



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

**MODELACIÓN DE PATRONES DE
VEGETACIÓN MEDIANTE EL MODELO
DE HARDENBERG – LEFEVER**

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito para la obtención del grado de

Licenciatura en Física Aplicada

Por

Rebeca Franco Reyes

Asesores de Tesis:

Dr. Ricardo Agustín Serrano

Dr. Marco Antonio Morales Sánchez



Facultad de Ciencias
Físico Matemáticas

Diciembre, 2020

*Dedicado a
mis abuelos, que me apoyaron y me cuidaron desde el cielo,
a mi familia, por mostrarme el camino hacia la superación,
por brindarme su tiempo y darme un hombro para descansar,
a mis amigos, por permitirme aprender más de la vida a su lado,
y a mis asesores, por el tiempo y esfuerzo que me brindaron.*

Agradecimientos

La vida es hermosa, la podemos compartir y disfrutar con quienes amamos, podemos ayudar y guiar a muchas personas si ellos lo permiten, pero también podemos ser ayudados y guiados durante nuestro camino; por esto mismo, quiero agradecer a todos aquellos que estuvieron presentes durante este proceso tan importante de mi vida.

Agradezco a mi madre por ser la principal promotora de mis sueños, gracias a ella por cada día confiar y creer en mí y en mis expectativas, agradezco a mi hermano por siempre desear y anhelar lo mejor para mí, gracias a ambos por cada consejo y por cada una de sus palabras que me han guiado en esta vida.

Agradezco a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla por haberme acogido a lo largo de estos últimos años, por guiarme en el mundo de la Física y por apoyar mis sueños y esperanzas. Le doy las gracias a mis docentes por todas sus enseñanzas, en especial al Dr. Ricardo Agustín Serrano y al Dr. Marco Antonio Morales Sánchez por su atinada instrucción y asesoría en la elaboración de esta tesis, por confiar en mí en todo momento, por brindarme consejos y palabras de aliento.

Agradezco a mis amigos, aquellos que me enseñaron a disfrutar de las buenas cosas de la vida, quienes se han convertido en mi segunda familia, gracias por todas las risas y las alegrías, gracias a todos los que estuvieron cerca y también a aquellos que aún estando lejos me guiaron siempre hacia la dirección correcta, gracias por la confianza, por el cariño y simplemente por existir.

Muchas gracias a todos ustedes mis seres queridos, por ser mi constante motivación y así poder hacer de este logro algo posible.

Resumen

La dinámica de la vegetación se formula en términos de las propiedades estructurales de las plantas. En el marco de un enfoque general, nos centramos en la relación entre la morfología de la organización espacial de las poblaciones de vegetación. Hasta ahora, tanto en los estudios teóricos como en los de campo, esta relación ha recibido escasa atención.

En este proyecto se estudió numéricamente el modelo matemático de Harderberg – Lefever, el cual describe la distribución vegetal de biomasa – desertificación dando así una forma de entender la formación de patrones de vegetación. Este modelo es un sistema de reacción – difusión que consta de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no-lineales, en el cual, las variables del sistema son la densidad de la distribución de biomasa y la humedad. Se pretende encontrar resultados que ayuden a conocer señales sobre si los ecosistemas tienen formación de vegetación o si se acercan a la desertificación. El modelo reproduce una amplia gama de patrones observados en regiones con limitaciones de agua, incluidos puntos y fases intermezcladas de desertificación con laberintos. Predice las transiciones de suelo desnudo con poca precipitación a vegetación homogénea con alta precipitación, a través de estados intermedios de patrones de puntos, tripas y huecos. También predice amplios rangos de precipitación donde coexisten diferentes estados estables.

Utilizando estas predicciones, proponemos una explicación novedosa de los fenómenos de desertificación y un nuevo enfoque para clasificar la biomasa. Esto mostrará que, en escenarios climáticos futuros, el destino del sistema dependerá de las características y mejoras de las plantas, así como, de la influencia que tengan las condiciones de humedad sobre ellas.

Objetivos

Objetivo General

Estudio analítico y numérico de una propuesta de modelo tipo Hardenberg-Lefever para la descripción de patrones de vegetación y desertificación.

Objetivos Específicos

- I. Proponer un nuevo modelo a partir de los modelos de Hardenberg y Lefever.
- II. Aplicar los métodos de Euler modificado para la parte temporal y diferencia finita para la parte espacial del modelo Hardenberg-Lefever.
- III. Implementar en python y sus librerías (numpy, scipy, sympy, tkinter, etc.) los métodos numéricos dichos anteriormente para obtener soluciones numéricas.
- IV. Simular por computadora la dinámica de los patrones de vegetación del modelo Hardenberg-Lefever.
- V. Interpretar los resultados obtenidos de la simulación.

Índice

Agradecimientos	5
Resumen	7
Objetivos.....	8
Objetivo General	8
Objetivos Específicos.....	8
Capítulo 1. Modelación matemática de los patrones de vegetación.	12
1.1 Introducción	12
1.2 Modelos matemáticos, no linealidad y rompimiento de simetría.....	14
1.3 Descripción de los modelos matemáticos.....	19
Capítulo 2. Metodología.....	38
2.1 Modelo Hardenberg-Levefer	38
2.2 Esbozo del análisis de estabilidad lineal	40
2.3 Método numérico	44
Capítulo 3. Resultados y Discusión.....	47
3.1 Simulación de la dinámica de formación de patrones de vegetación.....	47
3.2 Formación de patrones: fase de desertificación, laberintos, puntos, huecos y vegetación uniforme	52
Capítulo 4. Conclusiones	74
Bibliografía.....	76

Capítulo 1. Modelación matemática de los patrones de vegetación.

1.1 Introducción

El cambio climático es un tema que ha capturado la atención de todo ser pensante en el globo, durante años. Los temas ambientales han sido ignorados o considerados secundarios, debido a que no se le ha dado una justa dimensión a la importancia de un medio ambiente sano, o bien, en algún punto se conservaba la esperanza que, si se solucionan los problemas sociales y económicos, los ecosistemas naturales tendrían tiempo y capacidad de recuperarse. La realidad, sin embargo, enfrenta al hecho de que el deterioro ambiental amenaza seriamente el desarrollo actual y futuro de las naciones. La degradación del medio ambiente con el consecuente cambio climático es una bomba de tiempo que debe ser desactivada si el ser humano no quiere desaparecer como especie del planeta tierra.

Los ecosistemas están amenazados hoy más que nunca; los cambios climáticos y la acción humana han llevado en las últimas tres décadas a una pérdida sin precedentes de hábitats y especies [1]. La comprensión de la estructura y la dinámica de las comunidades de plantas en sistemas de agua limitada a menudo requiere la identificación de la ingeniería de ecosistemas que modifica el paisaje, redistribuyen los recursos y facilitan el crecimiento de otras especies [2]. Así, la ecología vegetal es una de las áreas específicas que estudia las relaciones de las plantas entre sí con el medio ambiente que las rodea (luz, temperatura, factores mecánicos, características del suelo y los animales). Y es bien sabido que, en el campo de la ecología vegetal, muchas comunidades de plantas exhiben distribuciones de vegetación no uniformes y no aleatorias, generalmente llamadas patrones de vegetación [3]. Comprender el mecanismo subyacente para la generación de tales patrones y su resistencia observada, se considera un paso importante hacia la comprensión del proceso de desertificación, donde los efectos ambientales como el cambio climático y la presencia de pastos destruyen el equilibrio natural hacia una aridez estable [4, 5]. Se han sugerido una gran cantidad de hipótesis sobre el origen de formación de patrones de vegetación; no obstante, aún no se ha alcanzado un consenso generalizado [6].

Inclusive, existe una gran variedad de modelos matemáticos que describen la formación de patrones de vegetación o específicamente: la distribución vegetal de biomasa mediante las leyes de la Física y su comportamiento no lineal para modelar la interacción de las plantas con su medio ambiente. Algunos de los modelos utilizados son los reportados por Hardenberg et. Al. [7], Gilard et. al. [1, 2], HilleRisLambers et. Al. [6], Shnerb et. al. [4], D'Odorico et. al. [5], Kéfi [8], Lefever et. al., [3, 9], Gómez de Araujo et. al. [6] y Quan-Xing et. al. [10]. La visión de zonas de vegetación como un fenómeno de formación de patrones que implica un rompimiento de simetría [11] bastante novedosa (hasta donde sabemos, según las referencias citadas). Esta visión es apoyada por modelos matemáticos recientes que identifican patrones de vegetación con inestabilidades de estados de vegetación uniformes [7].

En general, los patrones de vegetación se interpretan como un proceso de autoorganización que toma forma a través de una inestabilidad fuera del equilibrio [12]. Esta inestabilidad puede ser un fenómeno de ruptura de simetría en sentido estricto, que puede ocurrir incluso si el ambiente es isotrópico, o puede ser una transición inducida por advección que requiere la preexistencia de alguna anisotropía ambiental (generalmente topográfica) [3, 13].

El objetivo de la presente tesis es estudiar analítica y numéricamente un modelo matemático propuesto a partir de dos modelos ya establecidos, los modelos de Hardenberg y Lefever, el cual, tendrá como objetivo describir la distribución vegetal de biomasa dando así una forma de entender la formación de patrones de vegetación. Para esto, será necesario considerar algunos factores ambientales que tengan causas capaces de explicar la formación de dichos patrones, debido a que su existencia no se limita a un tipo particular de suelo o a un tipo particular de vegetación, se deben considerar también las características espaciotemporales más comunes y que en general son exhibidas en diversas regiones geográficas. Supondremos que el mecanismo implícito a la formación de estas estructuras es único, de naturaleza dinámica y que se origina a partir de interacciones entre plantas que trabajan a nivel de población.

Existe una gran complejidad en las comunidades vegetales, eso sumado a que, con respecto a los estándares humanos, las escalas de tiempo que rigen la evolución de estos son muy largas, idear modelos capaces de determinar qué efectos tiene una multitud de factores ambientales en la distribución de la vegetación es una tarea altamente problemática. Es aún más problemático cuantificar estos efectos (piense, por ejemplo, en cuantificar los efectos de factores tales como la variabilidad de los suelos, la presencia o ausencia de pendientes en el territorio, la dirección e intensidad de los vientos dominantes, la disponibilidad de luz, la presencia de termitas u otros agentes que influyen en el riego y la humedad del suelo, la ocurrencia de incendios, etc.).

El modelo de dinámica de la distribución vegetal presentado en este documento pretende llenar los vacíos teóricos. Permitirá predecir que las distribuciones de vegetación pueden sufrir una inestabilidad que rompe la simetría como resultado de las interacciones entre los diferentes tipos de biomasa, haciendo notar que corresponde al ámbito de la física no lineal. Los parámetros adecuados para describir esta inestabilidad corresponden más a las propiedades de la vegetación que al medio ambiente.

1.2 Modelos matemáticos, no linealidad y rompimiento de simetría

Conforme el tiempo avanza, las herramientas para predecir y estudiar los fenómenos de la naturaleza aumentan, una de las más importantes y de las que actualmente se dispone para analizar y predecir el comportamiento de un sistema biológico es la elaboración y simulación de un modelo matemático. Existen una infinidad de razones para darle crédito a la modelización matemática, sin embargo, también se debe destacar el alto nivel de conocimiento de los procesos naturales y biológicos con los que se puede contar hoy en día, así como también es importante reconocer el espectacular avance que ha tenido la tecnología dando paso a la existencia de mejores ordenadores y de softwares matemáticos de mayor calibre.

Debido a que en este capítulo se hará una descripción de los modelos matemáticos de la distribución vegetal de biomasa, es conveniente comenzar precisando lo que se entiende por un modelo matemático. Un modelo matemático es la representación de un proceso mediante ecuaciones, funciones o fórmulas matemáticas de un fenómeno o de la relación entre dos o más variables. [22]

Las matemáticas siempre se han beneficiado de su participación en el desarrollo de las ciencias. Cada interacción sucesiva revitaliza y mejora el campo. Para la salud continua de su materia, el lenguaje de las matemáticas debe involucrarse con la ecología. Con el ejemplo de cómo el lenguaje matemático se ha beneficiado e influido en la física, está claro que, si la matemática no se involucra en las biociencias, simplemente no serán parte de lo que probablemente serán los descubrimientos científicos más importantes y emocionantes de todos los tiempos. *“La biología matemática es un tema de rápido crecimiento, bien reconocido, aunque no claramente definido, y es, en mi opinión, una de las aplicaciones modernas más emocionante de las matemáticas.”* [14]

El uso creciente del lenguaje matemático en biología es inevitable a medida que la biología se vuelve más cuantitativa. La complejidad de las ciencias biológicas hace que la participación interdisciplinaria sea esencial. Para los físicos y los matemáticos, la biología abre nuevas y emocionantes ramas, mientras que, para el biólogo, el modelado matemático ofrece otra herramienta de investigación acorde con una nueva y poderosa técnica de laboratorio, pero solo si se usa adecuadamente y se reconocen sus limitaciones.

El creciente estudio de modelos matemáticos realistas y prácticamente útiles en biología de poblaciones, ya sea que se trate de una población humana con o sin distribución por edades, población de especies en peligro de extinción, crecimiento bacteriano o viral, crecimiento de vegetación, etc., es un reflejo de su uso para ayudar a comprender los procesos dinámicos involucrados y para hacer predicciones prácticas. Ecología, básicamente el estudio de la interrelación entre especies y su entorno, en áreas tales como interacciones depredador-presa y competencia, gestión de recursos renovables, evolución de cepas resistentes a

pesticidas, control ecológico y genéticamente modificado de plagas, las sociedades de múltiples especies, los sistemas de plantas y herbívoros, etc., ahora es un campo enorme. [14]

Es difícil hacer predicciones a largo plazo, o incluso a corto plazo, a menos que se conozcan suficientes hechos para incorporar en el modelo para que sea un predictor confiable, aunque las tendencias generales pueden ser útiles en sí mismas, incluso si en última instancia son cuantitativamente erróneas. Es claramente necesario desarrollar una estrategia ecológicamente aceptable para cosechar cualquier recurso renovable, ya sean animales, peces, plantas o lo que sea. Por lo general, se quiere buscar el máximo rendimiento sostenible con el mínimo esfuerzo.

Los modelos de ecuaciones diferenciales ya sean ordinarios, retardados, parciales o estocásticos, implican una superposición continua de generaciones. Muchas especies no tienen superposición alguna entre generaciones sucesivas, por lo que el crecimiento de la población está en pasos discretos. Para los organismos primitivos, estos pueden ser bastante cortos, en cuyo caso un modelo continuo (en el tiempo) puede ser una aproximación razonable. Sin embargo, dependiendo de la especie, las longitudes de los pasos pueden variar ampliamente. Un año es común. Con la aparición de la mosca de la fruta de las pupas es un día, para las células puede durar varias horas, mientras que para las bacterias y los virus puede ser considerablemente menor. En los modelos que se discutirán más adelante se ha escalado el paso de tiempo para que sea 1.[14]

Por lo tanto, los modelos deben relacionar la población en el tiempo $t + 1$, denotado por N_{t+1} , en términos de la población N_t en el tiempo t . Esto lleva a estudiar ecuaciones de diferencia, o modelos discretos, de la forma $N_{t+1} = N_t F(N_t) = f(N_t)$ donde $f(N_t)$ es en general una función no lineal de N_t . La primera forma se usa a menudo para enfatizar la existencia de un estado estable cero. Tales ecuaciones son usualmente imposibles de resolver analíticamente, pero nuevamente se puede extraer una cantidad considerable de información sobre la dinámica de la población sin una solución analítica.[14]

Una razón importante para modelar la dinámica de una población es comprender las características principales de control y poder predecir el patrón probable de desarrollo como consecuencia de un cambio en los parámetros ambientales. Al hacer el modelo, se puede tener, en diversos grados, un conocimiento biológico de la especie y datos de observación con los cuales comparar los resultados del análisis del modelo. Puede ser útil resumir lo que se puede aprender sobre la dinámica de una población a partir del tipo de modelos que se han considerado y señalar algunas de sus dificultades y limitaciones

Lo que se ve en la teoría de la formación de patrones que ahora está tomando forma, es una situación que recuerda lo que ocurrió en la teoría de los fenómenos críticos y en otras ramas desarrolladas de la física no lineal. Se están investigando muchos fenómenos mediante ecuaciones y modelos que, a primera vista, no parecen ser relevantes para el experimento descrito. Por ejemplo, la noción básica en la teoría de los fenómenos críticos podría tener sustento en la dinámica no lineal y como ejemplo es el modelo hamiltoniano. Formalmente, puede ser irrelevante para cualquier situación física en particular, pero el modelo es universal en el sentido de que describe los efectos comunes a una amplia clase de fenómenos críticos. La universalidad y la simplicidad hacen que las ecuaciones modelo sean una buena herramienta en la construcción de una teoría cualitativa.

¿Qué significan las palabras "teoría cualitativa"? Cuando nos enfrentamos a fenómenos complejos que pueden modelarse como campos no lineales dependientes del tiempo, el descubrimiento de soluciones exactas generalmente representa un evento fortuito en lugar de un éxito genuino, y es seguro que a menudo no se tendrá tanta suerte. Las teorías cualitativas están formuladas para proporcionar una descripción más o menos auto consistente de una clase de eventos físicos. El término cualitativo no pretende sugerir la ausencia de rigor; tiene el mismo significado que, por ejemplo, en la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales.

Una teoría cualitativa implica primero la selección o construcción de algún modelo no lineal básico relevante para una clase de fenómenos de origen físico. El segundo componente necesario en la construcción de una teoría cualitativa es el desarrollo de métodos

aproximados, principalmente los asintóticos que utilizan varios parámetros pequeños. El tercer componente para el desarrollo de una teoría cualitativa es la simulación por computadora, sin la cual a menudo es imposible comprender los problemas complicados de la dinámica de patrones espacio-temporales. El objetivo aquí no es simplemente registrar algunas soluciones particulares, sino más bien investigar el fenómeno en su conjunto.

Muchas restricciones ambientales tienen una estructura espacial. Como resultado, los procesos influenciados por estas restricciones, en lugar de ocurrir de una manera espacialmente isotrópica, se orientan espacialmente. Los vientos dominantes, por ejemplo, influyen en la diseminación de semillas y pueden mejorar la reproducción de la planta en la dirección del viento. Del mismo modo, en un territorio en pendiente, la corriente de agua de lluvia crea una anisotropía en la distribución de los puntos de germinación de las semillas y, por lo tanto, favorece la propagación de la vegetación en una dirección particular. [3]

Razonando como Clos-Arceuduc (1964), se considera el destino de una planta que necesita una cantidad mínima de agua para sobrevivir. Para una precipitación anual fija, esta cantidad corresponde a un área mínima del suelo que el sistema de raíces de la planta bombea en seco. A medida que el clima se vuelve más árido, la precipitación anual disminuye. Para compensar, la planta necesita tener un área de drenaje incrementada a su disposición. Pero si esta área se vuelve más grande que la protegida por su follaje contra el sol y el viento seco, que son los principales factores responsables de la evaporación, la planta muere, si está aislada, o tal vez sobrevive si está rodeada de otras plantas y beneficios de una mayor protección contra la evaporación obtenida por el follaje de este último. En esta interpretación, la agrupación de vegetación se ve como una respuesta natural a condiciones ambientales más áridas. [3]

Sin embargo, existen limitaciones obvias para este efecto de agrupamiento protector (cooperativo). Por ejemplo, si los recursos (especialmente el agua) de las plantas que crecen dentro de un racimo son consumidos principalmente por las plantas vecinas, las plantas centrales morirán nuevamente sin reemplazo, esta vez no como resultado de la evaporación, sino debido a algún efecto inhibitorio de población vegetal en sí misma. Esto sugiere que la

longitud de onda es un compromiso entre dos escalas espaciales: una que caracteriza la reproducción cooperativa de la población; el otro caracteriza los efectos de auto inhibición a través de los cuales la población obstaculiza su propio crecimiento. [3]

Existe un mecanismo matemático que traduce estas ideas intuitivas en términos matemáticos. Atribuye la formación de patrones de vegetación a una inestabilidad de ruptura de simetría que pueden sufrir distribuciones de vegetación homogéneas incluso si las condiciones ambientales son estrictamente isotrópicas. Típicamente, esta inestabilidad desencadena la aparición de inhomogeneidades espaciales cuya longitud característica está determinada por los rangos L_i que caracterizan las interacciones existentes dentro de la comunidad de vegetación. Estos últimos, en lugar de alguna restricción externa anisotrópica o condición de frontera, parecen ser los parámetros que gobiernan la organización espacial de la población.

Una simetría puede ser exacta, aproximada o rota. Simetría exacta significa que es válida incondicionalmente; aproximada significa que es válida en determinadas condiciones; y rota puede tener diversos significados, dependiendo del objeto en cuestión y su contexto.

El estudio de la ruptura de simetría se remonta también a Pierre Curie. Según Curie, la ruptura de simetría tiene la siguiente función: para que suceda un fenómeno en un medio, el grupo de simetría original se reduce (se “rompe”, en la terminología de hoy en día) al nivel del grupo de simetría del fenómeno (o a un subgrupo del grupo de simetría del fenómeno) por la acción de alguna causa. En este sentido la ruptura de simetría es lo que “crea el fenómeno”. En general, la ruptura de una cierta simetría no implica que no exista simetría, sino que la situación en la que se rompe esta simetría se caracteriza por una simetría “más baja” que la original.

1.3 Descripción de los modelos matemáticos

Es natural que de un mismo fenómeno biológico se puedan construir diversos modelos matemáticos diferentes entre sí, cada modelo tendrá un grado de eficacia distinto,

el cual dependerá del conocimiento que se tenga de los procesos que se investiguen y de las posibilidades que se tengan de experimentación. ¿Qué tipo de modelo se debe elegir? ¿Debe corresponder exactamente a un sistema físico particular o puede diferir en ciertos aspectos de este sistema? A veces las diferencias son de menor importancia para la investigación de los rasgos característicos del fenómeno. En la práctica, una amplia variedad de modelos que describen un fenómeno dado no revela muchas características cualitativamente distintas si los modelos no son lo suficientemente robustos.

Distintos modelos matemáticos se ajustaron, diferentes estrategias para estimar la distribución vegetal de biomasa, mostrando así su estructura matemática, sus características y sus resultados, denotando sus diferentes enfoques los cuales, serán descritos a continuación.

❖ **Modelo E. Gilad [1]**

Es un modelo matemático para los efectos de ingeniería de arbustos y cianobacterias en sistemas con agua limitada. Aplicando conceptos de formación de patrones, como ruptura de simetría, inestabilidades y coexistencia de estados estables, se destacan las condiciones para la creación del hábitat, la diversidad del hábitat y la resistencia del sistema a las perturbaciones. [1]

Las inestabilidades que inducen estos patrones son el resultado de dos mecanismos de retroalimentación positiva entre la biomasa y el agua:

(a) *Aumento de la infiltración de agua superficial inducida por la vegetación:* una planta en crecimiento induce una mayor infiltración local de las aguas superficiales que acelera su crecimiento.

(b) *Absorción de agua del suelo por las raíces de las plantas:* a medida que una planta crece, sus raíces se alargan; cuanto más largas son las raíces, más agua del suelo absorben y más rápido crece la planta.

En ambos mecanismos, el agotamiento del agua del suelo de la planta que lo rodea y la competencia de la planta por el recurso hídrico conducen a la ruptura de la simetría y a la formación de patrones. [1]

El modelo que se presenta es el primero en tener en cuenta los dos mecanismos de retroalimentación positiva entre la biomasa y el agua. Contiene tres variables dinámicas: densidad de biomasa sobre el nivel del suelo, $b(r', t)$, densidad del agua del suelo, $w(r', t)$, que describe la cantidad de agua del suelo disponible para la planta por unidad de área de superficie del suelo, y la altura, $h(r', t)$, de una capa delgada de agua superficial sobre el nivel del suelo.[1]

La tasa de crecimiento de la biomasa está modelada por:

$$G_b(r, t) = \int_{\Omega} g(r, r', t)w(r', t)dr' \quad (1.1)$$

$$g(r, r', t) = \frac{1}{2\pi\sigma_0^2} \exp\left[-\frac{|r-r'|^2}{2[\sigma_0(1+\eta b(r, t))]^2}\right] \quad (1.2)$$

De acuerdo con esta forma, la tasa de crecimiento de la biomasa depende no solo de la cantidad de agua del suelo en la ubicación de la planta, sino también de la cantidad de agua del suelo en el vecindario al que se extienden las raíces de la planta. [1]

La Figura 1 muestra los estados uniformes y sus propiedades de estabilidad para dos opciones de parámetros, correspondientes a plantas que difieren en sus tasas de extensión de raíz, en sus tasas de crecimiento y en sus densidades máximas de biomasa.

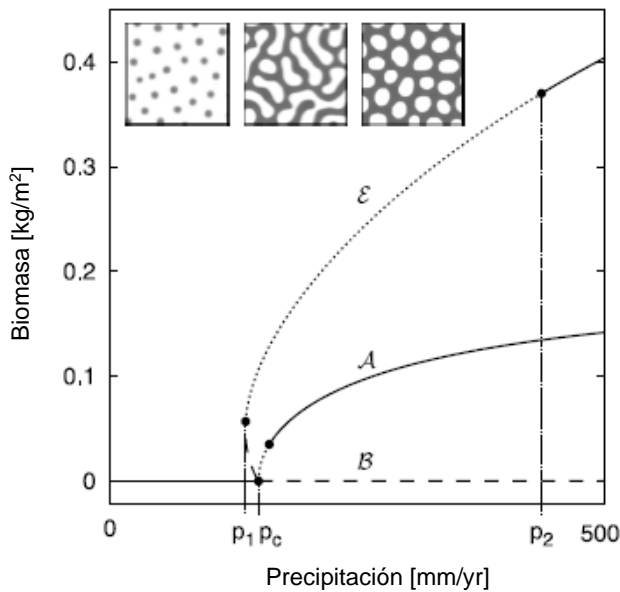


Figura 1.1 Biomasa b vs precipitación p para topografía plana. Las líneas continuas denotan soluciones estables, mientras que las líneas discontinuas (punteadas) indican soluciones inestables a perturbaciones uniformes (no uniformes). La rama B representa una solución uniforme de suelo desnudo. Las dos ramas marcadas como A y E representan estados de vegetación uniformes para dos opciones de parámetros diferentes, correspondientes a (A) baja densidad de biomasa, alta tasa de crecimiento y longitudes de raíz cortas y (E) mayor densidad de biomasa, baja tasa de crecimiento y largas longitudes de raíz. Los insertos muestran patrones típicos de biomasa de las especies E a lo largo del gradiente de precipitación. Los tonos oscuros de gris representan alta biomasa.

Fuente: E. Gilad, J. von Hardenberg, A. Provenzale, M. Shachak, and E. Meron; *Ecosystem Engineers: From Pattern Formation to Habitat Creation*, Physical Review Letters (2004).

❖ Modelo E. Gilad [2]

Se presenta y se estudia un modelo matemático para el crecimiento de la vegetación en sistemas con limitación de agua que captura el aumento del sistema de raíces a través de términos no locales en las ecuaciones del modelo. [2]

Se introduce un modelo para una sola especie de planta donde el recurso limitante es el agua. Un "parche" en el contexto del modelo se define como un área cubierta por la planta, que generalmente difiere en su contenido de agua del suelo desnudo circundante. El modelo contiene tres variables dinámicas: (a) la variable de densidad de biomasa, $B(X, T)$, que representa la biomasa de la planta sobre el nivel del suelo en unidades de kg/m^2 , (b) la variable de densidad del agua del suelo, $W(X, T)$, que describe la cantidad de agua del suelo disponible (kg/m^2), para las plantas por unidad de área de superficie del suelo en unidades de (kg/m^2), y (c) la variable de agua superficial $H(X, T)$, que describe la altura de una capa delgada de agua sobre el nivel del suelo en unidades de (mm). La lluvia y la topografía se introducen paramétricamente; por lo tanto, se supone que las reacciones de la vegetación sobre el clima y la erosión del suelo son insignificantes. [2]

Las ecuaciones del modelo son:

$$\begin{aligned}
 B_T &= G_B B \left(1 - \frac{B}{K}\right) - MB + D_B \nabla^2 B \\
 W_T &= IH - N \left(1 - \frac{RB}{K}\right) W - G_W W + D_W \nabla^2 W \\
 H_T &= P - IH - D_H \nabla^2 (H^2) - 2D_H \nabla H \cdot \nabla Z + 2D_H H \nabla^2 Z
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

donde el subíndice T denota la derivada de tiempo parcial, $X = (X, Y)$ y $\nabla^2 = \partial^2 x + \partial^2 y$. En la ecuación de la biomasa, la cantidad G_B representa la tasa de crecimiento de la biomasa, el parámetro K es la biomasa máxima en pie, el parámetro M es la tasa de pérdida de biomasa y el término $D_B \nabla^2 B$ representa la dispersión de semillas. [2]

La tasa de crecimiento GB tiene la siguiente forma no local:

$$G_B(X, T) = \Lambda \int_{\Omega} G(X, X', T) W(X', T) dX' \tag{1.4}$$

$$G(X, X', T) = \frac{1}{2\pi S_0^2} \exp \left[-\frac{|X-X'|^2}{2[S_0(1+EB(X,T))]^2} \right] \tag{1.5}$$

donde Λ representa la tasa de crecimiento de la planta por unidad de cantidad de agua del suelo, el núcleo gaussiano $G(X, X', T)$; representa el sistema de raíces y la integración es sobre todo el dominio Ω . De acuerdo con esta forma, la tasa de crecimiento de la biomasa depende no solo de la cantidad de agua del suelo en la ubicación de la planta X , pero también en la cantidad de agua del suelo en el vecindario, X' , atravesada por las raíces de la planta. [2]

El modelo tiene dos soluciones estacionarias homogéneas que representan el suelo desnudo y la cobertura uniforme del suelo por la vegetación. Su existencia y rangos de estabilidad lineal para la topografía plana se muestran en los diagramas de bifurcación mostrados en la Figura 2. En la Figura 2D, el parámetro de bifurcación es la precipitación adimensional p . En la Figura 2E, el parámetro de bifurcación se elige como parámetro de aridez, a . [2]

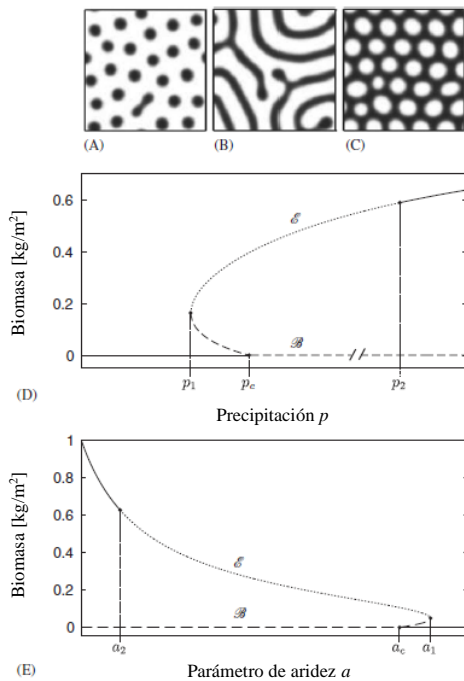


Figura 1.2 Diagramas de bifurcación para soluciones estacionarias homogéneas de las ecuaciones modelo que muestran la biomasa B vs. precipitación p (panel D) y la aridez a (panel E) para la topografía plana. Las ramas de solución B y E denotan, respectivamente, las soluciones de suelo desnudo y vegetación uniforme. Las líneas continuas representan soluciones linealmente estables, las líneas discontinuas representan soluciones que son inestables a las perturbaciones homogéneas, y la línea punteada representa soluciones que son estables a las perturbaciones homogéneas pero inestables a las no homogéneas. También se muestran los patrones básicos de vegetación a lo largo del gradiente de precipitación, puntos (panel A), franjas (panel B) y espacios (panel C), obtenidos por integración numérica de las ecuaciones del modelo. Los tonos oscuros de gris representan una alta densidad de biomasa. La misma secuencia de patrones, pero en orden inverso aparece a lo largo del eje de aridez.

Fuente: E. Gilad, J. von Hardenberg, A. Provenzale, M. Shachak, and E. Meron; *Ecosystem Engineers: A mathematical model of plants as ecosystem engineers*, Journal of Theoretical Biology 244 (2007).

❖ Modelo Lefever [3]

Es un modelo que describe la dinámica de vastas clases de comunidades de plantas terrestres que crecen en regiones áridas o semiáridas en todo el mundo. Sobre la base de este modelo, se muestra que las franjas de vegetación (tiger bush) formadas por estas comunidades son el resultado de una interacción entre las interacciones cooperativas de corto alcance que controlan la reproducción de las plantas y las interacciones auto inhibitorias de largo alcance originadas por la competencia de las plantas por los recursos ambientales. Se discuten las condiciones ambientales isotrópicas y anisotrópicas. Encontrando que las franjas de vegetación tienden a orientarse en la dirección paralela o perpendicular con respecto a una dirección de anisotropía, dependiendo de si esta anisotropía influye en las interacciones que favorecen o inhiben la reproducción de la planta. [3]

La ecuación cinética que modela la evolución de $c(s, t)$ tiene que expresar el equilibrio entre los procesos que contribuyen al crecimiento de la vegetación y los procesos que contribuyen a su muerte o destrucción. Esta ecuación es de la forma:

$$\partial_t c(s, t) = F_1 \times F_2 - F_3 \quad (1.6)$$

donde el término de crecimiento, $F_1 \times F_2$, expresa la tasa a la cual $c(s, t)$ aumenta.

Estos procesos son: en el caso de F_1 , la reproducción natural de plantas a través de la producción, diseminación, germinación y desarrollo de semillas en nuevas plantas maduras; en el caso de F_2 , las interacciones entre las plantas y el medio ambiente, que evitan que la densidad de la vegetación aumente más allá de un límite superior finito o una densidad compacta K . El segundo término en el lado derecho de la ecuación significa vegetación espontánea (natural) muerte y/o destrucción por factores externos como, por ejemplo, pastoreo, fuego, termitas u otros agentes biológicos y físicos. [3]

Los resultados informados a continuación se obtienen integrando la ecuación numéricamente. El dominio de integración corresponde a un territorio de forma cuadrada sujeto a condiciones de contorno periódicas.

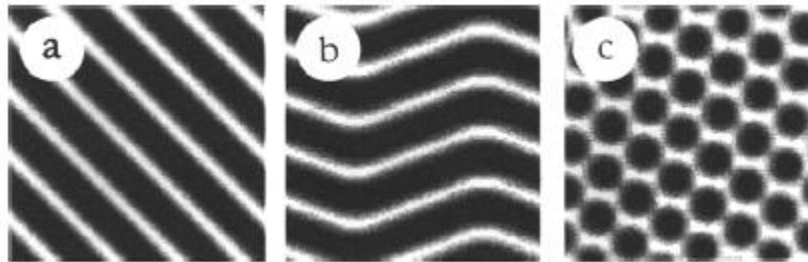


Figura 1.3 Tres ejemplos de patrones espaciales obtenidos para un sistema isotrópico (las regiones blancas corresponden a áreas con menos vegetación). (a) Patrón constituido por rayas que tienen una orientación uniforme. Este último está determinado por la condición inicial. (b) Coexistencia de rayas con dos orientaciones diferentes. La orientación relativa está determinada por la elección de los parámetros, mientras que la orientación global nuevamente depende solo de la condición inicial. (c) Puntos de alta densidad dispuestos en celosía hexagonal sobre un fondo de baja densidad.

Fuente: Lefever, R., and Lejeune, O.; *On the origin of tiger bush*. Bulletin of Mathematical Biology (1997). 59(2), 263-294.

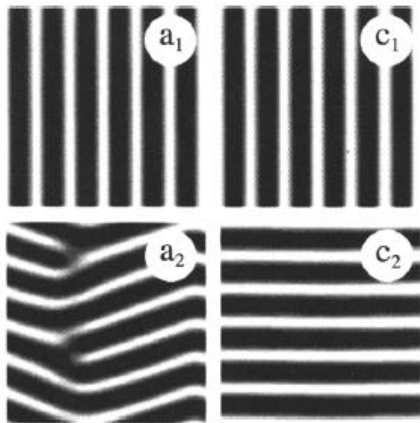


Figura 1.4 Patrones de vegetación en el caso anisotrópico. Se ha simulado la influencia de la anisotropía (en la dirección y) en la reproducción y en la inhibición. Las simulaciones a_i ($i = 1,2$) corresponden, en el caso isotrópico, a un patrón de bandas. Las simulaciones c_i corresponden, en el caso isotrópico, a un patrón de simetría hexagonal. La anisotropía de reproducción selecciona franjas paralelas a la dirección de anisotropía y la anisotropía de inhibición selecciona franjas ortogonales a esa dirección. Las rayas paralelas son estáticas, mientras que las rayas ortogonales se mueven hacia arriba, es decir, en la dirección y positiva.

Fuente: Lefever, R., and Lejeune, O.: *On the origin of tiger bush*. Bulletin of Mathematical Biology (1997). 59(2), 263-294.

❖ Modelo Shnerb [4]

Es un modelo general y simple de la reacción de los arbustos de agua. Este modelo tiene en cuenta el "ruido" intrínseco, es decir, la amplificación de las fluctuaciones iniciales debido al tamaño mínimo necesario para la supervivencia de la flora perenne. El patrón resultante es desordenado pero robusto, por lo que puede considerarse como el equivalente reactivo de un vidrio. Aunque el concepto de energía libre, mínimos locales profundos y equilibrio térmico está ausente en los sistemas reactivos, todavía presenta un ejemplo de una ruptura espontánea de simetría hacia un estado metaestable desordenado y de larga vida. [4]

Para presentar el modelo, se comienza por su dinámica determinista y continua de dimensión cero ("flower pot"). Con el suministro de agua al sistema a una tasa R y el crecimiento continuo de la vegetación, la evolución temporal del sistema de arbustos de agua se describe mediante las siguientes ecuaciones de tasa no dimensionalizadas:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \omega B - \mu B \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = R - \omega - \lambda \omega B \quad (1.8)$$

Donde ω representa la densidad de agua disponible, B es la densidad de la biomasa de los arbustos, el término ωB representa el crecimiento de los arbustos ya que consumen

agua, mientras que $-\lambda\omega B$ es el consumo correspondiente de agua por los arbustos. μ es la "tasa de mortalidad" de la vegetación en ausencia de agua y el término $-\omega$ representa las pérdidas de agua por percolación y evaporación. [4]

Si bien la inestabilidad de Turing se caracteriza por una longitud de onda típica que establece que el tamaño lineal de la vegetación y los parches de suelo desnudo sean iguales, este modelo permite grupos de tamaño arbitrario, como se indica en la Figura 5.

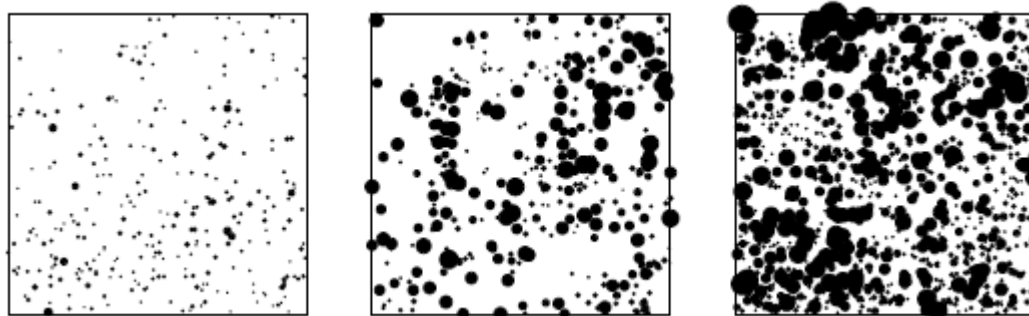


Figura 1.5 Resultados de mediciones de campo directo en tres ubicaciones diferentes a lo largo del gradiente de precipitación. La distribución de arbustos perennes (flora anual no incluida) se presenta para un área de 100 metros cuadrados en cada sitio. Cada mancha negra presenta un arbusto y el tamaño de una mancha es proporcional al tamaño del área del dosel.

Fuente: N.M. Shnerb, P. Sarah, H. Lavee, and S. Solomon; *Reactive glass and vegetation patterns*; *Physical Review Letter* (2003). 90. 038101.

❖ Modelo D'Odorico [5]

Aquí se muestra que las fluctuaciones de lluvia interanuales aleatorias existentes en los ecosistemas de tierras secas pueden desencadenar la formación de patrones de vegetación. Con este fin, se capitaliza la teoría de la alternancia estocástica no dinámica de la dinámica global, que muestra cómo los patrones pueden surgir de la conmutación aleatoria entre dos estados dinámicos. Interpretando así este cambio aleatorio como un efecto de las fluctuaciones de lluvia interanuales: en cada estado, el sistema experimenta diferentes dinámicas deterministas extendidas espacialmente, que, por sí mismas, tenderían a condiciones espacialmente homogéneas (por ejemplo, paisajes completamente desnudos o con vegetación). Esta teoría proporciona un mecanismo adecuado para mostrar cómo las

fluctuaciones climáticas interanuales aleatorias pueden inducir la formación de patrones en la vegetación de tierras secas a través del cambio controlado externamente entre condiciones favorables para el crecimiento o la descomposición de la vegetación. [5]

La variabilidad espacial y temporal de la biomasa de la vegetación, V (normalizada entre 0 y 1), se modela como una secuencia aleatoria de dos dinámicas deterministas que corresponden a la descomposición de la vegetación inducida por la sequía, y el crecimiento de la vegetación sin estrés. En ambos casos, la dinámica de la vegetación en cualquier punto, x (x, y), se expresa como la suma de dos términos que representan la dinámica local, $f_{1,2}(V(x, t))$, y las interacciones espaciales, $g(V(x, t), V(x', t))$, con la vegetación circundante existente en todos los puntos, x' , en la vecindad de x

$$\frac{dV(x,t)}{dt} = f_{1,2}(V(x, t)) + \zeta g(V(x, t), V(x', t)) \quad (1.9)$$

siendo ζ un coeficiente adimensional que determina la importancia relativa de la dinámica espacial versus la dinámica local. Se utilizan dos funciones diferentes, $f_1(V)$ y $f_2(V)$, para describir la dinámica local: se supone que la pérdida de vegetación que ocurre en condiciones de estrés hídrico es proporcional a la biomasa existente, mientras que el crecimiento no estresado de V se expresa por una ley logística.

Aquí se centra en el papel de las fluctuaciones climáticas en el proceso de formación de patrones. En particular, el parámetro P (es decir, la probabilidad de no estar en condiciones de estrés hídrico) aumenta a lo largo de un gradiente de lluvia y puede considerarse como una variable sustituta para la precipitación media anual. La figura 6 muestra la media y la desviación estándar de V en función de P .

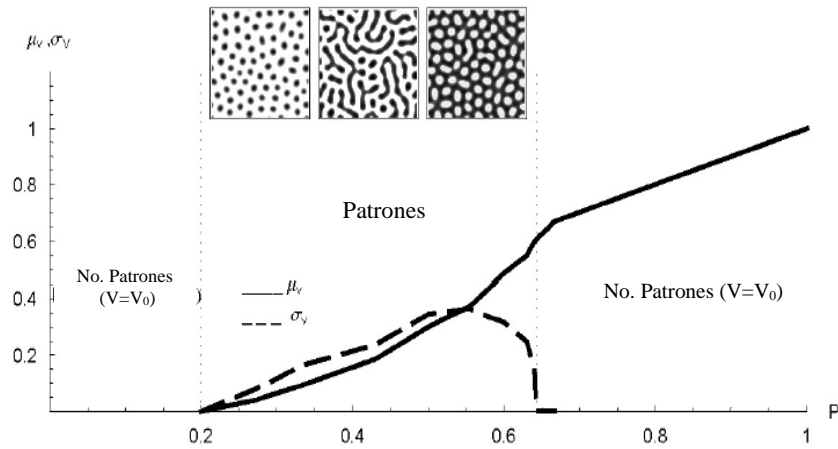


Figura 1.6 Dependencia de la media y la desviación estándar de V de la probabilidad, P , de no estar en condiciones de estrés hídrico. Para $0.2 < P < 0.64$, la desviación estándar espacial es mayor que cero, lo que sugiere la aparición de vegetación espacialmente heterogénea, es decir, la formación de patrones. Los patrones generados por el modelo se muestran en las inserciones e incluyen vegetación manchada, patrones laberínticos y huecos descubiertos en el suelo desnudo.

Fuente: D’Odorico, P., Laio, F., and Ridolfi, L.; *Vegetation patterns induced by random climate fluctuations*. Geophysical Research Letters (2006). 33, L19404.

❖ Modelo HilleRisLambers [6]

Es un modelo de un sistema de pastoreo semiárido que describe la dinámica del agua superficial, el agua del suelo y la densidad de las plantas en el tiempo y en el espacio mediante el uso de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales. Este enfoque permite modelar la dispersión de plantas y el intercambio neto de agua superficial y agua del suelo con las áreas circundantes. Se analiza el modelo utilizando un método desarrollado por Turing (1952) para demostrar la formación de patrones. [6]

El modelo describe la dinámica de tres variables de estado tanto en el tiempo como en el espacio: agua superficial, agua del suelo y densidad de plantas, todo el sistema modelo se define por tres ecuaciones diferenciales parciales para la densidad de la planta, el agua del suelo y el agua superficial, respectivamente:

$$\frac{\partial P(\vec{x}, t)}{\partial t} = c g_{max} \times \frac{W(\vec{x}, t)}{W(\vec{x}, t) + k_1} \times P(\vec{x}, t) - (d + \beta) P(\vec{x}, t) + D_p \left\{ \frac{\partial^2 P(\vec{x}, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 P(\vec{x}, t)}{\partial x_2^2} \right\} \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial W(\vec{x},t)}{\partial t} = \alpha O(\vec{x},t) \frac{P(\vec{x},t)+k_2 W_0}{P(\vec{x},t)+k_2} - g_{max} \times \frac{W(\vec{x},t)}{W(\vec{x},t)+k_1} \times P(\vec{x},t) - r_w W(\vec{x},t) + D_w \left\{ \frac{\partial^2 W(\vec{x},t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W(\vec{x},t)}{\partial x_2^2} \right\} \quad (1.11)$$

$$0 = R - \alpha O(\vec{x},t) \frac{P(\vec{x},t)+k_2 W_0}{P(\vec{x},t)+k_2} + D_0 \left\{ \frac{\partial^2 O(\vec{x},t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 O(\vec{x},t)}{\partial x_2^2} \right\} \quad (1.12)$$

La formación del patrón ocurre en el modelo dando condiciones iniciales espacialmente homogéneas. En la Figura 7 hay una imagen del plano de parámetros que muestra las combinaciones de herbivoría y dispersión de plantas para las cuales se producirá la formación de patrones de vegetación. La línea curva es una línea que separa combinaciones de parámetros que dan como resultado la formación de patrones de los que no lo hacen. La línea vertical es un límite que separa el plano del parámetro en un estado donde la vegetación puede existir, y un estado donde no puede existir vegetación. Juntos, estos dos límites delimitan tres estados del sistema: (1) cubierta vegetal cerrada, (2) suelo desnudo y (3) patrones de vegetación espacial. [6]

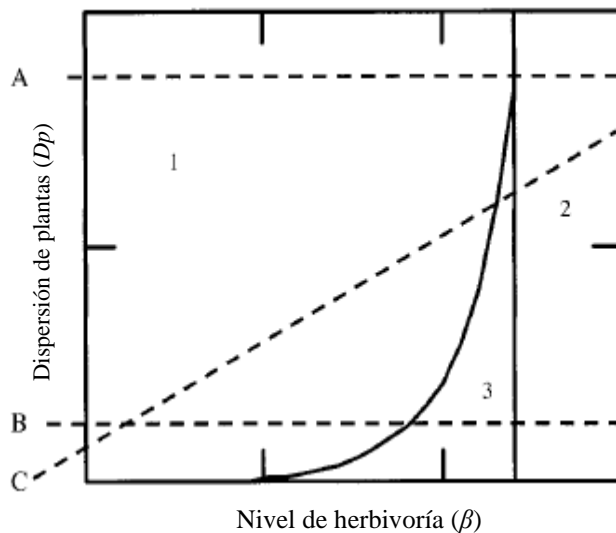


Figura 1.7 Imagen del plano de fase que muestra tres estados: (1) cubierta vegetal cerrada, (2) suelo desnudo y (3) formación de patrones. La línea discontinua A representa una alta dispersión de la planta: a medida que aumenta la herbivoría, la transición es del estado 1 al estado 2. La línea discontinua B representa una baja dispersión de la planta: a medida que la herbivoría aumenta la transición es del estado 1 al estado 3 al estado 2. La línea discontinua C representa el caso Cuando la dispersión de la planta aumenta con la herbivoría: no existe necesariamente una diferencia cualitativa entre la línea C y la línea B.

Fuente: HilleRisLambers, R., Rietkerk, M., van den Bosch, F., Prins, H. H. T. and de Kroon, H.; *Vegetation pattern formation in semi-arid grazing systems*. Ecology (2001). 82, 50-61.

❖ Modelo Hardenberg [7]

Es un modelo para la dinámica de la vegetación que involucra dos variables, la biomasa vegetal y el agua disponible para las plantas. El principal ingrediente nuevo en este modelo es la introducción de un término que simula la competencia de los parches de vegetación por el agua debido a la absorción de agua por las raíces. El modelo reproduce una amplia gama de patrones observados en regiones áridas y semiáridas, incluidas formas que aún no se han explicado, como los anillos. Usando este modelo, se estudian secuencias de estados de vegetación, a medida que aumenta el parámetro de precipitación, y se identifican rangos de precipitación donde coexisten diferentes estados estables. [7]

Se propone el siguiente modelo para la densidad de biomasa $n(x,t)$ y la densidad del agua subterránea $w(x,t)$:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\gamma w}{1+\alpha w} n - n^2 - \mu n + \nabla^2 n \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = p - (1 - \rho n)w - w^2 n + \delta \nabla^2 (w - \beta n) - v \frac{\partial (w - \alpha n)}{\partial x} \quad (1.14)$$

donde todas las cantidades están en forma no dimensional. El término $\frac{\gamma w}{1+\alpha w}$ en la primera ecuación describe el crecimiento de las plantas a un ritmo que crece linealmente con w para el suelo seco. El término $-\mu n$ representa mortalidad y herbivoría, y el término cuadrático $-n^2$ representa la saturación debido a los nutrientes limitados. La extensión de las plantas, tanto por reproducción clonal como por dispersión de semillas, está modelada por el término de difusión $\nabla^2 n$.

El tipo de patrón depende del rango de precipitación: manchas de vegetación en p relativamente bajo, rayas (o laberintos) en p intermedio y agujeros en una cobertura uniforme a valores de p relativamente altos. Estos patrones reflejan una autoorganización óptima del sistema con respecto a los recursos hídricos. Los patrones de puntos son los patrones preferidos a baja p ya que la absorción de agua de áreas desnudas adyacentes se puede hacer

en todas las direcciones. Las rayas, que tienen solo dos direcciones para extraer agua, necesitan valores de precipitación más altos.

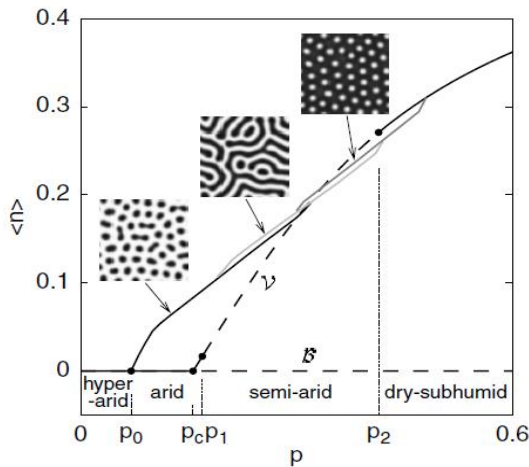


Figura 1.8 Biomasa espacialmente promediada $\langle n \rangle$ vs precipitación p para paisaje llano ($\nu = 0$). La línea B representa el estado desnudo $\langle n \rangle = 0$. La línea curva V designa el estado de vegetación uniforme. Las inserciones muestran patrones típicos asociados con las diferentes ramas de solución no uniforme denotadas por las líneas negras y grises.

Fuente: J. von Hardenberg, E. Meron, M. Shachak, Y. Zarmi; *Diversity of Vegetation Patterns and Desertification*, Physical Review Letters (2001); Vol. 87, No. 19, 198101.

❖ Modelo Kéfi [8]

En este modelo se investigó cómo la organización espacial de la vegetación está influenciada por el grado de estrés externo mediante la combinación de modelos y datos de campo de tres ecosistemas áridos mediterráneos en España, Grecia y Marruecos. En cada uno de estos ecosistemas, recolectaron datos en tres sitios que diferían con respecto a la presión de pastoreo del ganado. En cada uno de los nueve (3x3) sitios, analizaron el número y el tamaño de los parches de vegetación y graficaron el número de parches, $N(S)$, en función de sus tamaños, S . Ajustaron estas distribuciones del tamaño de parche a dos modelos diferentes: una ley de potencia, $N(S) = CS^{-\gamma}$, y una ley de potencia truncada, $N(S) = CS^{-\gamma}e^{-\frac{S}{S_x}}$, donde γ es el exponente de escala estimado del modelo, S_x el tamaño del parche (en centímetros) por encima del cual $N(S)$ disminuye más rápido que en una ley de potencia, y C es una constante. Para comprender los mecanismos que pueden ser responsables de la organización espacial de la vegetación, las distribuciones observadas se compararon con las distribuciones generadas por un modelo de autómata celular estocástico. [8]

Los resultados del modelo mostraron que, en los sistemas con baja presión de pastoreo, las interacciones positivas locales fuertes (es decir, la facilitación local fuerte y una

gran proporción de semillas localmente dispersas) condujeron a una distribución del tamaño del parche caracterizada por una ley de potencia (Fig. 9a). Cuando se disminuyó la intensidad de las interacciones positivas locales, la distribución del tamaño del parche se desvió de una ley de potencia (Fig. 9b, c). En otras palabras, se necesitan fuertes interacciones positivas locales en el modelo para producir una distribución de la ley de potencia a baja presión de pastoreo.

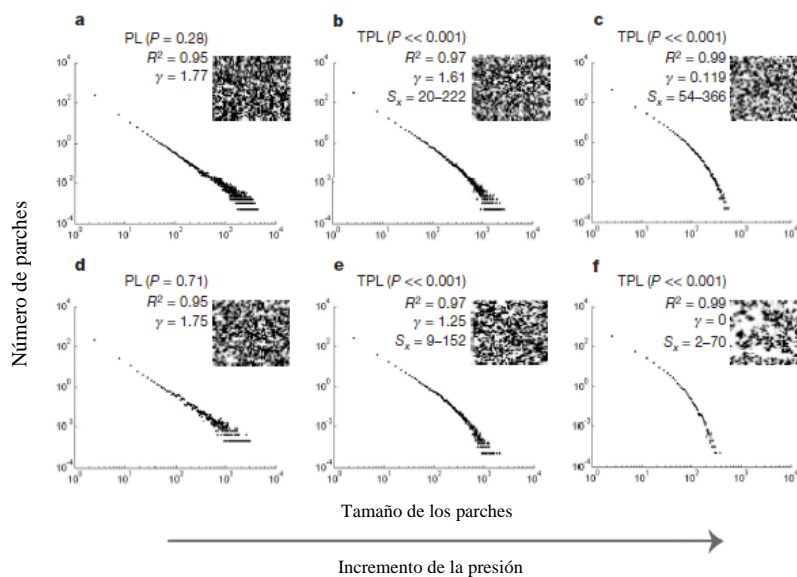


Figura 1.9 Efecto de las interacciones positivas locales y la presión de pastoreo en la distribución del tamaño del parche en el modelo. a – c, disminución de las interacciones positivas locales de izquierda a derecha. d – f, aumento de la presión de pastoreo de izquierda a derecha. Los recuadros son instantáneas del sistema al final de la simulación. Negro, vegetación; gris, recolonizable; blanco, degradado Ver Métodos para los valores de los parámetros.

Fuente: Kéfi, S., Rietkerk, M., Alados, C. L., Pueyo, Y., Papanastasis, V. P., ElAich, A., and de Ruiter, P.C. Spatial vegetation patterns and imminent desertification in Mediterranean arid ecosystems. *Nature*. (2007) 449, 213-217

❖ Modelo Quan-Xing [10]

Se presenta la derivación y el análisis de un modelo de ecuación diferencial parcial basado en una descripción empírica del movimiento dependiente de la densidad en mejillones, y se demuestra que es matemáticamente equivalente al modelo original de separación de fases de Cahn y Hilliard. Luego se comparan las predicciones de este modelo

con observaciones de lechos de mejillones reales y experimentos con la formación de patrones de mejillones en el laboratorio. [10]

Como el modelo describe la formación de parones en escalas de tiempo inferiores a 24 h, se puede ignorar el crecimiento y la mortalidad (como factores que afectan la densidad local del mejillón). Por lo tanto, los flujos locales de mejillones en cualquier lugar específico se pueden describir mediante la ecuación de conservación genérica:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\nabla \cdot J \quad (1.15)$$

Siguiendo tratamientos anteriores de difusión biológica como resultado del movimiento individual, se completa este término de difusión local con un término que explica el movimiento a larga distancia al incluir la difusión no local como $J_{nl} = \nabla(k\Delta M)$ con el coeficiente de difusión no local k . El proceso de difusión no local tiene una intensidad relativamente baja y, por lo tanto, el parámetro k es mucho menor en magnitud que el coeficiente de movimiento local en la ecuación. Ahora se pueden reunir ambos flujos en la tasa de flujo neto total en la ecuación, $J = J_v + J_{nl}$, para definir la ecuación de conservación reescalada general de la siguiente manera: [10]

$$\frac{\partial m}{\partial t} = D_0 \nabla [g(m) - k_l \nabla(\Delta m)] \quad (1.16)$$

Aquí, $g(m) = v(m)(v(m) + m \frac{\partial v(m)}{\partial m})$, donde $v(m) = m^2 - \beta m + 1$ es una velocidad reescalada. D_0 es un coeficiente de difusión reescalado que describe el movimiento medio del mejillón, y k_l es el coeficiente de difusión no local reescalado.

La última ecuación produce una amplia variedad de patrones espaciales con una densidad creciente de mejillones, que están muy de acuerdo con los patrones observados en el campo, así como en experimentos de laboratorio. Los resultados teóricos demuestran que, con el valor específico de β determinado en el experimento, pueden surgir cuatro tipos de patrones espaciales, dependiendo de la densidad del mejillón. Cuando el número de

mejillones se incrementa desde un valor bajo, se desarrolla una sucesión de patrones desde puntos escasamente distribuidos (Fig. 10E) hasta un "patrón de laberinto" (Fig. 10F) y un "patrón de separación" (Fig. 10G), y finalmente los patrones se debilitan antes de desaparecer (Fig. 10H). Tenga en cuenta que los resultados teóricos coinciden estrechamente con los patrones observados en el campo (Fig. 10 A – D).

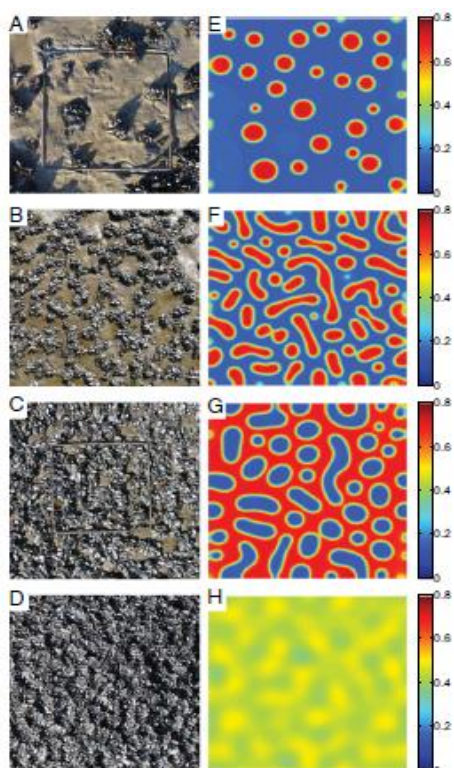


Figura 1.10 Formación de patrones de mejillones en el campo y resultados numéricos para simulaciones 2D con diferentes densidades. (A – D) Patrones de mejillones en el campo que varían respectivamente de grupos aislados, "laberinto abierto", "patrón de separación" a un lecho denso, casi homogéneo. (E – H). Los cambios en el patrón espacial simulado en respuesta a la densidad global cambiante siguen de cerca los patrones observados en el campo. La barra de color muestra los valores de la densidad adimensional m de la ecuación.

Fuente: Liu, Quan-Xing, et al. "Phase separation explains a new class of self-organized spatial patterns in ecological systems." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 110.29 (2013): 11905-11910.

A continuación, se muestra una tabla con las características principales de cada modelo descrito anteriormente, cuya finalidad es mostrar una comparación más rigurosa entre ellos, resaltando así, las cualidades que los hacen tan diferentes, pero al mismo tiempo, las similitudes que conlleva este tipo de estudio en general.

Referencia	VARIABLES	Parámetros	Distribución vegetal	Modelo
[1]	Densidad de biomasa (b) Densidad del agua-suelo (w) Altura (h)	Tasa de pérdida de biomasa, evaporación reducida, dispersión de semillas y transporte agua-suelo.	Puntos, rayas, huecos.	Ecuaciones (1.1) (1.2)
[2]	Densidad de biomasa (B) Densidad del agua-suelo (W) Altura (H)	Biomasa máxima, tasa de pérdida de biomasa, tasa de evaporación agua – suelo, reducción en la tasa de evaporación agua-suelo, tasa de precipitación y coeficiente de fricción.	Puntos, rayas, huecos.	Ecuaciones (1.3) (1.4) (1.5)
[3]	Densidad de vegetación ($c(s,t)$)	Longitud de difusión, densidad compacta, longitud de inhibición, constante de mortalidad y longitud de toxicidad.	Rayas con orientación uniforme, rayas con dos orientaciones, manchas de alta densidad.	Ecuación (1.6)
[4]	Densidad del agua (w) Densidad de biomasa (B)	Índice de mortalidad, velocidad.	Puntos	Ecuaciones (1.7) (1.8)
[5]	Variabilidad espacial y temporal de la biomasa vegetal (V)	Coficiente adimensional, tasa de mortalidad, tasa de reproducción.	Vegetación manchada, patrones laberínticos y huecos descubiertos.	Ecuación (1.9)
[6]	Agua superficial (O) Agua del suelo (W) Densidad de las plantas (P)	Absorción de agua específica máxima, saturación media, pérdida específica de densidad, dispersión de plantas,		Ecuaciones (1.10) (1.11) (1.12)

		proporción de agua superficial disponible para infiltración, velocidad a la que aumenta la infiltración, coeficiente de difusión.		
[7]	Densidad de biomasa (n) Densidad del agua subterránea (w)	Efectos de retroalimentación positiva del agua y la biomasa.	Manchas, laberintos o rayas, agujeros.	Ecuaciones (1.13) (1.14)
[10]	Densidad (M)	Coficiente de difusión y difusión no local	Cúmulos aislados, laberintos abiertos	Ecuaciones (1.15) (1.16)

Tabla 1.1 Características principales de los modelos matemáticos publicados hasta la actualidad.

A menudo 'se violan' las teorías racionales para recurrir a algunos modelos truncados. Si se puede avanzar en la comprensión de los procesos dentro de estos modelos, se podrían completar, si es necesario, y obtener una descripción cuantitativa más exacta. Esto ilustra la distinción entre enfoques físicos y formalmente matemáticos. Un enfoque físico cualitativo a menudo arroja conclusiones definitivas para problemas que actualmente no pueden resolverse rigurosamente. Con frecuencia, los físicos, los químicos y los biólogos son los que encuentran este tipo de problemas tan complejos.

Capítulo 2. Metodología

2.1 Modelo Hardenberg-Levefer

El modelo propuesto nos da una forma de entender la formación de patrones de vegetación de una manera distinta a la mencionada hasta ahora en los modelos matemáticos que se estudiaron en el Capítulo 1, este modelo es un sistema de reacción-difusión cuyas observables son la densidad de la distribución de biomasa (η) y la humedad (ω).

La ecuación de difusión es demasiado simple para explicar la formación de patrones periódicos. Formar un patrón requiere crear homogeneidades espaciales, por el contrario, la ecuación de la difusión las destruye por un proceso de uniformización. Estos patrones se pueden deber a reacciones químicas o procesos biológicos, por ejemplo, a interacciones o también de manera espontánea, es por eso por lo que, al considerar ambos procesos, reacción y difusión, con ciertas condiciones de frontera tenemos un sistema de reacción-difusión, estos sistemas se aplican a la modelación de procesos tanto químicos como dinámicos de naturaleza no química.

En este modelo se emplean ecuaciones diferenciales parciales no lineales. La primera ecuación de este sistema modela propiedades de η como la forma de su reproducción, la difusión espacial de la misma y las fuentes de recursos que poseen dependiendo el entorno en el que se encuentran. Además, la segunda ecuación del modelo considera las propiedades que tiene ω tales como, la evotranspiración de las plantas, una fuente de saturación de agua y la difusión espacial de ω influyendo sobre η .

Si consideramos un sistema descrito por un campo escalar $\psi(\vec{r}, t)$, que representa la biomasa-desertificación, según el problema a modelar. Suponemos que la relación de dispersión que describe la parte lineal del sistema es la siguiente:

$$\sigma = \epsilon - \frac{1}{k_0^4} (k_0^2 - k^2)^2 \quad (2.1)$$

donde ϵ y k_0 son dos parámetros fijos. Aparecen dos tipos de comportamientos muy diferentes. Los modos estables decrecen rápidamente; en cambio, los modos inestables crecen lentamente y por lo tanto domina la dinámica. Este mecanismo favorece entonces la formación de patrones o heterogeneidades espaciales de número de onda bien definido.

Ahora, la ecuación diferencial lineal con derivadas parciales para que el campo $\psi(\vec{r}, t)$ tenga la relación de dispersión es $\partial_t \psi = \epsilon \psi - \frac{1}{k_0^4} (k_0^2 - k^2)^2 \psi$ en la cual, para evitar que los modos inestables exploten exponencialmente con el tiempo será necesario saturarlos con un término no lineal cúbico, de manera que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \epsilon \psi - \frac{1}{k_0^4} (k_0^2 - k^2)^2 \psi - \psi^3 \quad (2.2)$$

Esta ecuación fue introducida por Swift y Hohenberg (1977), es un modelo reducido, sin embargo, produce patrones de bandas bastante realistas. La ecuación (2) puede producir patrones hexagonales si se le añade un término cuadrático ($c\psi^2$) [23].

Para la construcción del modelo, tal y como se mencionó con anterioridad se definen dos variables importantes, $\eta(\vec{r}, t)$ y $\omega(\vec{r}, t)$. Donde $\eta(\vec{r}, t)$ representa la densidad de la distribución de biomasa y $\omega(\vec{r}, t)$ representa la humedad, dándole así al modelo un enfoque no lineal más completo. Siguiendo la forma de la ecuación (2) tenemos que:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = M - K\eta + g\eta^2 - \eta^3 + \Gamma \nabla^2 \eta + \frac{1}{2} \Gamma \nabla^4 \eta \quad (2.3)$$

en donde el término M está asociado a una fuente/perdida de densidad de biomasa estacionaria, el término $K\eta$ explica la mortalidad y los herbívoros, η^3 impide la separación de fases, $\Gamma \nabla^2 \eta$ es la difusión espacial de biomasa y el término $\frac{1}{2} \Gamma \nabla^4 \eta$ es un término de difusión de largo alcance de la densidad de biomasa [9].

Como buscamos un modelo más realista, consideramos que la cantidad de agua que tienen las plantas no es constante, detalle que nos lleva a acoplar la ecuación para la humedad al modelo y por lo tanto a la ecuación de la densidad de biomasa, de manera que:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -M - K\eta + g\eta^2 - \eta^3 + \varepsilon\omega^2\eta + \Gamma\nabla^2\eta + \frac{1}{2}\Gamma\nabla^4\eta \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = p - (1 - \rho\eta)\omega - \varepsilon\omega^2\eta + \delta\nabla^2(\omega - \beta\eta) - v\frac{\partial}{\partial t}(\omega - \alpha\eta) \quad (2.5)$$

donde p es la precipitación anual; $-(1 - \rho\eta)\omega$ es el termino de perdida por evaporación, $\delta\nabla^2(\omega - \beta\eta)$ es el termino que modela la difusión de agua mediante absorción de raíces de la planta, además, $\varepsilon\omega^2\eta$ es el termino de acoplamiento que muestra la ganancia/perdida por transpiración del agua en las plantas. Finalmente, el termino $v\frac{\partial}{\partial t}(\omega - \alpha\eta)$ muestra la perdida de agua por filtración debido a la pendiente del suelo v , la cual puede ser una función espacial [7].

2.2 Esbozo del análisis de estabilidad lineal

Tal y como se mencionó en la sección anterior, estamos en presencia de un sistema no lineal el cual tiene que ser resuelto numéricamente, esto calculando los puntos fijos del sistema de ecuaciones de nuestro modelo. El cálculo de los puntos fijos es la obtención de las raíces de los términos no lineales de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

Tomamos en cuenta las ecuaciones (2.4) y (2.5), considerando que $\frac{\partial \eta}{\partial t} = F(\eta, \omega)$ y $\frac{\partial \omega}{\partial t} = G(\eta, \omega)$ y tomando únicamente los términos no lineales nuestro sistema de ecuaciones toma la siguiente forma:

$$F(\eta, \omega) = -\eta^3 + g\eta^2 + (\varepsilon\omega^2 - K)\eta + M \quad (2.6)$$

$$G(\eta, \omega) = -\varepsilon\omega^2\eta - (1 - \rho\eta)\omega - p \quad (2.7)$$

El estado estable del sistema está en el punto $(\eta, \omega) = (\eta_0, \omega_0)$, de manera que igualando a cero nos queda $F(\eta_0, \omega_0) = 0$ y $G(\eta_0, \omega_0) = 0$, entonces para calcular el punto estable:

- Caso $F(\eta_0, \omega_0) = 0$.

$$-\eta^3 + g\eta^2 + (\varepsilon\omega^2 - K)\eta + M = 0 \quad (2.8)$$

Podemos ver que la ecuación (2.8) es de la forma $-\eta^3 + a\eta^2 + b\eta - c = 0$ la cual, tiene que ser resuelta numéricamente.

- Caso $G(\eta_0, \omega_0) = 0$.

$$-\varepsilon\omega^2\eta - (1 - \rho n)\omega - p = 0 \quad (2.9)$$

Podemos ver que la ecuación (2.9) es de la forma $-a\eta^2 - b\eta + c = 0$ de manera que, podemos resolverla fácilmente usando la formula general para resolver ecuaciones cuadráticas, obteniendo como solución lo siguiente:

$$\omega_{\pm} = -\frac{(1-\rho n)}{2\varepsilon\eta} \pm \frac{\sqrt{(1-\rho n)^2 + 4\eta p}}{2\varepsilon\eta} \quad (2.10)$$

Ahora, sea $\gamma = (1 - \rho n)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{(\gamma)}{2\varepsilon\eta} + \frac{\sqrt{(\gamma)^2 + 4\eta p}}{2\varepsilon\eta} \\ \omega_2 &= -\frac{(\gamma)}{2\varepsilon\eta} - \frac{\sqrt{(\gamma)^2 + 4\eta p}}{2\varepsilon\eta} \end{aligned} \quad (2.11)$$

El siguiente paso es calcular los valores propios, esto suponiendo que por simplicidad se puede tener una solución en forma de una perturbación, de manera que siempre sea posible

obtener una aproximación lineal de las funciones $F(\eta_0(x, y, t), \omega_0(x, y, t))$ y $G(\eta_0(x, y, t), \omega_0(x, y, t))$ mediante el Jacobiano ($J(\eta_0, \omega_0)$). Es decir, se puede linealizar los términos no lineales mediante:

$$J(\eta_0, \omega_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \eta} & \frac{\partial F}{\partial \omega} \\ \frac{\partial G}{\partial \eta} & \frac{\partial G}{\partial \omega} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Y a partir de este podemos obtener los valores propios (λ) del siguiente determinante, el cual considera la difusión:

$$\left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - J(\eta_0, \omega_0) + k^2 \begin{pmatrix} D_\eta & 0 \\ 0 & D_\omega \end{pmatrix} \right| = 0 \quad (2.13)$$

Ahora, tomando en cuenta los datos de nuestro modelo, tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \eta} &= -3\eta^2 + 2g\eta + \varepsilon\omega^2 - K & \text{y} & & \frac{\partial F}{\partial \omega} &= 2\varepsilon\omega\eta \\ \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \omega^2 & \text{y} & & \frac{\partial G}{\partial \omega} &= 2\omega\eta - (1 - \rho n) \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Supongamos que se tiene una solución en forma de perturbación tal que:

$$\left. \begin{aligned} \eta(\vec{r}, t) &= \eta_0 + \delta\eta(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} & \text{donde} & & \delta\eta(t) &= \delta N e^{\lambda t} \\ \omega(\vec{r}, t) &= \omega_0 + \delta\omega(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} & \text{donde} & & \delta\omega(t) &= \delta W e^{\lambda t} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Calculamos el gradiente:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \eta(\vec{r}, t) &= \nabla^2 (\eta_0 + \delta\eta(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}) = 0 + \delta\eta(t)\nabla^2 (e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}) = -\delta\eta(t)k^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ &= -k^2(\eta(\vec{r}, t) - \eta_0) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Análogamente para ω tenemos que:

$$\nabla^2 \omega(\vec{r}, t) = -k^2(\omega(\vec{r}, t) - \omega_0) \quad (2.17)$$

Ahora, resolviendo para el biarmónico obtenemos que:

$$\nabla^4 \eta(\vec{r}, t) = k^4(\eta(\vec{r}, t) - \eta_0) \quad (2.18)$$

De manera que, volviendo al determinante dado por la expresión (2.13) tenemos:

$$\left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - J(\eta_0, \omega_0) + k^2 \begin{pmatrix} \Gamma(1 - k^2) & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \right| = 0 \quad (2.19)$$

Resolviendo (2.19) analíticamente obtenemos:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \eta} & \frac{\partial F}{\partial \omega} \\ \frac{\partial G}{\partial \eta} & \frac{\partial G}{\partial \omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k^2 \Gamma(1 - k^2) & 0 \\ 0 & k^2 \delta \end{pmatrix} \right| = 0 \\ &\Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \lambda + k^2 \Gamma(1 - k^2) - \frac{\partial F}{\partial \eta} & -\frac{\partial F}{\partial \omega} \\ -\frac{\partial G}{\partial \eta} & \lambda + k^2 \delta - \frac{\partial G}{\partial \omega} \end{array} \right| = 0 \\ &\Rightarrow \left(\lambda + k^2 \Gamma(1 - k^2) - \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) \left(\lambda + k^2 \delta - \frac{\partial G}{\partial \omega} \right) - \frac{\partial F}{\partial \omega} \frac{\partial G}{\partial \eta} = 0 \\ &\Rightarrow \lambda^2 + \lambda \left(k^2 (\delta + \Gamma(1 - k^2)) - \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \omega} \right) \right) + k^4 \delta \Gamma(1 - k^2) \\ &\quad - k^2 \left(\delta \frac{\partial F}{\partial \eta} + \Gamma(1 - k^2) \frac{\partial G}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial G}{\partial \omega} - \frac{\partial F}{\partial \omega} \frac{\partial G}{\partial \eta} = 0 \quad (2.20) \end{aligned}$$

Ahora, sabemos que:

$$\begin{aligned}
Tr[J(\eta_0, \omega_0)] &= \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \omega} \\
D_\eta &= \Gamma(1 - k^2) \\
D_\omega &= \delta \\
J(\eta_0, \omega_0) &= \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial G}{\partial \omega} - \frac{\partial F}{\partial \omega} \frac{\partial G}{\partial \eta}
\end{aligned}
\tag{2.21}$$

Por lo que, sustituyendo lo anterior en la ecuación (2.20) tenemos:

$$\lambda^2 + \lambda(k^2(D_\eta + D_\omega) - Tr[J(\eta_0, \omega_0)]) + k^4 D_\eta D_\omega - k^2 \left(D_\omega \frac{\partial F}{\partial \eta} + D_\eta \frac{\partial G}{\partial \omega} \right) + J(\eta_0, \omega_0) = 0 \tag{2.22}$$

Podemos ver que la ecuación (2.22) es de la forma $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ de manera que, al resolverla usando la formula general para ecuaciones cuadráticas, obtenemos como solución lo siguiente:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(Tr[J(\eta_0, \omega_0)] - k^2(D_\eta + D_\omega) \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} (k^2(D_\eta + D_\omega) - Tr[J(\eta_0, \omega_0)]) \right)^2 - k^4 D_\eta D_\omega + k^2 \left(D_\omega \frac{\partial F}{\partial \eta} + D_\eta \frac{\partial G}{\partial \omega} \right) - J(\eta_0, \omega_0)} \tag{2.23}$$

2.3 Método numérico

En esta sección, el objetivo es considerar el comportamiento espacio temporal en las ecuaciones diferenciales parciales no lineales, necesarias para resolver el modelo numéricamente. La solución del sistema de reacción-difusión se realiza mediante algún método numérico para la parte temporal, además de una expresión discretizada para el operador de Laplace utilizando la fórmula de segundo orden de la segunda derivada centrada. Se utilizó el método de Euler para considerar una perturbación infinitesimal que influye en la generación de los patrones de vegetación. Las condiciones o reglas de la dinámica pueden

considerarse arbitrarias, sin embargo, pueden ser establecidas en términos para construir el modelo de algún sistema físico, biológico, químico, etc [17].

Para ver el impacto de los términos espaciales, laplacianos y el termino biarmonico, consideramos una sola perturbación. Para la parte espacial del sistema de ecuaciones de reacción-difusión se discretiza el operador Laplaciano usando diferencia finita central a partir de la serie de Taylor:

$$\nabla^2 \eta(x, y) \cong \frac{1}{h^2} [\eta(x + h, y) + \eta(x - h, y) + \eta(x, y + h) + \eta(x, y - h) - 4\eta(x, y)] \quad (2.24)$$

$$\nabla^2 \omega(x, y) \cong \frac{1}{h^2} [\omega(x + h, y) + \omega(x - h, y) + \omega(x, y + h) + \omega(x, y - h) - 4\omega(x, y)] \quad (2.25)$$

Después se reescala la parte espacial, tal que al discretizar el laplaciano h se debe obtener una cantidad pequeña para obtener una buena aproximación. Por otra parte, el valor de $\nabla^2 \eta(x, y)$ y $\nabla^2 \omega(x, y)$ depende de los valores de los puntos vecinos cercanos a (x_i, y_i) . A partir de esta idea debemos introducir arreglos cuyas celdas tienen estados definidos por condiciones iniciales aleatorias. Además, por los parámetros K y ε , que representan la cantidad de lluvias por año y la acumulación de humedad por plantas respectivamente. Los estados de las celdas evolucionan de manera que, en la parte temporal, satisfacen las reglas asociadas con las ecuaciones diferenciales (2.4) y (2.5) mientras que, en la parte espacial, sus estados dependen explícitamente de los estados de las celdas vecinas, de la forma presentada en (2.24) y en (2.25).

La aproximación (2.24) y (2.25) del operador Laplaciano es válida, con h pequeña, para funciones bien portadas, pero, al iniciar la dinámica a partir de estados aleatorios discretos y distribuidos en cada una de las celdas de los arreglos.

Cuando realizamos la discretización espacial estamos sustituyendo la dinámica infinito-dimensional de la ecuación diferencial parcial por una dinámica en dimensión finita. El estudio de la legitimidad de esta sustitución, en sí, es ya un objetivo interesante no sólo desde un punto de vista práctico sino también en el plano conceptual. Una vez justificada la

aptitud de esta primera discretización espacial, lo cual pasa obviamente por un análisis de la convergencia a medida que el paso del mallado espacial en el arreglo tiende a cero, nos encontramos frente a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto hace que se puedan obtener con facilidad aproximaciones numéricas y visualizaciones gráficas de las soluciones de dicho sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y, por consiguiente, de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales, lo cual supone sin duda una razón importante para proceder de este modo.

Encontramos así, que usando condiciones de frontera periódicas para una $h = \pi/4$ para una matriz u tenemos:

$$\nabla^2 u_{i,j}^{k,t} = u_{i,j+1}^{k,t} + u_{i,j-1}^{k,t} + u_{i+1,j}^{k,t} + u_{i-1,j}^{k,t} - 4u_{i,j}^{k,t} \quad (2.26)$$

Donde, el símbolo $u_{i,j}^{k,t}$ representa el valor al tiempo t de la celda (i,j) de la variable u^k , que se obtiene del algoritmo de solución de las ecuaciones (2.4) y (2.5).

En este esquema cada elemento de matriz evoluciona en el tiempo de acuerdo con una regla general, es decir, si la ecuación diferencial del sistema de ecuaciones para la variable u^k tiene la forma

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} = F^k(u^1, \dots, u^k, \dots, u^m, \{\mu_s\}) + D_k \nabla^2 u^k + D_k \nabla^4 u^k \quad (2.27)$$

en donde $\{\mu_s\}$ representa el conjunto de parámetros del sistema y $k = 1, 2, \dots, m$.

Entonces para el caso del método de Euler, el esquema de evolución en cada sitio de la malla será de la forma:

$$u_{i,j}^{k,t+1} = u_{i,j}^{k,t} + \Delta t [F^k(u_{i,j}^{1,t}, \dots, u_{i,j}^{k,t}, \dots, u_{i,j}^{m,t}, \{\mu_s\}) + D_k \nabla^2 u_{i,j}^{k,t} + D_k \nabla^4 u_{i,j}^{k,t}] \quad (2.28)$$

Donde $\Delta t \ll 1, t = 0.1, \dots$ y el término laplaciano esta dado por (2.26) [17].

Capítulo 3. Resultados y Discusión

3.1 Simulación de la dinámica de formación de patrones de vegetación.

Para captar los mecanismos de autoorganización de la densidad de biomasa en condiciones ambientales isotrópicas se han desarrollado dos tipos de enfoques. Estos se diferencian en que uno de ellos se centra en el nivel del parche de vegetación y los procesos de transporte de agua por escurrimiento por encima del suelo y difusión subterránea [6], mientras que el otro se enfoca en el nivel de plantas individuales y las propiedades que diferencian las estructuras de plantas por encima y por debajo del suelo como mediadores de la facilitación y la competencia [3].

Según el primer enfoque, a continuación se muestran los resultados numéricos obtenidos mediante el método de diferencia finita explicado en el capítulo 2 y aproximando las derivadas espaciales de segundo orden con la derivada numérica centrada del modelo de Hardenberg - Lefever en un arreglo cuadrado compuesto de 640 x 640 nodos formada de submallas de 128 x 128, variando los parámetros de control K con un paso dK en el intervalo $[0.01,0.1]$, ϵ con un paso $d\epsilon$ en el intervalo $[-0.07,-0.04]$ y con un paso de tiempo $dt=0.001$.

Tal y como se mencionó anteriormente, la solución numérica de las ecuaciones del modelo propuesto se obtuvo variando dos parámetros de control. Nuestro parámetro K que indica la cooperatividad del sistema y tomó valores en el intervalo $[0.44,1.44]$, mientras que el parámetro de acoplamiento que modula Lotka- Volterra fue evaluado para valores de ϵ en el intervalo $[-1.23,0.6]$. Los valores para los parámetros restantes son fijos tales que: $M = 0.1, p = 0.4, g = 0, \Gamma = 0.88, \gamma = 0$ y $\rho = 0.5, 1, 1.5, 2$. Sin embargo, es importante mencionar que, al cambiar el valor de M, p y ρ los resultados que se obtienen no cambian significativamente, mientras que, al cambiar los valores de g y γ las condiciones del modelo de Hardenberg – Lefever se modifican, llevando a este a una fase de desertificación.

Obtuvimos la solución numérica del modelo mediante la simulación computacional implementada en el software Python y sus librerías (numpy, scipy, sympy, tkinter, etc.), la programación del modelo fue elaborada en base al sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales (2.4) y (2.5), en las cuales se tomó en cuenta que $\rho \neq \varepsilon$, esto con el fin de evitar que el modelo se fuera a una fase de desertificación,

La simulación computacional se llevó a cabo haciendo la respectiva variación de los parámetros de control K en el eje x y ε en el eje y , mostrando así las soluciones numéricas para 100,000 iteraciones del modelo. Cada patrón multimallas representa la evolución temporal de la formación de una zona de biomasa – desertificación; la **Figura 3.1** muestra una fase de desertificación tendiendo a una fase de baja densidad, mostrando así una morfología de patrones de puntos. En la **Figura 3.2** se localizó una fase de vegetación uniforme tendiendo a una fase de desertificación y en la **Figura 3.3** se encontraron una diversidad de patrones definidos por cambios de fase desde un patrón de desertificación a uno de tripas, puntos y huecos. Como se puede observar en las figuras, la solución numérica del patrón multimallas de humedad es una réplica exacta del patrón multimallas de biomasa – desertificación. En cada una de las simulaciones se fue variando el paso $d\varepsilon$ y el paso dK con el fin de llegar a un escenario favorable de biomasa, es decir, para que la fase de desertificación no fuera la dominante obteniendo como resultado extra una fase clasificada como fase de dunas.

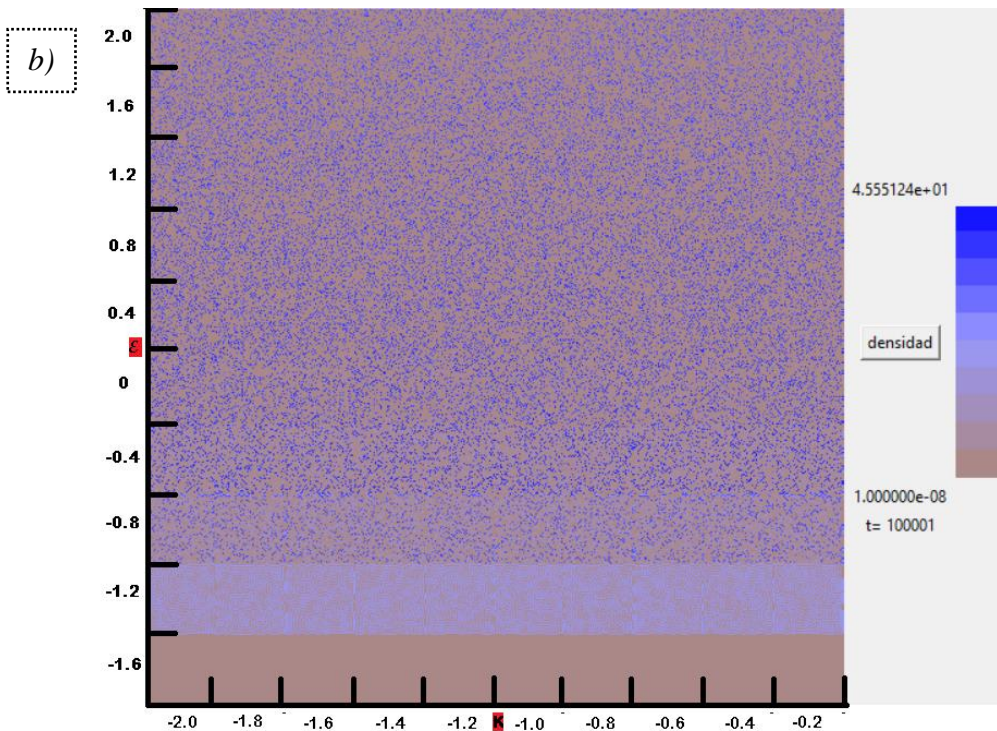
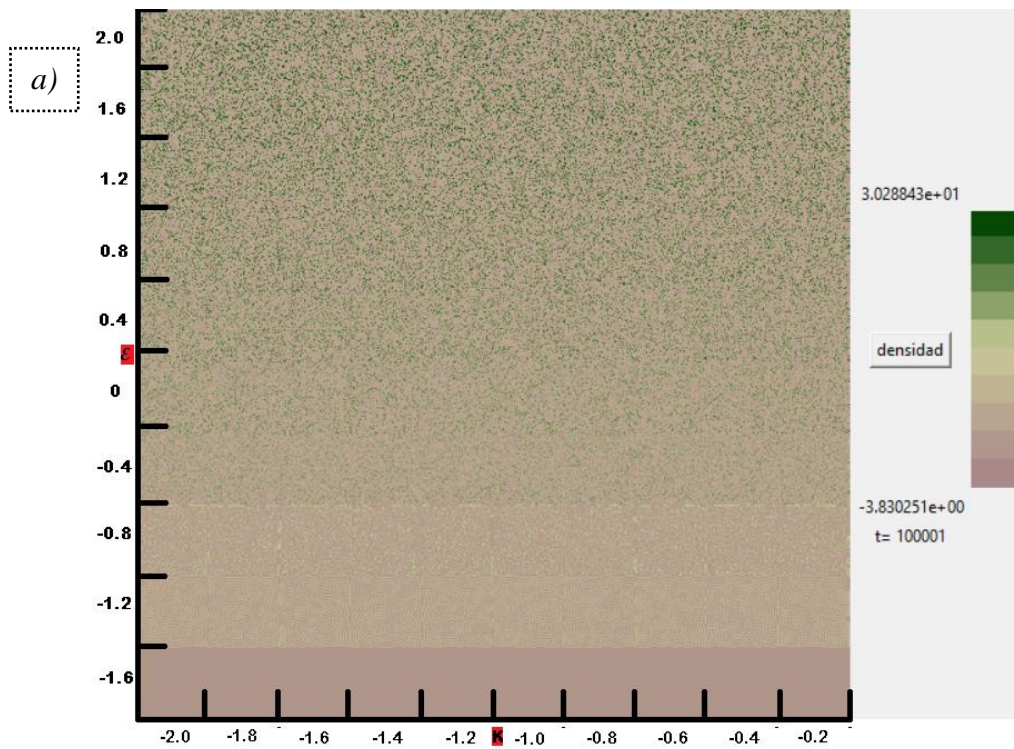


Figura 3.1 *a)* Patrón multimallas para la distribución de biomasa, *b)* Patrón multimallas para la distribución de humedad, ambos con valores $\varepsilon_0 = 0.6$ en el intervalo $[0.6, 0.06]$, $d\varepsilon = -0.06$, $\rho = 2$, $K_0 = 0.54$ en el intervalo $[0.54, 0.9]$, $dK = 0.1$, $p = 0.4$, $M = 0.1$, $\Gamma = 0.88$, $\gamma = 0$

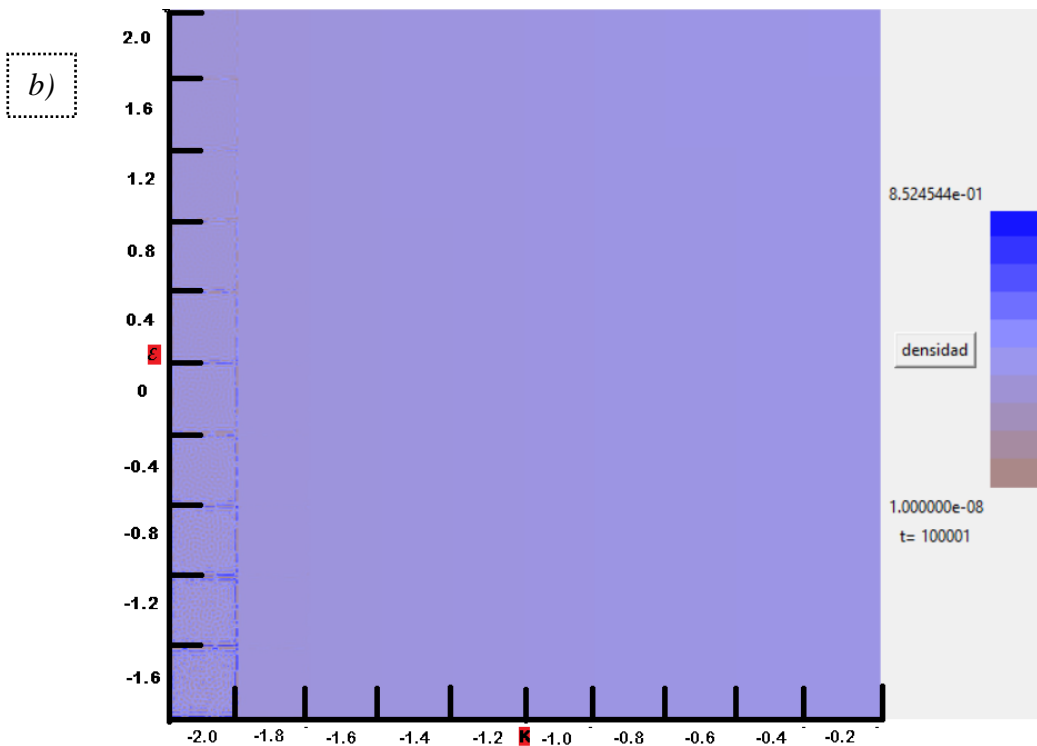
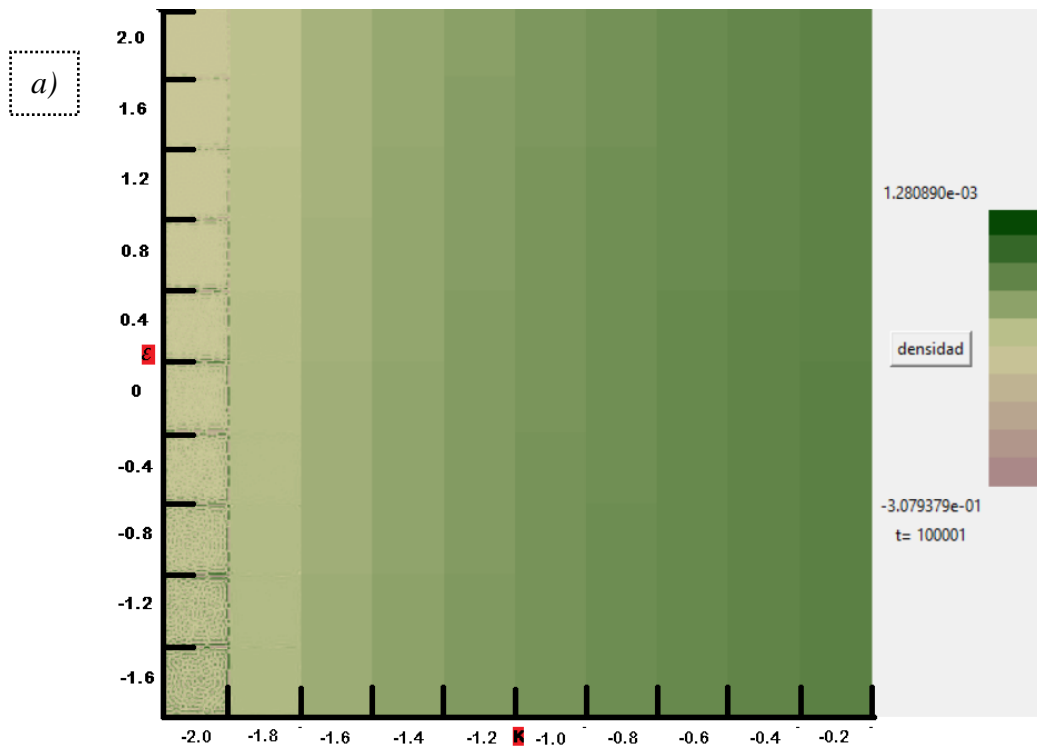


Figura 3.2 a) Patrón multimallas para la distribución de biomasa, b) Patrón multimallas para la distribución de humedad, ambos con valores $\varepsilon_0 = -0.6$ en el intervalo $[-0.6, -1.23]$, $d\varepsilon = -0.07$, $\rho = 2$, $K_0 = 0.54$ en el intervalo $[0.54, 0.9]$, $dK = 0.1$, $p = 0.4$, $M = 0.1$, $\Gamma = 0.88$, $\gamma = 0$.

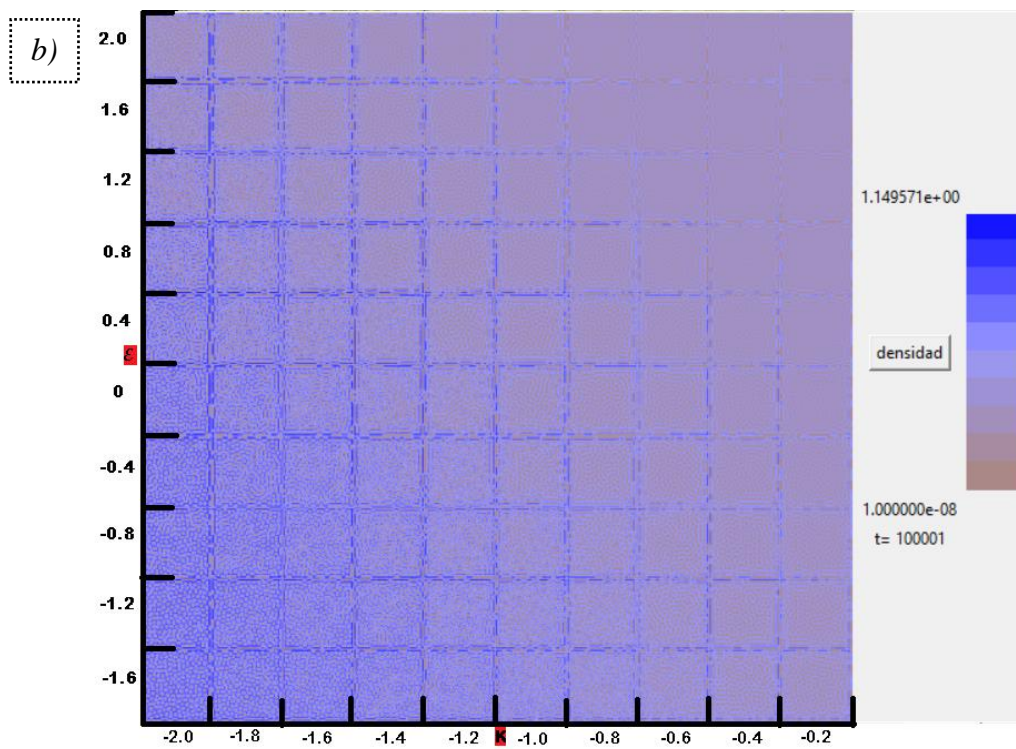
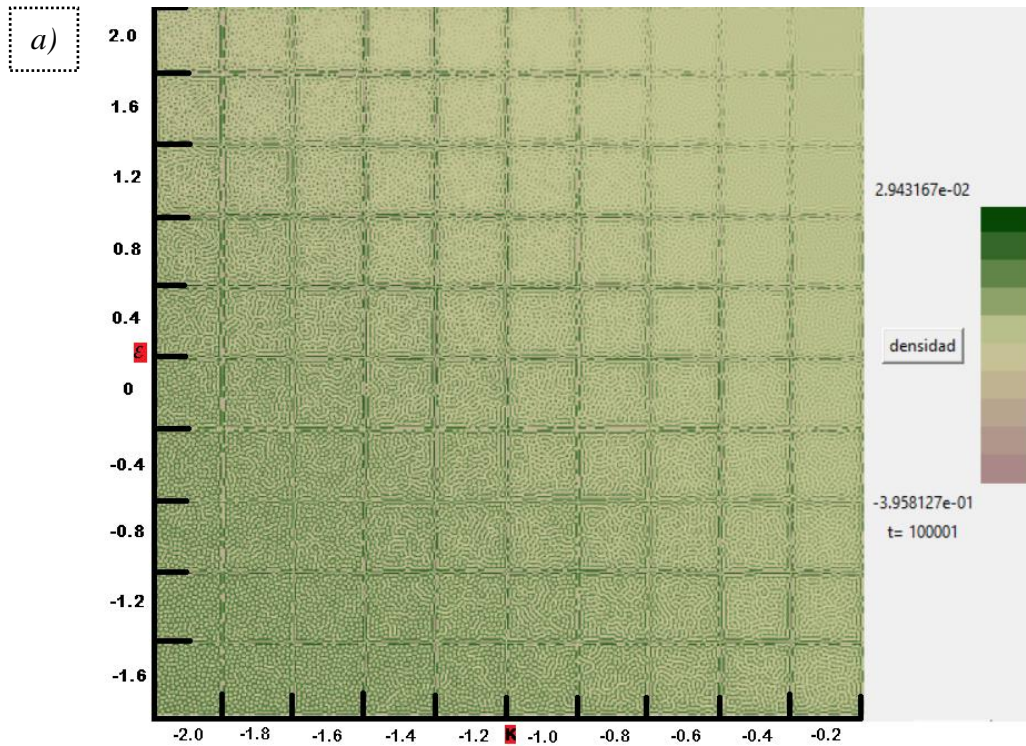


Figura 3.3 a) Patrón multimallas para la distribución de biomasa, b) Patrón multimallas para la distribución de humedad, ambos con valores $\varepsilon_0 = -0.6$ en el intervalo $[-0.6, -1.23]$, $d\varepsilon = -0.07$, $\rho = 2$, $K_0 = 0.44$ en el intervalo $[0.44, 0.53]$, $dK = 0.01$, $p = 0.4$, $M = 0.1$, $\Gamma = 0.88$, $\gamma = 0$.

3.2 Formación de patrones: fase de desertificación, laberintos, puntos, huecos y vegetación uniforme

A continuación, se muestran los resultados de una prueba de robustez, para comprobar si la dimensión del arreglo afecta la morfología del patrón. Variando los parámetros de control K y ε en sus respectivos intervalos, y manteniendo fijos el resto de los parámetros respecto al análisis multimallas mencionado en la sección anterior. Se encontraron 6 fases fundamentales en las cuales, se puede observar que la variable η del modelo significa simultáneamente densidad de biomasa para valores positivos y desertificación para valores negativos.

La formación de patrones es parte de la dinámica inestable de las ecuaciones no lineales dadas por el modelo Hardenberg – Lefever, como producto de esa dinámica inestable, la solución numérica del modelo nos muestra una diversidad de diferentes fases morfológicas en los patrones. Esta inestabilidad es causada por la competencia de distribución de biomasa sobre los recursos hídricos. El tipo de patrón depende del rango de acumulación de humedad por planta; fase uniforme de vegetación para valores de ε relativamente altos, franjas (o laberintos) para cuando el valor de ε toma un valor intermedio y agujeros en una cobertura uniforme para valores de ε relativamente bajos. Estos patrones reflejan una autoorganización óptima del sistema con respecto a los recursos hídricos, esto se sabe debido a la dinámica no lineal y la competencia interacción de los términos del modelo. Los patrones de puntos son los patrones preferidos ya que la absorción de agua de áreas desnudas adyacentes se puede realizar en todas las direcciones mientras que, las franjas, que solo tienen dos direcciones para extraer el agua, necesitan valores de precipitación más equilibrados.

Para observar a mayor detalle las distintas fases de vegetación, se realizaron experimentos numéricos con arreglos de mallas de 256×256 a $100,000$ iteraciones con un paso de tiempo $dt = 0.001$, cambiando los valores de ε y K en sus respectivos intervalos y tomando en cuenta la posición del patrón que se quería replicar dependiendo de los patrones multimallas de las Figuras 3.1 a 3.3. Esto con la finalidad de observar si los patrones de

vegetación obtenidos no dependían de las mallas únicamente. Gracias a esta prueba de robustez logramos corroborar las fases de distribución de biomasa – desertificación del modelo Hardenberg – Lefever, ya que, además de contar con las fases de puntos (*ver Figura 3.6*), huecos (*ver Figura 3.8*) y laberintos (*ver Figura 3.7*), también cuenta con una fase de vegetación uniforme (*ver Figura 3.9*) y con una fase intermezclada de desertificación con laberintos (*ver Figura 3.9*).

La mayoría de las fases mencionadas anteriormente se han observado en el campo. Se han encontrado patrones de puntos, rayas y bandas en una amplia gama de áreas geográficas en todo el mundo [7]. Muy a menudo, los patrones involucran a más de una especie. Se han reportado patrones autoorganizados y los mecanismos de concentración de recursos involucrados en varios ecosistemas entre los cuales los ecosistemas áridos son los más destacados. La irregularidad autoorganizada en estos ecosistemas difiere en escala y forma. Un ejemplo de patrones que han sido reportados en la actualidad son huecos, laberintos, rayas ("arbusto de tigre") y manchas ("arbusto de leopardo") [18].

El mecanismo general que subyace a esta irregularidad autoorganizada es una retroalimentación positiva entre el crecimiento de las plantas y la disponibilidad de agua. Una mayor densidad de vegetación permite una mayor infiltración de agua en el suelo (debido a la penetración de las raíces) y una menor evaporación del suelo (debido a la sombra). Como resultado, la vegetación persiste una vez presente, sin embargo, el suelo desnudo es demasiado hostil para la recolonización después de que la vegetación desaparece.

Así mismo, es importante destacar algunos mecanismos que influyen en la formación de estos patrones tales como, la redistribución del agua del suelo debido a la retroalimentación positiva entre la biomasa vegetal, la extensión del sistema de raíces y la absorción de agua. La redistribución del agua superficial debido a la retroalimentación positiva entre la cobertura vegetal y la infiltración de agua. La facilitación de corto alcance y competencia de largo alcance para limitar el agua y los nutrientes, y el transporte convectivo de nutrientes limitados en el agua subterránea hacia áreas con mayor biomasa vegetal, impulsado por diferencias en la tasa de transpiración.

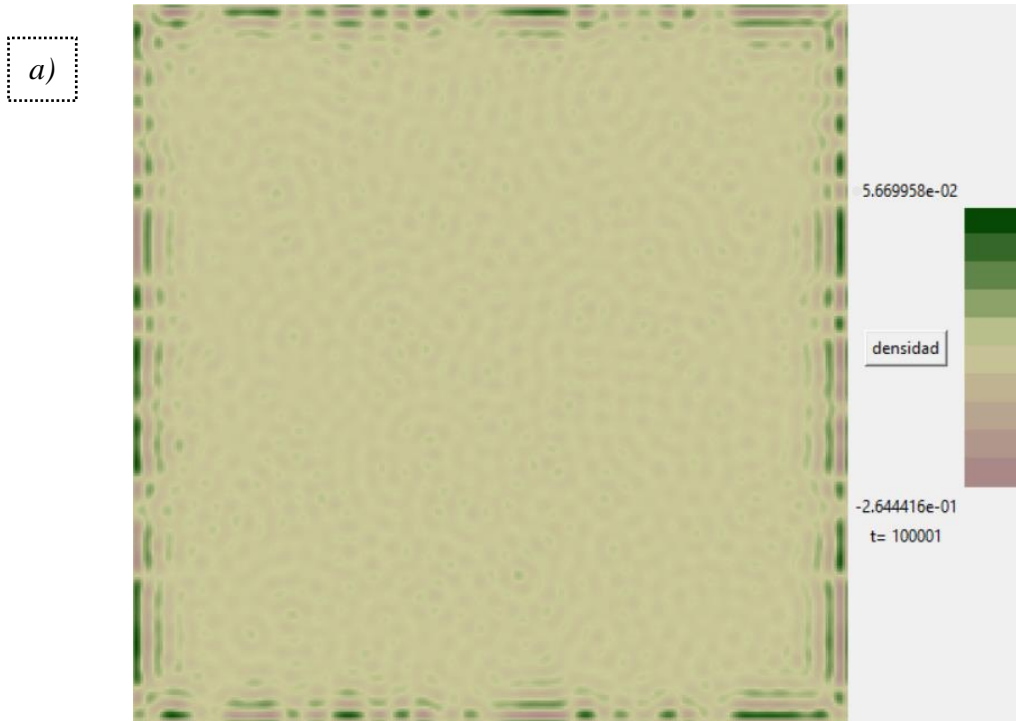


Figura 3.4 Fase de desertificación. a) Patrón de distribución de biomasa, b) Patrón de distribución de humedad, con valores $\varepsilon = -0.67$, $K = 0.52$, $\rho = 2$, $p = 0.4$, $M = 0.1$, $\Gamma = 0.88$, $\gamma = 0$.

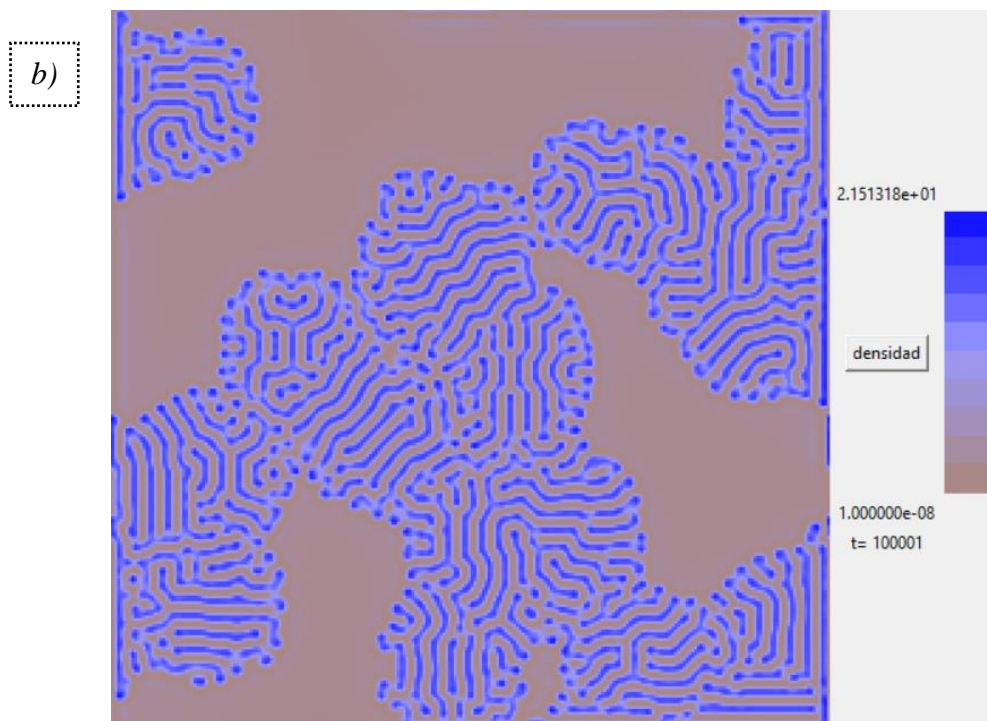
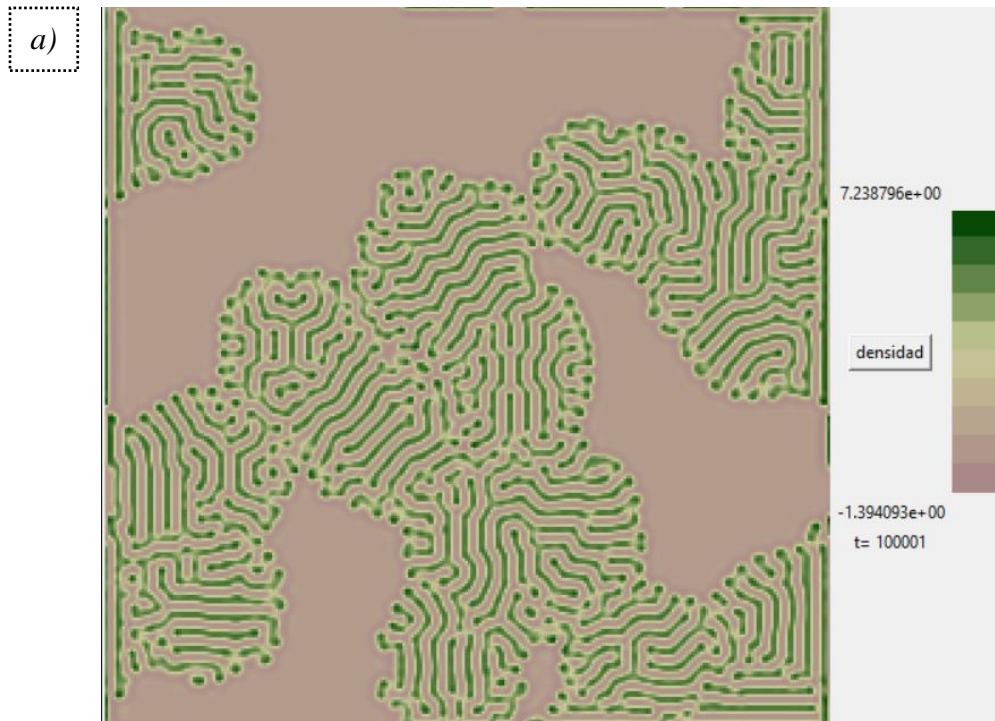


Figura 3.5 Fase intermezclada de desertificación con laberintos. a) Patrón de distribución de biomasa, b) Patrón de distribución de humedad, con valores $\varepsilon = 0.115$, $K = 1.34$, $\rho = 2$, $p = 0.4$, $M = 0.1$, $\Gamma = 0.88$, $\gamma = 0$.

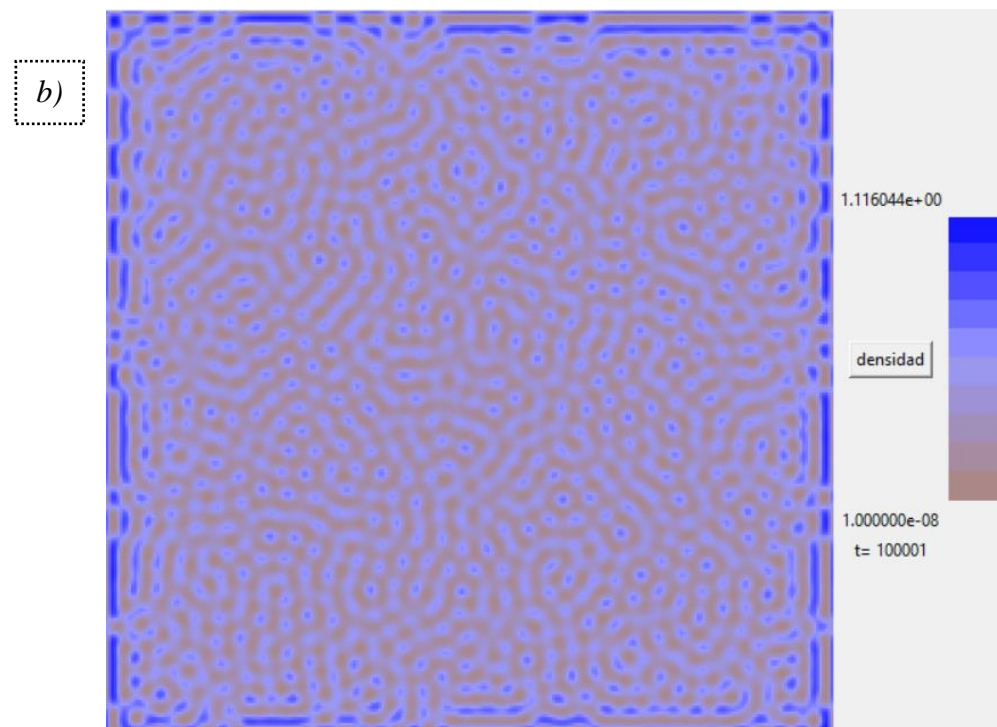
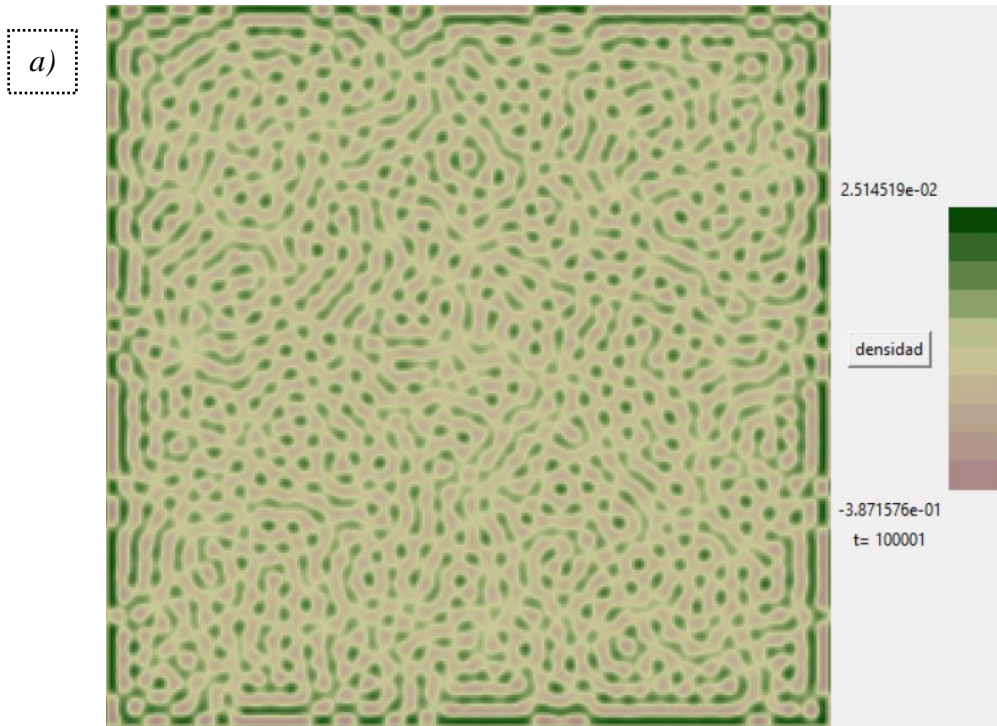


Figura 3.6 Fase de puntos. a) Patrón de distribución de biomasa, b) Patrón de distribución de humedad, con valores $\varepsilon = -0.67$, $K = 0.45$, $\rho = 2$, $p = 0.4$, $M = 0.1$, $\Gamma = 0.88$, $\gamma = 0$.

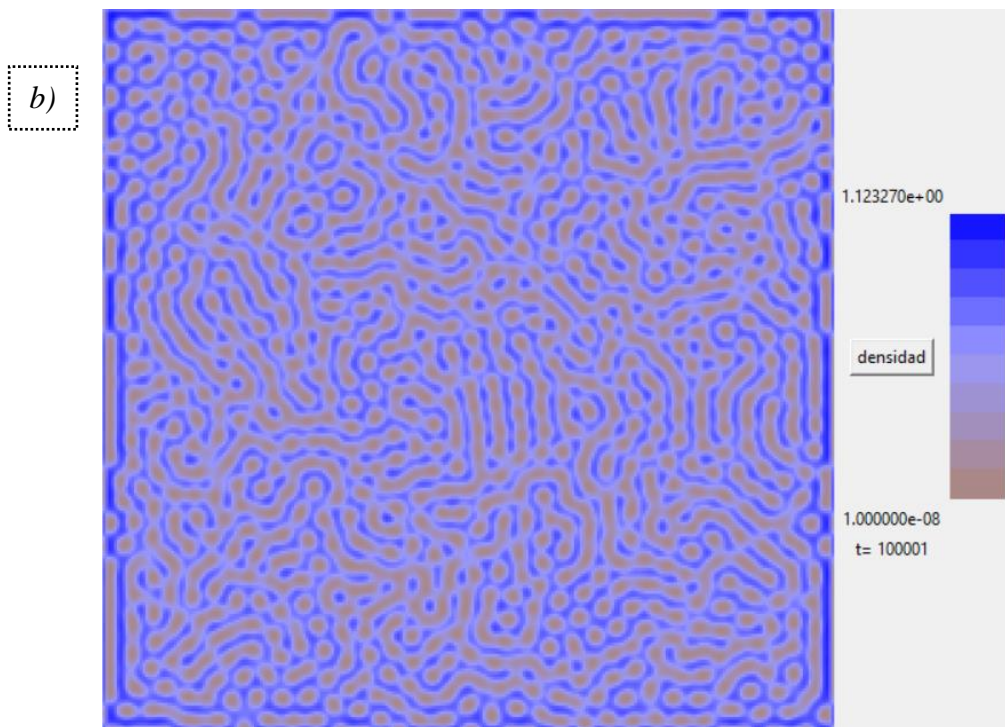
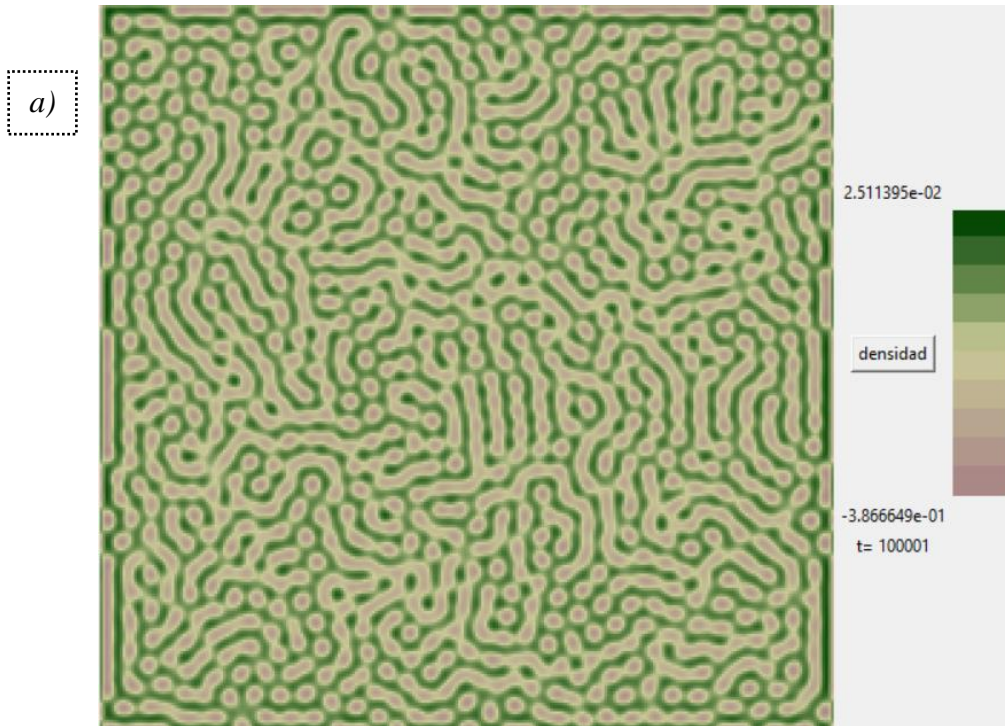
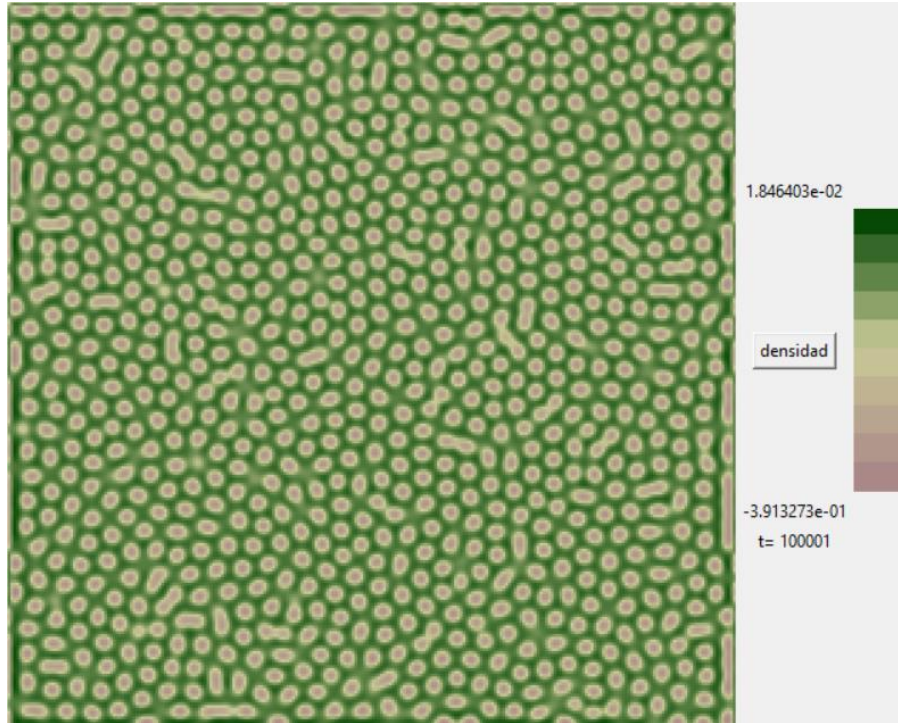


Figura 3.7 Fase de laberintos. *a)* Patrón de distribución de biomasa, *b)* Patrón de distribución de humedad, con valores $\varepsilon = -0.88$, $K = 0.45$, $\rho = 2$, $p = 0.4$, $M = 0.1$, $\Gamma = 0.88$, $\gamma = 0$.

a)



b)

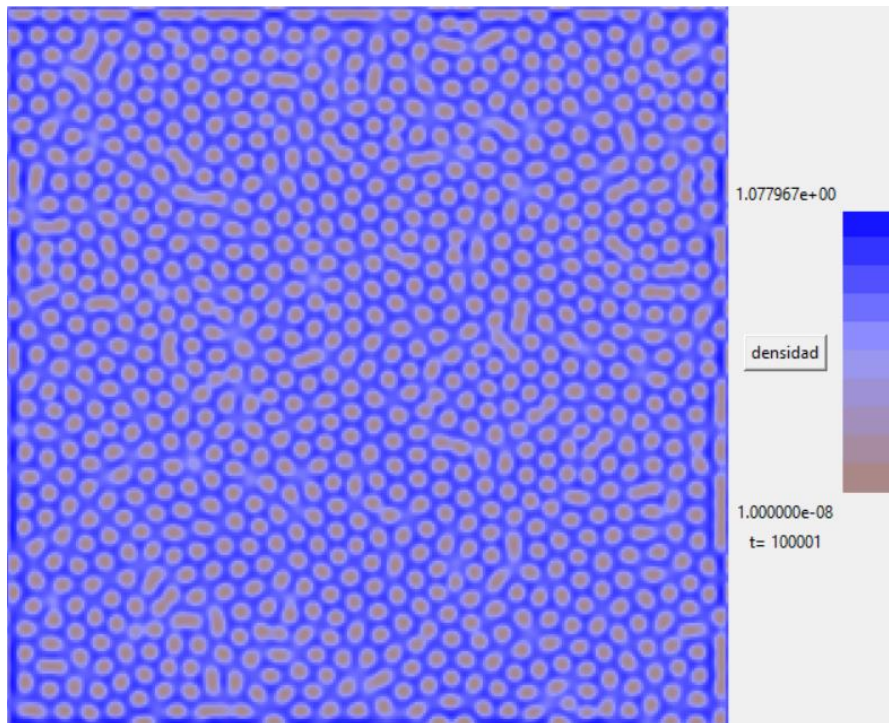


Figura 3.8 Fase de huecos. a) Patrón de distribución de biomasa, b) Patrón de distribución de humedad, con valores $\varepsilon = -1.23$, $K = 0.44$, $\rho = 2$, $p = 0.4$, $M = 0.1$, $\Gamma = 0.88$, $\gamma = 0$.



Figura 3.9 Fase de vegetación uniforme. a) Patrón de distribución de biomasa, b) Patrón de distribución de humedad, con valores $\varepsilon = -0.42$, $K = 1.14$, $\rho = 2$, $p = 0.4$, $M = 0.1$, $\Gamma = 0.88$, $\gamma = 0$.

La vegetación en los ecosistemas de tierras secas de África, América del Norte, Australia y Asia a menudo forma patrones espaciales notables. Estos van desde bandas regulares de vegetación que alternan con suelo desnudo, a lugares con vegetación y laberintos, a espacios regulares de suelo desnudo dentro de una extensión de vegetación que de otro modo sería continua. De acuerdo con Mander y Dekker [19], estos patrones pueden observarse en imágenes satelitales y pueden producirse mediante sistemas de activación-inhibición en modelos computacionales. El desarrollo de patrones de vegetación espacial en simulaciones sigue una secuencia bien establecida que está relacionada con la cantidad de lluvia suministrada a la superficie terrestre. Con niveles de lluvia relativamente altos, toda la superficie de la tierra está cubierta de vegetación y, a medida que la lluvia disminuye progresivamente, los patrones de vegetación cambian de huecos (cubierta de vegetación casi continua con pequeñas aberturas) a laberintos (redes reticuladas de vegetación) a manchas (pequeños parches de vegetación), y finalmente al suelo desnudo, tal y como se puede observar en las *Figuras 3.4 a 3.9*.

Los patrones de vegetación autoorganizados están muy extendidos y se cree que median las funciones del ecosistema, como la productividad y la robustez, pero los mecanismos subyacentes a su origen y mantenimiento siguen siendo objeto de controversia. Tarnita [20], nos plantea que los paisajes de elementos sobredispersos (espaciados uniformemente), similares a los resultados mostrados en la *Figura 3.8*, son particularmente controvertidos, tal es el caso de los *montículos mima* de América del Norte, los *murundus* brasileños, los *heuweltjies* sudafricanos y, como es sabido, los círculos de hadas de Namibia. Así mismo, nos menciona que actualmente se debaten dos hipótesis en competencia.

Por un lado, los modelos de retroalimentación dependientes de la escala, mediante los cuales las plantas facilitan a los vecinos mientras compiten con individuos distantes, pueden reproducir varios patrones regulares identificados en imágenes de satélite. Debido a las profundas raíces teóricas y la aparente generalidad, las retroalimentaciones dependientes de la escala se consideran un principio unificador y casi universal de la formación de patrones regulares a pesar de la escasa evidencia empírica. Por otro lado, muchos patrones de

vegetación sobredispersa en todo el mundo se han atribuido a ingenieros de ecosistemas subterráneos como termitas, hormigas y roedores. Aunque potencialmente consistente con la competencia territorial, esta interpretación ha sido cuestionada teórica y empíricamente y (a diferencia de las retroalimentaciones dependientes de la escala) carece de una teoría dinámica unificadora, lo que alimenta el escepticismo sobre su plausibilidad y generalidad.

Es de interés mencionar que, Cheng y Stieglitz [24] informan que, los resultados del modelado muestran que, en ausencia de un gradiente hidráulico regional, se desarrolla un patrón de laberinto con el tiempo, similar al de la *Figura 3.7*. En presencia de un gradiente hidráulico regional moderado, los parches de vegetación se agregan y se extienden en la dirección perpendicular del flujo cuesta abajo, lo que lleva a la formación del patrón de cuerda perpendicular. Sin embargo, en presencia de un gradiente hidráulico regional más grande, los parches de vegetación se agregan y se extienden en la dirección del flujo cuesta abajo, lo que lleva a la formación de bandas regulares de vegetación orientadas paralelas a la dirección del flujo. Para los tres patrones de vegetación, la distribución espacial de los nutrientes disueltos coincide con la distribución de la biomasa.

El aumento de la infiltración de agua debajo de los patrones de vegetación y la sombra representan importantes procesos de facilitación local, mientras que el flujo de agua terrestre y la competencia a través del sistema de raíces son ejemplos de importantes retroalimentaciones a largo plazo. Kletter y von Hardenberg [25], mencionan que, un resultado importante de estos estudios es su robustez y consistencia: todos los modelos son capaces de reproducir la misma fenomenología de patrones periódicos de biomasa tan pronto como se eligen rangos realistas para los parámetros. Se diferencian principalmente en el detalle con el que representan diferentes mecanismos de retroalimentación, lo que permite a algunos de ellos capturar con mayor detalle la fenomenología de los patrones de vegetación, su resiliencia a los cambios ambientales o la creación de nichos ecológicos.

En una amplia gama de valores de parámetros, apropiados para describir la vegetación en ambientes limitados por el agua, se encuentra que las soluciones de vegetación uniforme de su modelo son linealmente inestables a perturbaciones espaciales de longitud de onda finita [25]. La dinámica en este rango conduce al desarrollo de cinco patrones básicos diferentes a lo largo de gradientes de precipitación creciente: suelo desnudo similar al de la *Figura 3.4*, puntos como los de la *Figura 3.6*, bandas de vegetación o laberintos similares a los mostrados en la *Figura 3.7*, agujeros en cobertura uniforme como los mostrados en la *Figura 3.8* y cobertura vegetal uniforme resultado similar al que se muestra en la *Figura 3.9*.

En todos los resultados obtenidos de la simulación computacional, los cuales fueron reportados en las Figuras 3.4 a 3.9, consideramos que la pérdida de agua por filtración debido a la pendiente del suelo era nula, es decir, que $v = 0$, de manera que, el término $v \frac{\partial}{\partial t} (\omega - \alpha\eta)$ en la ecuación (2.5) no había sido tomado en cuenta en realidad. Por esta razón, realizamos un experimento numérico más, en donde consideramos los valores de los parámetros para los arreglos de mallas 256x256 de las fases de puntos, laberintos, huecos y la fase intermezclada, con la diferencia de que en este experimento se encendió el valor de v , arrojando como resultado lo que se reporta a continuación (*ver Figuras 3.10 a 3.13*).

Es importante mencionar que las fases de desertificación y vegetación uniforme no fueron consideradas para esta simulación computacional debido a que los resultados no presentarían cambios notables a reportar. Esto a diferencia de las fases restantes, donde podemos observar cómo al considerar una pendiente, la formación de los patrones cambia drásticamente en el caso de la fase de huecos y la fase intermezclada.

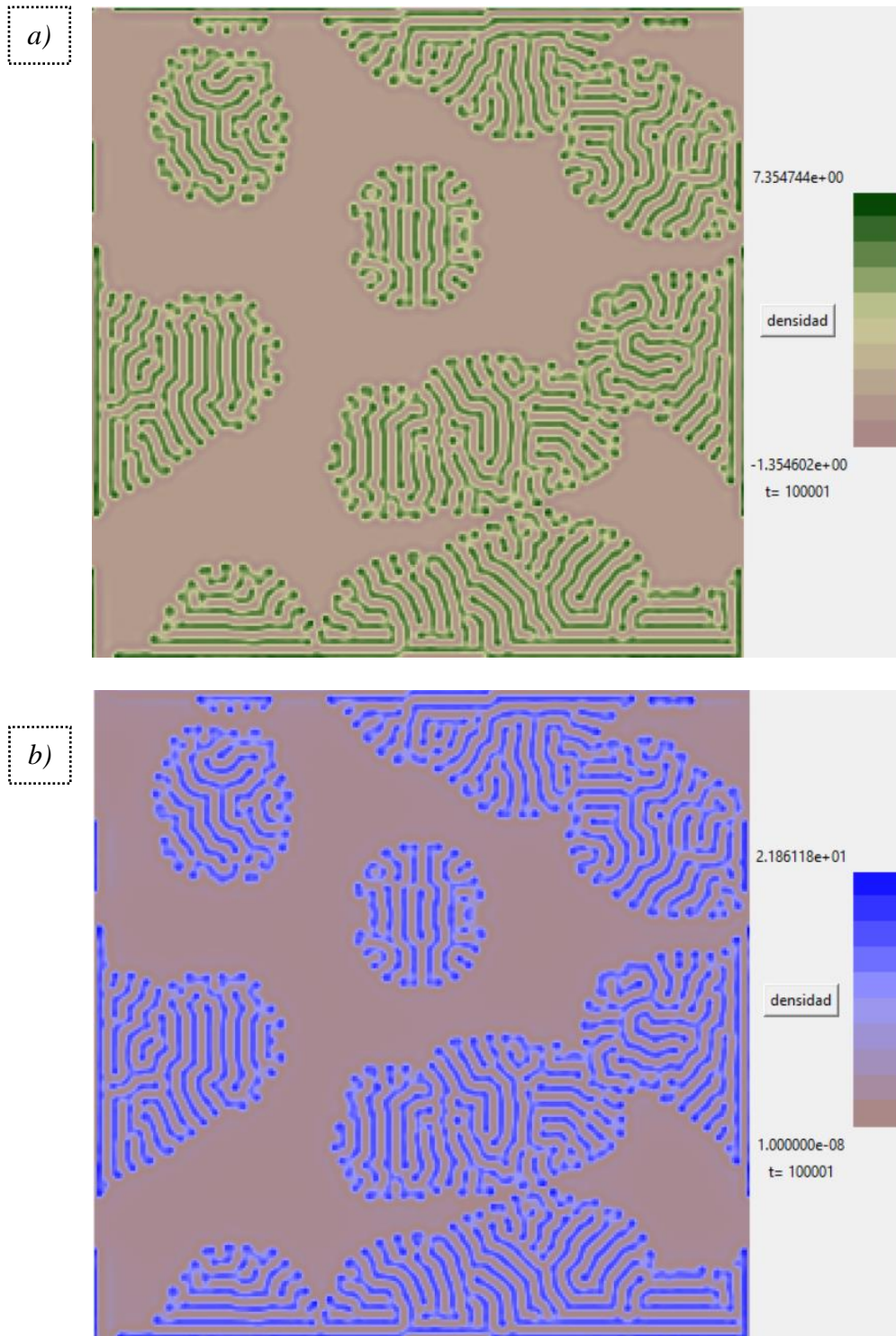


Figura 3.10 Fase intermezclada de desertificación con laberintos. a) Patrón de distribución de biomasa, b) Patrón de distribución de humedad, con valores $\varepsilon = 0.115$, $K = 1.34$, $\rho = 2$, $p = 0.4$, $M = 0.1$, $\Gamma = 0.88$, $\gamma = 0$, $v = 30$.

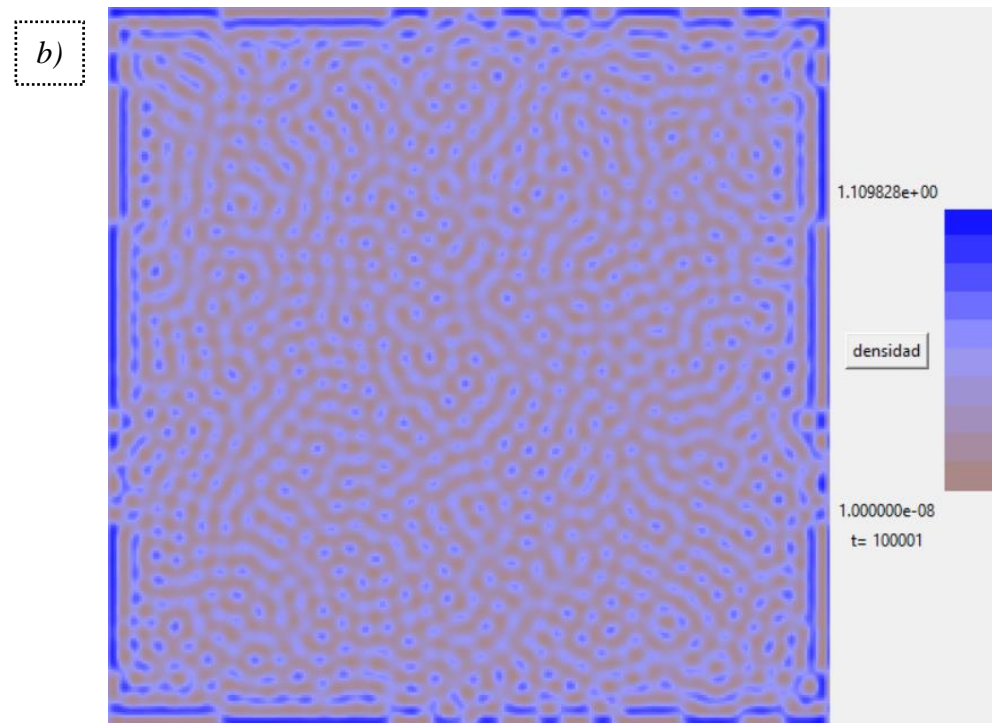
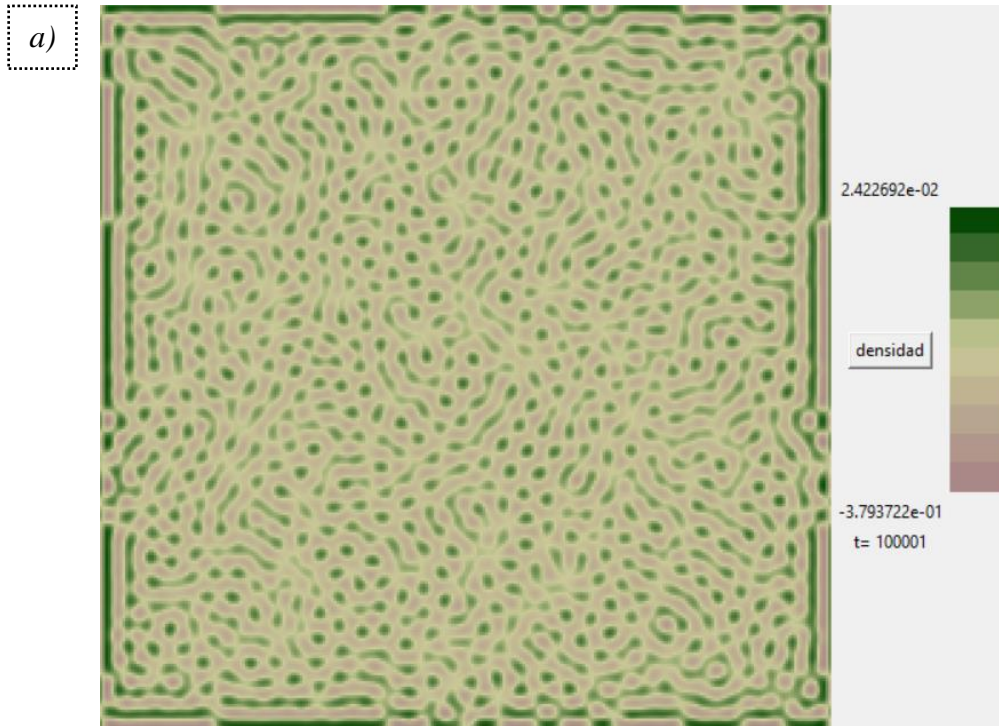


Figura 3.11 Fase de puntos. *a)* Patrón de distribución de biomasa, *b)* Patrón de distribución de humedad, con valores $\varepsilon = -0.67$, $K = 0.45$, $\rho = 2$, $p = 0.4$, $M = 0.1$, $\Gamma = 0.88$, $\gamma = 0$, $v = 30$.

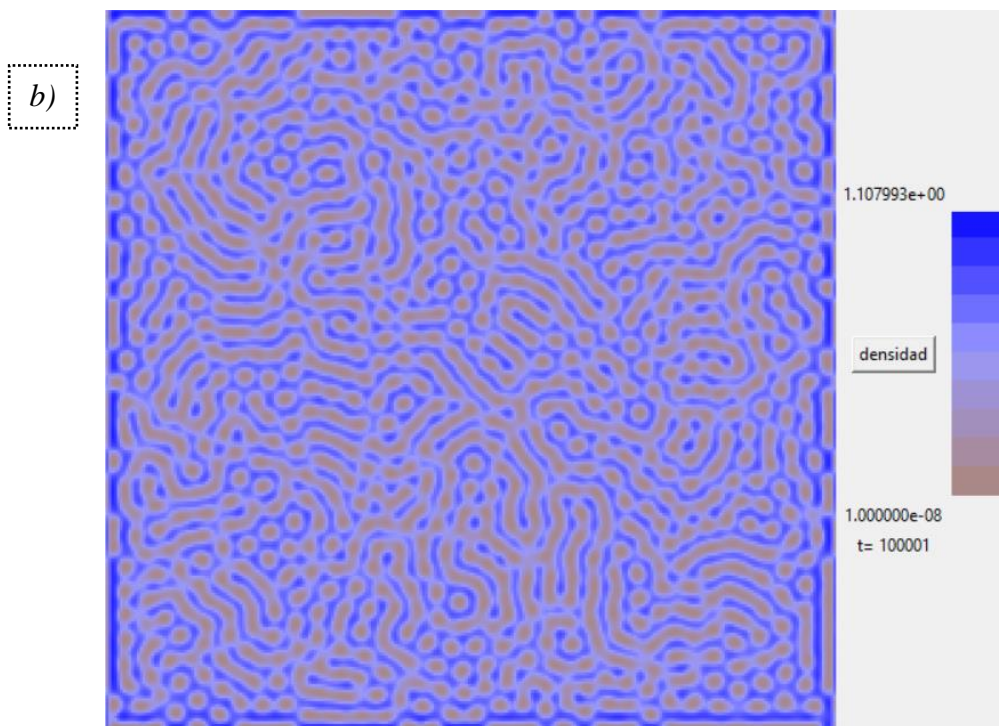
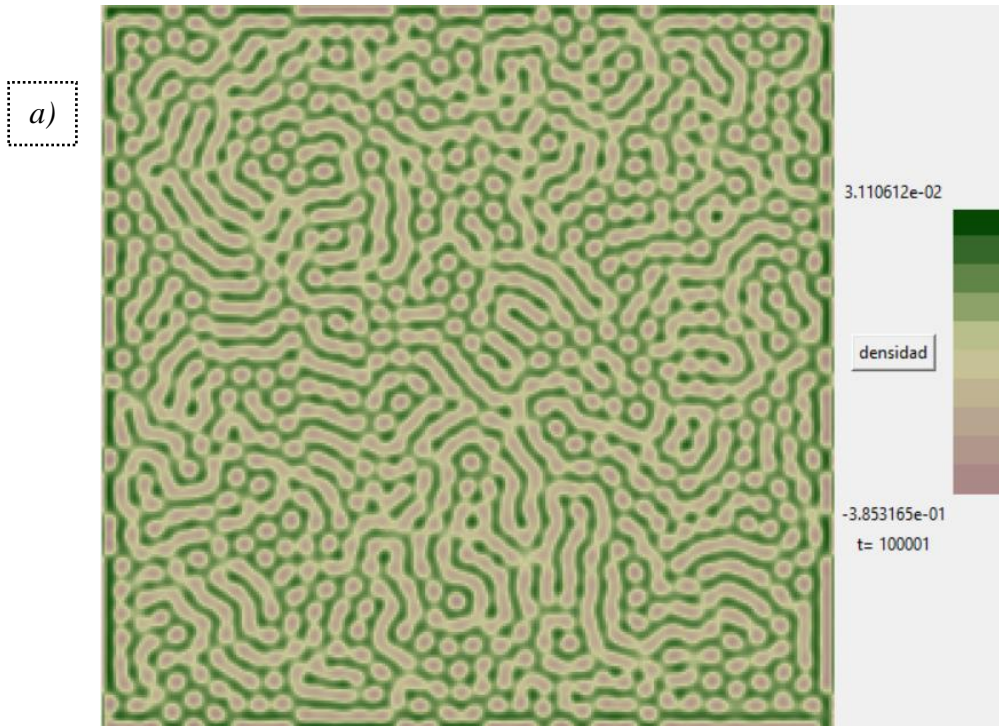


Figura 3.12 Fase de laberintos. a) Patrón de distribución de biomasa, b) Patrón de distribución de humedad, con valores $\varepsilon = -0.88$, $K = 0.45$, $\rho = 2$, $p = 0.4$, $M = 0.1$, $\Gamma = 0.88$, $\gamma = 0$, $\nu = 30$.

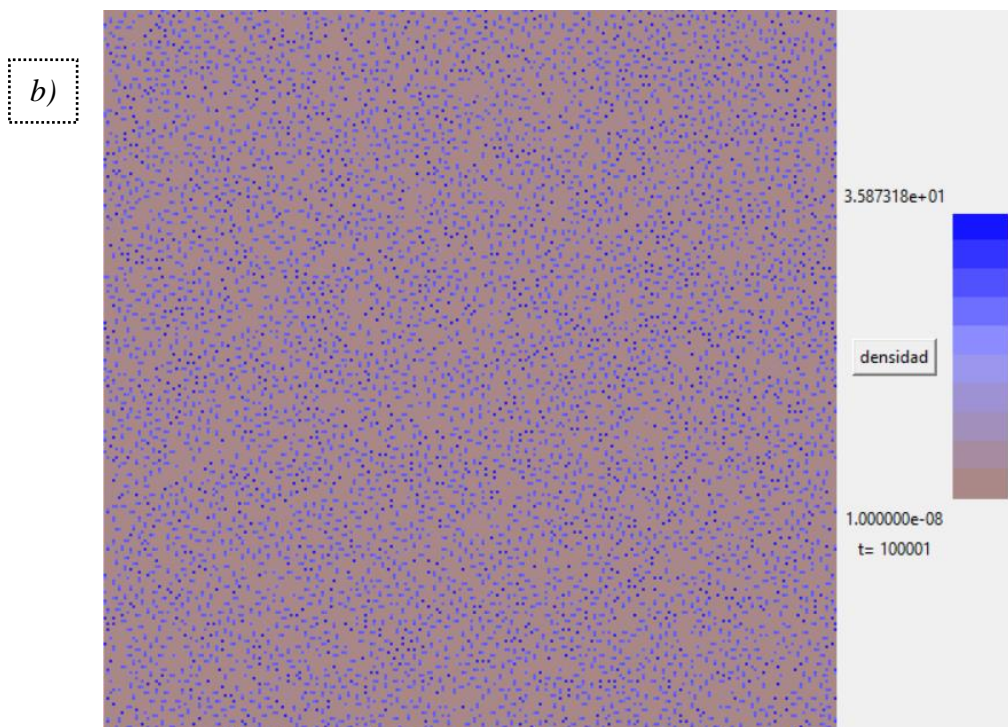
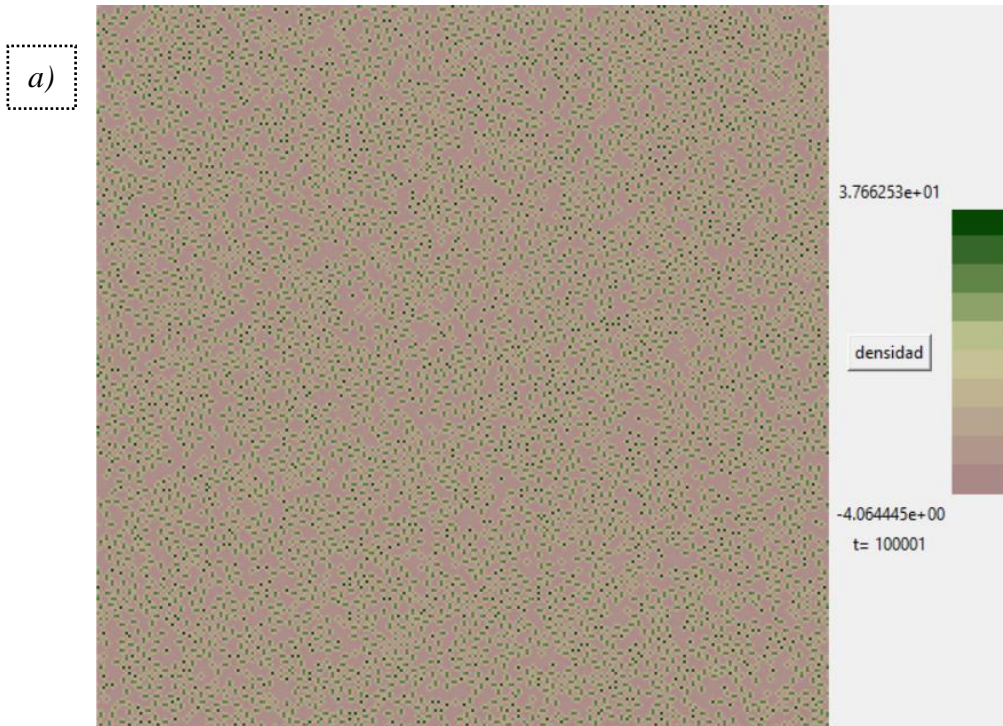


Figura 3.13 Fase de huecos. a) Patrón de distribución de biomasa, b) Patrón de distribución de humedad, con valores $\varepsilon = -1.23$, $K = 0.44$, $\rho = 2$, $p = 0.4$, $M = 0.1$, $\Gamma = 0.88$, $\gamma = 0$, $v = 30$.

Presentamos aquí un nuevo modelo matemático que da cuenta de una amplia gama de patrones de biomasa – desertificación. Usando este modelo demostramos la ventaja potencial de un enfoque de sistemas dinámicos en el estudio de los ecosistemas. La coexistencia de estados estables arroja nueva luz sobre los fenómenos de desertificación y vegetación. La secuencia de estados estables a lo largo de un gradiente de lluvia motiva una clasificación de la aridez que refleja mejor las propiedades del sistema, como la vulnerabilidad a la desertificación.

El modelo de Hardenberg – Lefever es un modelo bastante completo y competente, pues además de mostrar una cantidad considerable de escenarios en los resultados, también puede ser comparado con la naturaleza de manera real. Estas observaciones muestran que pueden surgir patrones autoorganizados a diferentes escalas. Las transiciones de los ecosistemas involucran una secuencia de patrones emergentes de diversas formas inducidos por la disminución de las precipitaciones. Los estados de vegetación incluyen cobertura homogénea, huecos, laberintos o franjas y manchas, en ese orden.

Como una aplicación y resultado final, haremos una comparación de los resultados obtenidos por nuestro modelo con fotografías capturadas de la formación de zonas de biomasa – desertificación en distintas regiones, en las cuales, podemos observar algunas de las fases presentadas en las Figuras 3.4 a 3.13, tales como, puntos, huecos, laberintos y algunas de estas intermezcladas. Estas comparaciones también fueron evaluadas mediante los métodos de Transformada de Fourier y Dimensión fractal.

Cuando una imagen contiene estructuras periódicas, como es el caso de los patrones de vegetación que presentan cierto grado de periodicidad, su transformada de Fourier (TF), tiene un aspecto característico representado con Modos de Fourier correspondientes a las frecuencias espaciales de sus estructuras. De esta forma se propone el uso de descriptores geométricos para la TF digital, que están relacionados con los modos de la transformada de Fourier (tomando como centro del espacio coordenado, el modo más notable) y están

asociados a la estructura pseudoperiódica elemental del patrón. Los resultados de las comparaciones se muestran en las figuras 3.14 a 3.18. los modos de Fourier fueron obtenidos con el software libre: IMAGE J, versión 1.52a. Las imágenes y patrones originados de las figuras 3.14 a 3.18 fueron tratados con IMAGE J [26].

Adicionalmente, se fue calculada la dimensión fractal, se usaron técnicas de segmentación que consideran los valores, o niveles digitales, contenidos en cada píxel y la relación que tienen con sus vecinos [26], esto para asignar un significado en el mundo real. Esto se consideró, dado que en imágenes con ruido multiplicativo la clasificación basada en los niveles de luminancia resulta ser muy difícil tanto para umbralizar como para detectar contornos. La relación entre distribuciones aleatorias y la dimensión fractal es muy significativa. La idea subyacente en este análisis es que las distribuciones aleatorias poseen características de autosimilitud que son análogas a la de los objetos fractales. Por dicha razón se utilizan estimadores estadísticos de autosimilitud como el método de cajas para calcular la dimensión fractal. El método de cajas se basa en medir el conjunto a evaluar sobre una grilla de resolución y posición variable. La relación entre la dimensión fractal y la densidad de la vegetación es una observable física que puede ser cuantificada. En este caso, la dimensión fractal utiliza la variación espacial de los niveles de gris como ayuda en la clasificación digital a partir de fotos satelitales y, en forma más reciente, se ha incorporado como pieza fundamental en la extracción de información cuantitativa a partir de imágenes digitales de resolución espacial [26].

Finalmente, mediante esta comparación de resultados logramos comprobar que los patrones de vegetación se forman de manera natural, demostrando así, que el modelo de Hardenberg – Lefever es un modelo descriptivo.

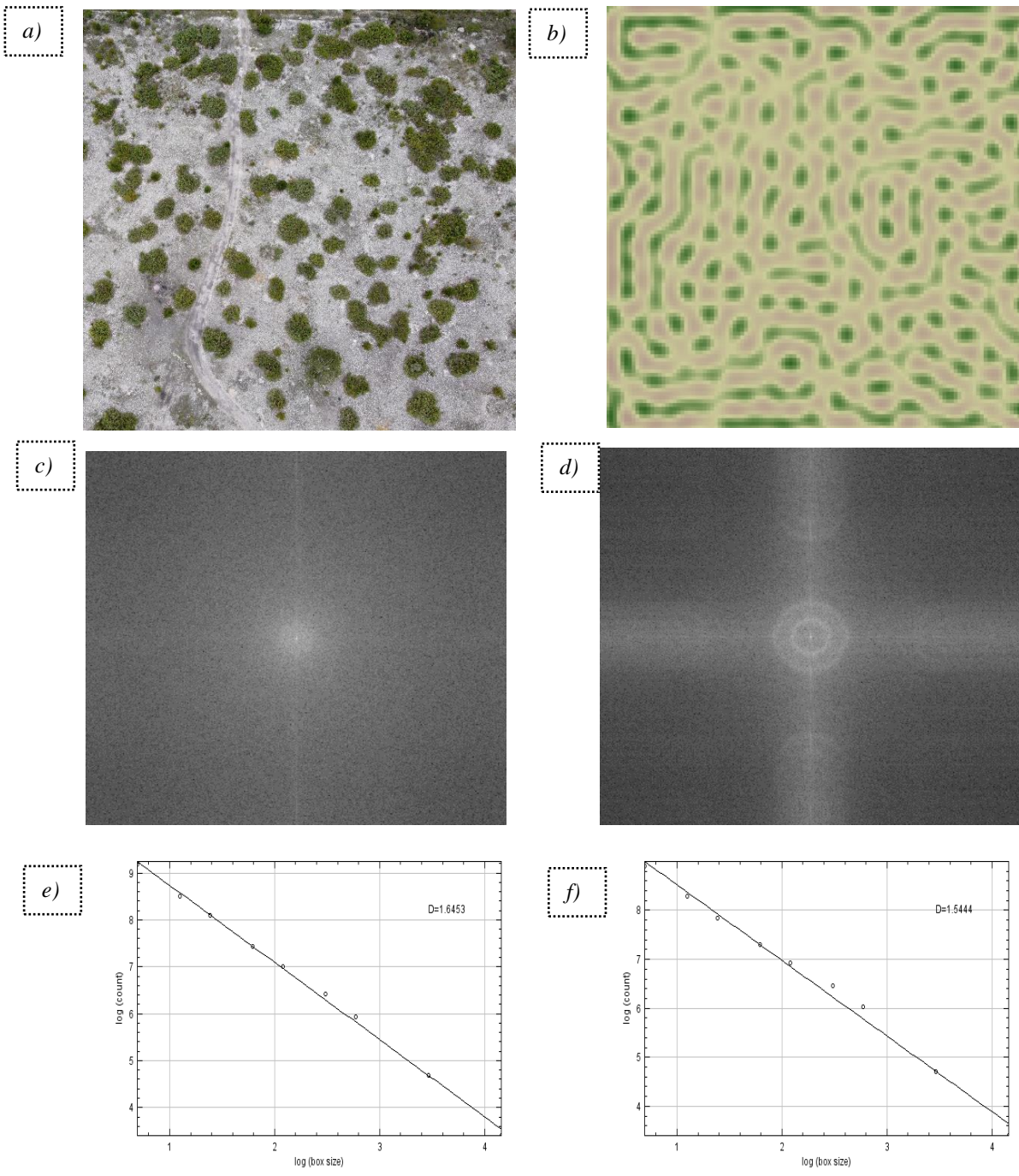


Figura 3.14 *a)* Panorama de una zona con puntos de biomasa en una meseta ubicada en la Cañada León, San Mateo Zoyamazalco, Puebla, México, sin ningún tipo de pendiente ($v = 0$), el cual nos muestra un resultado similar al obtenido en la Figura 3.6 que es una fase de puntos. *b)* Patrón obtenido con una malla de 128x128 al resolver las Ecs. (2.4)-(2.5). *c,d)* Transformadas de Fourier de *a)* y *b)* respectivamente, en la cual se puede observar que ambos escenarios cuentan con 6 modos de Fourier principales los cuales son iguales y por lo tanto nos muestran una verdadera similitud entre ambos resultados. *e,f)* Resultado de la dimensión fractal para los resultados de *a)* y *b)* respectivamente, podemos ver que en *e)* $D=1.6453$ y en *f)* $D=1.5444$.

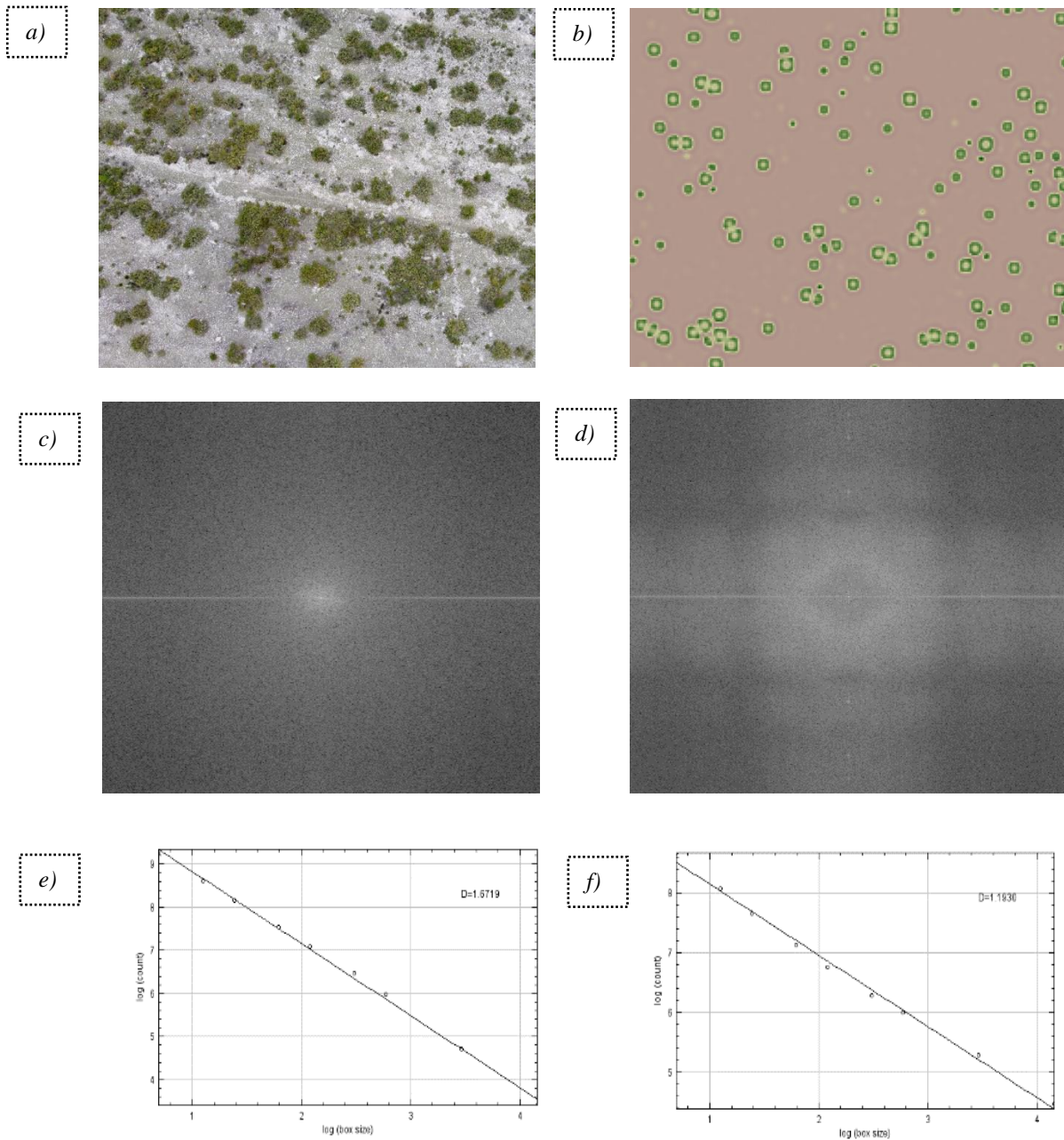


Figura 3.15 *a)* Panorama de una zona de huecos con inclinación por pendiente ubicada en la Cañada León, San Mateo Zoyamazalco, Puebla, México, se logran visualizar espacios de desertificación entre algunos de los parches de vegetación, el cual nos muestra un resultado similar al obtenido en la Figura 3.13, que es una fase de huecos considerando una pendiente dada por $v = 30$. *b)* Patrón obtenido con una malla de 128x128 al resolver las Ecs. (2.4)-(2.5). *c,d)* Transformadas de Fourier de *a)* y *b)* respectivamente, en la cual se puede observar que ambos escenarios cuentan con 3 modos de Fourier principales los cuales son iguales y por lo tanto nos muestran una verdadera similitud entre ambos resultados. *e,f)* Resultado de la dimensión fractal para los resultados de *a)* y *b)* respectivamente, podemos ver que en *e)* $D=1.6719$ y en *f)* $D=1.1930$.

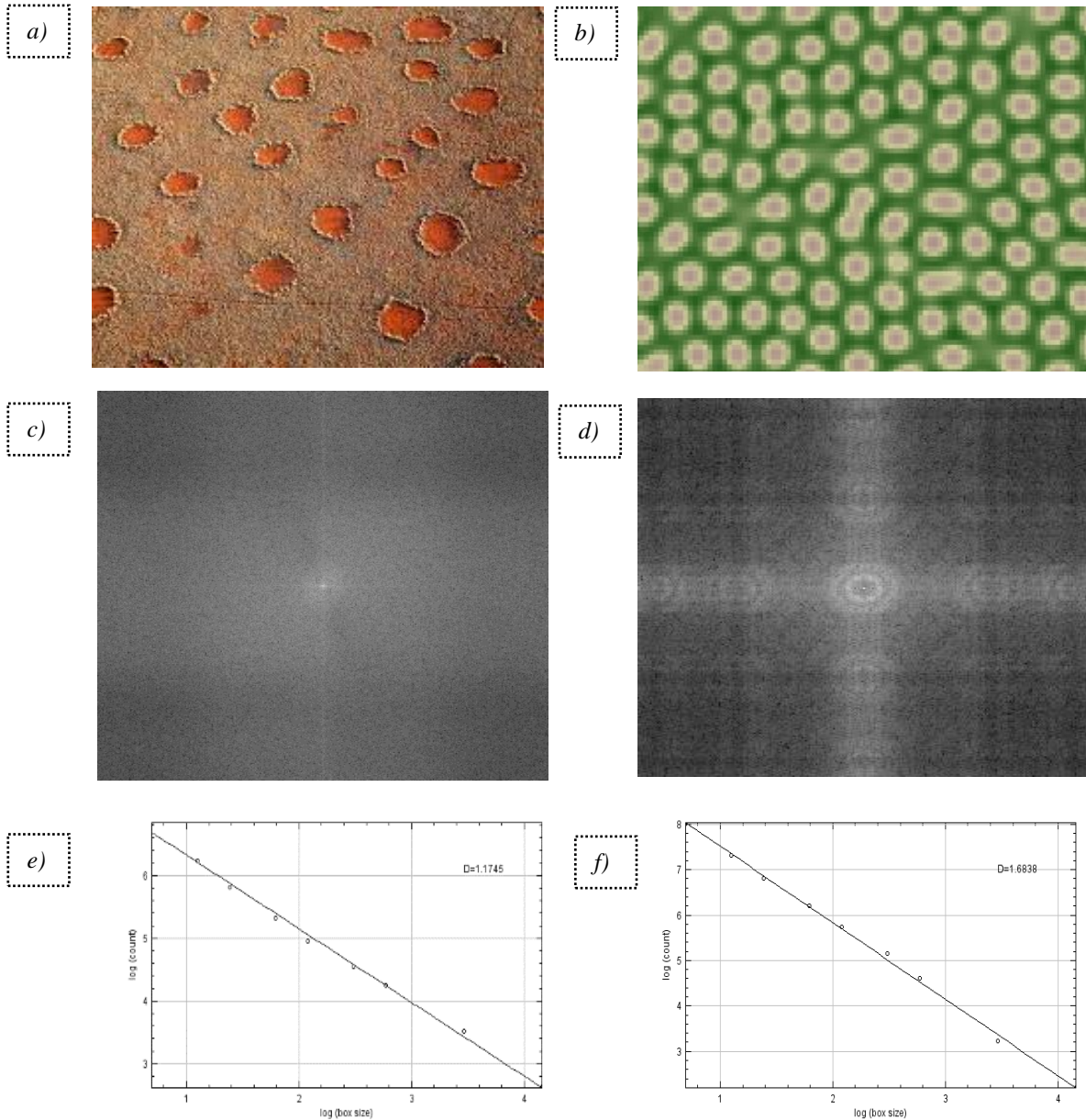


Figura 3.16 *a)* Panorama de una zona de huecos, mejor conocida como “círculos de hadas” en Namibia. Se logran visualizar huecos similares a los mostrados en el resultado obtenido y reportado en la Figura 3.8, que es una fase de agujeros/huecos sin ningún tipo de pendiente ($v = 0$). *b)* Patrón obtenido con una malla de 128x128 al resolver las Ecs. (2.4)-(2.5). *c,d)* Transformadas de Fourier de a) y b) respectivamente, en la cual se puede observar que ambos escenarios cuentan con 4 modos de Fourier principales los cuales son iguales y por lo tanto nos muestran una verdadera similitud entre ambos resultados. *e,f)* Resultado de la dimensión fractal para los resultados de a) y b) respectivamente, podemos ver que en e) $D=1.1745$ y en f) $D=1.6838$.

Fuente: Romero S. Resuelto el misterio de los “Círculos de hadas” del desierto de Namibia. Revista Muy Interesante. Enero 2017.

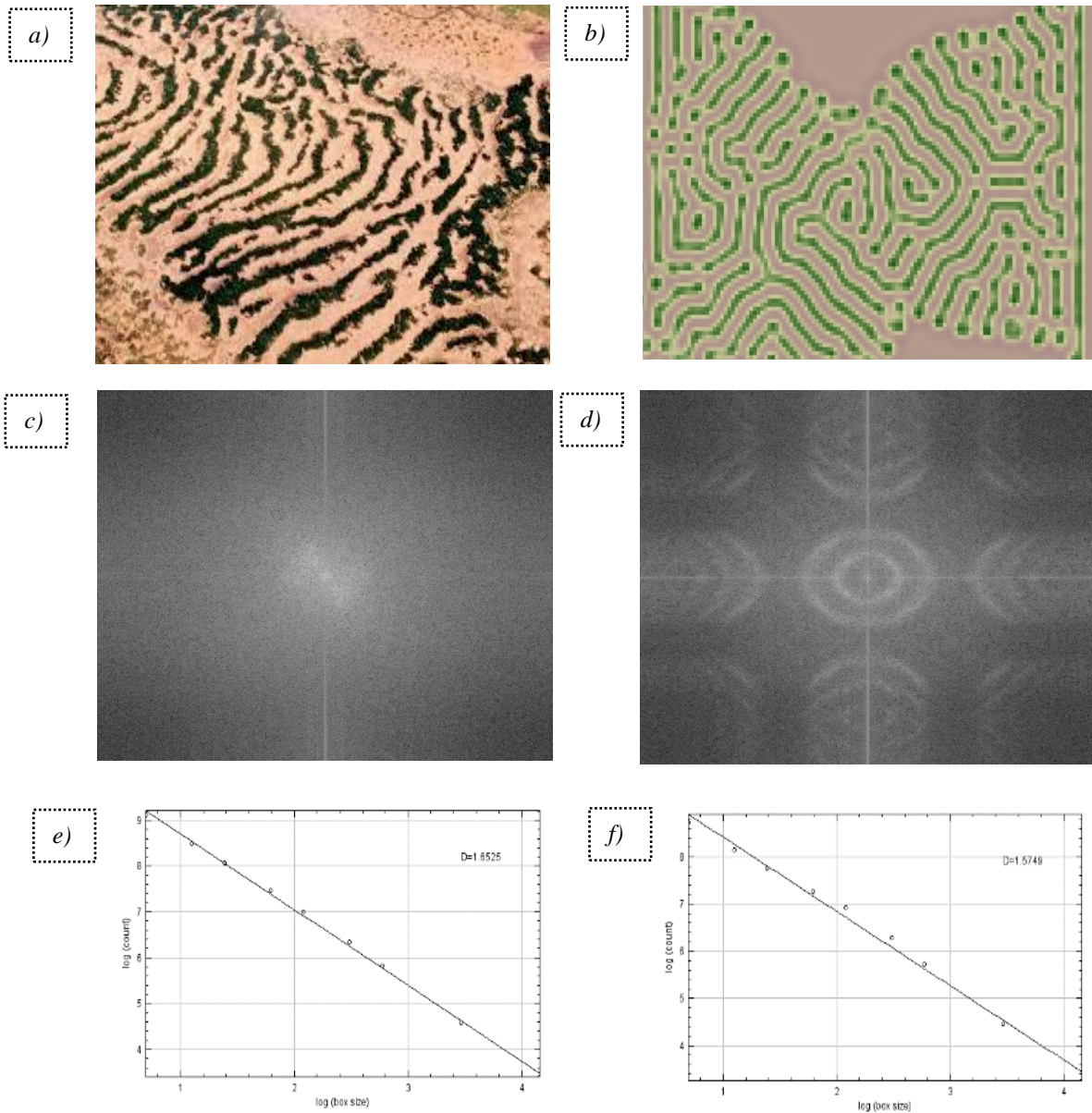


Figura 3.17 *a)* Panorama de una zona de vegetación tupida en forma de rayas ubicada en Nigeria. Se pueden visualizar las divisiones entre cada franja dadas por desertificación, un resultado similar al obtenido en la Figura 3.5, que es una fase intermezclada de desertificación con laberintos/rayas sin ningún tipo de pendiente ($v = 0$). *b)* Patrón obtenido con una malla de 128x128 al resolver las Ecs. (2.4)-(2.5). *c,d)* Transformadas de Fourier de *a)* y *b)* respectivamente, en la cual se puede observar que ambos escenarios cuentan con 6 modos de Fourier principales los cuales son iguales y por lo tanto nos muestran una verdadera similitud entre ambos resultados. *e,f)* Resultado de la dimensión fractal para los resultados de *a)* y *b)* respectivamente, podemos ver que en *e)* $D=1.6525$ y en *f)* $D=1.5749$.

Fuente: A. Sherratt J. Self – *Organisation in Arid Vegetation*. Department of Mathematics and Maxwell Institute for Mathematical Sciences Heriot-Watt University. Mayo 2018.

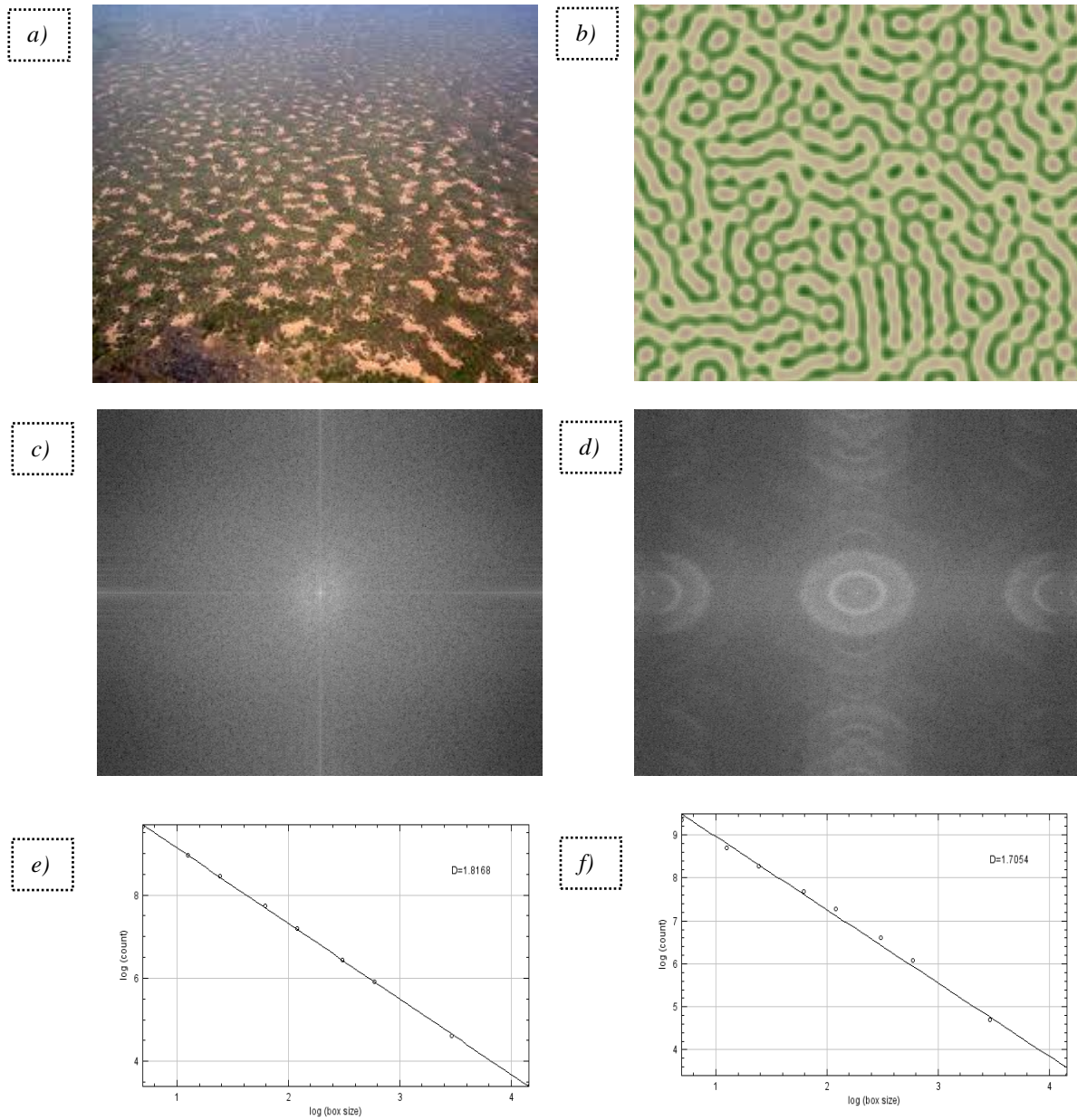


Figura 3.18 *a)* Panorama de una zona de laberintos de biomasa ubicado en Nigeria. Se logran visualizar laberintos de vegetación abundante separadas por pequeños huecos de desertificación, este escenario nos muestra un resultado similar al obtenido en la Figura 3.7, que es una fase de laberintos sin ningún tipo de pendiente ($v = 0$). *b)* Patrón obtenido con una malla de 128x128 al resolver las Ecs. (2.4)-(2.5). *c,d)* Transformadas de Fourier de a) y b) respectivamente, en la cual se puede observar que ambos escenarios cuentan con 6 modos de Fourier principales los cuales son iguales y por lo tanto nos muestran una verdadera similitud entre ambos resultados. *e,f)* Resultado de la dimensión fractal para los resultados de a) y b) respectivamente, podemos ver que en e) $D=1.8168$ y en f) $D=1.7054$.

Fuente: Barbier N. *Aerial view of a gapped bush plateau in the Nigerian part of W regional park.* Diciembre 2003.

Capítulo 4. Conclusiones

En general, estos patrones de vegetación se interpretan como un proceso de autoorganización descrito por mecanismos no lineales dados por las ecuaciones del modelo Hardenberg – Lefever. La dinámica de fases encontradas y sus transiciones refleja el cambio de acuerdo con los parámetros ε y K de la estructura de la distribución de biomasa frente al estrés hídrico. El modelo de Hardenberg – Lefever contiene la dinámica de seis tipos de fases diferentes, lo cual significa que es un modelo que tiene una gran diversidad de patrones.

A diferencia de otros modelos existentes, tales como el modelo de Rietkerk [18], el modelo de Lefever – Lejeune [3], el modelo de Siero [21] o bien el modelo de Dutta [12] los cuales utilizan sistemas de ecuaciones diferenciales más complejos, en este modelo matemático solo se utilizó un sistema de 2 ecuaciones diferenciales parciales no lineales, de manera que es más fácil de tratar analítica y numéricamente.

La descripción cuantitativa de formas y patrones mediante el análisis de imágenes computacionales está aumentando la precisión y la velocidad con la que se analizan y clasifican los objetos biológicos en disciplinas como la taxonomía y la biología molecular [19]. Nuestros resultados indican que un enfoque similar puede ser aplicado de manera útil a imágenes generadas como parte de programas de investigación en ciencias de la Tierra y ecología. La inclusión en los modelos de mecanismos de competencia de largo alcance sobre el recurso hídrico limitado produce inestabilidades finitas en el número de ondas de vegetación uniforme y patrones de vegetación con escalas de longitud características, como patrones de punto y agujeros, y patrones de laberintos.

Para obtener una mejor comprensión de la formación del patrón de vegetación, primero observamos que las ecuaciones (2.4) y (2.5) representan un sistema activador-inhibidor, en el que el activador corresponde a la biomasa y el inhibidor corresponde a la falta de agua del suelo, cuyo rol antagónico en el modelo propuesto, tiene una relación más allá de la inestabilidad de Turing.

En el contexto de los patrones de biomasa – desertificación espacial en ecosistemas de tierras secas, el enfoque que hemos desarrollado se suma a la creciente caja de herramientas de métodos para analizar estos patrones. En este contexto, el trabajo futuro podría explorar el grado en que nuestra caracterización de la morfología del patrón de biomasa podría usarse como una señal de alerta temprana del cambio de vegetación.

Finalmente se demuestra que el patrón de vegetación es conceptualmente una transición desorden – orden, cuya dinámica tiene propiedades similares a las de los procesos no lineales de separación de fases.

Bibliografía

- [1] E. Gilad, J. von Hardenberg, A. Provenzale, M. Shachak, and E. Meron; *Ecosystem Engineers: From Pattern Formation to Habitat Creation*, Physical Review Letters (2004); Vol. 93, No. 9, 0981051.
- [2] E. Gilad, J. von Hardenberg, A. Provenzale, M. Shachak, and E. Meron; *Ecosystem Engineers: A mathematical model of plants as ecosystem engineers*, Journal of Theoretical Biology 244 (2007) 680–691.
- [3] Lefever, R., and Lejeune, O.; *On the origin of tiger bush*. Bulletin of Mathematical Biology (1997). 59(2), 263-294.
- [4] N.M. Shnerb, P. Sarah, H. Lavee, and S. Solomon; *Reactive glass and vegetation patterns*; Physical Review Letter (2003). 90, 038101.
- [5] D’Odorico, P., Laio, F., and Ridolfi, L.; *Vegetation patterns induced by random climate fluctuations*. Geophysical Research Letters (2006). 33, L19404.
- [6] HilleRisLambers, R., Rietkerk, M., van den Bosch, F., Prins, H. H. T. and de Kroon, H.; *Vegetation pattern formation in semi-arid grazing systems*. Ecology (2001). 82, 50-61.
- [7] J. von Hardenberg, E. Meron, M. Shachak, Y. Zarmi; *Diversity of Vegetation Patterns and Desertification*, Physical Review Letters (2001); Vol. 87, No. 19, 198101.
- [8] Kéfi, S., Rietkerk, M., Alados, C. L., Pueyo, Y., Papanastasis, V. P., ElAich, A., and de Ruiter, P.C. Spatial vegetation patterns and imminent desertification in Mediterranean arid ecosystems. Nature. (2007) 449, 213-217.
- [9] René Lefever, Nicolas Barbier, Pierre Couteron, Olivier Lejeune; *Deeply gapped vegetation patterns: on crown/root allometry, criticality and desertification*; Journal of Theoretical Biology (2009), Vol. 261, No. 2, pp. 194.
- [10] Liu, Quan-Xing, et al. "Phase separation explains a new class of self-organized spatial patterns in ecological systems." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 110.29 (2013): 11905-11910.
- [11] **Morales, M. A.**, Fernández-Cervantes, I., **Agustín-Serrano, R.**, Anzo, A., & Sampedro, M. P.. Patterns formation in ferrofluids and solid dissolutions using stochastic models with dissipative dynamics. *The European Physical Journal B*, (2016) 89(8), 182.
- [12] Kishore Dutta, Reaction-diffusion Dynamics and Biological Pattern Formatio, Journal of Applied Nonlinear Dynamics 6(4) (2017) 547–564.

- [13] Emanuel José Gomes de Araújo, Gabrielle Hambrecht Loureiro, Carlos Roberto Sanquetta, Mateus Niroh Inoue Sanquetta, Ana Paula Dalla Corte, Sylvio Péllico Netto, Alexandre Behling; *Allometric models to biomass in restoration areas in the Atlantic rain forest*; *Floresta e Ambiente* (2018); 25(1): e20160193.
- [14] Murray, James D. *Mathematical biology: I. An introduction*. Vol. 17. Springer Science & Business Media, 2007.
- [15] Langtangen, Hans Petter, and Hans Petter Langtangen. *A primer on scientific programming with Python*. Vol. 6. Berlin/Heidelberg: Springer, 2011.
- [16] Fornberg, Bengt. "Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids." *Mathematics of computation* 51.184 (1988): 699-706.
- [17] José Fernando Rojas Rodríguez. *Procesos dinámicos en ecosistemas: interacciones y autoorganización espacial*. PhD thesis, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- [18] M. Rietkerk, M. C. Boerlijst, F. van Langevelde, R. HilleRisLambers, J. van de Koppel, L. Kumar, H. H. T. Prins, and A. M. de Roos. *Self-organization of vegetation in arid ecosystems*. *Amer. Nat.*, 160(4):524-530, 2002.
- [19] Luke Mander, Stefan C. Dekker, Mao Li, Washington Mio, SurangiW. Punyasena and Timothy M. Lenton. *A morphometric analysis of vegetation patterns in dryland ecosystems*. Royal society open science. (2017).
- [20] Corina E. Tarnita, Juan A. Bonachela, Efrat Sheffer, Jennifer A. Guyton, Tyler C. Coverdale, Ryan A. Long & Robert M. Pringle. *A theoretical foundation for multi-scale regular vegetation patterns*. *Letter*. (2017).
- [21] E. Siero, A. Doelman, M. B. Eppinga, J. D. M. Rademacher, M. Rietkerk, and K. Siteur. *Striped pattern selection by advective reaction-diffusion systems: Resilience of banded vegetation on slopes*. *CHAOS* 25, 036411 (2015).
- [22] T. Witelski, M. Bowen. *Methods of Mathematical Modelling: Continuous Systems and Differential Equations*. Springer. June 2015.
- [23] D. Boyer, J. Viñals. *Weakly Nonlinear Theory of Grain Boundary Motion in Patterns with Crystalline Symmetry*. *Physical Review Letters* (2002), Volume 89, Number 5.
- [24] Y. Cheng, M. Stieglitz, G. Turk, V. Engel. *Effects of anisotropy on pattern formation in wetland ecosystems*. *Geophysical Research Letters*, Vol. 38, L04402 (2011).
- [25] A. Y. Kletter, J. von Hardenberg, E. Meron. *Ostwald Ripening in Dryland Vegetation*. *AIMS' Journals*, (2000).
- [26] Ferreira, T., Rasband, W. *Image J User Guide*. IJ1.46r. Octubre 2012.