Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Algunas aplicaciones de los números complejos, dobles y duales en la física teórica

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Karla Cinthya Gutiérrez Herrera

Asesorada por

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo

Puebla Pue.
5 de Febrero de 2020

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Algunas aplicaciones de los números complejos, dobles y duales en la física teórica

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Karla Cinthya Gutiérrez Herrera

Asesorada por

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo

Puebla Pue.
5 de Febrero de 2020

Título: Algunas aplicaciones de los números complejos, dobles y duales en la física teórica
Estudiante: Karla Cinthya Gutiérrez Herrera

COMITÉ

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Presidente

Dra. Iraís Rubalcava García
Secretario

Dr. Hectór Novales Sanchéz
Vocal

Dra. Ana Aurelia Avilez López
Vocal

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
Asesor

Agradecimientos

Al Dr. Gerardo F. Torres del Castillo por su inconmensurable paciencia y su disposición a resolver mis dudas.

A mis padres y hermanos por enseñarme día a día el significado de la palabra amor, por todo su apoyo y porque a pesar de todo siguen creyendo en mi.

A mis amigos, compañeros y profesores de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, porque sin su apoyo y guía probablemente no hubiera dicho: ¡al fin lo logré!

Gracias infinitas a todos los que fueron partícipes de todo este proceso llamado educación.

Índice general

Resumen

Se estudian algunas aplicaciones de los números hipercomplejos en la física matemática, en particular se muestra que los grupos unitarios de matrices 2×2 con entradas hipercomplejas están relacionados con grupos útiles en la física, además, a partir de los parámetros de Cayley-Klein se definen vectores en el espacio tridimensional y se encuentran las órbitas asociadas a estos grupos matriciales 3×3. Por otra parte se estudia la ecuación de Laplace en diferentes sistemas de coordenadas en el espacio euclidiano; así mismo se estudia la ecuación de Laplace en el espacio $(2 + 1)$ de Minkowski y se usan las propiedades de los números dobles para presentar una función generatriz que permite relacionar las soluciones de ambos espacios.

Palabras clave: Números dobles, números duales, grupos, función generatriz, ecuación de Laplace.

Introducción

Los números complejos han sido de gran utilidad en la física; existen ramas en las cuales su aplicación es más notoria, tal es el caso de la mecánica cuántica y el electromagnetismo. Desde su aparición, alrededor de 1545, hasta nuestros días se ha construido una teoría sólida que estudia sus propiedades y aplicaciones. Existe una extensión de estos números conocidos como números duales y dobles (aunque se usan también otros nombres), cuya representación asemeja la de los números complejos: $a+hb$, donde a y $b \in \mathbb{R}$ y h puede ser igual a i, j o ϵ. Cuando $h = \mathrm{j}$ se les conoce como números *dobles*, si $h = \epsilon$ se denominan números *duales* y para $h = \mathrm{i}$ son los números complejos. Al igual que sucede con la unidad imaginaria i, estas unidades cumplen con una propiedad semejante cuando se toma el cuadrado de ellas. Para los números dobles, se cumple $\mathrm{j}^2 = 1$ sin embargo $\mathrm{j} \neq \pm 1$, y en el caso de los números duales; $\epsilon^{\ 2} = 0$ con $\epsilon \neq 0$. A pesar de tener propiedades semejantes a los números complejos, los números duales y dobles no forman un campo como sucede con los números complejos. No obstante esto no limita que existan diversas aplicaciones en física y matemáticas. Ejemplo de esto es que se estudian la imagen de los homomorfismos entre los grupos de matrices unitarias 2×2 con entradas hipercomplejas y algunos de los grupos importantes en física: $SO(3), SO(2,1)$ y el grupo de movimientos rígidos en el plano euclidiano. Además, se muestra que a partir de los parámetros de Cayley-Klein se pueden definir vectores en el espacio real tridimensional, y se encuentran las órbitas relacionadas a estos grupos matriciales 3×3. Por otro lado se estudia la ecuación de Laplace en el espacio euclidiano y en el espacio de Minkowski $(2+1)$, se presenta una función generatriz que es válida en el espacio euclidiano, sin embargo se encuentra que también se pueden hallar las soluciones en el espacio de Minkowski, utilizando las propiedades de la unidad hipercompleja j.

El presente trabajo está estructurado de la siguiente forma: en el Capítulo 1 se estudian los homomorfismos entre los grupos unitarios y grupos de matrices 3×3. En el Capítulo 2 se estudia la relación de los grupos unitarios y los parámetros de Cayley-Klein. En el Capítulo 3 se estudian las soluciones de la ecuación de Laplace en varios sistemas de coordenadas en el espacio euclidiano y en el espacio de Minkowski $(2+1)$, donde se hace uso de los números dobles. Finalmente se dan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 1

Grupos unitarios

1.1. Fundamentos algebraicos

El grupo $SU(2)$ es relevante en la física, en particular en la mecánica cuántica por su relación con el operador de espín [1]. Los elementos del grupo son matrices cuadradas 2×2 con determinante igual a uno que cumplen con la propiedad[1] $U^{\dagger}U = \mathbb{I}$, bajo la operación de grupo definida por la multiplicación estándar de matrices. Todo elemento del grupo se puede representar como

$$U = \begin{pmatrix} a+\mathrm{i}b & c+\mathrm{i}d \\ -c+\mathrm{i}d & a-\mathrm{i}b \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, i representa la unidad imaginaria usual y $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Es bien conocido que existe un homomorfismo entre los grupos $SU(2)$ y el grupo de rotaciones en el espacio euclidiano tridimensional, $SO(3)$ [1].

De forma análoga podemos estudiar los elementos del grupo $SU(2)_j$, cuyos elementos se pueden representar como la ecuación (1.1) con entradas que son números dobles, y verificar que existe un homomorfismo entre este grupo y el grupo $SO(2, 1)$:

$$SO(2,1) \equiv \{U \in M_{3\times 3} : U^T(\eta_{ij})U = (\eta_{ij}) \text{ y } \det U = 1\},$$

donde (η_{ij}) es una matriz diagonal con entradas $\{1, 1, -1\}$ y se denomina tensor métrico en el espacio de Minkowski (2+1). Con la finalidad de mostrar que existe un homomorfismo entre los grupos $SU(2)_j$ y $SO(2, 1)$, consideramos el análogo a las matrices de Pauli, las cuales forman una base para el espacio vectorial real formado por las matrices 2×2 sin traza y antihermitianas

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}, \ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \sigma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Es importante destacar que al conjugar la unidad hipercompleja j, se obtiene por definición $\overline{j} = -j$; de tal forma que las matrices anteriores son antihermitianas. Es decir, si efectuamos la operación $\overline{(\sigma^i)^T} = {\sigma^i}^{\dagger} = -\sigma^i$.

[1]Donde $\mathbb{I}$ corresponde a la matriz identidad y $U^{\dagger} = \overline{U^T}$ es el transpuesto conjugado

De forma similiar a los cálculos presentados en [2], se encuentra la siguiente relación

$$\sigma^i \sigma^j = \eta^{ij}\mathbb{I} - \varepsilon^{ijk}\sigma_k, \qquad \sigma_k \equiv \eta_{kl}\sigma^l, \tag{1.3}$$

donde (η^{ij}) es la matriz inversa del tensor métrico (η_{ij}) y los índices repetidos indican suma. Sea $g \in SU(2)_j$ entonces el producto $g^{-1}\sigma^i g$, para $i = 1, 2, 3$, es también una matriz 2×2 antihermitiana con traza cero, la cual es una combinación de las matrices (1.2), es decir,

$$g^{-1}\sigma^i g = a^i_j \sigma^j, \tag{1.4}$$

donde a^i_j son las entradas de una matriz (a^i_j) y son números reales. El producto $g^{-1}\sigma^i g$ permite encontrar los elementos de la matriz a^i_j, bajo el homomorfismo entre los grupos matriciales, de acuerdo a la ecuación (1.4). A continuación se muestra que $g^{-1}\sigma^i g$ es una matriz antihermitiana y también que la traza es cero. Con el fin de demostrar lo anterior, se calcula el transpuesto conjugado y por otro lado la traza:

$$\begin{aligned}
(g^{-1}\sigma^i g)^\dagger &= g^\dagger \sigma^{i\dagger}\left(g^{-1}\right)^\dagger \\
&= g^{-1}\left(-\sigma^i\right)g \\
&= -g^{-1}\sigma^i g.
\end{aligned}$$

Para hallar la traza calculamos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left(g^{-1}\sigma^i g\right) &= \mathrm{tr}\left(g g^{-1}\sigma^i\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(\sigma^i\right) \equiv 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $g^{-1}\sigma^i g$ es una matriz antihermitiana y sin traza.

Adicionalmente se demuestra que (a^i_j) es una matriz 3×3 con determinante igual a 1, para ello se calcula,

$$\begin{aligned}
g^{-1}\sigma^i\sigma^j g &= g^{-1}\left(\eta^{ij}\mathbb{I} - \varepsilon^{ijk}\sigma_k\right)g \\
&= \eta^{ij}\mathbb{I} - \varepsilon^{ijk}g^{-1}\sigma_k g \\
&= \eta^{ij}\mathbb{I} - \varepsilon^{ijk}g^{-1}\eta_{kl}\sigma^l g \\
&= \eta^{ij}\mathbb{I} - \varepsilon^{ijk}\eta_{kl}a^l_m\sigma^m.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
g^{-1}\sigma^i\sigma^j g &= g^{-1}\sigma^i g g^{-1}\sigma^j g \\
&= a^i_k\sigma^k a^j_m\sigma^m \\
&= a^i_k a^j_m \sigma^k\sigma^m \\
&= a^i_k a^j_m\left(\eta^{km}\mathbb{I} - \varepsilon^{kmr}\sigma_r\right).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Si comparamos las ecuaciones (1.5) y (1.6) y usamos que el conjunto $\{\mathbb{I}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\}$ es linealmente independiente, obtenemos

$$a^i_k a^j_m \eta^{km} = \eta^{ij}, \tag{1.7}$$

$$\varepsilon^{ijk}\eta_{kl}a^l_t = \varepsilon^{kmr}a^i_k a^j_m \eta_{st}. \tag{1.8}$$

La ecuación (1.7) implica que la matriz (a^i_j) es una matriz que pertenece al grupo $SO(2,1)$ y de la ecuación (1.8):

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{ijk}\eta_{kl}a^l_t a^k_r &= \varepsilon^{kms}\eta_{st}a^i_k a^j_m a^k_r \\
\varepsilon^{ijk}\eta_{tr} &= \varepsilon^{kms}\eta_{st}a^i_k a^j_m a^k_r \\
\varepsilon^{ijk} &= \varepsilon^{kms}\eta^{tr}\eta_{st}a^i_k a^j_m a^k_r \\
\varepsilon^{ijk} &= \varepsilon^{kms}a^i_k a^j_m a^k_s,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

implica $\det(a^i_j) = 1$. Por lo tanto existe un mapeo $\phi : SU(2)_j \to SO(2,1)$ dado por $\phi(g) = (a^i_j)$. Para demostrar que ϕ es un homomorfismo, consideramos dos elementos $g, g' \in SU(2)_j$, a continuación calculamos el producto:

$$\begin{aligned}
(gg')^{-1}\sigma^i(gg') &= g'^{-1}g^{-1}\sigma^i gg' \\
&= g'^{-1}\left(a^i_j\sigma^j\right)g' \\
&= a^i_j g'^{-1}\sigma^j g' \\
&= a^i_j a'^j_k.
\end{aligned}$$

Es decir, ϕ preserva el producto y por lo tanto es un homomorfismo.

1.2. Homomorfismo de los grupos unitarios

En general, cualquier elemento del grupo $SU(2)_h$ se representa como:

$$U = \begin{pmatrix} a+hb & c+hd \\ -c+hd & a-hb \end{pmatrix},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, h representa la unidad hipercompleja y puede ser igual a i, j o ϵ; con $a^2 + c^2 - h^2(b^2 + d^2) = 1$, y además, al conjugar h se obtiene $\overline{h} = -h$.

Para hallar la imagen del homomorfismo entre los grupos matriciales $SU(2)_h$ y los grupos $SO(3), SO(2,1)$ y el grupo de movimientos rígidos en el plano, se calcula el producto matricial,

$(g^{-1}\sigma^i g)$, de acuerdo a la ecuación (1.4) y se considera a σ^i un análogo a las matrices de Pauli; ecuación (1.2), pero con entradas hipercomplejas. Como resultado se obtienen las entradas de la matriz que relacionan los grupos antes mencionados:

$$g^{-1}\sigma^1 g = \begin{pmatrix} a-hb & -c-hd \\ c-hd & a+hb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+hb & c+hd \\ -c+hd & a-hb \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} h(a^2-c^2+h^2d^2-h^2b^2) & h(2ac-2h^2bd)+h^2(2ad-2bc) \\ h(2ac-2h^2bd)-h^2(2ad-2bc) & -h(a^2-c^2+h^2d^2-h^2b^2) \end{pmatrix}$$

$$= (a^2-c^2+h^2d^2-h^2b^2)\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & -h \end{pmatrix} + (2ac-2h^2bd)\begin{pmatrix} 0 & h \\ h & 0 \end{pmatrix} + (2h^2ad-2h^2bc)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (a^2-c^2+h^2d^2-h^2b^2)\sigma^1 + (2ac-2h^2bd)\sigma^2 + (2h^2ad-2h^2bc)\sigma^3, \tag{1.10}$$

$$g^{-1}\sigma^2 g = \begin{pmatrix} a-hb & -c-hd \\ c-hd & a+hb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & h \\ h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+hb & c+hd \\ -c+hd & a-hb \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -h(2h^2bd+2ac) & h(a^2-c^2+h^2b^2-h^2d^2)-h^2(2ab+2cd) \\ h(a^2-c^2+h^2b^2-h^2d^2)+h^2(2ab+2cd) & h(2h^2bd+2ac) \end{pmatrix}$$

$$= -(2ac+2h^2bd)\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & -h \end{pmatrix} + (a^2-c^2+h^2b^2-h^2d^2)\begin{pmatrix} 0 & h \\ h & 0 \end{pmatrix} - (2h^2ab+2h^2cd)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -(2ac+2h^2bd)\sigma^1 + (a^2-c^2+h^2b^2-h^2d^2)\sigma^2 - (2h^2ab+2h^2cd)\sigma^3, \tag{1.11}$$

y

$$g^{-1}\sigma^3 g = \begin{pmatrix} a-hb & -c-hd \\ c-hd & a+hb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+hb & c+hd \\ -c+hd & a-hb \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} h(2bc+2ad) & (a^2+c^2+h^2b^2+h^2d^2)+h(2cd-2ad) \\ -(a^2+c^2+h^2b^2+h^2d^2)+h(2cd-2ad) & -h(2bc+2ad) \end{pmatrix}$$

$$= (2bc+2ad)\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & -h \end{pmatrix} + (2cd-2ad)\begin{pmatrix} 0 & h \\ h & 0 \end{pmatrix} + (a^2+c^2+h^2b^2+h^2d^2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (2bc+2ad)\sigma^1 + (2cd-2ad)\sigma^2 + (a^2+c^2+h^2b^2+h^2d^2)\sigma^3. \tag{1.12}$$

Por tanto la imagen de $\begin{pmatrix} a+hb & c+hd \\ -c+hd & a-hb \end{pmatrix}$ bajo el homomorfismo es,

$$(a^i_j) = \begin{pmatrix} (a^2 - c^2 + h^2d^2 - h^2b^2) & (2ac - 2h^2bd) & (2h^2ad - 2h^2bc) \\ -(2ac + 2h^2bd) & (a^2 - c^2 + h^2b^2 - h^2d^2) & -(2h^2ab + 2h^2cd) \\ (2bc + 2ad) & (2cd - 2ad) & (a^2 + c^2 + h^2b^2 + h^2d^2) \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Por lo que el homomorfismo está dado por:

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a + hb & c + hd \\ -c + hd & a - hb \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (a^2 - c^2 + h^2d^2 - h^2b^2) & (2ac - 2h^2bd) & (2h^2ad - 2h^2bc) \\ -(2ac + 2h^2bd) & (a^2 - c^2 + h^2b^2 - h^2d^2) & -(2h^2ab + 2h^2cd) \\ (2bc + 2ad) & (2cd - 2ad) & (a^2 + c^2 + h^2b^2 + h^2d^2) \end{pmatrix}.$$

Note que h^2 siempre es un número real y por consiguiente la matriz de la derecha es real.

1.2.1. Homomorfismo para los números duales

Estudiaremos el homomorfismo para los números duales considerando $h = \epsilon$, por consiguiente; $h^2 = \epsilon^2 = 0$. Por lo tanto de la ecuación (1.13),

$$(a^i_j) = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & 2ac & 0 \\ -2ac & a^2 - c^2 & 0 \\ 2bc + 2ad & 2cd - 2ab & a^2 + c^2 \end{pmatrix}.$$

Puesto que $a^2 + c^2 = 1$, usamos la parametrización $a = \cos\theta$ y $c = \operatorname{sen}\theta$ y se obtiene,

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a + \epsilon b & c + \epsilon d \\ -c + \epsilon d & a - \epsilon b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta & 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta & 0 \\ -2\cos\theta\operatorname{sen}\theta & \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta & 0 \\ 2b\operatorname{sen}\theta + 2d\cos\theta & 2d\operatorname{sen}\theta - 2b\cos\theta & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Para identificar a qué grupo corresponde la matriz del lado derecho de la igualdad, podemos sustituir las identidades trigonometricas: $2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{sen}2\theta$ y $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta$ en la expresión anterior, por lo tanto se obtiene,

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a + \epsilon b & c + \epsilon d \\ -c + \epsilon d & a - \epsilon b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen}2\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 2b\operatorname{sen}\theta + 2d\cos\theta & 2d\operatorname{sen}\theta - 2b\cos\theta & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Finalmente se encuentra que el grupo $SU(2)_\epsilon$ es homomorfo al grupo de movimientos rígidos en el plano.

1.2.2. Homomorfismo para los números dobles

Estudiaremos el homomorfismo para los números dobles, considerando $h = j$, por consiguiente $h^2 = j^2 = 1$. Por lo tanto de la ecuación (1.13),

$$(a^i_j) = \begin{pmatrix} a^2+d^2-b^2-c^2 & 2ac-2bd & 2ad-2bc \\ -2ac-2bd & a^2+b^2-c^2-d^2 & -2ab-2cd \\ 2ad+2bc & 2cd-2ab & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix}.$$

Y el homomorfismo entre grupos esta dado por,

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a+jb & c+jd \\ -c+jd & a-jb \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a^2+d^2-b^2-c^2 & 2ac-2bd & 2ad-2bc \\ -2ac-2bd & a^2+b^2-c^2-d^2 & -2ab-2cd \\ 2ad+2bc & 2cd-2ab & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

De acuerdo a las ecuaciones (1.7) y (1.8), el grupo $SU(2)_j$ es homomorfo al grupo de transformaciones de Lorentz en $(2+1)$ dimensiones.

1.2.3. Homomorfismo para los números imaginarios

Estudiaremos el homomorfismo para los números imaginarios, considerando $h = \mathrm{i}$, por consiguiente $h^2 = \mathrm{i}^2 = -1$. Por tanto de la ecuación (1.13) se obtiene,

$$(a^i_j) = \begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2ac+2bd & 2bc-2ad \\ 2bd-2ac & a^2+d^2-b^2-c^2 & +2ab+2cd \\ 2ad+2bc & 2cd-2ab & a^2+c^2-b^2-d^2 \end{pmatrix}.$$

Y el homomorfismo entre grupos está dado por,

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a+\mathrm{i}b & c+\mathrm{i}d \\ -c+\mathrm{i}d & a-\mathrm{i}b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2ac+2bd & 2bc-2ad \\ 2bd-2ac & a^2+d^2-b^2-c^2 & +2ab+2cd \\ 2ad+2bc & 2cd-2ab & a^2+c^2-b^2-d^2 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Como se mencionó anteriormente, es bien conocido que el grupo $SU(2)$ es homomorfo al grupo $SO(3)$.

Capítulo 2

Parámetros de Cayley-Klein

2.1. Fundamentos algebraicos

Para representar rotaciones en el espacio es necesario contar con 3 parámetros independientes, un ejemplo de ello son los ángulos de Euler. Sin embargo en ocasiones el uso de estos ángulos conlleva el uso de una notación extensa, por tal motivo es conveniente introducir otro tipo de parámetros. En 1885 Cayley demostró que las rotaciones en el espacio tridimensional o en el espacio de 4 dimensiones pueden ser representadas por cuaterniones[1]. Por otro lado, los trabajos de Klein y Sommerfeld en el estudio del problema del giroscopio, permitieron hacer una comparación con los cuaterniones [3]. Como consecuencia, los parámetros de Cayley-Klein son relevantes por facilitar el estudio de rotaciones o simetrías de revolución, para ello consideramos transformaciones lineales en un espacio bidimensional complejo,

$$u' = \alpha u + \beta v \qquad \text{y} \qquad v' = \gamma u + \delta v,$$

donde $u, v, u', v', \alpha, \beta, \gamma$ y δ son números complejos. A esta transformación se le asigna la matriz que relaciona los elementos u, v con u', v' dada por,

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

de tal forma que se tienen 8 parámetros para la representación matricial. Sin embargo el número se reduce si se impone la condición $QQ^\dagger = \mathbb{I} = Q^\dagger Q$, es decir, Q es unitaria. Además $\det Q = 1$, por consiguiente se establecen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \alpha\overline{\alpha} + \gamma\overline{\gamma} &= 1, \\ \beta\overline{\beta} + \delta\overline{\delta} &= 1, \\ \overline{\alpha}\beta + \overline{\gamma}\delta &= 0, \\ \alpha\overline{\beta} + \gamma\overline{\delta} &= 0, \\ \alpha\delta - \beta\gamma &= 1. \end{aligned}$$

[1]Extensión de los números reales, generada por las unidades imaginarias: i, j y k. Con la propiedad $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

A partir de las relaciones anteriores se expresan a γ y δ en téminos de α y β, de donde se obtiene,

$$\alpha = \overline{\delta} \qquad \text{y} \qquad \beta = -\overline{\gamma}.$$

Por consiguiente la matriz Q puede representarse como,

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Los parámetos $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ se denominan parámetros de Cayley-Klein y están relacionados con los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) mediante [4] :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \exp\left(\mathrm{i}\frac{\psi + \phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \\
\beta &= \mathrm{i}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\psi - \phi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right), \\
\gamma &= \mathrm{i}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\psi - \phi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right), \\
\delta &= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\psi + \phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned}$$

donde θ está relacionado con una rotación en torno al eje x, ϕ y ψ están relacionados con rotaciones en torno al eje z. Así, los parámetros de Cayley-Klein son una herramienta útil y compacta para estudiar rotaciones de un cuepo rígido.

2.2. Órbitas de los grupos

Sabemos que las matrices del grupo $SU(2)$ actúan sobre las columnas de dos componentes complejas (*espinores*), esta forma de actuar tiene su equivalente en las matrices reales 3×3, las cuales actúan sobre vectores que tienen 3 componentes. De acuerdo a lo anterior podemos definir un vector columna o un vector fila como,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a + hb \\ -c + hd \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

A cada matriz de la forma (2.3), se le asocia un vector en un espacio de 3 dimensiones, definido como

$$R^i = \psi^\dagger \sigma^i \psi. \tag{2.4}$$

A continuación se demuestra que R^i son números imaginarios, para lo cual se calcula el conjugado de R^i. Con la finalidad de obtener del lado derecho el producto $(\psi^\dagger \sigma^i \psi)$, se toma el transpuesto conjugado. Al ser un número, este no se ve afectado al ser transpuesto; por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\overline{R^i} &= \left(\psi^\dagger \sigma^i \psi\right)^\dagger \\
&= \psi^\dagger {\sigma^i}^\dagger \psi \\
&= -\psi^\dagger \sigma^i \psi.
\end{aligned}$$

Como resultado se obtiene que los elementos R^i son números hipercomplejos puros. Los cuales tienen la forma,

$$\begin{aligned} R^1 = \psi^\dagger\sigma^1\psi &= \begin{pmatrix} a-hb & -c-hd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+hb \\ -c+hd \end{pmatrix} \\ &= h(a^2-c^2+h^2d^2-h^2b^2), \qquad (2.5) \\ R^2 = \psi^\dagger\sigma^2\psi &= \begin{pmatrix} a-hb & -c-hd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & h \\ h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+hb \\ -c+hd \end{pmatrix} \\ &= h(-2ac-2h^2bd), \qquad (2.6) \\ R^3 = \psi^\dagger\sigma^3\psi &= \begin{pmatrix} a-hb & -c-hd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+hb \\ -c+hd \end{pmatrix} \\ &= h(2bc+2ad). \qquad (2.7) \end{aligned}$$

Con el propósito de tener componentes reales, definimos a $\widetilde{R}$ por,

$$R^i = h\widetilde{R^i}. \qquad (2.8)$$

En el caso de los números complejos, sabemos que $\mathrm{i}^2 = -1$. Por lo tanto de las ecuaciones (2.5-2.7),

$$\begin{aligned} R^1 &= \mathrm{i}(a^2-c^2+\mathrm{i}^2d^2-\mathrm{i}^2b^2) = \mathrm{i}(a^2+b^2-c^2-d^2) \\ &\Rightarrow \widetilde{R^1} = a^2+b^2-c^2-d^2, \\ R^2 &= \mathrm{i}(-2ac-2\mathrm{i}^2bd) = \mathrm{i}(2bd-2ac) \\ &\Rightarrow \widetilde{R^2} = 2bd-2ac, \\ R^3 &= \mathrm{i}(2ad+2bc) = \mathrm{i}(2ad+2bc) \\ &\Rightarrow \widetilde{R^3} = 2ad+2bc. \end{aligned}$$

Verifiquemos que se cumple $\widetilde{R^1}^2+\widetilde{R^2}^2+\widetilde{R^3}^2 \equiv 1$, es decir las órbitas asociadas al grupo $SU(2)_i$ se hallan en la esfera unitaria,

$$\begin{aligned} \widetilde{R^1}^2+\widetilde{R^2}^2+\widetilde{R^3}^2 &= (a^2+b^2-c^2-d^2)^2+(2bd-2ac)^2+(2ad+2bc)^2 \\ &= (a^2+b^2)^2+(c^2+d^2)^2+2(a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2) \\ &= (a^2+b^2)^2+(c^2+d^2)^2+2(a^2+b^2)(c^2+d^2) \\ &= (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \equiv 1. \end{aligned}$$

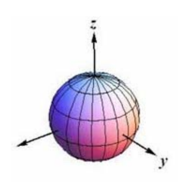

Figura 2.1: Esfera unitaria

En el caso de los números dobles sabemos que la unidad hipercompleja cumple la propiedad $j^2 = 1$, por lo tanto de las ecuaciones (2.5-2.7),

$$
\begin{aligned}
R^1 &= j(a^2 - c^2 + j^2 d^2 - j^2 b^2) = j(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)\\
&\Rightarrow \widetilde{R^1} = a^2 + d^2 - b^2 - c^2,\\
R^2 &= j(-2ac - 2j^2 bd) = j(-2ac - 2bd)\\
&\Rightarrow \widetilde{R^2} = -2ac - 2bd,\\
R^3 &= j(2bc + 2ad)\\
&\Rightarrow \widetilde{R^3} = 2bc + 2ad.
\end{aligned}
$$

Verifiquemos que se cumple $\widetilde{R^1}^2 + \widetilde{R^2}^2 - \widetilde{R^3}^2 \equiv 1$, es decir las órbitas del grupo $SU(2)_j$ se hallan en un hiperboloide (veáse Figura 2.2),

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R^1}^2 + \widetilde{R^2}^2 - \widetilde{R^3}^2 &= (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 + (-2ac - 2bd)^2 + (2ad + 2bc)^2\\
&= (a^2 + d^2)^2 + (c^2 + b^2)^2 + 2c^2(a^2 - d^2) + 2b^2(d^2 - a^2) - 4(b^2c^2 + a^2d^2)\\
&= (a^2 - d^2)^2 + (c^2 - b^2)^2 + 2(a^2 - d^2)(c^2 - b^2)\\
&= (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2 \equiv 1.
\end{aligned}
$$

En el caso de los números duales, sabemos que la parte hipercompleja cumple la propiedad $\epsilon^2 = 0$, por lo tanto de las ecuaciones (2.5-2.7),

$$
\begin{aligned}
R^1 &= \epsilon(a^2 - c^2 + \epsilon^2 d^2 - \epsilon^2 b^2) = \epsilon(a^2 - c^2)\\
&\Rightarrow \widetilde{R^1} = a^2 - c^2,\\
R^2 &= \epsilon(-2ac - 2\epsilon^2 bd) = \epsilon(-2ac)\\
&\Rightarrow \widetilde{R^2} = -2ac,\\
R^3 &= \epsilon(2bc + 2ad) = \epsilon(2bc + 2ad)\\
&\Rightarrow \widetilde{R^3} = 2bc + 2ad.
\end{aligned}
$$

Verifiquemos que se cumple $\widetilde{R^1}^2 + \widetilde{R^2}^2 \equiv 1$, es decir las órbitas del grupo $SU(2)_\epsilon$ se hallan en un cilindro (veáse Figura 2.3). Usando el cambio de variable $a = \cos\theta$ y $c = \operatorname{sen}\theta$ se obtiene,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R^1}^2 + \widetilde{R^2}^2 &= (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)^2 + (-2\cos\theta\operatorname{sen}\theta)^2\\
&= (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)^2 = 1.
\end{aligned}
$$

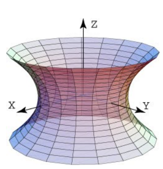

Figura 2.2: Hiperboloide

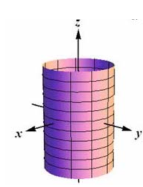

Figura 2.3: Cilindro recto

Capítulo 3

Ecuación de Laplace

3.1. Fundamentos algebraicos

Las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden aparecen con frecuencia en la física, porque a través de ellas se estudia la evolución de sistemas macroscópicos o microscópicos; destacándose las ecuaciones de Maxwell, la ecuación de Schrödinger, la ecuación de onda o la ecuación de Laplace, la cual es un caso particular de la ecuación de Poisson [5]. El estudio de las ecuaciones diferenciales parciales se inició a principios del siglo XVIII por d'Alembert, Euler, Lagrange y Laplace. Un ejemplo sencillo de estas ecuaciones es la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 F = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{|g|}\; g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} F \right) = 0, \tag{3.1}$$

donde x_i son las coordenadas en el espacio, $|g|$ es el determinante de la matriz (g_{ij}), y corresponde al tensor métrico del espacio de intéres y está relacionado con el diferencial de longitud,

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Para sistemas coordenados ortogonales, $g_{ij} = 0$ si $i \neq j$, por tanto el diferencial de longitud para sistemas ortogonales es,

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + \cdots + g_{nn}(dx^n)^2 \\ &= (h_1 dx^1)^2 + (h_2 dx^2)^2 + \cdots + (h_n dx^n)^2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $h_i \equiv \sqrt{g_{ii}}$ se denominan factores de escala (si $g_{ij} \geq 0$). Es importante recalcar que la ecuación de Laplace es útil en muchas ramas de la física, por ejemplo, sirve para modelar la fuerza gravitacional, el movimiento irrotacional de un fluido perfecto, en la electrostática, magnetostática y dieléctricos.

3.2. Ecuación de Laplace en el espacio euclidiano

A continuación se muestran algunos ejemplos de la ecuación de Laplace en el espacio euclidiano, en particular los sistemas de coordenadas esferoidales obladas, esferoidales proladas y toroidales. En [6] y [7] se puede encontrar una discusión más detallada de estos sistemas de coordenadas.

3.2.1. Ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales proladas

Las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas esferoidales proladas en el espacio euclidiano son,

$$x = c\,\mathrm{senh}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\psi, \qquad y = c\,\mathrm{senh}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\psi, \qquad z = c\cosh\theta\cos\phi$$

con $c > 0$ un factor de escala constante. La ecuación de Laplace en este sistema coordenado es

$$\begin{aligned}\nabla^2 F &= \frac{1}{c^2(\mathrm{senh}^2\theta + \mathrm{sen}^2\phi)}\left[\frac{1}{\mathrm{senh}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{senh}\,\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\mathrm{sen}\,\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\mathrm{sen}\,\phi\frac{\partial F}{\partial\phi}\right)\right.\\ &\quad\left. + \left(\frac{1}{\mathrm{senh}^2\theta} + \frac{1}{\mathrm{sen}^2\phi}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial\psi^2}\right].\end{aligned}$$

La ecuación anterior se puede resolver separando variables, por lo tanto se propone a $F(\theta, \phi, \psi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)\Psi(\psi)$, de donde se obtiene,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Psi}{d\psi^2} + \mu^2\Psi &= 0,\\ \frac{1}{\mathrm{sen}\,\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\mathrm{sen}\,\phi\frac{d\Phi}{d\phi}\right) + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{\mathrm{sen}^2\phi}\right]\Phi &= 0,\\ \frac{1}{\mathrm{senh}\,\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\mathrm{senh}\,\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \left[\nu(\nu+1) + \frac{\mu^2}{\mathrm{senh}^2\theta}\right]\Theta &= 0, \qquad (3.3)\end{aligned}$$

con μ, ν constantes de separación. La solución de la ecuación (3.3) se puede expresar en términos de funciones de Legendre con argumento imaginario.

3.2.2. Ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales obladas

Las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas esferoidales obladas en el espacio euclidiano son,

$$x = c\cosh\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\psi, \qquad y = c\cosh\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\psi, \qquad z = c\,\mathrm{senh}\,\theta\cos\phi.$$

La ecuación de Laplace en este sistema coordenado es,

$$\begin{aligned}\nabla^2 F &= \frac{1}{c^2(\cosh^2\theta - \mathrm{sen}^2\phi)}\left[\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cosh\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\mathrm{sen}\,\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\mathrm{sen}\,\phi\frac{\partial F}{\partial\phi}\right)\right.\\ &\quad\left. + \left(\frac{1}{\mathrm{sen}^2\phi} - \frac{1}{\cosh^2\theta}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial\psi^2}\right].\end{aligned}$$

Se propone la función $F(\theta, \phi, \psi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)\Psi(\psi)$; la cual permite separar la ecuación anterior, por tanto se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi}{d\psi^2} + \mu^2\Psi = 0, \\ \frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\operatorname{sen}\phi\frac{d\Phi}{d\phi}\right) + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{\operatorname{sen}^2\phi}\right]\Phi = 0, \\ \frac{1}{\cosh\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\cosh\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{\cosh^2\theta}\right]\Theta = 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

con μ, ν constantes de separación.

3.2.3. Ecuación de Laplace en coordenadas toroidales

Las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas toroidales en el espacio euclidiano son,

$$x = \frac{c \operatorname{senh}\theta\cos\psi}{\cosh\theta - \cos\phi}, \qquad y = \frac{c\operatorname{senh}\theta\operatorname{sen}\psi}{\cosh\theta - \cos\phi}, \qquad z = \frac{c\operatorname{sen}\phi}{\cosh\theta - \cos\phi}.$$

La ecuación de Laplace en este sistema coordenado es:

$$\nabla^2 F = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta - \cos\phi}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta - \cos\phi}\frac{\partial F}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{(\cosh\theta - \cos\phi)\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\psi^2}.$$

La ecuación anterior es R-separable con la función $F = \sqrt{2\cosh\theta - 2\cos\phi}\,\Theta(\theta)\Phi(\phi)\Psi(\psi)$, separando variables obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi}{d\psi^2} + \mu^2\Psi = 0, \\ \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \nu^2\Phi = 0, \\ \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{senh}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \left[\nu^2 - \frac{1}{4} + \frac{\mu^2}{\operatorname{senh}^2\theta}\right]\Theta = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

con μ, ν constantes de separación. Además, la ecuación (3.5) es equivalente a la ecuación (3.3).

3.3. Ecuación de Laplace-Beltrami

Aunque no parezca conveniente, consideramos al operador Laplaciano en el espacio de Minkowski $(2+1)$; con la finalidad de encontrar las soluciones de las ecuaciones (3.3)-(3.5). El tensor métrico correspondiente a este espacio es: $ds^2 = -dx^2 + dy^2 + dz^2$. De forma similar a la sección (3.2.1), se propone el sistema de coordenadas,

$$x = r\operatorname{senh}\theta\cosh\phi, \qquad y = r\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\phi, \qquad z = r\cosh\theta, \tag{3.6}$$

donde (r, θ, ϕ) son ahora las variables a considerar. Por lo tanto el tensor métrico se reescribe como:

$$ds^2 = dr^2 - r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{senh}\theta d\phi^2,$$

con $g_{11} = 1$, $g_{22} = -r^2$ y $g_{33} = r^2 \operatorname{senh}^2\theta$; es decir, se puede considerar al sistema de coordenadas como ortogonal, de acuerdo a la ecuación (3.2). Además, $|g| = r^2 \operatorname{senh}\theta$; por lo tanto el operador laplaciano en este sistema coordenado se representa por,

$$\nabla^2 F = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2 \operatorname{senh}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{senh}\theta \frac{\partial F}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{senh}^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}. \tag{3.7}$$

Separando variables se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} &= \mu^2 \Phi, \\ \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) &= \nu(\nu+1)R, \\ \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{senh}\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) &= \left[\nu(\nu+1) + \frac{\mu^2}{\operatorname{senh}^2\theta}\right], \Theta \end{aligned} \tag{3.8}$$

con ν y μ constantes de separación. Note que la ecuación (3.8) es idéntica a la ecuación (3.3).

Por otra parte, se propone el siguiente sistema de coordenadas; similar al presentado en la sección (3.2.2)

$$x = r\cosh\theta\cosh\phi, \qquad y = r\cosh\theta \operatorname{senh}\phi, \qquad z = r\operatorname{senh}\theta. \tag{3.9}$$

El tensor métrico en este sistema coordenado es $ds^2 = -dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\cosh^2\theta d\phi$; donde $g_{11} = -1$, $g_{22} = r^2$, $g_{33} = r^2\cosh^2\theta$ y $|g| = r^2\cosh\theta$. Nuevamente se puede considerar al sistema coordenado como ortogonal. Por consiguiente el operador laplaciano se representa como

$$\nabla^2 F = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cosh\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cosh\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\cosh^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2}.$$

Separando variables se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} &= m^2\Phi, \\ \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\,R}{dr}\right) &= l(l+1)R, \\ \frac{1}{\cosh\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\cosh\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) &= \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\cosh^2\theta}\right]\Theta. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Note que la ecuación (3.10) es idéntica a la ecuación (3.4).

3.4. Función generatriz

Es común resolver la ecuación de Laplace por el método de separación de variables con la finalidad de identificar las soluciones a partir de las ecuaciones que resultan. Sin embargo, existe una forma alterna para hallar las soluciones, la cual considera una función $f(x^p)$ definida en $\mathbb{R}^p$, el tensor métrico respecto a este sistema coordenado debe de ser constante, por tanto las soluciones se encuentran a partir de la proposición presentada en [8]:

Proposición 1: *La función homogénea* $(k_1x^1 + k_2x^2 + \cdots + k_px^p)^n$ *es solución a la ecuación de Laplace,* $\nabla^2 F = 0$*, para* $n = 0, 1, 2, ...$*, si y sólo si las constantes* k_i *son las componentes de un vector nulo*,

$$\eta^{ij} k_i k_j = 0. \tag{3.11}$$

Es importante recalcar que la proposición anterior es válida para coordenadas cartesianas. Se propone el vector $(-j\cosh u, j\,\mathrm{senh}\, u, 1)$; donde u es un parámetro real y η^{ij} es la matriz diagonal con entradas $\{1, 1, -1\}$, a continuación se demuestra explícitamente que cumple la ecuación (3.11) en el espacio de Minkowski $(2 + 1)$:

$$\begin{aligned} \eta^{ij} k_i k_j &= -j^2 \cosh^2 u + j^2\,\mathrm{senh}^2\, u + 1 \\ &= -j^2(\cosh^2 u - \mathrm{senh}^2\, u) + 1 \\ &= -j^2 + 1, \quad \text{con } j^2 \equiv 1 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Por tanto, $(-jx\cosh u + jy\,\mathrm{senh}\, u + z)^l$, para $l = 0, 1, 2, \ldots$, es solución a la ecuación de Laplace, con x, y, z el sistema de coordenadas cartesiano. La expresión anterior se reescribe en términos de funciones exponenciales considerando $e^{j\alpha} = \cosh\alpha + j\,\mathrm{senh}\,\alpha$:

$$-jx\cosh u + jy\,\mathrm{senh}\, u + z = -jx\frac{1}{2}\left(e^{ju} + e^{-ju}\right) + jy\frac{1}{2}\left(e^{ju} - e^{-ju}\right) + z,$$

para x, y, z fijos y $l \in \mathbb{N}$; $(z - jx\cosh u + jy\,\mathrm{senh}\, u)^l$ es una combinación lineal de $\{e^{-jlu}, e^{-j(l-1)u}, ..., e^{jlu}\}$ para coeficientes que dependen de (x, y, z), es decir,

$$(-jx\cosh u + jy\,\mathrm{senh}\, u + z)^l = \sum_{m=-l}^{l} F_{lm}(x, y, z) e^{-jmu}. \tag{3.13}$$

De acuerdo con la proposición 1, el lado derecho de la ecuación anterior debe ser solución de la ecuación de Laplace, por consiguiente,

$$\sum_{m=-l}^{l} \left[\nabla^2 F_{lm}(x, y, z)\right] e^{-jmu} = 0. \tag{3.14}$$

Debido a la independencia lineal del conjunto $\left(e^{-jlu}, e^{-j(l-1)u}, ..., e^{jlu}\right)$, se sigue que $\nabla^2 F_{lm} = 0$. Por lo tanto $(-jx\cosh u + jy\,\mathrm{senh}\, u + z)^l$ es solución de las ecuaciones (3.8) y (3.10). En particular si sustituimos x, y, z, dadas por la ecuación (3.6), se obtiene,

$$
\begin{aligned}
(-jx\cosh u + jy\operatorname{senh} u + z)^l &= [-jr\operatorname{senh}\theta\cosh\phi\cosh u + jr\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\phi\operatorname{senh} u + r\cosh\theta]^l \\
&= [r\cosh\theta - jr\operatorname{senh}\theta\,(\cosh\phi\cosh u - \operatorname{senh}\phi\operatorname{senh} u)]^l \\
&= [r\cosh\theta - jr\operatorname{senh}\theta\cosh(\phi - u)]^l \\
&= r^l\left[\cosh\theta - \frac{j}{2}\operatorname{senh}\theta\; e^{j(\phi-u)} - \frac{j}{2}\operatorname{senh}\theta\; e^{-j(\phi-u)}\right]^l \\
&= \sum_{m=-l}^{l} r^l f_{lm}(\theta)e^{jm\phi}e^{-jmu}. \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

Note que f_{lm} es una función de θ y es proporcional a los polinomios asociados de Legendre con argumento $\cosh\theta$. Finalmente se concluye que,

$$
\sum_{m=-l}^{l} N_{lm}H_{lm}(\theta,\phi)e^{-jmu}, \qquad (3.16)
$$

es solución a la ecuación (3.8); donde N_{lm} son constantes y $H_{lm}(\cosh\theta)$ es un análogo de los armónicos esféricos. Con la finalidad de conocer cómo funciona la función generatriz, se halla el término $H_{42}(\theta,\phi)$,

$$
\begin{aligned}
H_{42}(\theta,\phi) &= \frac{6}{4}\cosh^2\theta\operatorname{senh}^2\theta e^{2j\phi}e^{-2j} + \frac{1}{4}\operatorname{senh}^4\theta e^{2j\phi}e^{-2j} \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{senh}^2\theta e^{2j\phi}e^{-2j}\left(\operatorname{senh}^2\theta + 6\cosh^2\theta\right) \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{senh}^2\theta e^{2j\phi}e^{-2j}\left(7\cosh^2\theta - 1\right),
\end{aligned}
$$

donde el término H_{42} es el coeficiente de e^{-2ju} en la ecuación (3.15) para $l = 4$. Note que la expresión anterior es parecida al término $Y_{42}(\theta,\phi)$, sin embargo en este caso en lugar de tener funciones circulares se obtienen funciones hiperbólicas.

Ahora consideramos el sistema de coordenadas propuesto en la ecuación (3.9); sustituyendo x, y, z en $(-jx\cosh u + jy\operatorname{senh} u + z)^l$:

$$
\begin{aligned}
(-jx\cosh u + jy\operatorname{senh} u + z)^l &= [r\operatorname{senh}\theta - jr\cosh\theta\cosh\phi\cosh u + jr\cosh\theta\operatorname{senh}\phi\operatorname{senh} u]^l \\
&= [r\operatorname{senh}\theta - jr\cosh\theta\,(\cosh\phi\cosh u - \operatorname{senh}\phi\operatorname{senh} u)]^l \\
&= r^l\left[\operatorname{senh}\theta - \frac{j}{2}\cosh\theta\; e^{j(\phi-u)} - \frac{j}{2}\cosh\theta\; e^{-j(\phi-u)}\right]^l \\
&= r^l\left[\operatorname{senh}\theta - \frac{j}{2}\cosh\theta\; e^{j(\phi-u)} - \frac{j}{2}\cosh\theta\; e^{-j(\phi-u)}\right]^l. \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la ecuación (3.17) es solución a la ecuación (3.10); con N_{lm} constantes y $H_{lm}(\operatorname{senh}\theta)$ un análogo de los armónicos esféricos.

A continuación se halla el término $H_{42}(\theta,\phi)$:

$$\begin{aligned}
H_{42}(\theta,\phi) &= \frac{6}{4}\operatorname{senh}^2\theta\cosh^2\theta e^{2j\phi}e^{-2j} + \frac{1}{4}\cosh^4\theta e^{2j\phi}e^{-2j} \\
&= \frac{1}{4}\cosh^2\theta e^{2j\phi}e^{-2j}\left(\cosh^2\theta + 6\operatorname{senh}^2\theta\right) \\
&= \frac{1}{4}\cosh^2\theta e^{2j\phi}e^{-2j}\left(7\operatorname{senh}^2\theta + 1\right).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Nuevamente se obtienen funciones parecidas a los armónicos esféricos, sin embargo las funciones $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ cambian por $\cosh\theta$ y $\operatorname{senh}\theta$ respectivamente.

Conclusión

Al separar variables en la ecuación de Laplace en el espacio euclidiano y en el espacio de Minkoswki, se obtienen las mismas ecuaciones, por consiguiente se puede hacer uso de la función generatriz $(x_i k^i)$ y de la unidad hipercompleja j, para hallar las soluciones en el espacio de Minkowski, de tal forma que las soluciones que se encuentran son válidas para ambos espacios, con la elección adecuada de escalares k^i. Además, el uso de los números hipercompleja, nos permite encontrar de forma general la imagen del homomorfismo entre grupos; facilitando el estudio de este. Finalmente, se muestra que los grupos $SU(2)$ son homomorfos a grupos de matrices 3×3 y se halla que las órbitas son esferas, hiperboloides y cilindros.

Bibliografía

[1] J.J. Sakurai y J. Napolitano. (2012). *Modern Quantum Mechanics*, 2da ed. (Addison-Wesley).

[2] G.F. Torres del Castillo. (2020). *Differentiable Manifolds: A Theorical Physics Approach,* 2nd edn. (New York: Birkhäuser).

[3] E. Presstini, P.P. Valentini, G. Figliolini y J. Angeles. (2016). *Dual Cayley–Klein parameters and Möbius transform: Theory and applications,* Mechanism and Machine Theory **106** (2016) 50-67.

[4] H. Goldstein. (1980). *Classical Mechanics,* 2nd ed. (Addison-Wesley).

[5] I.N. Sneddon. (1957). *Elements of Partial Differential Equations.* (New York: McGraw-Hill).

[6] N.N. Levedev. (1965). *Special Functions and their applications*, 2nd ed. (Addison-Wesley).

[7] P. M. Morse y H. Feshbach. (1953). *Methods of Theoretical Physics*, 1ra ed. (New York: McGraw-Hill).

[8] G.F. Torres del Castillo. (2013). *A generating function for the spherical harmonics in p dimensions,* Revista Mexicana de Física **59** (2013) 248-253.

[9] G.F. Torres del Castillo. (2019). *Some applications in classical mechanics of the double and dual numbers*, Revista Mexicana de Física E **65** (2019) 152-155.

[10] M. Combescure y D. Robert. (2012). *Coherent States And Applications in Mathematical Physics.* (Springer).

[11] J. Mahecha Gómez. (2006). *Mecánica Clásica Avanzada,* 19na ed. (Antioquia).

[12] K. Svozil. (2019). *Mathematical Methods of Theoretical Physics*, 6ta ed. (Funzl).