



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Interferometría de corrimiento de fase y
frecuencia portadora basado en un
sistema óptico cuasi-4f generalizado.

Tesis Presentada al

Posgrado Física Aplicada

como requisito para la obtención del grado de

**Doctorado en Ciencias Física
Aplicada**

Presenta:

M.C. Erika Barojas Gutiérrez

Director de Tesis

Dr. Cruz Meneses Fabian

Heroica Puebla de Zaragoza, Puebla, 8 de Diciembre
de 2020.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Justificación	3
1.2. Objetivo General	6
1.3. Objetivo Particulares	7
1.4. Metodología	7
1.5. Organización de la tesis	8
2. Fundamentos Teóricos	9
2.1. Introducción	9
2.2. Difracción	9
2.2.1. Difracción de Fresnel	10
2.2.2. Difracción de Fraunhofer	13
2.2.3. Transformada de Fourier	15
2.2.4. Sistema con una lente	17
2.3. Interferencia	23
2.3.1. Interferómetro de trayectoria común de doble apertura	23
2.4. Interferometría de franjas portadoras	25
2.5. Método de la transformada de Fourier	26
2.6. Análisis estadístico de datos	27
2.6.1. Prueba de hipótesis	29
2.7. Métodos de extracción de fase	30

2.7.1. Técnica de mínimos cuadrados	30
2.7.2. Método de mínimos cuadrados para la aproximación de datos experimentales	32
2.8. Conclusiones del capítulo	35
3. Interferometría de franjas portadoras en un sistema cuasi-4f generalizado	37
3.1. Introducción	37
3.2. Desarrollo matemático DACPI generalizado	37
3.3. Conclusiones del capítulo	44
4. Resultados Experimentales	45
4.1. Introducción	45
4.2. Implementación Experimental del DACPI Generalizado	45
4.3. Cálculo de Error	49
4.3.1. Regresión lineal datos experimentales	50
4.3.2. Superficie de Barrido	53
4.3.3. Calculo experimental del error	55
4.4. Conclusiones del capítulo	59
5. Conclusiones Generales	61

Resumen

El interferómetro de trayectoria común de doble apertura (DACPI) se basa en un sistema de imágenes ópticas $4f$. Consiste en dos aberturas en el plano de entrada y una rejilla en el plano de Fourier. Como se presenta en manuscritos separados, una frecuencia portadora se introduce de manera muy eficiente cuando la primera lente o la rejilla se desplaza axialmente. Sin embargo, en un experimento es muy común tener ambos desplazamientos al mismo tiempo de todos los componentes ópticos, por lo que se requiere un estudio detallado de esta situación. En el presente trabajo de tesis, consideramos el caso más general de DACPI y describimos la interrelación existente entre los desplazamientos axiales de las lentes, la rejilla y la cámara CCD. Adicionalmente, basándonos en un método algebraico de mínimos cuadrados, podemos precisar la posición inicial de la primera lente y rejilla, lo que permite calibrar un sistema $4f$, y en el mejor de nuestros reconocimientos, no se ha presentado antes. Basándose en un análisis de difracción de campo cercano, la introducción de las franjas portadoras está matemáticamente justificada. Es importante tener en cuenta que no se solicita ninguna inclinación entre las dos haz para producir este efecto, y resulta ser más simple, más fácil y versátil que otros métodos existentes. Los principales atributos y ventajas del presente trabajo se encuentran en el descubrimiento de su interrelación entre el desplazamiento de la primera lente y la rejilla, que se discutirá e ilustrará en detalle con patrones de franjas experimentales.

Capítulo 1

Introducción

Introducción

La interferometría usa el principio de superposición de las ondas electromagnéticas bajo ciertas condiciones de coherencia, la cual generalmente forma un patrón de franjas brillantes y oscuras. Las franjas brillantes son formadas debido a las ondas que llegan en fase, efecto conocido como interferencia constructiva, mientras que las franjas oscuras son formadas debido a las ondas que llegan en contrafase conocida como interferencia destructiva [1]. La separación entre dos franjas brillantes o dos franjas oscuras es de una longitud de onda. Para el caso de la interferencia de dos ondas coherentes polarizadas linealmente en el mismo plano, en la práctica se supone conocida una de ellas, llamada onda de referencia, en la mayoría de los casos se considera una onda plana o una onda esférica, mientras que la segunda se considera una onda de prueba u onda del objeto, por lo que las variaciones de las franjas en el patrón de interferencia son atribuidas a ésta. Con el anterior punto de vista, la evaluación de la fase del patrón de interferencia viene a ser la medida de las variaciones de fase de la onda que cruza el objeto [2]. En general las variaciones de fase pueden ser atribuidas a cambios en: la longitud de onda, índice de refracción, caminos ópticos, polarización de la luz, cambios del vector de propagación, etc. Bajo circunstancias adecuadas a mediciones específicas, la evaluación de fase puede ser interpretada en diferentes campos de la metrología para evaluar o medir diferentes variables o cantidades físicas, dentro de las que se puede mencionar: pruebas de superficies ópticas, espejos, lentes; estudio de fluidos, densidades, velocidad de flujo; estudio interno de objetos usando tomografía, etc. Existen muchos métodos para la evaluación de fase en un patrón de interferencia. Uno de los métodos mas usados en la interferometría de extracción de fase fue propuesto por M.

Takeda (1982) [3] el cual consiste en introducir un término de fase lineal, en el interferograma, en lugar de escalones de fase en PSI. La transformada de Fourier del patrón de interferencia consiste de 3 lóbulos, el no traslape de éstos dependerá principalmente del valor de la pendiente (portadora) en el término lineal introducido. Con un valor de portadora mayor al ancho de banda de frecuencias de la luz de fondo, la luz de modulación y la fase del objeto, estas funciones pueden ser recuperadas. Uno de los principales fuentes de error en CFI es sin duda alguna la generación experimental de la portadora, cuya valor exige alta aproximación. Existen un número reducido de métodos para introducir una frecuencia portadora entre los haces que interfieren, aunque éstos métodos son propensos a introducir errores ya que están basados en inclinaciones de algunos componentes ópticos en ángulos muy pequeños, del orden de miliradianes, haciendo necesario el uso de sistemas mecánicos de alta precisión [4,5]. Alternativas más eficaces que no requieren de un sistema sofisticado de traslación y que además requieren de una traslación lineal, en lugar de rotacional, han sido presentadas. C. Meneses-Fabián y G. Rodríguez-Zurita [6,7] propusieron trasladar axialmente la rejilla en el plano de Fourier en el interferómetro de trayectoria común de doble apertura (DACPI), donde la traslación lineal es del orden de centímetros. Otro método empleado actualmente siguiendo el mismo análisis de Fourier presentado por Meneses-Fabian[8] introducen franjas portadoras al desplazar la lente L_1 del sistema DACPI, donde se demostró que la frecuencia portadora es directamente proporcional al desplazamiento de la lente e inversamente proporcional al producto del periodo de la rejilla u_p y la distancia focal f . Recientemente, se presentó otro método para la introducción de franjas portadoras en un DACPI, que se basa en la colocación de dos rejillas de diferentes periodos, una en cada abertura de entrada[9]. En este trabajo fue demostrado que la diferencia de periodos es proporcional a la frecuencia de la portadora introducida en el interferograma. Como se ha mencionado existen diferentes técnicas para extracción de fase en un patrón de interferencia donde necesariamente el valor de la frecuencia portadora debe ser conocida. En la presente tesis se propone un nuevo método de extracción de fase basado en las técnicas de corrimiento de fase (PSI) e interferometría de franjas portadoras (CFI) donde se pretende conocer la exactitud de la portadora introducida caracterizado el sistema, con el objetivo de encontrar el valor de fase con mayor exactitud. Las ventajas del sistema DACPI para introducir la portadora es que reduce el error introducido experimentalmente, tendrá una alta precisión y su valor puede ser pequeño. En comparación con la técnica de extracción de fase propuesto por Takeda [3] consiste en aislar los lóbulos del espectro del interferograma en el espacio de Fourier. Sin embargo un patrón de franjas de interferencia con un valor muy bajo o nulo de frecuencia portadora no permitirá la correcta aplicación del método de Takeda pues los espectros del interferograma no se separarán correctamente.

Planteamiento del Problema

La interferometría de franjas portadoras (CFI), es un método para realizar pruebas ópticas a objetos y superficies dentro de una amplia gama de aplicaciones científicas en diferentes áreas de la física. Este modelo nos permite el uso de algoritmos rápidos y además un sistema óptico experimental que no requiere de un sistema sofisticado de calibración. La técnica de extracción de fase propuesto por Takeda [6] consiste en aislar los lóbulos del espectro del interferograma en el espacio de Fourier. Sin embargo un patrón de franjas de interferencia con un valor muy bajo o nulo de frecuencia portadora no permitirá la correcta aplicación del método de Takeda pues los espectros del interferograma no se separarán correctamente, para la aplicación satisfactoria de este método los lóbulos deben estar lo suficientemente separados el término que contiene la información de la fase puede ser aislado, y considerando un valor de frecuencia portadora conocida. Existen diferentes métodos para introducir una frecuencia portadora entre los haces que interfieren, aunque éstos métodos son propensos a introducir errores ya que están basados en inclinaciones de algunos componentes ópticos en ángulos muy pequeños [7, 8]. Existen muchas técnicas de extracción de fase, basadas en la interferometría de corrimiento de fase (PSI) e interferometría de franjas portadoras (CFI) en este proyecto de tesis doctoral se presenta un nuevo métodos de extracción de fase basado en la combinación de ambas técnicas, haciendo uso del método de mínimos cuadrados. Además se pretende hacer un estudio general del sistema cuasi-4f, formado cuando los planos de entrada y salida, las lentes transformadoras y la rejilla están fuera de sus planos iniciales que darán lugar al sistema 4f.

1.1. Justificación

El método de Takeda [3] básicamente consiste en llevar al espacio de Fourier la información codificada en la amplitud de las franjas de interferencia. Con un correcto valor de frecuencia portadora los espectros de la fase, su conjugado, y el término constante son separados por una frecuencia igual al valor de la frecuencia portadora. Si los lóbulos están lo suficientemente separados el término que contiene la información de la fase puede ser aislado, y considerando un valor de frecuencia portadora conocida, el lóbulo es centrado en el origen al restar el valor de la frecuencia portadora. Una vez centrado el lóbulo con la información de fase es regresado al dominio espacial y con una sencilla ecuación matemática se logra decodificar la función de fase desconocida.

En base a la teoría anterior se estudió como proyecto de tesis de maestría el sistema cuasi- $4f$ para determinar el valor de la frecuencia portadora, el cual consiste de un sistema telecéntrico formador de imágenes de doble transformada de Fourier, formado de dos ventanas separadas por una distancia x_0 en el plano objeto y una rejilla de Ronchi de periodo espacial u_p en el plano de frecuencias, que actúa como filtro espacial. Para observar el efecto de interferencia en el plano imagen, la distancia entre las dos ventanas debe ser relativa al periodo de la rejilla, la longitud focal de las lentes, y a la longitud de onda de la luz empleada $x_0 = \frac{\lambda f}{u_p}$. En el sistema propuesto cabe destacar que sus elementos ópticos son trasladados axialmente, es decir se encuentran fuera de su plano focal comprobando la relación del valor de la frecuencia portadora introducida, con el traslado de las lentes en un orden de centímetros. Para describir que sucede en este sistema cuasi- $4f$ cuando la lente L_1 o L_2 son trasladadas axialmente se usó la difracción de Fresnel y Fraunhofer [10], como herramienta para describir que sucede en un sistema mínimo compuesto por una sola lente esta se considera convergente con una distancia focal f y es colocada a una distancia d_1 del plano objeto o plano de entrada, mientras que el plano de salida es colocada a una distancia d_2 de la lente. La función de transferencia de la lente es dada por $\exp[\frac{-ik}{2f}(\xi^2 + \eta^2)]$ y bajo la teoría de difracción de Fresnel, a una distancia d_2 el campo óptico a la salida es

$$\begin{aligned} \tilde{t}(u, v) = & \frac{1}{i\lambda f_s} \exp \left[i\frac{k}{2} \left(\frac{1 - \frac{d_1}{f}}{f_s} \right) (u^2 + v^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \quad (1.1) \\ & t_A(x, y) \exp \left[i\frac{k}{2} \left(\frac{1 - \frac{d_2}{f}}{f_s} \right) (x^2 + y^2) \right] \exp \left[-i\frac{k}{f_s} (xu + yv) \right], \end{aligned}$$

donde la ecuación anterior representa el campo óptico difractado que inició en el plano de entrada así $t_A(x, y)$ representa la función de transmitancia óptica de entrada, y definiendo $f_s = (d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f})$ así, finalmente se obtuvo una expresión general para la solución de un sistema compuesto por una sola lente de manera que d_1 y d_2 adquieren valores arbitrarios. Una prueba de la veracidad de esta ecuación es cuando $d_1 = d_2 = f$ siendo reducido a la transformada de Fourier, óptica un resultado ya conocido [11]. Ahora considerando la ecuación general hallada se estudió lo siguiente (ver Fig.1.1) sistema cuasi- $4f$ cuando la lente L_1 es trasladada de su plano inicial.

Para poder determinar el campo óptico de Fig.(1.1) se dividió en dos etapas, la primera se considera $d_1 = f - \Delta f$ y $d_2 = f + \Delta f$ siendo un sistema de

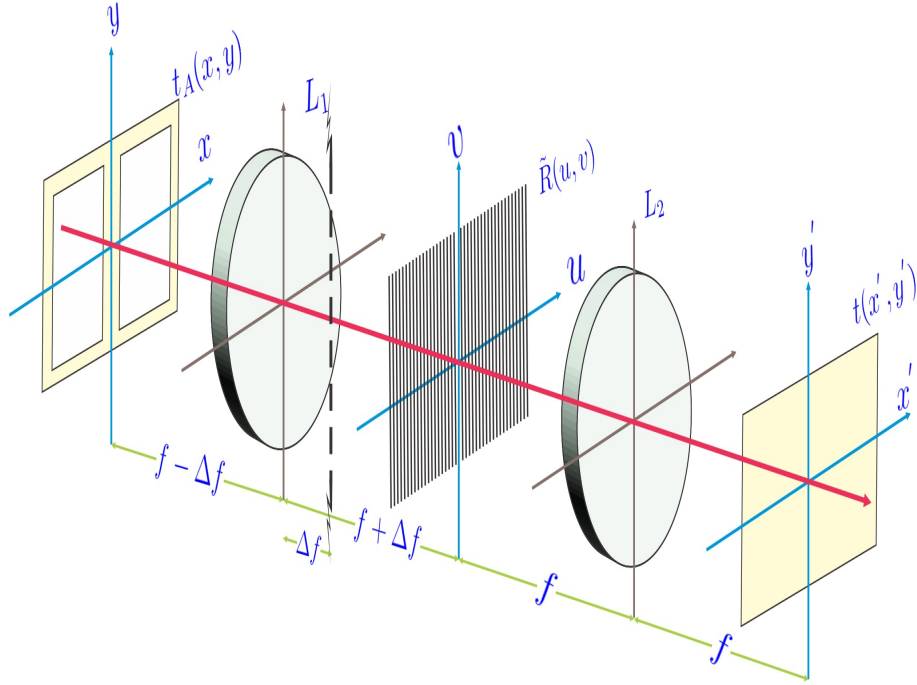


Figura 1.1: Interferómetro de trayectoria común de doble apertura modificado cuando L_1 es trasladada.

una lente y dos planos, por lo tanto sustituyendo en Ec.(1) se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{t}(u, v) = & \frac{1}{i\lambda} \exp \left[i \frac{k}{2} \frac{\Delta f}{f^2 + \Delta f^2} (u^2 + v^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} & (1.2) \\ & dx dy t_A(x, y) \exp \left[-i \frac{k}{2} \frac{\Delta f}{f^2 + \Delta f^2} (x^2 + y^2) \right] \\ & \exp \left[-ik \frac{f}{f^2 + \Delta f^2} (xu + yv) \right]. \end{aligned}$$

La Ec. (1.2) representa la distribución del campo en el plano (u, v) . Para la segunda etapa compuesta por la segunda lente $d_1 = d_2 = f$. Debido a que en el plano cuasi Fourier es colocada una rejilla binaria de Ronchi descrita como $R(u, v) = \frac{u_w}{u_p} \sum_n \sin c \left(\frac{u_w}{u_p} n \right) \exp(i2\pi \frac{u}{u_p})$. Para esta etapa la función de transmitancia del plano de entrada corresponde el campo de salida de la primera etapa que atraviesa la rejilla de Ronchi $R(u, v)$, esto es:

$$\begin{aligned} t(x', y') = & \frac{1}{i\lambda f} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dudv \tilde{t}(u, v) R(u, v) & (1.3) \\ & \exp \left[-i \frac{k}{f} (ux' + vy') \right]. \end{aligned}$$

Al sustituir la Ec. (1.2) en (1.3) el campo en el plano de salida en el sistema cuasi- $4f$ es

$$t(x', y') = \frac{u_w}{u_p} \left(1 + \frac{\Delta f^2}{f^2}\right) \exp \left[-i \frac{k}{2} \left(1 + \frac{\Delta f^2}{f^2}\right) (x^2 + y^2) \right] \sum \operatorname{sinc} \left(\frac{u_w}{u_p} n \right) \quad (1.4)$$

$$t_A \left\{ \left(1 + \frac{\Delta f^2}{f^2}\right) \left(\frac{\lambda f}{u_p} n - x' \right), - \left(1 + \frac{\Delta f^2}{f^2}\right) y' \right\},$$

donde $\left(1 + \frac{\Delta f^2}{f^2}\right)$ es un factor de escala que se puede aproximar a la unidad. La Ec.(1.4) se compone básicamente de réplicas invertidas de la función óptica de entrada, donde cada replica está situada en múltiplos enteros de $\left(\frac{\lambda f}{u_p}\right)$ escalado por la función *sinc* y un término de fase lineal en función de n y Δf . Al observar una única replica la intensidad observada será el patrón de interferencia.

$$I_{(0+1)}(x', y') = A_p^2 + A_p^2 \sin^2 \left(\frac{u_w}{u_p} \right) + 2A_p A_r \sin c \left(\frac{u_w}{u_p} \right) \quad (1.5)$$

$$\cos[\phi - 2\pi\mu_0 x' + \pi\mu_0 x_0],$$

donde $\mu_0 = \frac{\Delta f}{u_p f}$ es la frecuencia portadora siendo directamente proporcional al desplazamiento Δf e inversamente proporcional al periodo de la rejilla u_p y la distancia focal f . [12] La aplicación del presente método para la introducción de una frecuencia portadora podría reducir el error introducido experimentalmente, y la exactitud del desplazamiento axial de la primera lente se puede mejorar mediante el uso de un sistema sofisticado como un actuador o un desplazador mecánico de precisión más alta. Por lo tanto, una de las ventajas más importantes en el presente método es la exactitud aceptable de la traslación axial de la lente por un sistema no sofisticado, por ejemplo mediante la traslación axial de la lente manualmente en un carril graduado, en pasos de un milímetro y esto fue suficiente para generar una frecuencia portada, eliminando los posibles errores por la rotación de componentes en ordenes de miliradianes. Basándose en este trabajo, el presente proyecto de tesis se pretende introducir nuevos métodos para la extracción de fase, y generalizar este sistema para determinar cuándo se encuentra el sistema en $4f$, así como determinar la exactitud de dicho sistema.

1.2. Objetivo General

Desarrollar una nueva técnica para la extracción de fase mediante el método de mínimos cuadrados, utilizando los métodos de corrimiento de fase(PSI) e interferometría de franjas portadoras(CFI).

1.3. Objetivo Particulares

1. Resolver el caso general cuasi- $4f$ para determinar la frecuencia portadora.
2. Estimar el error de la fase lineal introducida para los casos estudiados previamente, cuando la rejilla binaria de Ronchi y la lente L_1 es trasladada de su plano inicial respectivamente.
3. Determinar la incertidumbre en el sistema cuasi- $4f$.
4. Analizar y proponer un método de extracción de fase usando franjas portadoras mediante el método de mínimos cuadrados.
5. Determinar la exactitud del método propuesto.

1.4. Metodología

1. Revisión bibliográfica sobre interferometría y métodos de extracción de fase.
2. Revisión bibliográfica sobre métodos de franjas portadoras, destacando su eficiencia y limitaciones.
3. Resolver analíticamente caso general para el sistema cuasi- $4f$.
4. Implementar experimentalmente el interferómetro de trayectoria común de doble apertura y obtener patrones experimentales para mostrar el punto anterior.
5. Estimar el error de la fase lineal introducido cuando la rejilla es trasladada axialmente de su plano.
6. Estimar el error de la fase lineal introducido cuando la lente L_1 es trasladada de su plano focal.
7. Analizar el método de extracción de fase utilizando el métodos de franjas portadoras.
8. Diseño y programación de algoritmos de interferometría de franjas portadoras.
9. Implementar experimentalmente el método de extracción de fase propuesto para justificar la parte teórica.

1.5. Organización de la tesis

La presente tesis se encuentra organizada en cinco capítulos. El primer capítulo “Introducción”, se explica el tema a tratar en la tesis, contiene el planteamiento del problema así como el marco teórico en el que se desenvuelve la investigación.

En el segundo capítulo “Fundamentos Teóricos” está orientado a revisar los conceptos básicos, comenzando con la teoría escalar de difracción de campo cercano y lejano, la óptica de Fourier y sistemas con una lente, se detallaran algunas definiciones de la transformada de Fourier para un claro entendimiento del mismo. La teoría de interferometría y sus consideraciones generales, especialmente en el fundamento teórico de un DACPI ya que este interfermetro es la base de la presente tesis, Posteriormente se describen los métodos de corrimiento de fase PSI y CFI, destacando sus diferencia. Además se analiza el método de mínimos cuadrados.

En el tercer capítulo “Interferometría de franjas portadoras en un sistema cuasi-4f generalizado” se muestra el desarrollo matemático de un DACPI cuando todos sus elementos ópticos se encuentran fuera de sus planos iniciales. Además se muestran los primeros resultados experimentales de dicho sistema.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

2.1. Introducción

En el presente capítulo, se utilizan técnicas matemáticas adaptadas a la óptica y métodos aplicados al sistema de interés. La óptica nos permite describir todos los fenómenos físicos relacionados con luz y la posibilidad de calcular ciertas cantidades físicas, dentro de las que se puede mencionar: pruebas de superficies ópticas, espejos, lentes, velocidad de flujo, estudio interno de objetos usando tomografía, etc. A continuación se presentan los fundamentos teóricos de la óptica, a través de modelos, aproximaciones y métodos matemáticos, que permiten establecer con precisión el sistema de interés y que son necesarios para una adecuada comprensión del trabajo de investigación que se realiza.

2.2. Difracción

La difracción es un fenómeno característico de las ondas, éste se basa en el curvado y esparcido de las ondas cuando se encuentran un obstáculo ó pequeñas aberturas. La difracción ocurre en todo tipo de ondas, desde ondas sonoras, ondas en la superficie de un fluido y ondas electromagnéticas como: la luz y las ondas de radio. El fenómeno de la difracción se considera de tipo interferencial y como tal requiere la superposición de ondas coherentes, es decir, deben mantener una constante de fase entre sí.

La fase de una oscilación o de una onda es la fracción de un ciclo completo que corresponde a una compensación en la dislocación de un punto de referencia especificado en el tiempo $t = 0$.

El ángulo o su módulo entre dos ondas debe ser de 2π para que se considere

que esta en fase. Para entender claramente este fenómeno, se debe enfatizar que los efectos de difracción ya que tiene gran significado en el estudio detallado de dispositivos que contienen lentes, diafragmas, rendijas, espejos, etc. Para una explicación inicial a lo mencionado consideramos la aproximación de Fresnel que establece que cada punto sin obstrucción de un frente de onda, en un instante de tiempo dado, sirve como una fuente de ondas secundarias esféricas (de la misma frecuencia).

2.2.1. Difracción de Fresnel

La teoría escalar de difracción permite tratar el comportamiento de la propagación de la luz de una forma simplificada, ya que no tiene en cuenta el carácter vectorial de las ondas electromagnéticas. Esta simplificación da resultados precisos si se cumplen dos condiciones básicas:

- a) El tamaño de abertura de difracción debe ser mayor comparada con la longitud de onda.
- b) La distancia de observación del campo difractado debe ser suficientemente grande en comparación con las dimensiones de abertura, en estas condiciones la polarización del campo electromagnético se considera que no varia, lo que permite prescindir del formalismo vectorial.

Teniendo en cuenta esto vemos que la teoría escalar de la difracción es adecuada para plantear la reconstrucción de objetos mediante la propagación de la luz. Para aproximar el cálculo de la difracción se realiza considerando el caso de coordenadas rectangulares, fijando los ejes de coordenadas (x_0, y_0) en la pantalla que contiene la abertura y considerando el eje z como el eje normal al plano que contiene la abertura, con origen en dicho plano, como se muestra en la Figura(2.1). En lo cual tenemos lo siguiente.

$$E(x, y) = \frac{1}{i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r_{01}} \exp[i(kr_{01} - \omega t)] dx_0 dy_0, \quad (2.1)$$

donde también conocemos que:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

La distancia entre un punto de la abertura $(x_0; y_0; 0)$ y el punto de observación $P(x; y; z)$ es

$$r_{01} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2}, \quad (2.2)$$

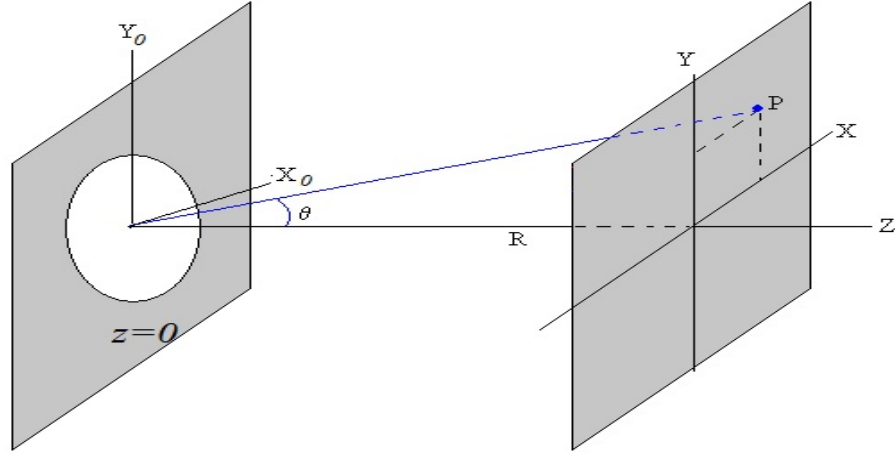


Figura 2.1: Difracción de Fresnel

$$r_{01} = z\sqrt{1 + \frac{(x - x_0)^2}{z^2} + \frac{(y - y_0)^2}{z^2}}, \quad (2.3)$$

La aproximación de Fresnel se realiza entonces si se verifica lo siguiente $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \ll z^2$, entonces se puede aproximar r por z . En el caso de la exponencial este cambio no se puede realizar directamente ya que el periodo de las oscilaciones es muy rápido (debido al factor $\frac{2\pi}{\lambda}$) y la sustitución directa puede producir errores importantes en la estimación del ángulo. Lo que se hace es aproximar la raíz mediante una serie de Taylor de primer grado.

$$r_{01} \approx z \left[1 + \frac{(x - x_0)^2}{2z^2} + \frac{(y - y_0)^2}{2z^2} \right], \quad (2.4)$$

$$kr_{01} = kz + \frac{k}{2z} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2], \quad (2.5)$$

$$\lambda r_{01} = \lambda z + \frac{\lambda}{2z} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \approx \lambda z. \quad (2.6)$$

$$E(x, y) = \frac{1}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 dy_0 A(x_0, y_0) \exp(ikz) \exp \left[i \frac{k}{2z} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right], \quad (2.7)$$

está aproximación equivale a aproximar una esfera por una superficie parabólica. De esta forma obtenemos la fórmula de difracción de Fresnel.

$$E(x, y) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 dy_0 A(x_0, y_0) \exp \left[i \frac{k}{2z} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \right], \quad (2.8)$$

como los límites se pueden extender de $-\infty$ a ∞ considerando que el campo eléctrico fuera de la abertura es cero y haciendo $\Psi(x; y) = A(x_0; y_0, 0)G(x; y)$, con $G(x; y)$ la función que describe la geometría de la abertura. La integral de la difracción de Fresnel puede ser interpretada como la convolución entre el campo en el plano $z = 0$, $\Psi(x; y)$, y la respuesta impulsional $h(x; y)$:

$$E(x, y) = \Psi(x, y) \otimes h(x, y), \quad (2.9)$$

$$E(x, y) = \Psi(x, y) \otimes h(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x_0, y_0) h(x - x_0, y - y_0, z) dx_0 dy_0. \quad (2.10)$$

$$h(x, y) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp \left[i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right].$$

Esta función $h(x, y)$ que forma el núcleo de la convolución corresponde a la expresión de una onda esférica con origen en $z = 0$ que ha viajado una distancia z , multiplicada por el factor $\frac{1}{i\lambda}$. Por tanto en la aproximación de Fresnel, el campo eléctrico escalar a una distancia z se obtiene mediante la convolución del campo en $z = 0$ con una onda esférica que ha viajado la distancia z .

2.2.2. Difracción de Fraunhofer

La Difracción de Fraunhofer o también difracción del campo lejano es un patrón de difracción de una onda electromagnética cuya fuente (al igual que la pantalla) se encuentran infinitamente alejadas del obstáculo, por lo que sobre éste y sobre la pantalla incidirán ondas planas. La difracción de Fraunhofer es, de esta manera, un caso particular de la difracción de Fresnel, y que también resulta más sencillo de analizar.

Este tipo de fenómeno es observado a distancias más lejanas que las del campo cercano de la difracción de Fresnel y ocurre solamente cuando el número de Fresnel F dado por

$$F = \frac{a}{L\lambda}, \quad (2.11)$$

dónde λ es la longitud de onda, a es el tamaño (por ejemplo el radio) de la apertura, y L es la distancia desde la apertura hasta la pantalla, dependiendo del valor de F , la difracción puede ser de dos tipos:

- Si $F \ll 1$ es difracción de Fraunhofer.
- Si $F \geq 1$ es difracción de Fresnel

Cuando la difracción se efectúa tanto con la fuente luminosa como con la pantalla de observación situadas al infinito, tenemos la llamada difracción de Fraunhofer. La fuente de luz puede estar realmente al infinito, pero lo más frecuente es que esté colocada ópticamente al infinito mediante una lente colimadora. El hecho de que la pantalla de observación este al infinito puede en cierto modo considerarse equivalente a decir que en la difracción de Fraunhofer lo que se observa es la distribución angular de la luz, después de la pantalla difractora. El factor de inclinación no es importante en el caso de la difracción de Fraunhofer porque los ángulos de difracción son en general pequeños. Por lo tanto, si tomamos el caso de incidencia normal ($r = \text{constante}$)

$$E(x, y) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B \exp[iks] dS,$$

donde B es una constante directamente proporcional a la amplitud sobre la pantalla. Si esta pantalla esta colocada sobre el plano x-y la amplitud en este plano es función de x y de y , podemos considerar que B no es una constante, si no una función de x, y . La distancia s es lo suficientemente variable como para producir cambios de fase ks , pero lo suficientemente constante como para considerar el factor $\frac{1}{s}$ como constante e incluirlo como parte de la función

$B(x, y)$ entonces

$$E(x, y) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(x, y) \exp[iks] dx dy,$$

Consideramos ahora una onda difractada en una cierta dirección, como se

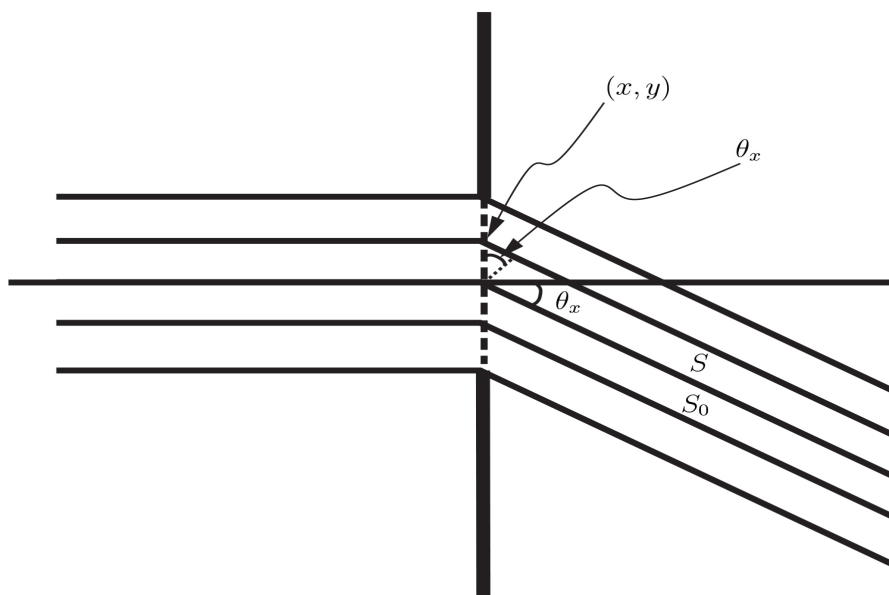


Figura 2.2: Trayectoria de los rayos en la difracción de Fraunhofer

muestra en la siguiente Fig.(2.2). Necesitamos calcular la fase relativa para los diferentes rayos con coordenadas x, y , sobre la pantalla difractora. Como la fase es sólo relativa debido a que la pantalla de observación está al infinito, no necesitamos calcular el valor real de S sino solamente su cambio de un rayo respecto a otro. Tomando el origen en algún lugar sobre el plano de abertura se puede ver que

$$\sin \theta_x = \frac{S - S_0}{x}. \quad (2.12)$$

por lo tanto

$$S = S_0 + x \sin \theta_x, \quad (2.13)$$

recordando que sólo se requiere el valor relativo de S , podemos ignorar la constante S_0 y generalizar este resultado a dos dimensiones como sigue

$$S = x \sin \theta_x + y \sin \theta_y. \quad (2.14)$$

donde definiendo $k_x = k \sin \theta_x$, $k_y = k \sin \theta_y$ y generalizando a dos dimensiones si tenemos una función $E(x, y)$ definimos otra función

$$u(k_x, y_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y) \exp[ik_x x + k_y y] dx dy. \quad (2.15)$$

Entonces es posible demostrar que la función $F(x, y)$ se puede escribir como

$$F(k_x, k_y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(k_x, y_y) \exp i[k_x x + k_y y] dk_x dk_y. \quad (2.16)$$

donde las funciones $F(k_x, k_y)$ y $U(k_x, y_y)$ son transformadas bidimensionales de Fourier, una de la otra

2.2.3. Transformada de Fourier

En las líneas siguientes vamos a emplear el análisis de los métodos de Fourier, que además de su potencial matemático real, el análisis de Fourier proporciona una forma excelente de tratar los procesos ópticos en términos de frecuencias espaciales. La principal motivación aquí es desarrollar la comprensión de la forma en que los sistemas ópticos procesan la luz para formar imágenes. Una función de una dimensión de alguna variable en el espacio $f(x)$ puede expresarse como una combinación lineal de un número infinito de contribuciones armónicas.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cos kx dk + \int_{-\infty}^{\infty} B(k) \sin kx dk \right], \quad (2.17)$$

Los factores que determinan la importancia de las diversas contribuciones de frecuencia espacial angular (k), es decir $A(k)$ y $B(k)$, son las transformadas de Fourier del coseno y del seno dadas por:

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \cos kx' dx'. \quad (2.18)$$

$$B(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \sin kx' dx'. \quad (2.19)$$

respectivamente. Aquí la cantidad x' es una variable muda sobre la cual se lleva a cabo la integración, de manera que ni $A(k)$ ni $B(k)$ son funciones explícitas de x' y la selección del símbolo usado para indicarla no es importante. Las transformadas del seno y del coseno pueden consolidarse dentro de una sola expresión exponencial compleja como sigue,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos kx \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \cos kx' dk + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin kx \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \sin kx' dk, \quad (2.20)$$

Pero como el $\cos k(x'-x) = \cos kx \cos kx' + \sin kx \sin kx'$, esto puede reescribir como

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \cos k(x' - x) dx' \right] dk, \quad (2.21)$$

La cantidad entre parentesis cuadrados es una función par de k por lo tanto, al cambiar los límites sobre la integral externa, tendremos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \cos k(x' - x) dx' \right] dk, \quad (2.22)$$

Por consiguiente observe que

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \sin k(x' - x) dx' \right] dk = 0. \quad (2.23)$$

por que el factor entre paréntesis es una función impar de k . Al sumar estas dos últimas expresiones, se obtiene la forma compleja de la integral de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \exp ikx' dx' \right] \exp -ikx dk, \quad (2.24)$$

Por lo tanto podemos escribir

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp -ikx dk. \quad (2.25)$$

siempre que

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp ikx dx. \quad (2.26)$$

habiendo puesto $x' = x$ en la Ec.(2.26). La función $F(k)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$. En las transformadas de Fourier se pueden encontrar las siguientes propiedades:

- Una constante sumada a la función $f(x)$ solamente cambia el valor de $F(0)$.
- Si la función $f(x)$ es simétrica, es decir $f(x) = f(-x)$, la función espectral es real.
- Si la función $f(x)$ es antisimétrica, es decir si $f(x) = -f(-x)$ la función $F(k)$ es imaginaria.
- Si la función $f(x)$ es asimétrica, la función $F(k)$ es compleja.

2.2.4. Sistema con una lente

Una de las propiedades más útiles y notables de una lente convergente es su capacidad esencial para realizar la transformada de Fourier en dos dimensiones. Esta operación puede ser complicada llevada a cabo con la máxima simplicidad en un sistema óptico coherente, aprovechando las leyes básicas de la propagación y la difracción de la luz. En todos los casos se supone que la iluminación es monocromática. En estas condiciones los sistemas estudiados son sistemas *coherentes*, lo que significa que es lineal en amplitud compleja, y la distribución de amplitud de luz a través de un plano particular detrás de la lente positiva. En algunos casos el plano focal posterior de la lente, que por definición, es un plano normal al eje de la lente situado a una distancia f detrás de la lente (en la dirección de la propagación de la luz). La información contenida en la transformada de Fourier se introduce en el sistema óptico por un dispositivo con una transmitancia de amplitud que es proporcional a la función de entrada de interés. Este dispositivo puede consistir en una transparencia fotográfica, mientras que en otros puede ser un modulador espacial de luz monocromática capaz de controlar la transmisión de amplitud en respuesta a la información eléctrica u óptica suministrada externamente.

A continuación se estudiará el siguiente sistema óptico, que servirá como un sistema mínimo base para describir el DACPI modificado cuando L_1 y L_2 son trasladadas axialmente. Este arreglo consiste de una sola lente observe Fig. (2.3) en donde $t_A(x, y)$ representa la función de transmitancia óptica de entrada, d_1 es la distancia del plano objeto a la lente L , d_2 es la distancia de la lente al plano de observación $\tilde{t}(u, v)$. Para describir el campo óptico justo antes de la lente es necesario utilizar la difracción de campo cercano con lo cual se puede obtener una expresión matemática de la siguiente forma

$$t(\xi, \eta) = \frac{1}{i\lambda d_1} \exp \left[i \frac{k}{2d_1} (\xi^2 + \eta^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_A(x, y) dx dy \quad (2.27)$$

$$\exp \left[i \frac{k}{2d_1} (x^2 + y^2) \right] \exp \left[-i \frac{k}{d_1} (\xi x + \eta y) \right].$$

El campo incidente a la salida del elemento difractor se obtiene como la multiplicación del campo incidente por la transmitancia de la lente, es decir, el campo $t'(\xi, \eta)$ que atraviesa el plano inmediatamente detrás de la lente, el cual esta relacionado con el campo $t(\xi, \eta)$ que incide sobre un plano inmediatamente delante de la lente, esta dado por

$$t'(\xi, \eta) = t_l(\xi, \eta)t(\xi, \eta). \quad (2.28)$$

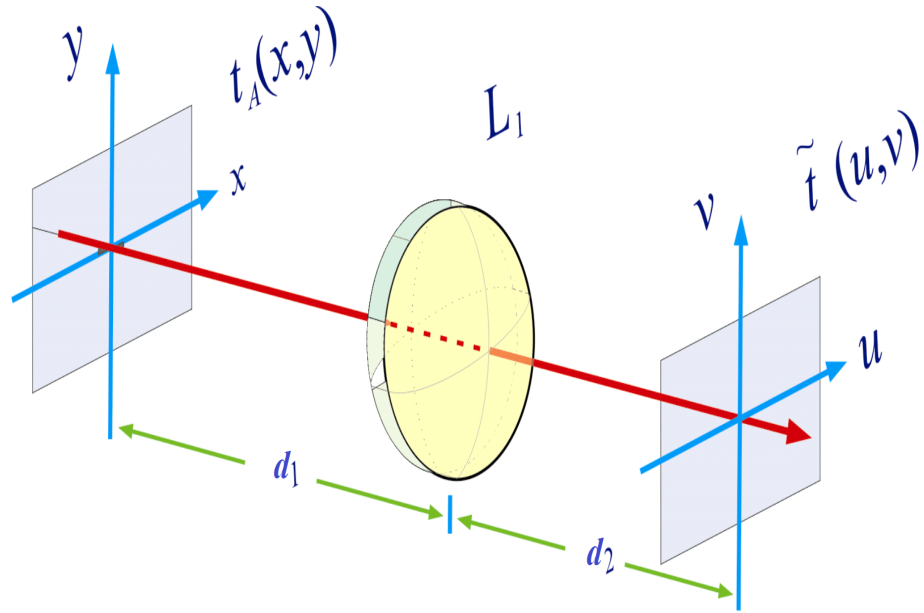


Figura 2.3: Arreglo con una lente

se puede observar que el campo óptico es afectado por la función de transmisión en su representación básica de una lente delgada en una perturbación incidente la cual esta dada por la Ec. (2.28) Considerando las dos ecuaciones anteriores que son de importancia para el desarrollo de este sistema, y en la teoría de difracción de Fresnel se sustituyen la Ec.(2.28) en Ec.(2.27) de la cual se obtiene finalmente el campo óptico a la salida de la lente

$$t'(\xi, \eta) = \exp \left[-i \frac{k}{2f} (\xi^2 + \eta^2) \right] \frac{1}{i\lambda d_1} \exp \left[i \frac{k}{2d_1} (\xi^2 + \eta^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_A(x, y) dx dy \exp \left[i \frac{k}{2d_1} (x^2 + y^2) \right] \exp \left[-i \frac{k}{d_1} (\xi x + \eta y) \right], \quad (2.29)$$

factorizando términos de la primera exponencial se obtiene

$$t'(\xi, \eta) = \frac{1}{i\lambda d_1} \exp \left[i \frac{k}{2} (\xi^2 + \eta^2) \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f} \right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_A(x, y) dx dy \exp \left[i \frac{k}{2d_1} (x^2 + y^2) \right] \exp \left[-i \frac{k}{d_1} (\xi x + \eta y) \right]. \quad (2.30)$$

Aplicando nuevamente la integral de Fresnel, la cual proporciona la difracción en el plano de observación.

$$\begin{aligned} \tilde{t}(u, v) = & \frac{1}{i\lambda d_2} \exp \left[i \frac{k}{2d_2} (u^2 + v^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta t'(\xi, \eta) \quad (2.31) \\ & \exp \left[i \frac{k}{2d_2} (\xi^2 + \eta^2) \right] \exp \left[-i \frac{k}{d_2} (u\xi + v\eta) \right], \end{aligned}$$

sustituyendo $t'(\xi, \eta)$ en la Ec.(2.31) y posteriormente factorizando términos semejantes, la intensidad del campo óptico a la salida del plano de observación es

$$\begin{aligned} \tilde{t}(u, v) = & \left(\frac{1}{i\lambda} \right)^2 \frac{1}{d_1 d_2} \exp \left[i \frac{k}{2d_2} (u^2 + v^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \quad (2.32) \\ & t_A(x, y) \exp \left[i \frac{k}{2d_1} (x^2 + y^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta \\ & \exp \left[i \frac{k}{2} (\xi^2 + \eta^2) \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f} + \frac{1}{d_2} \right) \right] \\ & \exp \left[-ik \left[\xi \left(\frac{x}{d_1} + \frac{u}{d_2} \right) + \eta \left(\frac{y}{d_1} + \frac{v}{d_2} \right) \right] \right], \end{aligned}$$

para resolver el segundo par de integrales es necesario realizar un paréntesis. La función Gamma la cual se denota de la siguiente forma[13]

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} \exp(-s) s^{\lambda-1} ds \dots (\lambda > 0),$$

la definición no solo tiene sentido para λ real mayor que cero, sino también para números complejos. En este caso la definición tiene sentido para cualquier complejo con parte real no negativa pues, tomando el valor principal de s^{z-1} , la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \exp(-s) s^{z-1} ds, \quad (2.33)$$

es convergente. Su derivada viene dada por

$$\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} \exp(-s) s^{z-1} s ds. \quad (2.34)$$

Integral que también converge para $\Re(z) > 0$. Haciendo uso de la definición original y como corolario, tenemos que

$$\int_0^{\infty} \exp(-s) s^{-\frac{1}{2}} ds = \int_0^{\infty} dx \exp(-x^2) = \Gamma \left(\frac{1}{2} \right) = \sqrt{\pi}. \quad (2.35)$$

teniendo como base la expresión anterior, una generalización de la ecuación anterior puede ser descrita mediante

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2 + bx) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right). \quad (2.36)$$

Notar en la Ec.(2.36) que las constantes a , b para el caso que se está estudiando tienen parte real igual a cero, es decir, son constantes complejas donde necesariamente se cumple la condición $\Re[a] \geq 0$.

Por otro lado se observa que las integrales de la Ec.(2.32) son de variables separables, entonces expresando cada integral en términos de cada variable (ξ, η) se obtiene

$$\begin{aligned} H(\xi, \eta) = & \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left[i\frac{k}{2}\xi^2\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f} + \frac{1}{d_2}\right)\right] \exp\left[-ik\xi\left(\frac{x}{d_1} + \frac{u}{d_2}\right)\right] \\ & \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp\left[i\frac{k}{2}\eta^2\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f} + \frac{1}{d_2}\right)\right] \exp\left[-ik\eta\left(\frac{y}{d_1} + \frac{v}{d_2}\right)\right], \end{aligned} \quad (2.37)$$

ahora aplicando Ec.(2.36) en Ec.(2.37) donde por inspección se tiene que $a = -i\frac{k}{2}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f} + \frac{1}{d_2}\right)$, para ξ^2 y η^2 , $b_1 = -ik\left(\frac{x}{d_1} + \frac{u}{d_2}\right)$ para la variable ξ y $b_2 = -ik\left(\frac{y}{d_1} + \frac{v}{d_2}\right)$ para la variable η , entonces al sustituir estos términos se tiene

$$H(\xi, \eta) = \frac{\pi}{-i\frac{k}{2}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f} + \frac{1}{d_2}\right)} \exp\left[\frac{-ik\left[\left(\frac{x}{d_1} + \frac{u}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{y}{d_1} + \frac{v}{d_2}\right)^2\right]}{4\left[-i\frac{k}{2}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f} + \frac{1}{d_2}\right)\right]}\right] \quad (2.38)$$

realizando el algebra correspondiente y agrupando términos semejantes se llega a lo siguiente

$$\begin{aligned} H(\xi, \eta) = & i\lambda \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f}} \exp\left[i\frac{k}{2} \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f}} \left(\frac{x^2}{d_1^2} + \frac{y^2}{d_1^2}\right)\right] \\ & \exp\left[-i\frac{k}{2} \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f}} \left(\frac{u^2}{d_2^2} + \frac{v^2}{d_2^2}\right)\right] \\ & \exp\left[-i\frac{k}{2} \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f}} \frac{2}{d_1 d_2} (xu + yv)\right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

después de haber realizado la serie de cálculos anteriores y al sustituir el

resultado obtenido de $H(\xi, \eta)$ en Ec.(2.32) se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{t}(u, v) = & \frac{1}{i\lambda} \frac{1}{d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f}} \exp \left[-i \frac{k}{2} \left(\frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f}} \frac{1}{d_2^2} - \frac{1}{d_2} \right) (u^2 + v^2) \right] \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy t_A(x, y) \exp \left[-i \frac{k}{2} \left(\frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f}} \frac{1}{d_1^2} - \frac{1}{d_1} \right) (x^2 + y^2) \right] \\ & \exp \left[-i \frac{k}{2} \left(\frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f}} \frac{2}{d_1 d_2} \right) (xu + yv) \right], \end{aligned} \quad (2.40)$$

y la cual se reduce a lo siguiente

$$\begin{aligned} \tilde{t}(u, v) = & \frac{1}{i\lambda f_s} \exp \left[i \frac{k}{2} \left(\frac{1 - \frac{d_1}{f}}{f_s} \right) (u^2 + v^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \\ & t_A(x, y) \exp \left[i \frac{k}{2} \left(\frac{1 - \frac{d_2}{f}}{f_s} \right) (x^2 + y^2) \right] \exp \left[-i \frac{k}{f_s} (xu + yv) \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ec.(2.41) representa el campo difractado en el plano de observación que inició en el plano de entrada, el cual se puede describir por medio de la semejanza de la difracción de Fresnel, solo que en este caso las fases cuadráticas son disminuidas por $\frac{d_1}{f}$ y $\frac{d_2}{f}$ respectivamente. Además como una prueba de la veracidad de la Ec.(2.61), tal expresión puede ser reducida a la transformada de Fourier óptica cuando $d_1 = d_2 = f$, el cual es un resultado conocido. Definiendo $f_s = (d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f})$, así finalmente se obtuvo una expresión general para la solución de un sistema de una lente de tal manera que d_1 y d_2 adquieren valores arbitrarios. Ahora considerando la expresión general hallada anteriormente se tienen los siguientes tres casos.

a) $d_1 = f$ y $d_2 \neq f$

$$\begin{aligned} \tilde{t}(u, v) = & \frac{f}{i\lambda(d_2 f - d_2 f + f^2)} \exp \left[-i \frac{k}{2} \frac{f - f}{(d_2 f - d_2 f + f^2)} (u^2 + v^2) \right] \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy t_A(x, y) \exp \left[i \frac{k}{2} \frac{f - d_2}{(d_2 f - d_2 f + f^2)} (x^2 + y^2) \right] \\ & \exp \left[-i k \frac{f}{(d_2 f - d_2 f + f^2)} (xu + yv) \right], \end{aligned} \quad (2.42)$$

se observa de la ecuación anterior que existe fuera y dentro de la integral un factor de fase cuadrático.

$$\begin{aligned} \tilde{t}(u, v) = & \frac{1}{i\lambda f} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy t_A(x, y) \exp \left[i \frac{k}{2} \frac{f - d_2}{f^2} (x^2 + y^2) \right] \\ & \exp \left[-i k \frac{1}{f} (xu + yv) \right]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

b) $d_1 \neq f$ y $d_2 = f$

$$\begin{aligned} \tilde{t}(u, v) = & \frac{f}{i\lambda(d_1f - d_1f + ff)} \exp \left[i\frac{k}{2} \frac{f - d_1}{(d_1f - d_1f + ff)} (u^2 + v^2) \right] (2.44) \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy t_A(x, y) \exp \left[i\frac{k}{2} \frac{f - f}{(d_1f - d_1f + ff)} (x^2 + y^2) \right] \\ & \exp \left[-ik \frac{f}{(d_1f - d_1f + ff)} (xu + yv) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{t}(u, v) = & \frac{1}{i\lambda f} \exp \left[i\frac{k}{2} \frac{f - d_1}{f^2} (u^2 + v^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy t_A(x, y) (2.45) \\ & \exp \left[-ik \frac{1}{f} (xu + yv) \right]. \end{aligned}$$

observar que fuera de la integral existe un término cuadrático, y dentro de la misma un término de fase lineal. Este caso podría ser usado para observar ópticamente la transformada de Fourier bidimensional, puesto que el término cuadrático fuera de la integral no sería observado por un detector óptico.

c) $d_1 = d_2 = f$

$$\begin{aligned} \tilde{t}(u, v) = & \frac{f}{i\lambda(f^2 - f^2 + f^2)} \exp \left[i\frac{k}{2} \frac{f - f}{(f^2 - f^2 + f^2)} (u^2 + v^2) \right] (2.46) \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy t_A(x, y) \exp \left[i\frac{k}{2} \frac{f - f}{(f^2 - f^2 + f^2)} (x^2 + y^2) \right] \\ & \exp \left[-ik \frac{f}{(f^2 - f^2 + f^2)} (xu + yv) \right], \end{aligned}$$

$$\tilde{t}(u, v) = \frac{1}{i\lambda f} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy t_A(x, y) \exp \left[-i\frac{k}{f} (xu + yv) \right]. (2.47)$$

notar que en este caso se obtiene la transformada de Fourier escalada en su amplitud $\frac{1}{\lambda f}$, asumiendo la construcción virtual de las frecuencias espaciales $(\frac{u}{\lambda f}, \frac{v}{\lambda f})$.

2.3. Interferencia

2.3.1. Interferómetro de trayectoria común de doble apertura

Este interferómetro está basado en un sistema telecéntrico formador de imágenes de doble transformada de Fourier, que consiste de dos ventanas separadas por una distancia x_0 en el plano objeto y, una rejilla de Ronchi de periodo espacial $u_p = \frac{\lambda f}{x_0}$ en el plano de frecuencias, con un ancho de franja brillante espacial A_w , se define el ancho frecuencial de la rejilla mediante $a_w = \frac{A_w}{\lambda f}$, la cual se desplaza transversalmente una distancia $u_d = \frac{\lambda f}{\mu_d}$, donde μ_d es su correspondiente valor en frecuencia. La Fig.(2.4) muestra el caso de la distancia x_0 de separación mínima, el traslape de las ventanas se lleva a cabo mediante la correlación de los órdenes de difracción $0, \pm 1$.

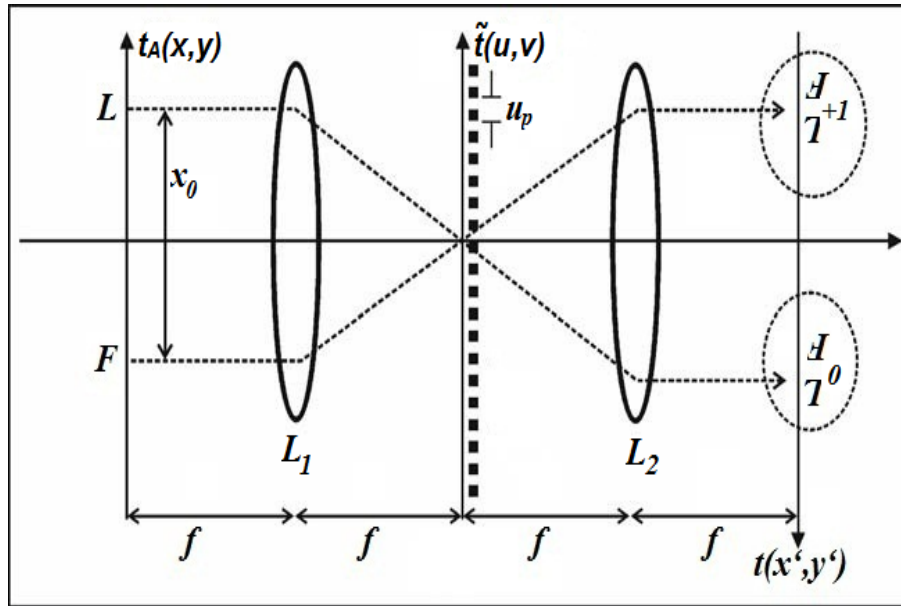


Figura 2.4: Interferómetro de trayectoria común con ventanas L y F, respectivamente

En esta sección se desarrolla la teoría general del DACPI. Cabe destacar que este caso, sirve de estructura principal en el sistema $4f$ modificado, cuando todos sus elementos ópticos son trasladados de forma axial respecto del eje óptico, principal objetivo del presente trabajo de tesis, y que veremos su explicación teórica a detalle en el capítulo siguiente.

Denotemos las ventanas de entrada en el plano objeto, con la función escalar en dos dimensiones, dada por

$$t_A(x, y) = w\left(x + \frac{1}{2}x_0, y\right) + w\left(x - \frac{1}{2}x_0, y\right) \exp\left[i\phi\left(x - \frac{1}{2}x_0, y\right)\right], \quad (2.48)$$

$t_A(x, y)$, representa la función de transmitancia de entrada, ϕ es la fase asociada a la onda de prueba, w es una función de ventana. Las funciones de ventana están expresadas en términos de la función rectángulo, de ancho a y altura b , como

$$w(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right). \quad (2.49)$$

Ahora, en el plano de Fourier, la frecuencia de la rejilla de Ronchi se puede escribir ,

$$\tilde{r}(\mu, \nu) = \text{rect}\left(\frac{\mu}{a_w}\right) \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \mu_d - \frac{n}{x_0}\right), \quad (2.50)$$

donde $\mu = \frac{u}{\lambda f}$, $\nu = \frac{v}{\lambda f}$, λ es la longitud de onda, f es la distancia focal y el símbolo \otimes denota la convolución, entonces la respuesta al impulso correspondiente definido como $r(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\tilde{R}(\mu, \nu)$ se expresa

$$r(x, y) = a_w x_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi n \mu_d x_0) \sin c(n a_w x_0) \delta(x - n x_0, y). \quad (2.51)$$

Iluminando el plano objeto con una onda plana, en el plano imagen, la transmitancia de salida esta dada por la operación de convolución

$$t(x', y') = t_A(x, y) \otimes r(x, y), \quad (2.52)$$

sustituyendo Ec.(2.48) y Ec.(2.51) en Ec.(2.52), se obtiene

$$t(x', y') = a_w x_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi n \mu_d x_0) \sin c(n a_w x_0) \left[w\left(x + \left(\frac{1}{2} - n\right)x_0, y\right) + w\left(x - \left(\frac{1}{2} + n\right)x_0, y\right) \exp\left[i\phi\left(x - \frac{1}{2}x_0 - n x_0, y\right)\right] \right]. \quad (2.53)$$

la expresión resultante muestra dos espectros simétricamente desplazados en el plano imagen, cada uno formado por los órdenes de difracción de replicas en una ventana ó en otra. Un caso de interés de replicas de ventanas ocurre para los órdenes de difracción 0 y 1, los cuales adoptan la siguiente forma

$$t_0(x', y') = a_w x_0 \left[w\left(x + \frac{x_0}{2}, y\right) + w\left(x - \frac{x_0}{2}, y\right) \right] \exp\left[i\phi\left(x - \frac{x_0}{2}, y\right)\right]. \quad (2.54)$$

$$t_{+1}(x', y') = a_w x_0 \exp(i2\pi\mu_d x_0) \sin c(a_w x_0) w \left(x - \frac{x_0}{2}, y \right) + \quad (2.55)$$

$$\left(x + \frac{x_0}{2}, y \right) \exp \left[i\phi \left(x - \frac{3x_0}{2}, y \right) \right].$$

En donde la superposición de órdenes de difracción ya sea de 0, +1 o bien 0, -1, de tal manera que se producen dos patrones de interferencia en torno a los puntos de la imagen $(\pm x_0/2, 0)$. Entonces, la irradiancia $I_{0,+1}$ en unidades arbitrarias para los órdenes 0, +1 respecto del punto $(x_0/2, 0)$ se puede calcular como el cuadrado del módulo de la suma de las ecuaciones (2.54) y (2.55). Entonces la intensidad del campo óptico $I_{0,+1}(x, y)$ para los órdenes de difracción 0 y +1, está dado por el siguiente resultado

$$I_{0,+1}(x, y) = 1 + \sin^2(a_w x_0) + 2 \sin c(a_w x_0) \cos[\phi(x, y) + 2\pi\mu_d x_0]. \quad (2.56)$$

La Ec.(2.56) muestra el patrón de interferencia, de la superposición de los órdenes de difracción mencionados anteriormente, donde cabe destacar que aparece un término de fase constante, que depende básicamente del valor de la traslación transversal.

2.4. Interferometría de franjas portadoras

En esta sección se mencionan algunos métodos para introducir franjas portadoras, mostrando las ventajas y desventajas del método empleado. El patrón de interferencia sin portadora se expresa de la siguiente forma

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y)]. \quad (2.57)$$

ahora expresando el mismo patrón de interferencia pero con frecuencia portadora adopta la siguiente forma

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[2\pi\mu_0 x + \phi(x, y)]. \quad (2.58)$$

donde en la mayoría de los casos $a(x, y)$, $b(x, y)$ y $\phi(x, y)$ varían lentamente en comparación con la variación introducida por la frecuencia portadora μ_0 .

2.5. Método de la transformada de Fourier

La transformada de Fourier es una herramienta muy importante en óptica, de esta manera otro método para recuperar la fase del patrón de interferencia es utilizando las propiedades matemáticas de la transformada de Fourier, dicho método solo requiere un interferograma, e introducir al patrón de interferencia una portadora (término lineal en la frecuencia espacial) que nos produce una grande cantidad de inclinación entre el frente de onda de referencia y el frente de onda bajo evaluación para producir franjas de frecuencia μ_0 , para así poder aislar y recuperar la fase al aplicar la transformada de Fourier al patrón de interferencia. La técnica de Fourier es especialmente útil para analizar aberturas complejas y obstruidas porque esta no requiere trazar las franjas quebradas por oscuridad, se aplica también a señales donde el trasfondo y la visibilidad varían lentamente en comparación de las franjas. El patrón de franjas de irradiancia o densidad, es dado por:

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(2\pi\mu_0x + \phi(x, y)), \quad (2.59)$$

Una inclinación grande entre el frente de onda de referencia y el frente de onda evaluado producen franjas de frecuencia μ_0 , el cual es tratado como un patrón de frecuencia espacial. Asumimos que la inclinación es dirigida solo a lo largo del eje x. El método de análisis de Fourier se realiza en el dominio de la frecuencia espacial. Un patrón de interferencia con inclinación es descrito como:

$$I(x, y) = a(x, y) + c(x, y) \exp(i2\pi\mu_0x) + c^*(x, y) \exp(-i2\pi\mu_0x) \quad (2.60)$$

donde

$$c(x, y) = \frac{1}{2}b(x, y) \exp(i\phi(x, y)). \quad (2.61)$$

y el símbolo * indica el complejo conjugado. Aplicando la propiedad de corrimiento en la frecuencia la transformada de Fourier en una dimensión de $I(x, y)$ produce.

$$\tilde{I}(\mu, y) = \tilde{a}(\mu, y) + \tilde{c}(\mu - \mu_0, y) + \tilde{c}^*(\mu + \mu_0, y). \quad (2.62)$$

CAPÍTULO 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.6. ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE DATOS

donde μ es la coordenada de la frecuencia espacial y el símbolo $\tilde{}$ indica la transformada de Fourier. Esta función es una función trimodal con picos en μ_0 , $-\mu_0$ y el origen como dibujado en la Fig.(2.5). La componente de este espectro centrado en μ_0 puede ser recobrado sin la portadora por un primer filtraje de banda y entonces desplazamos el espectro aislado devuelta al origen. Este resulta en la función $\tilde{c}(\mu, y)$, una transformada inversa de Fourier da $c(x, y)$. Se puede describir la tangente de la fase como

$$\tan \phi(x, y) = \frac{Im[c(x, y)]}{Re[c(x, y)]}. \quad (2.63)$$

donde Re e Im se refieren a la parte real e imaginaria de la función $c(x, y)$.

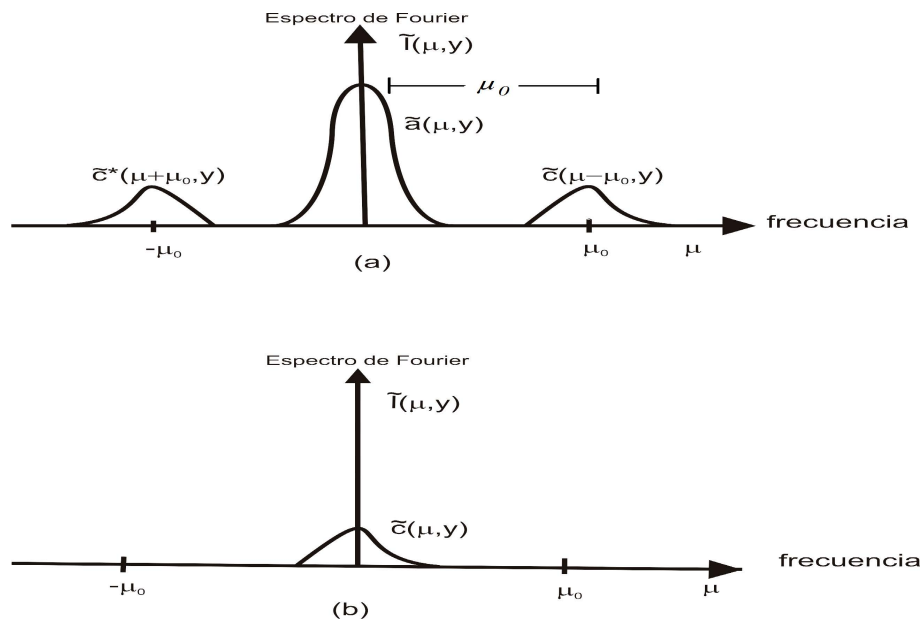


Figura 2.5: a) Espectro de Fourier separados, b) Espectro seleccionado y trasladado al origen

2.6. Análisis estadístico de datos

Deberán usarse métodos estadísticos para analizar los datos a fin de que los resultados y las conclusiones sean objetivos y no de carácter apreciativo. Si el experimento se ha diseñado correctamente y si se ha llevado a cabo de acuerdo con el diseño, los métodos estadísticos necesarios no deben ser complicados.

CAPÍTULO 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.6. ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE DATOS

A cada una de las observaciones del experimento se le llama corrida. Estas corridas difieren por fluctuaciones, o ruido en los resultados. Es común llamar a este ruido el error experimental o simplemente error. La presencia del error o ruido implica que la variable de respuesta, es una variable aleatoria. Una variable aleatoria puede ser discreta o continua. Si el conjunto de todos los valores posibles de la variable aleatoria es finito o contablemente infinito, entonces la variable aleatoria es discreta, mientras que si el conjunto de todos los valores posibles de la variable aleatoria es un intervalo, entonces la variable aleatoria es continua.

Existen varias formas de estudio de datos experimentales por ejemplo, los diagramas de puntos, los histogramas, son útiles para resumir la información de una muestra de datos. Para describir con mayor detalle las observaciones que podrían presentarse en una muestra, se usa el concepto de distribución de probabilidad.

La estructura de la probabilidad de una variable aleatoria, por ejemplo y , se describe mediante su distribución de probabilidad. Cuando y es discreta, es común hacer referencia a su distribución de probabilidad, por ejemplo $f(y)$, como la función de densidad de probabilidad de y .

La media u , de una distribución de probabilidad es una medida de su tendencia central o localización. Matemáticamente, la media se define como,

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy. \quad (2.64)$$

La variabilidad o dispersión de una distribución de probabilidad puede medirse con la varianza, la cual se define como

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} (y - u)^2 f(y) dy. \quad (2.65)$$

Estos resultados establecen en esencia que la suma de n variables aleatorias independientes que tienen una distribución idéntica sigue una distribución aproximadamente normal. En muchos casos esta aproximación es adecuada para valores muy pequeños de n , digamos $n < 10$, mientras que en otros casos se necesita un valor grande de n , digamos $n > 100$. Frecuentemente se considera que el error de un experimento surge de una manera aditiva de varias fuentes independientes, por consiguiente, la distribución normal se convierte en un modelo recomendable para el error experimental.

2.6.1. Prueba de hipótesis

El interés de esta prueba radica en dos formulaciones diferentes. Sea que $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}$ represente las n_1 observaciones, y que $y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}$ represente las n_2 observaciones del segundo factor. Se supone que las muestras se sacan de dos poblaciones normales independientes. Con frecuencia los resultados experimentales se describen con un modelo. Un modelo estadístico simple que describe los datos de un experimento como se muestra

$$y_{ij} = u_i + \epsilon_{ij}, \quad (2.66)$$

donde y_{ij} es la observación j –ésima del nivel i del factor, u_i es la media de la respuesta para el nivel i –ésimo del factor, y ϵ_{ij} es una variable aleatoria normal asociada con la observación ij –ésima. Se acostumbra hacer referencia a ϵ_{ij} como el componente de error aleatoria de modelo.

Una hipótesis estadística es un enunciado o afirmación ya sea acerca de los parámetros de una distribución de probabilidad o de los parámetros de un modelo. La hipótesis refleja alguna conjetura acerca de la situación del problema, esto puede enunciarse formalmente como $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ se le llama hipótesis nula y $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ se le llama hipótesis alternativa. A la hipótesis alternativa que se especifica aquí se le llama hipótesis alternativa de dos colas por que sería verdadera si $\mu_1 < \mu_2$ o $\mu_1 > \mu_2$.

Para probar una hipótesis se proyecta un procedimiento para tomar una muestra aleatoria, calcular un estadístico de prueba apropiado para después rechazar o no estar en posición de rechazar la hipótesis nula H_0 . Parte de este procedimiento consiste en especificar el conjunto de valores del estadístico de prueba que al llevan al rechazo de H_0 . A este conjunto de valores se le llama la región crítica o región de rechazo de la prueba.

Pueden cometerse dos tipos de errores cuando se prueban hipótesis. Si la hipótesis nula se rechaza cuando es verdadera, ha ocurrido un error de tipo 1. Si la hipótesis nula no se rechaza cuando es falsa, se ha cometido un error de tipo 2

La prueba t de dos muestras: Considere que la varianzas son casi idénticas para ambas formulaciones, entonces el estadístico de prueba que deberá usarse para comparar las medias de dos tratamientos en el diseño completamente aleatorizado.

2.7. Métodos de extracción de fase

Existen diferentes métodos para introducir corrimientos de fase en un patrón de interferencia, de igual manera existen varios métodos o algoritmos para calcular la fase del frente de onda de un objeto bajo prueba. La mayor diferencia entre varios algoritmos de detección de corrimiento de fase es la manera en la cual se hace variar la fase de referencia, y la cantidad de patrones de interferencia medidos. La fase del frente de onda es calculada en cada punto en un módulo de 2π como el arcontangente de una función de las medidas de intensidad de los interferogramas.

2.7.1. Técnica de mínimos cuadrados

La medida de intensidad en un punto dado en el interferograma varía como una función sinusoidal de la fase de referencia, con un periodo conocido, y tres incógnitas. La fase del frente de onda pueda ser determinada a través de un ajuste de mínimos cuadrados de las intensidades medidas como una función sinusoidal.

La Interferometría de corrimiento de fase se basa en la reconstrucción de la fase ϕ mediante el muestreo de un cierto número de patrones de interferencia los cuales difieren entre ellos debido a diversos valores de α_0 . Si se hace un corrimiento de α_0 en N pasos, entonces serán medidos N valores de intensidad I_n (donde $n=1, \dots, N$)

$$I_n = a + b \cos(\phi + \alpha_{0n}). \quad (2.67)$$

donde $\alpha_{0n} = \frac{2\pi n}{N}$. La Ec.(2.67) se puede reescribir como

$$I_n = A + B \cos \alpha_{0n} + C \sin \alpha_{0n}, \quad (2.68)$$

donde $A = a$, $B = b \cos \phi$, $C = -b \sin \phi$. Se puede mostrar en base al ajuste de mínimos cuadrados que B y C satisfacen las siguientes ecuaciones en forma analítica.

$$B = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N I_n b \cos \alpha_{0n}, \quad (2.69)$$

$$C = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N I_n b \sin \alpha_{0n}, \quad (2.70)$$

Una combinación de la Ec. (2.68) y las Ecs. (2.69) y (2.70) nos lleva a la ecuación básica del interferómetro de muestreo de fase (PSI por sus siglas en

inglés, Phase Shifting Interferometry)

$$\phi = \tan^{-1} \frac{C}{B} = \tan^{-1} \frac{\sum I_n \sin \alpha_{0n}}{\sum I_n \cos \alpha_{0n}}, \quad (2.71)$$

En general para determinar la fase son necesarias un mínimo de tres mediciones, debido a que existen tres incógnitas en la ecuación general de interferencia. Donde a es la luz de fondo, b es la luz de modulación, ϕ es la fase del frente de onda. Sin embargo, con un número mayor a tres corrimientos, se puede garantizar una mayor aproximación usando este método de mínimos cuadrados.

2.7.2. Método de mínimos cuadrados para la aproximación de datos experimentales

Como calcular la mejor aproximación de un conjunto de valores experimentales $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$ por un polinomio de grado m . Podemos expresar lo siguiente.

$$y = a_m x^2 + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0. \quad (2.72)$$

en donde los a_j $j = 0, 1, \dots, m$ son los coeficientes del polinomio, es decir los valores que deseamos hallar. Calculemos la suma de las distancias de cada

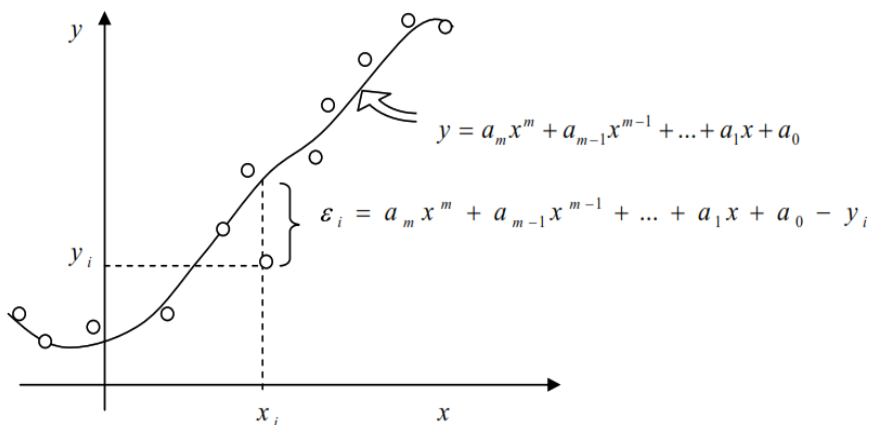


Figura 2.6: Distancia de cada punto del gráfico al polinomio

punto del gráfico al polinomio elevada al cuadrado, que nos da una idea de que tan cerca está el polinomio de los datos experimentales. La cual estará dada por la siguiente expresión:

$$E = \sum_{i=1}^N \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N (a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 - y_i)^2 \quad (2.73)$$

Lo que deseamos obtener del polinomio (o sea el conjunto de coeficientes $a_j, j = 0, 1, \dots, m$) que minimice dicha función, o sea, obtener el polinomio de grado m que, en cierto sentido, esté más cerca de los puntos experimentales. La función E depende de $m + 1$ variables, debemos encontrar el conjunto de valores que la minimizan. Para lograr dicho objetivo, debemos imponer la siguiente condición de extremo:

CAPÍTULO 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.7. MÉTODOS DE EXTRACCIÓN DE FASE

$$\begin{cases} \frac{\partial E(a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0)}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial E(a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0)}{\partial a_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial E(a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0)}{\partial a_m} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^N y_i = a_m \sum_{i=1}^N x_i^m + a_{m-1} \sum_{i=1}^N x_i^{m-1} + \dots + a_1 \sum_{i=1}^N x_i + a_0 \sum_{i=1}^N 1 \\ \sum_{i=1}^N y_i x_i = a_m \sum_{i=1}^N x_i^{m+1} + a_{m-1} \sum_{i=1}^N x_i^m + \dots + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 + a_0 \sum_{i=1}^N x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N y_i x_i^j = a_m \sum_{i=1}^N x_i^{m+j} + a_{m-1} \sum_{i=1}^N x_i^{m-1+j} + \dots + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^{1+j} + a_0 \sum_{i=1}^N x_i^j \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N y_i x_i^m = a_m \sum_{i=1}^N x_i^{m+m} + a_{m-1} \sum_{i=1}^N x_i^{m-1+m} + \dots + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^{1+m} + a_0 \sum_{i=1}^N x_i^m \end{cases}$$

pueden ser escritas en forma matricial de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N x_i^0 & \sum_{i=1}^N x_i^1 & \sum_{i=1}^N x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^N x_i^m \\ \sum_{i=1}^N x_i^1 & \sum_{i=1}^N x_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i^3 & \cdots & \sum_{i=1}^N x_i^{m+1} \\ \sum_{i=1}^N x_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i^3 & \sum_{i=1}^N x_i^4 & \cdots & \sum_{i=1}^N x_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^N x_i^m & \sum_{i=1}^N x_i^{m+1} & \sum_{i=1}^N x_i^{m+2} & \cdots & \sum_{i=1}^N x_i^{2m} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N y_i x_i^0 \\ \sum_{i=1}^N y_i x_i^1 \\ \sum_{i=1}^N y_i x_i^2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N y_i x_i^m \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS
2.7. MÉTODOS DE EXTRACCIÓN DE FASE

Por lo tanto, la solución del sistema es

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = Inv \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N x_i^0 & \sum_{i=1}^N x_i^1 & \sum_{i=1}^N x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^N x_i^m \\ \sum_{i=1}^N x_i^1 & \sum_{i=1}^N x_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i^3 & \cdots & \sum_{i=1}^N x_i^{m+1} \\ \sum_{i=1}^N x_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i^3 & \sum_{i=1}^N x_i^4 & \cdots & \sum_{i=1}^N x_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^N x_i^m & \sum_{i=1}^N x_i^{m+1} & \sum_{i=1}^N x_i^{m+2} & \cdots & \sum_{i=1}^N x_i^{2m} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N y_i x_i^0 \\ \sum_{i=1}^N y_i x_i^1 \\ \sum_{i=1}^N y_i x_i^2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N y_i x_i^m \end{bmatrix}$$

2.8. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se desarrolló la teoría general de difracción de campo cercano y lejano, de igual manera la óptica de Fourier, así también se desarrolló matemáticamente el sistema con una lente mediante el análisis de Fresnel. Cabe destacar que, la teoría expuesta puede servir para cualquier sistema compuesto de una, dos ó más lentes aquí se aplicó en el interferómetro de trayectoria común. Se presenta la teoría de estimación de errores la cual ayudara a calcular la incertidumbre del método propuesto. Así mismo se presenta el método de detección de fase con el fin de construir un nuevo algoritmo introduciendo el valor de frecuencia portadora encontrada.

La teoría expuesta se orientará en el capítulo siguiente a estudiar el interferómetro de trayectoria común de doble apertura cuando todos sus elementos ópticos son trasladados de forma axial.

CAPÍTULO 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS
2.8. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Capítulo 3

Interferometría de franjas portadoras en un sistema cuasi- $4f$ generalizado

3.1. Introducción

Se usará la difracción de Fresnel como herramienta para describir lo que sucederá en el sistema propuesto cuando todos sus elementos son trasladados axialmente. Se propone que en base a esta teoría se lleve a cabo un análisis detallado de la propagación de campo óptico a través de todo el sistema, y mostrar teóricamente como es alterado el patrón de interferencia.

3.2. Desarrollo matemático DACPI generalizado

De acuerdo a la teoría ya mencionada en el capítulo anterior, se muestra el análisis matemático detallado para el caso de interés, cuando los elementos ópticos son trasladados axialmente, es decir las lentes L_1 , L_2 y rejilla utilizada como filtro se encuentran fuera de sus planos iniciales. Cabe definir que en el plano donde quede colocada la lente L_1 y L_2 respectivamente será llamado plano de la lente para una mejor comprensión observe la Fig.(3.1), que muestra cuando las lentes L_1 , L_2 y rejilla son trasladada de su plano inicial definido cuando el esquema correspondiente a un sistema $4f$. Para una descripción detallada del esquema mostrado será dividida en dos etapas como se muestra en líneas subsiguientes.

**CAPÍTULO 3 INTERFEROMETRÍA DE FRANJAS
PORTADORAS EN UN SISTEMA CUASI-4F
GENERALIZADO**

3.2. DESARROLLO MATEMÁTICO DACPI GENERALIZADO

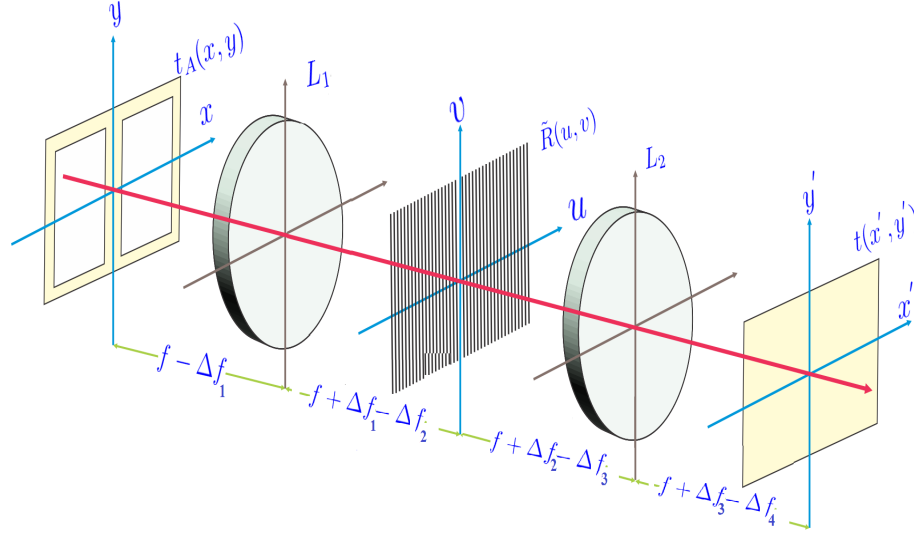


Figura 3.1: Interferómetro de trayectoria común de doble apertura generalizado

- Etapa 1. Se observa que del plano del objeto a la lente L_1 , $d_1 = f - \Delta f_1$, y de la misma al plano cuasi Fourier, la distancia $d_2 = f + \Delta f_1 - \Delta f_2$. Éste sistema de una lente y dos planos, se observa que la lente L_1 es descolocada de su plano inicial.
- Etapa 2. La distancia del plano de la rejilla a L_2 , $d_3 = f + \Delta f_2 - \Delta f_3$, y la distancia de L_2 al plano imagen es $d_4 = f + \Delta f_3 - \Delta f_4$.

La etapa 1 de la Fig.(3.1) puede ser descrito mediante la expresión dada por Ec.(2.61), tal que la distribución del campo en el plano (u, v) es:

$$\tilde{t}(u, v) = \frac{1}{i\lambda f_A} \left[i \frac{k}{2f} \frac{\Delta f_1}{f_A} (u^2 + v^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy t_A(x, y) \quad (3.1)$$

$$\exp \left[i \frac{k}{2f} \frac{\Delta f_2 - \Delta f_1}{f_A} (x^2 + y^2) \right] \exp \left[\frac{-ik}{f_A} (xu + yv) \right],$$

donde $f_A = f + \frac{\Delta f_1}{f} (\Delta f_1 - \Delta f_2)$. Así la Ec.(3.1) representa el campo difractado en el plano cuasi Fourier que inicio en el plano de entrada. Ahora estudiando la etapa 2 para describir la segunda parte de la Fig. (3.1), se utilizará el caso c) dado por Ec.(2.67). Debido que en el plano cuasi Fourier es colocada una rejilla binaria de Ronchi, con líneas verticales y periodo u_p se considera, que el nuevo campo óptico al pasar por la rejilla es el producto de la distribución

**CAPÍTULO 3 INTERFEROMETRÍA DE FRANJAS
PORTADORAS EN UN SISTEMA CUASI-4F
GENERALIZADO**

3.2. DESARROLLO MATEMÁTICO DACPI GENERALIZADO

del campo a la salida del plano cuasi Fourier con la función de la rejilla, por lo tanto, el campo total a la salida del plano imagen es

$$t(x', y') = \frac{1}{i\lambda f_B} \exp \left[i \frac{k}{2f} \frac{\Delta f_3 - \Delta f_2}{f_B} (x'^2 + y'^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dudv \tilde{t}(u, v) \quad (3.2)$$

$$R(u, v) \exp \left[i \frac{k}{2f} \frac{\Delta f_4 - \Delta f_3}{f_B} (u^2 + v^2) \right] \exp \left[-\frac{ik}{f_B} (ux' + vy') \right],$$

definiendo $f_B = f + \frac{\Delta f_3}{f} (\Delta f_3 - \Delta f_4 - \Delta f_2) + \frac{\Delta f_2 \Delta f_4}{f}$. Note que la rejilla juega el papel de filtro espacial la cual puede ser descrita

$$R(u, v) = \sum_n \text{rect} \left(\frac{u}{u_w} \right) \otimes \delta(u - nu_p), \quad (3.3)$$

efectuando la operación de convolución, la rejilla puede reescribirse,

$$R(u, v) = \sum_n \text{rect} \left(\frac{u - nu_p}{u_w} \right), \quad (3.4)$$

donde u_p es el periodo de la rejilla y u_w es el ancho brillante. Utilizando la serie compleja con el fin de expresar la rejilla de manera más conveniente

$$R(u, v) = \sum_n C_n \exp \left(i2\pi n \frac{u}{u_p} \right), \quad (3.5)$$

donde el coeficiente C_n es calculado de

$$C_n = \frac{1}{u_p} \int_{-\frac{1}{2}u_p}^{\frac{1}{2}u_p} du R(u, v) \exp \left(-i2\pi n \frac{u}{u_p} \right), \quad (3.6)$$

en la expresión anterior se sustituye la Ec.(3.5) y se considera solo el orden cero, entonces realizando la integral, finalmente se obtiene

$$C_n = \frac{u_w}{u_p} \text{sinc} \left(\frac{u_w}{u_p} n \right). \quad (3.7)$$

Después de sustituir C_n en Ec. (3,5) $R(u, v)$ adopta la siguiente forma

$$R(u, v) = \frac{u_w}{u_p} \sum_n \text{sinc} \left(\frac{u_w}{u_p} n \right) \exp \left(i2\pi n \frac{u}{u_p} \right). \quad (3.8)$$

Se observa en la ecuación anterior la rejilla es expresada en términos que solo dependen del periodo de la rejilla y el orden de difracción.

**CAPÍTULO 3 INTERFEROMETRÍA DE FRANJAS
PORTADORAS EN UN SISTEMA CUASI-4F
GENERALIZADO**

3.2. DESARROLLO MATEMÁTICO DACPI GENERALIZADO

$$\begin{aligned}
 t(x', y') &= \frac{1}{i\lambda f_B} \exp \left[i \frac{k}{2f} \left(\frac{\Delta f_3 - \Delta f_2}{f_B} \right) (x'^2 + y'^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dudv \left(\frac{1}{i\lambda f_A} \right) \exp \left[i \frac{k}{2f} \frac{\Delta f_1}{f_A} (u^2 + v^2) \right] \\
 &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy t_A(x, y) \exp \left[i \frac{k}{2} \left(\frac{\Delta f_2 - \Delta f_1}{f_A} \right) (x^2 + y^2) \right] \exp \left[\frac{-ikf}{f_A} (xu + yv) \right] \\
 &\frac{u_w}{u_p} \sum_n \sin c \left(\frac{u_w}{u_p} n \right) \exp \left(i 2\pi n \frac{u}{u_p} \right) \exp \left[i \frac{k}{2f} \left(\frac{\Delta f_4 - \Delta f_3}{f_B} \right) (u^2 + v^2) \right] \\
 &\exp \left[-\frac{ik}{f_B} (ux' + vy') \right],
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

realizando un cambio de integración y agrupando términos semejantes se obtiene

$$\begin{aligned}
 t(x', y') &= \left(\frac{1}{i\lambda f} \right)^2 \frac{1}{f_A} \frac{1}{f_B} \frac{u_w}{u_p} \sum_n \sin c \left(\frac{u_w}{u_p} n \right) \exp \left[i \frac{k}{2f} \frac{\Delta f_3 - \Delta f_2}{f_B} (x'^2 + y'^2) \right] \\
 &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy t_A(x, y) \exp \left[i \frac{k}{2f} \frac{\Delta f_2 - \Delta f_1}{f_A} (x^2 + y^2) \right] \\
 &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dudv \exp \left[i \frac{k}{2f} \left(\frac{\Delta f_1}{f_A} + \frac{\Delta f_4 - \Delta f_3}{f_B} \right) (u^2 + v^2) \right] \\
 &\exp \left\{ -ik \left[u \left(\frac{x}{f_A} + \frac{x'}{f_B} - \frac{2\pi n}{u_p k} \right) + v \left(\frac{y}{f_A} + \frac{y'}{f_B} \right) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

utilizando la Ec.(2.56) para el segundo par de integrales obtenemos

$$\begin{aligned}
 t(x', y') &= \frac{u_w}{u_p} \left(\frac{f^2}{i\lambda \Delta F} \right)^2 \sum_n \sin c \left(\frac{u_w}{u_p} n \right) \exp \left[-i \frac{k}{2} \frac{\Delta f_3 - \Delta f_2}{f_B} (x'^2 + y'^2) \right] \\
 &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy t_A(x, y) \exp \left[-i \frac{k}{2} \frac{-\Delta f_1 + \Delta f_2}{f_A} (x^2 + y^2) \right] \\
 &\exp \left[\frac{-ikf^2}{2} \frac{f_A f_B}{\Delta F} \left(\frac{x}{f_A} + \frac{x'}{f_B} - \frac{2\pi n}{ku_p} \right)^2 + \left(\frac{y}{f_A} + \frac{y'}{f_B} \right)^2 \right],
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

ahora usando la siguiente definición delta de Gauss la cual esta dada

$$\delta(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \exp \left(-\pi \frac{x^2}{\Delta x^2} \right). \tag{3.12}$$

Usando la definición anterior en la ultima exponencial de Ec.(3.11) se obtiene

$$\begin{aligned}
 t(x', y') &= \frac{u_w}{u_p} \left(\frac{f^2}{i\lambda \Delta F} \right)^2 \sum_n \sin c \left(\frac{u_w}{u_p} n \right) \exp \left[-i \frac{k}{2} \frac{\Delta f_3 - \Delta f_2}{f_B} (x'^2 + y'^2) \right] \\
 &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy t_A(x, y) \exp \left[-i \frac{k}{2} \frac{-\Delta f_1 + \Delta f_2}{f_A} (x^2 + y^2) \right] \\
 &\left(-i \frac{f_A}{f_B} \frac{\Delta f}{f^2} \right)^{1/2} \delta \left(x + x' \left(\frac{f_A}{f_B} \right) - \frac{\lambda n f_A}{u_p}, y - y' \left(\frac{f_A}{f_B} \right) \right),
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

**CAPÍTULO 3 INTERFEROMETRÍA DE FRANJAS
PORTADORAS EN UN SISTEMA CUASI-4F
GENERALIZADO**

3.2. DESARROLLO MATEMÁTICO DACPI GENERALIZADO

finalmente aplicando la propiedad de filtraje espacial

$$\begin{aligned}
 t(x', y') &= \left(\frac{f_A}{f_B}\right) \frac{u_w}{u_p} \sum C_n & (3.14) \\
 &\exp \left[i \frac{k}{2ff_B} \left((\Delta f_3 - \Delta f_2) + (\Delta f_2 - \Delta f_1) \frac{f_A}{f_B} \right) (x'^2 + y'^2) \right] \\
 &t_A \left[-x' \left(\frac{f_A}{f_B} \right) + \frac{\lambda n f_B}{u_p} \left(\frac{f_A}{f_B} \right), -y \left(\frac{f_A}{f_B} \right) \right] \\
 &\exp \left[-i \frac{2\pi n}{u_p} \left(\frac{\Delta f_2 - \Delta f_1}{f} \right) \left(\frac{f_A}{f_B} \right) x' \right] \\
 &\exp \left[i \frac{\pi \lambda n^2}{u_p^2} f_A \left(\frac{\Delta f_2 - \Delta f_1}{f} \right) \right],
 \end{aligned}$$

La Ec.(3.14) se compone básicamente de réplicas invertidas de la función óptica de entrada, donde cada réplica está situado en múltiplos enteros de $\left(\frac{\lambda f_A}{u_p}\right)$ escalado por la función *sinc* y un término de fase lineal en función de n y f_A , donde $2C_n = \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$. Evaluando la función en los órdenes de difracción $n = 0$ y $n = 1$.

a) $n = 0$

$$\begin{aligned}
 t_0(x', y') &= \left(\frac{f_A}{f_B}\right) \frac{u_w}{u_p} & (3.15) \\
 &\exp \left[-i \frac{k}{f_B} \left((\Delta f_3 - \Delta f_2) + (\Delta f_2 - \Delta f_1) \frac{f_A}{f_B} \right) (x'^2 + y'^2) \right] \\
 &t_A \left[-x' \left(\frac{f_A}{f_B} \right), -y \left(\frac{f_A}{f_B} \right) \right].
 \end{aligned}$$

b) $n = 1$

$$\begin{aligned}
 t_1(x', y') &= \left(\frac{f_A}{f_B}\right) \frac{u_w}{u_p} C_1 & (3.16) \\
 &\exp \left[-i \frac{k}{f_B} \left((\Delta f_3 - \Delta f_2) + (\Delta f_2 - \Delta f_1) \frac{f_A}{f_B} \right) (x'^2 + y'^2) \right] \\
 &t_A \left[-x' \left(\frac{f_A}{f_B} \right) + \frac{\lambda f_A}{u_p}, -y \left(\frac{f_A}{f_B} \right) \right] \exp \left[-i \frac{k}{2} \left(\frac{-\Delta f_2 + \Delta f_1}{f_B} \right) \frac{\lambda f_A}{u_p} x' \right] \\
 &\exp \left[-i \frac{k}{2} \left(\frac{-\Delta f_2 + \Delta f_1}{f_A} \right) \frac{\lambda^2 f_A}{u_p^2} \right].
 \end{aligned}$$

La función de transmitancia de entrada $t_A(x, y)$ esta definida por dos ventanas desplazadas simétricamente, denotemos las ventanas de entrada en el plano objeto, con la función escalar $t_A(x, y)$ en dos dimensiones.

$$t_A(x, y) = w\left(x + \frac{1}{2}x_0, y\right)E_p + w\left(x - \frac{1}{2}x_0, y\right)E_r, \quad (3.17)$$

donde x_0 es la separación entre ellas, $E_p = A_p \exp i\phi_p$ donde A_p es su amplitud y ϕ_p su fase, w son funciones de ventana y están expresadas en términos de la función rectángulo, de ancho a_w y altura b_w , en una ventana se coloca el objeto de prueba el haz que cruza se denomina como haz objeto, en la otra ventana se deja sin objeto, el haz que cruza se denomina haz de referencia,

$$w(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{a_w}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b_w}\right). \quad (3.18)$$

**CAPÍTULO 3 INTERFEROMETRÍA DE FRANJAS
PORTADORAS EN UN SISTEMA CUASI-4F
GENERALIZADO**

3.2. DESARROLLO MATEMÁTICO DACPI GENERALIZADO

Sustituyendo $t_A(x, y)$ como es expresada en la Ec.(3.17) dentro de Ec.(3.15) y Ec.(3.16), para los órdenes de difracción 0 y 1, y asumiendo que $x_0 = \frac{\lambda f}{u_p}$ se puede llegar a demostrar,

$$t_0(x', y') = \left(\frac{f_A}{f_B}\right) \frac{u_w}{u_p} \exp \left[-i \frac{k}{f_B} \left((\Delta f_3 - \Delta f_2) + (\Delta f_2 - \Delta f_1) \frac{f_A}{f_B} \right) (x'^2 + y'^2) \right] \left[w_1 \left(-x' \left(\frac{f_A}{f_B} \right) - \frac{1}{2} x_0, -y' \left(\frac{f_A}{f_B} \right) \right) E_p + w_2 \left(-x' \left(\frac{f_A}{f_B} \right) + \frac{1}{2} x_0, -y' \left(\frac{f_A}{f_B} \right) \right) E_r \right]. \quad (3.19)$$

$$t_1(x', y') = \left(\frac{f_A}{f_B}\right) \frac{u_w}{u_p} C_1 \exp \left[-i \frac{k}{f_B} \left((\Delta f_3 - \Delta f_2) + (\Delta f_2 - \Delta f_1) \frac{f_A}{f_B} \right) (x'^2 + y'^2) \right] \left[w_1 \left(-x' \left(\frac{f_A}{f_B} \right) + \frac{1}{2} x_0 - \frac{\lambda f_A}{u_p}, -y' \left(\frac{f_A}{f_B} \right) \right) E_p + w_2 \left(-x' \left(\frac{f_A}{f_B} \right) + \frac{1}{2} x_0 - \frac{\lambda f_A}{u_p}, -y' \left(\frac{f_A}{f_B} \right) \right) E_r \right] \exp \left[-i \frac{k}{2} \left(\frac{-\Delta f_2 + \Delta f_1}{f_B} \right) \frac{\lambda f_A}{u_p} x' \right] \exp \left[-i \frac{k}{2} \left(\frac{-\Delta f_2 + \Delta f_1}{f_A} \right) \frac{\lambda^2 f_A}{u_p^2} \right]. \quad (3.20)$$

de la ecuación anterior separamos las amplitudes complejas dadas por

$$C_n^c(x', y') = C_n \exp \left[-i \frac{k}{2f_B} (\Delta f_3 - \Delta f_1) (x'^2 + y'^2) \right] \exp \left[-i \frac{2\pi n}{u_p} \left(\frac{\Delta f_2 - \Delta f_1}{f} \right) x' \right] \exp \left[i \frac{\pi \lambda n^2}{u_p^2} f_A \left(\frac{\Delta f_2 - \Delta f_1}{f} \right) \right]. \quad (3.21)$$

Sumando los órdenes de difracción de las ecuaciones anteriores se tiene,

$$t_{1,0}(x', y') = C_1^c(x', y') A_p \exp(i\phi_p) + C_0^c(x', y') A_r \exp(i\phi_r). \quad (3.22)$$

Calculando el modulo cuadrado de Ec.(3.22) el patron de interferencia se expresa como

$$I(x, y) = C_1^2 A_p^2 + C_0^2 A_r^2 + 2C_1 C_0 A_p A_r \cos [\phi - 2\pi\mu_0 x' + \pi\mu_0 x_0]. \quad (3.23)$$

donde

$$\mu_0 = \frac{\Delta f_2 - \Delta f_1}{u_p f} \frac{f_A}{f_B}. \quad (3.24)$$

**CAPÍTULO 3 INTERFEROMETRÍA DE FRANJAS
PORTADORAS EN UN SISTEMA CUASI-4F
GENERALIZADO**

3.2. DESARROLLO MATEMÁTICO DACPI GENERALIZADO

Así la frecuencia portadora es directamente proporcional a la diferencia de los desplazamientos e inversamente proporcional al producto del periodo de la rejilla u_p y la distancia focal f . El termino f_A/f_B es un factor de escala que se aproxima a la unidad ver Fig. 3.2a), estas gráficas se implementaron en lenguaje de programación Wolfram Mathematica utilizando valores de $f = 400mm$, $u_p = 25 * 10^{-3}mm$, $\Delta f_3 = \Delta f_4 = 0,001mm$. Sin embargo si este factor no es aproximado a la unidad, la descripción exacta de la frecuencia portadora en este modelo, es dada por $\mu_0 = \frac{f_A}{f_B} \frac{\Delta f_2 - \Delta f_1}{u_p f}$ observe Fig. 3.2b), la gráfica de μ_0 se aleja de la aproximación dada para los valores de Δf_2 mayores de $f/2$. La Fig. 3.2c), muestra la comparación de ambas aproximaciones. Por lo tanto el experimento tiene la condición $\Delta f \ll f$. Por lo tanto, la frecuencia

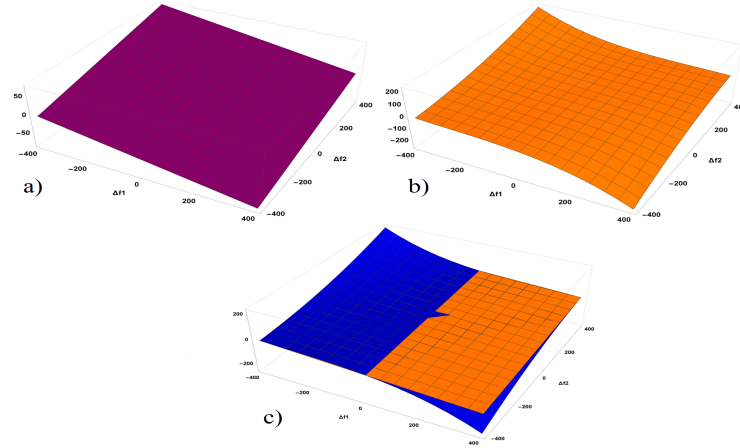


Figura 3.2: Se muestra la diferencia del valor de portadora a) $\mu_0 = \frac{\Delta f_2 - \Delta f_1}{u_p f}$, b) $\mu_0 = \frac{f_A}{f_B} \frac{\Delta f_2 - \Delta f_1}{u_p f}$, c) Comparacion entre a) y b).

portadora se puede expresar

$$\mu_0 = \frac{\Delta f_2 - \Delta f_1}{u_p f}. \quad (3.25)$$

3.3. Conclusiones del capítulo

Se desarrolló el cálculo matemático enfocado al interferómetro de trayectoria común de doble apertura cuando todos sus elementos son trasladados de sus planos iniciales. Particularmente se hizo énfasis en los patrones de interferencia para los órdenes de difracción 0 y 1 de la ventana de entrada correspondientes, el patrón de interferencia obtenido aparece un término de fase lineal, que es proporcional a la diferencia de los desplazamiento Δf_2 y Δf_1 e inversamente proporcional al producto del periodo de la rejilla y su distancia focal.

Capítulo 4

Resultados Experimentales

4.1. Introducción

En este capítulo se muestran los resultados experimentales obtenidos del sistema DACPI generalizado. Posteriormente se presenta el estudio de error cuando la lente L_1 y rejilla son trasladados fuera de sus planos iniciales. Finalmente se presentan los resultados experimentales del sistema DACPI modificado cuando todos sus elementos se encuentran fuera de sus planos iniciales. Estos resultados permitirán realizar una superficie de barrido con la finalidad de corroborar que los resultados obtenidos estén correctos.

4.2. Implementación Experimental del DAC-PI Generalizado

Para probar la teoría anterior, se implemento el arreglo del esquema mostrado en la Figura 4.1, un DACPI generalizado para obtener el valor de la portadora en el interferograma. Como fuente de iluminación se usó un láser con $\lambda = 532nm$, dos lentes de $f = 400mm$, una rejilla binaria de Ronchi con un período $25\mu m$, y una cámara de estado sólido CCD PixelINK *B741F* de 1024×1280 en resolución, codificados en 256 niveles de gris, que fue empleado para digitalizar y guardar los interferogramas en el ordenador. Las ventanas del plano de entrada mantienen una separación $x_0 = 8,512$ y lados $a_w = b_w = 5mm$.

CAPÍTULO 4 RESULTADOS EXPERIMENTALES
4.2. IMPLEMENTACIÓN EXPERIMENTAL DEL DACPI
GENERALIZADO

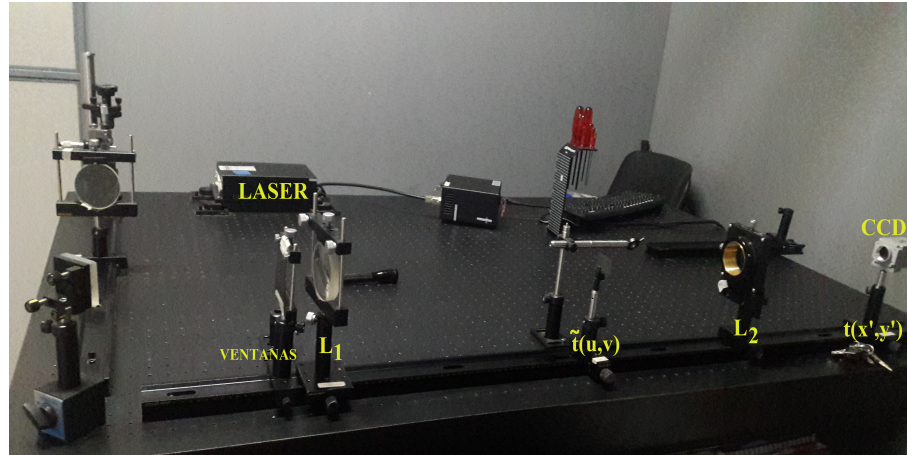


Figura 4.1: Implementación Experimental DACPI Generalizado.

La Figura 4.2 se presentan doce interferogramas de los 81 obtenidos para el caso particular cuando la rejilla se deja fija en $\Delta f = 20mm$, y únicamente la lente L_1 es trasladada de forma axial donde $\Delta f \in [0mm, 400mm]$ con traslados de $10mm$ entre cada interferograma, fácilmente se observa un incremento en el número de franjas, lo cual indica un cambio en el valor de portadora. También se pudo observar que al cambiar el sentido de los desplazamientos se pueden obtener valores de portadora negativos.

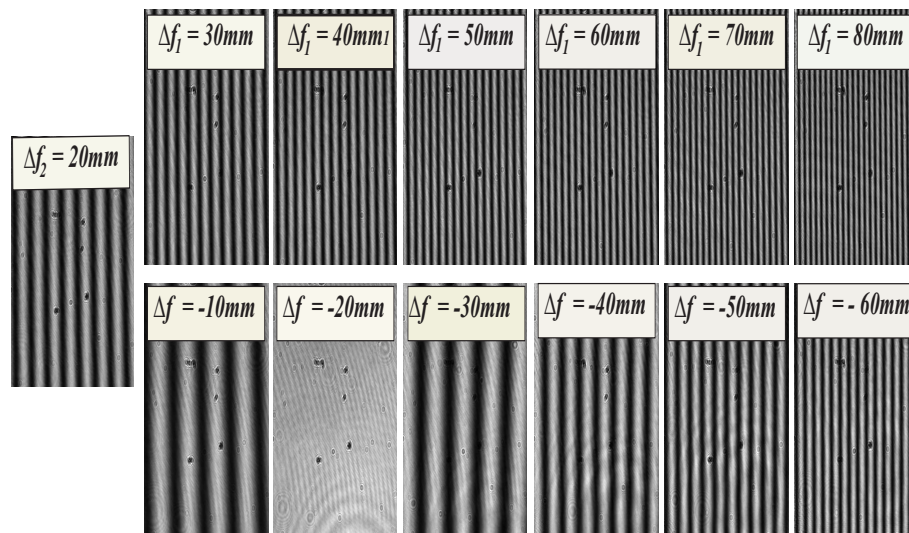


Figura 4.2: Resultados obtenidos al trasladar la rejilla con un valor fijo de $20mm$, desplazando posteriormente la lente L_1 en pasos de $10mm$ en un rango de $[0, 400mm]$.

CAPÍTULO 4 RESULTADOS EXPERIMENTALES
4.2. IMPLEMENTACIÓN EXPERIMENTAL DEL DACPI
GENERALIZADO

Para medir experimentalmente el valor de la portadora se aplica el método de Takeda[2] analizado en la sección 2.5, para llevar a cabo esta tarea se desarrolló un algoritmo que implementa una versión modificada del método de la transformada de Fourier, en primer lugar se calcula el término de fase lineal introducido, y posteriormente se obtiene μ_0 mediante la aplicación de derivadas parciales y el operador de envolvimiento introducido por Itoh [12]. En este algoritmo define cada expresión involucrada en la teoría expuesta anteriormente, el cual es implementado en el lenguaje de programación Mathematica. El patrón de franjas obtenido de la superposición de dos haces con portadora es dado por:

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(2\pi\mu_0x + \phi(x, y)), \quad (4.1)$$

donde cabe destacar que en el presente algoritmo se consideró $\phi(x, y) = 0$ es decir, no se tiene un objeto de fase. Por lo tanto el patrón de franjas anterior se reescribe de la siguiente forma

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(2\pi\mu_0x), \quad (4.2)$$

El método de análisis de Fourier se realiza en el dominio de la frecuencia espacial, alternativamente, el patrón de interferencia es conveniente describirlo de la siguiente forma

$$I(x, y) = a(x, y) + \frac{1}{2}b(x, y) \exp(i2\pi\mu_0x) + \frac{1}{2}b(x, y) \exp(-i2\pi\mu_0x) \quad (4.3)$$

Aplicando la propiedad de corrimiento en la frecuencia, la transformada de Fourier de $I(x, y)$ produce.

$$\tilde{I}(\mu, \nu) = \tilde{a}(\mu, \nu) + \frac{1}{2}\tilde{b}(\mu - \mu_0, \nu) + \frac{1}{2}\tilde{b}(\mu + \mu_0, \nu) \quad (4.4)$$

donde μ es la coordenada de la frecuencia espacial y el símbolo $\tilde{\cdot}$, indica la transformada de Fourier. Esta es una función trimodal con picos en $-\mu_0$, μ_0 y el origen. Posteriormente definiendo una función que se desempeñará como filtro espacial

$$\tilde{f}_r(\mu, \nu) = (\mu - \mu_1)^2 < r^2 \quad (4.5)$$

donde μ_1 es el desplazamiento del filtro en la dirección horizontal, r es el radio del filtro utilizado, posteriormente efectuando el producto de Ec.(4.4) con Ec.(4.5)

$$\tilde{I}_f(\mu, \nu) = \tilde{I}(\mu, \nu)\tilde{f}_r(\mu, \nu) \quad (4.6)$$

realizando la transformada inversa de la función filtrada sin llevar este lóbulo al origen como es acostumbrado en el método típico de la transformada de Fourier.

$$I_f(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}[\tilde{I}_f(\mu, \nu)] = \frac{1}{2}b(x, y) \exp(i2\pi\mu_0x) \quad (4.7)$$

CAPÍTULO 4 RESULTADOS EXPERIMENTALES
4.2. IMPLEMENTACIÓN EXPERIMENTAL DEL DACPI
GENERALIZADO

la tangente de la fase lineal $\alpha = 2\pi\mu_0 x$ puede ser calculada de la Ec.(2.63)

$$\tan \alpha(x, y) = \frac{Im[I_f(x, y)]}{Re[I_f(x, y)]} \quad (4.8)$$

calculando la tangente inversa de la Ec.(4.8)

$$\alpha_w(x, y) = \arctan \left\{ \frac{Im[I_f(x, y)]}{Re[I_f(x, y)]} \right\} \quad (4.9)$$

la ecuación anterior muestra el valor de la fase envuelta, es decir en el rango de $(-\pi, \pi)$. Posteriormente calculando la derivada de $\alpha_w(x, y)$ se obtiene lo siguiente

$$\alpha'_w(x, y) = \frac{\partial \alpha_w(x, y)}{\partial x} \quad (4.10)$$

donde cabe destacar que se encuentra el valor de la fase envuelta.

Ahora para obtener el valor de la frecuencia portadora se utilizó la función de envolvimiento de Itoh[12], lo cual lleva a

$$\frac{\partial \alpha(x, y)}{\partial x} = 2\pi\mu_0 = \arctan \left\{ \frac{\sin[\alpha'_w(x, y)]}{\cos[\alpha'_w(x, y)]} \right\} \quad (4.11)$$

la Ec.(4.11) representa la derivada parcial de la fase lineal α , la cual se puede calcular fácilmente el valor de la frecuencia portadora, mediante

$$\arctan \left\{ \frac{\sin[\alpha'_w(x, y)]}{\cos[\alpha'_w(x, y)]} \right\} \frac{1}{2\pi} = \mu_0 \quad (4.12)$$

la ecuación anterior muestra el valor de la frecuencia portadora μ_0 introducida por el movimiento axial de uno de los componentes ópticos en el DACPI modificado, la cual es calculada de un patrón capturado experimentalmente mediante una modificación del método de la transformada de Fourier. El valor de la portadora obtenida directamente de la imagen del interferograma esta dada en pixeles, sin embargo para ser comparada con el valor teórico debe estar en términos de milímetros. La manera de establecer la relación entre un pixel con un milímetro es medir la cantidad de pixeles que corresponden en un milímetro medido con un vernier colocado en el plano de entrada del sistema DACPI, como se muestra en la Fig. 4.3 donde se concluye que $1mm = 97pixeles$

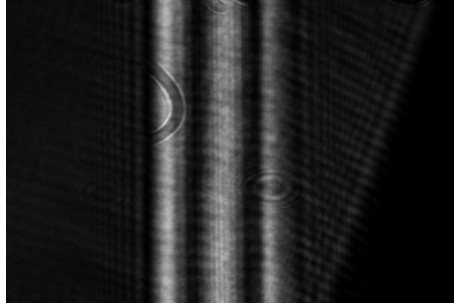


Figura 4.3: Vernier colocado en el plano de entrada, marcando un milímetro de longitud donde $1mm = 97pixel$.

4.3. Cálculo de Error

En cada interferograma se midió la frecuencia portadora y se comparó con los resultados teóricos obtenidos en la Fig. 4.4 se observa en línea continua azul la gráfica que proporciona teóricamente el valor de la frecuencia portadora dados por Ec. (3.23). En la misma gráfica con diamantes rojos muestra los resultados experimentales usando el valor de portadora obtenida directamente de las imágenes capturadas, tenga en cuenta que estas medidas se obtienen en píxeles, sin embargo, para ser comparada con el valor teórico deben estar en términos de milímetros. En la Fig. 4.5 muestra los resultados experimentales en diamantes rojos el caso cuando el desplazamiento $\Delta f_1 = 20mm$ y posteriormente la rejilla se va desplazando en pasos de $\Delta f_2 = 10mm$ hasta $400mm$, la línea continua azul muestra la comparación de los resultados teóricos.

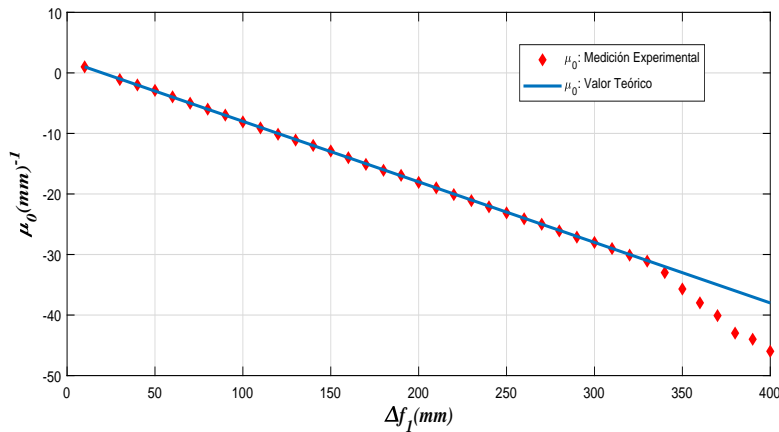


Figura 4.4: Cálculo de μ_0 de los interferogramas comparándolos con el valor teórico desplazando Δf_1 en pasos de $10mm$

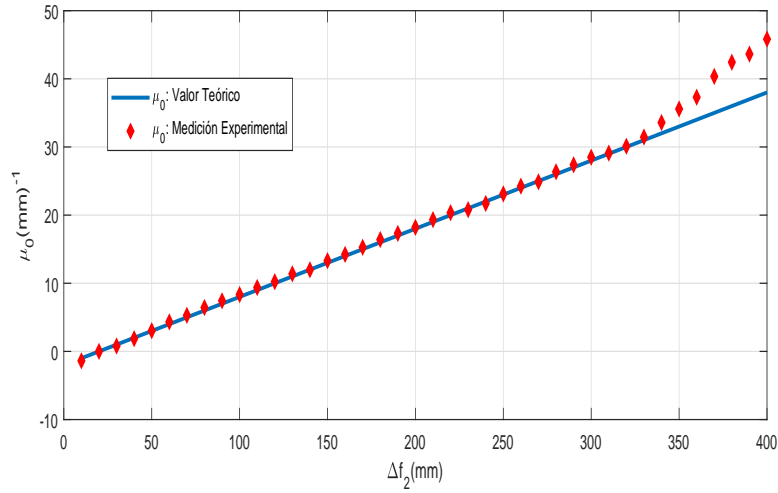


Figura 4.5: Cálculo de μ_0 de los cuarenta interferogramas comparándolos con el valor teórico desplazando Δf_2 en pasos de 10mm

4.3.1. Regresión lineal datos experimentales

Un análisis de regresión lineal se hace con los siguientes propósitos:

- Encontrar una ecuación que exprese la relación en forma de línea recta entre dos variables. Esta ecuación relaciona los cambios en una variable con cambios en la otra variable.
- Estimar el valor de la variable aleatoria (dependiente-de respuesta) a partir de que se conoce el valor de una variable asociada (independiente-de predicción).

Puesto que se trata de llegar a la ecuación de una línea recta que describa o exprese la relación entre las variables, requerimos utilizar una de las formas de la ecuación de línea recta; para ello, se utilizará la fórmula *abscisa – pendiente*, es decir:

$$y = a + bx \tag{4.13}$$

donde y es el valor estimado o pronosticado de la variable dependiente, x valor que asume la variable independiente, a punto en el que la recta corta al eje y , y b pendiente de la recta. Con la aplicación de este método se inicia el procedimiento del análisis de regresión, el cual consta de los siguientes pasos:

- Una vez determinados los llamados Coeficientes de Regresión, es decir, los valores de a y b , establecer la Ecuación de Regresión.

CAPÍTULO 4 RESULTADOS EXPERIMENTALES

4.3. CÁLCULO DE ERROR

- A partir de esta ecuación, trazar la Recta de Regresión.
- Obtener el Error Estándar de Estimación, es decir, la medida de la dispersión de los valores observados con respecto a la línea de regresión, el cual se representa por S_{yx} .

A continuación se presentan los resultados obtenidos al realizar el análisis de regresión lineal, considerando una muestra de 38 datos experimentales. La

```
The regression equation is
Portadora (Y) = 0.1077 + 1.001 Desplazamiento(x)

S = 0.0792567    R-Sq = 100.0%    R-Sq(adj) = 100.0%

Analysis of Variance

Source      DF      SS      MS      F      P
Regression  1    1334.55    1334.55  212453.61  0.000
Error       37      0.23      0.01
Total       38    1334.79
```

Figura 4.6: Resultados obtenidos regresión lineal de los resultados experimentales.

Fig.(4.6) muestra el ajuste a la mejor recta mediante el análisis de regresión lineal de los datos obtenidos teóricamente, mediante el modelo que se propuso anteriormente. Comparando ambos resultados podemos observar que la

```
The regression equation is
Portadora = 0.000000 + 1.000 Desplazamiento

S = 0    R-Sq = 100.0%    R-Sq(adj) = 100.0%

Analysis of Variance

Source      DF      SS      MS      F      P
Regression  1    1331.92    1331.92  *      *
Error       37      0.00      0.00
Total       38    1331.92
```

Figura 4.7: Resultados obtenidos regresión lineal de los resultados experimentales.

pendiente de la Fig.(4.6) es $b = 1,001$ que coincide perfectamente con la pendiente de la Fig. (4.8). Por lo tanto podemos concluir que ambos resultados

CAPÍTULO 4 RESULTADOS EXPERIMENTALES

4.3. CÁLCULO DE ERROR

tienen un comportamiento lineal con pendiente de 1,000. Considerando ahora los valores de los puntos que cortan con el eje y , donde se obtuvieron los siguientes resultados, para los resultados experimentales $a = 0,1077$, y para los resultados teóricos $a = 0$ con esto corroboramos que el modelo teórico obtenido de la frecuencia portadora tiene un comportamiento lineal, cuando la lente L_1 y rejilla son desplazados de sus planos iniciales.

4.3.2. Superficie de Barrido

Una parte importante del trabajo desarrollado en la presente tesis esta basado en la puesta a punto y aplicación de diferentes técnicas de barrido de datos. Con esta tecnica se han caracterizado superficies sobre las cuales se han sintetizado temas de investigación. El análisis presenta una topografía muy regular comparando con la superficie obtenida utilizando el modelo teórico.

A continuación se presenta el análisis de la superficie de barrido encontrada. Utilizando el sistema óptico *cuasi* – $4f$ al desplazar la lente L_1 y rejilla simultáneamente donde se obtuvieron interferogramas en el rango de $[-400,-390,\dots,-10,0,10,\dots,390,400]$, es decir, se traslado la rejilla Δf_2 para la primera medición $\Delta f_2 = 10mm$ y posteriormente se traslado la lente L_1 en el rango de $[-400,-390,\dots,-10,0,10,\dots,390,400]$, se obtuvieron 80 interferogramas. Para la siguiente medición $\Delta f_2 = 20mm$ y posteriormente se traslado la lente L_1 en el rango de $[-400,-390,\dots,-10,0,10,\dots,390,400]$, es decir se obtuvieron 80 interferogramas, y así sucesivamente hasta llegar al valor de 400mm, cabe destacar que en cada medición se pierde un dato debido al traslado de Δf_2 . Para obtener la superficie deseada se realizaron un total de 5, 501 interferogramas con su respectiva frecuencia portadora. Ver Fig.4.8 que muestra los resultados experimentales

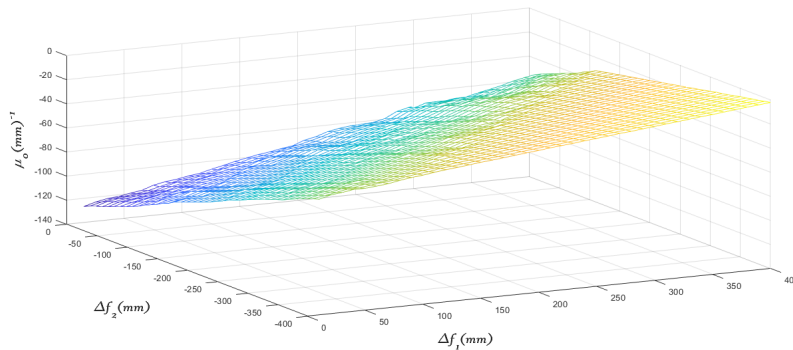


Figura 4.8: Resultados obtenidos desplazando L_1 en sentido positivo

CAPÍTULO 4 RESULTADOS EXPERIMENTALES

4.3. CÁLCULO DE ERROR

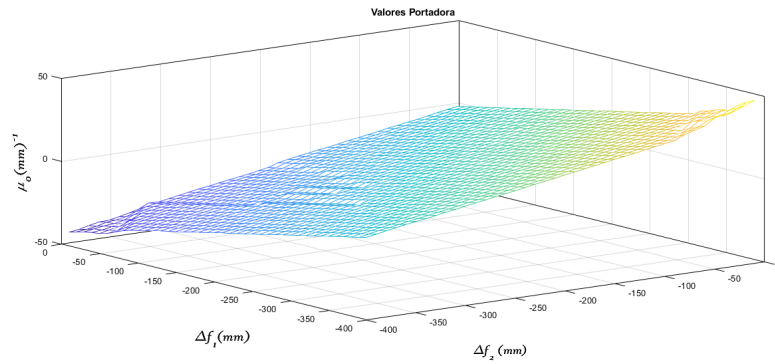


Figura 4.9: Resultados obtenidos desplazando L_1 en sentido negativo

Uniendo los datos correspondientes a las gráficas anteriores, se obtiene la superficie formada por los datos experimentales.

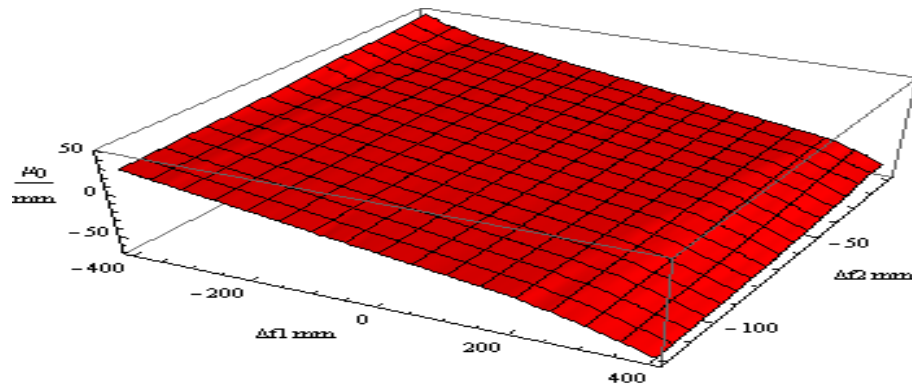


Figura 4.10: Superficie obtenida del barrido de datos obtenidos experimental

4.3.3. Calculo experimental del error

En seguida, se presenta el desarrollo matemático del cálculo de error introducido cuando se desplazan los componentes ópticos rejilla y lente L_1 . En la sección anterior se definieron los términos $f_A = f + \frac{\Delta f_1}{f}(\Delta f_1 - \Delta f_2)$ y $f_B = f + \frac{\Delta f_3}{f}(\Delta f_3 - \Delta f_4 - \Delta f_2) + \frac{\Delta f_2 \Delta f_4}{f}$, que depende de Δf_1 , Δf_2 , Δf_3 y Δf_4 .

Si $\Delta f_3 = \Delta f_4 = 0$ entonces $f_B = f$. Por otro lado el término de la frecuencia portadora dado por Ec.(3.24), ahora si definimos $\Delta f_1 = \Delta f_{1i} + \delta_1$; $\Delta f_2 = \Delta f_{2i} + \delta_2$, entonces la frecuencia portadora adopta la siguiente forma

$$\mu_i = \frac{\Delta f_{2i} - \Delta f_{1i}}{u_p f} \frac{f_{Ai}}{f_{Bi}}. \quad (4.14)$$

donde Δf_{1i} , Δf_{2i} son mediciones realizadas experimentalmente, es decir, son valores conocidos y δ_1 , δ_2 determinan el error inicial producido que deseamos encontrar. Ahora sustituyendo los valores correspondientes en Ec.(3.26) tenemos

$$\mu_0 = \frac{\Delta f_{2i} - \Delta f_{1i} + \delta_2 - \delta_1}{u_p f} \left(1 + \frac{(\Delta f_{1i} + \delta_1)^2}{f^2} - \frac{(\Delta f_{1i} + \delta_1)(\Delta f_{2i} + \delta_2)}{f^2} \right) \quad (4.15)$$

realizando el algebra correspondiente tenemos

$$\begin{aligned} \mu_0 = & \frac{\Delta f_{2i} - \Delta f_{1i}}{u_p f} + \frac{\delta_2 - \delta_1}{u_p f} + \frac{1}{u_p f^3} \Delta^2 f_{1i} \Delta f_{2i} - \frac{1}{u_p f^3} \Delta^3 f_{1i} + \quad (4.16) \\ & \frac{2}{u_p f^3} \Delta f_{2i} \Delta f_{1i} \delta_1 - \frac{2}{u_p f^3} \Delta_{1i}^2 \delta_1 + \frac{1}{u_p f^3} \Delta f_{2i} \delta_1^2 - \frac{1}{u_p f^3} \Delta f_{1i} \delta_1^2 - \\ & \frac{1}{u_p f^3} \Delta^2 f_{2i} \Delta f_{1i} + \frac{1}{u_p f^3} \Delta^2 f_{1i} \Delta f_{2i} - \frac{1}{u_p f^3} \Delta f_{2i} \Delta f_{1i} \delta_2 + \frac{1}{u_p f^3} \Delta^2 f_{1i} \delta_2 \\ & - \frac{1}{u_p f^3} \Delta^2 f_{2i} \delta_1 + \frac{1}{u_p f^3} \Delta f_{1i} \Delta f_{2i} \delta_1 - \frac{1}{u_p f^3} \Delta f_{2i} \delta_1 \delta_2 + \frac{1}{u_p f^3} \Delta^2 f_{1i} \delta_2 - \\ & \frac{1}{u_p f^3} \Delta^2 f_{1i} \delta_1 + \frac{2}{u_p f^3} \Delta f_{1i} \delta_1 \delta_2 - \frac{2}{u_p f^3} \Delta f_{1i} \delta_1^2 + \frac{1}{u_p f^3} \delta_1^2 \delta_2 - \frac{1}{u_p f^3} \delta_1^3 - \\ & \frac{1}{u_p f^3} \Delta f_{1i} \Delta f_{2i} \delta_2 + \frac{1}{u_p f^3} \Delta f_{1i} \Delta f_{2i} \delta_1 - \frac{1}{u_p f^3} \Delta f_{1i} \delta_2^2 + \frac{1}{u_p f^3} \Delta f_{1i} \delta_1 \delta_2 - \\ & \frac{1}{u_p f^3} \Delta f_{2i} \delta_1 \delta_2 + \frac{1}{u_p f^3} \Delta f_{2i} \delta_1^2 - \frac{1}{u_p f^3} \delta_1 \delta_2^2 + \frac{1}{u_p f^3} \delta_1^2 \delta_2, \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4 RESULTADOS EXPERIMENTALES

4.3. CÁLCULO DE ERROR

simplificando la expresión y agrupando los términos $\Delta f_{1i}, \Delta f_{2i}$

$$\begin{aligned} \mu_0 = & \frac{\Delta f_{2i} - \Delta f_{1i}}{u_p f} + \frac{1}{u_p f^3} \left[(4\delta_1 \delta_2 - 3\delta_1^2 - \delta_2^2) \Delta f_{1i} + (2\delta_1^2 - 2\delta_1 \delta_2) \Delta f_{2i} \right] \quad (4.17) \\ & + \frac{1}{u_p f^3} \left[(4\delta_1 - 2\delta_2) \Delta f_{1i} \Delta f_{2i} + (2\delta_2 - 3\delta_1) \Delta^2 f_{1i} \right] + \frac{2}{u_p f^3} \Delta^2 f_{1i} \Delta f_{2i} + \\ & \frac{1}{u_p f^3} \left[2\delta_1^2 \delta_2 - \delta_1^2 - \delta_1 \delta_2^2 + f^2 (\delta_2 - \delta_1) \right] - \frac{1}{u_p f^3} \Delta^2 f_{2i} \delta_1 - \frac{1}{u_p f^3} \Delta^2 f_{2i} \Delta f_{1i} \\ & - \frac{1}{u_p f^3} \Delta^3 f_{1i}, \end{aligned}$$

pasando del otro lado de la igual los términos que son conocidos obtenemos

$$\mu_0 u_p f^3 + f^2 (\Delta f_{1i} - \Delta f_{2j}) - 2\Delta^2 f_{1i} \Delta f_{2j} + \Delta^2 f_{2j} \Delta f_{1i} + \Delta^3 f_{1i} = h_{ij} \quad (4.18)$$

entonces

$$\begin{aligned} h_{ij} = & \left[2\delta_1^2 \delta_2 - \delta_1^2 - \delta_1 \delta_2^2 + f^2 (\delta_2 - \delta_1) \right] \quad (4.19) \\ & + (4\delta_1 \delta_2 - 3\delta_1^2 - \delta_2^2) \Delta f_{1i} + (2\delta_1^2 - 2\delta_1 \delta_2) \Delta f_{2j} \\ & + (4\delta_1 - 2\delta_2) \Delta f_{1i} \Delta f_{2j} - \delta_1 \Delta^2 f_{2j}, \end{aligned}$$

renombrando los términos dependientes de δ_1, δ_2 se tiene

$$h_{ij} = a_0 + a_1 \Delta f_{1i} + a_2 \Delta^2 f_{1i} + a_3 \Delta f_{2j} + a_4 \Delta f_{1i} \Delta f_{2j} + a_5 \Delta^2 f_{2j}. \quad (4.20)$$

por lo tanto, los coeficientes están definidos

$$a_0 = \left[2\delta_1^2 \delta_2 - \delta_1^2 - \delta_1 \delta_2^2 + f^2 (\delta_2 - \delta_1) \right]. \quad (4.21)$$

$$a_1 = (4\delta_1 \delta_2 - 3\delta_1^2 - \delta_2^2). \quad (4.22)$$

$$a_2 = (2\delta_1^2 - 2\delta_1 \delta_2). \quad (4.23)$$

$$a_3 = (2\delta_1^2 - 2\delta_1 \delta_2). \quad (4.24)$$

$$a_4 = (4\delta_1 - 2\delta_2). \quad (4.25)$$

$$a_5 = -\delta_1 \quad (4.26)$$

CAPÍTULO 4 RESULTADOS EXPERIMENTALES

4.3. CÁLCULO DE ERROR

Podemos observar que Ec. (4.20) tiene la forma de Ec. (2.92) entonces se dice que los términos $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ y a_6 son los coeficientes de un polinomio de grado 6. Por lo tanto se puede solucionar utilizando la teoría descrita en la sección 2.7.5. La primera parte de la solución del polinomio en forma matricial queda de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^N \Delta^0 f_{i1} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{i1} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{2j} \\ \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{i1} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^3 f_{i1} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{i1} \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} \Delta^2 f_{2j} \\ \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{i1} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^3 f_{i1} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^4 f_{i1} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{i1} \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^3 f_{i1} \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{i1} \Delta^2 f_{2j} \\ \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{i1} \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} \Delta^2 f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^3 f_{2j} \\ \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{i1} \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^3 f_{i1} \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} \Delta^2 f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{i1} \Delta^2 f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} \Delta^3 f_{2j} \\ \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} \Delta^2 f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{i1} \Delta^2 f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^3 f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} \Delta^3 f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^4 f_{2j} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^N h_{ij} \\ \sum_{i,j=1}^N h_{ij} \Delta f_{1i} \\ \sum_{i,j=1}^N h_{ij} \Delta^2 f_{1i} \\ \sum_{i,j=1}^N h_{ij} \Delta^2 f_{2j} \\ \sum_{i,j=1}^N h_{ij} \Delta f_{1i} \Delta f_{2j} \\ \sum_{i,j=1}^N h_{ij} \Delta^2 f_{2j} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Por lo tanto, la solución del sistema es

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^N \Delta^0 f_{i1} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{i1} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{2j} \\ \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{i1} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^3 f_{i1} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{i1} \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} \Delta^2 f_{2j} \\ \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{i1} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^3 f_{i1} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^4 f_{i1} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{i1} \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^3 f_{i1} \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{i1} \Delta^2 f_{2j} \\ \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{i1} \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} \Delta^2 f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^3 f_{2j} \\ \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{i1} \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^3 f_{i1} \Delta f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} \Delta^2 f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{i1} \Delta^2 f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} \Delta^3 f_{2j} \\ \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} \Delta^2 f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^2 f_{i1} \Delta^2 f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^3 f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta f_{i1} \Delta^3 f_{2j} & \sum_{i,j=1}^N \Delta^4 f_{2j} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^N h_{ij} \\ \sum_{i,j=1}^N h_{ij} \Delta f_{1i} \\ \sum_{i,j=1}^N h_{ij} \Delta^2 f_{1i} \\ \sum_{i,j=1}^N h_{ij} \Delta^2 f_{2j} \\ \sum_{i,j=1}^N h_{ij} \Delta f_{1i} \Delta f_{2j} \\ \sum_{i,j=1}^N h_{ij} \Delta^2 f_{2j} \end{pmatrix}$$

CAPÍTULO 4 RESULTADOS EXPERIMENTALES

4.3. CÁLCULO DE ERROR

En donde Inv significa la matriz inversa. En conclusion hemos encontrado el conjunto de coeficientes del polinomio de grado 6, que mejor se aproxima a los datos experimentales.

4.4. Conclusiones del capítulo

En éste capítulo se ha demostrado teórica y experimentalmente que al trasladar los elementos ópticos en un DACPI la teoría anteriormente estudiada se sigue cumpliendo, es decir cuando es trasladado la lente o la rejilla respectivamente. Para su demostración se evaluaron los interferogramas capturados utilizando el método explicado en este capítulo. Al trasladar longitudinalmente cualquiera de los elementos ópticos respecto al eje óptico del sistema, el valor de portadora va cambiando proporcionalmente al desplazamiento. Se calculó el error introducido de la frecuencia portadora de los valores teóricos y experimentales, donde la diferencia de estos errores es del orden de 0,037, cabe destacar que considerando los valores encontrados se considera que este método tiene un estadístico de prueba de 95 por ciento, por lo tanto este método se considerará efectivo. Se realizó un análisis de la linealidad de los datos obtenidos mediante el método de regresión lineal, se comprobó que efectivamente ambos resultados satisfacen un comportamiento lineal.

CAPÍTULO 4 RESULTADOS EXPERIMENTALES
4.4. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Capítulo 5

Conclusiones Generales

En el presente trabajo se muestra el cálculo matemático enfocado al interferómetro de trayectoria común de doble apertura cuando todos sus elementos son trasladados de sus planos iniciales. Particularmente se hizo énfasis en los patrones de interferencia para los órdenes de difracción 0 y 1 de la ventana de entrada correspondientes, el patrón de interferencia obtenido aparece un término de fase lineal, que es proporcional a la diferencia del desplazamiento Δf_2 y Δf_1 e inversamente proporcional al producto del periodo de la rejilla y su distancia focal. Por otro lado, la demostración experimentalmente que al trasladar los elementos ópticos en un DACPI la teoría anteriormente estudiada se sigue cumpliendo, es decir cuando es trasladado la lente o la rejilla respectivamente. Para su demostración se evaluaron los interféogramas capturados utilizando el análisis matemático. Al trasladar longitudinalmente cualquiera de los elementos ópticos respecto al eje óptico del sistema, el valor de portadora va cambiando proporcionalmente al desplazamiento. Se calculó el error introducido de la frecuencia portadora de los valores teóricos y experimentales, donde la diferencia de estos errores es del orden de 0,037, cabe destacar que considerando los valores encontrados se considera que este método tiene un estadístico de prueba de 95 por ciento, por lo tanto, este método se considera efectivo. Se realizó un análisis de la linealidad de los datos obtenidos mediante el método de regresión lineal, se comprobó que efectivamente ambos resultados satisfacen un comportamiento lineal

CAPÍTULO 5 CONCLUSIONES GENERALES

Bibliografía

- [1] **J. H. Bruning, D. R. Herriott, J. E. Gallagher, D. P. Rosenfeld, A.D. White, and D. J. Brangaccio.**, "Digital Wavefront Measuring Interferometer for Testing Optical Surfaces and Lenses," *Appl. Opt.* 13, 2693–2703 (1974).
- [2] **Bu P, Wang X, Sasaki O.**, "One-shot parallel complex Fourier-domain optical coherence tomography using a spatial carrier frequency," (*Opt Eng* 47:050502 (2008)).
- [3] **M. Takeda, H. Ina and S. Kobayashi.**, "Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry," (*J. Opt. Soc. Am.* 72, 156-160 (1982)).
- [4] **Wikram CS, Pecherski MJ.**, "Wedge prism for direction resolved speckle correlation interferometry," (*Opt Eng* 38:1743-7 (1999)).
- [5] **Bengong Hao, Mingguang Shan, Zhi Zhong, Ming Diao, Yabin Zhang.**, "Common-path interferometer with four simultaneous phase-shifted interferograms using Ronchi grating and cube beamsplitter," *Opt Eng* 1279 (2013)
- [6] **Cruz Meneses-Fabian, Gustavo Rodriguez-Zurita.**, "Common-path phase-shifting interferometer with binary grating," *Optics Communications.* 178-182 February (2006)
- [7] **Shan M, Hao B, Zhong Z, Diao M, Zhang Y.**, "Parallel two-step spatial carrier phase-shifting common-path interferometer with a Ronchi grating outside the Fourier plane," *Opt Express* 21:2126-32 (2013)
- [8] **C. Meneses-Fabian, R. Kantun-Montiel, G.P. Lemus-Alonso.**, "Carrier fringes interferometry by superposing the first harmonic of two rulings with different period," *Opt Eng* (in press).
- [9] **V. Arrizon and D. Sanchez-de-la-Llave.**, "Common-path interferometry with one-dimensional periodic filters," *Opt. Lett.* 29, 141-143 (2004).

- [10] **Gustavo Rodríguez-Zurita, Cruz Meneses-Fabian, Noel-Ivan Toto-Arellano, José F. Vázquez-Castillo, Carlos Robledo-Sánchez.**“One-shot phase-shifting phase-grating interferometry with modulation of polarization: case of four interferograms,” Optics Express. 150-153 (2008)
- [11] **Itho.**Introduction to Fourier Optics, (McGraw-Hill, New York, 1996)
- [12] **J. W. Goodman.**Introduction to Fourier Optics, (McGraw-Hill, New York, 1996).
- [13] **E.Hecht, A. Zajac.**Optica, (3 Edition., Ed. Pearson, Addison Wesley, Pags. 384-415 (2003)).
- [14] **George Arfken.** Methods for Physicists, (Third Edition).
- [15] **Jerrold E. Marsden, Anthony J. Tromba.**Cálculo vectorial, (4th. ed.Addison Wesley Longman de México,1998).
- [16] **Stephen Wolfram.**The Mathematica Book, (5th ed. Wolfram Media,2003).
- [17] **Stephen Wolfram.**The Mathematica Book, (5th ed. Wolfram Media,2003).