por lo tanto, $(\mathbf{0}_n) \in O^+(\text{cl } G)$.

Recíprocamente. Supongamos que

$$\mathbf{0}_n \notin \text{cl conv } \{\mathbf{a}_t, t \in T\}, (\mathbf{0}_n, 1)' \in O^+(\text{cl } G) \text{ y } \mathbf{c} \notin \text{cl } M.$$

La primera y la última condición implican

$$\pi \in \text{int } \Pi_{IC}^D \text{ (Teorema 2.3(ii)).}$$

Como $(\mathbf{0}_n) \in O^+(\text{cl } G)$, se tiene $\pi \in \text{int } \Pi_{IC}^P$ (Proposición 2.1). Por consiguiente, $\pi \in \text{int } \Pi_{IC}^P \cap \text{int } \Pi_{IC}^D = \text{int } \Pi_4$. Así, la prueba está completa. □

Observación 2.4. *El teorema anterior muestra que si la función $b : T \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada, entonces $\pi \notin \text{int } \Pi_4$. En particular, $\text{int } \Pi_4$ es vacío en el caso continuo.*

Ejemplo 2.3. Considérese el problema primal siguiente en \mathbb{R} ,

$$P_9 : \quad \inf -\mathbf{x}$$

$$\text{s.a } m\mathbf{x} \geq m + 1 \text{ para toda } m = 0, 1, 2, \dots,$$

donde $\mathbf{c}^9 = -1$, $\mathbf{a}^9 : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ y $b^9 : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ son definidas de la manera siguiente:

$$\mathbf{a}_m^9 := m \text{ y } b_m^9 := m + 1 \text{ para toda } m = 0, 1, 2, \dots$$

P_9 es inconsistente, en efecto,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in cl \text{ cone } \left\{ \begin{pmatrix} m \\ m+1 \end{pmatrix} : m \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

El problema dual de P_9 es:

$$\begin{aligned} D_9 : \quad & \text{Sup} \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}_+} \lambda_m (m+1) \\ & s.a \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}_+} \lambda_m m = -1, \\ & \quad \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}_+}. \end{aligned}$$

D_9 es inconsistente, en efecto,

$$-1 \notin \text{cone } \{m : m \in \mathbb{Z}_+\} = \mathbb{R}_+.$$

Se concluye que, $\pi^9 := (\mathbf{a}^9, b^9, \mathbf{c}^9) \in \Pi_4$.

Considérense las perturbaciones

$$\begin{aligned} P_\epsilon : \quad & \inf -\mathbf{x} \\ & s.a \quad \epsilon \mathbf{x} \geq \epsilon + 1 \text{ para } m = 0, \\ & \quad \quad m \mathbf{x} \geq m + 1 \text{ para } m = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

donde $0 < \epsilon < 1$. $\mathbf{a}^\epsilon : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ y $b^\epsilon : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ son definidas como sigue.

$$\mathbf{a}_m^\epsilon := \begin{cases} \epsilon, & \text{si } m = 0, \\ m, & \text{si } m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

y

$$b_m^\epsilon := \begin{cases} \epsilon + 1, & \text{si } m = 0, \\ m + 1, & \text{si } m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Haciendo $\pi^\epsilon := (\mathbf{a}^\epsilon, b^\epsilon, \mathbf{c}^\epsilon)$, se tiene $\pi^\epsilon \in \Pi_C^P$ (el conjunto factible es $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R} : \mathbf{x} \geq 1 + \frac{1}{\epsilon}\}$) y $\pi^\epsilon \rightarrow \pi^9$, cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Por consiguiente, $\pi^9 \in \text{front } \Pi_C^P$.

Ahora, para cualquier $\pi \in \Pi$ tal que,

$$d(\pi^9, \pi) < +\infty,$$

se tiene

$$d_{front \Pi_C^P}(\pi) < +\infty.$$

Por (2.1) se cumple

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin O^+(cl G).$$

La caracterización del $int \Pi_4$, en el teorema anterior, implica que $\pi \notin int \Pi_4$. Por lo tanto, $int \Pi_4$ no es denso en Π_4 , aunque el $int \Pi_4$ es distinto del vacío por el Ejemplo 2.2. □

Caso $\Pi_5 = \Pi_A^P \cap \Pi_{IC}^D$.

Teorema 2.15. $int \Pi_5 = \emptyset$. Además, $\Pi_5 \subset front \Pi_i$, para $i = 1, 2$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c}) \in \Pi_5$. Por el Corolario 1.2,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl N, \quad \mathbf{c} \notin M \text{ y } (\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R}) \cap cl N \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $\mathbf{c} \in cl M \setminus M$, de donde existe $\{\mathbf{c}^r\}_{r=1}^\infty \subset M$ tal que, $\mathbf{c}^r \rightarrow \mathbf{c}$. Consideremos $\pi^r = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c}^r)$ para $r = 1, 2, \dots$; se tiene $\pi^r \in \Pi_1$ y $\pi^r \rightarrow \pi$. Por consiguiente, $\Pi_5 \subset front \Pi_1$. Además, como $\Pi_5 \cap \Pi_1 = \emptyset$, se sigue que $int \Pi_5 = \emptyset$.

Queda por demostrar que $\pi \in front \Pi_2$. Como $\mathbf{c} \in cl M \setminus M$, existe $\{\mathbf{d}^r\}_{r=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n \setminus cl M$ tal que, $\mathbf{d}^r \rightarrow \mathbf{c}$. Por consiguiente, si $\pi^r = (\mathbf{a}, b, \mathbf{d}^r)$, para $r = 1, 2, \dots$, entonces $\pi^r \in \Pi_C^P$ porque

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl N = cl N_r.$$

Además, si

$$(\{\mathbf{d}^r\} \times \mathbb{R}) \cap cl N_r \neq \emptyset,$$

para algún r , entonces existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que, $\binom{\mathbf{d}^r}{\rho} \in cl N_r$. Así,

$$\mathbf{d}^r \in cl M_r = cl M,$$

lo cual sería una contradicción. Luego,

$$(\{\mathbf{d}^r\} \times \mathbb{R}) \cap cl N_r = \emptyset,$$

por el Corolario 1.1, $\pi^r \in \Pi_2$ para $r = 1, 2, \dots$. Por lo tanto, $\Pi_5 \subset front \Pi_2$. □

$$\text{Caso } \Pi_6 = \Pi_{IC}^P \cap \Pi_A^D.$$

Teorema 2.16. *int $\Pi_6 = \emptyset$. Además, $\Pi_6 \subset front \Pi_4$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c}) \in \Pi_6$. Entonces $\pi \in \Pi_{IC}^P \cap \Pi_A^D$, lo cual implica (por la Proposición 1.1) $cl K = cl M \times \mathbb{R}$ y $\mathbf{c} \in M$. Si $\mathbf{c} \in int M$, existe $\delta > 0$ tal que, $B(\mathbf{c}, \delta) \subset M$. Por consiguiente,

$$B(\mathbf{c}, \delta) \times \mathbb{R} \subset cl M \times \mathbb{R} = cl K,$$

lo cual implica $\binom{\mathbf{c}}{r} \in int cl K \subset cl K$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Por el Corolario 1.3, se obtiene $\pi \in \Pi_3$ que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathbf{c} \in M \setminus int M$, esto implica la existencia de una sucesión $\{\mathbf{c}^r\}_{r=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n \setminus M$ tal que, $\mathbf{c}^r \rightarrow \mathbf{c}$ cuando $r \rightarrow \infty$. Consideremos $\pi^r = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c}^r)$, por la Tabla 2, de la sección 1.2, $\pi^r \in \Pi_4$ para $r = 1, 2, \dots$. Por lo tanto, $\Pi_6 \subset front \Pi_4$. Además, $\Pi_4 \cap \Pi_6 = \emptyset$, implica $int \Pi_6 = \emptyset$. □

Capítulo 3

Continuación del segundo refinamiento. Caso continuo

3.1. Segundo refinamiento, parte dos

En este capítulo se comienza estudiando a los conjuntos, $\widehat{\Pi}_5^1$, $\widehat{\Pi}_5^2$, $\widehat{\Pi}_6^1$, $\widehat{\Pi}_6^2$ definidos en la sección 1.4, que se generan con el segundo refinamiento de la partición primal-dual. Se muestra que los conjuntos son no vacíos, también se presentan condiciones necesarias para que un parámetro pertenezca a $\widehat{\Pi}_5^1$ y $\widehat{\Pi}_6^1$, respectivamente. Además, se presenta una caracterización, que se sigue de la definición, de $\widehat{\Pi}_5^1$ y $\widehat{\Pi}_6^1$. Más tarde, se retoman todos los conjuntos que se generan con el refinamiento y se presenta un estudio del interior de ellos, así como también, de su densidad en otros conjuntos de la partición primal-dual.

En el primer refinamiento de la partición primal-dual, definido en la Sección 1.3, los conjuntos $\Pi_S^P \cap \Pi_{IC}^D$ y $\Pi_{IC}^P \cap \Pi_S^D$ son vacíos. Sin embargo, con los ejemplos a continuación, se mostrará que los conjuntos $\Pi_s^P \cap \Pi_{IC}^D = \widehat{\Pi}_5^1$ y $\Pi_{IC}^P \cap \Pi_s^D = \widehat{\Pi}_6^1$, en el segundo refinamiento, son no vacíos.

En el ejemplo siguiente, $\pi^{10} \in \widehat{\Pi}_5^1$ esto muestra que $\widehat{\Pi}_5^1 \neq \emptyset$.

Ejemplo 3.1. Considérese, en \mathbb{R}^2 , el problema primal:

$$P_{10} : \quad \begin{array}{l} \text{mín } x_2 \\ \text{s.a } t^2 x_1 + t x_2 \geq t, \quad t \in [0, 1]. \end{array}$$

El conjunto factible de P_{10} se muestra en la Figura 3.1.

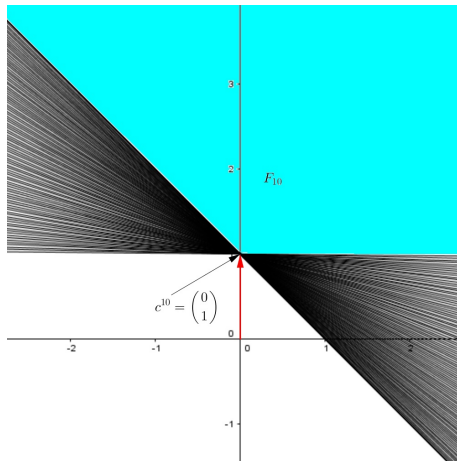


Figura 3.1: Conjunto factible de P_{10}

En la Figura 3.1 se observa que P_{10} es consistente, con valor óptimo $v^P(\pi^{10}) = 1$. Luego, P_{10} es acotado. Además,

$$F_{10}^* = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0 \text{ y } x_2 = 1 \right\}.$$

es el conjunto optimal, el cual es no acotado. El cono M_{10} , asociado a P_{10} , se muestra en la Figura 3.2.

En la Figura 3.2 se muestra que $\mathbf{c}^{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, pero $\mathbf{c}^{10} \notin M_{10}$, esto implica que el problema dual D_{10} es inconsistente. Se concluye que $\pi_{10} \in \widehat{\Pi}_5^1$.

□

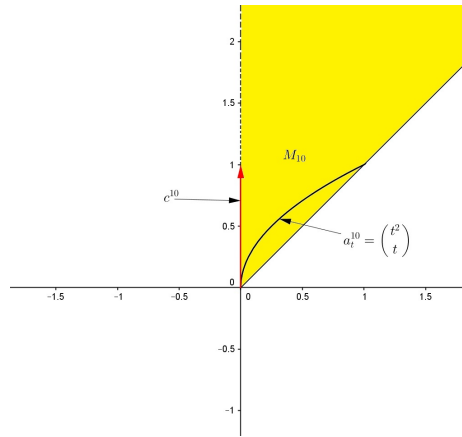


Figura 3.2: Cono de primer momento asociado a P_{10}

En el ejemplo siguiente, $\pi^{11} \in \widehat{\Pi}_5^2$ con lo cual se muestra que $\widehat{\Pi}_5^2 \neq \emptyset$.

Ejemplo 3.2. En \mathbb{R}^2 , considérese el problema:

$$P_{11} : \quad \begin{array}{l} \text{mín } x_1 \\ \text{s.a } tx_1 + t^3x_2 \geq t^2, \quad t \in [0, 1]. \end{array}$$

El conjunto factible de P_{11} se muestra en la Figura 3.3.

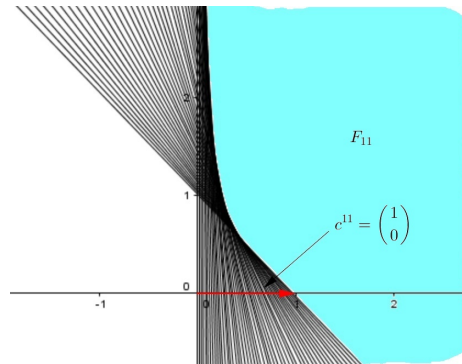


Figura 3.3: Conjunto factible de P_{11}

En la la Figura 3.3 se observa que P_{11} es consistente y acotado, con valor óptimo $v^P(\pi^{11}) = 0$, sin embargo, $F_{11}^* = \emptyset$, es decir, P_{11} es no soluble. El cono M_{11} , asociado a P_{11} , se muestra en la Figura 3.4.

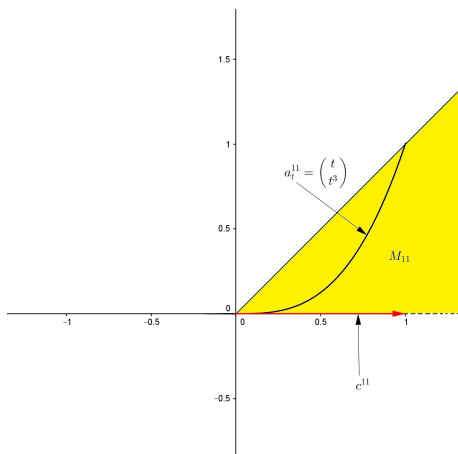


Figura 3.4: Cono de primer momento asociado a P_{11}

En la Figura 3.4 se observa que $\mathbf{c}^{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, pero $\mathbf{c}^{11} \notin M_{11}$, esto implica que el problema dual D_{11} es inconsistente. Se concluye que $\pi_{11} \in \widehat{\Pi}_5^2$.

□

En el ejemplo siguiente, $\pi^{12} \in \widehat{\Pi}_6^1$ con lo cual se muestra que $\widehat{\Pi}_6^1 \neq \emptyset$.

Ejemplo 3.3. Considérese, en \mathbb{R}^2 , el problema:

$$P_{12} : \quad \begin{array}{l} \text{mín } x_1 \\ \text{s.a } x_1 + t^2 x_2 \geq 2t, \quad t \in [0, 1] \\ -x_1 \geq 0. \end{array}$$

Se tiene que, para todo $t \in (0, 1]$,

$$\left[\frac{1}{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \\ 2t \end{pmatrix} + \frac{1}{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{t}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

es un elemento de N_{12} . Haciendo tender t a cero en (3.1), se concluye que $\begin{pmatrix} 0_2 \\ 1 \end{pmatrix} \in cl N_{12}$. Por lo tanto, P_{12} es inconsistente.

El problema dual de P_{12} es:

$$\begin{aligned} D_{12} : \quad & \text{máx} \sum_{t \in [0,1]} \lambda_t 2t \\ & \text{s.a.} \sum_{t \in [0,1]} \lambda_t \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \lambda \in \mathbb{R}_+^{(0,1)}, \gamma \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Se cumple que $\bar{\theta} = (\lambda^0; \gamma)$, donde $\gamma \in \mathbb{R}_+$ y $\lambda^0 \in \mathbb{R}_+^{(0,1)}$ definida como

$$\lambda_t^0 := \begin{cases} 1 + \gamma, & \text{si } t = 0, \\ 0, & \text{si } t \in (0, 1], \end{cases}$$

es un punto factible para el problema D_{12} . Luego $v^D(\pi^{12}) = 0$ y Λ^* es no acotado. Se concluye que $\pi^{12} \in \widehat{\Pi}_6^1$.

□

En el ejemplo siguiente, $\pi^{13} \in \widehat{\Pi}_6^2$ con lo cual se muestra que $\widehat{\Pi}_6^2 \neq \emptyset$.

Ejemplo 3.4. En \mathbb{R}^2 , se considera el problema primal:

$$\begin{aligned} P_{13} : \quad & \text{mín} x_2 \\ & \text{s.a.} \quad t^2 x_1 \geq t, \quad t \in [0, 1] \\ & \quad \quad s x_2 \geq -s^2, \quad s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Se cumple que, para todo $t \in (0, 1]$,

$$\left[\frac{1}{t} \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

es un elemento de N_{13} . Haciendo tender t a cero en (3.2), se concluye que $\begin{pmatrix} 0_2 \\ 1 \end{pmatrix} \in cl N_{13}$. Por lo tanto, P_{13} es inconsistente.

El problema dual de P_{13} es:

$$D_{13} : \quad \begin{aligned} & \text{máx} \left(\sum_{t \in [0, 1]} \lambda_t t + \sum_{s \in [0, 1]} (-\gamma_s s^2) \right) \\ & \text{s.a} \quad \sum_{t \in [0, 1]} \lambda_t \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{s \in [0, 1]} \gamma_s \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \quad \lambda, \gamma \in \mathbb{R}_+^{([0, 1])}. \end{aligned}$$

Del sistema de restricciones, se tiene

$$0 = \sum_{t \in [0, 1]} \lambda_t t^2 \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}_+^{([0, 1])}.$$

Las soluciones de la igualdad anterior son de la forma $\lambda^0 \in \mathbb{R}_+^{([0, 1])}$ con $\lambda_0^0 \in \mathbb{R}_+$ y $\lambda_t^0 = 0$ para todo $t \in (0, 1]$. Entonces los puntos factibles para D_{13} tienen la forma

$$\bar{\theta} = (\lambda^0; \gamma),$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}_+^{([0, 1])}$. Si se evalúa a la función objetivo del problema dual en puntos de la forma anterior, el problema se reduce a

$$\begin{aligned} & \text{máx} \quad \sum_{s \in [0, 1]} (-\gamma_s s^2) \\ & \text{s.a} \quad \sum_{s \in [0, 1]} \gamma_s s = 1 \\ & \quad \gamma \in \mathbb{R}_+^{([0, 1])}, \end{aligned}$$

el cual es equivalente a

$$\begin{aligned} & - \text{mín} \quad \sum_{s \in [0, 1]} \gamma_s s^2 \\ & \text{s.a} \quad \sum_{s \in [0, 1]} \gamma_s s = 1 \\ & \quad \gamma \in \mathbb{R}_+^{([0, 1])}. \end{aligned}$$

Trivialmente

$$v_{13} := \min \left\{ \sum_{s \in [0, 1]} \gamma_s s^2 \mid \begin{array}{l} \sum_{s \in [0, 1]} \gamma_s s = 1 \\ \gamma \in \mathbb{R}_+^{([0, 1])} \end{array} \right\} \geq 0.$$

Ahora, si $s_0 \in (0, 1]$, entonces la función $\gamma^0 \in \mathbb{R}_+^{([0, 1])}$, donde $\gamma_{s_0}^0 = \frac{1}{s_0}$ y $\gamma_s^0 = 0$ para todo $s \in [0, 1] \setminus \{s_0\}$, satisface

$$\sum_{s \in [0, 1]} \gamma_s^0 s = 1,$$

lo cual implica que

$$v_{13} \leq \sum_{s \in [0, 1]} \gamma_s^0 s^2 = \frac{1}{s_0} s_0^2 = s_0. \quad (3.3)$$

Haciendo tender s_0 a cero en (3.3), se obtiene $v_{13} \leq 0$. Por lo tanto, $v^D(\pi^{13}) = 0$. Por otro lado, $v^D(\pi^{13}) = 0$ si y sólo si

$$\sum_{t \in [0, 1]} \lambda_t t = \sum_{s \in [0, 1]} \gamma_s s^2 \text{ para todo } \bar{\theta} = (\lambda, \gamma) \in \Lambda_8.$$

Pero, si $\bar{\theta} \in \Lambda_{13}$,

$$0 = \sum_{t \in [0, 1]} \lambda_t t,$$

entonces,

$$0 = \sum_{s \in [0, 1]} \gamma_s s^2 \text{ para toda } \bar{\theta} = (\lambda, \gamma) \in \Lambda_{13}.$$

Luego, las posibles soluciones óptimas, del problema D_{13} , son de la forma $\bar{\theta}^0 = (\lambda^0; \gamma^0)$, donde

$$\lambda^0, \gamma^0 \in \mathbb{R}_+^{([0, 1])}, \quad \lambda_0^0, \gamma_0^0 \in \mathbb{R}_+$$

y

$$\lambda_t^0 = 0 = \gamma_s^0 \text{ para todo } t, s \in (0, 1],$$

pero $\bar{\theta}^0 \notin \Lambda_{13}$, de lo contrario

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo cual es imposible. Así, $\Lambda_{13}^* = \emptyset$. Se concluye que $\pi^{13} \in \widehat{\Pi}_6^2$. \square

En el teorema siguiente se caracteriza a los parámetros que tienen problema primal soluble y problema dual inconsistente.

Teorema 3.1. $\pi \in \widehat{\Pi}_5^1$ si y sólo si $c \notin M$ y F^* es no acotado.

DEMOSTRACIÓN. \Rightarrow] Supongamos que $\pi \in \widehat{\Pi}_5^1$ y que $c \in M$ o F^* es acotado. Primero, si $c \in M$, se tiene que $\Lambda \neq \emptyset$, en contradicción con la hipótesis de que el parámetro π tiene problema dual inconsistente. Segundo, si F^* es acotado, entonces $\pi \in \Pi_S^P \cap \Pi_{IC}^D$ y nuevamente tenemos una contradicción, ya que, $\Pi_S^P \cap \Pi_{IC}^D = \emptyset$ (véase sección 1.3).

[\Leftarrow Si $c \notin M$ y F^* es no acotado, entonces

$$\Lambda = \emptyset \text{ y } F^* \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $\pi \in \widehat{\Pi}_5^1$. \square

Observación 3.1. $\widehat{\Pi}_5^i \subset \Pi_5$ para $i = 1, 2$. Entonces, por Corolario 1.2,

$$c \notin M, \quad (0_n, 1)' \notin \text{cl } N \text{ y } (\{c\} \times \mathbb{R}) \cap \text{cl } N \neq \emptyset,$$

es una condición necesaria para que $\pi \in \widehat{\Pi}_5^i$ para $i = 1, 2$, respectivamente.

En el Ejemplo 3.2, $c^{11} \notin M_{11}$, $(0_n, 1)' \notin \text{cl } N_{11}$. Además,

$$(\{c^{11}\} \times \mathbb{R}) \cap \text{cl } N_{11} \neq \emptyset,$$

pero $\pi^{11} \notin \widehat{\Pi}_5^1$. Esto muestra que

$$c \notin M, \quad (0_n, 1)' \notin \text{cl } N \quad \text{y} \quad (\{c\} \times \mathbb{R}) \cap \text{cl } N \neq \emptyset,$$

no es una condición suficiente para que $\pi \in \widehat{\Pi}_5^1$. Por otro lado, en el Ejemplo 3.1,

$$c^{10} \notin M_{10}, \quad (0_n, 1)' \notin \text{cl } N_{10}, \quad \text{y} \quad (\{c^{10}\} \times \mathbb{R}) \cap \text{cl } N_{10} \neq \emptyset,$$

pero $\pi^{10} \notin \widehat{\Pi}_5^2$. Esto muestra que

$$c \notin M, \quad (0_n, 1)' \notin \text{cl } N \quad \text{y} \quad (\{c\} \times \mathbb{R}) \cap \text{cl } N \neq \emptyset$$

no es una condición suficiente para que $\pi \in \widehat{\Pi}_5^2$.

En el teorema siguiente se caracteriza a los parámetros que tienen problema primal inconsistente y problema dual soluble.

Teorema 3.2. $\pi \in \widehat{\Pi}_6^1$ si y sólo si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{cl } N$ y Λ^* es no acotado.

DEMOSTRACIÓN. \Rightarrow] Supongamos que $\pi \in \widehat{\Pi}_6^1$ y que $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{cl } N$ o Λ^* es acotado. Primero, si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{cl } N$, se tiene $F \neq \emptyset$, en contradicción con la hipótesis de que el parámetro π tiene problema primal inconsistente. Segundo, si Λ^* es acotado, entonces

$$\pi \in \Pi_{IC}^P \cap \Pi_S^D$$

y nuevamente tenemos una contradicción, pues $\Pi_{IC}^P \cap \Pi_S^D = \emptyset$ (véase sección 1.3).

[\Leftarrow Si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{cl } N$ y Λ^* es no acotado, entonces

$$F = \emptyset \quad \text{y} \quad \Lambda^* \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $\pi \in \widehat{\Pi}_6^1$.

□

Observación 3.2. $\widehat{\Pi}_6^i \subset \Pi_6$ para $i = 1, 2$. Entonces, por el Corolario 1.4,

$$(0_n, 1)' \in \text{cl } N, c \in M \text{ y } \{c\} \times \mathbb{R} \not\subseteq K,$$

es una condición necesaria para que $\pi \in \widehat{\Pi}_6^i$ para $i = 1, 2$, respectivamente.

En el Ejemplo 3.4,

$$(0_n, 1)' \in \text{cl } N_{13}, c^{13} \in M_{13} \text{ y } \{c^{13}\} \times \mathbb{R} \not\subseteq K_{13},$$

pero $\pi^{13} \notin \widehat{\Pi}_6^1$. Esto muestra que

$$(0_n, 1)' \in \text{cl } N, c \in M \text{ y } \{c\} \times \mathbb{R} \not\subseteq K,$$

no es condición suficiente para que $\pi \in \widehat{\Pi}_6^1$. Por otro lado, en el Ejemplo 3.3,

$$(0_n, 1)' \in \text{cl } N_{12}, c^{12} \in M_{12} \text{ y } \{c^{12}\} \times \mathbb{R} \not\subseteq K_{12},$$

pero $\pi^{12} \notin \widehat{\Pi}_6^2$. Esto muestra que

$$(0_n, 1)' \in \text{cl } N, c \in M \text{ y } \{c\} \times \mathbb{R} \not\subseteq K,$$

no es una condición suficiente para que $\pi \in \widehat{\Pi}_6^2$.

En la Tabla 2, de la sección 1.2, se tiene una caracterización de los conjuntos Π_2 , Π_3 y Π_4 . Así, con lo presentado en esta sección y la sección 1.4, se ha completado el estudio de los conjuntos que se generan con la segunda partición refinada primal-dual. En particular, en esta sección y la sección 1.4., se demostró, que los conjuntos $\widehat{\Pi}_1^1$, $\widehat{\Pi}_1^2$, $\widehat{\Pi}_1^3$, $\widehat{\Pi}_1^4$, $\widehat{\Pi}_5^1$, $\widehat{\Pi}_5^2$, $\widehat{\Pi}_6^1$ y $\widehat{\Pi}_6^2$, son no vacíos. Si $|T| < \infty$ y se considera a T equipado con la topología discreta, entonces T puede considerarse como un espacio topológico compacto de Hausdorff, de donde, cualquier problema en el caso finito puede considerarse como un problema de programación lineal semi-infinita continua. Por lo tanto, con los ejemplos presentados en [11, Proposición 4.2] se muestra que Π_2 , Π_3 y Π_4 son no vacíos.

3.2. Estabilidad

En esta sección se estudia el interior de los conjuntos $\widehat{\Pi}_1^1, \widehat{\Pi}_1^2, \widehat{\Pi}_1^3, \widehat{\Pi}_1^4, \widehat{\Pi}_5^1, \widehat{\Pi}_5^2, \widehat{\Pi}_6^1$ y $\widehat{\Pi}_6^2$, resultantes de la segunda partición refinada primal-dual. Además, se estudia si los conjuntos o el interior de ellos son densos en otros conjuntos de la partición primal-dual.

A lo largo de esta sección se hará un contraste entre los resultados obtenidos para los conjuntos generados con la primera partición refinada primal dual y la segunda partición refinada primal-dual.

En [10] se muestra que todo parámetro con ambos problemas acotados, el primal y el dual, puede ser aproximado por una sucesión de parámetros que tienen a los dos problemas solubles con conjunto optimal acotado. Ahora, como cada problema soluble con conjunto optimal acotado, es en particular soluble, se obtiene el resultado siguiente.

Teorema 3.3. $\widehat{\Pi}_1^1$ es denso en Π_1 .

DEMOSTRACIÓN. Como $\Pi_1^1 \subseteq \widehat{\Pi}_1^1$ y Π_1^1 es denso en Π_1 ([véase 10, Teorema 3.3]), se sigue que $\widehat{\Pi}_1^1$ es denso en Π_1 . □

En [10] se muestra que los conjuntos $\Pi_1^i, i = 2, 3, 4$, considerados en la primera partición refinada primal-dual, no son cerrados ni abiertos. En el teorema siguiente se muestra que lo mismo se sigue cumpliendo para los conjuntos análogos considerados en la segunda partición refinada primal-dual. Además, se muestra que el conjunto $\widehat{\Pi}_1^1$ no es cerrado ni abierto, a diferencia de lo mostrado en [10], donde Π_1^1 es abierto.

Teorema 3.4. $\widehat{\Pi}_1^i, i = 1, 2, 3, 4$ no es cerrado ni abierto.

DEMOSTRACIÓN. Como $\widehat{\Pi}_1^1, \widehat{\Pi}_1^2, \widehat{\Pi}_1^3, \widehat{\Pi}_1^4$ son conos, con la tripleta nula $\pi = (\mathbf{0}_n, 0, \mathbf{0}_n)$ perteneciendo a su frontera, sólo $\widehat{\Pi}_1^1$ puede ser

cerrado, ya que la tripleta nula está en $\widehat{\Pi}_1^1$.

$\widehat{\Pi}_1^1$ no es cerrado. En efecto, consideremos la sucesión $\{\pi^r\}$ en $\widehat{\Pi}_1^1$, donde $\pi^r = (\frac{1}{r}\mathbf{e}_1, 0, \mathbf{e}_1)$. Obviamente

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \pi^r = (\mathbf{0}_n, 0, \mathbf{e}_1),$$

pero la tripleta $(\mathbf{0}_n, 0, \mathbf{e}_1) \in \Pi_2$. Por lo tanto, $\widehat{\Pi}_1^1$ no es cerrado.

$\widehat{\Pi}_1^1$ no es abierto. En efecto, consideremos la tripleta nula $\pi = (\mathbf{0}_n, 0, \mathbf{0}_n)$ en $\widehat{\Pi}_1^1$. Sea $r > 0$ y hagamos $\pi^r = (\mathbf{0}_n, 0, \frac{r}{2}\mathbf{e}_1)$. Es sencillo ver, para cada $r > 0$, que $\pi^r \in \Pi_2$ y $d(\pi, \pi^r) = \frac{r}{2} < r$. Se concluye que $\widehat{\Pi}_1^1$ no es abierto.

$\widehat{\Pi}_1^i$, $i = 2, 3, 4$ no es abierto. En efecto, como $\widehat{\Pi}_1^i \subset \Pi_1$, entonces $\text{int } \widehat{\Pi}_1^i \subset \text{int } \Pi_1$, como $\text{int } \Pi_1 = \Pi_1^1$ [10, Lema 2.4] y $\Pi_1^1 \subset \widehat{\Pi}_1^1$, se sigue que

$$\text{int } \widehat{\Pi}_1^i \subset \widehat{\Pi}_1^1, \quad (3.4)$$

la contención anterior sólo es posible si $\text{int } \widehat{\Pi}_1^i = \emptyset$. En efecto, si $\pi \in \text{int } \widehat{\Pi}_1^i$, entonces $\pi \in \widehat{\Pi}_1^i$, además, por (3.4) $\pi \in \widehat{\Pi}_1^1$. Luego $\pi \in \widehat{\Pi}_1^i \cap \widehat{\Pi}_1^1$, contrario a que $\widehat{\Pi}_1^i \cap \widehat{\Pi}_1^1 = \emptyset$. Ahora, como $\widehat{\Pi}_1^i \neq \emptyset$, se sigue que $\widehat{\Pi}_1^i$ no es abierto, puesto que se acaba de mostrar que $\Pi_1^i \neq \text{int } \Pi_1^i$. □

Corolario 3.1. *int $\widehat{\Pi}_1^i$, $i = 2, 3, 4$, es vacío.*

En [10] se muestra que $\text{int } \Pi_1^i$, $i = 2, 3, 4$ es vacío. El corolario anterior muestra que el resultado se cumple para los conjuntos análogos, considerados en la segunda partición refinada primal-dual. Además, en [10], se muestra que $\text{int } \Pi_1^1 \neq \emptyset$. En el teorema siguiente se muestra que lo mismo se cumple para su conjunto análogo en la nueva partición.

Teorema 3.5. *int $\widehat{\Pi}_1^1 \neq \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\Pi_1^1 \subset \widehat{\Pi}_1^1$, se sigue que

$$\text{int } \Pi_1^1 \subset \text{int } \widehat{\Pi}_1^1. \quad (3.5)$$

Puesto que, $\text{int } \Pi_1^1 = \Pi_1^1$ (véase [10, Teorema 3.3 (i)]) y $\Pi_1^1 \neq \emptyset$ (véase Teorema 1.3), concluimos, por (3.5), que $\text{int } \widehat{\Pi}_1^1 \neq \emptyset$. \square

En [10, Teorema 3.3] se muestra que Π_1^1 es abierto y denso en Π_1 , además, que $\Pi_1^1 = \text{int } \Pi_1^1$. De lo anterior, se tiene que también $\text{int } \Pi_1^1$ es denso en Π_1 . En el teorema siguiente se muestra que $\text{int } \widehat{\Pi}_1^1$ es denso en Π_1 . Así, aunque $\widehat{\Pi}_1^1 \neq \text{int } \widehat{\Pi}_1^1$, porque $\widehat{\Pi}_1^1$ no es abierto (Teorema 3.4), se tiene que $\widehat{\Pi}_1^1$ e $\text{int } \widehat{\Pi}_1^1$ son densos en Π_1 , análogo a la obtenido en [10].

Teorema 3.6. *int $\widehat{\Pi}_1^1$ es denso en Π_1 .*

DEMOSTRACIÓN. Como $\Pi_1^1 \subset \widehat{\Pi}_1^1 \subset \Pi_1$, se sigue que

$$\text{int } \Pi_1^1 \subset \text{int } \widehat{\Pi}_1^1 \subset \text{int } \Pi_1,$$

de donde

$$\overline{\text{int } \Pi_1^1} \subset \overline{\text{int } \widehat{\Pi}_1^1} \subset \overline{\text{int } \Pi_1}.$$

Puesto que $\text{int } \Pi_1^1$ e $\text{int } \Pi_1$ son densos en Π_1 , se concluye que $\overline{\text{int } \widehat{\Pi}_1^1} = \Pi_1$. Por lo tanto, $\text{int } \widehat{\Pi}_1^1$ es denso en Π_1 . \square

Con el toerema siguiente se obtiene una caracterización del interior del conjunto de parámetros que cuentan con ambos problemas, el primal y el dual, solubles.

Teorema 3.7. *int $\widehat{\Pi}_1^1 = \Pi_1^1$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\Pi_1^1 = \text{int } \Pi_1^1 \subset \text{int } \widehat{\Pi}_1^1$, basta demostrar que

$$\text{int } \widehat{\Pi}_1^1 \setminus \Pi_1^1 = \emptyset.$$

Supongamos lo contrario, es decir, $\text{int } \widehat{\Pi}_1^1 \cap (\Pi_1^1)^c \neq \emptyset$. Entonces existe $\pi \in \text{int } \widehat{\Pi}_1^1$ tal que, $\pi \notin \Pi_1^1$, de donde $\mathbf{c} \notin \text{int } M$ o π no

satisface la condición de Slater.

Primero, $\mathbf{c} \notin \text{int } M$, implica $\mathbf{c} \in M \setminus \text{int } M$ ya que, por hipótesis, $\pi \in \text{int } \widehat{\Pi}_1^1$, pero $\text{int } \widehat{\Pi}_1^1 \subset \widehat{\Pi}_1^1 \subset \Pi_1$. Además, $\mathbf{c} \notin \text{int } M$, implica que $M \neq \mathbb{R}^n$. De las dos implicaciones anteriores, se deduce que existe una sucesión $\{\mathbf{c}^r\}$ en $\mathbb{R}^n \setminus M$ tal que,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{c}^r = \mathbf{c}.$$

Si hacemos $\pi_r := (\mathbf{a}, b, \mathbf{c}^r)$, se tiene una sucesión de parámetros, $\{\pi^r\}$ en Π_{IC}^D tal que,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \pi^r = \pi.$$

Lo cual es una contradicción puesto que, por hipótesis, $\pi \in \text{int } \widehat{\Pi}_1^1$.

Segundo, si π no satisface la condición de Slater, entonces $\pi \notin \text{int } \Pi_C^P$ (Lema 2.1). Ahora, como por hipótesis $\pi \in \text{int } \widehat{\Pi}_1^1$, se tiene $\pi \in \Pi_C^P$. Así, el que π no satisfaga la condición de Slater y la hipótesis, implican que $\pi \in \text{front } \Pi_C^P$, entonces existe una sucesión $\{\pi^r\}$ en Π_{IC}^P tal que,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \pi^r = \pi.$$

Lo cual es una contradicción puesto que, por hipótesis, $\pi \in \text{int } \widehat{\Pi}_1^1$.

Se concluye que $\text{int } \widehat{\Pi}_1^1 \setminus \Pi_1^1 = \emptyset$. Así, $\text{int } \widehat{\Pi}_1^1 = \Pi_1^1$. □

Del teorema anterior y el Teorema 1.4, se tiene que $\pi \in \text{int } \widehat{\Pi}_1^1$ si sólo si $\mathbf{c} \in \text{int } M$ y π satisface la condición de Slater.

Observación 3.3. Como $\text{int } \Pi_5 = \emptyset$ e $\text{int } \Pi_6 = \emptyset$ (Teorema 2.9 y Teorema 2.10), se sigue que

$$\text{int } \widehat{\Pi}_j^i = \emptyset \quad \text{para } i = 1, 2 \quad \text{y } j = 5, 6.$$

En [11] se presenta una caracterización del interior de los conjuntos Π_2 , Π_3 y Π_4 , así como el estudio de la densidad de su interior en los respectivos conjuntos. Con esto y lo presentado en esta sección se ha completado el estudio del interior de los conjuntos que se generan con la segunda partición refinada primal-dual.

Capítulo 4

Caso de coeficientes acotados

4.1. Partición primal-dual

En esta sección se considera el caso de coeficientes acotados, es decir, el problema primal que se considera es:

$$P : \quad \inf \mathbf{c}' \mathbf{x} \\ \text{s.a. } \mathbf{a}'_t \mathbf{x} \geq b_t, \quad t \in T,$$

donde \mathbf{c} , \mathbf{x} son elementos de \mathbb{R}^n , T es un conjunto diferente del vacío y las funciones \mathbf{a} y b son acotadas.

Si se considera al espacio de parámetros con \mathbf{a} y b funciones cualesquiera y T un conjunto arbitrario, se obtiene una partición de este espacio al considerar a los parámetros con coeficientes \mathbf{a} y b acotados, y \mathbf{a} o b no acotados. Los parámetros en los que \mathbf{a} y b son funciones continuas y T es un espacio topológico compacto de Hausdorff, también son parámetros con funciones \mathbf{a} y b acotadas. En el diagrama siguiente se muestra una interpretación de la nueva partición, aunque éste no tiene relación con la representación topológica del espacio.

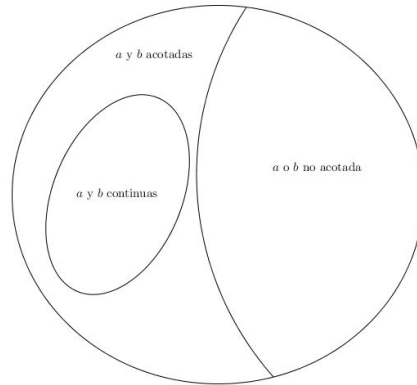


Figura 4.1: Conjunto factible de P

El diagrama de la Figura 4.1 muestra que el estudio y los resultados obtenidos para los conjuntos que se generan con la primera partición refinada primal-dual [11] y la segunda partición refinada primal-dual (sección 1.3 y capítulo 3), se ha realizado para un subconjunto del conjunto de parámetros con \mathbf{a} y b acotadas. Por otro lado, en la sección 2.2, se obtuvo que el interior de algunos conjuntos de la partición primal-dual considerada en el caso continuo son vacíos, a diferencia de lo que se obtuvo en la sección 2.3, donde se considera el caso general. Por ejemplo, $\text{int } \Pi_4 = \emptyset$ en el caso continuo, pero $\text{int } \Pi_4 \neq \emptyset$ en el caso general. Una pregunta se sigue de manera natural ¿cómo tienen que ser \mathbf{a} y b para que $\text{int } \Pi_4 \neq \emptyset$?, es decir, ¿ \mathbf{a} y b necesitan ser acotadas pero no continuas o necesariamente \mathbf{a} o b son no acotadas?

En [13] se ha trabajado en el caso general, pero sólo se han estudiado los conjuntos que se generan al considerar la consistencia y la acotación del valor optimal de los problemas, lo cual puede interpretarse como una extensión del estudio que se realiza en [11] en el caso continuo. Por otro lado, en [10] se han estudiado los conjuntos que se generan al considerar la consistencia, la acotación del valor optimal y la acotación del conjunto optimal

de los problemas, pero sólo se ha hecho en el caso continuo.

En este capítulo se desarrolla, en el caso de coeficientes acotados, la teoría que se estudió en las secciones 1.2, 1.3, 2.2 y 2.3. Esto es, se desarrolla el estudio de las particiones primal-dual y primera partición refinada primal-dual pero en el caso cuando las funciones \mathbf{a} y \mathbf{b} son acotadas. También se estudia el interior de los conjuntos, pero sólo de los que se generan con la partición primal-dual. Con esto se tiene un estudio de una clase de problemas más grande que la clase considerada en el caso continuo pero no tanto como la que se considera en el caso general.

La partición primal-dual del espacio de parámetros presentada en la Sección 1.2 se retoma en esta sección y se presenta nuevamente en la Tabla 5 para conveniencia del lector.

$D \setminus P$	IC	A	NA
IC	Π_4	Π_5	Π_2
A	Π_6	Π_1	
NA	Π_3		

Tabla 5

Las caracterizaciones de los conjuntos de la partición primal-dual, presentadas en este trabajo en la Sección 1.2, son ciertas en el caso general [11] y en el de coeficientes acotados. En el teorema siguiente se resumen tales caracterizaciones.

Teorema 4.1. *Sea $\pi = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ un parámetro con coeficientes acotados. Entonces*

- (i) $\pi \in \Pi_1$ si y sólo si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl N$ y $\mathbf{c} \in M$;
- (ii) $\pi \in \Pi_2$ si y sólo si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl K$ y $(\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R}) \cap cl N = \emptyset$;
- (iii) $\pi \in \Pi_3$ si y sólo si $\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R} \subset N$;
- (iv) $\pi \in \Pi_4$ si y sólo si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in cl N$ y $\mathbf{c} \notin M$;
- (v) $\pi \in \Pi_5$ si y sólo si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin cl N$ y $(\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R}) \cap cl N \neq \emptyset$;
- (vi) $\pi \in \Pi_6$ si y sólo si $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in cl N$, $\mathbf{c} \in M$ y $\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R} \not\subset N$.

4.2. Estabilidad primal-dual

En el teorema siguiente se muestra que la caracterización del interior de los conjuntos que se generan con la partición primal-dual es similar a la caracterización presentada en el caso continuo. Sin embargo, en este nuevo caso la condición de Slater es sustituida por la condición fuerte de Slater, debido a que en el caso de coeficientes acotados hay parámetros que satisfacen la condición fuerte de Slater, pero no la condición de Slater (véase Ejemplo 4.4).

Teorema 4.2. *Sea $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c})$ un parámetro con coeficientes acotados. Entonces*

(i) $\pi \in \text{int } \Pi_1$ si y sólo si π satisface la condición fuerte de Slater y $\mathbf{c} \in \text{int } M$.

(ii) $\pi \in \text{int } \Pi_2$ si y sólo si existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que,

$$\mathbf{c}'\mathbf{y} < 0 \text{ y } \mathbf{a}_t'\mathbf{y} > 0 \text{ para todo } t \in T.$$

(iii) $\pi \in \text{int } \Pi_3$ si y sólo si $(\mathbf{0}_n, 1)' \in \text{int } N$.

(iv) $\text{int } \Pi_i = \emptyset$, para $i = 4, 5, 6$.

La demostración del teorema anterior se sigue de los resultados presentados en la Sección 2.2 y la Sección 2.3, considerando, también, la observación siguiente.

Observación 4.1. *Si \mathbf{a} y b son acotadas, entonces*

$$O^+ (\text{cl } G) = \{\mathbf{0}_{n+1}\}.$$

Notemos que en el caso de coeficientes acotados,

$$\pi \in \text{int } \Pi_3 \text{ y } M \neq \mathbb{R}^n$$

es imposible, ya que de lo contrario $(\mathbf{0}_n, 1)' \in O^+ (\text{cl } G)$ (véase Teorema 2.13), lo cual es imposible debido a que, en este caso,

$$O^+ (\text{cl } G) = \{\mathbf{0}_{n+1}\}.$$

De la misma manera se obtiene que $\text{int } \Pi_4 = \emptyset$.

4.3. Primera partición refinada primal-dual

En el Teorema 1.3 se demuestra que los conjuntos Π_1^i , $i = 1, 2, 3, 4$ son no vacíos en el caso continuo. Ahora, como el caso continuo es un caso particular del caso de coeficientes acotados, el mismo teorema sirve para mostrar que los conjuntos Π_1^i , $i = 1, 2, 3, 4$, son no vacíos en este nuevo caso.

La caracterización del conjunto Π_S^P presentada en el Lema 1.3 sigue siendo cierta en el caso de coeficientes acotados. Ésta es retomada en el corolario siguiente.

Corolario 4.1. $\pi \in \Pi_S^P$, si y sólo si

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{cl } K \quad \text{y } \mathbf{c} \in \text{int } M.$$

En el ejemplo siguiente, $\mathbf{c}^{14} \in M_{14}$, π^{14} satisface la condición de Slater, sin embargo, el problema dual asociado al parámetro π^{14} es no soluble. Con esto se muestra que la caracterización presentada en el Lema 1.3 del conjunto Π_S^D es falsa en el caso de coeficientes acotados. A saber, es falso que $\pi \in \Pi_S^D$ si y sólo si $\mathbf{c} \in M$ y π satisface la condición de Slater.

Ejemplo 4.1. Considérese $T = [0, 1]$ y $n = 2$. Definamos al parámetro $\pi^{14} := (\mathbf{a}^{14}, b^{14}, \mathbf{c}^{14})$ tal que, $\mathbf{a}_t^{14} := (t, 1)$ para todo $t \in T$,

$$b_t^{14} := \begin{cases} 1, & \text{si } t = 0, \\ 0, & \text{si } 0 < t < 1, \\ -1 & \text{si } t = 1, \end{cases}$$

y $\mathbf{c}^{14} := (1/3, 1)$. En [12] se muestra que $\mathbf{c}^{14} \in M_{14}$ y π^{14} satisface la condición de Slater, sin embargo, el problema dual es no soluble.

□

En el ejemplo anterior, el parámetro tiene problema dual no soluble, lo cual quiere decir que el conjunto optimal del problema

dual es vacío y, por lo tanto, acotado. Además, el parámetro satisface la condición fuerte de Slater, en efecto, para $\epsilon = \frac{1}{2}$ el punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ es un punto fuerte de Slater. De lo anterior se formula la conjetura siguiente.

Conjetura 4.1. *Si $\mathbf{c} \in M$ y π satisface la condición fuerte de Slater, entonces Λ^* es acotado.*

Si Λ^* es acotado, se pueden tener dos casos. El primero, el problema dual es no soluble, es decir, su conjunto optimal es vacío. El segundo, el problema dual es soluble pero tiene conjunto optimal acotado.

Para resolver la conjetura anterior se demuestra antes un resultado análogo al Teorema de Carathéodory para combinaciones lineales positivas [14, Corolario 17.1.2].

El Teorema de Carathéodory garantiza que toda combinación lineal positiva en \mathbb{R}^n puede ser expresada como combinación lineal positiva de a lo más n elementos linealmente independientes, pero no proporciona información sobre la relación que guarda la suma original de los coeficientes, con la suma al considerar n elementos. En el lema siguiente se muestra que toda combinación lineal positiva puede ser expresada como combinación del mismo tipo con $n + 1$ elementos y que las sumas de los coeficientes son iguales.

Lema 4.1. *Si $\sum_{t \in T} \lambda_t \mathbf{a}_t = \mathbf{c}$ con $\lambda_t \geq 0$ para todo $t \in T$, entonces*

$$\sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i \mathbf{a}_{t_i} = \mathbf{c} \quad y \quad \sum_{t \in T} \lambda_t = \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\sum_{t \in T} \lambda_t \mathbf{a}_t = \mathbf{c}$. El caso $\sum_{t \in T} \lambda_t = 0$ es trivial.

Ahora, si $\sum_{t \in T} \lambda_t = \lambda > 0$, entonces

$$\sum_{t \in T} \frac{\lambda_t}{\lambda} \mathbf{a}_t = \frac{\mathbf{c}}{\lambda}$$

y

$$\sum_{t \in T} \frac{\lambda_t}{\lambda} = 1.$$

Por el Teorema de Carathéodory, para combinaciones convexas ([14, Teorema 17.1]),

$$\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \mathbf{a}_{t_i} = \frac{\mathbf{c}}{\lambda},$$

donde

$$\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i = 1.$$

Multiplicando por λ las últimas dos igualdades se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda \beta_i \mathbf{a}_{t_i} = \mathbf{c} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda \beta_i = \lambda.$$

Si hacemos $\gamma_i = \lambda \beta_i$, se concluye que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i \mathbf{a}_{t_i} = \mathbf{c} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i = \sum_{t \in T} \lambda_t.$$

□

Teorema 4.3. *Sea π un parámetro, con $|T| \geq n + 2$. Si $\mathbf{c} \in M$ y π satisface la condición fuerte de Slater, entonces Λ^* es acotado con la norma $\|\cdot\|_1$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathbf{c} \in M$, se debe cumplir que $\pi \in \Pi_C^D$. Además, ya que π satisface la condición fuerte de Slater, $\pi \in \Pi_C^P$. Así, $\pi \in \Pi_1$, en particular, $\pi \in \Pi_A^D$.

Ahora, si $\Lambda^* = \emptyset$, la conclusión es trivial. Supongamos que $\Lambda^* \neq \emptyset$ y Λ^* es no acotado. Sea $\{\lambda^m\}$ en Λ^* tal que, $\sum_{t \in T} \lambda_t^m \rightarrow \infty$.

Como $\Lambda^* \subseteq \Lambda$ y, para cada m , λ^m está en Λ^* , se tiene

$$\sum_{t \in T} \lambda_t^m \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ v^D(\pi) \end{pmatrix}.$$

De la igualdad anterior se sigue que, para cada m , $\binom{\mathbf{c}}{v^D(\pi)}$ es una combinación lineal positiva de los elementos del conjunto

$$\left\{ \binom{\mathbf{a}_t}{b_t}, t \in T \right\}.$$

Por el lema anterior se tiene, para cada m ,

$$\sum_{i=1}^{n+2} \beta_i^m \binom{\mathbf{a}_{t_i}^m}{b_{t_i}^m} = \binom{\mathbf{c}}{v^D(\pi)},$$

con

$$\sum_{i=1}^{n+2} \beta_i^m = \sum_{t \in T} \lambda_t^m.$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{n+2} \frac{\beta_i^m}{\sum_{i=1}^{n+2} \beta_i^m} \binom{\mathbf{a}_{t_i}^m}{b_{t_i}^m} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n+2} \beta_i^m} \binom{\mathbf{c}}{v^D(\pi)}. \quad (4.1)$$

Como las sucesiones $\left\{ \frac{\beta_i^m}{\sum_{i=1}^{n+2} \beta_i^m} \right\}$ y $\left\{ \binom{\mathbf{a}_{t_i}^m}{b_{t_i}^m} \right\}$ son acotadas, si hacemos $m \rightarrow \infty$ en (4.1), se tiene

$$\sum_{i=1}^{n+2} \beta_i \binom{\mathbf{a}_i}{b_i} = \binom{\mathbf{0}_n}{0}, \quad (4.2)$$

donde

$$\sum_{i=1}^{m+2} \beta_i = 1.$$

Entonces

$$\binom{\mathbf{0}_n}{0} \in cl \ conv \left\{ \binom{\mathbf{a}_t}{b_t} : t \in T \right\},$$

esto implica que la condición fuerte de Slater no se cumple (Teorema 2.1), lo cual es una contradicción con la hipótesis. \square

Corolario 4.2. Si Λ^* es no acotado con la norma $\|\cdot\|_1$ y $|T| \geq n+2$, entonces π no satisface la condición fuerte de Slater.

Observación 4.2. La acotación de Λ^* con la norma $\|\cdot\|_1$, implica la acotación con la norma $\|\cdot\|_\infty$. En efecto, si existe $M \in \mathbb{R}_{++}$ tal que, $\|\lambda\|_1 \leq M$ para toda $\lambda \in \Lambda^*$, entonces

$$M \geq \|\lambda\|_1 = \sum_{t \in T} \lambda_t \geq \max_{t \in T} \lambda_t = \|\lambda\|_\infty.$$

Se sigue que Λ^* es acotado con la norma $\|\lambda\|_\infty$.

Observación 4.3. Si $|T| < n+2$, se tiene un parámetro en el caso finito.

El teorema anterior garantiza, bajo ciertas condiciones, que el conjunto de las normas de los puntos optimales tiene supremo. En el teorema siguiente se muestra que si $\mathbf{c} = \mathbf{0}_n$, entonces el ínfimo del conjunto optimal es cero.

Teorema 4.4. Sea $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c})$ un parámetro con $\mathbf{c} = \mathbf{0}_n$ y $|T| \geq n+2$. Si $\mathbf{c} \in \text{int } M$ y π satisface la condición fuerte de Slater, entonces $\Lambda^* = \{\lambda \equiv 0\}$.

DEMOSTRACIÓN. Primero, como $\mathbf{c} \in M$ y π satisface la condición fuerte de Slater, por el Teorema 4.3, Λ^* es acotado. Por otro lado, puesto que el problema primal es consistente (Observación 1.5) y $\mathbf{c} \in \text{int } M$, se tiene que $v^P(\pi) = v^D(\pi)$ ([9, Teorema 8.1]). Ya que $\mathbf{c} = \mathbf{0}_n$, se concluye que $v^D(\pi) = 0$.

Ahora, supongamos que $\Lambda^* = \emptyset$. En este caso, la función $\lambda \equiv 0$ es solución óptima, lo cual contradice la suposición.

Como $\Lambda^* \neq \emptyset$, sea $\lambda \in \Lambda^*$ y supongamos que $\sum_{t \in T} \lambda_t > 0$. Puesto que $\mathbf{c} = \mathbf{0}_n$, se cumple

$$\sum_{t \in T} \lambda_t \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\sum_{t \in T} \frac{\lambda_t}{\sum_{t \in T} \lambda_t} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\sum_{t \in T} \frac{\lambda_t}{\sum_{t \in T} \lambda_t} = 1,$$

se sigue que

$$\mathbf{0}_{n+1} \in \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix} : t \in T \right\} \subset \text{cl conv} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix} : t \in T \right\},$$

de donde π no satisface la condición fuerte de Slater, lo cual es una contradicción con la hipótesis, por lo tanto,

$$\sum_{t \in T} \lambda_t = 0.$$

Puesto que λ fue arbitraria, se concluye que $\Lambda^* = \{\lambda \equiv 0\}$.

□

A continuación se presenta una demostración alternativa del teorema anterior.

DEMOSTRACIÓN. La primera parte de la demostración anterior muestra que Λ^* es acotado, $\Lambda^* \neq \emptyset$ y $v^D(\pi) = 0$.

Ahora, supongamos que existe $\lambda \in \Lambda^*$ tal que, $\sum_{t \in T} \lambda_t > 0$. Si $\delta > 0$, se tiene $\delta\lambda \in \Lambda^*$. En efecto, como $\lambda \in \Lambda^*$ y $\mathbf{c} = \mathbf{0}_n$ se cumple

$$\sum_{t \in T} \lambda_t \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde

$$\sum_{t \in T} \delta\lambda_t \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix} = \delta \sum_{t \in T} \lambda_t \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, $\|\delta\lambda\|_1 = \delta\|\lambda\|_1 > 0$. Si $\delta \rightarrow \infty$, también $\|\delta\lambda\|_1 \rightarrow \infty$. Esto implica que Λ^* es no acotado, lo cual es una contradicción con el Teorema 4.3.

□

El Teorema 4.4 muestra explícitamente cuál es ínfimo del conjunto de normas de los puntos optimales cuando $\mathbf{c} = \mathbf{0}_n$, a saber,

$$\inf \{\|\lambda\|_1 : \lambda \in \Lambda^*\} = 0.$$

En el teorema siguiente sólo se demuestra que cuando $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}_n$ el ínfimo es estrictamente positivo.

Teorema 4.5. *Sea $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c})$ un parámetro con $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}_n$ tal que, $\mathbf{c} \in M$ y π satisface la condición fuerte de Slater, entonces*

$$\inf \{\|\lambda\|_1 : \lambda \in \Lambda^*\} > 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que

$$\inf \{\|\lambda\|_1 : \lambda \in \Lambda^*\} = 0.$$

Entonces existe $\{\lambda^m\}$ en Λ^* tal que,

$$\|\lambda^m\|_1 \rightarrow 0,$$

es decir,

$$\sum_{t \in T} \lambda_t^m \rightarrow 0.$$

Como $\lambda^m \in \Lambda^*$, para cada m , se cumple

$$\sum_{t \in T} \lambda_t^m \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ v^D(\pi) \end{pmatrix}.$$

Por el Lema 4.1, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n+2} \gamma_{t_i}^m \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{t_i} \\ b_{t_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ v^D(\pi) \end{pmatrix} \text{ y } \sum_{i=1}^{n+2} \gamma_{t_i}^m = \sum_{t \in T} \lambda_t^m. \quad (4.3)$$

Ahora, ya que $\sum_{t \in T} \lambda_t^m \rightarrow 0$ y $\left\{ \begin{pmatrix} a_{t_i} \\ b_{t_i} \end{pmatrix} \right\}$ son sucesiones acotadas, haciendo $m \rightarrow \infty$ en (4.3), se tiene

$$\sum_{i=1}^{n+2} 0 \begin{pmatrix} \mathbf{a}_i \\ b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ v^D(\pi) \end{pmatrix}.$$

La última igualdad implica que $\mathbf{c} = \mathbf{0}_n$, lo cual es una contradicción con la hipótesis. □

Con los ejemplos a continuación se mostrará que las condiciones que caracterizan a los conjuntos que se generan con la primera partición refinada primal-dual, en el caso continuo, son falsas en el caso de coeficientes acotados. La condición de Slater será reemplazada por la condición fuerte de Slater, ya que, si un parámetro satisface la condición fuerte de Slater, también satisface la condición de Slater (Observación 1.6). En el caso continuo basta considerar la condición de Slater debido a que en ese caso, ambas condiciones son equivalentes.

En el ejemplo siguiente se retoma el parámetro del Ejemplo 4.1 para mostrar que $\mathbf{c} \in \text{int } M$ y que π satisfaga la condición fuerte de Slater no es condición suficiente para que $\pi \in \Pi_1^1$.

Ejemplo 4.2. El problema primal es:

$$\begin{aligned} P_{15} : \quad & \text{Min } \frac{1}{3}x_1 + x_2 \\ & x_2 \geq 1 \\ \text{s.a.} \quad & tx_1 + x_2 \geq 0, \quad t \in (0, 1), \\ & x_1 + x_2 \geq -1 \end{aligned}$$

En [12] se muestra que $\mathbf{c}^{15} \in \text{int } M_{15}$ y π^{15} satisface la condición de Slater (en particular, $(0, 2)'$ es un punto de Slater). Ahora, para $\epsilon = \frac{1}{2}$, $(0, 2)'$ es un punto fuerte de Salter. Lo anterior implicaría, en

el caso continuo, que $\pi^{15} \in \Pi_1^1$, sin embargo, en [12] se muestra que $v^p(\pi^{15}) = \frac{2}{3}$ y $F_{15}^* = \{(-1, 1)\}$, pero el problema dual

$$D_{15} : \quad \sup \lambda_0 - \lambda_1$$

$$s.a. \quad \lambda_0 \binom{0}{1} + \sum_{t \in (0,1)} \lambda_t \binom{t}{1} + \lambda_1 \binom{1}{1} = \binom{\frac{1}{3}}{1}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}.$$

es no soluble. Por lo cual, $\pi^{15} \notin \Pi_1^1$ en el caso de coeficientes acotados. □

Con el ejemplo siguiente se muestra que si $\pi \in \Pi_1^1$, no necesariamente $\mathbf{c} \in \text{int } M$ y π satisface la condición fuerte de Slater.

Ejemplo 4.3. Sea $\alpha > 0$ y considérese en \mathbb{R} el problema:

$$P_{16} : \quad \inf \alpha x_1$$

$$s.a. \quad tx_1 \geq t^2, \quad t \in (0, 1].$$

El problema es soluble, donde

$$F_{16} = \{x_1 : x_1 \geq 1\}, \quad v^p(\pi^{16}) = \alpha \quad \text{y} \quad F_{16}^* = \{x_1 = 1\}.$$

Además,

$$\mathbf{c}^{16} = \alpha \in \text{int } M_{16} = \text{int } (\text{cone } \{t : t \in (0, 1]\}) = \mathbb{R}_+^0.$$

Por otro lado, $(0, 0)' \in \text{cl conv } \{(t, t^2)' : t \in (0, 1]\}$, lo cual implica que π^{16} no satisface la condición fuerte de Slater (Teorema 2.1).

El problema dual es:

$$D_{16} : \quad \sup \sum_{t \in (0,1]} \lambda_t t^2$$

$$s.a. \quad \sum_{t \in (0,1]} \lambda_t t = \alpha$$

$$\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}.$$

La función

$$\lambda_t := \begin{cases} \alpha, & \text{si } t = 1, \\ 0, & \text{si, } 0 < t < 1, \end{cases}$$

es la única solución factible y optimal. Se concluye que D_{16} es soluble con conjunto optimal acotado. Así, se tiene un parámetro $\pi^{16} \in \Pi_1^1$, donde $\mathbf{c}^{16} \in \text{int } M_{16}$, pero π^{16} no satisface la condición fuerte de Slater.

□

En el corolario siguiente se presenta una condición suficiente para el conjunto Π_1^1 , en el caso particular de que se tenga un parámetro π con $\mathbf{c} = \mathbf{0}_n$. La demostración se sigue del Lema 1.3 y el Teorema 4.4.

Corolario 4.3. *Sea $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c})$ un parámetro con $\mathbf{c} = \mathbf{0}_n$ y $|T| \geq n + 2$. Si $\mathbf{c} \in \text{int } M$ y π satisface la condición fuerte de Slater, entonces $\pi \in \Pi_1^1$.*

Con el corolario anterior se tiene que el conjunto factible del sistema

$$\{\mathbf{a}_t \mathbf{x} \geq b_t, t \in T\},$$

(cuando $|T| \geq n + 2$) es diferente del vacío y acotado, si

$$\mathbf{0}_n \in \text{int cone } \{\mathbf{a}_t, t \in T\}$$

y existen

$$\epsilon > 0 \text{ y } \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$$

tales que,

$$\mathbf{a}_t \bar{\mathbf{x}} > b_t + \delta \text{ para todo } t \in T.$$

En efecto, si se cumplen las condiciones y se considera al parámetro $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{0}_n)$, entonces $\pi \in \Pi_1^1$. En particular, F^* es acotado y diferente del vacío. Como en este caso $F = F^*$ el resultado es inmediato.

Corolario 4.4. *Sea $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c})$ un parámetro con $b \equiv 0$ y $|T| \geq n + 2$. Si $\mathbf{c} \in M$ y π satisface la condición fuerte de Slater, entonces $\pi \in \Pi_1^1$.*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis $\mathbf{c} \in M$ y π satisface la condición fuerte de Slater. Entonces, por el Teorema 4.3, Λ^* es acotado. Ahora, ya que, $\mathbf{c} \in M$ se tiene $\Lambda \neq \emptyset$. Además, como $b \equiv 0$, toda solución factible del problema dual es optimal. Así, se tiene $\Lambda^* \neq \emptyset$. Lo anterior implica que $\pi \in \Pi_S^D$. Sólo resta demostrar que $\pi \in \Pi_S^P$. Esto último es equivalente a que $\mathbf{c} \in \text{int } M$, si el parámetro π tiene problema primal consistente (Corolario 4.1). Como por hipótesis $\mathbf{c} \in \text{int } M$, sólo hay que mostrar que π tiene problema primal consistente. Pero esto último se deduce de la hipótesis de que π satisface la condición fuerte de Slater.

□

El parámetro π^{16} del Ejemplo 4.3 sirve para mostrar que la condición presentada en el Teorema 1.4(ii), para el conjunto Π_1^2 , no sigue siendo válida en el caso de coeficientes acotados. En particular, se muestra que $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{cl } N$, $\mathbf{c} \in \text{int } M$ y que π no satisfaga la condición fuerte de Slater no es condición suficiente para que $\pi \in \Pi_1^2$. En efecto, $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{cl } N_{16}$ ya que el problema dual es consistente (Proposición 1.1), también, $\mathbf{c}^{16} \in \text{int } M_{16}$ y π^{16} no satisface la condición fuerte de Slater, pero $\pi^{16} \notin \Pi_1^2$.

El parámetro π^{15} del Ejemplo 4.2, también muestra que $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{cl } N$, $\mathbf{c} \in \text{int } M$ y que π no satisfaga la condición fuerte de Slater no es condición necesaria para que $\pi \in \Pi_1^2$. En efecto, $\pi^{15} \in \Pi_1^2$, y aunque $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{cl } N_{15}$ y $\mathbf{c}^{15} \in \text{int } M_{15}$, se tiene que π^{15} satisface la condición de Slater.

Con el ejemplo siguiente se muestra que la condición presentada en el Teorema 1.4(iii) no es válida en el caso de coeficientes acotados. En particular, se muestra que $\mathbf{c} \in M \setminus \text{int } M$ y el que π satisfaga la condición fuerte de Slater no es condición necesaria para que $\pi \in \Pi_1^3$.

Ejemplo 4.4. Considérese en \mathbb{R}^2 el problema:

$$P_{17} : \quad \inf x_1 + x_2$$

$$s.a \quad t^2 x_1 + t x_2 \geq t, \quad t \in (0, 1].$$

El conjunto factible se muestra en la Figura 4.2.

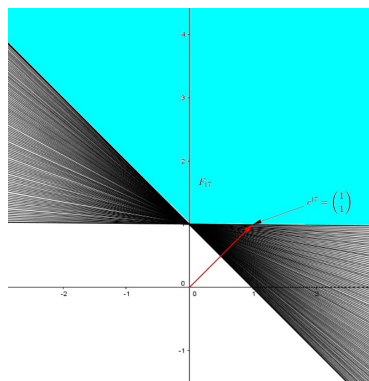


Figura 4.2: Conjunto factible de P_{17}

De la figura, se tiene,

$$v^P(\pi^{17}) = 1$$

y

$$F_{17}^* = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 = 1 - x_1 \text{ y } x_1 \leq 0 \right\}.$$

Así, el problema es soluble con conjunto optimal no acotado. Por otro lado, se cumple que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in cl \ conv \left\{ \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in (0, 1] \right\},$$

lo cual implica que π^{17} no satisface la condición fuerte de Slater (Teorema 2.1). Además, en la Figura 4.3 se muestra que

$$c^{17} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{17} \setminus int M_{17}.$$

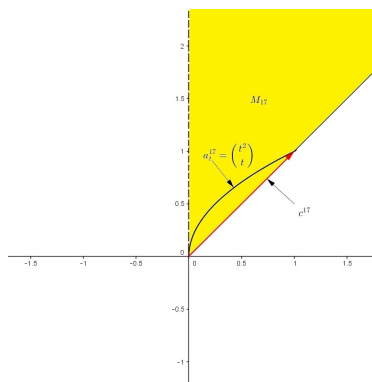


Figura 4.3: Cono M_{17} de P_{17}

El problema dual es:

$$\begin{aligned}
 D_{17} : \quad & \sup \sum_{t \in (0,1]} \lambda_t t \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_{t \in (0,1]} \lambda_t \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 & \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}.
 \end{aligned}$$

La función

$$\lambda = \begin{cases} 1, & \text{si } t = 1, \\ 0, & \text{si } 0 < t < 1, \end{cases}$$

es la única solución factible y optimal. Lo anterior implica que D_{17} es soluble con conjunto optimal acotado. Así, $\pi^{17} \in \Pi_1^3$ y aunque

$$\mathbf{c}^{17} \in M_{17} \setminus \text{int } M_{17},$$

se tiene que π^{17} no satisface la condición fuerte de Slater.

□

Con el ejemplo siguiente se muestra que $\mathbf{c} \in M \setminus \text{int } M$ y el que π satisfaga la condición fuerte de Slater no es condición suficiente para que $\pi \in \Pi_1^3$.

Ejemplo 4.5. Considérese en \mathbb{R}^2 el problema siguiente:

$$P_{18} : \quad \inf x_2$$

$$s.a \quad \begin{aligned} x_2 &\geq t, & t \in [0, 1), \\ x_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

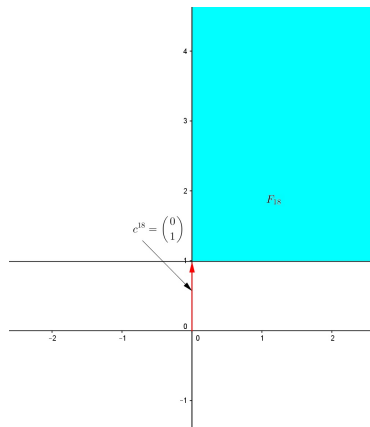


Figura 4.4: Conjunto factible de P_{18}

El conjunto factible se muestra en la Figura 4.4, de ella, se tiene

$$v^P(\pi^{18}) = 1$$

y

$$F_{18}^* = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 = 1, x_1 \geq 0 \right\}.$$

Así, el problema es soluble con conjunto optimal no acotado. Por otro lado, π^{18} satisface la condición fuerte de Slater, en efecto, sea $\epsilon = 1$ y considérese $\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ahora, en la Figura 4.5 se muestra que

$$c^{18} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{18} \setminus \text{int } M_{18}.$$

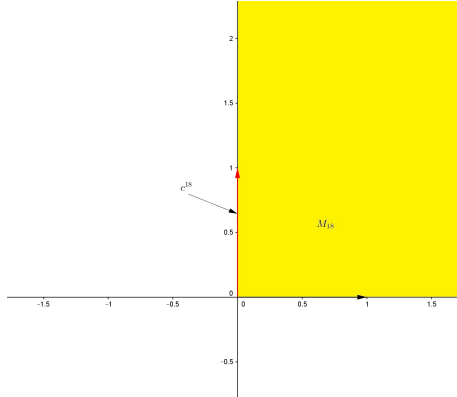


Figura 4.5: Cono M_{18} de P_{18}

El problema dual es:

$$\begin{aligned}
 D_{18} : \quad & \sup \sum_{t \in [0,1)} \lambda_t t \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_{t \in [0,1)} \lambda_t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 & \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}.
 \end{aligned}$$

Del conjunto de restricciones, se sigue

$$\sum_{t \in [0,1)} \lambda_t = 1$$

y

$$\lambda_1 = 0.$$

Considérese la sucesión de puntos factibles $\bar{\theta}^m = (\lambda^m; \lambda_1)$, donde $\lambda_1 = 0$ y λ^m es definida de la manera siguiente.

$$\lambda_t^m := \begin{cases} 1, & \text{si } t = 1 - \frac{1}{m}, \\ 0, & \text{si } t \in [0, 1) \setminus \frac{1}{m}. \end{cases}$$

Se cumple que

$$\sum_{t \in [0,1)} \lambda_t^m t = 1 - \frac{1}{m}$$

se acerca a uno cuando m tiende al infinito. Se concluye que, $v^D(\pi^{18}) = 1$, pero $\Lambda^* = \emptyset$, es decir, el problema dual es no soluble. Así, se tiene un parámetro π^{18} en el que $\mathbf{c}^{18} \in M_{18} \setminus \text{int } M_{18}$ y π^{18} satisface la condición fuerte de Slater, pero $\pi^{18} \notin \Pi_1^3$. \square

En el ejemplo anterior

$$\pi^{18} \in \Pi_1^4, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{cl } N_{18} \quad \text{y} \quad \mathbf{c}^{18} \in M_{18} \setminus \text{int } M_{18},$$

pero π^{18} no satisface la condición fuerte de Slater. Esto muestra que la condición presentada en el Teorema 1.4(iv), para el conjunto Π_1^4 no sigue siendo válida en el caso de coeficientes acotados. En particular, con el ejemplo, se muestra que $\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{cl } N$, $\mathbf{c} \in M \setminus \text{int } M$ y que π no satisfaga la condición fuerte de Slater no es condición necesaria para que $\pi \in \Pi_1^4$.

En el Ejemplo 4.4, $\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{cl } N_{17}$, $\mathbf{c}^{17} \in M \setminus \text{int } M_{17}$ y π^{17} no satisface la condición fuerte de Slater, pero $\pi^{17} \notin \Pi_1^4$. Así, con el ejemplo, se muestra que $\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{cl } N$, $\mathbf{c} \in M \setminus \text{int } M$ y que π no satisfaga la condición fuerte de Slater no es condición suficiente para que $\pi \in \Pi_1^4$.

El razonamiento que se presentó en la Sección 1.3 con el cual hacemos ver que $\Pi_5^1 = \emptyset$, es cierto en el caso de coeficientes acotados. Así, de igual manera que en el caso de coeficientes continuos, en el caso de coeficientes acotados se tiene $\Pi_5 = \Pi_N^P \cap \Pi_C^D$.

Con el ejemplo siguiente se muestra que $\Pi_6^1 = \Pi_{TC}^P \cap \Pi_S^D \neq \emptyset$ en el caso de coeficientes acotados, contrario a lo que ocurre en el caso continuo.

Ejemplo 4.6. Considérese en \mathbb{R}^2 el problema siguiente:

$$P_{19} : \quad \inf 0$$

$$\text{s.a } tx_1 + tx_2 \geq 1, \quad t \in (0, 1].$$

El problema es inconsistente, ya que,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = cl\ cone \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, t \in (0, 1] \right\}.$$

El problema dual es:

$$\begin{aligned} D_{19} : \quad & \sup \sum_{t \in (0,1]} \lambda_t \\ & s.a. \quad \sum_{t \in (0,1]} \lambda_t \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}. \end{aligned}$$

Del sistema de restricciones, se tiene

$$\sum_{t \in (0,1]} \lambda_t t = 0.$$

Puesto que $t \in (0, 1]$, la igualdad anterior sólo es posible si

$$\sum_{t \in (0,1]} \lambda_t = 0.$$

Se sigue que

$$v^D(\pi^{19}) = 0 \text{ y } \Lambda_{19}^* = \{\lambda \equiv \bar{0}\}.$$

Por lo tanto, D_{19} es acotado y soluble con conjunto optimal acotado. \square

El conjunto Π_6^2 también es diferente del vacío. Esto se muestra al considerar cualquier parámetro en Π_6 en el caso continuo.

Se termina este capítulo con la presentación de condiciones necesarias para subconjuntos de algunos conjuntos que se generan con la primera partición refinada primal-dual considerada en el caso de coeficientes acotados.

Los dos resultados siguientes se obtienen del Corolario 4.1 y del Corolario 4.2.

Si $\pi \in \Pi_1^2$ y Λ^* es no acotado, entonces $\mathbf{c} \in \text{int } M$ y π no satisface la condición fuerte de Slater.

Si $\pi \in \Pi_1^4$ y Λ^* es no acotado, entonces $\mathbf{c} \in M \setminus \text{int } M$ y π no satisface la condición fuerte de Slater.

El siguiente resultado se obtiene de [12].

Si $\pi \in \Pi_1^2$ y $\Lambda^* = \emptyset$, entonces existe $\{\pi^r\}$ en Π tal que, $\pi^r \rightarrow \pi$, $\mathbf{c}^r \in \text{int } M_r$ y π^r satisface la condición fuerte de Slater.

Conclusiones

Todos los conjuntos que se generan con la segunda partición refinada primal-dual no son vacíos, lo cual le da sentido a su estudio. Debido a la falta de condiciones que caractericen a los problemas duales solubles, se complica caracterizar a los conjuntos de la partición mencionada. En cuanto a la topología de los conjuntos, el interior de todos es vacío, excepto el que se define por los parámetros con ambos problemas solubles. Además, cualquier parámetro con ambos problemas acotados puede aproximarse con parámetros que tienen problemas solubles. Con lo anterior se completó el estudio que se inició en [2]. Sin embargo, permanece como problema abierto la caracterización de los problemas duales solubles. Esto permitiría caracterizar a todos los conjuntos de la segunda partición refinada primal-dual.

Con lo presentado en el capítulo 2, donde se desarrollan algunas de las demostraciones de los resultados publicados en [11] y [13], se puede decir que los resultados que caracterizan al interior de los conjuntos de la partición primal-dual en el caso continuo, también caracterizan a los respectivos conjuntos en el caso acotado. Así, los conjuntos que aparecen en la partición primal-dual, considerada en el caso general, y que son vacíos en el caso continuo sólo resultan de considerar problemas donde las funciones \mathbf{a} ó \mathbf{b} son no acotadas. Las demostraciones del Teorema 2.4 y la Observación 2.2, son aportaciones originales.

En el caso de coeficientes acotados, las condiciones que

caracterizan a los conjuntos Π_1^1 , Π_1^2 , Π_1^3 y Π_1^4 de la primera partición refinada primal-dual considerada en el caso continuo, no son en general necesarias ni suficientes para los respectivos conjuntos. Sin embargo, como caso particular, si en un parámetro $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c})$ se cumple que $\mathbf{c} = \mathbf{0}_n$ ó $b \equiv 0$, la condición que caracteriza a Π_1^1 en el caso continuo, implica que $\pi \in \Pi_1^1$, es decir, el problema primal y el problema dual asociados al parámetro son solubles y tienen conjunto optimal acotado.

Si se tiene un parámetro $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c})$ en el caso de coeficientes acotados con $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ y la cardinalidad del conjunto en el que las funciones \mathbf{a} y b son definidas es mayor o igual a $n + 2$, una condición suficiente para que el problema dual tenga conjunto optimal acotado es que $\mathbf{c} \in M$ y que π satisfaga la condición fuerte de Slater. La caracterización de los problemas duales solubles con conjunto optimal acotado queda como problema abierto. Su solución permitiría caracterizar a todos los conjuntos de la primera partición refinada primal-dual en el caso acotado.

Con los resultados presentados en la Sección 1.4 y el Capítulo 3, se consiguió la publicación del artículo: New primal-dual partition of the space of linear semi-infinite continuous optimization problems ([3]).

Símbolos

\mathbb{R}_+	Conjunto de números reales positivos incluyendo el cero
\mathbb{R}_-	Conjunto de números reales negativos incluyendo el cero
\mathbb{R}_+^0	Conjunto de números reales positivos sin incluir el cero
\mathbb{R}_-^0	Conjunto de números reales negativos sin incluir el cero
$\mathbf{0}_n$	Vector cero en \mathbb{R}^n
\mathbf{e}_i	i -ésimo vector de la base canónica en \mathbb{R}^n
\mathbf{x}'	Vector transpuesta del vector columna \mathbf{x}
\mathbf{a}	Función: $\mathbf{a} : T \rightarrow \mathbb{R}^n$
\mathbf{a}_t	Imagen de \mathbf{a} en t
b	función: $b : T \rightarrow \mathbb{R}$
b_t	Imagen de b en t
$\mathbf{a}'\mathbf{x}$	Producto escalar del vector \mathbf{a} y el vector \mathbf{x}
$\text{int } X$	Interior topológico de X
$\text{cl } X$	Clausura topológica de X
$\text{front } X$	Frontera topológica de X
$\text{aff } X$	Envoltura afín de X , con $\text{aff } \emptyset = \{\mathbf{0}_n\}$
$\text{conv } X$	Envoltura convexa de X
$\text{cone } X$	Envoltura cónica de X , con $\text{cone } \emptyset = \{\mathbf{0}_n\}$
$\text{dim } X$	Dimensión de X , con $\text{dim } \emptyset = -1$
$\inf X$	La mayor de las cotas inferiores
$\sup X$	La menor de las cotas superiores
$\text{mín } X$	$\inf X$, si éste pertenece a X
$\text{máx } X$	$\sup X$, si éste pertenece a X
$ T $	Cardinalidad del conjunto T
$\mathbb{R}^{(T)}$	$\mathbb{R}^{(T)} := \{\lambda \in \mathbb{R}^T \mid \lambda(t) = 0 \text{ excepto un número finito de índices}\}$
$\mathbb{R}_+^{(T)}$	$\mathbb{R}_+^{(T)} := \{\lambda \in \mathbb{R}^{(T)} \mid \lambda : T \rightarrow \mathbb{R}_+\}$
σ	Sistema de inecuaciones lineales: $\sigma := \{\mathbf{a}'_t \mathbf{x} \geq b_t, t \in T\}$

P Problema primal:

$$P : \quad \begin{array}{l} \text{inf } \mathbf{c}' \mathbf{x} \\ \text{s.a. } \mathbf{a}'_t \mathbf{x} \geq b_t, \quad t \in T \end{array}$$

F Conjunto factible del problema P

M Cono de primer momento:

$$M := \text{cone} \{ \mathbf{a}_t, t \in T \}$$

N Cono de segundo momento:

$$N := \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T \right\}$$

K Cono característico:

$$K := \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T; \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

D Problema dual:

$$D : \quad \begin{array}{l} \text{sup } \sum_{t \in T} \lambda_t b_t \\ \text{s.a. } \sum_{t \in T} \lambda_t \mathbf{a}_t = \mathbf{c} \\ \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \end{array}$$

Λ Conjunto factible del problema D :

$$\Lambda := \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \mid \sum_{t \in T} \lambda_t \mathbf{a}_t = \mathbf{c} \right\}$$

π Parámetro $\pi := (\mathbf{a}, b, \mathbf{c})$
 $v^P(\pi)$ Valor óptimo del problema P
 F^* Conjunto optimal del problema P :

$$F^* := \{\mathbf{x} \in F \mid \mathbf{c}'\mathbf{x} = v^P(\pi)\}$$

$v^D(\pi)$ Valor óptimo del problema D
 Λ^* Conjunto optimal del problema D :

$$\Lambda^* = \left\{ \lambda \in \Lambda \mid \sum_{t \in T} \lambda_t \mathbf{b}_t = v^D(\pi) \right\}$$

$\delta(\pi)$ Hueco dual: $\delta(\pi) := v^P(\pi) - v^D(\pi)$
 Π Conjunto de parámetros $\pi = (\mathbf{a}, b, \mathbf{c})$ con n y T fijos
 \mathfrak{F} Mapeo factible: $\mathfrak{F} : \Pi \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde $\mathfrak{F}(\pi) = F$

(1.1) $(\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R}) \cap cl N \neq \emptyset$

(1.2) $\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R} \not\subseteq K$

](1.1) $(\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R}) \cap cl N = \emptyset$

](1.2) $\{\mathbf{c}\} \times \mathbb{R} \subseteq K$

$\Pi_C^P := \{\pi \in \Pi \mid F \neq \emptyset\}$

$\Pi_A^P := \{\pi \in \Pi_C^P \mid v^P(\pi) > -\infty\}$

$\Pi_{IC}^P := \{\pi \in \Pi \mid F = \emptyset\}$

$\Pi_s^P := \{\pi \in \Pi_A^P \mid F^* \neq \emptyset\}$

$\Pi_n^P := \{\pi \in \Pi_A^P \mid F^* = \emptyset\}$

$\Pi_S^P := \{\pi \in \Pi_A^P \mid F^* \neq \emptyset \text{ y } F^* \text{ es acotado}\}$

$\Pi_N^P := \{\pi \in \Pi_A^P \mid F^* = \emptyset \text{ ó } F^* \text{ es no acotado}\}$

$\Pi_C^D := \{\pi \in \Pi \mid \Lambda \neq \emptyset\}$

$\Pi_A^D := \{\pi \in \Pi_C^D \mid v^D(\pi) < \infty\}$

$\Pi_{IC}^D := \{\pi \in \Pi \mid \Lambda = \emptyset\}$

$\Pi_s^D := \{\pi \in \Pi_A^D \mid \Lambda^* \neq \emptyset\}$

$\Pi_n^D := \{\pi \in \Pi_A^D \mid \Lambda^* = \emptyset\}$

$\Pi_S^D := \{\pi \in \Pi_A^D \mid \Lambda^* \neq \emptyset \text{ y } \Lambda^* \text{ es acotado}\}$

$\Pi_N^D := \{\pi \in \Pi_A^D \mid \Lambda^* = \emptyset \text{ ó } \Lambda^* \text{ es no acotado}\}$

$$\begin{array}{ll}
\Pi_1 & \Pi_1 := \Pi_A^P \cap \Pi_A^D \\
\Pi_2 & \Pi_2 := \Pi_{NA}^P \cap \Pi_{IC}^D \\
\Pi_3 & \Pi_3 := \Pi_{IC}^P \cap \Pi_{NA}^D \\
\Pi_4 & \Pi_4 := \Pi_{IC}^P \cap \Pi_{IC}^D \\
\Pi_5 & \Pi_5 := \Pi_A^P \cap \Pi_{IC}^D \\
\Pi_6 & \Pi_6 := \Pi_{IC}^P \cap \Pi_A^D \\
\Pi_1^1 & \Pi_1^1 := \Pi_S^P \cap \Pi_S^D \\
\Pi_1^2 & \Pi_1^2 := \Pi_S^P \cap \Pi_N^D \\
\Pi_1^3 & \Pi_1^3 := \Pi_N^P \cap \Pi_S^D \\
\Pi_1^4 & \Pi_1^4 := \Pi_N^P \cap \Pi_N^D \\
\widehat{\Pi}_1^1 & \widehat{\Pi}_1^1 := \Pi_s^P \cap \Pi_s^D \\
\widehat{\Pi}_1^2 & \widehat{\Pi}_1^2 := \Pi_s^P \cap \Pi_n^D \\
\widehat{\Pi}_1^3 & \widehat{\Pi}_1^3 := \Pi_n^P \cap \Pi_s^D \\
\widehat{\Pi}_1^4 & \widehat{\Pi}_1^4 := \Pi_n^P \cap \Pi_n^D
\end{array}$$

Bibliografía

- [1] Barragán A.B. *Extensión de los teoremas de consistencia para sistemas de inecuaciones lineales semi-infinitos*. Tesis de licenciatura, FCFM-BUAP, México, 2011.
- [2] Barragán A.B. *Algunas condiciones de solubilidad del par primal-dual en programación lineal semi-infinita continua*. Tesis de maestría, FCFM-BUAP, México, 2013.
- [3] Barragán A.B., Hernández L.A. and Todorov M.I. *New primal-dual partition of the space of linear semi-infinite continuous optimization problems*. Comptes rendus, Bulgare, Vol. 69, 1263-1274, 2016.
- [4] Bazaraa M. *Programación lineal y flujo en redes*. Limusa, México, 2005.
- [5] Cánovas M.J., López M.A., Parra J., and Toledo F.J. *Distance to ill-posedness in linear optimization via the Fenchel-Legendre conjugate*, J. Optim. Theory Appl. 130, 173-183, 2006.
- [6] Cánovas M.J., López M.A., Parra J and Toledo F.J. *Ill-posedness with respect to the solvability in linear optimization*. Linear Algebra Appl. 416, 520-540, 2006.
- [7] Goberna M.A., Jornet V. and Puente R. *Optimización Lineal. Teoría, Métodos y Modelos*. Mc Graw Hill, España, 2004.

- [8] Goberna M.A., López M.A. and Todorov M. I. *Stability theory for linear inequality systems*. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 17, 730-743, 1996.
- [9] Goberna M.A. and López M. *Linear Semi-infinite Optimization*. John Wiley and Sons. England, 1998.
- [10] Goberna M.A. and Todorov M.I. *Generic Primal-dual solvability in continuous linear semi-infinite optimization*. Optimization, Vol. 57, 239-248, 2008.
- [11] Goberna M.A. and Todorov M.I. *Primal-dual stability in continuous linear optimization*. Mathematical Programming, Vol. 116B, 129-147, 2009.
- [12] Hernández L.A. *Representaciones del conjunto factible y estabilidad del problema dual en programación lineal semi-infinita*. Tesis de doctorado, FCFM-BUAP, México, 129-147, 2004.
- [13] Ochoa Pablo D. and Vera de Serio Virginia N. *Stability of the primal-dual partition in linear semi-infinite programming*. Optimization, DOI: 10.1080/02331934.2011.567271 (iFirst), 2011.
- [14] Rockafellar R. T. *Convex Analysis*. Princenton Landmark in Mathematics, USA, 1970.
- [15] Todorov M.I. *Generic existence and uniqueness of the solution set to linear semi-infinite optimization problems*. Numer. Funct. Anal. Optim. 8, 541-556 1985-86.
- [16] Todorov M.I. *Uniqueness of the saddle points for most of the Lagrange functions of the linear semi-infinite optimization*. Numer. Funct. Anal. Optim. 10, 367-382, 1989.