



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

UN ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE LA FAMILIA
 $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

LIZZETH TRUJILLO SANTAMARÍA

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO

PUEBLA, PUEBLA. MAYO 2017

Para mi familia

Agradecimientos

Para Luisa y Juan, mis padres, por su guía en el transcurso de mi vida, por su amor y dedicación. Por sus palabras siempre tan acertadas. Gracias a ustedes ahora me veo forjada como la persona que soy; muchos de mis logros se los debo a ustedes, incluyendo este logro más. Los amo, gracias.

A mis hermanos, Iveth, Lizbeth y Juan, por su amor incondicional, su apoyo y sus consejos. Siempre tan cercanos, siempre permaneceremos. Lizbeth gracias por tu amor incondicional y por esa motivación que siempre me llevó a alcanzar mis sueños.

A mi esposo, Juan Ángel, por tu amor, compañerismo, paciencia y guía. Por ser mi experto en programación y ayudarme en la realización de esta tesis. Por tu apoyo en los momentos precisos. *“Todos necesitamos alguna vez un complice, alguien que nos ayude a usar el corazón”*. Por aquel camino que nos falta por recorrer. Llegaste justo a tiempo.

A mi directora de tesis, Dra. Patricia Domínguez Soto, por el tiempo y espacio dedicado a la realización de esta tesis. Gracias por todo su apoyo, por sus enseñanzas, sus conocimientos, su paciencia, sus consejos y su ánimo.

A mis sinodales, quienes han enriquecido este trabajo, por el tiempo dedicado a esta tesis.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por haber financiado esta tesis.

A mis amigos y compañeros de vida

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	4
2.1. Métrica esférica	4
2.2. Funciones holomorfas	6
2.3. Normalidad	8
2.3.1. Teorema de Montel	9
3. Funciones enteras trascendentes	10
3.1. Iteración y puntos fijos	10
3.2. Singularidades de una función de variable compleja	11
3.3. Teorema de Picard	12
3.4. Conjuntos de Fatou y Julia	13
3.5. Clasificación de componentes de Fatou	14
3.6. Funciones en la clase $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$	16
4. Propiedades de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$	18
4.1. Introducción a la función senoidal	18
4.2. Propiedades de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$	21
5. Dinámica de la familia $\lambda \operatorname{sen}(z)$ para $0 < \lambda \leq 1$	23
6. Un estudio de la dinámica de la familia $f_\lambda = \lambda \operatorname{sen}(z)$ con $1 < \lambda < 2,14$	26
6.1. Dinámica de la familia $f_\lambda = \lambda \operatorname{sen}(z)$ con $1 < \lambda < 2,14$	26
6.2. El caso $\lambda \operatorname{sen}(it)$ con $t \in \mathbb{R}$	41
7. Dinámica de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$ cuando $\lambda_n = \frac{\pi(4n+1)}{2}$	44
8. Conclusiones	47
Bibliografía	47

Capítulo 1

Introducción

Esta tesis pertenece a la rama de los sistemas dinámicos conocida como dinámica holomorfa. En esta rama se estudian sistemas conformados por un conjunto de elementos en iteración cuyo estado evoluciona con el tiempo. El material que se encuentra en esta tesis está dirigido a un público con conocimientos en análisis complejo y topología general.

Los primeros años del siglo XX fueron emocionantes para el análisis. Paul Montel introdujo la noción de *familia normal* de funciones analíticas. Entre 1918 y 1920, Pierre Fatou y Gaston Julia sentaron las bases de la teoría de sistemas dinámicos complejos. Fatou definió el conjunto estable de una función analítica, hoy conocido como conjunto de Fatou, como el complemento del conjunto abierto más grande en el que las iteraciones de una función analítica f forman una familia normal, mientras que Julia lo definió como la clausura de los puntos periódicos repulsores de f , véase el Capítulo 3 para la definición de puntos repulsores.

La idea básica de Fatou y Julia fue utilizar el concepto de familia normal para dividir el plano complejo en dos conjuntos, en uno de ellos (el conjunto de Fatou) las iteradas se comportan de manera estable, y en el otro conjunto (conjunto de Julia) las iteradas tienen un comportamiento caótico.

Si tomamos una función holomorfa $f : G \rightarrow G$, a la composición de ésta consigo misma le llamamos una *iteración de f* . Donde $f^0(z) = z$, $f^1(z) = f(z)$, $f^2(z) = f(f(z))$ y así sucesivamente. La n -ésima iterada de f está definida por $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f \circ f$, $n \in \mathbb{N}$.

Es nuestro interés comprender cómo se comporta la dinámica generada por $f \in \mathbb{F}$, donde $\mathbb{F} = \{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una familia de funciones con un parámetro dado. Para ello, dado un punto z_0 , al conjunto

$$\{f^0(z_0), f^1(z_0), f^2(z_0), \dots, f^n(z_0), \dots\}$$

le llamamos *la órbita hacia adelante de z_0 bajo f* , y lo denotamos por $O^+(z_0, f)$.

Por otro lado, es bien sabido que los *puntos críticos* de una función son aquellos donde la derivada se anula.

Si estudiamos una familia con un parámetro λ y un punto crítico de la familia, podemos seguir la *órbita hacia adelante* de dicho punto bajo iteración obteniendo el *plano de parámetros*. Éste nos puede dar información sobre la dinámica de la familia de funciones dada por la variación del parámetro.

Por un tiempo, la familia $\lambda \text{sen}(z)$, donde λ y $z \in \mathbb{C}$, no se investigó porque se creyó que heredaba la dinámica de la familia exponencial; recordemos que la función seno es por definición $\text{sen}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2i}$. En 1987, Curt McMullen [22] demostró que la medida de Lebesgue del conjunto de Julia para la familia exponencial es cero y para la familia senoidal es mayor que cero. Las propiedades de las familias son diferentes, por ejemplo, la familia exponencial λe^z para $0 < \lambda < \frac{1}{e}$ tiene componentes de Fatou no acotadas mientras las componentes de Fatou de la familia senoidal $\lambda \text{sen}(z)$, $0 < |\lambda| < 1$ son acotadas.

En esta tesis investigamos la dinámica de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \text{sen}(z)$ para $1 < \lambda < 2.14$. Se estudian algunos planos dinámicos (conjuntos de Julia y conjuntos de Fatou) de la familia f_λ y se enuncian algunas conjeturas sobre las observaciones experimentales realizadas.

Esta tesis esta conformada de la siguiente manera. En el Capítulo 1 está la introducción de esta tesis.

El Capítulo 2 expone los preliminares, esto es, conceptos básicos de la topología del plano complejo, una introducción a los conceptos de *familia normal* y de *convergencia normal*.

En el tercer capítulo se da una breve introducción a las funciones enteras trascendentes, denotadas por \mathcal{E} . Se enuncian algunas propiedades respecto a su iteración, así como la clasificación de las componentes de Fatou. También, se enuncia la definición y algunas propiedades importantes de funciones en la clase \mathcal{S} , esto es, funciones en clase \mathcal{E} con un conjunto de valores singulares finito.

En el Capítulo 4 se introduce la función senoidal y se exponen algunas propiedades importantes de la familia $\lambda \text{sen}(z)$.

El Capítulo 5 expone los resultados investigados en [10] y [32] relacionados con la dinámica de la familia $\lambda \text{sen}(z)$, para $0 < |\lambda| < 1$ y para $\lambda = e^{2\pi i \theta}$ donde $\theta = p/q$ o θ es de tipo acotado .

En el Capítulo 6 exponemos la investigación realizada en esta tesis. Esto es, investigamos la familia $\lambda sen(z)$ para parámetros λ con la propiedad $1 < \lambda < 2.14$. Se encuentran algunas imágenes de los planos dinámicos, obtenidas con el software FractalStream, para los parámetros λ estudiados. También, se enuncian las conjeturas de esta tesis:

Conjetura 1. Sea $f_\lambda(z) = \lambda sen(z)$. Para $1 < \lambda < 2.14$ el conjunto de Fatou tiene dos componentes atractoras que son simplemente conexas. Similar para el caso $-2.14 < \lambda < -1$.

Conjetura 2. Sea $f_\lambda(z) = \lambda sen(z)$. En una vecindad de $\frac{\pi}{2}$ con radio $\epsilon = 0.4$ el conjunto de Fatou tiene dos componentes atractores que son simplemente conexas.

Conjetura 3. Sea $f_\lambda(z) = \lambda sen(z)$, con $z = it$, $t \in \mathbb{R}$. Hay dos puntos fijos sobre el eje imaginario, localizados en $i\rho_\pm(\lambda)$ donde $\rho_+ > 0$ y $\rho_- = -\rho_+$. Dichos puntos son repulsores, y la porción positiva del eje imaginario que conecta $i\rho_+(\lambda)$ con ∞ consiste de puntos que tienden a ∞ , similarmente para $i\rho_-(\lambda)$ en la porción negativa del eje imaginario.

En el capítulo 7 se investiga la dinámica de la familia $f_\lambda(z) = \lambda sen(z)$ cuando $\lambda_n = \frac{\pi(4n+1)}{2}$, llegando a la siguiente conjetura:

Conjetura 1. Sea $f_\lambda(z) = \lambda sen(z)$, para $\lambda = \lambda_n$, $n \geq 1$, con $\lambda_n = \frac{\pi(4n+1)}{2}$. La función f_λ tiene $2n + 1$ puntos fijos (incluyendo el cero). Como anteriormente lo hicimos, nombraremos por $\rho_+(\lambda_n)$ a estos puntos fijos recordando que solo estamos tomando en cuenta a aquellos que se encuentran en la porción positiva de $f_{\lambda_n}(x)$.

El Capítulo 8 esta dedicado a las conclusiones obtenidas durante la investigación de esta tesis.

distancia euclidiana entre P_1 y P_2 esta dada por

$$|P_1 - P_2| = [(\alpha_1, \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 + (\gamma_1 - \gamma_2)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Denotamos $|P_1 - P_2|$ por $\chi(z_1, z_2)$, la *distancia cordal* entre z_1 y z_2 . Se puede demostrar que si z_1 y z_2 están en el plano finito, entonces

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}},$$

y si $z_2 = \infty$, entonces

$$\chi(z_1, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}.$$

Claramente, $\chi(z_1, z_2) \leq 1$,

$$\chi\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) = \chi(z_1, z_2),$$

y si $|z_1| \leq |z_2| \leq \infty$, entonces $\chi(0, z_1) \leq \chi(0, z_2)$. También es cierto que $\chi(\cdot, \cdot)$ es una métrica en \mathbb{C} , con $\chi(z_1, z_2) \leq |z_1 - z_2|$ en \mathbb{C} . Observemos que la virtud de la *métrica cordal* es que permite a $z = \infty$ ser tratado como cualquier otro punto.

El elemento de longitud de arco esférico ds en la esfera de Riemann Σ es

$$ds = \frac{|dz|}{1 + |z|^2},$$

y el elemento de *área esférica* dA esta dado por

$$dA = \frac{dx dy}{(1 + |z|^2)^2},$$

con $z = x + iy$.

La *longitud esférica*

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1 + |z|^2}$$

de una curva γ en Σ induce una métrica como lo veremos a continuación. Dados dos puntos distintos z_1, z_2 en la esfera de Riemann, definimos

$$\sigma(z_1, z_2) = \inf \{L(\gamma)\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las curvas diferenciables en Σ que unen z_1 con z_2 . Entonces $\sigma(z_1, z_2)$ es la *longitud euclidiana* del arco más pequeño del círculo grande en Σ uniendo z_1 y z_2 y define una métrica en la esfera conocida como *métrica esférica*. De hecho $\chi(z_1, z_2) \leq \sigma(z_1, z_2) \leq \frac{\pi}{2} \chi(z_1, z_2)$, así las dos métricas son uniformemente equivalentes y generan los mismos conjuntos abiertos en Σ .

Definición 2.1. Una sucesión de funciones f_n converge uniforme y esféricamente a f en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ si, dado $\epsilon > 0$, existe un número n_0 tal que $n \geq n_0$ implica

$$\chi(f(z), f_n(z)) < \epsilon,$$

para todo $z \in D$.

Observemos que si f_n converge uniformemente a f en D , entonces también converge uniforme y esféricamente a f en D . La convergencia se da si la función límite es acotada.

Teorema 2.1. [28] Si una sucesión f_n converge uniforme y esféricamente a una función acotada f en D , entonces f_n converge uniformemente a f en D .

Recordemos que una función f es esféricamente continua en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\chi(f(z), f(z_0)) < \epsilon,$$

cuando $|z - z_0| < \delta$.

2.2. Funciones holomorfas

Una función f de variable compleja es *diferenciable* en D si existe su derivada en cada punto de $D \subset \mathbb{C}$. Si f es diferenciable y se cumplen las ecuaciones de Cauchy Riemman, se dice que f es *holomorfa*.

Sea f una función en $D \subset \mathbb{C}$. La función f es *analítica* si para cualquier $z_0 \in D$ existe un $r > 0$ con $\Delta(z_0, r) \subset D$ y una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

convergente en $\Delta(z_0, r) \subset D$, tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \Delta(z_0, r) \subset D.$$

Teorema 2.2. [26] Cualquier función f holomorfa en D es analítica, y para un punto arbitrario $a \in D$, $f(z)$ se expande en una serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n,$$

para $z \in \Delta(a; d(a; \partial D))$, cuyo radio de convergencia no es menor a $d(a; \partial D)$.

Teorema 2.3. [26] Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ una serie de potencias convergente en $a \in \mathbb{C}$. Sea R su radio de convergencia. Entonces $f(z)$ y $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - a)^{n-1}$ son funciones holomorfas sobre $\Delta(a; R)$.

Teorema 2.4. [26] $f(z)$ es función analítica si, y sólo si $f(z)$ es holomorfa.

A continuación daremos la definición principal de convergencia en la teoría de familias normales.

Definición 2.2. Una sucesión de funciones f_n converge (esféricamente) uniformemente en subconjuntos compactos de un dominio D a una función $f(z)$ si, para cualquier compacto $K \subseteq D$ y $\epsilon > 0$, existe un número $n_0 = n_0(K, \epsilon)$ tal que $n \geq n_0$ implica

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon,$$

(o bien, $\chi(f_n(z), f(z)) < \epsilon$), para todo $z \in K$.

Cuando una sucesión converge uniformemente o uniforme y esféricamente sobre subconjuntos compactos de un dominio D , decimos que la sucesión converge normalmente en D .

En el siguiente teorema la métrica d es la métrica definida en el espacio vectorial $A(D)$ de funciones analíticas en el dominio D .

Teorema 2.5. La convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de un dominio D es equivalente a la convergencia en la métrica d .

Se sigue que la topología en $A(D)$ inducida por la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos esta definida por la métrica d . Si $f_n \rightarrow f$ uniformemente en cada disco cerrado $K \subseteq D$, entonces decimos que $\{f_n\}$ converge local y uniformemente a f en D .

A continuación enunciaremos algunos resultados clásicos de Weierstrass, Hurwitz y Schwarz.

Teorema 2.6. [6]. (Teorema de Weierstrass) Sea f_n una sucesión de funciones analíticas en un dominio D que converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de D a una función f . Entonces f es analítica en D , y la sucesión de derivadas $\{f_n^{(k)}\}$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de $f^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Teorema 2.7. [9]. (Teorema de Hurwitz) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas en un dominio D que converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de D a una función analítica no constante $f(z)$. Si $f(z_0) = 0$ para algún $z_0 \in D$, entonces para cada $r > 0$ suficientemente pequeño, existe un $N = N(r)$, tal que para cada $n > N$, $f_n(z)$ tiene el mismo número de ceros en el disco $D(z_0, r)$ como $f(z)$.

Lema 2.1. [26]. (Lema de Schwarz) Sea $f(z)$ analítica en U con $f(0) = 0$, $|f(z)| \leq 1$. Entonces $|f(z)| \leq |z|$ para $z \in U$, y $|f'(0)| \leq 1$. Si $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \in U$, entonces $f(z) \equiv cz$, donde c es una constante de módulo 1.

2.3. Normalidad

Para definir el concepto de familia normal es necesario introducir los conceptos de acotación local y de equicontinuidad, así como algunos resultados que se pueden revisar en [28].

Definición 2.3. Una familia de funciones \mathcal{F} es *localmente acotada* en un dominio D si, para cada $z_0 \in D$ existe un número positivo $M = M(z_0)$ y una vecindad $D(z_0; r) \subseteq D$, tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D(z_0; r)$ y toda $f \in \mathcal{F}$.

Esto es, \mathcal{F} es *uniformemente acotada* en una vecindad de cada punto de D . Dado que cualquier subconjunto compacto $K \subseteq D$ puede cubrirse por un número finito de vecindades, se sigue que una familia \mathcal{F} localmente acotada es uniformemente acotada sobre subconjuntos compactos de D .

Teorema 2.8. Si \mathcal{F} es una familia de funciones analíticas localmente acotadas en un dominio D , entonces la familia de derivadas $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ forman una familia localmente acotada en D .

Observemos que el inverso de este teorema es falso, tomemos como ejemplo la familia de constantes $\mathcal{F} = \{n : n = 1, 2, 3, \dots\}$.

Teorema 2.9. Sea \mathcal{F} una familia de funciones analíticas en D tal que la familia de derivadas \mathcal{F}' es localmente acotada y supongamos que existe algún $z_0 \in D$ con $|f(z_0)| \leq M < \infty$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Entonces \mathcal{F} es localmente acotada.

Definición 2.4. Una familia \mathcal{F} de funciones definidas en un dominio D es *equicontinua (equicontinua esféricamente)* en un punto $z' \in D$ si, para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\epsilon, z') > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z')| < \epsilon$$

(o bien $\chi(f(z), f(z')) < \epsilon$) cuando $|z - z'| < \delta$, para cada $f \in \mathcal{F}$. Más aún, \mathcal{F} es *equicontinua (equicontinua esféricamente)* en un subconjunto $E \subseteq D$ si es equicontinua (equicontinua esféricamente) en cada punto de E .

Observemos que si $E \subseteq D$ es compacto, entonces un argumento simple de compacidad (basado en el hecho de que una función continua en un conjunto compacto es uniformemente continua) muestra que si \mathcal{F} es equicontinua (equicontinua esféricamente) en E , entonces para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\epsilon, E) > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z')| < \epsilon \text{ (o bien } \chi(f(z), f(z')) < \epsilon)$$

con $z, z' \in E$, $|z - z'| < \delta$, para cada $f \in \mathcal{F}$.

El siguiente teorema da la relación entre acotación local y equicontinuidad.

Teorema 2.10. Una familia \mathcal{F} de funciones analíticas localmente acotada en un dominio D es equicontinua sobre subconjuntos compactos de D .

El término *normal* no apareció hasta el año 1911 con el matemático Paul Montel, sin embargo el trabajo de Montel sobre familias normales inició en 1907.

Definición 2.5. Una familia \mathcal{F} de funciones analíticas en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ es *normal en D* si cada sucesión de funciones $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ contiene o bien, una subsucesión que converge a una función límite $f \neq \infty$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D , o una subsucesión que converge uniformemente a ∞ sobre cada subconjunto compacto.

Definición 2.6. La familia \mathcal{F} se dice ser *normal en un punto $z_0 \in D$* si es normal en alguna vecindad de z_0 .

Teorema 2.11. *Una familia de funciones analíticas \mathcal{F} es normal en un dominio D si, y sólo si \mathcal{F} es normal en cada punto de D .*

Una familia de funciones analíticas \mathcal{F} es *normal en ∞* si la familia correspondiente $\varsigma = \{g : g(z) = f(\frac{1}{z})\}$ es normal en $z = 0$. Por lo tanto, \mathcal{F} normal en ∞ significa que es normal en alguna vecindad de ∞ , $\Delta(\infty, R) = \{z : |z| > R\} \cup \{\infty\}$, $R > 0$. Observemos que si una familia \mathcal{F} no es normal en un dominio D , existe al menos un punto en D en el que \mathcal{F} no es normal. Tal punto es llamado un *punto irregular*.

2.3.1. Teorema de Montel

El siguiente teorema de los matemáticos Cesare Arzelà y Guido Ascoli es uno de los pioneros de la teoría de Montel de familias normales.

Teorema 2.12. [28]. *(Teorema de Arzelà-Ascoli) Si una sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas converge uniformemente sobre un conjunto compacto K a una función límite $f (\neq \infty)$, entonces $\{f_n\}$ es equicontinua sobre K , y f es continua. A la inversa, si $\{f_n\}$ es equicontinua y localmente acotada en D , entonces una subsucesión puede ser extraída de $\{f_n\}$ la cual converge uniforme y localmente en D a una función límite f (continua).*

Con la segunda parte de este teorema, Montel en su artículo de 1907 observó que si una familia de funciones analíticas es localmente acotada esto implicaba la equicontinuidad.

Teorema 2.13. [28]. *(Teorema de Montel) Si \mathcal{F} es una familia de funciones analíticas localmente acotadas sobre un dominio D , entonces \mathcal{F} es una familia normal en D .*

Teorema 2.14. *Sea \mathcal{F} una familia de funciones analíticas en un dominio D tal que cada sucesión de funciones en \mathcal{F} tiene una subsucesión que converge uniformemente sobre subconjuntos compactos a una función analítica. Entonces \mathcal{F} es localmente acotada, y por tanto equicontinua sobre subconjuntos compactos de D .*

Para cualquier familia de funciones analíticas, se puede establecer que su correspondiente familia de derivadas es localmente acotada.

Teorema 2.15. [28] *Si \mathcal{F} es una familia de funciones analíticas en D y la familia $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ es localmente acotada, entonces \mathcal{F} es normal en D .*

Capítulo 3

Funciones enteras trascendentes

La investigación de las funciones enteras trascendentes así como su iteración tiene inicio con el trabajo de Pierre Fatou en el año 1926, y tuvo su continuación con los trabajos de I. N. Baker en el año 1968 [3]. En este capítulo presentaremos la definición de las funciones enteras trascendentes así como algunas de sus propiedades. También, definiremos los puntos fijos y la iteración de esas funciones. Para este capítulo se puede consultar la siguiente bibliografía [7], [12] y [13].

A las funciones definidas y holomorfas en todo \mathbb{C} se les llama *funciones enteras*. Las *funciones enteras trascendentes* son funciones analíticas en el plano complejo que no son polinomios. Es decir, la cantidad de coeficientes de una serie de Taylor, que son diferentes de cero, es infinita.

Al conjunto de funciones enteras trascendentes lo denotaremos como sigue:

$$\mathcal{E} = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es entera trascendente}\}.$$

Las siguientes funciones pertenecen a la clase \mathcal{E} .

- (i) $f(z) = e^z + \operatorname{sen}(z)$.
- (ii) $g(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (iii) $h(z) = e^z + z$.

3.1. Iteración y puntos fijos

En esta sección enunciaremos los conceptos básicos que nos permitirán estudiar la dinámica de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dada una función $f : D \rightarrow D$, a la composición de ésta consigo misma la llamamos *iteración de f* , donde denotamos a $f^0(z) = z$, $f^1(z) = f(z)$, $f^2(z) = f(f(z))$ y así sucesivamente. A $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f \circ f$, $n \in \mathbb{N}$, la llamamos la *n -ésima iterada de f* .

Definición 3.1. Dado un punto z_0 , el conjunto $\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$, donde $z_n = f^n(z_0)$, le llamamos la *órbita hacia adelante de z_0 bajo f* , y lo denotamos por $O^+(z_0, f)$. De manera similar, la *órbita hacia atrás de un punto z_0 bajo f* , $O^-(z_0, f)$, se define como $O^-(z_0, f) = \cup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(z_0)$. La *gran órbita* de z_0 es la unión de la órbita hacia adelante con la órbita hacia atrás.

Si $O^-(z_0, f)$ es un conjunto finito de puntos, entonces z_0 es un *valor excepcional de Fatou*. En el caso particular $O^-(z_0, f) = \emptyset$, al valor z_0 se le llama *valor omitido*.

Definición 3.2. Dada $f \in \mathcal{E}$, decimos que z_0 es un *punto fijo* si $f(z_0) = z_0$. Si para algún $n \neq 0$ se cumple que $f^n(z_0) = z_0$, entonces z_0 es un *punto periódico*. Cuando n es el menor natural que satisface esta igualdad, decimos que z_0 es de periodo n .

Observemos que un punto fijo es un punto periódico de periodo 1. La clasificación de los puntos fijos se define a continuación.

Definición 3.3. Sea $f \in \mathcal{E}$ y z_0 un punto fijo.

1. Si $|f'(z_0)| = 0$, entonces z_0 es un *punto fijo superatractor*.
2. Si $|f'(z_0)| < 1$, entonces z_0 es un *punto fijo atractor*.
3. Si $|f'(z_0)| > 1$, entonces z_0 es un *punto fijo repulsor*.
4. Si $|f'(z_0)| = 1$ y es una raíz de la unidad, entonces z_0 es un *punto fijo indiferente racional*.
5. Si $|f'(z_0)| = 1$ pero $f'(z_0)$ no es una raíz de la unidad, entonces z_0 es un *punto fijo indiferente irracional*.

La Definición 3.2.3 se generaliza a puntos periódicos considerando que si z_0 es de periodo n , entonces z_0 es punto fijo para f^n . Al valor de $(f^n)'(z_0)$ se le conoce como el *multiplicador* de z_0 . Si z_0 es el infinito, entonces el multiplicador de z_0 está dado por $(g^n)'(0)$, donde $g(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$.

Si z_0 es un punto periódico de periodo n , entonces diremos que la órbita hacia adelante de z_0 es un *ciclo atractor, repulsor o indiferente*, según z_0 sea atractor, repulsor o indiferente. Los puntos no periódicos para los que existe un n natural tal que su imagen bajo f^n es un punto periódico, se llaman *preperiódicos o eventualmente periódicos*.

3.2. Singularidades de una función de variable compleja

Un *punto singular* z_0 de una función f es un punto donde la función no es analítica. Estos puntos singulares pueden ser:

1. *Singularidades aisladas.* Si una función $f(z)$ es analítica en todo entorno de un punto z_0 , salvo en el propio z_0 , entonces decimos que el punto z_0 es una singularidad aislada de la función $f(z)$.
2. *Singularidades no aisladas.* Si una función $f(z)$ contiene un conjunto de singularidades aisladas en cada vecindad de un punto z_0 , entonces decimos que z_0 es una singularidad no aislada. Es decir, una singularidad no aislada de una función es un punto límite del conjunto de sus singularidades aisladas.

El siguiente teorema clasifica las singularidades aisladas .

Teorema 3.1. [19]. (*Clasificación de las singularidades aisladas*). Sea f función compleja desarrollada en serie de Laurent con centro en la singularidad z_0 .

1. Si la parte principal de la serie de Laurent es cero, $z = z_0$ se denomina singularidad evitable.
2. Si la parte principal de la serie de Laurent contiene un número finito de términos, entonces $z = z_0$ se denomina polo. Si el último coeficiente es b_m , $m \geq 1$, entonces decimos que es un polo de orden m . Un polo de orden 1 se llama polo simple.
3. Si la parte principal de la serie de Laurent contiene infinitos términos, $z = z_0$ se denomina singularidad esencial.

3.3. Teorema de Picard

Un resultado que es sumamente útil para estudiar la dinámica de funciones enteras se debe al matemático C. E. Picard.

Teorema 3.2. [9]. (*Pequeño de Picard*) Sea f entera y no constante. Entonces f toma todos los valores en \mathbb{C} salvo a lo más dos puntos.

Las funciones trascendentes se caracterizan por tener *singularidades esenciales*. El comportamiento de una función alrededor de estas singularidades queda establecido en el siguiente teorema,

Teorema 3.3. [17] Una función analítica toma valores arbitrariamente cercanos a cualquier valor complejo en toda vecindad de una singularidad esencial.

Teorema 3.4. [9]. (*Teorema grande de Picard*) Sea z_0 singularidad esencial de f , entonces en toda vecindad de z_0 , f asume una infinidad de veces cualquier valor complejo en la esfera de Riemann, salvo posiblemente dos valores.

3.4. Conjuntos de Fatou y Julia

En esta sección presentamos la definición de los conjuntos de Fatou y Julia para funciones en la clase \mathcal{E} así como algunas de sus propiedades.

Definición 3.4. Sea $f \in \mathcal{E}$, el conjunto de Fatou de f o conjunto estable, denotado por $F(f)$, está formado por todos los puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que la sucesión de iteradas de f está bien definida y forma una familia normal en una vecindad de z , es decir,

$$F(f) = \{z \in \mathbb{C} : f^n(z) \text{ está definida y } \{f^n\} \text{ es normal en una vecindad de } z\}.$$

El conjunto de Julia de f o conjunto inestable, denotado por $J(f)$, es el complemento del conjunto de Fatou, es decir,

$$J(f) = (F(f))^c = \mathbb{C} \setminus F(f).$$

A continuación enunciaremos algunas propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou para funciones en la clase \mathcal{E} .

Teorema 3.5. [18] Si $f \in \mathcal{E}$, entonces se tienen las siguientes propiedades.

- (a) $F(f)$ es abierto y $J(f)$ es cerrado.
- (b) $J(f)$ es perfecto.
- (c) $F(f)$ y $J(f)$ son completamente invariantes, es decir, $z \in F(f)$ si, y sólo si $f(z) \in F(f)$ y $z \in J(f)$ si, y sólo si $f(z) \in J(f)$.
- (d) $F(f^n) = F(f)$ y $J(f^n) = J(f)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Aproximadamente entre 1918 y 1920, Fatou y Julia demostraron las propiedades antes mencionadas para funciones racionales, véase [15] y [20]. Para las funciones enteras trascendentes, las propiedades (a)-(d) fueron demostradas por Fatou en 1926, véase [16].

Definición 3.5. Sea $f \in \mathcal{E}$. El conjunto

$$E(f) = \{z : O^-(z) \text{ es finito}\}$$

es llamado el conjunto excepcional de Fatou.

A continuación enunciaremos y demostraremos un teorema que relaciona al conjunto de Julia con las órbitas hacia atrás dado un punto $z_0 \in J(f)$.

Teorema 3.6. [13] Sea $f \in \mathcal{E}$. Si $z_0 \in J(f)$ y $z_0 \notin E(f)$, entonces $J = \overline{O^-(z_0)}$.

Demostración. Dado que J es cerrado y completamente invariante, se cumple que $\overline{\mathcal{O}^-(z_0)} \subset J$. Para probar la otra inclusión, tomemos $z_1 \in J$, y sea D una vecindad de dicho punto, y supongamos que $D \cap \overline{\mathcal{O}^-(z_0)} = \emptyset$. Entonces $f^n(z) \neq \omega$ para toda $n \in \mathbb{N}$, $z \in D$ y $\omega \in \overline{\mathcal{O}^-(z_0)}$. Como $|\overline{\mathcal{O}^-(z_0)}| = \infty$, el teorema de Montel (véase Teorema 2.13) muestra que $\{f^{on}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es normal en D , lo que contradice nuestro supuesto de $z_1 \in J$. Por lo tanto $D \cap \overline{\mathcal{O}^-(z_0)} \neq \emptyset$. Se sigue que $z_1 \in \overline{\mathcal{O}^-(z_0)}$ y así $J \subset \overline{\mathcal{O}^-(z_0)}$. ■

Observe que $F(f)$, $J(f)$ y $E(f)$ son considerados como subconjuntos del plano complejo \mathbb{C} si f esta en clase \mathcal{E} .

Teorema 3.7. [13] Si $f \in \mathcal{E}$, entonces $|E(f)| \leq 1$.

Teorema 3.8. [13] Si f es función en clase \mathcal{E} y $n \geq 2$, entonces f^n tiene un número infinito de puntos fijos.

Si z_0 es un punto fijo periódico atractor de periodo p , decimos que

$$A(z_0) = \{z : f^{pn}(z) \rightarrow z_0\}$$

es la *cuenca de atracción* de z_0 .

Teorema 3.9. Si z_0 es un punto periódico atractor, entonces $\partial A(z_0) = J(f)$.

El siguiente teorema fue demostrado por Fatou y Julia para funciones racionales [15], [20]. La primera prueba del teorema para funciones enteras trascendentes fue realizada por Baker en 1968.

Teorema 3.10. [3] $J(f)$ es la clausura del conjunto de puntos periodicos repulsores.

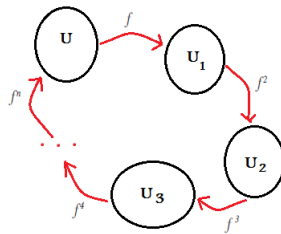
Corolario 3.1. Si U es un subconjunto abierto que intersecta a $J(f)$, entonces ninguna subsucesión de $\{f^n\}$ es normal en U .

3.5. Clasificación de componentes de Fatou

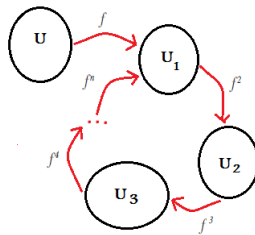
Debido que $F(f)$ y $J(f)$ son completamente invariantes, se cumple que si U_0 es una componente conexa de $F(f)$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $f^n(U_0) \subset U_n$ para alguna componente conexa U_n de $F(f)$.

Definición 3.6. Sea $f \in \mathcal{E}$ y U una componente de $F(f)$. El comportamiento de la órbita de U bajo f tiene tres posibilidades:

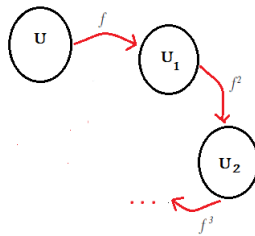
- (i) Si $f^n(U) \subset U$ para algún $n \geq 1$, U es llamada una componente periódica de $F(f)$. El mínimo n es el período de la componente U . En particular, si $n = 1$, se dice que la componente U es invariante.



- (ii) Si f^m es periódica para algún entero $m \geq 1$, llamamos a U una componente pre-periódica. En particular, si U es pre-periódica pero no periódica, entonces llamamos a U una componente pre-periódica propia.



- (iii) Si U no es periódica o pre-periódica, llamamos a U una componente errante.



El teorema de Sullivan en [8] enuncia que las funciones racionales no tiene dominios errantes. Esta propiedad no pasa para funciones enteras con un número infinito de valores singulares, véase definición en la Sección 3.5.

La clasificación de una componente periódica U en el conjunto de Fatou para funciones racionales fue dada por Sullivan y es la siguiente:

- (i) Existe $z_0 \in U$ con $f^p(z_0) = z_0$ y $|f'(z_0)| < 1$. Entonces cada punto $z \in U$ satisface $f^{np}(z) \rightarrow z_0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Si z_0 es super-atractor, entonces U es llamado *dominio de Böttcher*. De otro modo U es llamada *dominio atractor*.
- (ii) Existe $z_0 \in \partial U$, $z_0 \neq \infty$ con $f^p(z_0) = z_0$ y $|f'(z_0)| = 1$. Cada punto $z \in U$ satisface $f^{np}(z) \rightarrow z_0$ cuando $n \rightarrow \infty$. U es un *dominio de Leau* en z_0 , o de otra forma *dominio parabólico*.

- (iii) Existe un homeomorfismo analítico $\psi : U \rightarrow D$, donde D es el disco unitario tal que $\psi \circ f \circ \psi^{-1}(z) = e^{2\pi i\theta}$ para algún $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En este caso, U es llamado un *disco de Siegel*.
- (iv) Existe un homeomorfismo analítico $\psi : U \rightarrow A$, donde A es un anillo $A = \{z : 1 < |z| < r\}$, tal que $\psi \circ f \circ \psi^{-1}(z) = e^{2\pi i\theta}$ para algún $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En este caso, U es un *disco de Herman*.
- (v) Para cada $z \in U$, $f^n(z) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. En este caso el dominio U es no acotado y simplemente conexo y, en algunas veces es llamado *dominio de Baker*.

Para funciones en la clase \mathcal{E} no hay anillos de Herman como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 3.11. [24] *Las funciones enteras trascendentes no tienen anillos de Herman.*

Demostración. Sea f una función entera. Supongamos que existe H un anillo de Herman, entonces los puntos de la componente interna de ∂H tienen que estar en $J(f)$. Por otro lado, sea γ una curva de Jordan invariante en H , todas las iteradas de f están uniformemente acotadas sobre la curva γ y por lo tanto, por el Principio de Módulo Máximo, también en la componente acotada del complemento de H , lo que implica que las iteradas de f forman una familia uniformemente acotada, y por el teorema de Montel tenemos que es una familia normal en la unión de H con la componente acotada del complemento de H . Por lo tanto este conjunto debe estar en $F(f)$ y no puede intersectar $J(f)$, pero esto es una contradicción con el hecho que ∂H contiene puntos de $J(f)$. ■

Baker en [5] demostró para $f \in \mathcal{E}$ el siguiente teorema.

Teorema 3.12. *Una función entera trascendente no puede tener más de una componente completamente invariante en el conjunto de Fatou. Es más, dicha componente es simplemente conexa y no acotada.*

Para componentes múltiplemente conexas se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.13. [7] *Si $f \in \mathcal{E}$ y U es una componente múltiplemente conexa de $F(f)$, entonces $f^n|_U \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, esto es U es una componente errante.*

3.6. Funciones en la clase $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$

En este apartado definimos una subclase \mathcal{S} contenida en la clase \mathcal{E} . Para esto enunciamos los conceptos de valor crítico y valor asintótico de una función entera trascendente. El material de esta sección se puede consultar en [13].

Definición 3.7. Sea f una función analítica sobre D subconjunto abierto del plano. Decimos que ω es un *valor crítico*, si $\omega = f(z)$ con $f'(z) = 0$ y al punto z le llamamos *punto crítico*.

Definición 3.8. Un punto $\omega \in \mathbb{C}$ es llamado *valor asintótico* si existe una curva $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) \rightarrow \infty$ y $f(\gamma(t)) \rightarrow \omega$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Definición 3.9. El *conjunto de valores singularidades* de una función f es la clausura del conjunto de valores asintóticos y valores críticos, lo denotamos por:

$$SV(f) = \{\overline{\text{Valores asintóticos}} \cup \text{Valores críticos}\}.$$

Teorema 3.14. [13] *Un ciclo de dominios atractores, dominios de Leau contiene al menos un valor singular.*

Definición 3.10. Decimos que $f \in \mathcal{E}$ pertenece a la subclase \mathcal{S} si el conjunto de valores singulares de f es finito.

Teorema 3.15. [13] *Si $f \in \mathcal{E}$ y el conjunto de valores singulares $SV(f)$ es finito, entonces no existen componentes errantes en el conjunto de Fatou.*

El siguiente teorema establece la ausencia de dominios de Baker.

Teorema 3.16. [13] *Supongamos que $f \in \mathcal{E}$, y el conjunto de puntos singulares es acotado. Si $z \in F(f)$, entonces la órbita $\{f^n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ no puede tender a infinito.*

La demostración del teorema y el siguiente corolario pueden consultarse en [13].

Corolario 3.2. *Si f es entera trascendente y su conjunto de puntos singulares es acotado, entonces $F(f)$ no contiene dominios de Baker.*

Teorema 3.17. [13] *El conjunto de Fatou de una función entera trascendente en la clase \mathcal{S} no tiene componentes errantes.*

Con el Teorema 3.16 y el Teorema 3.17 se tiene una descripción completa de la dinámica del conjunto de Fatou de una función entera en la clase \mathcal{S} , tal como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 3.18. [13] *Sea $f \in \mathcal{S}$. Entonces cada órbita en el conjunto de Fatou es absorbida por uno de los ciclos de los dominios atractores, dominios de Leau o discos de Siegel.*

Corolario 3.3. [13] *Si las órbitas de todos los puntos básicos de una función $f \in \mathcal{S}$ son absorbidos por ciclos o tienden a ∞ , entonces $J(f) = \mathbb{C}$.*

Capítulo 4

Propiedades de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$

En esta capítulo se introduce la definición de función senoidal, después se dan algunas propiedades interesantes de la familia $f_\lambda = \lambda \operatorname{sen}(z)$.

4.1. Introducción a la función senoidal

Definimos la función senoidal compleja $\operatorname{Sen}(z) = \operatorname{seno}(z)$, $z = x + iy$, $z \in \mathbb{C}$, como sigue:

$$\operatorname{Sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Iniciaremos esta sección demostrando que $\operatorname{sen}(z) = 0$ si, y sólo si $z = n\pi$ para $n \in \mathbb{N}$. Observemos que $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$ para $n \in \mathbb{N}$, por tanto si $\operatorname{sen}(z) = 0$, entonces $z = n\pi$.

Ahora, $\operatorname{sen}(z) = 0$ implica que $e^{iz} = e^{-iz}$, multiplicando ambos lados por e^{iz} y usando la propiedad de la función exponencial tenemos que $e^{i2z} = 1$, por la periodicidad de la función exponencial existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $2z = 2\pi n$, es decir $z = \pi n$.

Para algún α número complejo, se tiene lo siguiente:

$$\operatorname{sen}(z + \alpha) = \operatorname{sen}(z). \tag{1}$$

Para todo $z \in \mathbb{C}$, tenemos que α es un entero múltiplo de 2π . Supongamos que se cumple la igualdad anterior para algún $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces si $z = 0$ tenemos que $\operatorname{sen}(\alpha) = 0$, por lo tanto (de la univalencia de la función exponencial) α es un entero múltiplo de π . Solo queda demostrar que el entero es par. Sustituyendo $z = \frac{\pi}{2}$ en la Igualdad (4.1), tenemos $\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, así $\alpha + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ para algún entero positivo n . Por lo tanto $\alpha = 2\pi n$ para $n \in \mathbb{N}$.

El siguiente teorema establece la univalencia de la función $\operatorname{sen}(z)$.

Teorema 4.1. *La función compleja $\text{sen}(z)$ es univalente sobre la parte vertical $V = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Re}(z) < \frac{\pi}{2}\}$.*

Demostración. Supongamos que $z, w \in V$ y $\text{sen}(z) = \text{sen}(w)$. De la definición del seno complejo observemos que:

$$e^{iz} - e^{i(-z)} = e^{iw} - e^{i(-w)},$$

realizando algunas operaciones obtenemos:

$$e^{iz} - e^{iw} = e^{(iz)} - e^{i(-w)} \tag{2}$$

$$= e^{i(-z)} e^{i(w)} (e^{iw} - e^{iz}). \tag{3}$$

Así, tenemos

$$e^{iz} - e^{iw} = 0 \tag{4}$$

o bien, si dividimos ambos lados de la ecuación (4.3) entre $e^{iz} - e^{iw}$ obtenemos

$$-1 = e^{i(-z)} e^{i(-w)} \tag{5}$$

$$= e^{-i(z+w)}. \tag{6}$$

Supongamos que la Ecuación (4.4) es cierta. Entonces $e^{iz} = e^{iw}$, así (por propiedades de la función exponencial) $z = w + 2\pi n$ para algún n , es decir, $|\text{Re}(z) - \text{Re}(w)| = 2\pi |n|$. Pero $|\text{Re}(z) - \text{Re}(w)| < \pi$, así $n = 0$, por lo tanto $z = w$.

Si se cumple la Ecuación (4.6) tenemos que $e^{i\pi} = -1 = e^{-i(z+w)}$, así $1 = e^{-i(z+w+\pi)}$, por propiedades de la exponencial $z + w + \pi = 2\pi n$ para algún n , es decir que $z + w$ debe ser múltiplo impar de π . Por lo tanto pasaría lo mismo $\text{Re}(z) + \text{Re}(w)$: sería un múltiplo impar de π . Pero $z, w \in V$ así $0 < \text{Re}(z) + \text{Re}(w) < \pi$, concluimos que tal múltiplo impar no puede existir. ■

La función $\text{sen}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ cumple con la propiedad de simetría esto es, $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$. En efecto, de la definición de seno en el círculo unitario tenemos $y = \text{sen}(\theta)$, podemos observar que la y en ambos casos es la inversa aditiva respectivamente, véase Figura 4.1.

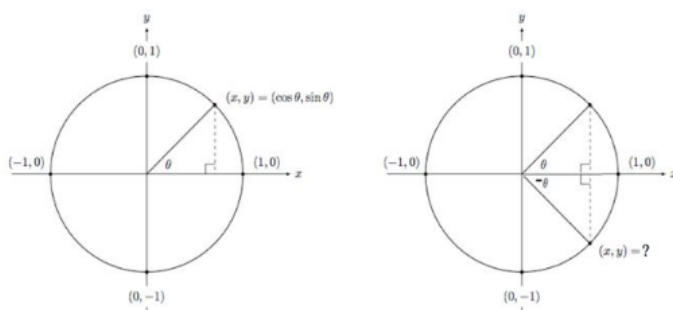


Figura 4.1: Correspondencia de la función seno y coseno en el círculo unitario.

Observemos que la función $\text{sen}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ es simétrica respecto del origen. Además, si dada $c + it$, $t \in \mathbb{R}$ su imagen bajo la función senoidal es una hipérbola con focos ± 1 y centro en $(0, 0)$ mientras que dada $t + ic$, $t \in \mathbb{R}$ su imagen bajo $\text{sen}(z)$ es una elipse con centro en el origen y focos ± 1 , véase Figuras 4.2 y 4.3.

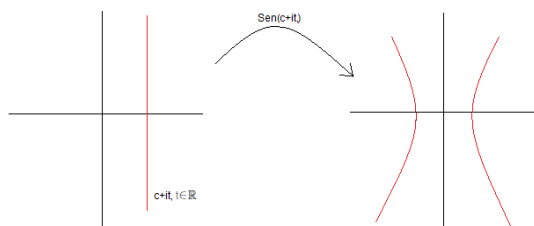


Figura 4.2: Imagen de rectas verticales.

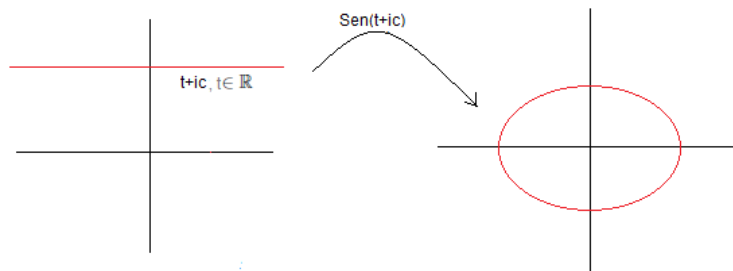


Figura 4.3: Imagen de rectas horizontales.

En conclusión, la transformación $\omega = \text{sen}(z)$ hace corresponder la red ortogonal que se forma con las rectas paralelas y los ejes de coordenadas a la red de elipses e hipérbolas con focos comunes ± 1 y centro en el origen, véase Figura 4.4.

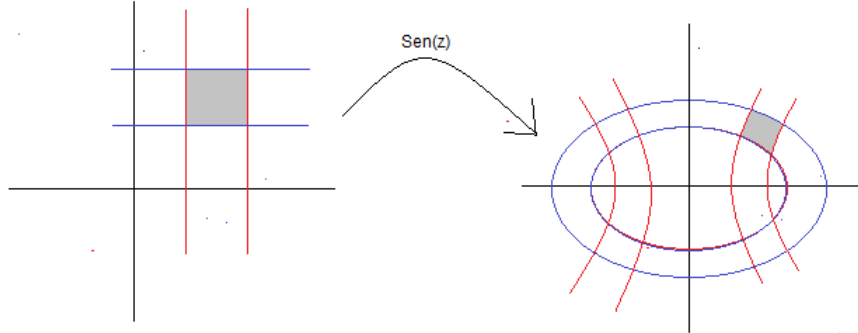


Figura 4.4: Red ortogonal.

Recordando la definición de valor asintótico demostremos el siguiente teorema.

Teorema 4.2. *La familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$ no tiene un valor finito asintótico.*

Demostración. Será suficiente demostrar que la función $\operatorname{sen}(z)$ no puede tener un valor asintótico finito.

Supongamos que $\operatorname{sen}(z)$ tiene un valor asintótico β , entonces por definición existe una curva continua $\gamma(t) \subset \mathbb{C}$, $0 \leq t < \infty$ tal que $\gamma(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ y $\operatorname{sen}(\gamma(t)) \rightarrow \beta$ cuando $t \rightarrow \infty$. Sea $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Observemos que $\operatorname{sen}(\gamma(t)) = \operatorname{sen}(x(t) + iy(t)) = \operatorname{sen}(x(t)) \left(\frac{e^{-y(t)} + e^{-y(t)}}{2} \right) + i \cos(x(t)) \left(\frac{e^{y(t)} - e^{-y(t)}}{2} \right)$. Como $x(t) \rightarrow \infty$ existe una sucesión $t_k \rightarrow \infty$ tal que $x(t_k) = k\pi$, se sigue que $\operatorname{Re}(\gamma) = 0$. Por otro lado, existe una sucesión $t_{k'} \rightarrow \infty$ tal que $x(t_{k'}) = 2k'\pi + \frac{\pi}{2}$. De $\operatorname{Re}(\operatorname{sen}(\gamma(t_{k'}))) = \frac{e^{y(t_{k'})} + e^{-y(t_{k'})}}{2} > 1$ se sigue que $\operatorname{Re}(\beta) \geq 1$ lo que es una contradicción. ■

4.2. Propiedades de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$

La familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$ tiene las siguientes propiedades:

1. *Valores singulares* de $f_\lambda = \lambda \operatorname{sen}(z)$.

Los puntos críticos de $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$ son los puntos que cumplen $f'(z) = 0$. Esto es, $\lambda \cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, los puntos críticos de f_λ son de la forma $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Al evaluar los puntos críticos en f_λ obtenemos:

$$f_\lambda \left((2k+1) \frac{\pi}{2} \right) = \{\lambda, -\lambda\}.$$

Por lo tanto, la función f_λ tiene valores críticos λ y $-\lambda$.

La familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$ no tiene valores asintóticos, véase 4.2. Así, el conjunto de valores singulares de f_λ es $SV = \{\lambda, -\lambda\}$.

2. *La familia f_λ pertenece a la clase \mathcal{S} .*

Observemos que el conjunto de valores singulares $SV(f_\lambda)$ es finito porque tiene sólo dos valores críticos λ y $-\lambda$. Así, $f_\lambda \in \mathcal{S}$.

3. *La familia f_λ no tiene componentes errantes, anillos de Herman ni dominios de Baker.*

Los anillos de Herman quedan fuera usando el principio del módulo máximo, véase Teorema 3.4.1. Por Teorema 3.15 y el Corolario 3.2 no existen componentes errantes ni dominios de Baker.

4. *Componentes de Fatou que se pueden encontrar en la dinámica de la familia f_λ .*
Por 1, 2 y 3 se tienen componentes atractoras, parabólicas y discos de Siegel para f_λ .

Capítulo 5

Dinámica de la familia $\lambda \operatorname{sen}(z)$ para $0 < |\lambda| \leq 1$

En este capítulo se enuncian algunos resultados demostrados por Domínguez y Sienna [11] y Zhang [32] para la familia f_λ para algunos valores del parámetro λ .

Si estudiamos una familia de funciones con un parámetro λ y un punto crítico podemos seguir la órbita del punto crítico bajo iteración. El plano de parámetros da información sobre la dinámica de una familia de funciones. Definimos el plano de parámetros de la familia $\lambda \operatorname{sen}(z)$ de la siguiente forma:

$$\mathcal{M} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| f^n \left(\frac{\pi}{2} \right) \right| \text{ est acotado} \right\}.$$

El plano de parámetros \mathcal{M} de $\lambda \operatorname{sen}(z)$ se graficó usando el programa FractalStream, véase la Figura 5.1.

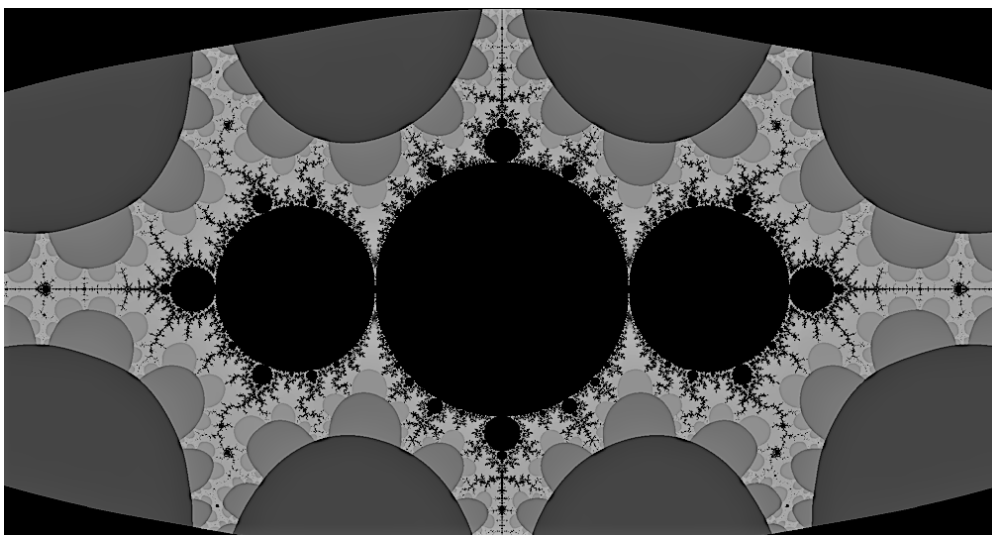


Figura 5.1: Plano de parámetros de $\lambda \operatorname{sen}(z)$.

Los siguientes resultados fueron demostrados por Domínguez y Sienna para pará-

metros dentro del disco unitario (cardioide principal en el plano de parámetros) y para algunos parámetros sobre el disco unitario, véase [11] para su demostración.

Teorema 5.1. *Sea $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$, donde $0 < |\lambda| < 1$. El conjunto de Fatou consiste de una componente U atractora completamente invariante, y simplemente conexa.*

Teorema 5.2. *Sea $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$, $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, $\theta = p/q$, con $(p, q) = 1$. Entonces si q es par, existe un ciclo con q componentes de Fatou atraídas a 0. Si q es impar, existen dos ciclos con q componentes de Fatou cada una. Estas son las únicas componentes periódicas de Fatou. Más aún, tales componentes son acotadas.*

Dando valores al parámetro λ , se pueden obtener planos dinámicos de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$, véase las Figuras 5.2 y 5.3 para los planos dinámicos cuando $\lambda = 0,7$ y $\lambda = 1$.



Figura 5.2: Plano dinámico para $\lambda = 0,7$.

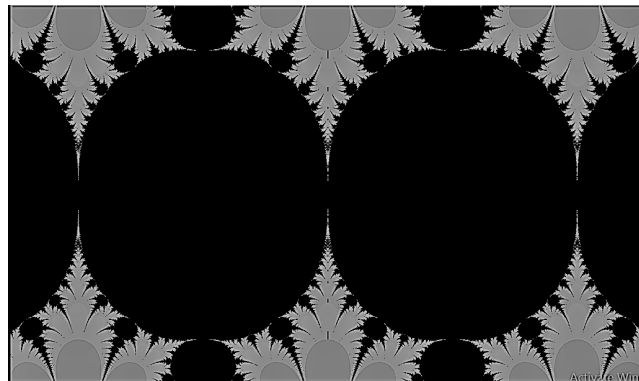


Figura 5.3: Plano dinámico para $\lambda = 1$.

Con respecto a discos de Siegel, G. Zhang demostró el siguiente teorema, véase [32] para su demostración.

Teorema 5.3. *Sea $0 < \theta < 1$ un número irracional de tipo acotado. Entonces la frontera del disco de Siegel de la función entera $f_\theta(z) = e^{2\pi i\theta} \operatorname{sen}(z)$ es un casi-círculo que pasa exactamente a través de dos puntos críticos $\pi/2$ y $-\pi/2$.*

Capítulo 6

Un estudio de la dinámica de la familia

$$f_\lambda = \lambda \operatorname{sen}(z) \text{ con } 1 < \lambda < 2,14$$

6.1. Dinámica de la familia $f_\lambda = \lambda \operatorname{sen}(z)$ con $1 < \lambda < 2,14$

Este capítulo estudiaremos la dinámica de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$ para valores reales del parámetro λ que cumplen $1 < \lambda < 2,14$. Es decir, estudiaremos parámetros que se encuentran sobre la recta real y que no están en el disco unitario o en la cardioide principal del plano de parámetros. También, estudiaremos los planos dinámicos para algunos valores λ mencionados anteriormente, esto es, estudiaremos los conjuntos de Fatou y Julia de $f_\lambda(z)$.

Para iniciar el estudio, enunciaremos el siguiente teorema demostrado por Domínguez y Sienra en [11]. Este teorema nos da la existencia de componentes de Fatou tangentes al disco unitario para $\lambda_0 = e^{2\pi ip/q}$.

Teorema 6.1. *Sea $f_{\lambda_0}(z) = \lambda_0 \operatorname{sen}(z)$, donde $\lambda_0 = e^{2\pi ip/q}$. Entonces existe una componente D_q tangente al disco unitario en λ_0 .*

La Figura 6.1 muestra el plano de parámetros y las componentes tangentes al disco unitario o componente D_0 . En la Figura 5.1 se han marcado los puntos 1, 1.57 y 2.14 en la componente D_q que es tangente en $\lambda = 1$. Tomaremos los parámetros que se encuentran sobre el eje real de la componente D_q , esto es, parámetros que están entre 1 y 2.14 y estudiaremos sus planos dinámicos. Observemos que en el plano de parámetros \mathcal{M} existe una componente simétrica a la componente D_q , esto es, porque la función $\operatorname{sen}(z)$ es simétrica, así sólo basta estudiar D_q .

Los puntos fijos de una función dan información del comportamiento dinámico de cualquier familia analítica. Utilizando el método de Newton de aproximación encontraremos puntos fijos de la familia $f_\lambda(x) = \lambda \operatorname{sen}(x)$ para diferentes valores de λ , donde $1 < \lambda < 2,14$.

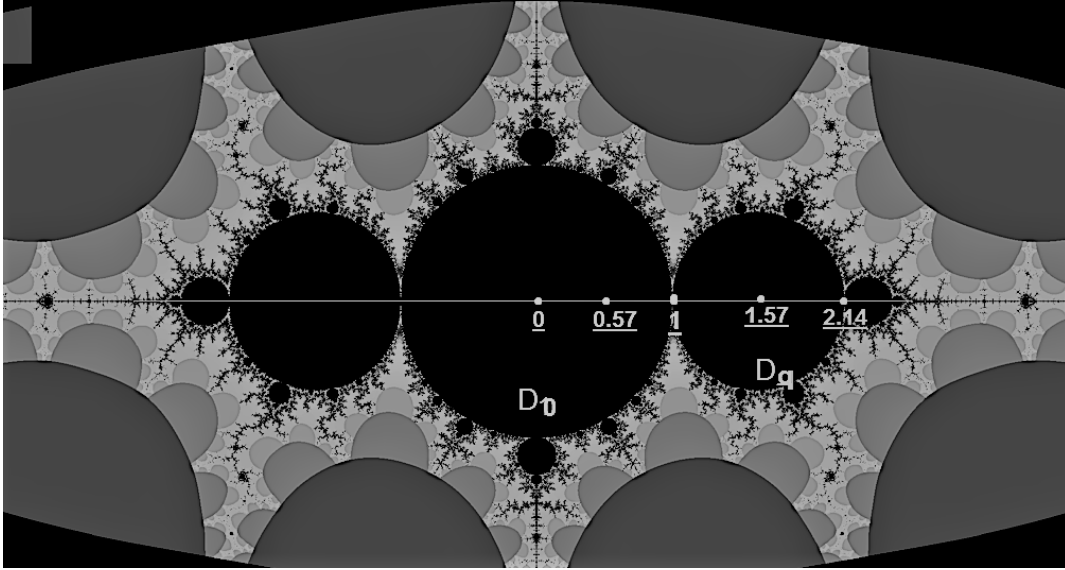


Figura 6.1: Componente D_q tangente en $\lambda = 1$ del plano de parámetros de $\lambda \text{sen}(z)$.

1. Valor de $\lambda = 1,1$.

$$x = 1 - \frac{1,1 \text{sen}(1) - 1}{1,1 \text{cos}(1) - 1} = 1 - 0,1833568693 \approx 0,8166431307.$$

$$x_1 = x - \frac{1,1 \text{sen}(x) - x}{1,1 \text{cos}(x) - 1} = 0,8166431307 - 0,0603836874 \approx 0,7562594433.$$

$$x_2 = x_1 - \frac{1,1 \text{sen}(x_1) - x_1}{1,1 \text{cos}(x_1) - 1} = 0,7562594433 - 0,0071731672 \approx 0,7490862761.$$

...

$$x_4 = x_3 - \frac{1,1 \text{sen}(x_3) - x_3}{1,1 \text{cos}(x_3) - 1} = 0,7489866657 - 0,000000023150189$$

$$x_4 \approx 0,748986638049811.$$

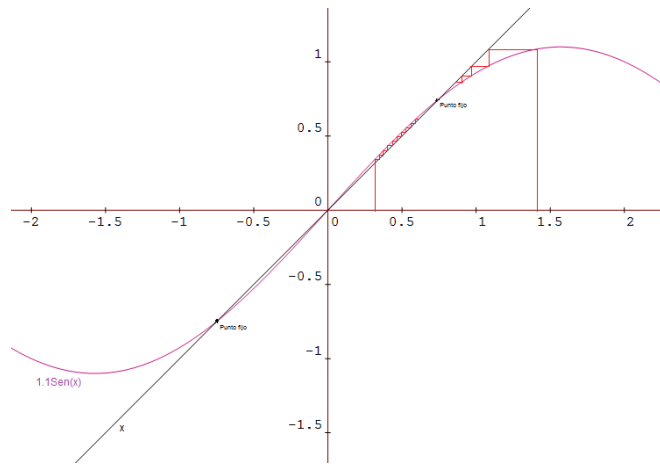
El punto fijo de $f_{1,1}(x) = 1,1 \text{sen}(x)$ es la aproximación 0,7489866. Observemos que el punto fijo obtenido es atractor porque satisface:

$$|f'_{1,1}(0,7489866)| = |1,1 \text{cos}(0,7489866)| \approx 0,80495 < 1.$$

Por otro lado, el punto 0 es punto fijo repulsor de $f_{1,1}(x) = 1,1 \text{sen}(x)$ porque satisface:

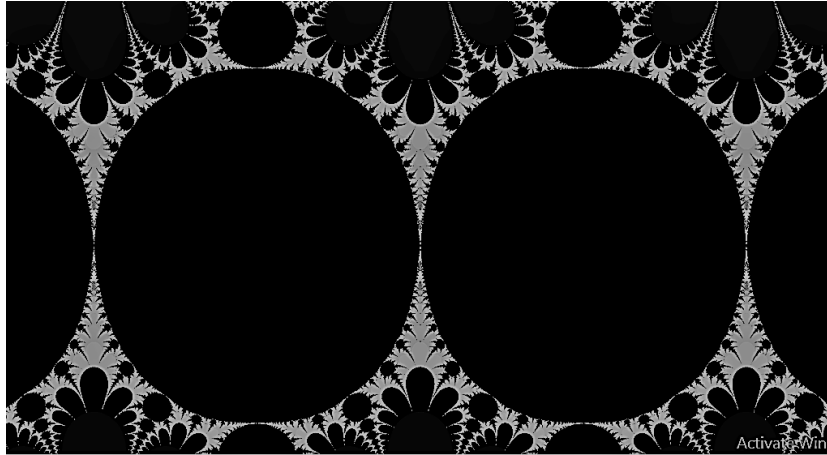
$$|f'_{1,1}(0)| = |1,1 \text{cos}(0)| = 1,1 > 1.$$

Gráficamente se puede apreciar el comportamiento de la iterada hacia delante de $f_{1,1}(x)$, véase Figura 6.2.

Figura 6.2: $1,1\operatorname{sen}(x)$.

Conclusión: La función $f_{1,1}$ tiene un punto fijo repulsor y dos puntos fijos atractores. Para valores positivos de $f_{1,1}$ las órbitas convergen al punto fijo atractor positivo y para los valores negativos las órbitas convergen al punto fijo atractor negativo.

En la Figura 6.3 se observa el plano dinámico de $f_{1,1}$, es decir, los conjuntos de Fatou y Julia de la función $f_{1,1}$.

Figura 6.3: Los conjuntos de Fatou y Julia de la función $f_{1,1}$.

Las figuras 6.4 y 6.5 muestran el comportamiento de la órbita de un punto que converge al punto fijo atractor de lado izquierdo y derecho, respectivamente.

2. Valor de $\lambda = 1,2$. El punto fijo de la función $f_{1,2}$ se obtiene de la siguiente forma:

$$x = 1 - \frac{1,2\operatorname{sen}(1) - 1}{1,2\operatorname{cos}(1) - 1} \approx 1,02777.$$

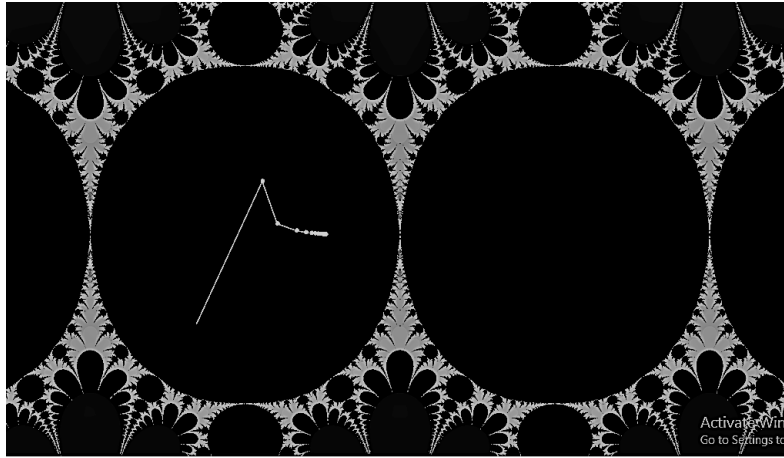


Figura 6.4: Iteración punto fijo lado izquierdo, donde $\lambda = 1,1$.

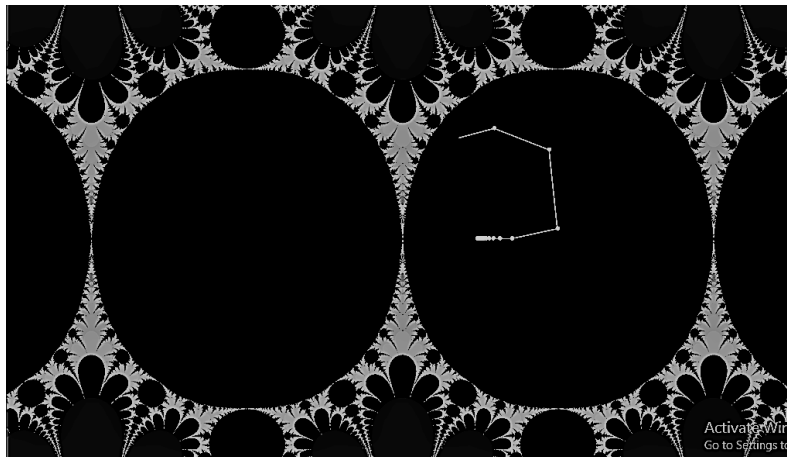


Figura 6.5: Iteración punto fijo lado derecho donde $\lambda = 1,1$.

$$x_1 \approx 1,026739.$$

$$x_2 \approx 1,02673829.$$

$$x_3 \approx 1,02673829.$$

Ahora, evaluando en la derivada de la función $f_{1,2}$, el punto fijo 1.02673829 obtenemos:

$$|f'_{1,2}(1,026738)| = |1,2 \cos(1,026738)| \approx 0,621134 < 1.$$

Esto es, el punto 1,026738 es un punto fijo atractor. Análogamente para el punto $-1,026738$. Observemos que el punto 0 es punto fijo repulsor porque satisface:

$$|f'_{1,2}(0)| = |1,2 \cos(0)| = 1,2 > 1.$$

Conclusión: Para $\lambda = 1,2$ existe un punto fijo repulsor y dos puntos fijos atractores, para valores positivos de $f_{1,2}(x)$ las órbitas convergen al punto fijo atractor positivo y para los valores negativos las órbitas convergen al punto fijo atractor negativo. La Figura 6.6 muestra gráficamente el comportamiento de la iterada hacia delante de $f_{1,2}(x)$.

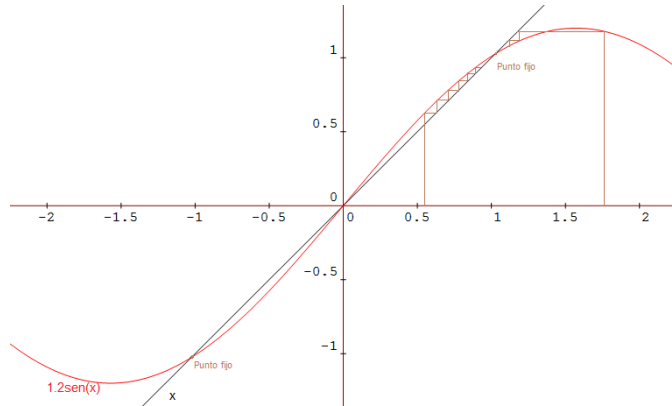


Figura 6.6: Comportamiento de órbita cuando $\lambda = 1,2$.

La Figura 6.7 muestra el plano dinámico de la función $f_{1,3}$, esto es, muestra los conjuntos de Julia y Fatou de $f_{1,3}$. Observese que hay dos componentes que parecen ser simplemente conexas, separadas por el eje imaginario que contiene al punto fijo repulsor 0. Las componentes contienen a los puntos fijos encontrados por aproximación, y pareciera que dentro de las componentes todos los puntos convergen a los dos puntos fijos atractores.

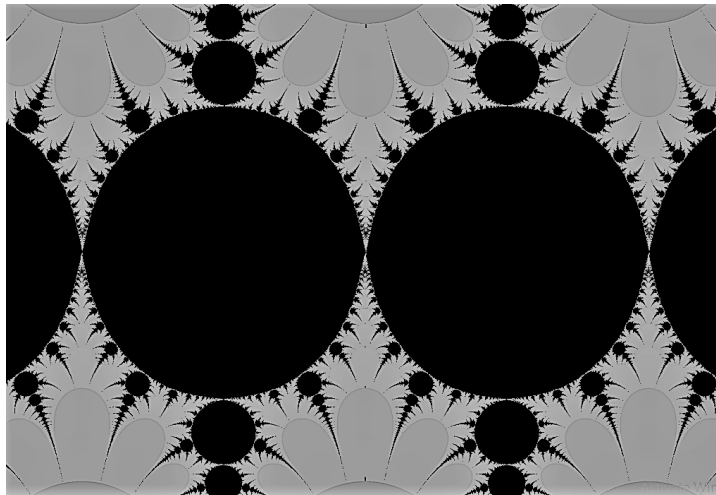


Figura 6.7: Plano dinámico para $\lambda = 1,2$.

Las figuras 6.8 y 6.9 muestran el comportamiento de la órbita de un punto que converge al punto fijo atractor de lado izquierdo y derecho, respectivamente.

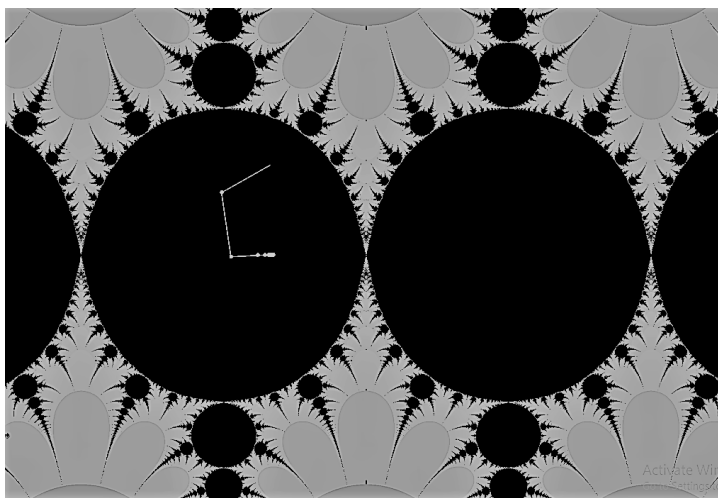


Figura 6.8: Iteración punto fijo de lado izquierdo para $\lambda = 1,2$.

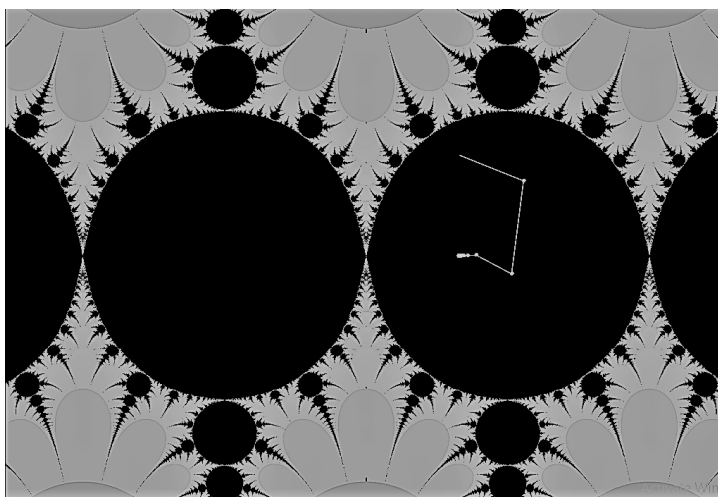


Figura 6.9: Iteración punto fijo de lado derecho para $\lambda = 1,2$.

3. Valor de $\lambda = 1,3$.

$$x = 1 - \frac{1,3\operatorname{sen}(1) - 1}{1,3\operatorname{cos}(1) - 1} \approx 1,3155580.$$

$$x_1 \approx 1,22970.$$

$$x_2 \approx 1,221569.$$

...

$$x_5 \approx 1,22149621.$$

El punto fijo de $f_{1,3}(x) = 1,3\operatorname{sen}(x)$ es la aproximación 1,221496, véase la Figura 6.10. Ahora, tomamos su derivada y la evaluamos en el punto fijo:

$$|f'_{1,3}(1,221496)| = |1,3\cos(1,221496)| \approx 0,44491 < 1.$$

Esto es, el punto 1,221496 es un punto fijo atractor de la función $f_{1,3}$. Análogamente para el punto $-1,221496$. El punto 0 es punto fijo repulsor porque satisface:

$$|f'_{1,3}(0)| = |1,3\cos(0)| = 1,3 > 1.$$

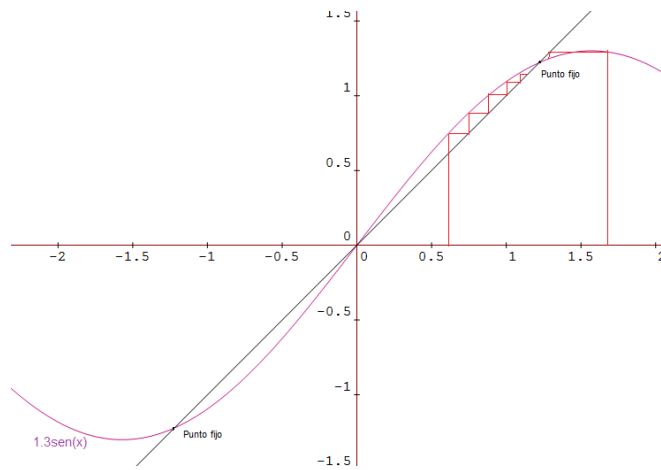


Figura 6.10: $\lambda = 1,3$.

Conclusión: Para $\lambda = 1,3$ existe un punto fijo repulsor y dos puntos fijos atractores. Para valores positivos de $f_{1,3}(x)$ las órbitas convergen al punto fijo atractor positivo, y para los valores negativos las órbitas convergen al punto fijo atractor negativo.

La Figura 6.11 muestra el plano dinámico cuando $\lambda = 1,3$.

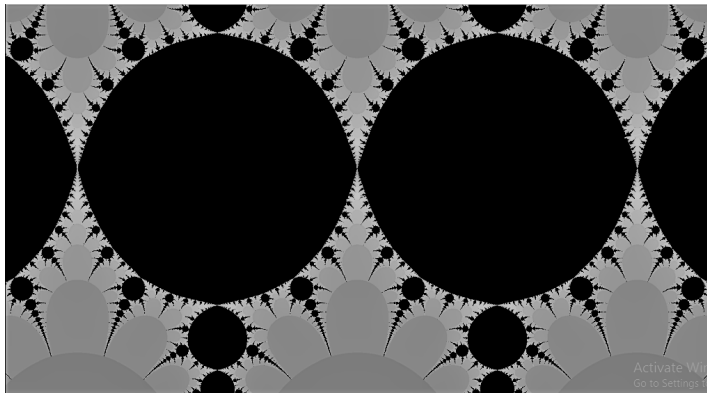


Figura 6.11: Plano dinámico para $\lambda = 1,3$.

La Figura 6.12 y 6.13 muestra el comportamiento de la órbita de un punto que converge al punto fijo atractor de lado izquierdo y derecho, respectivamente.

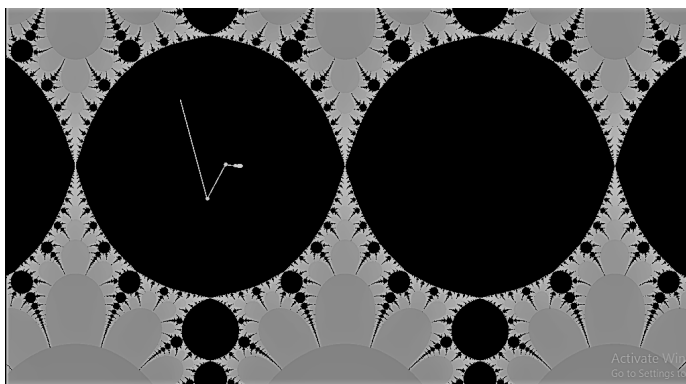


Figura 6.12: Iteración del punto fijo de lado izquierdo para $\lambda = 1,3$.

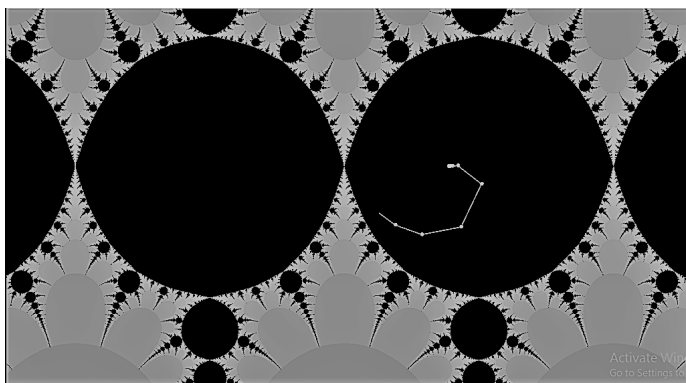


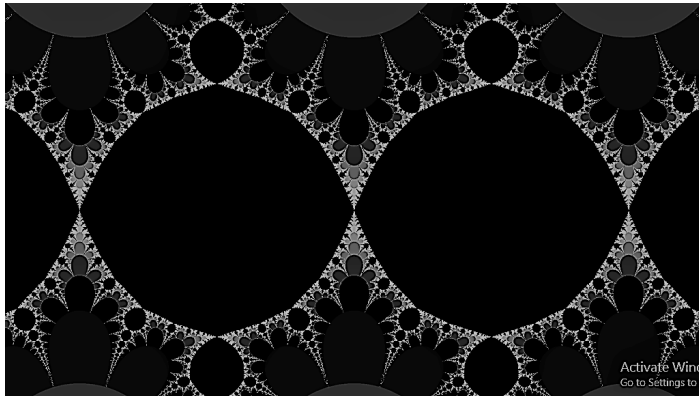
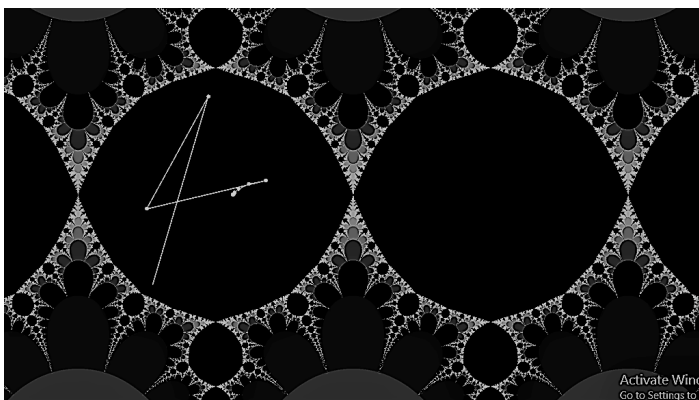
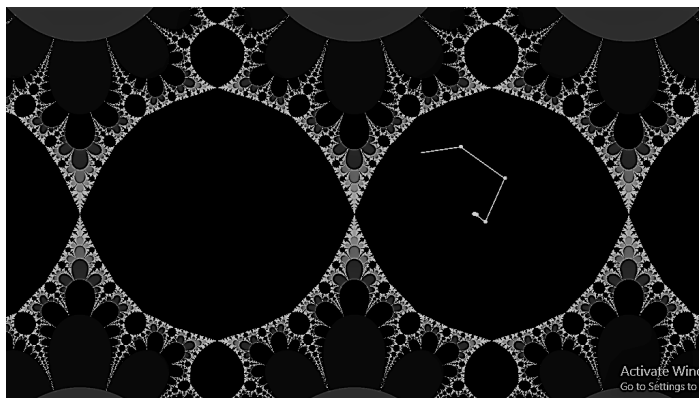
Figura 6.13: Iteración del punto fijo de lado derecho para $\lambda = 1,3$.

Continuando el proceso anterior para encontrar puntos fijos y la naturaleza de ellos, obtenemos las siguientes aproximaciones.

4. *Valor de $\lambda = 1,4$.*

La función $f_{1,4}(x) = 1,4 \operatorname{sen}(x)$ tiene como punto fijo la aproximación $1,37258984609$, que es un punto fijo atractor. La Figura 6.14 muestra el plano dinámico de la familia $f_{1,4}$.

Las Figuras 6.15 y 6.16 muestran el comportamiento de un punto que converge al punto fijo atractor de lado izquierdo y lado derecho, respectivamente.

Figura 6.14: Los conjuntos de Fatou y Julia de la función $1,4 \operatorname{sen}(x)$.Figura 6.15: Iteración al punto fijo de lado izquierdo cuando $\lambda = 1,4$.Figura 6.16: Iteración al punto fijo de lado derecho cuando $\lambda = 1,4$.

5. Valor de $\lambda = 1,5$.

La función $f_{1,5}(x) = 1,5 \text{sen}(x)$ tiene como punto fijo la aproximación $1,49578156822$, que es punto fijo atractor.

La Figura 5.17 muestra el plano dinámico de $f_{1,5}$. La Figura 6.18 muestra el comportamiento de la órbita de un punto de lado izquierdo y la Figura 6.19 muestra el comportamiento de la órbita de un punto de lado derecho.

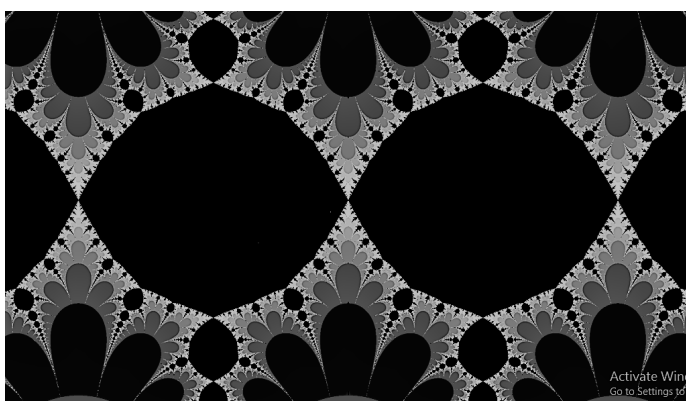


Figura 6.17: Plano dinámico para $\lambda = 1,5$.

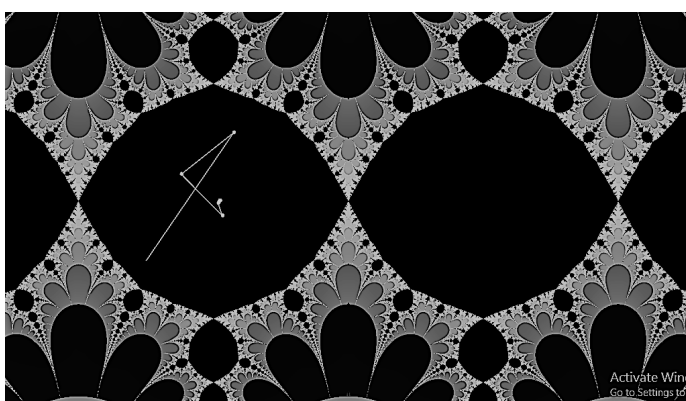
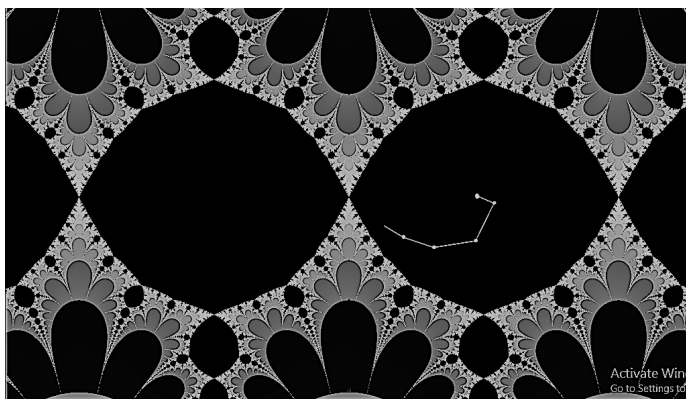
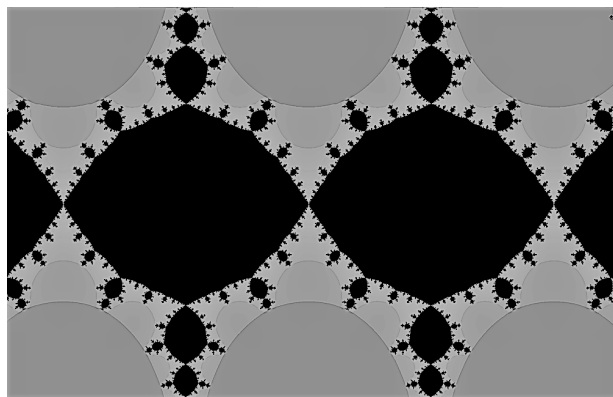
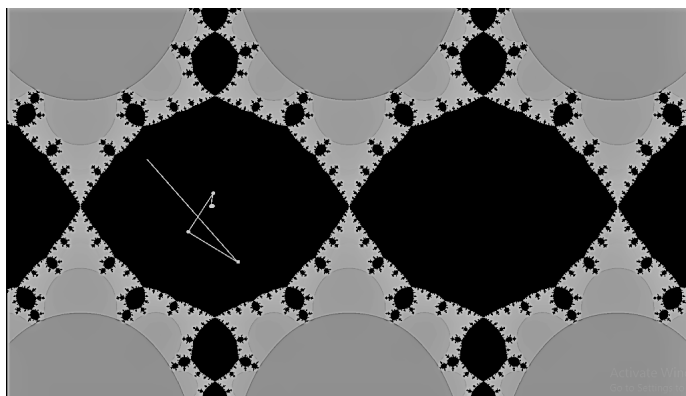


Figura 6.18: Iteración al punto fijo de lado izquierdo cuando $\lambda = 1,5$.

6. Valor de $\lambda = 1,6$.

La función $f_{1,6}(x) = 1,6 \text{sen}(x)$ tiene como punto fijo la aproximación $1,59934789085$ y este punto es un punto fijo atractor. Véase Figura 6.20 para el plano dinámico.

En la Figura 6.21 se muestra el comportamiento de la órbita de un punto de lado izquierdo.

Figura 6.19: Iteración al punto fijo de lado derecho cuando $\lambda = 1,5$.Figura 6.20: Plano dinámico para $\lambda = 1,6$.Figura 6.21: Iteración punto fijo lado izquierdo donde $\lambda = 1,6$.

En la Figura 6.22 se muestra el comportamiento de la órbita de un punto de lado derecho.

7. Valor de $\lambda = 1,7$.

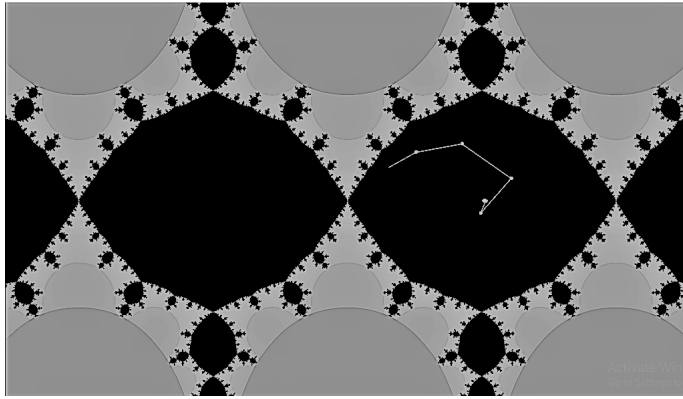


Figura 6.22: Iteración punto fijo lado derecho donde $\lambda = 1,6$.

La función $f_{1,7}$ tiene punto fijo la aproximación $-1,68828119787$ que es punto fijo atractor.

En la Figura 6.23 se muestra el plano dinámico de la función $f_{1,7}(x)$.

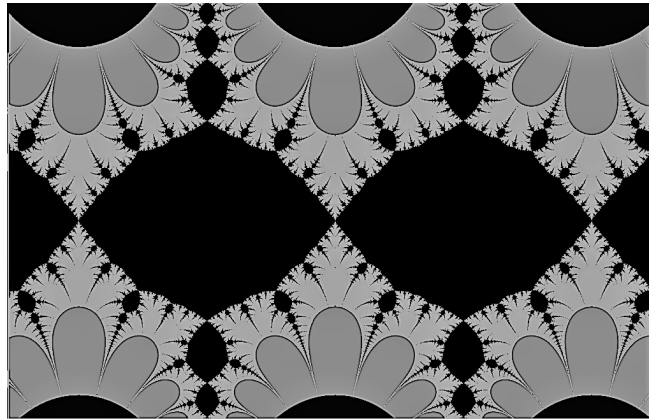


Figura 6.23: Plano dinámico para $\lambda = 1,7$.

Las Figuras 6.24 y 6.25 muestran el comportamiento de las órbitas.

8. Valor de $\lambda = \frac{\pi}{2}$.

$$x = 1 - \frac{\frac{\pi}{2} \text{sen}(1) - 1}{\frac{\pi}{2} \text{cos}(1) - 1} \approx 3,1268334798.$$

$$x_1 \approx 1,91948103796.$$

$$x_2 \approx 1,63106037046.$$

...

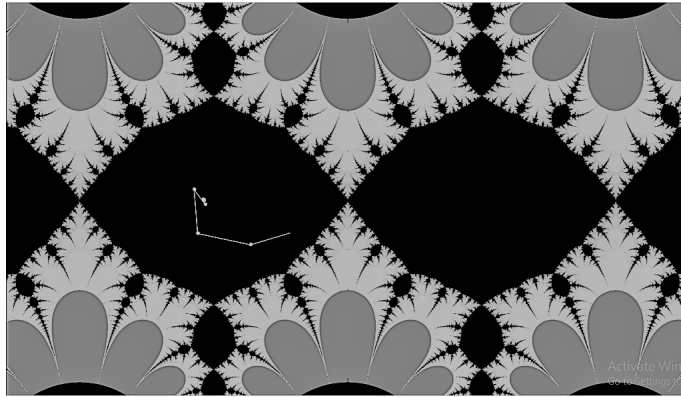


Figura 6.24: Iteración punto fijo lado izquierdo.

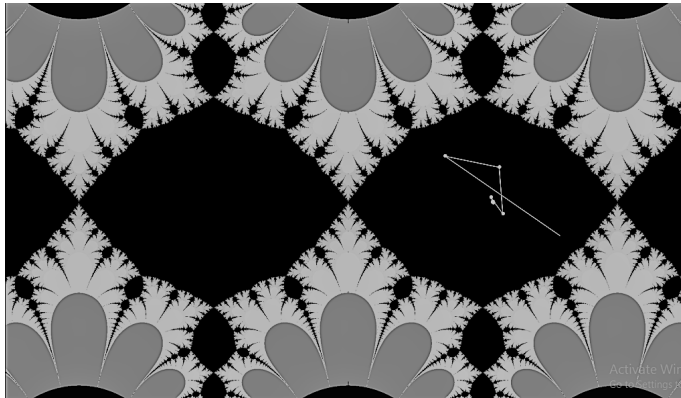


Figura 6.25: Iteración punto fijo lado derecho.

$$x_6 \approx 1,570779632679 \approx \frac{\pi}{2}.$$

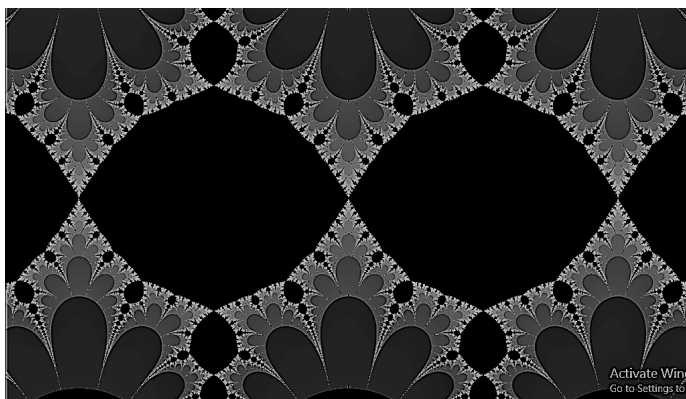
El punto fijo de $f_{\frac{\pi}{2}}$ es la aproximación $\frac{\pi}{2}$, véase la Figura 6.26.

Evaluando el punto fijo en la derivada obtenemos:

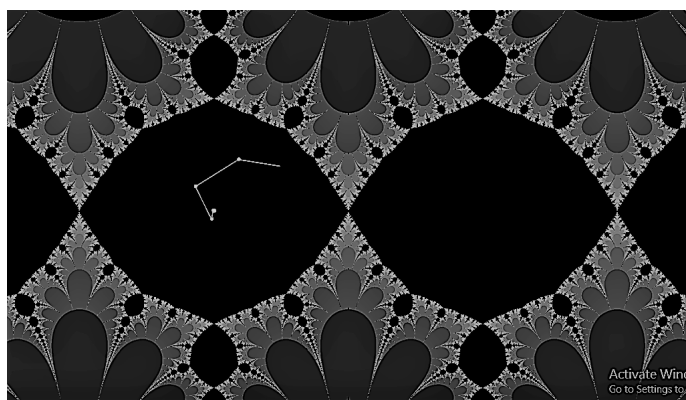
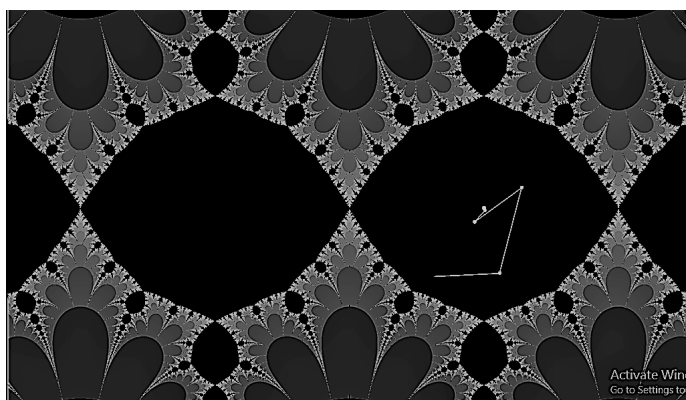
$$\left| f'_{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = \left| \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = 0 < 1.$$

Es decir, el punto $\frac{\pi}{2}$ es un punto fijo atractor y el punto 0 es punto fijo repulsor.

La Figura 6.26 muestra el plano dinámico para $\lambda = \frac{\pi}{2}$.

Figura 6.26: Plano dinámico para $\lambda = \frac{\pi}{2}$.

Las Figuras 6.27 y 6.28 muestran el comportamiento de la órbita.

Figura 6.27: Iteración punto fijo lado izquierdo donde $\lambda = \frac{\pi}{2}$.Figura 6.28: Iteración punto fijo lado derecho donde $\lambda = \frac{\pi}{2}$.

9. Valor de $\lambda = 2,14$.

Del método de Newton para la aproximación de puntos se tiene que el número 1,9709 es una aproximación del punto fijo para $f_{2,14}$. Evaluando el punto fijo en la derivada obtenemos:

$$|f'_{2,14}(1,9709)| = |2,14 \cos(1,9709)| = 0,83355 < 1.$$

Esto es, el punto 1,9709 es un punto fijo atractor, así el punto $-1,9709$ es también punto fijo atractor. El punto 0 es punto fijo repulsor. La Figura 6.29 muestra el plano dinámico de la función $f_{2,14}$.

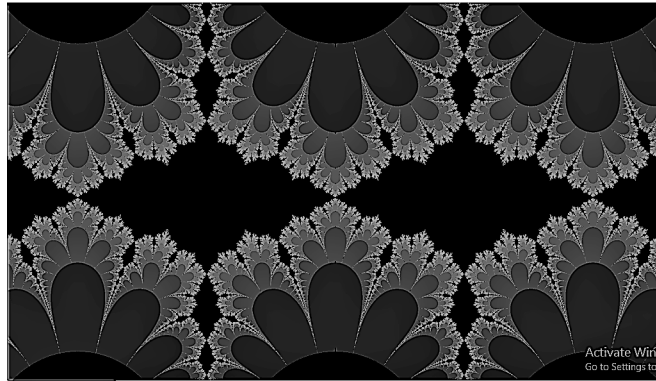


Figura 6.29: Los conjuntos de Fatou y Julia de la función $2,14 \operatorname{sen}(x)$.

La Figura 6.30 muestra el comportamiento de la órbita de un punto que converge al punto fijo atractor de lado izquierdo.

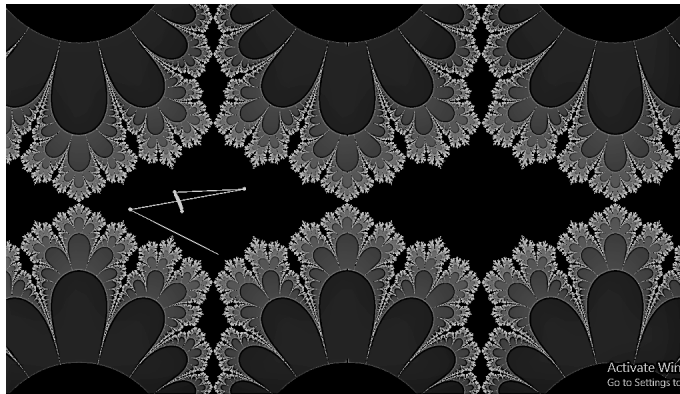


Figura 6.30: Órbita del punto de lado izquierdo.

Conclusión. Si tomamos $1 < \lambda < 2,14$ la familia $f_\lambda(z) = \lambda sen(z)$ siempre tiene dos puntos fijos atractores, y el cero es un punto fijo repulsor.

Las siguientes conjeturas se enuncian a partir de la observación de los datos obtenidos de 1 al 9. Es importante observar que la unicidad de los puntos fijos que se han encontrado para los valores de λ dados no está demostrada, por lo tanto este trabajo sólo contiene aproximaciones que conducen a las siguientes conjeturas.

Conjetura 1. Sea $f_\lambda(z) = \lambda sen(z)$. Para $1 < \lambda < 2,14$ el conjunto de Fatou tiene dos componentes atractoras que son simplemente conexas. Similar para el caso $-2,14 < \lambda < -1$.

Conjetura 2. Sea $f_\lambda(z) = \lambda sen(z)$. En una vecindad de $\frac{\pi}{2}$ con radio $\epsilon = 0,4$ el conjunto de Fatou tiene dos componentes atractoras que son simplemente conexas.

Es importante mencionar que la aproximación se inició buscando resultados sobre los valores de λ reales con el fin de extenderlos, en un futuro, a valores complejos. Para demostrar las conjeturas antes mencionadas, se necesitan argumentos matemáticos (no de aproximación) para ver que realmente los puntos fijos que se obtuvieron realizando el método de Newton son únicos.

6.2. El caso $\lambda sen(it)$ con $t \in \mathbb{R}$

En esta sección estudiaremos el caso cuando $z = it$ con $t, \lambda \in \mathbb{R}$ en la familia $\lambda sen(z)$. Tomando $f_\lambda(it)$ y haciendo cuentas obtenemos que puntos en el eje imaginario la función los envía a puntos en el eje imaginario. Esto es,

$$\begin{aligned} f_\lambda(it) &= \lambda sen(it) = \lambda \left(\frac{e^{-t} - e^t}{2i} \right) = \\ &= i \left(\lambda \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) = i (\lambda senh(t)). \end{aligned}$$

Ahora, veamos algunos puntos fijos de la familia $f_\lambda(t)$. Por ejemplo, si tomamos $\lambda = 1$ obtenemos la función $f_1(t) = senh(t)$ con gráfica la Figura 6.31.

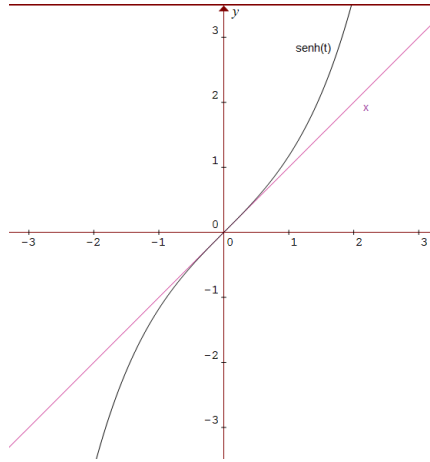
Los puntos fijos de f_1 deben cumplir:

$$senh(t) = t \Leftrightarrow \frac{e^t - e^{-t}}{2} = t \Leftrightarrow e^t - e^{-t} = 2t.$$

Observemos que $e^t, e^{-t} > 0$ y $senh(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = 0$, el 0 es el único punto fijo.

Ahora tomando

$$|g'(0)| = |cosh(0)| = \left| \frac{e^0 + e^{-0}}{2} \right| = 1,$$

Figura 6.31: $\text{sen}(t)$.

obtenemos que 0 es punto fijo indiferente.

Los puntos críticos de f_1 se obtiene derivando f_1 , esto es,

$$\frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) = \text{cosh}(t).$$

Sabemos que $e^t > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, así la derivada de $\text{senh}(t)$ nunca es cero. Por lo tanto concluimos que $\text{senh}(t)$ no tiene puntos críticos.

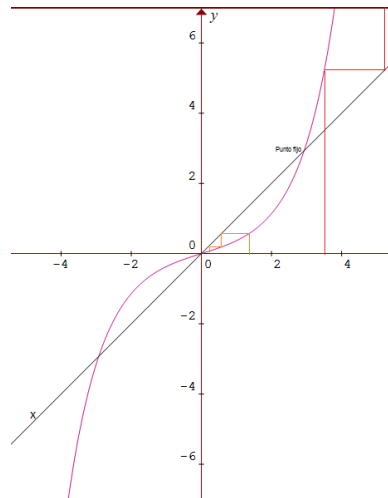
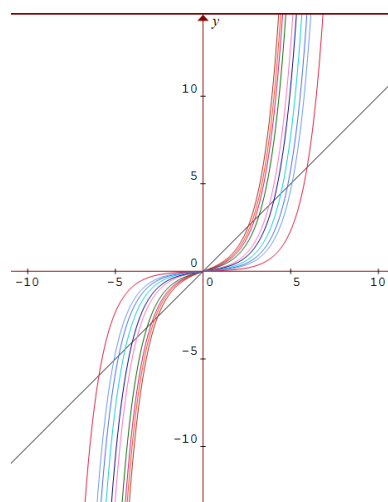
Del comportamiento de sus gráficas de acuerdo al valor de λ que tomemos se puede concluir lo siguiente:

- Para $\lambda \geq 1$ la familia $\lambda \text{senh}(t)$ tiene un punto fijo que es 0.
- Para $\lambda < 0$ la familia $\lambda \text{senh}(t)$ tiene un punto fijo que es 0.
- Para $\lambda \in (0, 1)$ la familia $\lambda \text{senh}(t)$ tiene tres puntos fijos, el 0, $\rho_+(\lambda)$ y $\rho_-(\lambda)$.

Las Figuras 6.32 y 6.33 muestran las gráficas de $\frac{\pi}{10} \text{senh}(t)$ y $\lambda \in (0, 1)$, respectivamente.

Con lo expuesto en la sección, podemos establecer una conjetura para los puntos fijos que se encuentran en el eje imaginario de la familia $\lambda \text{sen}(z)$.

Conjetura 4: Hay dos puntos fijos sobre el eje imaginario, localizados en $i\rho_{\pm}(\lambda)$, donde $\rho_+ > 0$ y $\rho_- = -\rho_+$. Tales puntos son repulsores, y la porción positiva del eje imaginario que conecta $i\rho_+(\lambda)$ con ∞ consiste de puntos que tienden a ∞ , similarmente para $i\rho_-(\lambda)$ en la porción negativa del eje imaginario.

Figura 6.32: $\frac{\pi}{10} \operatorname{senh}(t)$.Figura 6.33: $\lambda \in (0, 1)$.

Capítulo 7

Dinámica de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \text{sen}(z)$ cuando

$$\lambda_n = \frac{\pi(4n+1)}{2}$$

De las secciones anteriores podemos observar que mientras más crezca el valor de λ mayor será la amplitud de $f_\lambda(x) = \lambda \text{sen}(x)$, es decir que el número de puntos fijos será mayor cada vez más pero ¿Qué tanto debe crecer λ para que el número de puntos fijos sea diferente?.

Para $0 < \lambda \leq 1$, $f_\lambda(x)$ tiene sólo un punto fijo real, el cero, véase Figura 5.31.

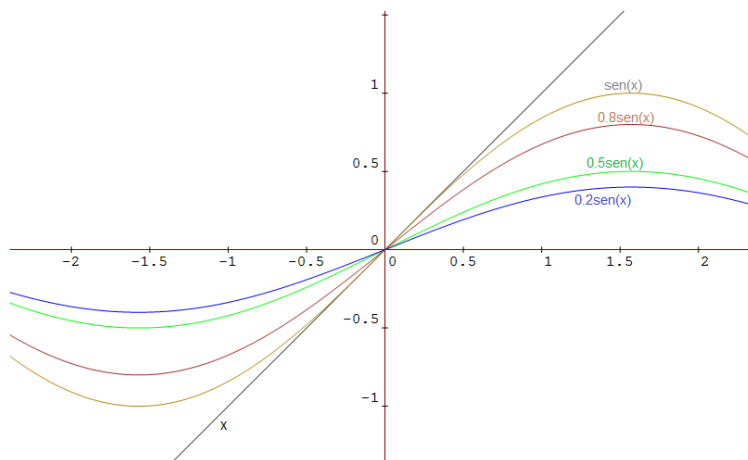


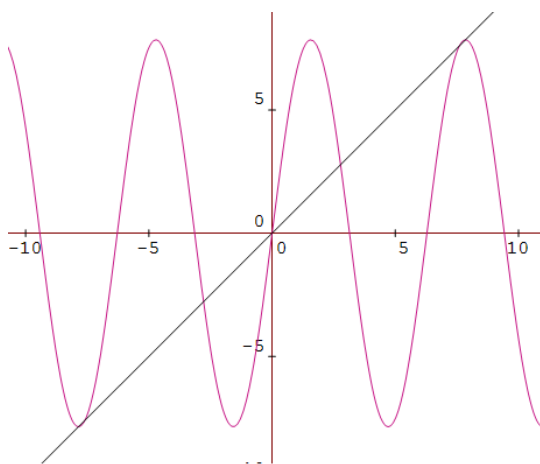
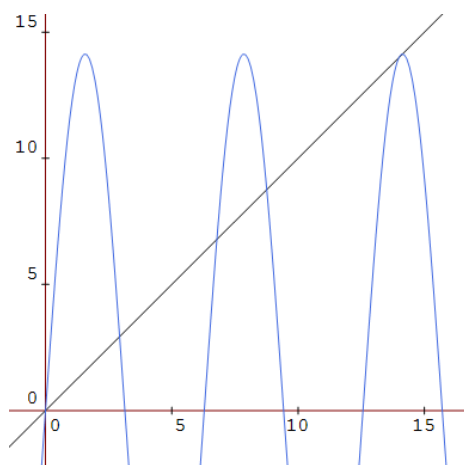
Figura 7.1: $0 < \lambda \leq 1$.

Para $0 < \lambda < \lambda_1$, con $\lambda_1 = \frac{5\pi}{2}$ $f_\lambda(x)$ tiene 2 puntos fijos que son $x_0 = 0$, $x_1 \in (0, \pi)$, véase Figura 5.32.

Para $\lambda = \lambda_1$, f_λ tiene 3 puntos fijos que son $x_0 = 0$, $x_1 \in (0, \pi)$ y $x_2 \in (2\pi, 3\pi)$.

Para $0 < \lambda < \lambda_2$, con $\lambda_2 = \frac{9\pi}{2}$ $f_\lambda(x)$ sigue teniendo los 3 puntos fijos.

Para $\lambda = \lambda_2$, con $\lambda_2 = \frac{9\pi}{2}$ $f_\lambda(x)$ tiene 5 puntos fijos que son $x_0 = 0$, $x_1 \in (0, \pi)$, $x_2 \in (2\pi, \frac{5\pi}{2})$, $x_3 \in (\frac{5\pi}{2}, 3\pi)$, $x_4 \in (4\pi, 5\pi)$, véase Figura 5.33.

Figura 7.2: $\lambda = \frac{5\pi}{2}$.Figura 7.3: $\lambda = \frac{9\pi}{2}$.

Para $0 < \lambda < \lambda_3$, con $\lambda_3 = \frac{13\pi}{2}$ $f_\lambda(x)$ sigue teniendo los 5 puntos fijos.

Para $\lambda = \lambda_3$, con $\lambda_3 = \frac{13\pi}{2}$ $f_\lambda(x)$ tiene 7 puntos fijos que son $x_0 = 0$, $x_1 \in (0, \pi)$, $x_2 \in (2\pi, \frac{5\pi}{2})$, $x_3 \in (\frac{5\pi}{2}, 3\pi)$, $x_4 \in (4\pi, \frac{9\pi}{2})$, $x_5 \in (\frac{9\pi}{2}, 5\pi)$ y $x_6 \in (6\pi, 7\pi)$, véase Figura 5.34.

De esta sección se conjetura lo siguiente.

Conjetura 3: Sea $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$. Cuando $\lambda = \lambda_n$, $n \geq 1$, con $\lambda_n = \frac{\pi(4n+1)}{2}$, la función f_λ tiene $2n + 1$ puntos fijos (incluyendo el cero).

Para valores de λ mayores que 1, el cero es un punto fijo repulsor porque satisface:

$$f'_\lambda(x) = \lambda \cos(x)$$

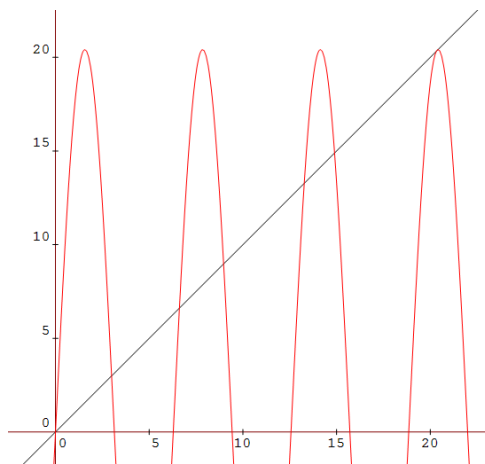


Figura 7.4: $\lambda = \frac{13\pi}{2}$.

$$|f'_\lambda(0)| = \lambda > 1.$$

Pero ¿los $2n$ puntos fijos restantes de f_λ son repulsores, atractores o indiferentes?

Recordando las propiedades de la función coseno en los reales, sabemos que $\cos(x) = 0$ si, y sólo si $x = \frac{\pi}{2}(4n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \left| f'_{\lambda \frac{\pi}{2}(4n+1)} \left(\frac{\pi}{2}(4n+1) \right) \right| &= \left| \frac{\pi}{2}(4n+1) \cos \left(\frac{\pi}{2}(4n+1) \right) \right| \\ &= \left| \frac{\pi}{2}(4n+1) \times 0 \right| = 0 < 1. \end{aligned}$$

Esto es, cuando los valores de λ coinciden con los puntos fijos de la función f_λ (es decir los $\lambda = \frac{\pi(4n+1)}{2}$) estos puntos son fijos atractores.

Conclusiones

El objetivo principal de esta tesis es estudiar e investigar la dinámica de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$ para una posible extensión de los resultados obtenidos por Domínguez y Sierra en [10] a la componente D_q . Tomamos valores de λ y $z \in \mathbb{R}$ en la componente D_q , véase Figura 5.1, obteniendo las siguientes conjeturas.

1. **Conjetura 1.** Sea $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$ se conjetura.
 - (1) Para $1 < \lambda < \frac{\pi}{2} + 0,57$ el conjunto de Fatou tiene dos componentes simplemente conexas atractoras. Similar para el caso $-\frac{\pi}{2} + 0,57 < \lambda < -1$.
 - (2) En una vecindad de $\frac{\pi}{2}$ con radio $\epsilon = 0.4$ el conjunto de Fatou tiene dos componentes atractoras simplemente conexas.
2. **Conjetura 2.** Sea $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$, para $\lambda = \lambda_n$, $n \geq 1$, con $\lambda_n = \frac{\pi(4n+1)}{2}$. La función f_λ tiene $2n + 1$ puntos fijos (incluyendo el cero). Como anteriormente lo hicimos, nombraremos por $\rho_+(\lambda_n)$ a estos puntos fijos recordando que solo estamos tomando en cuenta a aquellos que se encuentran en la porción positiva de $f_{\lambda_n}(x)$.
3. **Conjetura 3.** Sea $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$, con $z = it$, $t \in \mathbb{R}$. Hay dos puntos fijos sobre el eje imaginario, localizados en $i\rho_\pm(\lambda)$ donde $\rho_+ > 0$ y $\rho_- = -\rho_+$. Dichos puntos son repulsores, y la porción positiva del eje imaginario que conecta $i\rho_+(\lambda)$ con ∞ consiste de puntos que tienden a ∞ , similarmente para $i\rho_-(\lambda)$ en la porción negativa del eje imaginario.

Bibliografía

- [1] Ahlfors, Lars V. *Complex Analysis an Introduction to the Theory of Analytic functions of one Complex Variable*, 2da ed. McGraw-Hill Book Company, (1966).
- [2] Amo, Enrique de. *Introducción al curso de Análisis Complejo*, Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-2009, Universidad de Almería.
- [3] Baker, Irving N. *Repulsive Fixpoints of Entire Fuctions*. Math. Zeitschr., (1968), págs. 252-256.
- [4] Baker, Irving N. *Completely invariant domains of entire functions*. Math. essays dedicated to A. J. MacIntyre, Ohio Univ. Press, Athens, Ohio. (1970).
- [5] Baker, Irving N. The domains of normality of an entire function. Ann. Academy Society, Fenn Ser, (1975), págs. 277-283.
- [6] Bergweiler, Walter. *An Introduction to Complex Dynamics*. Textos de Matemática. Universidad de Coimbra, Série B, No. 6, (1995).
- [7] Bergweiler, Walter. *Iteration of entire functions*. Version of november 4, (2014).
- [8] Bergweiler, Walter. *Iteration of meromorphic functions*. American Mathematical Society. Vol. 29, No. 2, (1993), Págs. 151-188.
- [9] Conway, John B. *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, (1978).
- [10] Domínguez, Patricia y Contreras, V. J. E. *Dinámica Holomorfa, Los conjuntos de Fatou y Julia y algunas de sus propiedades de tres clases de funciones meromorfas*. Monografía, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Editorial BUAP, (2014).
- [11] Domínguez, Patricia y Sienra, Guillermo. *A study of the dynamics of $f_\lambda(z) = \lambda \sin(z)$* . International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 12, No. 12 (2012), pags. 2869-2883.
- [12] Eremenko A. E. *On the iteration of entire functions*. Dynamical systems and ergodic theory banach center publications, Vol. 23, (1989).

-
- [13] Eremenko A. E., Lyubich M. Yu. *The dynamics of analytic transformations*. Leningrad Math. J., Vol. 1, No. 3, (1990).
- [14] Etcheberry, Alain. *Elementos de Variable Compleja*, 2da ed. Equinoccio, (2000).
- [15] Fatou, Pierre. *Sur les équations fonctionnelles*. Bulletin de la Société Mathématique de France. Vol. 47, (1919), págs. 161-271.
- [16] Fatou, Pierre. *Sur l'itération des fonctions transcendentes entières*. Bulletin de la Société Mathématique de France. Vol. 47, (1926), págs. 337-370.
- [17] Francis, Ivan Wilde. *Lecture Notes on Complex Analysis*. Imperial College Press. World Scientific Publishing. British Lybrary Cataloguring in Publication. (2006).
- [18] Hua, Xin-Hou and Yang, Chung-Chung. *Dynamics of Transcendental Functions*. Asian Mathematics Series, Gordon and Breach Science Publishers, (1998).
- [19] Ivorra, Carlos C. *Funciones de Variable Compleja con Aplicaciones a la Teoría de Números*. Universidad de Valencia, (2008).
- [20] Julia, Gaston. *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles*. J. Math. Pure Appl., (1918), págs. 61-64.
- [21] Markushevich, A. *Teoría de las funciones analíticas*, Tomo 1, 1ra. edición, editorial Mir, (1970).
- [22] McMullen, Curt. *Area and hausdorff dimension of julia sets of entire functions*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 300, No. 1. (1987).
- [23] Milnor, John. *Dynamics in One Complex Variable*, Princeton University Press, third edition, (2006).
- [24] Morosawa S., Nishimura Y. *Holomorphic Dynamics*, Cambridge studies in advanced mathematics 66, Editorial Board, (2000).
- [25] Nieto, José I. and Chesneau, Eva V. *Funciones de Variable Compleja*, ed. 3, Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos, Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, (1980).
- [26] Noguchi, Junjiro. *Introduction to Complex Analysis*, Vol. 168, American Mathematical Society, (1998).
- [27] Palka, Bruce P. *An introduction to Complex Function Theory*, 2da ed. Springer-Verlag, (1990).
- [28] Schiff, Joel F. *Normal Families*, Springer, (1993).
- [29] Spiegel, Murray R. *Variable Compleja*. McGraw-Hill, (2004).

-
- [30] Yang, Chung-Chun, Chuang, Chuang. *Fix-Points and Factorization of Meromorphic Functions*. World Scientific, (1990).
- [31] Zalcman, Lawrence. *A Heuristic Principle in Complex Function Theory*. The American Mathematical Monthly, (1975), págs. 813-817.
- [32] Zhang, Gaoferi. *On the Dynamics of $e^{2\pi i\theta} \sin(z)$* . Illinois Journal of Mathematics, Vol 49, (2005), pags. 1171-1179.