



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

**PRESIÓN DE RADIACIÓN SOBRE UN CRISTAL
FOTÓNICO 3D**

TESIS

Presentada al

Colegio de Física

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

P R E S E N T A :

ERICK YIBRIEL MÉNDEZ HERNÁNDEZ

ASESORES

DR. MILLER TOLEDO SOLANO
DRA. ANA LILIA GONZÁLEZ RONQUILLO

PUEBLA, PUE. JULIO 2020

*La belleza de las ecuaciones matemáticas que
explican los fenómenos físicos más
complejos, radica en su
elegancia y geometría.*

Resumen

Actualmente la población mundial se estima cerca de los 7 mil millones de seres humanos y representa un enorme desafío la satisfacción de las necesidades energéticas. Mucho ha llamado la atención en los últimos días, el uso de la energía solar como fuente de energía limpia para satisfacer de manera continua tales necesidades. De acuerdo a ScienceDirect (consulta 30/03/2020) solo en el 2019 se arrojan más de 15,550 investigaciones alrededor de sistemas fotovoltaicos, tecnologías que proporcionan la posibilidad de generar electricidad con ventajas medioambientales como la emisión de dióxido de carbono cero durante el funcionamiento, así como la flexibilidad de la escala de fabricación, operación simple y un mantenimiento de bajo costo. En este sentido una gran cantidad de trabajos se han enfocado a la fabricación de celdas solares. Sin embargo, su desarrollo va relacionado con el proceso de generación de contaminantes y que pueden agravar aún más las condiciones medioambientales. Es por eso que buscar nuevos mecanismos, procesos, sistemas y dispositivos que funcionen a través de energías limpias con baja producción de contaminantes debe ser prioritario.

Esta tesis aporta al conocimiento científico el análisis teórico sobre la propagación de la luz en cristales fotónicos dieléctricos tridimensionales, con el fin de inducir un incremento en las fuerzas electromagnéticas en estas estructuras y usarla para potenciales aplicaciones en la generación de energías mecánica y eléctrica que podrían emplear energía solar como fuente.

Índice general

Introducción	IV
1. Estructuras Fotónicas	1
1.1. Fenómeno de la Banda Prohibida Fotónica	2
1.1.1. Ecuaciones de Maxwell	3
2. Expresión analítica para los coeficientes de reflexión y transmisión de un cristal fotónico FCC en la aproximación de ondas escalares	8
2.1. Aproximación de Ondas Escalares	8
2.1.1. Relación de Dispersión en la AOE	11
2.2. Espectro de Transmitancia	13
3. Fuerza Electromagnética Sobre Una Capa Dieléctrica	19
3.1. Ley de Lorentz	19
3.2. Tensor de esfuerzos de Maxwell	20
3.3. Fuerza electromagnética en términos del tensor de Maxwell	22
3.4. Propagación de una Onda Electromagnética en capa	25
3.5. Presión de Radiación sobre la capa	28
3.5.1. Fuerzas dentro de la capa	30
3.5.2. Fuerzas en dirección paralela	32
3.5.3. Fuerzas en dirección perpendicular	33
4. Presión de Radiación Sobre un Cristal 3D	38
Conclusiones	42
Apéndice A: Coeficientes de Fourier de la Constante Dieléctrica	43
Apéndice B: Teorema de Bloch	45
Bibliografía	48

Introducción

Los Cristales Fotónicos (CF) se hacen comúnmente de materiales dieléctricos periódicos [1], a veces de nanoestructuras [2] que alteran la propagación de fotones. Los modos fotónicos que pasan a través de los CF crean bandas conocidas como bandas fotónicas, mientras aquellos que no pueden atravesarlos, crean bandas prohibidas que se conocen como bandgaps fotónicos. Estas bandas prohibidas dan lugar a diferentes fenómenos ópticos, por ejemplo: espejos omnidireccionales de alta reflexión [3], oscilaciones de Bloch [4, 5], sensado [6], refracción negativa [7] y oscilaciones mecánicas [8]. Existe un diverso número de potenciales aplicaciones para los CF, particularmente en el campo de las comunicaciones ópticas [9].

Los CF se pueden hacer de diferentes maneras. Tanto las películas delgadas como el material en bulto se pueden fabricar a través de rutas físicas o químicas. Además, algunas variantes se prestan para el autoensamblaje, mientras que otras se preparan utilizando técnicas litográficas. Los CF autoensamblados son generalmente estructuras tridimensionales, mientras que los CF modelados litográficamente son bidimensionales.

El tipo de CF fabricado y su tecnología de fabricación están dictados por la aplicación particular a la que está destinado el material. Muchos usos potenciales de los CF requieren una película delgada del material sobre un sustrato transparente. En este caso, se puede usar el autoensamblaje de esferas de sílice o poliestireno para formar capas uniformes de esferas apiladas y compactas que exhiben características de CF tridimensionales (CF-3D). Estos tipos de CF son comúnmente conocidos como cristales coloidales u ópalos artificiales [10]. En los últimos años una línea de investigación que ha comenzado a explotarse es la relacionada con la combinación de ópalos con otros materiales, específicamente nanopartículas metálicas (NP).

Debido a la experiencia adquirida en la síntesis y caracterización de ópalos de SiO_2 , en esta tesis se plantea un análisis sistemático para la inducción de fuerzas electromagnéticas sobre estas estructuras dieléctricas bajo la radiación de luz modulada. Para establecer los principios de mejoramiento de la fuerza electromagnética, es importante analizar los espectros teóricos reflexión y transmisión para así conocer la presión de radiación en la estructura fotónica tridimensional.

Esta tesis se divide en cuatro Capítulos y una sección de conclusiones. En el primer Capítulo se hace una revisión de la literatura respecto a la teoría de las estructuras fotónicas. Se discute el fenómeno de la banda prohibida y su explicación a partir de las ecuaciones de Maxwell.

En el segundo Capítulo se describe la aproximación de ondas escalares y se obtiene una expresión analítica para los coeficientes de reflexión y transmisión de un cristal fotónico FCC, necesarios para la obtención de la presión de radiación sobre el cristal.

El tercer Capítulo contiene el estudio de la fuerza electromagnética sobre una capa dieléctrica. Se describe a la fuerza electromagnética mediante el tensor de esfuerzos de Maxwell. Se obtienen expresiones analíticas de las fuerzas dentro, paralela y perpendicular a la capa.

El cuarto Capítulo presenta la teoría de la presión de radiación sobre un cristal 3D, con el fin de inducir un incremento en las fuerzas electromagnéticas en estas estructuras y usarla para potenciales aplicaciones en la generación de energías mecánica y eléctrica que podrían emplear energía solar como fuente. Finalmente, se presenta un resumen de las conclusiones principales de la tesis.

Capítulo 1

Estructuras Fotónicas

Un cristal fotónico (CF) es un material cuya estructura consiste en una repetición periódica de una base elemental la cual genera una función dieléctrica periódica, la variación periódica de la constante dieléctrica se diseña para afectar la propagación de fotones, de forma análoga a cómo el potencial periódico de un semiconductor afecta a la propagación de los electrones [11]. En un cristal fotónico la interferencia que tiene lugar entre los haces reflejado y transmitido en cada interfase de los medios con diferente constante dieléctrica, será constructiva sólo para algunas frecuencias y en algunas direcciones.

Los principales parámetros que determinan las propiedades de un cristal fotónico son: su estructura cristalina, topología, contraste de constantes dieléctricas y factor de llenado [12].

- **Estructura cristalina:** Esto es, la morfología de la base elemental y su patrón de repetición sobre el espacio, dichas bases pueden tener diferentes configuraciones. En física del estado sólido las principales estructuras son SC, FCC, BCC y HCP. La estructura cristalina define la modulación de las constantes dieléctricas.
- **Topología:** Una vez definida la base, es importante identificar los puntos de simetría del material así como las zonas con mayor constante dieléctrica, una topología uniforme y ordenada brindará mejores resultados.
- **Contraste de constantes dieléctricas:** Éste es uno de los parámetros principales, en un cristal unidimensional, la brecha prohibida se abre tan pronto como hay diferencia de constante dieléctrica de los medios que lo componen.
- **Factor de llenado:** Es la razón entre el volumen ocupado por uno de los materiales con respecto al volumen total.

La combinación de todos estos factores hace que existan multitud de posibles estructuras con diversas propiedades fotónicas.

Un cristal fotónico es, por tanto, un material en el que existe una modulación periódica de la constante dieléctrica en una, dos o las tres direcciones del espacio; lo

que clasifica los cristales fotónicos en unidimensionales (1D), bidimensionales (2D) y tridimensionales (3D), respectivamente [13], tal y como se muestra en la Fig. 1.1.

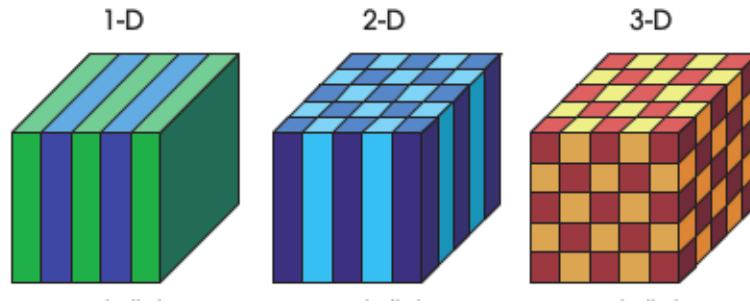


Figura 1.1: Ejemplos clasificación cristales fotónicos unidimensionales (1D), bidimensionales (2D) y tridimensionales (3D). [1].

El objetivo en la investigación en cristales fotónicos, es controlar los patrones de los materiales en una escala de longitud comparable a la longitud de onda de la luz, en una, dos y tres dimensiones, creando así materiales con características ópticas diseñadas [14].

El estudio de las propiedades ópticas de los materiales ha revolucionado la ciencia de forma asombrosa, en las últimas décadas el entendimiento y manejo de propiedades ópticas de los materiales han logrado generar avances científicos y tecnológicos importantes.

Las principales aplicaciones de los cristales fotónicos se clasifican como:

- Guías de onda (fibras ópticas).
- Mejora la eficiencia de circuitos optoacoplados y ordenadores ópticos.
- Biomedicina: Detectores químicos y Biosensores.
- Creación de espejos de alta reflectividad en láseres.
- Evitar el efecto Joule.
- Filtros ópticos.

1.1. Fenómeno de la Banda Prohibida Fotónica

Debido a la periodicidad y al contraste en la constante dieléctrica de los materiales que forman el cristal, puede ocurrir la apertura de una brecha o “gap” de frecuencias prohibidas en la cual las ondas electromagnéticas que tienen una frecuencia en ese rango no pueden propagarse en el cristal [15]. A medida que aumenta el contraste de constantes dieléctricas en un cristal fotónico, la anchura de estas bandas prohibidas aumenta. De manera que, si el contraste es suficientemente alto y la geometría de la estructura es la adecuada, puede producirse el solapamiento de los intervalos

prohibidos de las distintas direcciones, dando lugar a otro intervalo prohibido cuyo rango de frecuencias no depende de la dirección de propagación en el cristal. Los cristales fotónicos que presentan esta característica poseen intervalo prohibido completo, en caso de que el solapamiento no se produzca, el material presenta intervalos pseudo-prohibidos [16]. Esta propiedad es de suma importancia ya que dan lugar a diferentes fenómenos ópticos los cuales son imposibles de generar con sistemas ópticos convencionales, por ejemplo, los espejos omnidireccionales de alta reflexión. Además, nos permite controlar la luz con facilidad.

Por otro lado, los modos fotónicos que pasan a través de los CF crean bandas conocidas como bandas fotónicas.

1.1.1. Ecuaciones de Maxwell

La estructura de bandas determina muchas de las propiedades del material, así que para conocer estas propiedades, debemos estudiar la electrodinámica del sistema. Todo el electromagnetismo macroscópico, incluida la propagación de la luz en un cristal fotónico, se rige por las cuatro ecuaciones macroscópicas de Maxwell [17].

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \text{Ley de Gauss} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{Ley de Gauss para campo magnético} \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Ley de Faraday} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{Ley de Ampere generalizada} \quad (1.4)$$

donde \vec{E} y \vec{H} son los campos eléctricos y magnéticos macroscópicos, \vec{D} y \vec{B} son los campos de desplazamiento y de inducción magnética, y ρ y \vec{J} son las densidades de corriente y carga libre, respectivamente.

Para desacoplar las ecuaciones de campo eléctrico y magnético, seguiremos el procedimiento utilizado en [1] como se describe a continuación.

Considerando una onda que se propaga dentro de un medio dieléctrico mixto (macroscópico e isotrópico), sin dispersión, sin cargas o corrientes libres y que las intensidades de campo son lo suficientemente pequeñas como para suponer que estamos en el régimen lineal, de modo que \vec{E} y \vec{D} están relacionados por ϵ_0 multiplicado por una función dieléctrica escalar ϵ , también llamada permitividad relativa.

Con este tipo de medio en mente, en el que la luz se propaga pero no hay fuentes de luz, podemos establecer $\rho = 0$ y $\vec{J} = 0$. Por otro lado, relacionamos \vec{D} con \vec{E} y \vec{B} con \vec{H} , usando las relaciones constitutivas apropiadas para nuestro problema, tenemos que $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$. Una ecuación similar relaciona $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ (donde μ_0 es la permeabilidad al vacío), pero para la mayoría de los materiales dieléctricos de interés la permeabilidad magnética relativa μ está muy cerca de la unidad y podemos establecer $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ por simplicidad. Con todos estos supuestos en su lugar, las ecuaciones de Maxwell

(1.1-1.4) se convierten a:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) &= 0 & \nabla \cdot \epsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}, t) &= 0 \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} & \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) &= \epsilon_0 \epsilon(\vec{r}) \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

A pesar de restringirse a medios lineales y sin pérdidas; y de no tomar en cuenta fenómenos físicos interesantes, es común realizar aproximaciones a casos ideales en los que los sistemas son simples, dando como resultado una fácil modelación matemática. Además de que muchas propiedades interesantes y útiles surgen del caso elemental de materiales lineales sin pérdidas. Dando como resultado que la teoría de estos materiales sea mucho más simple de entender y es prácticamente exacta, por lo que es una base excelente sobre la cual construir la teoría de los medios más complejos.

Por otro lado, tanto \vec{E} como \vec{H} son funciones dependientes tanto del tiempo como del espacio. Sin embargo, debido a que las ecuaciones de Maxwell son lineales, podemos separar la dependencia temporal de la espacial expandiendo los campos en un conjunto de modos armónicos. Esto es ventajoso ya que por análisis de Fourier podemos construir cualquier solución con una combinación apropiada de sus modos armónicos. De esta forma, podemos escribir una expresión para los campos magnético y eléctrico de la forma:

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{H}(\vec{r})e^{-i\omega t}, \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Sustituyendo las anteriores ecuaciones en las relaciones de la divergencia del campo eléctrico y magnético (Ec. 1.5) respectivamente, obtenemos que:

$$\nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0 \quad \nabla \cdot \epsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) = 0. \quad (1.7)$$

Este par de ecuaciones tienen una interpretación física simple: no hay fuentes puntuales o sumideros de desplazamiento y campos magnéticos en el medio. De igual manera, sustituyendo en las ecuaciones del rotacional del campo eléctrico y magnético respectivamente (Ec. 1.5) y realizando las derivadas temporales, dando como resultado las ecuaciones acopladas:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) &= i\omega\mu_0\vec{H}(\vec{r}), \\ \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) &= -i\omega\epsilon_0\epsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}), \end{aligned} \quad (1.8)$$

Para desacoplar estas ecuaciones, podemos dividir $\epsilon(\vec{r})$ en la ecuación inferior, después aplicar el rotacional sobre toda la ecuación. Luego usamos la ecuación superior para eliminar la dependencia del campo $\vec{E}(\vec{r})$. Además, las constantes ϵ_0 y μ_0 se pueden combinar para obtener la velocidad de la luz en el vacío, $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. El resultado es una ecuación solo para el campo magnético de la forma:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) \right) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \vec{H}(\vec{r}). \quad (1.9)$$

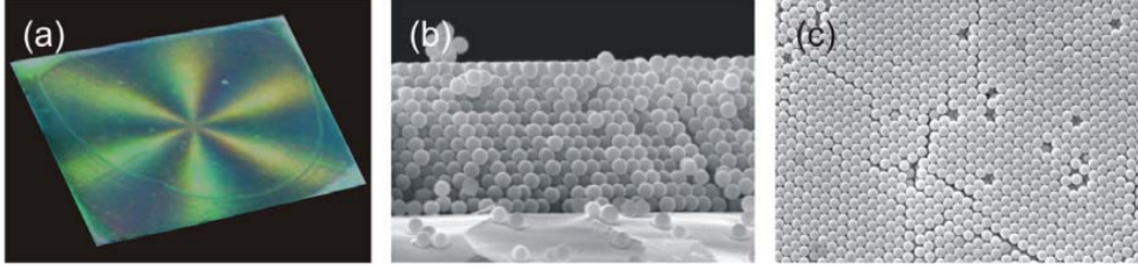


Figura 1.2: (a) Fotografía de un ópalo artificial formado por esferas de 500 nm crecido por spincoating. Micrografías electrónicas de barrido de la sección transversal (b) y la superficie (c) del cristal mostrado en (a) [13].

De manera análoga para el campo eléctrico, podemos aplicar el rotacional a la ecuación superior. Luego usamos la ecuación inferior para eliminar $\vec{H}(\vec{r})$, obtenemos una ecuación solo para el campo eléctrico de la forma:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}(\vec{r})) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.10)$$

Recordando que $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ y usando el hecho de que la divergencia del campo eléctrico es nula (dado que se considera $\rho = 0$), de la anterior ecuación podemos obtener la ecuación de Helmholtz para el campo eléctrico

$$-\nabla^2 \vec{E} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}). \quad (1.11)$$

Esta es una de las ecuaciones más importantes que usaremos en el siguiente capítulo para explicar la propagación de luz en una estructura cristalina, la cual se presenta cuando la permitividad de la estructura es periódica. Las eigensoluciones de la Ec. (1.11) tienen forma de serie de la función $\omega_n(k)$, que puede ser visto como sucesiones (n) de las energías ω para cada vector de onda k . Las colecciones de todas las soluciones de $\omega_n(k)$ se conoce como estructura de bandas.

Los CF auto ensamblados son generalmente estructuras tridimensionales, formados por capas de esferas uniformes apiladas y compactas que exhiben características de CF tridimensionales (Fig. 1.2). Estos CF son conocidos como cristales coloidales u ópalos artificiales [18].

A pesar de poseer una estructura amorfa, los ópalos artificiales pueden ser dopados de nanopartículas de diferentes tipos por ejemplo: Au, Fe₃, O₄, Co, entre otras. Las cuales modifican de forma única las propiedades físicas del material, por ejemplo, un ópalo de SiO₂ con nanopartículas (NPs) de Co, genera un amplio contraste dieléctrico el cual genera la aparición de gaps completos [19]. Por otro lado, uno dopado con NPs de magnetita puede proporcionar posibilidades de la manipulación de la luz, además de un aumento considerable en la respuesta magneto óptica del material.

Las funciones de onda de los electrones en un cristal son periódicas, cada una con una periodicidad Λ_p , de manera que, en lugar de trabajar en el espacio directo de los vectores \vec{R} de la red de Bravais, para muchas cosas es mucho más útil trabajar en el

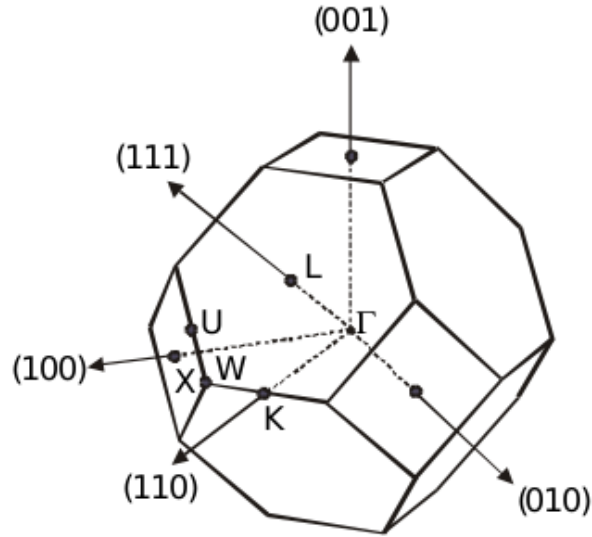


Figura 1.3: Primera zona de Brillouin de la estructura FCC. El punto Γ , en el centro del cubo-octaedro, indica el origen de coordenadas en el espacio recíproco. Los puntos en el borde de zona X , K , L , W y U determinan direcciones de alta simetría en el cristal.

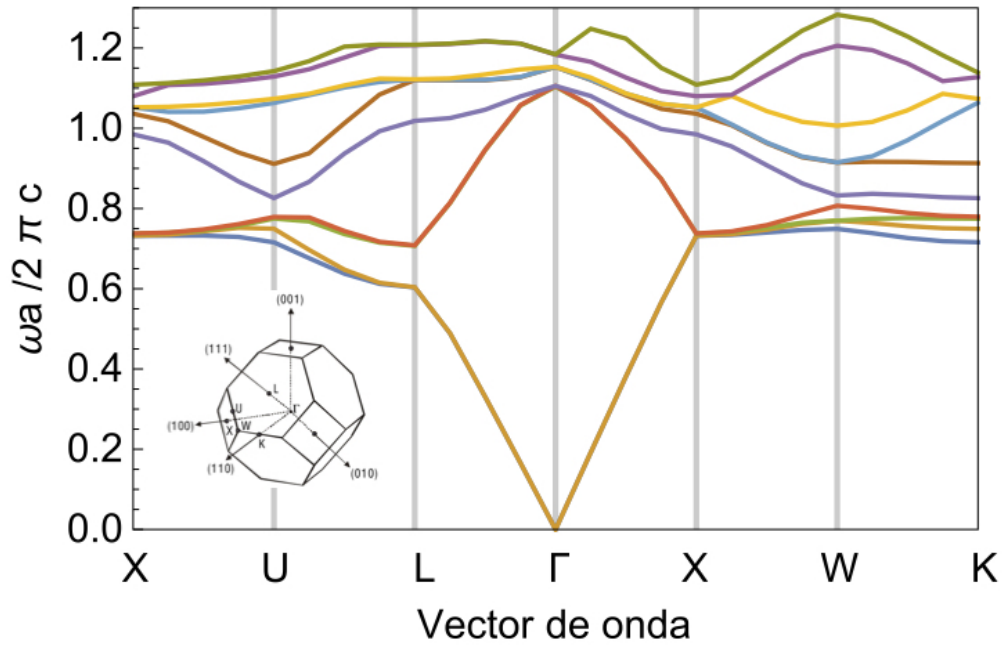


Figura 1.4: Estructura de bandas para un ópalo formado de esferas de SiO_2 con estructura FCC. Izquierda parte inferior: Primera zona de Brillouin de SiO_2 mostrando los puntos de alta simetría correspondientes a un ópalo de esferas de SiO_2 . (Cortesía del Dr. Miller Toledo Solano)

espacio de la transformada de Fourier o de los vectores de onda \vec{G} . En cristales, a este espacio se le denomina espacio recíproco ya que sus vectores \vec{G} tienen dimensiones inversas o recíprocas que los \vec{R} del espacio normal o directo.

El conjunto \mathbf{G} forma un espacio vectorial, por lo que es una red de Bravais del espacio recíproco, que se denomina red recíproca. Por tanto, los cálculos en el espacio recíproco se pueden limitar a una sola celda primitiva recíproca y en el resto de celdas se repite por traslaciones de los vectores \vec{G} .

Entre las infinitas celdas primitivas recíprocas posibles, conviene elegir la única que tiene todas las simetrías puntuales de la red de Bravais, que es la llamada primera zona de Brillouin, ya que el uso de la simetría nos permite trabajar únicamente en una pequeña región que es distinta por simetría.

La figura 1.4 muestra un esquema de zona reducida para un ópalo formado por esferas de SiO_2 con estructura cúbica centrada en las caras (FCC). En este diagrama, las energías están representadas para los valores de \vec{k} de la primera zona de Brillouin, tomando el punto $\Gamma(k = 0)$ como origen, el gap que se abre en el punto L entre la primera y segunda bandas de la figura, es el responsable del intenso pico de atenuación observado en los espectros de transmisión obtenidos a incidencia normal ($\theta = 0^\circ$) con respecto a los planos (111). Muestra de manera simultánea la forma de las bandas en diversas direcciones correspondientes a ΓK , ΓL , ΓW y ΓX . La figura 1.3 muestra el poliedro correspondiente a la primera zona de Brillouin del ópalo.

Con base en lo anterior, el estudio de las propiedades ópticas de ópalos artificiales es de suma importancia para generar avances científicos y tecnológicos importantes.

Capítulo 2

Expresión analítica para los coeficientes de reflexión y transmisión de un cristal fotónico FCC en la aproximación de ondas escalares

Ha habido muchos tratamientos teóricos de las propiedades ópticas de los materiales con funciones dieléctricas periódicas espacialmente. Muchos de estos son computacionalmente bastante intensivos, y varios autores [20, 21] han señalado la necesidad de un enfoque más simple que al menos pueda proporcionar una comprensión cualitativa. Un candidato para esto es la aproximación de onda escalar de aquí en adelante denominada AOE, aplicada por primera vez al problema de la banda fotónica por Satpathy y sus colegas [22]. Aunque se han discutido las deficiencias de la AOE ampliamente [23], estas dificultades están relacionadas principalmente con su uso en la descripción de la propagación a lo largo de una dirección arbitraria en el cristal tridimensional. En esta tesis, nos ocuparemos únicamente de la propagación electromagnética a lo largo de direcciones de alta simetría del cristal, por ejemplo, la dirección [111]. En este caso, la aproximación unidimensional inherente al AOE simple es apropiada, y está razonablemente de acuerdo con las observaciones experimentales.

2.1. Aproximación de Ondas Escalares

En un cristal periódico, considerado como material sin pérdida y en donde la constante dieléctrica es dependiente de la posición $\epsilon(\vec{r})$, el campo eléctrico puede ser obtenido desde la ecuación (1.11)

$$-\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon'(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) = \epsilon_p \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}), \quad (2.1)$$

donde la constante dieléctrica $\epsilon(\vec{r})$ es dependiente de la posición y fue separada en dos partes:

$$\epsilon(\vec{r}) = \epsilon'(\vec{r}) + \epsilon_p, \quad (2.2)$$

donde ϵ_p es la constante dieléctrica promedio y $\epsilon'(\vec{r})$ la parte periódica de la constante dieléctrica. La constante dieléctrica promedio puede escribirse como

$$\epsilon_p = f\epsilon_s + (1 - f)\epsilon_b = [(\epsilon_c - 1)f + 1]\epsilon_b, \quad (2.3)$$

donde f es el factor de estructura (la fracción de volumen de las esferas dieléctricas en el cristal), ϵ_s es la constante dieléctrica de las nanoesferas y ϵ_b la constante dieléctrica del espacio intersticial. $\epsilon_c = \epsilon_s/\epsilon_b$ es el contraste dieléctrico. El factor de estructura f para un cristal FCC está dado por

$$f = 4 \frac{(4/3)\pi R_s^3}{a^3}, \quad (2.4)$$

donde a es la constante de red y R_s es el radio de las esferas dieléctricas.

La parte periódica de la constante dieléctrica del cristal fotónico $\epsilon'(\vec{r})$ puede ser representada por la siguiente ecuación:

$$\epsilon'(\vec{r}) = \epsilon_b + (\epsilon_s - \epsilon_b) \theta(\vec{r}), \quad (2.5)$$

donde $\theta(x)$ es la función escalón unitaria; $\theta(\vec{r}) = 1$ para $|\vec{r}| \leq R_s$ y cero en otro caso. Además, la Ec. 2.5 puede ser expresada en la forma usual como

$$\epsilon'(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} U_{\vec{G}} e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}}, \quad (2.6)$$

donde \vec{G} es un vector de la red recíproca y donde los coeficientes de Fourier $U_{\vec{G}}$ para un ópalo de esferas con estructura FCC, están dados por (ver Apéndice A)

$$U_{\vec{G}} = \frac{16\pi}{(aG)^3} (\epsilon_c - 1) \epsilon_b [\text{sen}(GR_s) - GR_s \cos(GR_s)]. \quad (2.7)$$

Para simplificar la descripción de la propagación de las ondas en la estructura periódica, dos suposiciones básicas son hechas dentro de la aproximación de ondas escalares. La primera consiste en que el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ se considera un cantidad escalar más bien que una cantidad vectorial en el caso de incidencia normal a los planos (111). De esta manera se expande en función de vectores de Bloch:

$$E(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \sum_{\vec{k}} C_{\vec{k}-\vec{G}} e^{i(\vec{k}-\vec{G})\cdot\vec{r}}, \quad (2.8)$$

donde $\sum_{\vec{G}}$ esta sumado sobre todos los vectores de la red recíproca y $\sum_{\vec{k}}$ sobre la primera zona de Brillouin.

Si se sustituye la ecuación (2.6) para la constante dieléctrica y la ecuación (2.8) del campo eléctrico expandido en función de vectores de Bloch en la ecuación (2.1), se obtiene

$$-\sum_{\vec{G}, \vec{k}} C_{\vec{k}-\vec{G}} \nabla^2 e^{i(\vec{k}-\vec{G})\cdot\vec{r}} - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}} U_{\vec{G}} e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} \sum_{\vec{G}, \vec{k}} C_{\vec{k}-\vec{G}} e^{i(\vec{k}-\vec{G})\cdot\vec{r}} = \epsilon_p \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}, \vec{k}} C_{\vec{k}-\vec{G}} e^{i(\vec{k}-\vec{G})\cdot\vec{r}}. \quad (2.9)$$

Realizando la operación laplaciano sobre la función exponencial y haciendo los cambios de índice $\vec{G} \rightarrow \vec{G}'$ y $\vec{k} \rightarrow \vec{k}'$ en la segunda y tercera suma respectivamente, se puede reescribir en una forma más conveniente la Ec. (2.9) como

$$\sum_{\vec{G}, \vec{k}} (\vec{k} - \vec{G})^2 C_{\vec{k}-\vec{G}} e^{i(\vec{k}-\vec{G}) \cdot \vec{r}} - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}, \vec{G}', \vec{k}'} U_{\vec{G}'} C_{\vec{k}'-\vec{G}} e^{i(\vec{G}'+\vec{k}'-\vec{G}) \cdot \vec{r}} = \epsilon_p \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}, \vec{k}} C_{\vec{k}-\vec{G}} e^{i(\vec{k}-\vec{G}) \cdot \vec{r}},$$

y factorizando términos semejantes resulta

$$\sum_{\vec{G}, \vec{k}} \left[(\vec{k} - \vec{G})^2 - \epsilon_p \frac{\omega^2}{c^2} \right] C_{\vec{k}-\vec{G}} e^{i(\vec{k}-\vec{G}) \cdot \vec{r}} = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}, \vec{G}', \vec{k}'} U_{\vec{G}'} C_{\vec{k}'-\vec{G}} e^{i(\vec{G}'+\vec{k}'-\vec{G}) \cdot \vec{r}}. \quad (2.10)$$

Si se usa la condición de dispersión $\vec{k} + \vec{G} = \vec{k}'$, se pueden cambiar los términos dependientes de $\vec{k}' - \vec{G}$ por \vec{k} , de tal suerte que la suma triple se reduzca a una suma doble, es decir:

$$\sum_{\vec{G}, \vec{k}} \left[(\vec{k} - \vec{G})^2 - \epsilon_p \frac{\omega^2}{c^2} \right] C_{\vec{k}-\vec{G}} e^{i(\vec{k}-\vec{G}) \cdot \vec{r}} = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}', \vec{k}} U_{\vec{G}'} C_{\vec{k}} e^{i(\vec{G}'+\vec{k}) \cdot \vec{r}}. \quad (2.11)$$

Finalmente, realizando el cambio de índice \vec{G}' por $-\vec{G}$ en la parte derecha de la ecuación y que en particular para una estructura FCC, el valor de $U_{\vec{G}}$ solo depende de la magnitud del vector \vec{G} (Resultado obtenido en el Apéndice 1), es decir $U_{\vec{G}} = U_{-\vec{G}}$, la Ec. (2.11) se puede escribir como

$$\sum_{\vec{G}, \vec{k}} \left[(\vec{k} - \vec{G})^2 - \epsilon_p \frac{\omega^2}{c^2} \right] C_{\vec{k}-\vec{G}} e^{i(\vec{k}-\vec{G}) \cdot \vec{r}} = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}, \vec{k}} U_{\vec{G}} C_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}-\vec{G}) \cdot \vec{r}}, \quad (2.12)$$

o bien, al igualar término a término

$$\left[(\vec{k} - \vec{G})^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_p \right] C_{\vec{k}-\vec{G}} = \frac{\omega^2}{c^2} U_{\vec{G}} C_{\vec{k}}. \quad (2.13)$$

La segunda suposición consiste en considerar que las condiciones del experimento favorecen fuertemente la dispersión de un conjunto de planos [111] (para una estructura FCC) y que los efectos de los otros planos pueden ser despreciables. Esto se puede justificar notando que la probabilidad de dispersión está determinada por los coeficientes de Fourier de $U_{\vec{G}}$, los cuales decrecen con el incremento de $|\vec{G}|$. Así, únicamente los valores más pequeños de los vectores de la red recíproca contribuyen fuertemente para la incidencia a 0° . La onda incidente se propaga normal a los planos (111), entonces, es necesario considerar la difracción desde estos planos.

En el sistema de ecuaciones, solo se necesitan mantener los términos

$$|\vec{k} - \vec{G}| \approx |\vec{k}| \text{ y } |\vec{G}| = \left[\frac{2\pi}{d_{111}} \right]. \quad (2.14)$$

Esto reduce la Ec. (2.13) eliminando el caracter vectorial y dando como resultado el par de ecuaciones acopladas

$$[k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_p]C_k - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 U_G C_{k-G} = 0, \quad (2.15)$$

$$[(k-G)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_p]C_{k-G} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 U_G C_k = 0. \quad (2.16)$$

De la Ec. 2.15, el cociente C_{k-G}/C_k puede escribirse como

$$\sum \equiv \frac{C_{k-G}}{C_k} = \frac{k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_p}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 U_G} = \frac{k^2 - k_0^2 \epsilon_p}{U_G k_0^2}, \quad (2.17)$$

donde $k_0 = \omega/c$. Sustituyendo C_{k-G} de la Ec. (2.17) en la Ec. (2.16) se puede eliminar la dependencia sobre los coeficientes C_k , obteniendo

$$\left[k^2 - \epsilon_p \frac{\omega^2}{c^2}\right] \left[(k-G)^2 - \epsilon_p \frac{\omega^2}{c^2}\right] = \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 U_G^2. \quad (2.18)$$

Si se define $x^2 \equiv \epsilon_p (\omega/c)^2$ y $A \equiv \frac{U_G}{\epsilon_p} x^2$, la Ec. (2.18) puede ser reescrita de forma compacta como

$$(k^2 - x^2)[(k-G)^2 - x^2] = A^2. \quad (2.19)$$

2.1.1. Relación de Dispersión en la AOE

Con base en la Ec. 2.19 se puede obtener la relación de dispersión k en términos de ω , dicho procedimiento se puede llevar a cabo como sigue:

$$\begin{aligned} A^2 &= (k^2 - x^2)[(k-G)^2 - x^2] \\ &= (k^2 - x^2)[k^2 - 2kG + G^2 - x^2] \\ &= [(k^2 - x^2)(k^2 - x^2)] - [(k^2 - x^2)(2kG - G^2)] \\ &= [k^2 - x^2]^2 - 2G(k - \frac{G}{2})(k^2 - x^2) \\ &= k^4 - 2k^2x^2 + x^4 - [2k^2G(k - \frac{G}{2})] + [2Gx^2(k - \frac{G}{2})] \\ &= k^4 - 2k^2x^2 + x^4 - 2k^2Gk + k^2G^2 + 2Gx^2k - Gx^2G \\ &= [k^4 - 2k^2Gk + k^2G^2] + [2x^2(kG - k^2)] + x^4 - x^2G^2 \\ &= (k^2 - kG)^2 - 2x^2(k^2 - kG) + x^4 - x^2G^2 \\ &= [(k^2 - kG) - x^2]^2 - x^2G^2, \end{aligned} \quad (2.20)$$

por lo tanto la Ec. (2.19) resulta en

$$A^2 = [(k^2 - kG) - x^2]^2 - x^2G^2, \quad (2.21)$$

y así

$$k^2 - kG - x^2 = \pm \sqrt{A^2 + x^2G^2}. \quad (2.22)$$

Sumando y restando $(G/2)^2$ en la parte izquierda de la Ec. (2.22) para completar el binomio cuadrado de $(k - G/2)$, se obtiene

$$\left(k - \frac{G}{2}\right)^2 - \left(\frac{G}{2}\right)^2 - x^2 = \pm\sqrt{A^2 + x^2G^2}, \quad (2.23)$$

finalmente, es fácil obtener que

$$k = \frac{G}{2} \pm \sqrt{F(\omega)}, \quad (2.24)$$

en donde $F(\omega)$ está dado por

$$F(\omega) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_p + \left(\frac{G}{2}\right)^2 \pm \sqrt{U_G^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_p G^2}. \quad (2.25)$$

$F(\omega) > 0$ corresponde a modos permitidos, es decir, modos que se pueden propagar por el cristal y para los cuales k es real. $F(\omega) < 0$ corresponde a modos prohibidos, en los cuales $k = G/2 \pm iq$ es compleja y donde $q = \sqrt{|F(\omega)|}$.

Ahora, se introduce una variable adimensional con la finalidad de obtener la relación de dispersión en términos de la longitud de onda incidente λ . Dicha variable es definida como

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\lambda_B} - 1, \quad (2.26)$$

donde λ_B es la longitud de onda de Bragg. En incidencia normal con $G = 2\pi/d_{111}$ se puede obtener:

$$\lambda_B = 2d_{111}\sqrt{\epsilon_p} = 2\frac{2\pi}{G}\sqrt{\epsilon_p} = \frac{4\pi\sqrt{\epsilon_p}}{G}, \quad (2.27)$$

por lo tanto, al sustituir la Ec. (2.27) en la Ec. (2.26) y usando la relación $k_0 = (\omega/c)^2 = 2\pi/\lambda$ se obtiene que:

$$G = 2(\Lambda + 1)k_0\sqrt{\epsilon_p}. \quad (2.28)$$

Partiendo de la ecuación (2.24) para la relación de dispersión escrita de forma completa

$$k = \frac{G}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_p + \left(\frac{G}{2}\right)^2 - \sqrt{U_G^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_p G^2}}, \quad (2.29)$$

factorizando $(G/2)$ y usando la relación $k_0 = (\omega/c)$, la Ec. (2.29) resulta:

$$k = \frac{G}{2} \left[1 \pm \sqrt{\frac{4k_0^2\epsilon_p}{G^2} + 1 - 4\sqrt{\frac{U_G^2 k_0^4}{G^4} + \frac{k_0^2\epsilon_p}{G^2}}} \right]. \quad (2.30)$$

Si se sustituye G de la Ec. (2.28) en (2.30) se obtiene:

$$k = (\Lambda + 1)k_0\sqrt{\epsilon_p} \left[1 \pm \sqrt{\frac{1}{(\Lambda + 1)^2} + 1 - 4\sqrt{\frac{U_G^2}{2^4(\Lambda + 1)^4\epsilon_p^2} + \frac{4}{2^4(\Lambda + 1)^2}}} \right]. \quad (2.31)$$

Finalmente, distribuyendo $(\Lambda + 1)$ la Ec. (2.31) se obtiene

$$k = k_0 \sqrt{\epsilon_p} \left[(\Lambda + 1) \pm \sqrt{1 + (\Lambda + 1)^2 - \sqrt{\frac{U_G^2}{\epsilon_p^2} + 4(\Lambda + 1)^2}} \right], \quad (2.32)$$

o bien, escribiendo a $k_0 = 2\pi/\lambda$ y $(\Lambda + 1) = \lambda/\lambda_B$, es fácil reescribir la Ec. (2.32) de la forma

$$k = 2\pi \sqrt{\epsilon_p} \left[\frac{1}{\lambda_B} \pm \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda_B^2} - \sqrt{\frac{U_G^2}{\epsilon_p^2 \lambda^4} + \frac{4}{\lambda^2 \lambda_B^2}}} \right], \quad (2.33)$$

el cual es el resultado más importante de la aproximación a ondas escalares.

2.2. Espectro de Transmitancia

Para determinar los límites de validez para la aproximación de ondas escalares, es necesario calcular el espectro de transmisión y poder compararlo con los datos experimentales. Para el caso en consideración, una buena aproximación establece la continuidad en las condiciones de frontera, tanto del campo eléctrico como en su primera derivada. Sin pérdida de generalidad, se puede tratar el campo eléctrico como un escalar en el caso de incidencia normal. Entonces, el campo puede ser escrito de la forma:

$$E(x) = \begin{cases} e^{ik_0x} + r e^{-ik_0x} & \text{(incidente)} \\ C_1(e^{ikx} + \Sigma e^{i(k-G)x}) + C_2(e^{-ikx} + \Sigma e^{i(k-G)x}) & \text{(interno)} \\ t e^{ik_0x} & \text{(transmitido)} \end{cases}$$

donde Σ corresponde al de la Ec. 2.17 y además, r y t son los coeficientes de reflexión y transmisión respectivamente. En la primera parte se ve como una onda incidente más una reflejada. Dentro del material fotónico, el campo eléctrico, que puede ser escrito desde la ecuación expandida en función de vectores de Bloch (Ec. 2.8), consiste de una onda viajando hacia la derecha y una viajando hacia la izquierda, donde k y $k - G$ son las componentes x de los vectores de onda y en donde, C_1 y C_2 son constantes en las capas de este material. Por último se escribe la onda transmitida.

Aplicando las condiciones de que ambos, $E(x)$ y dE/dx , deben de ser continuas en las fronteras $x_1 = 0$ y $x_2 = Nd_{111}$, donde N es un número natural, d_{111} es la distancia entre planos del conjunto [111], x_1 es el inicio del material y x_2 es el final del material, es posible tener un conjunto de ecuaciones para determinar el espectro de transmisión. Para $x_1 = 0$ debemos considerar la continuidad entre el campo E incidente y el campo E interno, es decir:

$$\begin{aligned} E_{inc}(x)|_{x=0} &= E_{int}(x)|_{x=0} \\ 1 + r &= C_1(1 + \Sigma) + C_2(1 + \Sigma). \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dE_{inc}}{dx} \right|_{x=0} &= \left. \frac{dE_{int}}{dx} \right|_{x=0} \\ k_0(1-r) &= C_1[k + (k-G)\Sigma] - C_2[k + (k-G)\Sigma]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Al sumar las ecuaciones anteriores se obtiene

$$1 = C_1 \left[(1 + \Sigma) \left(\frac{k_0 + k}{2k_0} - \frac{\Sigma G}{2k_0} \right) \right] + C_2 \left[(1 + \Sigma) \left(\frac{k_0 - k}{2k_0} \right) - \frac{\Sigma G}{2k_0} \right], \quad (2.36)$$

que al rescribirla en una forma conveniente da

$$1 = \left(\frac{1 + \Sigma}{2} \right) (C_1 + C_2) + \left(\frac{k(1 + \Sigma) - \Sigma G}{2k_0} \right) (C_1 - C_2). \quad (2.37)$$

Por otro lado, para $x_2 = Nd_{111}$ debemos considerar la continuidad entre el campo E interno y el campo E transmitido, es decir:

$$\begin{aligned} E_{int}(x)|_{x=x_2} &= E_{trans}(x)|_{x=x_2} \\ C_1(1+\Sigma)e^{ikx_2} + C_2(1+\Sigma)e^{-ikx_2} &= te^{ik_0x_2}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

y

$$\begin{aligned} \left. \frac{dE_{int}}{dx} \right|_{x=x_2} &= \left. \frac{dE_{trans}}{dx} \right|_{x=x_2} \\ C_1[k + (k-G)\Sigma e^{-iGx_2}]e^{ikx_2} - C_2[k + (k-G)\Sigma e^{iGx_2}]e^{-ikx_2} &= k_0te^{ik_0x_2}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Tomando en cuenta que $e^{\pm iGx_2} = 1$ con G un vector de la red recíproca, la Ec. (2.39) se puede reescribir de la forma

$$C_1[k + (k-G)\Sigma]e^{ikx_2} - C_2[k + (k-G)\Sigma]e^{-ikx_2} = k_0te^{ik_0x_2}, \quad (2.40)$$

o bien

$$C_1e^{ikx_2} - C_2e^{-ikx_2} = \frac{k_0te^{ik_0x_2}}{k(1+\Sigma) - \Sigma G}, \quad (2.41)$$

con base en las ecuaciones 2.38 y 2.41 se puede construir un sistema de ecuaciones para C_1 y C_2 como:

$$\begin{pmatrix} e^{ikx_2} & -e^{-ikx_2} \\ e^{ikx_2} & e^{-ikx_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0te^{ik_0x_2}/[k(1+\Sigma) - \Sigma G] \\ te^{ik_0x_2}/(1+\Sigma) \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Usando regla de Cramer para determinar los valores de C_1 y C_2 se obtiene

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{k_0}{k(1+\Sigma) - \Sigma G} + \frac{1}{1+\Sigma} \right) te^{i(k_0-k)x_2} \quad (2.43)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+\Sigma} - \frac{k_0}{k(1+\Sigma) - \Sigma G} \right) te^{i(k_0-k)x_2} \quad (2.44)$$

Ahora, sumando y restando ambos valores se tiene

$$C_1 + C_2 = \left[\frac{\cos(kx_2)}{1 + \Sigma} - \frac{ik_0 \operatorname{sen}(kx_2)}{k(1 + \Sigma) - \Sigma G} \right] t e^{i(k_0)x_2}. \quad (2.45)$$

$$C_1 - C_2 = \left[\frac{k_0 \cos(kx_2)}{k(1 + \Sigma) - \Sigma G} - \frac{i \operatorname{sen}(kx_2)}{1 + \Sigma} \right] t e^{i(k_0)x_2}. \quad (2.46)$$

Sustituyendo estas expresiones obtenidas para $C_1 + C_2$ y $C_1 - C_2$ en la ecuación (2.37), y después de despejar el coeficiente de transmisión, se logra obtener

$$t(\lambda) = \frac{2\beta_0 e^{-ik_0 N d_{111}}}{2\beta_0 \cos(kN d_{111}) - i(1 + \beta_0^2) \operatorname{sen}(kN d_{111})}, \quad (2.47)$$

donde N es el número de planos de la red [111] o capas en el cristal, k es el vector de onda en función de la ω , con

$$\beta_0 = \frac{k_0(1 - \Sigma)}{k(1 - \Sigma) + G\Sigma}. \quad (2.48)$$

Por otro lado, sustituyendo $C_1 + C_2$ en la ecuación (2.34), y después de despejar el coeficiente de reflexión se tiene

$$r(\lambda) = i \frac{(1 - \beta_0^2) \operatorname{sen}(kN d_{111})}{2\beta_0 \cos(kN d_{111}) - i(1 + \beta_0^2) \operatorname{sen}(kN d_{111})}. \quad (2.49)$$

Notando que en el coeficiente de transmisión no se toma en cuenta el sustrato. Entonces tomando la onda transmitida como $t(\lambda)E^{ik_1 x}$ donde k_1 es el vector de radiación del sustrato, $k_1 = n_{sub}\omega/c$. El resultado ahora es

$$t(\lambda) = \frac{2\beta_0 e^{-ik_1 N d_{111}} e^{i\Phi}}{(\beta_0 + \beta_1) \cos(kN d_{111}) - i(1 + \beta_0 \beta_1) \operatorname{sen}(kN d_{111})} \quad (2.50)$$

donde $\Phi = (k_1 - k_0)d_{111}/2$, y β_1 es

$$\beta_1 = \frac{k_1(1 - \Sigma)}{k(1 - \Sigma) + G\Sigma}. \quad (2.51)$$

Usando los coeficientes de reflexión (2.49) y transmisión (2.47), la reflectancia y la transmitancia de un ópalo de SiO_2 formado por N capas de esferas (ϵ_s de constante dieléctrica 1.46) cuando la luz incide perpendicular a la superficie del ópalo son mostrados en la Fig. 2.1. Estos datos pueden ser comparados con respuesta óptica de los sistemas periódicos obtenidos por los modelos de aproximación dipolo discreta (“DDA”) mostrados en la Fig. 2.2 [24]. Contrario al caso del modelo DDA, la aproximación de ondas escalares muestra que a medida que el grosor de la capas aumenta, la banda prohibida sufre un corrimiento al rojo. Sin embargo, tiende al mismo valor correspondiente a un ópalo 3D de 442 nm.

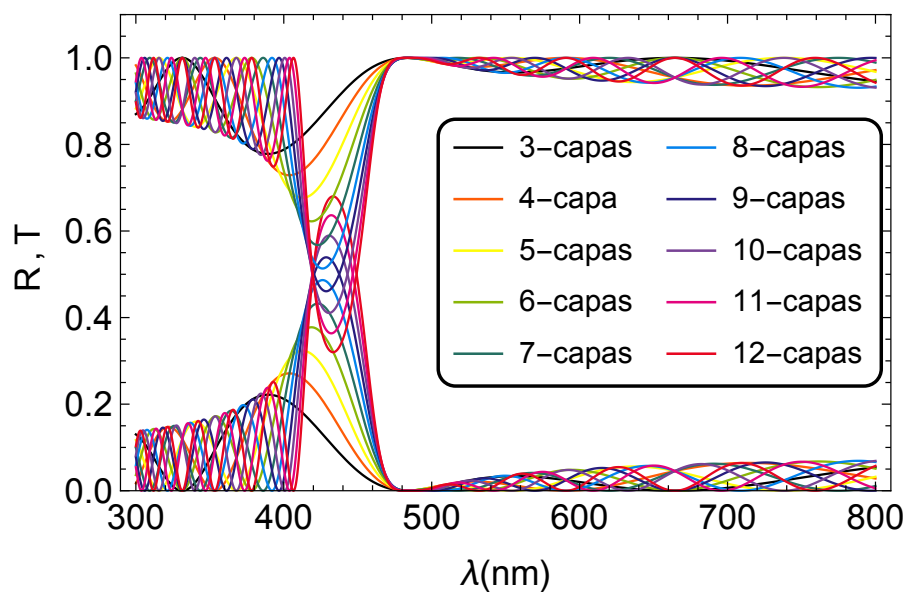


Figura 2.1: Reflectancia y transmitancia de una película compuesta de N capas de 200 nm de esferas de SiO₂ obtenidos por la aproximación de ondas planas.

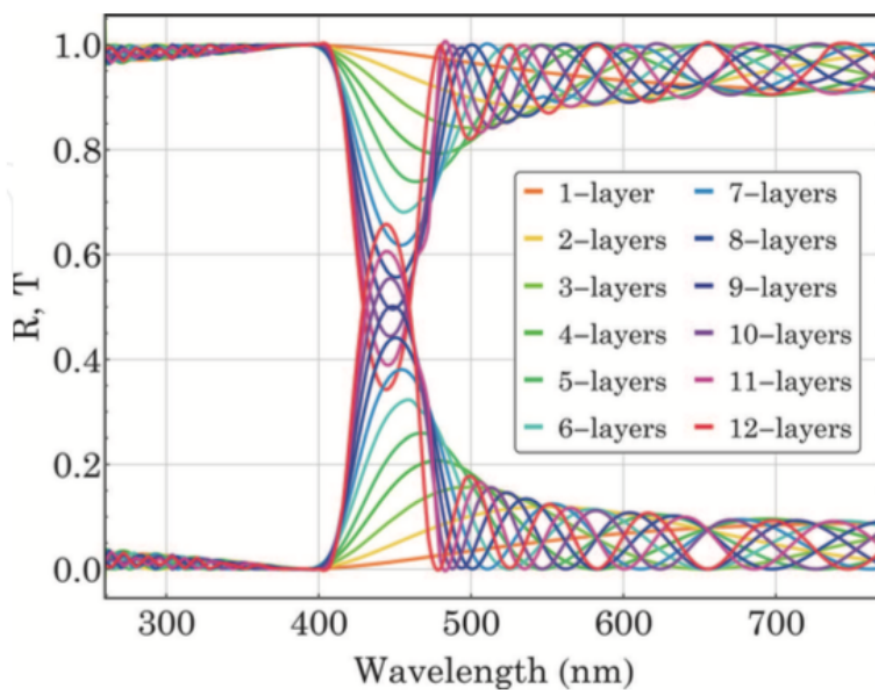


Figura 2.2: Reflectancia y transmitancia de una película compuesta de N capas de esferas de SiO₂ con diámetro promedio de 200 nm [24] obtenidos por el modelo DDA.

Una película con más de ocho capas se asemeja a las propiedades de volumen de un ópalo 3D.

2.2. ESPECTRO DE TRANSMITANCIA

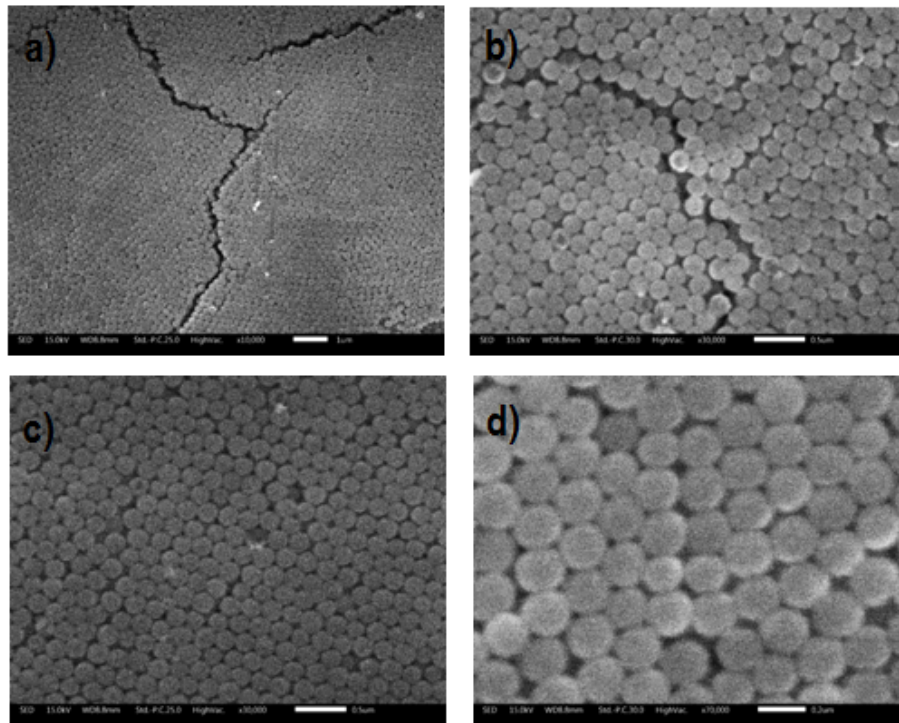


Figura 2.3: Imagen de SEM del ópalo de SiO_2 (muestra 1). a) $\times 10,000$ - $1\mu\text{m}$, b) $\times 30,000$ - $0.5\mu\text{m}$, c) $\times 30,000$ - $0.5\mu\text{m}$ y d) $\times 70,000$ - 0.2μ .

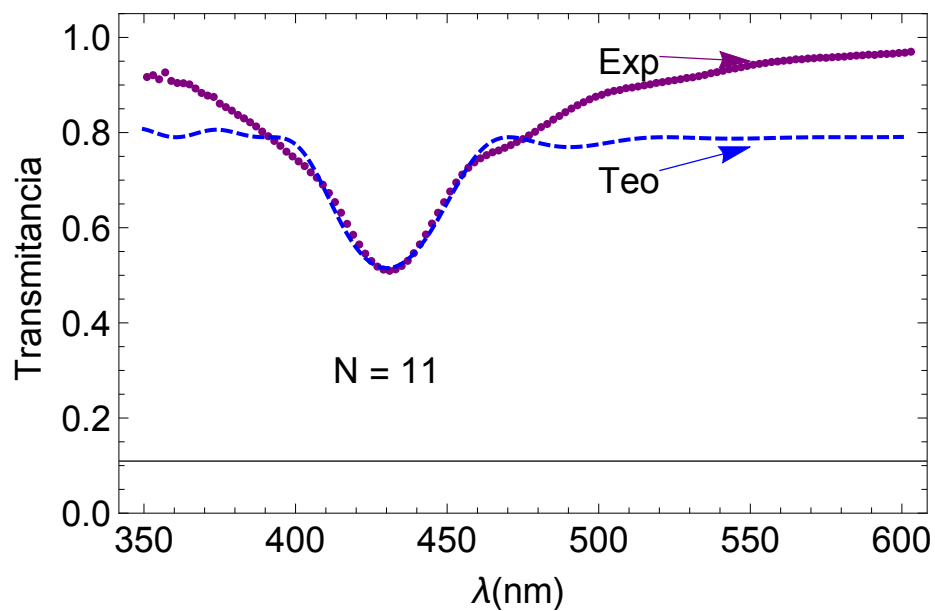


Figura 2.4: Comparación entre datos experimentales y teóricos de la transmitancia de la luz como una función de la longitud de onda incidente. La línea gruesa pertenece a los datos experimentales y la línea delgada son los datos de la simulación teórica.

La Fig. 2.3 muestra las imágenes típicas tomadas por SEM de los ópalos de SiO_2 [19]. Todas estas figuras corresponden a la familia de plano internos (111) con una esfera de diámetro promedio de 200 nm. Como puede observarse en las Figs. 2.3(a, b), la superficie es fracturada dejando varias placas con grosor desde 10 hasta 100 micras de tamaño. Por otro lado, en la Fig. 2.3(c), existen vacancias que pueden deberse al proceso de crecimiento. En general, el espesor de la película no es uniforme a lo largo de la muestra entera, sin embargo, para un cristal fotónico este efecto tiene menor importancia ya que el comportamiento fotónico requiere de varios planos cristalinos, tal como pueden observarse desde los espectros de reflectancia.

En La Fig. 2.4 se comparan los espectros de transmitancia obtenidos de manera experimental y teórico para el ópalo de la figura 2.3. Fue posible determinar que el número que mejor ajuste de la transmitancia corresponde al ópalo formado por $N = 11$ capas de esferas de SiO_2 [25].

De esta manera el espesor del ópalo es aproximadamente un poco más de $1.8 \mu\text{m}$. Esto indica que si se controla el tiempo de agregación de las capas de microesferas, también es posible controlar el espesor de las películas de ópalos.

Capítulo 3

Fuerza Electromagnética Sobre Una Capa Dieléctrica

3.1. Ley de Lorentz

La fuerza ejercida por un campo electromagnético sobre una corriente eléctrica se conoce como fuerza de Lorentz. Según la electrostática, la fuerza eléctrica sobre una carga puntual en reposo está dada por:

$$\vec{F}_E = q\vec{E}, \quad (3.1)$$

donde q es la carga de la partícula y \vec{E} es el campo eléctrico al cual se encuentra sometida la carga. Sin embargo, si dicha carga se encuentra en movimiento, se verá sometida a una fuerza adicional la cual es la fuerza magnética, dicha fuerza está dada por

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (3.2)$$

donde \vec{v} es el vector velocidad de la partícula y \vec{B} es el campo magnético al cual se encuentra sometida la carga. De esta forma, la fuerza total sobre la carga puntual está dada por

$$\vec{F}_{EM} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.3)$$

Esta expresión es válida tanto para sistemas estáticos o dinámicos y es denominada Fuerza de Lorentz.

La ecuación (3.3) solo puede aplicarse a un sistema de una carga puntual, de esta forma, si queremos aplicar esta ley sobre un cuerpo con cierta carga Q , debemos considerar una densidad de carga de la región v . Si consideramos una región con volumen v y densidad de carga ρ , la fuerza de Lorentz estará descrita por la siguiente expresión:

$$\vec{f}_{EM}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{J}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t), \quad (3.4)$$

siendo \vec{f}_{EM} la fuerza electromagnética por unidad de volumen (también conocida como densidad de fuerza), ρ la densidad de carga del volumen v y $\vec{J} = \rho\vec{v}$ la densidad

de corriente. De esta forma, la fuerza electromagnética total sobre la distribución de carga ρ en el volumen v está dado por:

$$\vec{F}_{Tot}^{EM}(t) = \int_v \vec{f}_{EM}(\vec{r}, t) d^3r, \quad (3.5)$$

donde la integral se aplica sobre el volumen v .

3.2. Tensor de esfuerzos de Maxwell

El tensor de esfuerzos de Maxwell, es un tensor de segundo grado utilizado en electromagnetismo clásico, el cual es útil para representar la interacción entre las fuerzas electromagnéticas y el impulso mecánico.

Se define como

$$T_{ij} = \epsilon(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2) + \frac{1}{\mu}(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2), \quad (3.6)$$

donde: $i, j = 1, 2, 3$ y $i, j = 1 = x, i, j = 2 = y, i, j = 3 = z$. los índices i, j del tensor de Maxwell corresponden a las componentes x, y, z de los campos E y B . Por otro lado, la δ_{ij} es la función delta de Kronecker, ϵ la permitividad eléctrica y μ la permeabilidad magnética del medio.

De esta forma, podemos escribir el tensor en forma matricial de la forma:

$$\overleftrightarrow{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Además, una propiedad importante de este tensor es su simetría, es decir $T_{ij} = T_{ji}$, por esta razón, de los 9 elementos del tensor, solo 6 de ellos son independientes.

Los seis elementos independientes del tensor son:

$$\begin{aligned} T_{11} = T_{xx} &= \frac{1}{2} \epsilon (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{2\mu} (B_x^2 - B_y^2 - B_z^2). \\ T_{22} = T_{yy} &= \frac{1}{2} \epsilon (E_y^2 - E_z^2 - E_x^2) + \frac{1}{2\mu} (B_y^2 - B_z^2 - B_x^2). \\ T_{33} = T_{zz} &= \frac{1}{2} \epsilon (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) + \frac{1}{2\mu} (B_z^2 - B_x^2 - B_y^2). \\ T_{12} = T_{21} = T_{xy} = T_{yx} &= \epsilon (E_x E_y) + \frac{1}{\mu} (B_x B_y). \\ T_{13} = T_{31} = T_{xz} = T_{zx} &= \epsilon (E_x E_z) + \frac{1}{\mu} (B_x B_z). \\ T_{23} = T_{32} = T_{yz} = T_{zy} &= \epsilon (E_z E_y) + \frac{1}{\mu} (B_z B_y). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ahora, definiendo $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ se puede realizar el producto escalar entre el tensor de Maxwell \overleftrightarrow{T} y el vector \vec{a} , el cual está dado por:

$$\vec{b} = \vec{a} \cdot \overleftrightarrow{T}; \quad b_j = (\vec{a} \cdot \overleftrightarrow{T})_j = \sum_{i=1}^3 a_i T_{ij}, \quad (3.9)$$

si tomamos $\vec{a} = \vec{\nabla}$, de la Ec. 3.9 resulta:

$$b_j = (\nabla \cdot \overleftarrow{T})_j = \sum_{i=1}^3 \partial_i T_{ij}, \quad (3.10)$$

donde ∂_i representa la derivada parcial respecto a la componente i -ésima. De esta forma, usando el tensor de esfuerzos de Maxwell dado por la Ec. (3.6) se tiene que

$$\begin{aligned} \partial_i T_{ij} &= \partial_i \left[\epsilon (E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2) + \frac{1}{\mu} (B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2) \right] \\ &= \epsilon [\partial_i (E_i E_j) - \frac{1}{2} \delta_{ij} \partial_i (E^2)] + \frac{1}{\mu} [\partial_i (B_i B_j) - \frac{1}{2} \delta_{ij} \partial_i (B^2)] \\ &= \epsilon [E_i \partial_i (E_j) + E_j \partial_i (E_i) - \frac{1}{2} \delta_{ij} \partial_i (E^2)] \\ &\quad + \frac{1}{\mu} [B_i \partial_i (B_j) + B_j \partial_i (B_i) - \frac{1}{2} \delta_{ij} \partial_i (B^2)]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Finalmente, realizando la suma sobre el índice i

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \overleftarrow{T})_j &= \sum_{i=1}^3 \partial_i T_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^3 \epsilon [E_i \partial_i (E_j) + E_j \partial_i (E_i) - \frac{1}{2} \delta_{ij} \partial_i (E^2)] \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\mu} [B_i \partial_i (B_j) + B_j \partial_i (B_i) - \frac{1}{2} \delta_{ij} \partial_i (B^2)] \\ &= \epsilon \left(\sum_{i=1}^3 E_i \partial_i (E_j) + E_j \sum_{i=1}^3 \partial_i (E_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \delta_{ij} \partial_i (E^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\mu} \left(\sum_{i=1}^3 B_i \partial_i (B_j) + \sum_{i=1}^3 B_j \partial_i (B_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \delta_{ij} \partial_i (B^2) \right) \\ &= \epsilon \left((\vec{E} \cdot \nabla) E_j + E_j (\nabla \cdot \vec{E}) - \frac{1}{2} \partial_j (E^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\mu} \left((\vec{B} \cdot \nabla) B_j + B_j (\nabla \cdot \vec{B}) - \frac{1}{2} \partial_j (B^2) \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

De esta forma, el resultado más importante obtenido de este desarrollo es:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \overleftarrow{T} &= \epsilon \left((\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E} - \frac{1}{2} \nabla (\vec{E} \cdot \vec{E}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\mu} \left((\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \frac{1}{2} \nabla (\vec{B} \cdot \vec{B}) \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dicho resultado será de demasiada utilidad en la siguiente sección.

3.3. Fuerza electromagnética en términos del tensor de Maxwell

En esta sección se desarrollará la transición de la ley de Lorentz para la fuerza electromagnética a una descripción en términos del tensor de Maxwell. Para este desarrollo se hará uso de las ecuaciones de Maxwell para medios materiales en forma diferencial al igual que las relaciones constitutivas asociadas

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (3.14)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}, \quad (3.15)$$

donde ϵ es la permitividad eléctrica y μ la permeabilidad magnética del medio.

Para facilitar la lectura de los cálculos, se omitirá momentáneamente la escritura de la dependencia espacio-temporal “ (\vec{r}, t) ” de cada campo vectorial.

Al despejar la densidad de corriente \vec{J} de la Ec. (1.4) se obtiene

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3.16)$$

sustituyendo las ecuaciones (3.16) y (1.1) para la densidad de corriente y la ley de Gauss, respectivamente, en la ecuación (Ec. 3.4) para la densidad de fuerza EM \vec{f}_{EM} se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{f}_{EM} &= (\nabla \cdot \vec{D})\vec{E} + \left(\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \times \vec{B} \\ &= (\nabla \cdot \vec{D})\vec{E} + (\nabla \times \vec{H}) \times \vec{B} - \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Por otro lado, se puede escribir de forma diferente el término que se encuentra entre paréntesis de ecuación anterior; realizando la derivada temporal de $(\vec{D} \times \vec{B})$ y posteriormente despejando el término de interés. Dicho procedimiento se realiza como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D} \times \vec{B}) &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \Rightarrow \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} &= \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D} \times \vec{B}) - \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Al usar la ley de Faraday (1.3), el resultado anterior se escribe como

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D} \times \vec{B}) + \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E}). \quad (3.19)$$

3.3. FUERZA ELECTROMAGNÉTICA EN TÉRMINOS DEL TENSOR DE MAXWELL

De esta forma, sustituyendo este resultado obtenido en la Ec. (3.17), la densidad de fuerza EM puede ser escrita de la forma:

$$\vec{f}_{EM} = (\nabla \cdot \vec{D})\vec{E} - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{H}) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D} \times \vec{B}) - \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E}). \quad (3.20)$$

Ahora, haciendo uso de las relaciones constitutivas (3.14) y (3.15) es posible simplificar la ecuación (3.20). Desarrollando por separado los siguientes términos podemos obtener que

$$\begin{aligned} \nabla(\vec{H} \cdot \vec{B}) &= \nabla \left(\frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot \vec{B} \right) \\ &= \frac{1}{\mu} \nabla(B^2) \\ &= \frac{2}{\mu} [(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})] \\ &= 2[(\vec{H} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{H})], \end{aligned} \quad (3.21)$$

es decir

$$\vec{B} \times (\nabla \times \vec{H}) = \frac{1}{2} \nabla(\vec{H} \cdot \vec{B}) - (\vec{H} \cdot \nabla)\vec{B}. \quad (3.22)$$

De igual forma:

$$\begin{aligned} \nabla(\vec{D} \cdot \vec{E}) &= \nabla (\epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}) \\ &= \epsilon \nabla(E^2) \\ &= 2\epsilon [(\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E} + \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})] \\ &= 2[(\vec{D} \cdot \nabla)\vec{E} + \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E})], \end{aligned} \quad (3.23)$$

y entonces

$$\vec{D} \times (\nabla \times \vec{E}) = \frac{1}{2} \nabla(\vec{D} \cdot \vec{E}) - (\vec{D} \cdot \nabla)\vec{E}, \quad (3.24)$$

de esta forma, sustituyendo los resultados obtenidos en la Ecs. (3.22) y (3.24) en la Ec. (3.20), la densidad de fuerza EM resulta:

$$\vec{f}_{EM} = (\nabla \cdot \vec{D})\vec{E} - \frac{1}{2} \nabla(\vec{H} \cdot \vec{B}) + (\vec{H} \cdot \nabla)\vec{B} - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D} \times \vec{B}) - \frac{1}{2} \nabla(\vec{D} \cdot \vec{E}) + (\vec{D} \cdot \nabla)\vec{E}. \quad (3.25)$$

Finalmente, usando la ley de Gauss (Ec. (1.2)) para campo magnético es posible obtener $(\nabla \cdot \vec{B})\vec{H} = 0$. Al sumar este término a la Ec. (3.25) y al acomodar los términos de forma simétrica, se obtiene que la densidad de fuerza EM está dada por:

$$\begin{aligned} \vec{f}_{EM} &= (\nabla \cdot \vec{D})\vec{E} + (\vec{D} \cdot \nabla)\vec{E} - \frac{1}{2} \nabla(\vec{D} \cdot \vec{E}) \\ &\quad + (\nabla \cdot \vec{B})\vec{H} + (\vec{H} \cdot \nabla)\vec{B} - \frac{1}{2} \nabla(\vec{H} \cdot \vec{B}) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D} \times \vec{B}). \end{aligned} \quad (3.26)$$

3.3. FUERZA ELECTROMAGNÉTICA EN TÉRMINOS DEL TENSOR DE MAXWELL

Al recordar la expresión obtenida en la sección 3.2, la Ec. 3.13, se obtiene la expresión para la densidad de fuerza EM de una forma más compacta y elegante como

$$\vec{f}_{EM} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} - \epsilon\mu \frac{\partial \vec{S}}{\partial t}, \quad (3.27)$$

donde \vec{S} es el vector de poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu}(\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\epsilon\mu}(\vec{D} \times \vec{B}). \quad (3.28)$$

Por otro lado, la Ec. (3.27) es solo la densidad de fuerza EM, así que para calcular la fuerza electromagnética total, se debe integrar sobre la región de interés (3.5), de esta forma, la fuerza electromagnética total de nuestro sistema será

$$\vec{F}_{Tot}^{EM} = \int_v \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} - \epsilon\mu \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} d^3r \quad (3.29)$$

Considerando que el volumen v es cerrado, se puede hacer uso del teorema integral de la divergencia para reescribir la Fuerza EM total de forma compacta como

$$\vec{F}_{Tot}^{EM}(t) = \oint_{\partial v} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} ds - \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_v \vec{S}(\vec{r}, t) d^3r \quad (3.30)$$

donde ∂v es la frontera del volumen v .

Promedio temporal

Debido a las variaciones temporales de los campos eléctrico y magnético, la Ec. 3.30 obtenida en la sección anterior tiene dependencia temporal. El trabajo que se busca desarrollar implica una interacción constante y longeva con la onda electromagnética, por lo tanto, vamos a estar interesados en el promedio de la fuerza temporal, es decir:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \langle \vec{F}_{Tot}^{EM}(t) \rangle = \left\langle \oint_{\partial v} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} ds - \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_v \vec{S}(\vec{r}, t) d^3r \right\rangle \\ &= \left\langle \oint_{\partial v} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} ds \right\rangle - \left\langle \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_v \vec{S}(\vec{r}, t) d^3r \right\rangle \\ &= \left\langle \oint_{\partial v} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} ds \right\rangle - \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_v \langle \vec{S}(\vec{r}, t) \rangle d^3r \\ &= \left\langle \oint_{\partial v} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} ds \right\rangle - \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_v \frac{1}{2} Re \{ \vec{S}(\vec{r}) \} d^3r \\ &= \left\langle \oint_{\partial v} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} ds \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.31)$$

El segundo término del anterior desarrollo resulta nulo; debido a que al realizar el valor promedio del vector de poynting obtenemos un término independiente del

3.4. PROPAGACIÓN DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA EN CAPA

tiempo, de esta forma al realizar la derivada temporal el término se vuelve nulo. Por lo tanto, el promedio temporal de la fuerza solo dependerá del primer término, es decir:

$$\vec{F} = \langle \vec{F}_{Tot}^{EM}(t) \rangle = \left\langle \oint_{\partial v} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} ds \right\rangle = \frac{1}{2} Re \left\{ \oint_{\partial v} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}) \cdot \vec{n} ds \right\}, \quad (3.32)$$

donde $\overleftrightarrow{T}(\vec{r})$ es el tensor de esfuerzos de Maxwell complejo para medios sin pérdida dado por:

$$\overleftrightarrow{T}(\vec{r}) = \vec{D}\vec{E}^* + \vec{B}^*\vec{H} - \frac{1}{2}(\vec{D} \cdot \vec{E}^* + \vec{B}^* \cdot \vec{H})\vec{I}, \quad (3.33)$$

con \vec{I} es la matriz identidad de (3×3) y $(*)$ denota el complejo conjugado.

3.4. Propagación de una Onda Electromagnética en capa

Consideremos un arreglo compuesto por 3 regiones diferentes, cada región tiene su propio valor para permeabilidad magnética y permitividad eléctrica como se muestra en el siguiente diagrama:

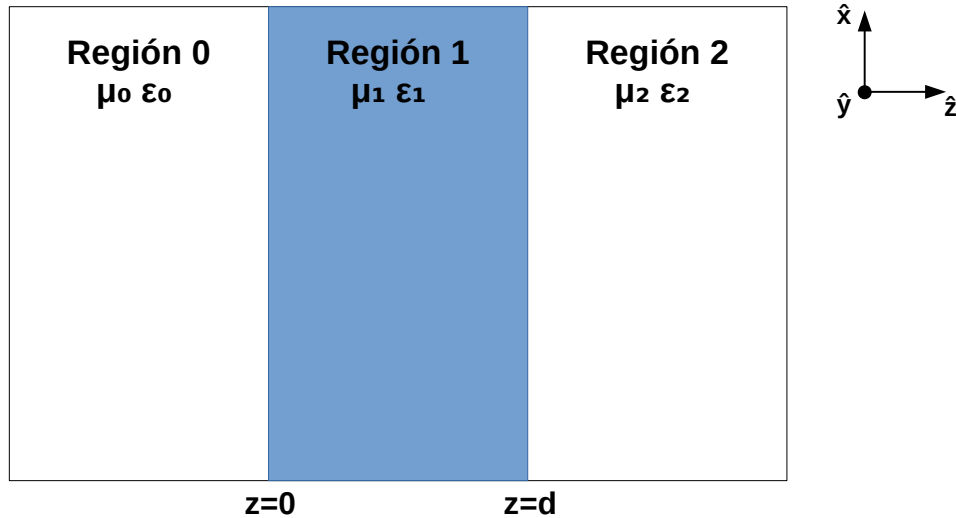


Figura 3.1: Arreglo compuesto por 3 regiones, cada región tiene su propio valor para permeabilidad magnética y permitividad eléctrica.

Una onda inicial se propaga por la región cero hasta incidir en la región uno con un ángulo θ_0 respecto al eje \hat{z} , parte de la onda incidente se transmitirá a la región uno y parte de la onda se refleja. Si la onda incidente tiene una polarización TE (transversal eléctrico), es decir, no existe ninguna componente del campo eléctrico en la dirección de propagación, se puede representar dichas ondas como se muestra la Fig. 3.2.

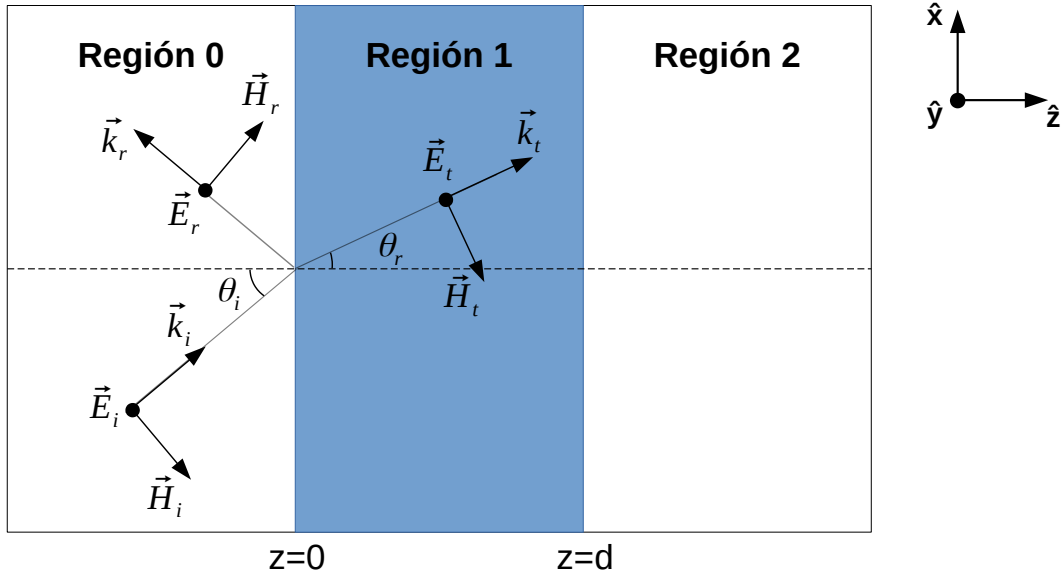


Figura 3.2: Propagación de una onda electromagnética en un sistema compuesto por 3 regiones.

De esta forma, una expresión para la onda de campo eléctrico incidente tiene la forma

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = E_0 e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r} \hat{y}}, \quad (3.34)$$

donde E_0 es la amplitud de la onda incidente y \vec{k}_i es el vector de onda incidente.

El vector de onda \vec{k}_i no tiene componentes en \hat{y} , es decir: $\vec{k}_i = (k_x, 0, k_z)$, donde $k_x = k \sin \theta_i$ y $k_z = k \cos \theta_i$, de esta forma la Ec. (3.34) se puede escribir como:

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = E_0 e^{ik_x x} e^{ik_z z} \hat{y} = E_i \hat{y}. \quad (3.35)$$

Por otro lado, con base en la onda eléctrica incidente, se pueden conocer las componentes de la onda magnética incidente \vec{H}_i , la cual tendrá componentes tanto en dirección \hat{x} como en dirección \hat{z} . Para deducir dichas componentes, haremos uso de la ecuación constitutiva (3.15) y la Ley de Faraday (1.3).

Considerando que el campo magnético tiene la forma de una onda armónica, es decir; $\vec{B} \propto e^{-i\omega t}$, de la ley de Faraday se obtiene que

$$\nabla \times \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t} = i\omega \vec{B}_i = i\omega \mu_0 \vec{H}_i, \quad (3.36)$$

por lo tanto:

$$\vec{H}_i = \frac{1}{i\omega \mu_0} \nabla \times \vec{E}_i, \quad (3.37)$$

donde:

$$\nabla \times \vec{E}_i = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_i & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_i}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial E_i}{\partial x} \hat{z}, \quad (3.38)$$

3.4. PROPAGACIÓN DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA EN CAPA

de esta forma, las componentes del campo magnético incidente serán:

$$\vec{H}_{ix} = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_i}{\partial z} \hat{x} = -\frac{k_z}{\omega\mu_0} E_i \hat{x} \quad (3.39)$$

$$\vec{H}_{iz} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_i}{\partial x} \hat{z} = \frac{k_x}{\omega\mu_0} E_i \hat{z}. \quad (3.40)$$

Por otro lado, podemos considerar que la onda EM reflejada está dada por:

$$\vec{E}_r = r E_0 e^{ik_x x} e^{-ik_z z} \hat{y} = r E_r \hat{y}, \quad (3.41)$$

donde r es el coeficiente de reflexión.

Suponiendo que nuestro material no absorbe, la onda incidente más la onda reflejada será igual a la onda transmitida, por lo tanto:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_i + \vec{E}_r, \quad (3.42)$$

donde, sustituyendo las ecuaciones para los campos correspondientes; Ec. 3.35 y 3.41, obtenemos que el campo eléctrico transmitido esta dado por:

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= E_0 e^{ik_x x} e^{ik_z z} \hat{y} + r E_0 e^{ik_x x} e^{-ik_z z} \hat{y} \\ &= E_0 (e^{ik_z z} + r e^{-ik_z z}) e^{ik_x x} \hat{y} \\ &= E_t \hat{y}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Al igual que con la onda incidente, podemos deducir las componentes de la onda magnética transmitida \vec{H}_t , con base en la onda eléctrica transmitida \vec{E}_t usando la ecuación constitutiva para el campo magnético y la ley de Faraday. Así, dichas componentes serán:

$$\vec{H}_{tx} = -\frac{1}{i\omega\mu_1} \frac{\partial E_t}{\partial z} \hat{x} = -\frac{k_z}{\omega\mu_1} E_0 (e^{ik_z z} - r e^{-ik_z z}) e^{ik_x x} \hat{x} \quad (3.44)$$

$$\vec{H}_{tz} = \frac{1}{i\omega\mu_1} \frac{\partial E_t}{\partial x} \hat{z} = -\frac{k_x}{\omega\mu_1} E_0 (e^{ik_z z} + r e^{-ik_z z}) e^{ik_x x} \hat{z}. \quad (3.45)$$

De esta forma, conocemos las ondas que se propagan tanto en la región cero como en la región uno.

Por otro lado, en la región dos, obtendremos una onda electromagnética transmitida (Fig. 3.3). La onda eléctrica transmitida \vec{E}_T puede ser descrita como:

$$\vec{E}_T = t E_0 e^{ik_{2z} z} e^{ik_x x} \hat{y}, \quad (3.46)$$

por lo tanto, la onda magnética transmitida \vec{H}_T tendrá las componentes:

$$H_{Tx} = -\frac{k_{2z}}{\omega\mu_2} t E_0 e^{ik_{2z} z} e^{ik_x x} \hat{x}, \quad (3.47)$$

$$H_{Tz} = \frac{k_x}{\omega\mu_2} t E_0 e^{ik_{2z} z} e^{ik_x x} \hat{z}, \quad (3.48)$$

donde t es el coeficiente de transmisión. Con esto conocemos las ondas que se propagan en las 3 regiones.

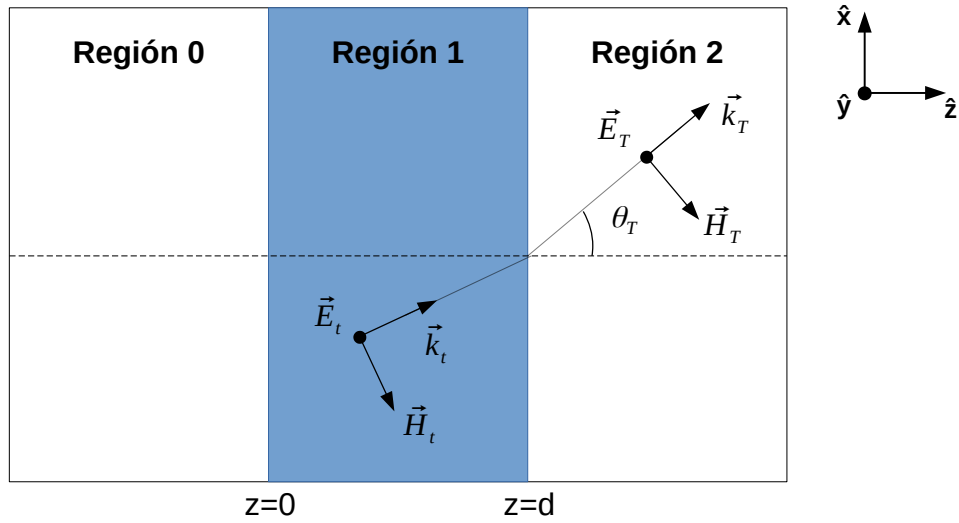


Figura 3.3: Onda electromagnética transmitida en un sistema compuesto por 3 regiones.

3.5. Presión de Radiación sobre la capa

A lo largo del texto se ha desarrollado la teoría necesaria para conocer la fuerza a la cual un medio material se encuentra sometido debido a la radiación de una onda electromagnética. En la presente sección aplicaremos los modelos matemáticos obtenidos a un arreglo similar al presentado en la sección 3.4. Comenzaremos definiendo una región infinitesimal con grosor δz alrededor de las fronteras entre la región 0 y la región 1, de igual forma entre las regiones 1 y 2 (Fig. 3.4).

De esta forma, podemos usar el resultado para la fuerza en términos del tensor de esfuerzo de Maxwell obtenido en la sección 3.3. Aplicando dicho resultado en cada una de las regiones infinitesimales la fuerza EM será

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ -\hat{z} \cdot \overleftrightarrow{T}(z = 0^-) + \hat{z} \cdot \overleftrightarrow{T}(z = 0^+) - \hat{z} \cdot \overleftrightarrow{T}(z = d^-) + \hat{z} \cdot \overleftrightarrow{T}(z = d^+) \right\}. \quad (3.49)$$

Como se está considerando que la onda incidente tiene una polarización TE, el campo eléctrico y magnético tendrán la forma:

$$\vec{E} = E_y \hat{y} = (0, E_y, 0) \quad (3.50)$$

$$\vec{H} = H_x \hat{x} + H_z \hat{z} = (H_x, 0, H_z), \quad (3.51)$$

de esta forma, podemos escribir cada uno de los términos del tensor de esfuerzos de

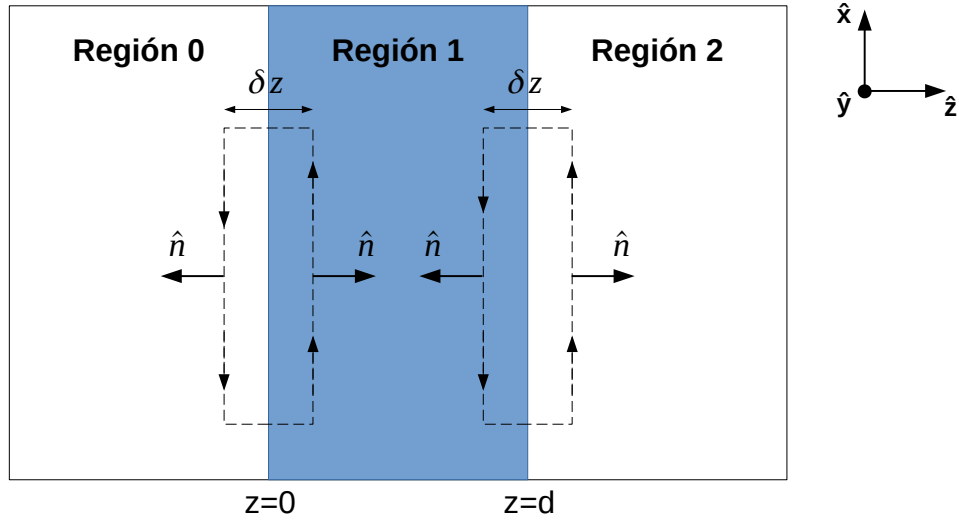


Figura 3.4: Las líneas punteadas muestran la ruta de integración para la aplicación del tensor de esfuerzo de Maxwell para calcular la fuerza sobre el cristal. La ruta se reduce de modo que $\delta z \rightarrow 0$. La integración se realiza a lo largo de la superficie en ambos lados de los límites.

Maxwell de una forma más específica como sigue:

$$\begin{aligned}
 \vec{D} \vec{E}^* &= \epsilon \vec{E} \vec{E}^* = \epsilon(0, E_y, 0)(0, E_y^*, 0) \\
 &= \epsilon E_y E_y^* \hat{y} \hat{y} = \epsilon |E_y|^2 \hat{y} \hat{y}. \\
 \vec{B}^* \vec{H} &= \mu \vec{H}^* \vec{H} \\
 &= \mu(H_x^*, 0, H_z^*)(H_x, 0, H_z) \\
 &= \mu(H_x^* H_x \hat{x} \hat{x} + H_x^* H_z \hat{x} \hat{z} + H_z^* H_x \hat{z} \hat{x} + H_z^* H_z \hat{z} \hat{z}) \\
 &= \mu(|H_x|^2 \hat{x} \hat{x} + H_x^* H_z \hat{x} \hat{z} + H_z^* H_x \hat{z} \hat{x} + |H_z|^2 \hat{z} \hat{z}). \\
 \vec{D} \cdot \vec{E}^* &= \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* = \epsilon E_y E_y^* = \epsilon |E_y|^2. \\
 \vec{B}^* \cdot \vec{H} &= \mu \vec{H}^* \cdot \vec{H} = \mu(H_x^* H_x + H_z^* H_z) \\
 &= \mu(|H_x|^2 + |H_z|^2).
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\vec{D} \vec{E}^* = \epsilon |E_y|^2 \hat{y} \hat{y}. \quad (3.52)$$

$$\vec{B}^* \vec{H} = \mu(|H_x|^2 \hat{x} \hat{x} + H_x^* H_z \hat{x} \hat{z} + H_z^* H_x \hat{z} \hat{x} + |H_z|^2 \hat{z} \hat{z}). \quad (3.53)$$

$$\vec{D} \cdot \vec{E}^* = \epsilon |E_y|^2. \quad (3.54)$$

$$\vec{B}^* \cdot \vec{H} = \mu(|H_x|^2 + |H_z|^2). \quad (3.55)$$

De esta forma

$$\begin{aligned}
 \hat{z} \cdot (\vec{D}\vec{E}^*) &= \hat{z} \cdot (\epsilon|E_y|^2\hat{y}\hat{y}) \\
 &= \epsilon|E_y|^2(\hat{z} \cdot \hat{y})\hat{y} \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

y

$$\begin{aligned}
 \hat{z} \cdot (\vec{B}^*\vec{H}) &= \hat{z} \cdot \{\mu(|H_x|^2\hat{x}\hat{x} + H_x^*H_z\hat{x}\hat{z} + H_z^*H_x\hat{z}\hat{x} + |H_z|^2\hat{z}\hat{z})\} \\
 &= \mu\{|H_x|^2(\hat{z} \cdot \hat{x})\hat{x} + H_x^*H_z(\hat{z} \cdot \hat{x})\hat{z} + H_z^*H_x(\hat{z} \cdot \hat{z})\hat{x} + |H_z|^2(\hat{z} \cdot \hat{z})\hat{z}\} \\
 &= \mu(H_z^*H_x\hat{x} + |H_z|^2\hat{z}).
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Además, siendo \vec{I} la matriz identidad de 3×3 , tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \hat{z} \cdot \vec{I} &= \hat{z} \cdot (\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}) \\
 &= (\hat{z} \cdot \hat{x})\hat{x} + (\hat{z} \cdot \hat{y})\hat{y} + (\hat{z} \cdot \hat{z})\hat{z} \\
 &= \hat{z}.
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Por lo tanto, usando las ecuaciones (3.52) a (3.58) podemos escribir el producto $\hat{z} \cdot \overleftrightarrow{T}$ de la forma:

$$\begin{aligned}
 \hat{z} \cdot \overleftrightarrow{T} &= \hat{z} \cdot \left\{ \vec{D}\vec{E}^* + \vec{B}^*\vec{H} - \frac{1}{2}(\vec{D} \cdot \vec{E}^* + \vec{B}^* \cdot \vec{H})\vec{I} \right\} \\
 &= \hat{z} \cdot (\vec{D}\vec{E}^*) + \hat{z} \cdot (\vec{B}^*\vec{H}) - \frac{1}{2}(\vec{D} \cdot \vec{E}^* + \vec{B}^* \cdot \vec{H})\hat{z} \cdot \vec{I} \\
 &= \mu(H_z^*H_x\hat{x} + |H_z|^2\hat{z}) - \frac{1}{2}(\vec{D} \cdot \vec{E}^* + \vec{B}^* \cdot \vec{H})\hat{z} \\
 &= \mu(H_z^*H_x\hat{x} + |H_z|^2\hat{z}) - \frac{1}{2}(\epsilon|E_y|^2 + \mu(|H_x|^2 + |H_z|^2))\hat{z}.
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

obteniendo como resultado final

$$\hat{z} \cdot \overleftrightarrow{T} = \{\mu H_z^* H_x\} \hat{x} - \frac{1}{2} \{\epsilon|E_y|^2 + \mu(|H_x|^2 - |H_z|^2)\} \hat{z} \tag{3.60}$$

3.5.1. Fuerzas dentro de la capa

Analicemos los términos dentro de la región 1, es decir $z \cdot \overleftrightarrow{T}(z = 0^+)$ y $z \cdot \overleftrightarrow{T}(z = d^-)$. Para ambos términos, los campos eléctrico y magnético serán los campos transmitidos de la región cero a la región uno, es decir:

$$\begin{aligned}
 E_y &= E_t \\
 H_x &= H_{xt} \\
 H_z &= H_{zt}
 \end{aligned}$$

3.5. PRESIÓN DE RADIACIÓN SOBRE LA CAPA

Considerando que el campo eléctrico transmitido está descrito por la Ec. (3.43), evaluando en $z = 0^+$ y $z = d^-$ obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$E_y(z = 0^+) = E_0(e^{ik_z z} + r e^{-ik_z z})|_{z=0^+} = E_0 + E_0 r = a'_1 + b'_1 \quad (3.61)$$

$$E_y(z = d^-) = E_0(e^{ik_z z} + r e^{-ik_z z})|_{z=d^-} = E_0(e^{ik_z d^-} + r e^{-ik_z d^-}) = a_1 + b_1, \quad (3.62)$$

el cual, escrito de forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} e^{ik_z d^-} & 0 \\ 0 & e^{-ik_z d^-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 \\ b'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad (3.63)$$

o escrito de otro modo:

$$\begin{pmatrix} e^{-ik_z d^-} & 0 \\ 0 & e^{ik_z d^-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ b'_1 \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

De esta forma es fácil notar que las ondas están ligadas por una fase. Además, considerando que la región uno es un cristal periódico e imponiendo la condición $d = Nd_{111}$, donde N es un número natural y d_{111} es la distancia interplanar del conjunto de planos $[1, 1, 1]$. De forma que d puede ser descrito por vectores de la red de Bravais; podemos aplicar el teorema de Bloch el cual es demostrado en el Apéndice B dando como resultado que:

$$E_t(z) = E_t(z + d), \quad (3.65)$$

es decir:

$$E_t(0^+) = E_t(0^+ + d^-). \quad (3.66)$$

De manera análoga, para el campo magnético obtenemos que:

$$H_{tx}(z) = H_{tx}(z + d)$$

$$H_{tz}(z) = H_{tz}(z + d),$$

es decir:

$$H_{tx}(0^+) = H_{tx}(0^+ + d^-). \quad (3.67)$$

$$H_{tz}(0^+) = H_{tz}(0^+ + d^-). \quad (3.68)$$

Finalmente, aplicando estos resultados al tensor de esfuerzos en la Ec. 3.60:

$$\begin{aligned} \hat{z} \cdot \overleftrightarrow{T}(z = d^-) &= \{ \mu_1 H_{tz}(d^-)^* H_{tx}(d^-) \} \hat{x} \\ &- \frac{1}{2} \{ \epsilon_1 |E_{ty}(d^-)|^2 + \mu_1 (|H_{tx}(d^-)|^2 - |H_{tz}(d^-)|^2) \} \hat{z} \\ &= \{ \mu_1 H_{tz}(0^+)^* H_{tx}(0^+) \} \hat{x} \\ &- \frac{1}{2} \{ \epsilon_1 |E_{ty}(0^+)|^2 + \mu_1 (|H_{tx}(0^+)|^2 - |H_{tz}(0^+)|^2) \} \hat{z} \\ &= \hat{z} \cdot \overleftrightarrow{T}(z = 0^+), \end{aligned} \quad (3.69)$$

obteniendo como resultado importante que no existe contribución a la fuerza dentro de la región uno, es decir:

$$\hat{z} \cdot \overleftarrow{T}(z = d^-) = \hat{z} \cdot \overleftarrow{T}(z = 0^+). \quad (3.70)$$

De esta forma, la presión de radiación dada por la Ec. (3.49) sobre el cristal se reduce a

$$\vec{F} = \frac{1}{2} Re \left\{ -\hat{z} \cdot \overleftarrow{T}(z = 0^-) + \hat{z} \cdot \overleftarrow{T}(z = d^+) \right\}. \quad (3.71)$$

Lo cual escrito en forma completa, es decir, sustituyendo la Ec. 3.60 toma la forma:

$$\begin{aligned} \vec{F} = \frac{1}{2} Re \left[-\{ \mu_0 H_{tz}(0^-)^* H_{tx}(0^-) \} \hat{x} + \frac{1}{2} \{ \epsilon_0 |E_t(0^-)|^2 + \mu_0 (|H_{tx}(0^-)|^2 \right. \\ \left. - |H_{tz}(0^-)|^2) \hat{z} + \{ \mu_2 H_{Tz}(d^+)^* H_{Tx}(d^+) \} \hat{x} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \{ \epsilon_2 |E_T(d^+)|^2 + \mu_2 (|H_{Tx}(d^+)|^2 - |H_{Tz}(d^+)|^2) \} \hat{z} \right], \end{aligned} \quad (3.72)$$

donde se utilizan los resultados obtenidos en la sección 3.4 para las ondas EM transmitidas. Además, para el término $\hat{z} \cdot \overleftarrow{T}(z = 0^-)$ debemos considerar todas las ondas que se propagan en la región cero, es decir la onda incidente y además la onda reflejada. De esta forma, es conveniente usar como simplificación la onda transmitida en términos de \vec{E}_t y \vec{H}_t , debido a que dicha onda es la suma de la ondas incidente y reflejada (Ec. (3.42)).

3.5.2. Fuerzas en dirección paralela

Para evitar confusiones, trabajaremos por separado con cada componente. Para la componente \hat{x} tenemos:

$$F_x = \frac{1}{2} Re \left[-\mu_0 H_{tz}(0^-)^* H_{tx}(0^-) + \mu_2 H_{Tz}(d^+)^* H_{Tx}(d^+) \right], \quad (3.73)$$

donde usando las expresiones para los campos eléctrico y magnético transmitidos obtenidos en la sección 3.4

$$H_{tz}^*(0) = \left[\frac{k_x}{\omega \mu_0} E_0 (1 + r) \right]^* = \frac{k_x}{\omega \mu_0} E_0^* (1 + r^*) \quad (3.74)$$

$$H_{tx}(0) = -\frac{k_z}{\omega \mu_0} E_0 (1 - r), \quad (3.75)$$

obtenemos que:

$$\begin{aligned} H_{tz}^*(0) H_{tx}(0) &= -\frac{k_x}{\omega \mu_0} \frac{k_z}{\omega \mu_0} E_0^* E_0 (1 + r^*) (1 - r) \\ &= -\frac{k_x k_z}{(\omega \mu_0)^2} |E_0|^2 (1 - r + r^* - r^* r) \\ &= -\frac{k_x k_z}{(\omega \mu_0)^2} |E_0|^2 (1 - 2Im(r) - |r|^2). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Por otro lado, usando:

$$H_{T_z}^*(d) = \left[\frac{k_x}{\omega\mu_2} t E_0 e^{ik_{2z}d} \right]^* = \frac{k_x}{\omega\mu_2} t^* E_0^* e^{-ik_{2z}d} \quad (3.77)$$

$$H_{T_x}(d) = -\frac{k_{2z}}{\omega\mu_2} t E_0 e^{ik_{2z}d}, \quad (3.78)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} H_{T_z}^*(d)H_{T_x}(d) &= -\frac{k_x}{\omega\mu_2} \frac{k_{2z}}{\omega\mu_2} t^* t E_0^* E_0 e^{-ik_{2z}d} e^{ik_{2z}d} \\ &= -\frac{k_x k_{2z}}{(\omega\mu_2)^2} |t|^2 |E_0|^2. \end{aligned} \quad (3.79)$$

sustituyendo las ecuaciones (3.76) y (3.79) en la Ec. (3.73) obtenemos que:

$$F_x = \frac{1}{2} Re \left[\mu_0 \frac{k_x k_z}{(\omega\mu_0)^2} |E_0|^2 (1 - 2Im(r) - |r|^2) - \mu_2 \frac{k_x k_{2z}}{(\omega\mu_2)^2} |t|^2 |E_0|^2 \right] \quad (3.80)$$

$$= \mu_0 \frac{k_x k_z}{2(\omega\mu_0)^2} |E_0|^2 (1 - |r|^2) - \mu_2 \frac{k_x k_{2z}}{2(\omega\mu_2)^2} |t|^2 |E_0|^2. \quad (3.81)$$

Finalmente, usando la relación entre los coeficientes de reflexión y transmisión para un sistema sin absorción la cual establece que:

$$|r|^2 + \frac{\mu_0 k_{2z}}{\mu_2 k_z} |t|^2 = 1 \quad (3.82)$$

obtenemos que la fuerza en el eje \hat{x} es:

$$F_x = \mu_0 \frac{k_x k_z}{2(\omega\mu_0)^2} |E_0|^2 \frac{\mu_0 k_{2z}}{\mu_2 k_z} |t|^2 - \mu_2 \frac{k_x k_{2z}}{2(\omega\mu_2)^2} |t|^2 |E_0|^2 \quad (3.83)$$

$$= \frac{k_x k_{2z}}{2\omega^2 \mu_2} |E_0|^2 |t|^2 - \frac{k_x k_{2z}}{2\omega^2 \mu_2} |t|^2 |E_0|^2 \quad (3.84)$$

$$= 0. \quad (3.85)$$

es decir, las fuerzas en el eje \hat{x} se contrarrestan.

3.5.3. Fuerzas en dirección perpendicular

Debido a que las fuerzas en el eje \hat{x} se anulan, nuestra ecuación de fuerza se ve reducida a:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{2} Re \left[\frac{1}{2} \{ \epsilon_0 |E_{iy}(0^-)|^2 + \mu_0 (|H_{ix}(0^-)|^2 - |H_{iz}(0^-)|^2) \} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \{ \epsilon_2 |E_{Ty}(d^+)|^2 + \mu_2 (|H_{Tx}(d^+)|^2 - |H_{Tz}(d^+)|^2) \} \right] \hat{z}, \end{aligned} \quad (3.86)$$

donde, para los términos que si contribuyen se tiene que:

$$|E_{ty}(0^-)|^2 = E_{ty}^*(0^-)E_{ty}(0^-) = |E_0|^2|1+r|^2. \quad (3.87)$$

$$|H_{tx}(0^-)|^2 = H_{tx}^*(0^-)H_{tx}(0^-) = \left(\frac{k_z}{\omega\mu_0}\right)^2 |E_0|^2|1-r|^2. \quad (3.88)$$

$$|H_{tz}(0^-)|^2 = H_{tz}^*(0^-)H_{tz}(0^-) = \left(\frac{k_z}{\omega\mu_0}\right)^2 |E_0|^2|1+r|^2. \quad (3.89)$$

$$|E_{Ty}(d^+)|^2 = E_{Ty}^*(d^+)E_{Ty}(d^+) = |E_0|^2|t|^2. \quad (3.90)$$

$$|H_{Tx}(d^+)|^2 = H_{Tx}^*(d^+)H_{Tx}(d^+) = \left(\frac{k_{2z}}{\omega\mu_2}\right)^2 |E_0|^2|t|^2. \quad (3.91)$$

$$|H_{Tz}(d^+)|^2 = H_{Tz}^*(d^+)H_{Tz}(d^+) = \left(\frac{k_x}{\omega\mu_2}\right)^2 |E_0|^2|t|^2. \quad (3.92)$$

Sustituyendo estos valores en la Ec. (3.86) se tiene que:

$$\vec{F} = \frac{1}{2}Re \left[\frac{|E_0|^2}{2} \left\{ \epsilon_0|1+r|^2 + \mu_0 \left[\left(\frac{k_z}{\omega\mu_0}\right)^2 |1-r|^2 - \left(\frac{k_x}{\omega\mu_0}\right)^2 |1+r|^2 \right] \right\} - \frac{|E_0|^2}{2} \left\{ \epsilon_2|t|^2 + \mu_2 \left[\left(\frac{k_{2z}}{\omega\mu_2}\right)^2 |t|^2 - \left(\frac{k_x}{\omega\mu_2}\right)^2 |t|^2 \right] \right\} \right] \hat{z}, \quad (3.93)$$

de esta forma, es claro que todos los valores dentro de los corchetes principales son de valor real, por lo tanto:

$$4F_z = \epsilon_0|E_0|^2|1+r|^2 + \mu_0 \left[\left(\frac{k_z}{\omega\mu_0}\right)^2 |E_0|^2|1-r|^2 - \left(\frac{k_x}{\omega\mu_0}\right)^2 |E_0|^2|1+r|^2 \right] - \epsilon_2|E_0|^2|t|^2 - \mu_2 \left[\left(\frac{k_{2z}}{\omega\mu_2}\right)^2 |E_0|^2|t|^2 - \left(\frac{k_x}{\omega\mu_2}\right)^2 |E_0|^2|t|^2 \right], \quad (3.94)$$

donde $\vec{F} = F_z \hat{z}$. La anterior ecuación puede ser escrita de manera más corta, pero primero debemos expandir los términos cuadráticos para después eliminarlos con sus semejantes, esto es:

$$4F_z = \mu_0 \left(\frac{k_z}{\omega\mu_0}\right)^2 |E_0|^2(|r|^2 - 2Re(r) + 1) - \mu_0 \left(\frac{k_x}{\omega\mu_0}\right)^2 |E_0|^2(|r|^2 + 2Re(r) + 1) + \epsilon_0|E_0|^2|1+r|^2 - \epsilon_2|E_0|^2|t|^2 - \mu_2 \left[\left(\frac{k_{2z}}{\omega\mu_2}\right)^2 - \left(\frac{k_x}{\omega\mu_2}\right)^2 \right] |E_0|^2|t|^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \mu_0 \left[\left(\frac{k_z}{\omega\mu_0} \right)^2 - \left(\frac{k_x}{\omega\mu_0} \right)^2 \right] |E_0|^2 (|r|^2 + 1) \\
 &\quad - 2Re(r)\mu_0 \left[\left(\frac{k_z}{\omega\mu_0} \right)^2 + \left(\frac{k_x}{\omega\mu_0} \right)^2 \right] |E_0|^2 + \epsilon_0 |E_0|^2 (|r|^2 + 1) \\
 &\quad + 2Re(r)\epsilon_0 |E_0|^2 - \epsilon_2 |E_0|^2 |t|^2 - \mu_2 \left[\left(\frac{k_{2z}}{\omega\mu_2} \right)^2 - \left(\frac{k_x}{\omega\mu_2} \right)^2 \right] |E_0|^2 |t|^2.
 \end{aligned} \tag{3.95}$$

Tomando en cuenta que $k^2 = k_x^2 + k_z^2$ y además $k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ el segundo término se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 -2Re(r)\mu_0 \left[\left(\frac{k_z}{\omega\mu_0} \right)^2 + \left(\frac{k_x}{\omega\mu_0} \right)^2 \right] |E_0|^2 &= -2Re(r)\mu_0 \left[\left(\frac{k}{\omega\mu_0} \right)^2 \right] |E_0|^2 \\
 &= -2Re(r)\mu_0 \frac{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0}{\omega^2 \mu_0^2} |E_0|^2 \\
 &= -2Re(r)\epsilon_0 |E_0|^2,
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

de esta forma, se elimina con el cuarto término de la Ec. (3.95). Podemos seguir reduciendo la expresión para la fuerza como sigue:

$$\begin{aligned}
 4F_z &= \epsilon_0 |E_0|^2 (|r|^2 + 1) + \mu_0 \left[\left(\frac{k_z}{\omega\mu_0} \right)^2 - \left(\frac{k_x}{\omega\mu_0} \right)^2 \right] |E_0|^2 (|r|^2 + 1) \\
 &\quad - \epsilon_2 |E_0|^2 |t|^2 - \mu_2 \left[\left(\frac{k_{2z}}{\omega\mu_2} \right)^2 - \left(\frac{k_x}{\omega\mu_2} \right)^2 \right] |E_0|^2 |t|^2 \\
 &= \left\{ \epsilon_0 + \mu_0 \left[\left(\frac{k_z}{\omega\mu_0} \right)^2 - \left(\frac{k_x}{\omega\mu_0} \right)^2 \right] \right\} |E_0|^2 (|r|^2 + 1) \\
 &\quad - \left\{ \epsilon_2 - \mu_2 \left[\left(\frac{k_{2z}}{\omega\mu_2} \right)^2 - \left(\frac{k_x}{\omega\mu_2} \right)^2 \right] \right\} |E_0|^2 |t|^2.
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

A partir de las figuras 3.2 y 3.3, es posible observar las igualdades

$$\begin{aligned}
 k_z &= k \cos \theta_i, & k_x &= k \sin \theta_i, \\
 k_{2z} &= k_2 \cos \theta_T, & k_x &= k_2 \sin \theta_T,
 \end{aligned}$$

para escribir los términos dependientes de las componentes de cada vector de onda

de la forma:

$$\begin{aligned}
 \mu_0 \left[\left(\frac{k_z}{\omega\mu_0} \right)^2 - \left(\frac{k_x}{\omega\mu_0} \right)^2 \right] &= \frac{\mu_0 k^2}{\omega^2 \mu_0^2} (\cos^2 \theta_i - \sin^2 \theta_i) \\
 &= \frac{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0^2}{\omega^2 \mu_0^2} (\cos^2 \theta_i - \sin^2 \theta_i) \\
 &= \epsilon_0 (\cos^2 \theta_i - \sin^2 \theta_i) \\
 &= \epsilon_0 (2 \cos^2 \theta_i - 1) \\
 &= 2\epsilon_0 \cos^2 \theta_i - \epsilon_0,
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

y también:

$$\begin{aligned}
 -\mu_2 \left[\left(\frac{k_{2z}}{\omega\mu_2} \right)^2 - \left(\frac{k_x}{\omega\mu_2} \right)^2 \right] &= \frac{\mu_2 k_2^2}{\omega^2 \mu_2^2} (\cos^2 \theta_T - \sin^2 \theta_T) \\
 &= \frac{\omega^2 \epsilon_2 \mu_2^2}{\omega^2 \mu_2^2} (\cos^2 \theta_T - \sin^2 \theta_T) \\
 &= \epsilon_2 (\cos^2 \theta_T - \sin^2 \theta_T) \\
 &= \epsilon_2 (2 \cos^2 \theta_T - 1) \\
 &= 2\epsilon_2 \cos^2 \theta_T - \epsilon_2,
 \end{aligned} \tag{3.99}$$

así, la Ec. (3.97) se reduce a :

$$\begin{aligned}
 4F_z &= \{ \epsilon_0 + 2\epsilon_0 \cos^2 \theta_i - \epsilon_0 \} |E_0|^2 (|r|^2 + 1) \\
 &\quad - \{ \epsilon_2 + 2\epsilon_2 \cos^2 \theta_T - \epsilon_2 \} |E_0|^2 |t|^2
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

De esta forma, la expresión para la fuerza total dada por la Ec. (3.93) puede ser escrita de una forma simple, compacta y elegante de la forma:

$$\vec{F} = \frac{1}{2} |E_0|^2 \{ \epsilon_0 \cos \theta_i (|r|^2 + 1) - \epsilon_2 \cos \theta_T |t|^2 \} \hat{z}. \tag{3.101}$$

En la ecuación (3.101), la región cero y la región dos son diferentes, pero si el medio de la región 0 es el mismo medio que la región 2, entonces $\epsilon_0 = \epsilon_2$ y $\theta_i = \theta_T = \theta$, por lo tanto, la ecuación se reduce a:

$$\vec{F} = \frac{1}{2} |E_0|^2 \epsilon_0 \cos \theta (1 + |r|^2 - |t|^2). \tag{3.102}$$

En incidencia normal, la ecuación (3.102) se puede escribir simplemente como la suma de los componentes de la fuerza debido a la conservación del momento

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_i &= \frac{\epsilon_0}{2} |E_0|^2 \hat{z} \\
 \vec{F}_r &= \frac{\epsilon_0}{2} |E_0|^2 |r|^2 \hat{z} \\
 \vec{F}_T &= -\frac{\epsilon_0}{2} |E_0|^2 |t|^2 \hat{z},
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

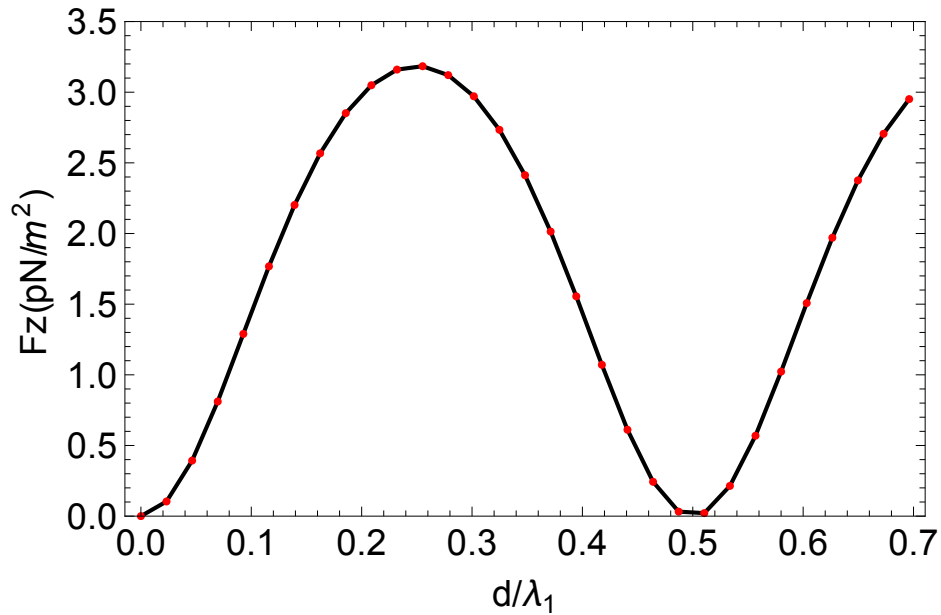


Figura 3.5: Densidad de fuerza para una onda que incide normal a una capa dieléctrica sin pérdida como una función de ancho del espesor d . La longitud de onda en el espacio libre es $\lambda = 430 \text{ nm}$ y $\epsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$ y el campo incidente es $E_i = 1 \text{ V/m}$.

donde \vec{F}_i , \vec{F}_r y \vec{F}_T son las fuerzas debidas a los momentos de onda incidente, reflejado y transmitido, respectivamente.

La figura 3.5 muestra la fuerza sobre una capa dieléctrica sin pérdida con $\epsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$. Los máximos o mínimos en la fuerza se deben a la dependencia periódica de la reflectancia y la transmitancia en el espesor de la capa. El mínimo de la fuerza se observa para espesores igual o múltiplos de la mitad de la longitud de onda $n\frac{\lambda}{2}$ y la fuerza máxima se observa para espesores igual a múltiplos impares de un cuarto de la longitud de onda $(2n + 1)\frac{\lambda_1}{2}$, donde λ_1 es la longitud de la luz dentro de la capa y $n \in [0, 1, 2, \dots]$.

Capítulo 4

Presión de Radiación Sobre un Cristal 3D

La figura 4.1 muestra onda plana que incide perpendicular a la superficie de un ópalo formado por capas de esferas dieléctricas. Parte de la onda es reflejada y otra parte es transmitida por el ópalo.

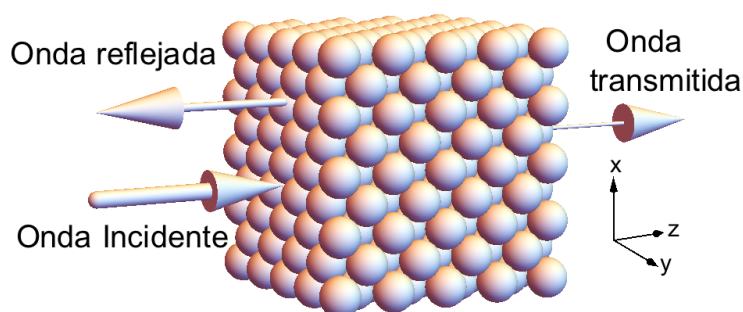


Figura 4.1: Esquema de una vista lateral del apilado FCC de las esferas que forman un ópalo. La luz incide de manera normal al ópalo, justo en la dirección $[111]$.

Para conocer la fuerza electromagnética ejercida por la luz sobre el ópalo en incidencia normal, es importante analizar los espectros de reflexión y transmisión que nos llevan a determinar la presión de radiación en la estructura fotónica tridimensional tal como la mostrada en la figura 4.1, cual consiste de $N = 9$ capas de esferas de SiO_2 con diámetro promedio de 200 nm que forman un ópalo.

La figura 4.2 muestra los espectros de reflectancia y transmitancia del ópalo de la figura 4.1, y además, la magnitud del campo $|E(z)|$ medido en unidades del campo incidente y corresponde al modo localizado en el centro de la brecha en la longitud de onda $\lambda_C = 430$ nm. Puede observarse que debido a que este modo se encuentra en el centro de la brecha, su amplitud decae exponencialmente a medida que viaja por el ópalo, pero finalmente logra atravesar la estructura y comportarse como un modo extendido.

La figura 4.3 muestra la magnitud del campo $|E(z)|$ medido en unidades del campo incidente, para los modos (4.3a, $\lambda = 422$ nm) y (4.3b, $\lambda = 464$ nm) justo debajo y por

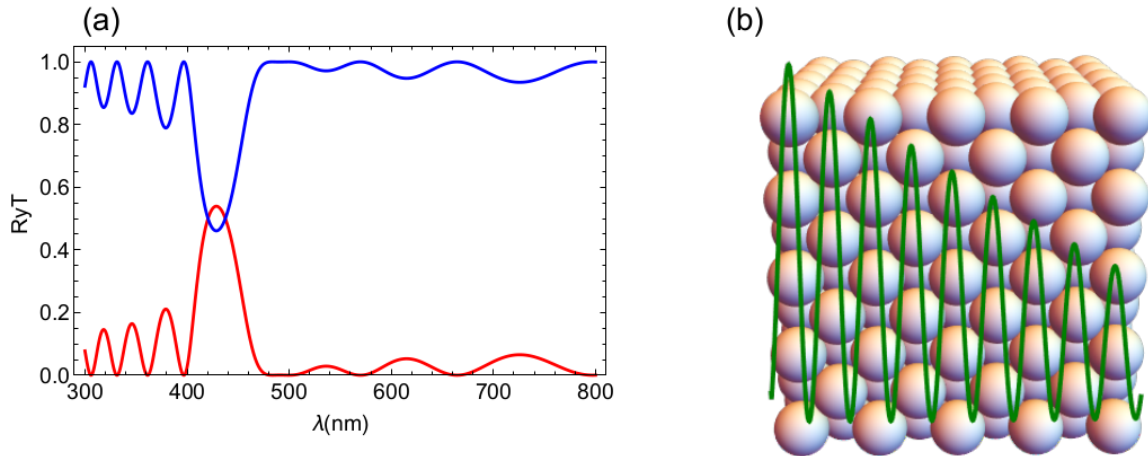


Figura 4.2: (a) Reflectancia y transmitancia del ópalo formado por $N = 9$ capas de esferas de SiO_2 . (b) La magnitud del campo $|E(z)|$ en el ópalo. El modo corresponde al modo localizado en el centro de la brecha en la longitud de onda $\lambda = 430\text{nm}$.

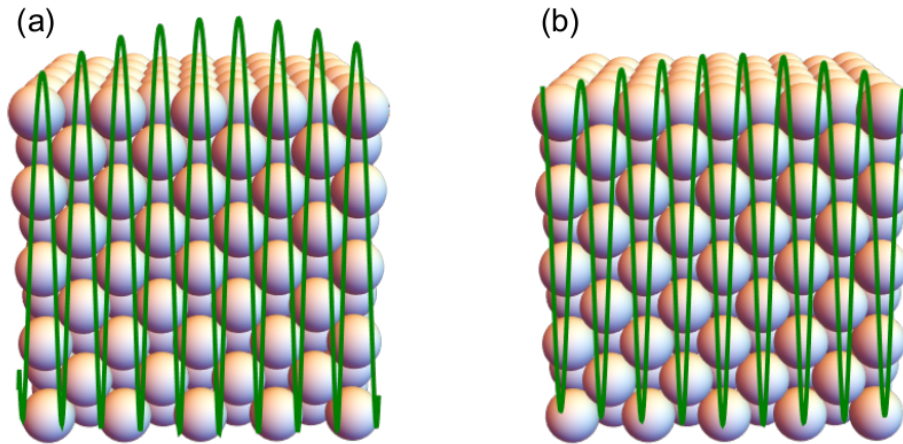


Figura 4.3: La magnitud del campo $|E(z)|$ en el ópalo cuando el modo corresponde a la longitud de onda (a) $\lambda = 422\text{ nm}$ justo antes del centro de la brecha y (b) $\lambda = 464\text{ nm}$ por arriba del centro de la brecha.

arriba de la longitud de onda del modo localizado en el centro de la brecha, respectivamente. Se observa que para $\lambda < \lambda_C$, los máximos del modo parecen localizarse en las regiones de las capas de esferas. Por otro lado, para $\lambda > \lambda_C$ los máximos parecen localizarse en las regiones donde se unen las diferentes capas de esferas. De acuerdo al teorema variacional del campo electromagnético, el modo de la figura (4.3a) concentra su energía en las regiones de baja constante dieléctrica y el modo de la figura (4.3b) concentra su energía en las regiones de mayor constante dieléctrica.

La figura 4.4 muestra la fuerza sobre un ópalo sin pérdida con la constante dieléctrica de las esferas de SiO_2 tomada como $\epsilon_s = 2.13$, $\mu_r = 1$. Esta fuerza fue calculada sustituyendo los coeficientes de reflexión (2.49) y transmisión (2.47), para un ópalo

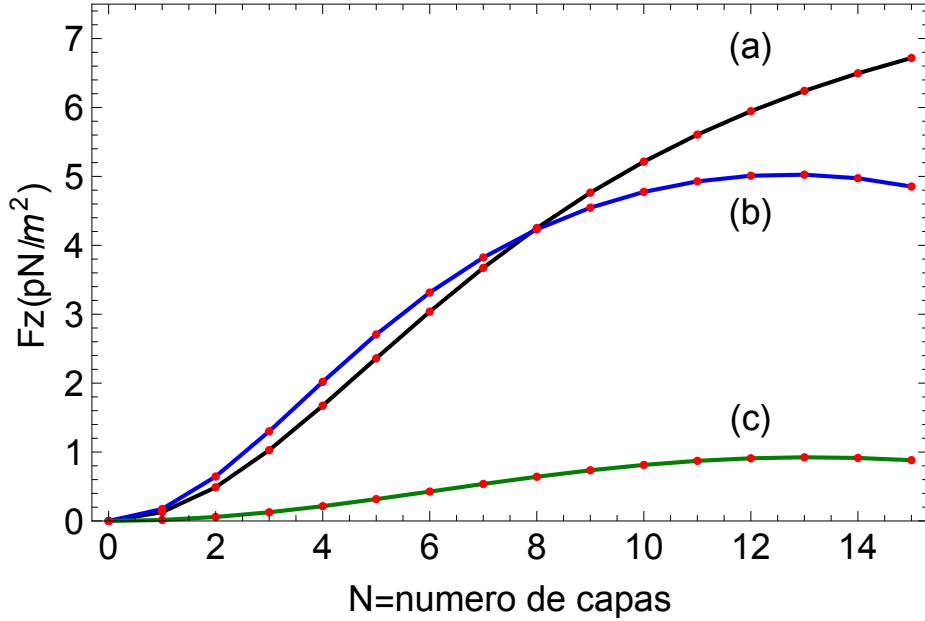


Figura 4.4: Densidad de fuerza para una onda con incidencia normal a un ópalo (sin pérdida) como una función del número de capas N . La longitud de onda en el espacio libre es (a) $\lambda = 430$ nm, (b) $\lambda = 422$ nm y (c) $\lambda = 464$ nm. La constante dieléctrica de las esferas de SiO_2 es $\epsilon_s = 2.13$, $\mu_r = 1$ y el campo incidente es $E_i = 1\text{V}/\text{m}$.

de SiO_2 formado por N capas de esferas, en la ecuación (3.102) para la fuerza electromagnética. De esta figura puede observarse que la fuerza sobre el ópalo, en la longitud de onda del centro del gap es mayor para N mayor a 8 capas (4.4(a)). Esto se debe a la disminución máxima de la transmitancia en esta longitud de onda.

Para tener una idea de la presión de radiación producida por un apuntador láser sobre el ópalo, consideramos lo siguiente. En el espacio libre la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica son $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{Tm}/\text{A}$ y $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\text{F}/\text{m}$, respectivamente. Para una onda electromagnética, el promedio en el tiempo del vector de Poynting es llamada la intensidad I y se define como

$$I = S_{AV} = \frac{E_{max}B_{max}}{2\mu_0} = \frac{E_{max}^2}{2\mu_0c} = \frac{cB_{max}^2}{2\mu}, \quad (4.1)$$

donde E_{max} (B_{max}) es la amplitud de campo eléctrico (magnético) y c es la velocidad de la luz en el vacío. Como se sabe, la intensidad de la onda electromagnética puede ser escrita como

$$I = \frac{\mathcal{P}_{AV}}{A}, \quad (4.2)$$

donde \mathcal{P}_{AV} es la potencia de salida promedio de la fuente que atraviesa una área A . Sustituyendo la ecuación (4.1) en (4.2) se obtiene

$$\mathcal{P}_{AV} = \frac{E_{max}^2 A}{2\mu_0c}. \quad (4.3)$$

Usualmente un apuntador láser crea un punto sobre una pantalla de alrededor de 3 mm^2 . Para obtener un campo eléctrico de 1 V/m como el discutido anteriormente, se necesita un apuntador láser con una potencia de $\mathcal{P}_{AV} = 4 \cdot 10^{-9} \text{ W}$. Un apuntador láser con una longitud de onda de $\lambda = 532 \text{ nm}$ y potencia $\mathcal{P}_{AV} = 60 \cdot 10^{-3} \text{ W}$ producirá un $E_{max} = 3.88 \cdot 10^3 \text{ V/m}$. Así, la presión de radiación con este tipo de láser sobre el ópalo podría ser un poco más de $F_z = 1 \cdot 10^{-4} \text{ N/m}^2$.

Investigaciones recientes, han buscado el aumento en la generación de la fuerza electromagnética en CF unidimensionales [26]. En esta dirección, Lugo y colegas [27, 28] han simulado y fabricado una estructura fotónica que consiste en una estructura similar a una microcavidad formada por dos cristales fotónicos unidimensionales hechos de silicio poroso autosoportado, separados por un espacio de aire variable y la longitud de onda de trabajo fue de 633 nm . El mecanismo empleado para inducir oscilaciones mecánicas se debe a la generación de fuerzas electromagnéticas: Un modo fotónico particular se excita con una longitud de onda de luz láser modulada. Para evidenciar la fuerza que ejerce esta radiación resonante en la estructura fotónica, ellos midieron las auto-oscilaciones y oscilaciones forzadas de la misma. La fuerza máxima y los niveles de amplitud de oscilación que han obtenido son del orden de 100 nN y 150 micras , respectivamente. Estos osciladores mecánicos fueron denominados fotodinas (photodyne). Los ópalos artificiales en esta tesis considerados, también pueden ser considerados como estos tipos de osciladores mecánicos.

Conclusiones

En esta tesis hemos abordado el estudio de la fuerza electromagnética sobre un cristal fotónico 3D, el cual podría ser construido por esferas de SiO_2 para la síntesis de ópalos artificiales.

Las principales conclusiones de estos estudios son las siguientes.

- Se mostró el espectro de reflectancia y transmitancia de un ópalo por medio de la aproximación de ondas planas.
- Se mostró que con esta aproximación es posible determinar los espesores de los ópalos.
- Se mostró que la presión de radiación en dirección paralela a una capa dieléctrica sin pérdidas, es nula.
- Se mostró la presión de radiación sobre un ópalo de SiO_2 .
- Se mostró que el modo localizado en el gap, produce mayor fuerza en las primeras capas del ópalo. Otros modos no centrados en el gap, ejercen una fuerza homogénea a través el ópalo.
- Se mostró la presión de radiación sobre el ópalo como una función del número de capas N de esferas, para diferentes longitudes de onda incidentes.

Con los resultados obtenidos en esta tesis, es posible ahora plantear un análisis sistemático para la inducción de fuerzas y auto-oscilaciones en estas estructuras dieléctricas bajo la radiación de luz láser modulada. Para establecer los principios de mejoramiento de la fuerza electromagnética, es importante analizar la transmisión así como la presión de radiación en la estructura fotónica tridimensional formada por dos ópalos con una cavidad de aire, como en los trabajos antes mencionados. Todas estas consideraciones mencionadas son problemas de investigación en trabajos futuros.

Apéndice A: Coeficientes de Fourier de la Constante Dieléctrica

De la Ec. 2.6, multiplicando ambos lados por $e^{-i\vec{G}'\cdot\vec{r}}$ e integrando sobre el volumen de celda unitaria V_c , se puede obtener la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}\int_{V_c} e^{-i\vec{G}'\cdot\vec{r}} \epsilon'(\vec{r}) d^3r &= \sum_{\vec{G}} U_{\vec{G}} \int_{V_c} e^{i(\vec{G}-\vec{G}')\cdot\vec{r}} d^3r \\ &= \sum_{\vec{G}} U_{\vec{G}} V_c \delta_{(\vec{G},\vec{G}')} \\ &= V_c U_{\vec{G}'},\end{aligned}\tag{4}$$

donde se utiliza la relación

$$\frac{1}{V_c} \int_{V_c} e^{i(\vec{G}-\vec{G}')\cdot\vec{r}} d^3r = \delta_{\vec{G},\vec{G}'},\tag{5}$$

de tal forma que cambiando $\vec{G}' \rightarrow \vec{G}$ en la Ec. 4, obtenemos que los coeficientes de Fourier $U_{\vec{G}}$ están dados por:

$$U_{\vec{G}} = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} \epsilon'(\vec{r}) d^3r,\tag{6}$$

donde V_c es el volumen de la celda unitaria primitiva del cristal.

Sustituyendo la relación para la constante dieléctrica dada por la Ec. 2.5 en la Ec. 6, podemos resolver la integral para valores $\vec{G} \neq \vec{0}$.

$$\begin{aligned}U_{\vec{G}} &= \frac{1}{V_c} \int_{V_c} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} [\epsilon_b + (\epsilon_s - \epsilon_b) \theta(\vec{r})] d^3r \\ &= \frac{\epsilon_b}{V_c} \int_{V_c} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} d^3r + \frac{\epsilon_s - \epsilon_b}{V_c} \int_{V_c} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} \theta(\vec{r}) d^3r,\end{aligned}\tag{7}$$

usando la Ec. 5 con $\vec{G}' = \vec{0}$, la primer integral resulta ser nula, por otro lado, para la segunda integral usando la propiedad de la función $\theta(\vec{r})$, la integral sólo tendrá sentido cuando se esté dentro de las esferas que llenan el volumen de la celda primitiva, por lo tanto podemos resolver la integral solo sobre el volumen de una esfera V_A y

multiplicarla por el número total de esferas dentro de el volumen de la celda primitiva V_c . Para una estructura FCC el número de esferas dentro de una celda es 4 y el volumen de la celda primitiva es $V_c = a^3$. Por lo tanto la integral 7 resulta:

$$\begin{aligned}
U_{\vec{G}} &= \frac{\epsilon_b}{V_c} \int_{V_c} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} d^3r + \frac{\epsilon_s - \epsilon_b}{V_c} \int_{V_c} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} \theta(\vec{r}) d^3r \\
&= \epsilon_b \delta_{\vec{G},\vec{0}} + \frac{4(\epsilon_s - \epsilon_b)}{a^3} \int_{V_A} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} d^3r \\
&= 0 + \frac{4(\epsilon_s - \epsilon_b)}{a^3} \int_0^{R_s} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-iGr \cos\theta} r^2 \text{sen } \theta d\theta d\phi dr \\
&= \frac{4(\epsilon_s - \epsilon_b)}{a^3} \int_0^{R_s} \int_0^{2\pi} \frac{2 \text{sen}(Gr)r}{G} d\phi dr \\
&= \frac{16\pi(\epsilon_s - \epsilon_b)}{a^3} \int_0^{R_s} \frac{\text{sen}(Gr)r}{G} dr \\
&= \frac{16\pi(\epsilon_s - \epsilon_b)}{(aG)^3} [\text{sen}(GR_s) - GR_s \cos(GR_s)], \tag{8}
\end{aligned}$$

por lo tanto, de la Ec. 8 los coeficientes de Fourier para un ópalo con un arreglo FCC son:

$$U_{\vec{G}} = \frac{16\pi}{(aG)^3} (\epsilon_c - 1) \epsilon_b [\text{sen}(GR_s) - GR_s \cos(GR_s)]. \tag{9}$$

Apéndice B: Teorema de Bloch

El teorema de Bloch fue enunciado por el físico suizo Felix Bloch basándose en la idea de que un sólido posee una estructura microscópica periódica. El teorema describe el movimiento de los electrones en un sólido, considerando las siguientes hipótesis:

- Los átomos del cristal forman una estructura periódica y ocupan las posiciones de una red de Bravais denotadas por el vector \vec{r} .
- Debido al ordenamiento de los átomos, el potencial del cristal es una función periódica que cumple $U(\vec{R} + \vec{r}) = U(\vec{r})$ para todo vector de traslación \vec{R} de la red de Bravais.
- Los electrones son independientes, no interactúan entre sí y cada uno satisface la ecuación de Schrödinger para un potencial periódico.

Los eigenestados ψ del Hamiltoniano $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r})$ de una partícula en un potencial periódico $U(\vec{r})$, pueden ser elegidos en términos de una onda plana y una función con la periodicidad del potencial $U(\vec{r})$, esto es:

$$\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} u_{\vec{k}}(\vec{r}), \quad (10)$$

donde

$$u_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{R}) = u_{\vec{k}}(\vec{r}), \quad (11)$$

para todo \vec{R} en la red de Bravais.

El teorema de Bloch se establece en forma alternativa de la siguiente forma: Los estados propios del Hamiltoniano \hat{H} se pueden elegir de modo que asociado con cada eigenestado ψ exista un vector de onda \vec{K} tal que:

$$\psi(\vec{r} + \vec{R}) = e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}} \psi(\vec{r}) \quad (12)$$

por cada \vec{R} en la red de Bravais.

Una prueba de este teorema puede obtenerse al considerarse un electrón moviéndose en un potencial periódico, donde

$$U(\vec{r} + \vec{R}) = U(\vec{r}), \quad \forall \vec{R} \in \text{Red de Bravais}. \quad (13)$$

Por lo tanto, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo puede ser escrita de la forma:

$$\widehat{H}\psi(\vec{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = \epsilon\psi(\vec{r}). \quad (14)$$

Si $T_{\vec{R}}$ un operador de traslación, que traslada el argumento de una función en \vec{R} entonces

$$T_{\vec{R}}f(\vec{r}) = f(\vec{r} + \vec{R}). \quad (15)$$

Aplicando el operador sobre el término de la izquierda en la Ec. (14)

$$T_{\vec{R}}\widehat{H}\psi(\vec{r}) = H(\vec{r} + \vec{R})\psi(\vec{r} + \vec{R}) = H(\vec{r})\psi(\vec{r} + \vec{R}) = \widehat{H}T_{\vec{R}}\psi(\vec{r}), \quad (16)$$

obtenemos que los operadores Hamiltoniano \widehat{H} y de traslación $T_{\vec{R}}$ conmutan

$$[\widehat{H}, T_{\vec{R}}] = 0. \quad (17)$$

Una propiedad importante del operador de traslación $T_{\vec{R}}$ es

$$T_{\vec{R}}T_{\vec{R}'}f(\vec{r}) = T_{\vec{R}}f(\vec{r} + \vec{R}') = f(\vec{r} + \vec{R}' + \vec{R}) = T_{\vec{R}+\vec{R}'}f(\vec{r}), \quad (18)$$

es decir,

$$T_{\vec{R}}T_{\vec{R}'} = T_{\vec{R}+\vec{R}'} = T_{\vec{R}'+\vec{R}} = T_{\vec{R}'}T_{\vec{R}}. \quad (19)$$

Como $T_{\vec{R}}$ y \widehat{H} conmutan, se pueden encontrar funciones que sean autofunciones de ambos operadores simultáneamente

$$\widehat{H}\psi = \epsilon\psi, \quad T_{\vec{R}}\psi = C(\vec{R})\psi. \quad (20)$$

donde $C(\vec{R}) \in \mathbb{C}$.

Si \vec{R} y \vec{R}' son dos vectores de la red de Bravais, al aplicar los operadores $T_{\vec{R}}$ y $T_{\vec{R}'}$ al eigenestado ψ , se obtiene

$$T_{\vec{R}}T_{\vec{R}'}\psi(\vec{r}) = T_{\vec{R}}C(\vec{R}')\psi(\vec{r}) = C(\vec{R}')C(\vec{R})\psi(\vec{r}). \quad (21)$$

Por otro lado, al aplicando de igual forma el operador $T_{\vec{R}+\vec{R}'}$

$$T_{\vec{R}+\vec{R}'}\psi(\vec{r}) = C(\vec{R} + \vec{R}')\psi(\vec{r}), \quad (22)$$

y dado que $T_{\vec{R}}T_{\vec{R}'} = T_{\vec{R}+\vec{R}'}$, entonces

$$C(\vec{R}')C(\vec{R}) = C(\vec{R} + \vec{R}'). \quad (23)$$

De esta forma, si se escribe al vector de traslación de la forma $\vec{R} = n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2 + n_3\vec{a}_3$ (donde $n_i \in \mathbb{N}$), como una combinación lineal de los vectores primitivos \vec{a}_i de la Red de Bravais con $i = 1, 2, 3$. es posible obtener

$$\begin{aligned} C(\vec{R}) &= C(n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2 + n_3\vec{a}_3) \\ &= C(n_1\vec{a}_1)C(n_2\vec{a}_2)C(n_3\vec{a}_3) \\ &= C(\underbrace{\vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_1}_{n_1 \text{ veces}})C(\underbrace{\vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_2}_{n_2 \text{ veces}})C(\underbrace{\vec{a}_3 + \dots + \vec{a}_3}_{n_3 \text{ veces}}). \end{aligned} \quad (24)$$

Es decir

$$C(\vec{R}) = [C(\vec{a}_1)]^{n_1} [C(\vec{a}_2)]^{n_2} [C(\vec{a}_3)]^{n_3}. \quad (25)$$

Si ψ es un estado normalizado ($\psi\psi^* = 1$) y $T_{\vec{R}}$ es un operador unitario, entonces

$$\psi\psi = \psi \widehat{T}_{\vec{R}} \widehat{T}_{\vec{R}} \psi = |C(\vec{R})|^2 \psi\psi \Rightarrow |C(\vec{R})|^2 = 1, \quad (26)$$

llevando a $C(\vec{a}_i) \equiv e^{2\pi i \lambda_j}$, donde $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$, y $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ son los vectores primitivos de la Red de Bravais, dejando

$$C(\vec{R}) = e^{2\pi i (n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 + n_3 \lambda_3)}. \quad (27)$$

Si $\vec{K} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \lambda_3 \vec{b}_3$, donde los \vec{b}_i con $i = 1, 2, 3$, son los vectores primitivos de la red recíproca y usando la propiedad

$$\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = 2\pi \delta_{ij}, \quad (28)$$

Es posible escribir

$$\begin{aligned} \vec{K} \cdot \vec{R} &= (\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \lambda_3 \vec{b}_3) \cdot (n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + n_3 \vec{a}_3) \\ &= 2\pi (\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3). \end{aligned} \quad (29)$$

De esta manera, sustituyendo en la Ec. (27)

$$C(\vec{R}) = e^{i\vec{K} \cdot \vec{R}}. \quad (30)$$

Finalmente

$$T_{\vec{R}} \psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} + \vec{R}) = C(\vec{R}) \psi(\vec{r}) = e^{i\vec{K} \cdot \vec{R}} \psi(\vec{r}). \quad (31)$$

que es precisamente el teorema de Bloch en la forma (12).

Bibliografía

- [1] J.D. Joannopoulos, R.D. Meade, J.N. Winn, Photonic Crystals: Molding the Flow of Light, Princeton University Press, Princeton 1995.
- [2] J. E Lugo, H. A. López, S. Chan, and P. M. Fauchet, J. Appl. Phys. **91**, 4966 (2002).
- [3] Y. Fink, J. N. Winn, S. Fan, C. Chen, J. Michel, J. D. Joannopoulos, and E. L. Thomas, Science **282**, 1679 (1998).
- [4] V. Agarwal, J. A. del Río, G. Malpuech, M. Zamfirescu, A. Kavokin, D. Coquillat, D. Scalbert, M. Vladimirova, and B. Gil, Physical Review Letters **92**, 097401 (2004).
- [5] J. O. Estevez, J. A. Arriaga, A. Mendez-Blas, E. Reyes-Ayona, J. Escorcía, and V. Agarwal, Nanoscale Research Letters **7**, 413 (2012).
- [6] G. A. Rodriguez, J. L. Lawrie, and S. M. Weiss, Porous silicon biosensors for DNA sensing, Porous Silicon for Biomedical Applications, edited by H. A. Santos, Woodhead Publishing Ltd., University of Helsinki, Finland (2014).
- [7] J. E. Lugo, R. Doti, and J. Faubert, PLoS ONE **6**, e17188 (2011).
- [8] J. E. Lugo, R. Doti, N. Sánchez, M. B. de la Mora, J. A. del Río, and J. Faubert, Scientific Reports **4**, 3705 (2014).
- [9] Zhuo Ye Joong-Mok Park Kristen Constant Tae-Geun Kim Kai-Ming Ho, Journal of Photonics for Energy, **2**, 021012-1 (2012).
- [10] Z. Zhou and X. S. Zhao. Langmuir **20** (4), 1524 (2004).
- [11] David Hernández García, Estudio de cristales y cuasicristales fotónicos basados en silicio macroporoso, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España (2008).
- [12] Marta Ibisate Muños, Cristales Fotónicos Basados en Ópalos, Instituto de Ciencia de Materiales de Madrid, España (2003).
- [13] Gabriel S. Lozano Barbero, Análisis del crecimiento y la respuesta óptica en alta energía de cristales fotónicos coloidales, Instituto de Ciencia de Materiales de Sevilla, Sevilla (2010).

- [14] Porras González, Y., Puentes Ossa, A., Rodríguez Patarroyo, D. (2015). Cristales fotónicos empleados en tratamientos médicos. *Avances: Investigación En Ingeniería*, Vol. 12 No. (1), (2015).
- [15] Camilo Antonio Restrepo Bentancor, Estudio de las propiedades ópticas de cristales fotónicos 1D y 2D, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia (2018).
- [16] Hernán Míguez García, Los ópalos artificiales como cristales fotónicos, Universidad Autónoma de Madrid, España (2000).
- [17] Pochi Yeh, *Optical Waves in Layered Media*, John Wiley Sons, California (1988).
- [18] Álvaro Blanco Montes, Cristales Fotónicos Ópalo-Semiconductor, Departamento de Física de Materiales Facultad de Ciencias Universidad Autónoma de Madrid (2001).
- [19] Carlos Morante Méndez (2016). Estudio de las propiedades ópticas de ópalos de dióxido de silicio con inclusiones de nanopartículas de cobalto. Tesis de Maestría en Física Aplicada. Benemerita Universidad Autonoma de Puebla.
- [20] K. W. K. Shung and Y. C. Tsai, *Phys. Rev. B* **48**, 11265 (1993).
- [21] P. M. Hui, W. M. Lee, and N. F. Johnson, *Solid State Commun.* **91**, 65 (1994).
- [22] . Satpathy, Z. Zhang, and M. R. Salehpour, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1239 (1990).
- [23] S. Datta, C. T. Chan, K. M. Ho, and C. M. Soukoulis, *Phys. Rev. B* **48**, 14936 (1993).
- [24] González, A. L., Gómez, A. S., Toledo-Solano, M. (2019). Metallo-Dielectric Colloidal Films as SERS Substrate. In *Nanorods and Nanocomposites*. IntechOpen.
- [25] Bertone F. J. et al., *Journal of chemical physics* **111** (1), 345 (1999).
- [26] J. M. Li, T. L. Dong, and G. J. Shan, *Progress In Electromagnetics Research M*, **10**, 59-70. doi:10.2528/PIERM09102202 (2009).
- [27] J. E. Lugo, R. Doti, N. Sanchez, M. B. de la Mora, J. A. del Rio, and J. Faubert, *Scientific Reports* **4**, 3705 (2014).
- [28] J.E. Lugo, R. Doti, N. Sanchez and J. Faubert, *J.Nanophotonics* **8**, 083071-1.