



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---



Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Aplicación de la formulación de Lagrange a un campo  
Termodinámico

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA**

por

Ángel David Toriz Ruiz

Asesorado por

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada

Puebla Pue.  
Junio de 2020





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Aplicación de la formulación de Lagrange a un campo  
Termodinámico

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA**

por

Ángel David Toriz Ruiz

Asesorado por

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada

Puebla Pue.  
Junio de 2020



**Título:** Aplicación de la formulación de Lagrange a un campo Termodinámico  
**Estudiante:** ÁNGEL DAVID TORIZ RUIZ

COMITÉ

---

Dra. Beatriz Bonilla Capilla  
Presidente

---

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero  
Secretario

---

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco  
Vocal

---

Dra. Iraís García Rubalcava  
Vocal

---

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada  
Asesor



# Agradecimientos

El cierre de este periodo en mi vida que me ha cambiado radicalmente hubiera sido considerablemente más difícil, si no es que imposible, sin el apoyo de varias personas. Para empezar, por supuesto, están mi madre y mis abuelos, que aunque me observaron con un poco de extrañeza cuando les comuniqué que quería estudiar física, siempre confiaron en mi capacidad y se preocuparon porque no me faltara nada y me alentaron las no pocas veces que me veían pusilánime. También, claro, todos mis familiares que no dudaron en brindarme su amparo siempre que lo necesité, en particular mi tío José Augusto.

Quiero agradecer también a mis amigos, tanto los que me apoyaron desde antes de la universidad como los que conocí durante mi paso por la licenciatura: a Diana, por su perenne apoyo y su inagotable paciencia; a Chucho, por su comicidad y camaradería en la universidad y en las largas noches de estudio; a Poncho, por su serenidad y facilidad de aligerar cualquier sesión de estudio; a Lalo, Irandheny, Dinorah, Abril y a tantos más por hacer las largas horas en la universidad notablemente más llevaderas.

A mi jurado, el doctor Maximino Arroyo, el doctor Cupatitzio Ramírez y la doctora Beatriz Bonilla, por su amable disposición y buena voluntad al participar en este evento.

Por último, quiero agradecer a la doctora Mercedes Velázquez, quien desde mi ingreso a la universidad supo infundir en mí entusiasmo por la física, por su dirección e invaluable ayuda en el desarrollo de esta revisión y por su alta tolerancia a mis constantes preguntas.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Formalismo de Lagrange</b>	<b>1</b>
1.1. Cálculo de variaciones: Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	1
1.1.1. La notación delta . . . . .	3
1.2. La acción y el principio de Hamilton . . . . .	4
1.3. Formalismo de Lagrange para sistemas continuos (campos) . . . . .	5
<b>2. Campo termodinámico</b>	<b>7</b>
2.1. Deformación . . . . .	7
2.1.1. Transformación de un elemento de volumen . . . . .	7
2.1.2. Variación y razón de cambio de un elemento de volumen . . . . .	8
2.1.3. Teorema de Reynolds . . . . .	10
2.2. Principio de Hamilton para el campo termodinámico . . . . .	10
2.2.1. Variación temporal de la acción . . . . .	11
2.3. Densidad de masa . . . . .	13
2.4. Ecuaciones de campo: proposición de lagrangianas . . . . .	13
2.4.1. Primera Ley (proceso adiabático) . . . . .	14
2.4.2. Primera Ley . . . . .	17
2.4.3. Relación de Euler . . . . .	20
2.4.4. Relación termodinámica fundamental o Forma combinada de la primera y segunda leyes para procesos reversibles . . . . .	22
<b>Conclusión</b>	<b>25</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>27</b>



# Resumen

La Termodinámica es la rama de la ciencia que estudia la relación entre el calor (energía transferida a través de conducción, radiación o fricción) y otros tipos de energía (como la mecánica o la eléctrica). Suele impartirse de manera axiomática: las leyes y fórmulas se presentan como resultado directo de la experimentación y la mayoría no se deriva de alguna teoría anterior. Por otra parte, puede considerarse a un sistema termodinámico como un campo físico, es decir, como un conjunto de funciones (en este caso, las variables termodinámicas) que a cada punto del espacio euclidiano tridimensional le asignan un valor; esto permite plantear la termodinámica como una rama de la mecánica de Lagrange para sistemas continuos. Este tratamiento de un sistema termodinámico permite obtener sus ecuaciones termodinámicas mediante el mismo tipo de principios que se utilizan para hallar las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico.

**Palabras clave:** *Termodinámica, Cálculo de variaciones, Mecánica de Lagrange, Deformación, Principio de Hamilton.*



# Introducción

Este proyecto de revisión tiene por propósito mostrar a alumnos de nivel licenciatura una aplicación poco conocida de la formulación de Lagrange para medios continuos. Hasta el posgrado, es común que los alumnos vean la teoría lagrangiana sólo en el caso discreto; si llega a verse el caso continuo, suelen estudiarse ejemplos que se han estudiado desde hace ya bastante tiempo. Esto, por supuesto, no tiene nada de malo: el hecho de que tantas generaciones hayan usado los mismos ejemplos es testimonio de que son fáciles de comprender cuando recién se comienza, y lo que más se desea es precisamente que los alumnos neófitos no rehúyan de la mecánica lagrangiana por una percibida dificultad. Sin embargo, los ejemplos comunes pueden en ocasiones parecer tan simplificados o idealizados, que al estudiante le resulta difícil ver cómo se aplica la teoría de Lagrange en un contexto diferente. Con esto en mente, la presente tesis busca mostrar al lector un ejemplo a la vez sencillo y menos estudiado, que permite más fácilmente ver cómo entra la teoría de Lagrange en otras áreas de la Física que no sean la Dinámica. Este trabajo pretende servir de plataforma al estudiante interesado en teorías de campos, pues el problema se aborda de manera gradual, explicando paso por paso, y evitando sobrecargar al alumno.

En este trabajo, se usan principios variacionales y densidades lagrangianas para llegar a algunas ecuaciones termodinámicas de un fluido bajo ciertas condiciones. Esto también tiene como propósito mostrar que la teoría de campos puede ser aplicada a sistemas que no sean relativistas o cuánticos, los dos tipos de sistemas más comúnmente estudiados con este método. Finalmente, este trabajo tiene como intención despertar un interés en los alumnos por buscar maneras alternativas de estudiar las ramas de la Física: así como la Termodinámica puede tratarse desde un enfoque lagrangiano, hay otros modos de llegar a las teorías clásicas que pueden brindar nuevas percepciones de éstas, no fácilmente visibles con los enfoques tradicionales.

En el primer capítulo, se presentan los métodos que condujeron a la teoría de Lagrange: el cálculo de variaciones y el principio de Hamilton. Tras haber sentado estas bases para sistemas discretos, se hace la generalización a sistemas continuos, aclarando las similitudes y diferencias entre estos dos sistemas. Con esto, se llega al segundo capítulo, donde se explica qué tipo de sistema termodinámico se estudiará y se introducen conceptos y métodos físicos y matemáticos que serán necesarios para el desarrollo de la teoría lagrangiana en este sistema. Finalmente, se llega a mostrar la aplicación directa de estos métodos al sistema, proponiendo densidades lagrangianas y variables de campo que permiten la obtención de las ecuaciones que describen la termodinámica del sistema.



# Capítulo 1

## Formalismo de Lagrange

Esta sección está basada en los desarrollos presentados en los libros *Classical Mechanics*, de J. Taylor, cap. 6; *Classical Dynamics of Particles and Systems*, de S. Thornton y J. Marion, cap. 6; y *Mecánica Clásica*, de J. W. Leech, cap. 9.

### 1.1. Cálculo de variaciones: Ecuaciones de Euler-Lagrange

Para hablar de la mecánica lagrangiana, es necesario enunciar primero las ecuaciones que llevaron a su desarrollo; dichas ecuaciones surgen del problema varacional. Este problema puede enunciarse de la siguiente manera: Se tiene una integral de la forma

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x), x] dx, \quad (1.1)$$

donde  $y(x)$  es una curva que une los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ :

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2. \quad (1.2)$$

Buscamos la curva que vuelve estacionaria a  $S$ . Denotamos a esta curva simplemente por  $y(x)$ . En particular, buscamos que  $S$  evaluada en  $y(x)$  sea menor que el valor de  $S$  evaluada en otras curvas  $Y(x)$ . Denotaremos explícitamente esta diferencia entre  $y(x)$  y  $Y(x)$  con la siguiente expresión:

$$Y(x) = y(x) + \alpha \eta(x). \quad (1.3)$$

Es evidente de esta expresión que obtenemos la curva buscada cuando  $\alpha = 0$ . Puesto que esta  $Y(x)$  también debe tener los mismos extremos que  $y(x)$ , debe cumplirse que

$$\eta(x_1) = 0 = \eta(x_2). \quad (1.4)$$

Éstas son las condiciones de frontera. La derivada de la ecuación 1.3 respecto de  $x$  es:

$$Y' = y'(x) + \alpha \eta'(x). \quad (1.5)$$

Ahora,  $S$  evaluada en  $Y(x)$  depende del parámetro  $\alpha$ , es decir:

$$S = S(\alpha), \quad (1.6)$$

lo cual significa que, como  $S(\alpha)$  es estacionaria para  $Y(x) = y(x)$ , y esto último sucede cuando  $\alpha = 0$ , buscamos que

$$\left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0. \quad (1.7)$$

Podemos entonces reescribir (1.1) de la siguiente manera:

$$S(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(Y, Y', x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x) dx, \quad (1.8)$$

de manera que la derivada de la integral (1.8) es

$$\frac{dS}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \int_{x_1}^{x_2} f(y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\alpha} f(y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x) dx. \quad (1.9)$$

El paso a la última igualdad resulta de la regla de Leibniz para la diferenciación de una integral: Dada una integral de la forma

$$\Phi(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(z, t) dz,$$

la derivada de esta integral es:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(z, t)}{\partial t} dz + f(b(t), t) \frac{db}{dt} + f(a(t), t) \frac{da}{dt}. \quad (1.10)$$

En la ecuación (1.9), los límites de integración  $x_1$  y  $x_2$  no dependen de  $\alpha$ , así que los últimos dos sumandos de (1.10) se anulan; la consecuencia de esto es que el signo de derivada pueda entrar en el signo de integral sin mayor dificultad.

La derivada total de  $f$  respecto de  $\alpha$  es:

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{dY}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{dY'}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d\alpha}. \quad (1.11)$$

De la ecuación (1.3), tenemos que

$$\frac{dY}{d\alpha} = \frac{d(y + \alpha\eta)}{d\alpha} = \eta, \quad (1.12)$$

mientras que de la ecuación (1.5) tenemos

$$\frac{dY'}{d\alpha} = \frac{d(y' + \alpha\eta')}{d\alpha} = \eta'. \quad (1.13)$$

Así, sustituyendo los resultados (1.12) y (1.13) en la ecuación (1.11), obtenemos

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial Y} \eta + \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta', \quad (1.14)$$

puesto que  $x$  no depende de  $\alpha$ . Evaluando en  $\alpha = 0$ :

$$\left. \frac{df}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial Y} \eta + \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' \right|_{\alpha=0}. \quad (1.15)$$

La condición de extremidad (1.7) es entonces, usando las ecuaciones (1.8) y (1.14):

$$\left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial Y} \eta + \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' \right] dx = 0. \quad (1.16)$$

El término de la derecha puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial Y} \eta + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{d\eta}{dx} \right] dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial Y} \eta dx + \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{d\eta}{dx} \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial Y} \eta dx + \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \eta \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial Y'} \right) dx \end{aligned} \quad (1.17)$$

donde el paso de la segunda a la tercera igualdad es resultado de integrar el segundo sumando por partes. Entonces, de la última igualdad, y recordando las condiciones de frontera (1.4):

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \eta \, dx - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx &= 0 \\ \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \eta \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx &= 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Dado que  $\eta(x)$  es una función con valores arbitrarios y esto debe cumplirse para cualquier valor de  $\eta(x)$ , el resultado (1.18) es posible sólo si

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (1.19)$$

Ésta es llamada la **ecuación de Euler-Lagrange**. Este caso de una sola variable independiente  $x$  y una sola variable dependiente  $y$  puede extenderse al caso de  $n$  variables dependientes  $y_i$  (pero independientes entre sí)

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) = 0, \quad (1.20)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Si, además, estas  $n$  variables dependen de  $m$  variables independientes  $x_r$ , tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \sum_{r=1}^m \frac{d}{dx_r} \left( \frac{\partial f}{\partial y'_{i,r}} \right) = 0, \quad (1.21)$$

donde

$$y'_{i,r} = \frac{dy_i}{dx_r}. \quad (1.22)$$

La condición de extremidad (1.7) en este caso se escribe como

$$\left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha} \int \dots \int f(y_i, y'_{i,r}, x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = 0, \quad (1.23)$$

donde  $y_i = y_i(x_1, \dots, x_m)$ .

### 1.1.1. La notación delta

Para un valor arbitrariamente pequeño de  $\alpha$ , el mismo desarrollo que nos condujo a la ecuación (1.18) nos conduciría al siguiente resultado:

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dY}{d\alpha} \left( \frac{\partial f}{\partial Y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial Y'} \right) dx, \quad (1.24)$$

donde se ha usado la ecuación (1.12); de este último resultado, tenemos que:

$$\frac{dS}{d\alpha} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dY}{d\alpha} d\alpha \left( \frac{\partial f}{\partial Y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial Y'} \right) dx. \quad (1.25)$$

Definimos

$$\frac{dS}{d\alpha} d\alpha \equiv \delta S, \quad (1.26)$$

llamada la *variación* de  $S$ , y

$$\frac{dY}{d\alpha} d\alpha \equiv \delta Y, \quad (1.27)$$

llamada la *variación* de  $Y$ . Con estas definiciones y (1.12), las condiciones de frontera (1.4) son entonces:

$$\eta(x_1) d\alpha = \delta Y(x_1) = 0 = \delta Y(x_2) = \eta(x_2) d\alpha. \quad (1.28)$$

Usando las definiciones de la variación, (1.25) puede reescribirse como

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \delta Y \left( \frac{\partial f}{\partial Y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial Y'} \right) dx. \quad (1.29)$$

La condición de extremidad es, pues,

$$\delta S = \delta \int_{x_1}^{x_2} f(Y, Y', x) dx = 0. \quad (1.30)$$

Usando la regla de Leibniz (1.10) y la independencia de los límites de integración respecto de  $\alpha$ , podemos introducir el símbolo  $\delta$  en la integral

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \delta f(Y, Y', x) dx = 0. \quad (1.31)$$

Reescribimos entonces (1.14):

$$\delta f \equiv \frac{df}{d\alpha} d\alpha = \frac{\partial f}{\partial Y} \delta Y + \frac{\partial f}{\partial Y'} \delta Y'. \quad (1.32)$$

Sustituyendo esto en la ecuación (1.31), tenemos

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial Y} \delta Y + \frac{\partial f}{\partial Y'} \delta Y' \right) dx = 0. \quad (1.33)$$

Ahora, notamos que

$$\frac{d}{dx} (\delta Y) = \frac{d}{dx} \left( \frac{dY}{d\alpha} d\alpha \right) = \frac{d}{dx} (\eta(x) d\alpha) = \eta'(x) d\alpha$$

y que

$$\delta(Y') = \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{dY}{dx} \right) d\alpha = \frac{d}{d\alpha} (y'(x) + \alpha \eta'(x)) d\alpha = \eta'(x) d\alpha;$$

o sea,

$$\frac{d}{dx} (\delta Y) = \delta \left( \frac{dY}{dx} \right).$$

Con esto, tenemos en la ecuación (1.33)

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial Y} \delta Y + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{d}{dx} \delta Y \right) dx = 0. \quad (1.34)$$

Haciendo una integración por partes como se hizo en el paso (1.17), tenemos

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial Y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \delta Y dx = 0. \quad (1.35)$$

Puesto que la variación  $\delta Y$  es arbitraria, esto resulta de nuevo en las ecuaciones de Euler-Lagrange. Usaremos la notación  $\delta$  en el resto de este texto para indicar variaciones definidas como en (1.26).

## 1.2. La acción y el principio de Hamilton

Una aplicación del cálculo de variaciones y de las ecuaciones de Euler-Lagrange es en la mecánica clásica, para un sistema dinámico discreto. En este caso, llamamos a  $S$  la **acción** del sistema, y definimos de la siguiente manera el integrando de dicha acción:

Consideramos una función dependiente de las  $n$  *coordenadas generalizadas*  $\{q_i(t)\}$  del sistema, sus *velocidades generalizadas*  $\{\dot{q}_i(t)\}$  y el tiempo  $t$ , definida de la siguiente manera:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - U, \quad (1.36)$$

donde  $T$  es la energía cinética del sistema y  $U$  su energía potencial; esto quiere decir que la función  $L$  tiene unidades de energía,  $\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$ . De esta forma, el problema variacional queda expresado por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt, \quad (1.37)$$

mientras que la condición de extremidad es

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0. \quad (1.38)$$

Esta última ecuación expresa el llamado **principio de Hamilton**, que enuncia:

*De todas las posibles trayectorias que puede seguir un sistema dinámico de una configuración  $\mathbf{q}(t_1)$  a otra configuración  $\mathbf{q}(t_2)$ , la trayectoria real que sigue es tal que vuelve estacionaria la acción del sistema.*

Las ecuaciones de Euler-Lagrange que satisfacen (1.38) son entonces

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad (1.39)$$

y son llamadas simplemente *ecuaciones de Lagrange* en este contexto; resultan de la condición estacionaria de la acción y son en efecto las ecuaciones de movimiento del sistema.  $L$  es llamada la **función lagrangiana** del sistema, o simplemente la **lagrangiana**. Esta manera de obtener las ecuaciones de movimiento es conocida como *formalismo de Lagrange*, y es equivalente al conocido formalismo newtoniano, y en ciertos casos resulta más conveniente de usar que este último.

### 1.3. Formalismo de Lagrange para sistemas continuos (campos)

Es posible hacer una extensión del formalismo de Lagrange para sistemas continuos. A diferencia del caso discreto, en el que el sistema tiene un número finito de grados de libertad, en el caso continuo tenemos un número *infinito* de grados de libertad. Consideramos que nuestro sistema dinámico posee un número  $r$  de propiedades físicas  $\eta$ , denominadas **campos**, que asignan un valor a cada punto del espacio-tiempo; es decir, cada campo es función de la posición y el tiempo. Además de estos campos, en la formulación continua intervienen sus derivadas temporal y espaciales:

$$\eta^{(r)}(x^1, x^2, x^3, t); \quad \frac{d\eta^{(r)}}{dt} \equiv \dot{\eta}^{(r)}; \quad \frac{d\eta^{(r)}}{dx^j} \equiv \partial_j \eta^{(r)} \quad (1.40)$$

En el caso del sistema discreto, definimos la función lagrangiana como una función dependiente de las coordenadas y velocidades generalizadas del sistema (variables dependientes) y el tiempo (variable independiente). Para el caso continuo, definiremos la **densidad lagrangiana**, una función dependiente de los campos y sus derivadas (variables dependientes), y de la posición y el tiempo (variables independientes):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta^{(r)}, \dot{\eta}^{(r)}, \partial_j \eta^{(r)}, x^j, t). \quad (1.41)$$

La integral sobre una región  $\Omega$  del espacio euclidiano tridimensional de esta densidad lagrangiana es la función lagrangiana:

$$L = \int_{\Omega} \mathcal{L} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (1.42)$$

de manera que la densidad lagrangiana tiene unidades de energía sobre volumen,  $\frac{kg}{m \cdot s^2}$ . La acción definida en la sección 1.2 puede escribirse como

$$S = \int L dt = \int \left( \int \mathcal{L} dx^1 \dots dx^m \right) dt. \quad (1.43)$$

El principio de Hamilton para sistemas continuos es análogo al caso discreto: la evolución del sistema de un estado  $\eta^{(r)}(x_1^1, \dots, x_1^m, t_1)$  a un estado  $\eta^{(r)}(x_2^1, \dots, x_2^m, t_2)$  es tal que la acción del sistema es estacionaria:

$$\delta S = \int L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \mathcal{L} dx^1 dx^2 dx^3 dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \delta \mathcal{L} dV dt = 0. \quad (1.44)$$

Esta condición lleva a las correspondientes ecuaciones de Lagrange, que de (1.21), son

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^{(r)}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} \right) - \sum_j \frac{d}{dx^j} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \eta^{(r)})} \right) = 0. \quad (1.45)$$

En el contexto de campos, éstas son llamadas *ecuaciones de campo*. Igual que en el caso discreto, son consecuencia de la condición estacionaria de la acción.

# Capítulo 2

## Campo termodinámico

En este capítulo, se define el concepto de deformación en un campo termodinámico y se proponen lagrangianas y variables de campo tales que es posible la obtención de varias ecuaciones termodinámicas importante como consecuencia del hecho de que la acción del sistema sea estacionaria para variaciones geométricas y temporales. Posteriormente se aclarará el tipo de sistema termodinámico que se estudiará. Esta sección está basada en los desarrollos presentados en los artículos *The Material Point Method for Simulating Continuum Materials*, de C. Jiang, *et al.*, secc. 5; y *Termodinámica: una formulación lagrangiana*, de Á. Fierros.

### 2.1. Deformación

Consideremos una región  $\Omega^0$  de  $\mathbb{R}^3$  ocupada por un medio continuo en movimiento. Al desplazarse este medio con el tiempo, ocupa una nueva región  $\Omega^t \subset \mathbb{R}^3$ . Denotemos por  $\phi : \Omega^0 \rightarrow \Omega^t$  al mapeo que describe dicho movimiento; este mapeo es llamado *mapeo* o *transformación de deformación*. Llamamos a los elementos de  $\Omega^0$  *puntos materiales*, y los denotamos por  $\mathbf{X}$ . Los puntos de  $\Omega^t$  son las posiciones de los puntos materiales en el tiempo  $t$ , y los representaremos por  $\mathbf{x}$ . Cada una de estas  $\mathbf{x}$  depende tanto del punto material del que partió como del tiempo transcurrido:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \phi(\mathbf{X}, t). \quad (2.1)$$

Es evidente que para  $t = 0$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ . Definimos la *velocidad* de un punto material en el tiempo  $t$  como

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (2.2)$$

#### 2.1.1. Transformación de un elemento de volumen

Para determinar la deformación que sufre un fluido al desplazarse, buscamos la relación entre un elemento de volumen en su estado inicial y el elemento de volumen tras la deformación. Consideramos un elemento de volumen de  $\Omega^0$  de lados  $dX^i$ :

$$dV_0 = dX^1 dX^2 dX^3. \quad (2.3)$$

De (2.1), tenemos para un  $t$  dado

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^k} dX^k, \quad (2.4)$$

donde los  $dx^i$  son los lados del volumen transformado. El determinante jacobiano de la transformación (2.1) es

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial X^1} & \frac{\partial x^1}{\partial X^2} & \frac{\partial x^1}{\partial X^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial X^1} & \frac{\partial x^2}{\partial X^2} & \frac{\partial x^2}{\partial X^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial X^1} & \frac{\partial x^3}{\partial X^2} & \frac{\partial x^3}{\partial X^3} \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x^1}{\partial X^i} \frac{\partial x^2}{\partial X^j} \frac{\partial x^3}{\partial X^k} \quad (2.5)$$

Aquí,  $\epsilon_{ijk}$  es el tensor antisimétrico, cuyos valores son:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i, j, k \text{ es una permutación par de } 1, 2, 3, \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ es una permutación impar de } 1, 2, 3, \\ 0 & \text{si hay índices repetidos.} \end{cases}$$

Sabemos, de cálculo multivariable, que para una transformación de variables, el nuevo elemento de volumen está dado por

$$dV = J dV_0 = \left( \epsilon_{ijk} \frac{\partial x^1}{\partial X^i} \frac{\partial x^2}{\partial X^j} \frac{\partial x^3}{\partial X^k} \right) \cdot dX^1 dX^2 dX^3. \quad (2.6)$$

### 2.1.2. Variación y razón de cambio de un elemento de volumen

Aplicando nuestra definición de la variación al elemento de volumen transformado, tenemos

$$\delta(dV) = \frac{d}{d\alpha}(dV) d\alpha = \frac{d}{d\alpha}(J dV_0) d\alpha \quad (2.7)$$

para algún parámetro geométrico  $\alpha$ . Puesto que  $dV_0$  es constante, esto es

$$\left( \frac{dJ}{d\alpha} d\alpha \right) dV_0 = \delta(J) dV_0. \quad (2.8)$$

Es decir, el objeto de interés es realmente la variación de  $J$ . A continuación mostraremos la forma que tiene, destacando sólo los pasos más importantes, pues el cálculo resulta bastante largo:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\alpha} d\alpha &= \frac{d}{d\alpha} \left( \epsilon_{ijk} \frac{\partial x^1}{\partial X^i} \frac{\partial x^2}{\partial X^j} \frac{\partial x^3}{\partial X^k} \right) d\alpha \\ &= \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\partial x^1}{\partial X^1} \frac{\partial x^2}{\partial X^2} \frac{\partial x^3}{\partial X^3} + \frac{\partial x^1}{\partial X^2} \frac{\partial x^2}{\partial X^3} \frac{\partial x^3}{\partial X^1} + \frac{\partial x^1}{\partial X^3} \frac{\partial x^2}{\partial X^1} \frac{\partial x^3}{\partial X^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial x^1}{\partial X^3} \frac{\partial x^2}{\partial X^2} \frac{\partial x^3}{\partial X^1} - \frac{\partial x^1}{\partial X^2} \frac{\partial x^2}{\partial X^1} \frac{\partial x^3}{\partial X^3} - \frac{\partial x^1}{\partial X^1} \frac{\partial x^2}{\partial X^3} \frac{\partial x^3}{\partial X^2} \right) d\alpha. \end{aligned} \quad (2.9)$$

La derivada respecto de  $\alpha$  es aplicada a cada sumando del término entre paréntesis de (2.9); puesto que cada uno de éstos es un triple producto, esto resulta en una suma de dieciocho derivadas, que se omiten aquí por cuestión de espacio y de brevedad; sin embargo, debe notar el lector que cada término es de la forma:

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^l} \frac{\partial x^j}{\partial X^m} \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\partial x^k}{\partial X^n} \right) d\alpha. \quad (2.10)$$

Usando la continuidad (y por consecuencia la simetría) de las segundas parciales, la expresión (2.10) puede reescribirse para que cada término tenga la siguiente forma:

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^l} \frac{\partial x^j}{\partial X^m} \frac{\partial}{\partial X^n} \left( \frac{dx^k}{d\alpha} \right) d\alpha. \quad (2.11)$$

El resultado de esto es que nuestras 18 derivadas iniciales pueden ahora asociarse en 9 términos de la siguiente forma:

$$\left( \frac{\partial x^i}{\partial X^l} \frac{\partial x^j}{\partial X^m} - \frac{\partial x^i}{\partial X^m} \frac{\partial x^j}{\partial X^l} \right) \frac{\partial}{\partial X^n} \left( \frac{dx^t}{d\alpha} d\alpha \right). \quad (2.12)$$

Presentamos los siguientes pasos del desarrollo para el caso en el que  $t = 1$ ; los otros casos son enteramente análogos, pero se omiten por brevedad. Tenemos en la expresión (2.12), para este caso,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial x^2}{\partial X^2} \frac{\partial x^3}{\partial X^3} - \frac{\partial x^2}{\partial X^3} \frac{\partial x^3}{\partial X^2} \right) \frac{\partial}{\partial X^1} \left( \frac{dx^1}{d\alpha} d\alpha \right) \\ & + \left( \frac{\partial x^2}{\partial X^3} \frac{\partial x^3}{\partial X^1} - \frac{\partial x^2}{\partial X^1} \frac{\partial x^3}{\partial X^3} \right) \frac{\partial}{\partial X^2} \left( \frac{dx^1}{d\alpha} d\alpha \right) + \left( \frac{\partial x^2}{\partial X^1} \frac{\partial x^3}{\partial X^2} - \frac{\partial x^2}{\partial X^2} \frac{\partial x^3}{\partial X^1} \right) \frac{\partial}{\partial X^3} \left( \frac{dx^1}{d\alpha} d\alpha \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ahora, por regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial X^k} = \frac{\partial x^i}{\partial X^k} \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.14)$$

Usando el resultado (2.14) en la expresión (2.13), se tiene

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{\partial x^2}{\partial X^2} \frac{\partial x^3}{\partial X^3} - \frac{\partial x^2}{\partial X^3} \frac{\partial x^3}{\partial X^2} \right) \frac{\partial x^1}{\partial X^1} \right] \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{dx^1}{d\alpha} d\alpha \right) \\ & + \left[ \left( \frac{\partial x^2}{\partial X^3} \frac{\partial x^3}{\partial X^1} - \frac{\partial x^2}{\partial X^1} \frac{\partial x^3}{\partial X^3} \right) \frac{\partial x^1}{\partial X^2} \right] \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{dx^1}{d\alpha} d\alpha \right) \\ & + \left[ \left( \frac{\partial x^2}{\partial X^1} \frac{\partial x^3}{\partial X^2} - \frac{\partial x^2}{\partial X^2} \frac{\partial x^3}{\partial X^1} \right) \frac{\partial x^1}{\partial X^3} \right] \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{dx^1}{d\alpha} d\alpha \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

En éste último resultado, se realiza el producto entre los corchetes y se factoriza el término común para obtener la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial x^1}{\partial X^1} \frac{\partial x^2}{\partial X^2} \frac{\partial x^3}{\partial X^3} + \frac{\partial x^1}{\partial X^2} \frac{\partial x^2}{\partial X^3} \frac{\partial x^3}{\partial X^1} + \frac{\partial x^1}{\partial X^3} \frac{\partial x^2}{\partial X^1} \frac{\partial x^3}{\partial X^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial x^1}{\partial X^3} \frac{\partial x^2}{\partial X^2} \frac{\partial x^3}{\partial X^1} - \frac{\partial x^1}{\partial X^2} \frac{\partial x^2}{\partial X^1} \frac{\partial x^3}{\partial X^3} - \frac{\partial x^1}{\partial X^1} \frac{\partial x^2}{\partial X^3} \frac{\partial x^3}{\partial X^2} \right] \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{dx^1}{d\alpha} d\alpha \right) \\ & = J \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{dx^1}{d\alpha} d\alpha \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Puesto que el procedimiento para los demás términos es análogo, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\alpha} d\alpha & = J \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{dx^1}{d\alpha} d\alpha \right) + J \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{dx^2}{d\alpha} d\alpha \right) + J \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{dx^3}{d\alpha} d\alpha \right) \\ & = J \left[ \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{dx^1}{d\alpha} d\alpha \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{dx^2}{d\alpha} d\alpha \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{dx^3}{d\alpha} d\alpha \right) \right] \\ & = J \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \cdot \left( \frac{dx^1}{d\alpha} d\alpha, \frac{dx^2}{d\alpha} d\alpha, \frac{dx^3}{d\alpha} d\alpha \right) \right], \end{aligned}$$

donde el paso de la segunda a la tercera línea se hizo usando la definición del producto escalar de dos vectores. De la definición del gradiente y de la variación, podemos reescribir este último resultado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} J \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \cdot \left( \frac{dx^1}{d\alpha} d\alpha, \frac{dx^2}{d\alpha} d\alpha, \frac{dx^3}{d\alpha} d\alpha \right) \right] & = J [\nabla \cdot \delta \mathbf{x}] \\ & = J \operatorname{div} \delta \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para la razón de cambio respecto del tiempo, se tiene

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \epsilon_{ijk} \frac{\partial x^1}{\partial X^i} \frac{\partial x^2}{\partial X^j} \frac{\partial x^3}{\partial X^k} \right) \quad (2.18)$$

Mediante procedimientos similares a los de la variación de  $J$ , y utilizando tanto la continuidad de las segundas parciales como la regla de la cadena (2.14), obtenemos:

$$\frac{dJ}{dt} = J \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \cdot \left( \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt} \right) \right]$$

Recordando la definición (2.2), tenemos en esta última:

$$J \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \cdot \mathbf{v} = J \nabla \cdot \mathbf{v} \tag{2.19}$$

$$= J \operatorname{div} \mathbf{v} \tag{2.20}$$

### 2.1.3. Teorema de Reynolds

Sea  $R$  una región del espacio euclidiano  $\mathbb{R}^3$  y sea  $F(\mathbf{x}, t)$  una función definida en  $\mathbb{R}^3$ . La integral de volumen de ésta es

$$\int_R F(\mathbf{x}, t) dV$$

Si se quiere conocer la razón de cambio de esta integral respecto del tiempo, se utiliza el resultado (2.20). De la ecuación(2.6), tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_R F(\mathbf{x}, t) dV = \frac{d}{dt} \int_{R_0} F(\mathbf{x}, t) J dV_0,$$

donde  $R_0$  es una región fija de  $\mathbb{R}^3$ ; es evidente que no depende del tiempo, por lo que es posible introducir el operador diferencial en la integral:

$$\frac{d}{dt} \int_{R_0} F(\mathbf{x}, t) J dV_0 = \int_{R_0} \left( F \frac{dJ}{dt} + \frac{dF}{dt} J \right) dV_0$$

Del resultado (2.20), esto es

$$\int_{R_0} \left( F J \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{dF}{dt} J \right) dV_0 = \int_{R_0} \left( F \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{dF}{dt} \right) J dV_0$$

Así,

$$\frac{d}{dt} \int_R F(\mathbf{x}, t) dV = \int_R \mathbf{D}F(\mathbf{x}, t) dV \tag{2.21}$$

Aquí se introdujo el operador  $\mathbf{D} \equiv \frac{d}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{v}$ , llamado *derivada material*. Este resultado es conocido como el **teorema de Reynolds**.

## 2.2. Principio de Hamilton para el campo termodinámico

Se busca describir un campo termodinámico a partir de la mecánica analítica. Esto quiere decir que se basará la descripción del sistema en el principio de Hamilton. Recordamos que para una acción dada

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_R \mathcal{L} dV dt, \tag{2.22}$$

el principio de Hamilton tiene la forma

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \mathcal{L} dV dt = 0$$

Similar a (1.28), las condiciones de frontera en este caso son

$$\delta\eta^{(r)}(x_1^j, t_1) = 0 = \delta\eta^{(r)}(x_2^j, t_2),$$

para las  $r$  variables de campo  $\eta$ . Como mencionamos en 1.3, las ecuaciones de campo resultan del hecho de que la acción es estacionaria bajo variaciones espaciales.

Antes de proponer densidades lagrangianas (en adelante sólo **lagrangianas**, pues no usaremos la función lagrangiana  $L$  en lo que resta de este texto), estudiaremos otro tipo de variaciones de la acción: las *temporales*. Definimos la *variación temporal* de una función  $f$  por

$$\delta_t(f) \equiv \frac{d}{dt}(f) dt$$

Cabe destacar que si una función tiene dependencia del tiempo, además de dependencia en otras variables, (es decir, si  $f = f(x^1, \dots, x^m, t)$ ), podemos pasar de la variación temporal a la variación geométrica sin dificultad usando la regla de la cadena. La variación geométrica de  $f(x^1, \dots, x^m, t)$  es

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t = \frac{\partial f}{\partial x^i} \delta x_i.$$

La última igualdad es consecuencia de que el tiempo no depende del parámetro geométrico respecto del cual se hace la variación. La variación temporal de  $f$  es

$$\begin{aligned} \delta_t f &= \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx_i}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dt} dt = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx_i}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} dt \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx_i}{d\alpha} d\alpha = \delta f \\ &\Rightarrow \delta_t f = \delta f \end{aligned} \tag{2.23}$$

Conviene, antes de realizar la variación temporal de la acción, mostrar los siguientes resultados:

$$\delta_t(dt) = \frac{d}{dt}(dt) dt = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} t dt \right) dt = \frac{d}{dt}(\delta_t t) dt. \tag{2.24}$$

De (2.20),

$$\begin{aligned} \delta_t J &= \left( \frac{dJ}{dt} \right) dt = J \operatorname{div} \mathbf{v} dt = J \left( \operatorname{div} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) dt \\ &= J \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \cdot \left( \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt} \right) dt \\ &= J \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \cdot \left( \frac{dx^1}{dt} dt, \frac{dx^2}{dt} dt, \frac{dx^3}{dt} dt \right) = J \operatorname{div}(\delta_t \mathbf{x}). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Además,

$$\delta_t \mathbf{x} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} dt = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{dt} dt = \mathbf{v} \delta_t t. \tag{2.26}$$

### 2.2.1. Variación temporal de la acción

Consideremos, pues, una variación de nuestra integral de acción (2.22)

$$\delta_t \int_{t_1}^{t_2} \int_R \mathcal{L} dV dt, \tag{2.27}$$

con la imposición de las siguientes condiciones de frontera:

$$\delta_t(t_1) = 0 = \delta_t(t_2). \tag{2.28}$$

Usando la regla de Leibniz (1.10) en la variación (2.27) y recordando las condiciones de frontera (2.28), podemos simplemente introducir el signo de variación temporal en la integral. Además, ya que la variación es respecto del tiempo, podemos usar el teorema de Reynolds:

$$\delta_t \int_{R_0} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dV dt = \delta_t \int_{R_0} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} J dV_0 dt = \int_{R_0} \int_{t_1}^{t_2} \delta_t(\mathcal{L} J dt) dV_0. \quad (2.29)$$

Recordando que la variación está definida a partir de una derivada, esto resulta en la siguiente expresión:

$$\int_{R_0} \int_{t_1}^{t_2} \delta_t(\mathcal{L} J dt) dV_0 = \int_{R_0} \int_{t_1}^{t_2} [\delta_t(\mathcal{L}) J dt dV_0 + \delta_t(J) \mathcal{L} dt dV_0 + \delta_t(dt) \mathcal{L} J dV_0]. \quad (2.30)$$

Usando los resultados (2.24) y (2.25), podemos reescribir la última integral del siguiente modo:

$$\begin{aligned} & \int_{R_0} \int_{t_1}^{t_2} [\delta_t(\mathcal{L}) J dt dV_0 + J \operatorname{div} \delta_t \mathbf{x} \mathcal{L} dt dV_0 + \delta_t(dt) \mathcal{L} J dV_0] \\ &= \int_{R_0} \int_{t_1}^{t_2} \left[ (\delta_t \mathcal{L}) dt J dV_0 + (\mathcal{L} \operatorname{div} \delta_t \mathbf{x}) dt J dV_0 + \mathcal{L} \left( \frac{d}{dt} \delta_t t \right) dt J dV_0 \right] \\ &= \int_{R_0} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta_t \mathcal{L} + \mathcal{L} \operatorname{div} \delta_t \mathbf{x} + \mathcal{L} \frac{d}{dt} \delta_t t \right] J dt dV_0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Notamos que el primer término puede escribirse de una forma alternativa:

$$\delta_t \mathcal{L} = \frac{d\mathcal{L}}{dt} dt = \frac{d\mathcal{L}}{dt} \frac{dt}{dt} dt = \frac{d\mathcal{L}}{dt} \delta_t t.$$

Usando esta última expresión, el resultado (2.26) para el segundo término y la definición de la derivada material, podemos reformular (2.31):

$$\begin{aligned} & \int_{R_0} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left\{ \frac{d\mathcal{L}}{dt} \delta_t t + \mathcal{L} \operatorname{div} \delta_t \mathbf{x} \right\} \mathcal{L} \frac{d}{dt} \delta_t t \right] J dt dV_0 \\ &= \int_{R_0} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \mathbf{D} \mathcal{L} \delta_t t + \mathcal{L} \frac{d}{dt} \delta_t t \right] J dt dV_0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Integramos ahora el segundo término de (2.32), es decir,

$$\int_{R_0} \int_{t_1}^{t_2} \left( \mathcal{L} \frac{d \delta_t t}{dt} J \right) dt dV_0. \quad (2.33)$$

Consideremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathcal{L} \delta_t t J) &= \frac{d\mathcal{L}}{dt} \delta_t t J + \mathcal{L} \frac{d}{dt} (\delta_t t) J + \mathcal{L} \delta_t t \frac{dJ}{dt} \\ \Rightarrow \mathcal{L} \frac{d}{dt} (\delta_t t) J &= \frac{d}{dt} (\mathcal{L} \delta_t t J) - \frac{d\mathcal{L}}{dt} \delta_t t J - \mathcal{L} \delta_t t \frac{dJ}{dt} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Sustituyendo este último resultado en el integrando de la integral (2.33), tenemos

$$\begin{aligned} & \int_{R_0} \int_{t_1}^{t_2} \left( \mathcal{L} \frac{d \delta_t t}{dt} J \right) dt dV_0 = \int_{R_0} \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} (\mathcal{L} \delta_t t J) - \frac{d\mathcal{L}}{dt} \delta_t t J - \mathcal{L} \delta_t t \frac{dJ}{dt} \right) dt dV_0 \\ &= \int_{R_0} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (\mathcal{L} \delta_t t J) dt dV_0 - \int_{R_0} \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d\mathcal{L}}{dt} + \mathcal{L} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \delta_t t J dt dV_0 \\ &= \int_{R_0} \left( \mathcal{L} J \delta_t t \Big|_{t_1}^{t_2} \right) dV_0 - \int_{R_0} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{D} \mathcal{L} \delta_t t dt dV. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Por las condiciones de frontera (2.28), el primer término se anula, así que resulta

$$\int_{R_0} \int_{t_1}^{t_2} \left( \mathcal{L} \frac{d\delta_t t}{dt} J \right) dt dV_0 = - \int_R \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{D} \mathcal{L} \delta_t t dt dV. \quad (2.36)$$

Insertamos esto en (2.32)

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \{ \mathbf{D} \mathcal{L} - \mathbf{D} \mathcal{L} \} \delta_t t dV dt = 0 = \delta_t S \quad (2.37)$$

este resultado nos muestra que *la acción también es estacionaria bajo variaciones temporales*, independientemente de la lagrangiana postulada.

## 2.3. Densidad de masa

Analicemos una región  $R \subset \mathbb{R}^3$ , que contiene un fluido cuya masa está descrita por

$$m = \int_R \rho(\mathbf{x}, t) dV$$

Aquí,  $\rho$  es una función conocida como **densidad de masa**, con unidades de  $\frac{kg}{m^3}$ . Por el principio de conservación de masa, tenemos

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_R \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0$$

Aplicamos el teorema de Reynolds a esta última ecuación y obtenemos

$$\int_R \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = 0$$

Dado que  $dV$  es arbitrario, esto se cumple sólo si

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.38)$$

Ésta es llamada la **ecuación de continuidad**; mostraremos unos resultados relacionados con ella:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{d\rho}{dt} dt + \rho \operatorname{div} \frac{d\mathbf{x}}{dt} dt = \delta_t \rho + \rho \operatorname{div} \delta_t \mathbf{x} = 0 \quad (2.39)$$

$$= \delta_t \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_t t = 0. \quad (2.40)$$

El paso de la primera a la segunda línea es consecuencia del resultado (2.26). Además, usando la regla de la cadena como se indicó en (2.23):

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\rho}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} dt + \rho \operatorname{div} \frac{d\mathbf{x}}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} dt = \delta \rho + \rho \operatorname{div} \delta \mathbf{x} = 0. \quad (2.41)$$

## 2.4. Ecuaciones de campo: proposición de lagrangianas

Consideraremos como sistema un medio homogéneo monofásico en reposo. Propondremos dos lagrangianas, y analizaremos las consecuencias que tiene para cada una el hecho de que la acción sea estacionaria, tanto para variaciones espaciales como temporales. Antes de proponer lagrangianas explícitas, se mostrará un resultado que será de utilidad:

La razón de cambio de la acción del sistema respecto del tiempo es:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_1}^{t_2} \int_R \mathcal{L} dV dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \int_R \mathcal{L} dV dt. \quad (2.42)$$

Usando en esta última expresión el teorema de Reynolds:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \int_{R_0} \mathcal{L} J dV_0 dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{R_0} \frac{d}{dt} (\mathcal{L} J) dV_0 dt \\
 \Rightarrow \frac{dS}{dt} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_R \left( \frac{d\mathcal{L}}{dt} + \mathcal{L} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dt dV dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \int_R \left( \frac{d\mathcal{L}}{dt} dt + \mathcal{L} \operatorname{div} \left\{ \frac{d\mathbf{x}}{dt} dt \right\} \right) dV dt.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Por regla de la cadena, tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_R \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} dt + \mathcal{L} \operatorname{div} \left\{ \frac{d\mathbf{x}}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} dt \right\} \right) dV dt \\
 \Rightarrow \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \int_R (\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \operatorname{div} \delta \mathbf{x}) dV dt = 0.
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

### 2.4.1. Primera Ley (proceso adiabático)

Proponemos primero una lagrangiana de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\rho, t), \tag{2.45}$$

y postulamos además que

$$\mathcal{L} = \rho \lambda, \tag{2.46}$$

donde  $\lambda = \lambda(\rho, t)$  es llamada la **lagrangiana específica**. Recordando las unidades de la lagrangiana y de la densidad de masa, esto quiere decir que  $\lambda$  tiene unidades de  $\frac{m^2}{s^2}$ .

Las variaciones de esta lagrangiana son entonces:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{d\mathcal{L}}{d\alpha} d\alpha = \frac{d}{d\alpha} (\rho \lambda) d\alpha = \frac{d\rho}{d\alpha} d\alpha \lambda + \frac{d\lambda}{d\alpha} d\alpha \rho = \delta \rho \lambda + \rho \delta \lambda \tag{2.47}$$

y

$$\delta_t \mathcal{L} = \delta_t \rho \lambda + \rho \delta_t \lambda. \tag{2.48}$$

Usando la variación (2.47) en el resultado (2.44), podemos escribir

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_R ([\delta \rho \lambda + \rho \delta \lambda] + \rho \lambda \operatorname{div} \delta \mathbf{x}) dV dt = 0. \tag{2.49}$$

Usando la ecuación de continuidad (2.41), se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \int_R ([-\rho \operatorname{div} \mathbf{x} \lambda + \rho \delta \lambda] + \rho \lambda \operatorname{div} \delta \mathbf{x}) dV dt &= 0 \\
 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \int_R \rho \delta \lambda dV dt &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Ahora, puesto que  $\lambda = \lambda(\rho, t)$ ,

$$\begin{aligned}
 \delta \lambda &= \frac{d\lambda}{d\alpha} d\alpha = \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \frac{d\rho}{d\alpha} d\alpha + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \frac{dt}{d\alpha} d\alpha \\
 &= \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \frac{d\rho}{d\alpha} d\alpha = \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \delta \rho.
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Así, con este resultado y la ecuación de continuidad (2.41) en la integral (2.50)

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_R \rho \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \delta \rho \, dV \, dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_R \rho \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) (-\rho \operatorname{div} \delta \mathbf{x}) \, dV \, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_R -\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \operatorname{div} \delta \mathbf{x} \, dV \, dt = 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Analicemos las unidades de  $-\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho}$ :

$$\begin{aligned} \left[ -\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right] &= \frac{\text{kg}^2}{\text{m}^6} \left( \frac{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \right) = \frac{\text{kg}^2 \cdot \text{m}^5}{\text{m}^6 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^2} \\ &= \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{m}^2}, \end{aligned}$$

es decir, tiene unidades de fuerza por unidad de área. Postulamos, entonces, que

$$-\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} = P, \quad (2.53)$$

donde  $P$  es llamada la **presión** del fluido. Consideremos, antes de regresar a la integral, la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \delta \mathbf{x} &= \nabla \cdot \left( \frac{dx^1}{d\alpha} d\alpha, \frac{dx^2}{d\alpha} d\alpha, \frac{dx^3}{d\alpha} d\alpha \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\alpha} d\alpha = \frac{\partial}{\partial x^i} \delta x^i. \end{aligned}$$

Con este último resultado, podemos escribir en la integral (2.52)

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R -\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta x^i \, dV \, dt = 0. \quad (2.54)$$

Antes de analizar esta integral, mostraremos un resultado que simplificará el proceso de integración:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( -\rho^2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \delta x^i \right) &= -\frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \right) \delta x^i - \rho^2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta x^i \\ \Rightarrow -\rho^2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta x^i &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \right) \delta x^i - \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \delta x^i \right). \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en el integrando de (2.54), tenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \right) \delta x^i - \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \delta x^i \right) \right\} dV \, dt = 0. \quad (2.55)$$

Notamos que el segundo término tiene la forma

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_R \nabla \cdot \left( \rho^2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \delta \mathbf{x} \right) dV \right\} dt.$$

Podemos entonces usar el teorema de la divergencia:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_R \nabla \cdot \left( \rho^2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \delta \mathbf{x} \right) dV \right\} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \oint_{\sigma} \left( \rho^2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \delta \mathbf{x} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da \right) dt,$$

donde  $\sigma$  es la superficie que limita a la región  $R$ . Si dicha superficie es extendida al infinito, y recordando que dentro del integrando tenemos a la presión, dicha presión sobre la superficie tiende a cero. Entonces, en la integral (2.55)

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \right) \delta x^i \right\} dV dt = 0. \quad (2.56)$$

Dada la arbitrariedad de las variaciones  $\delta x^i$ , esto se cumple sólo si

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \right) = 0. \quad (2.57)$$

Este resultado implica que  $\rho^2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right)$  es igual, hasta alguna constante mutiplicativa, a alguna función cuyo gradiente es cero:

$$\rho^2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) = kf(V, t).$$

Recordando las unidades de la expresión de la izquierda, podemos proponer que dicha función sea la **densidad de energía interna**  $E \equiv \frac{U}{V}$ , dada en  $\frac{J}{m^3} = \frac{kg}{m \cdot s^2}$

$$\rho^2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) = kE(V, t). \quad (2.58)$$

Además, sabiendo las unidades de  $\lambda \left( \frac{m^2}{s^2} \right)$ , podemos proponer que ésta tenga la siguiente forma:

$$\lambda \equiv -e + q, \quad (2.59)$$

donde  $e = e(\rho, t) \equiv \frac{U}{m}$  es la energía interna por unidad de masa, o **energía interna específica**, con unidades de  $\frac{m^2}{s^2}$ ; y  $q = q(t) \equiv \frac{Q}{m}$  es la cantidad de calor por unidad de masa. La relación entre  $e$  y  $E$  está dada por

$$E = \frac{U}{V} = \frac{m}{V} \frac{U}{m} = \rho e. \quad (2.60)$$

A partir de la definición (2.59) en la forma explícita de la lagrangiana (2.46):

$$\mathcal{L} = \rho(-e + q). \quad (2.61)$$

Con (2.60) y nuestra definición de la presión en (2.53), tenemos en (2.58)

$$\begin{aligned} kE &= \rho^2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) = k\rho e \\ &\Rightarrow -P = k\rho e \\ &\quad -P = k \frac{m}{V} e \\ &\Rightarrow -PV = kme. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Sabiendo que  $e$  es la energía por unidad de masa,  $me = U$  es la energía interna del sistema:

$$\begin{aligned} -PV &= kU \\ \Rightarrow k dU &= -P dV. \end{aligned} \quad (2.63)$$

La última ecuación es la **primera ley de la termodinámica para procesos adiabáticos**.

### 2.4.2. Primera Ley

Antes de proceder con los resultados de la invariancia de la acción bajo transformaciones temporales, resultará conveniente probar una identidad. Consideremos nuestra lagrangiana  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\rho, t) = \rho\lambda$ , con lagrangiana específica  $\lambda = \lambda(\rho, t)$ . La variación temporal de la lagrangiana es

$$\delta_t \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt.$$

Por otra parte, la variación geométrica es

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \frac{d\rho}{d\alpha} d\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \frac{dt}{d\alpha} d\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{L}} \delta \rho.$$

Recordamos del resultado (2.23) que debido a la dependencia de  $\mathcal{L}$  respecto de  $t$ , la variación geométrica es idéntica a la variación temporal, es decir:

$$\delta_t \mathcal{L} = \delta \mathcal{L}. \quad (2.64)$$

Además, de la forma explícita de  $\mathcal{L}$  (2.46):

$$\delta \mathcal{L} = \delta \rho \lambda + \rho \delta \lambda.$$

Como vimos anteriormente,

$$\delta \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \delta \rho,$$

así que

$$\delta \mathcal{L} = \left( \lambda + \rho \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \delta \rho. \quad (2.65)$$

Ahora, con  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ , el resultado (2.23) también aplica, así que tenemos:

$$\delta_t \rho = \delta \rho. \quad (2.66)$$

De los resultados (2.64) y (2.65):

$$\delta_t \mathcal{L} = \delta \mathcal{L} = \left( \lambda + \rho \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \delta \rho.$$

De la ecuación (2.66)

$$\delta_t \mathcal{L} = \left( \lambda + \rho \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \delta_t \rho. \quad (2.67)$$

De la ecuación de continuidad (2.40),

$$\delta_t \mathcal{L} = \left( \lambda + \rho \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) (-\rho \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_t t). \quad (2.68)$$

Usando las ecuaciones (2.64) y (2.66):

$$\delta_t \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \delta_t \rho = \left( -\rho \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} - \rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \delta_t t.$$

De nuevo por la ecuación de continuidad (2.41) y con el resultado (2.26), tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= \rho \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \operatorname{div} \mathbf{v} \\ &= \mathcal{L} \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Habiendo probado esta identidad, podemos pasar a las consecuencias de una variación temporal. Tenemos

$$\delta_t S = \delta_t \int_{t_1}^{t_2} \int_R \mathcal{L} dV dt = 0. \quad (2.70)$$

Recordemos de la variación temporal (secc.2.2.1) que esta variación es

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_R \left( \delta_t \mathcal{L} + \mathcal{L} \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_t t - \frac{d\mathcal{L}}{dt} \delta_t t - \mathcal{L} \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_t t \right) dV dt &= 0 \\ \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \int_R \left( \delta_t \mathcal{L} - \frac{d\mathcal{L}}{dt} \delta_t t \right) dV dt &= 0. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Ahora, recordamos que la variación temporal de la lagrangiana es

$$\delta_t \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \delta_t \rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta_t t.$$

Por la ecuación de continuidad,

$$\begin{aligned} \delta_t \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} (-\rho \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_t t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta_t t \\ &= \left( -\rho \operatorname{div} \mathbf{v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right) \delta_t t. \end{aligned} \quad (2.72)$$

De (2.69), esto es

$$\delta_t \mathcal{L} = \left( -\mathcal{L} \operatorname{div} \mathbf{v} - \rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right) \delta_t t. \quad (2.73)$$

Sustituyendo esto en el integrando de la ecuación (2.71):

$$\begin{aligned} \delta_t \mathcal{L} - \frac{d\mathcal{L}}{dt} \delta_t t &= \left( -\mathcal{L} \operatorname{div} \mathbf{v} - \rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right) \delta_t t - \frac{d\mathcal{L}}{dt} \delta_t t \\ &= \left\{ -\left( \mathcal{L} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{d\mathcal{L}}{dt} \right) - \rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right\} \delta_t t \\ &= \left( -\mathbf{D} \mathcal{L} - \rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right) \delta_t t. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Entonces, la integral (2.71) puede escribirse como

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \left\{ \left( -\mathbf{D} \mathcal{L} - \rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right) \delta_t t \right\} dV dt = 0.$$

Puesto que los  $\delta_t t$  son arbitrarios, esto se cumple sólo si

$$\mathbf{D} \mathcal{L} + \rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \operatorname{div} \mathbf{v} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \mathbf{D} \mathcal{L} + \rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.75)$$

donde la primera igualdad resulta del hecho de que  $\mathcal{L}$  no depende explícitamente del tiempo. Tenemos por definición

$$\mathbf{D} \mathcal{L} = \frac{d\mathcal{L}}{dt} + \mathcal{L} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Con  $\mathcal{L} = \rho \lambda$ ,  $\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \rho \frac{d\lambda}{dt} + \lambda \frac{d\rho}{dt}$ , y de la ecuación de continuidad

$$\mathbf{D} \mathcal{L} = \left( \rho \frac{d\lambda}{dt} - \lambda \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \lambda \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \rho \frac{d\lambda}{dt}. \quad (2.76)$$

Recordando la forma explícita de  $\lambda$  en la ecuación (2.59),

$$\mathbf{D}\mathcal{L} = -\rho \frac{de}{dt} + \rho \frac{dq}{dt}. \quad (2.77)$$

Recordando además que  $\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} = -P$ ,

$$\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \operatorname{div} \mathbf{v} = -P \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

De la ecuación de continuidad,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}.$$

Así,

$$-P \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt}. \quad (2.78)$$

Sustituyendo los resultados (2.77) y (2.78) en la ecuación (2.75):

$$\begin{aligned} -\rho \frac{de}{dt} + \rho \frac{dq}{dt} + \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= 0 \\ -\frac{de}{dt} + \frac{dq}{dt} + \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Notamos que el tercer término puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} &= -P \left( -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \right) = -P \left( -\left[ \frac{d\rho}{dt} \right] \frac{1}{\rho^2} \right) \\ \therefore -P \left( \frac{\frac{d}{dt}(1)\rho - \left[ \frac{d\rho}{dt} \right] \cdot 1}{\rho^2} \right) &= -P \left( \frac{d \left[ \frac{1}{\rho} \right]}{dt} \right). \end{aligned} \quad (2.80)$$

La cantidad  $\frac{1}{\rho}$  es conocida como el *volumen específico*  $\mathcal{V} = \frac{1}{\rho} \equiv \frac{V}{m}$ . Podemos escribir en (2.79):

$$-\frac{de}{dt} + \frac{dq}{dt} - P \frac{d\mathcal{V}}{dt} = 0. \quad (2.81)$$

Con

$$\begin{aligned} e = \frac{U}{m} &\Rightarrow de = \frac{1}{m} dU; \\ q = \frac{Q}{m} &\Rightarrow dq = \frac{1}{m} dQ; \\ \mathcal{V} = \frac{V}{m} &\Rightarrow d\mathcal{V} = \frac{1}{m} dV. \end{aligned}$$

Podemos escribir:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{m} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{m} \frac{dQ}{dt} - \frac{P}{m} \frac{dV}{dt} &= 0 \\ \therefore -\frac{dU}{dt} + \frac{dQ}{dt} - P \frac{dV}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Reacomodando el último renglón de esta igualdad, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{dQ}{dt} - P \frac{dV}{dt} \\ \Rightarrow dU &= dQ - P dV. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Ésta es la **forma diferencial de la primera ley de la termodinámica**.

### 2.4.3. Relación de Euler

Postulamos que nuestra segunda lagrangiana tenga la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\rho, \varsigma, t) = \lambda\rho, \quad (2.84)$$

donde  $\lambda = \lambda(\rho, \varsigma, t)$  es la lagrangiana específica. En la ecuación anterior,  $\varsigma \equiv \frac{\mathcal{S}}{m}$  es la entropía  $\mathcal{S}$  por unidad de masa, o **entropía específica**, con unidades de  $\frac{m^2}{K \cdot s^2}$ . Definiremos además la densidad de entropía  $\mathcal{S}$  como la entropía por unidad de volumen  $\mathcal{S} = \frac{\mathcal{S}}{V}$ . De estos dos conceptos, vemos que

$$\mathcal{S} = \frac{\mathcal{S}}{V} = \frac{m}{V} \frac{\mathcal{S}}{m} = \rho \varsigma. \quad (2.85)$$

Puesto que  $\Delta \mathcal{S} = \int_1^2 \frac{dQ}{dT}$ ,  $\mathcal{S}$  (y por lo tanto  $\mathcal{S}$ ) no depende de parámetros geométricos, lo cual significa que

$$\delta \mathcal{S} = 0 = \delta \rho \varsigma + \rho \delta \varsigma. \quad (2.86)$$

De la ecuación de continuidad (2.41), esto es

$$\begin{aligned} -\rho \operatorname{div} \delta \mathbf{x} \varsigma + \rho \delta \varsigma &= 0 \\ \therefore \delta \varsigma &= \varsigma \operatorname{div} \delta \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

De la ecuación (2.84) y tomando en cuenta la forma de  $\lambda$ , tenemos que

$$\delta \mathcal{L} = \delta \rho \lambda + \rho \delta \lambda = \delta \rho \lambda + \rho \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial \lambda}{\partial \varsigma} \delta \varsigma \right). \quad (2.88)$$

Hacemos ahora un análisis de  $\frac{\partial \lambda}{\partial \varsigma}$ :

$$\left[ \frac{\partial \lambda}{\partial \varsigma} \right] = \frac{\left( \frac{m^2}{s^2} \right)}{\left( \frac{m^2}{K \cdot s^2} \right)} = \frac{K \cdot s^2 \cdot m^2}{m^2 \cdot s^2} = K.$$

Justificamos con esto el definir que  $\frac{\partial \lambda}{\partial \varsigma} = -T$ , donde T es llamada la **temperatura** del sistema. Tenemos entonces que

$$\rho \delta \lambda = \rho \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \delta \rho - T \delta \varsigma \right). \quad (2.89)$$

De la ecuación de continuidad (2.41) y del resultado (2.87),

$$\rho \delta \lambda = \left( -\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} - \rho T \varsigma \right) \operatorname{div} \delta \mathbf{x}. \quad (2.90)$$

Puesto que  $\mathcal{L}$  tiene la misma forma que en la sección 2.4.1, la variación de la acción es en este caso idéntica a la ecuación (2.50):

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \int_R \rho \delta \lambda \, dV \, dt = 0 \\ \Rightarrow \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \int_R \left[ \left( -\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} - \rho T \varsigma \right) \operatorname{div} \delta \mathbf{x} \right] \, dV \, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_R \left[ \left( -\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} - \rho T \varsigma \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta x^i \right] \, dV \, dt = 0. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Procedemos ahora como se hizo en la sección 2.4.1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \left[ -\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} - \rho T \varsigma \right] \delta x^i \right) &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left( -\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} - \rho T \varsigma \right) \delta x^i + \left( -\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} - \rho T \varsigma \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta x^i \\ \Rightarrow \left( -\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} - \rho T \varsigma \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta x^i &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \left[ -\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} - \rho T \varsigma \right] \delta x^i \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left( -\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} - \rho T \varsigma \right) \delta x^i. \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en la ecuación (2.91),

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \int_R \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \left[ -\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} - \rho T \varsigma \right] \delta x^i \right) dV dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_R \frac{\partial}{\partial x^i} \left( -\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} - \rho T \varsigma \right) \delta x^i dV dt = 0. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Consideremos el primer término, que es de la forma

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \nabla \cdot \left( \left[ -\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} - \rho T \varsigma \right] \delta \mathbf{x} \right) dV dt.$$

Por el teorema de la divergencia:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \nabla \cdot \left( \left[ -\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} - \rho T \varsigma \right] \delta \mathbf{x} \right) dV dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \oint_{\sigma} \left[ \left( -\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} - \rho T \varsigma \right) \delta \mathbf{x} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} da \right\} dt,$$

donde  $\sigma$  es la superficie que limita a  $R$  y  $da$  es el diferencial de área:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \oint_{\sigma} \left( -\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \delta x^i da_i \right\} dt - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \oint_{\sigma} \rho T \varsigma \delta x^i da_i \right\} dt.$$

Como mostramos en la sección 2.4.1, la primera integral se anula al extender la superficie de integración al infinito. Para el segundo caso, basta notar que, como estamos considerando un prisma rectangular, el producto del diferencial de área con los  $\delta x^i$  o bien es cero, o se cancela al sumarse con el producto de los  $\delta x^i$  y el diferencial de área opuesto. Así, en la ecuación (2.92) escribimos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} + \rho T \varsigma \right) \delta x^i dV dt = 0. \quad (2.93)$$

Puesto que los  $\delta x^i$  son arbitrarios, esto se cumple sólo si

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left( \rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} + \rho T \varsigma \right) = 0. \quad (2.94)$$

Notando que  $\rho T \varsigma$  tiene también unidades de  $\frac{kg}{m \cdot s^2}$ , proponemos como se hizo anteriormente que

$$\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} + \rho T \varsigma = kE(V, \mathcal{S}, t). \quad (2.95)$$

Para este caso, proponemos que  $\lambda$  sea

$$\lambda = -e. \quad (2.96)$$

Esto quiere decir que la ecuación (2.84) es

$$\mathcal{L} = -\rho e.$$

Así, por los resultados (2.85) y (2.96) tenemos en la ecuación (2.95)

$$\begin{aligned} -\rho^2 \frac{\partial e}{\partial \rho} + \rho \varsigma T &= kE \\ \Rightarrow -P + \mathcal{S}T &= kE. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Como  $\mathcal{S} = \frac{S}{V}$ ,  $E = \frac{U}{V}$ , la ecuación (2.97) puede escribirse como

$$\begin{aligned} -P + \frac{S}{V}T &= k\frac{U}{V} \\ \Rightarrow ST - PV &= kU. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Esta ecuación es llamada en la Termodinámica la **relación de Euler**.

#### 2.4.4. Relación termodinámica fundamental o Forma combinada de la primera y segunda leyes para procesos reversibles

Antes de considerar las consecuencias de la invariancia bajo variaciones temporales, probaremos un resultado que será de ayuda.

Para  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\rho, \varsigma, t) = \rho\lambda$ , con  $\lambda = \lambda(\rho, \varsigma, t)$ , tenemos por el resultado (2.23) que

$$\delta_t \varsigma = \frac{d\varsigma}{dt} dt = \frac{d\varsigma}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} dt = \delta \varsigma. \quad (2.99)$$

Además, mostramos ya antes que

$$\delta_t \rho = \delta \rho. \quad (2.100)$$

Explícitamente, la variación temporal de la lagrangiana es

$$\delta_t \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \delta_t \rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varsigma} \delta_t \varsigma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta_t t. \quad (2.101)$$

Consideremos ahora la variación geométrica

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varsigma} \delta \varsigma. \quad (2.102)$$

De la forma explícita de  $\mathcal{L}$ ,

$$\delta \mathcal{L} = \delta \rho \lambda + \rho \delta \lambda, \quad (2.103)$$

y de la forma de  $\lambda$ :

$$\delta \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial \lambda}{\partial \varsigma} \delta \varsigma. \quad (2.104)$$

Entonces en la ecuación (2.103)

$$\delta \mathcal{L} = \left( \lambda + \rho \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \delta \rho + \rho \frac{\partial \lambda}{\partial \varsigma} \delta \varsigma. \quad (2.105)$$

Usamos a continuación los resultados (2.102), (2.99) y (2.100) en (2.105)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \delta_t \rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varsigma} \delta_t \varsigma = \left( \lambda + \rho \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \delta_t \rho + \rho \frac{\partial \lambda}{\partial \varsigma} \delta_t \varsigma. \quad (2.106)$$

Ahora, por regla de la cadena, tenemos que

$$\delta_t \varsigma = \frac{d\varsigma}{dt} dt = \frac{d\varsigma}{dt} \frac{dt}{dt} dt = \frac{d\varsigma}{dt} \delta_t t. \quad (2.107)$$

Reescribimos el lado derecho de la ecuación (2.106), utilizando el resultado (2.107) y la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \delta_t \rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varsigma} \delta_t \varsigma = \left\{ \left( -\rho\lambda - \rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho T \frac{d\varsigma}{dt} \right\} \delta_t t. \quad (2.108)$$

Sustituyendo el resultado (2.108) en la forma explícita de la variación temporal (2.101):

$$\delta_t \mathcal{L} = \left( -\mathcal{L} \operatorname{div} \mathbf{v} - \rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \operatorname{div} \mathbf{v} - \rho T \frac{d\varsigma}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right) \delta_t t \quad (2.109)$$

Habiendo probado este resultado, consideraremos la consecuencia del hecho de que la variación temporal de la acción sea cero. Sustituimos (2.109) en la variación de la acción (2.71):

$$\begin{aligned} \delta_t S &= \int_{t_1}^{t_2} \int_R \left[ \delta_t \mathcal{L} - \frac{d\mathcal{L}}{dt} \delta_t t \right] dV dt = 0 \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_R \left[ - \left( \mathcal{L} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{d\mathcal{L}}{dt} \right) - \rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \operatorname{div} \mathbf{v} - \rho T \frac{d\varsigma}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right] \delta_t t dV dt = 0 \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_R \left[ -\mathbf{D} \mathcal{L} - \rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \operatorname{div} \mathbf{v} - \rho T \frac{d\varsigma}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right] \delta_t t dV dt = 0. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Puesto que los  $\delta_t t$  son arbitrarios, esto se cumple si

$$\mathbf{D} \mathcal{L} + \rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho T \frac{d\varsigma}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0.$$

Debido a que la lagrangiana no depende explícitamente del tiempo, el último sumando se anula y tenemos:

$$\mathbf{D} \mathcal{L} + \rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho T \frac{d\varsigma}{dt} = 0. \quad (2.111)$$

Para el primer término, tenemos, usando la forma explícita de  $\mathcal{L}$ :

$$\mathbf{D} \mathcal{L} = \mathcal{L} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \rho \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + \left( \rho \frac{d\lambda}{dt} + \lambda \frac{d\rho}{dt} \right).$$

De la ecuación de continuidad, esto puede reescribirse como

$$\mathbf{D} \mathcal{L} = \rho \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho \frac{d\lambda}{dt} - \lambda \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \rho \frac{d\lambda}{dt}.$$

Recordando la forma explícita de  $\lambda$ ,

$$\lambda = -e,$$

tenemos

$$\mathbf{D} \mathcal{L} = -\rho \frac{de}{dt}. \quad (2.112)$$

Recordando nuestra definición de la presión,

$$\rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \operatorname{div} \mathbf{v} = -P \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Como ya vimos en la sección 2.4.2, esto puede reescribirse como

$$-P \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt}. \quad (2.113)$$

Sustituimos los resultados (2.112) y (2.113) en la ecuación (2.111):

$$\begin{aligned} -\rho \frac{de}{dt} + \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \rho T \frac{d\varsigma}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{de}{dt} + \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + T \frac{d\varsigma}{dt} &= 0 \\ = -\frac{de}{dt} - P \frac{d\mathcal{V}}{dt} + T \frac{d\varsigma}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (2.114)$$

A partir de las definiciones de las variables de campo, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}e &= \frac{U}{m} \Rightarrow \frac{de}{dt} = \frac{1}{m} \frac{dU}{dt}; \\ \mathcal{V} &= \frac{V}{m} \Rightarrow \frac{d\mathcal{V}}{dt} = \frac{1}{m} \frac{dV}{dt}; \\ \varsigma &= \frac{\mathcal{S}}{m} \Rightarrow \frac{d\varsigma}{dt} = \frac{1}{m} \frac{d\mathcal{S}}{dt};\end{aligned}$$

Sustituyendo estas últimas expresiones en la ecuación (2.114), tenemos

$$\begin{aligned}-\frac{1}{m} \frac{dU}{dt} - \frac{P}{m} \frac{dV}{dt} + \frac{T}{m} \frac{d\mathcal{S}}{dt} &= 0 \\ \therefore \frac{dU}{dt} - P \frac{dV}{dt} + T \frac{d\mathcal{S}}{dt} &= 0.\end{aligned}\tag{2.115}$$

Reacomodando esta última expresión, obtenemos:

$$dU = T d\mathcal{S} - P dV.\tag{2.116}$$

Ésta es llamada la **identidad termodinámica**, o la **forma combinada de las primera y segunda leyes para procesos reversibles**.

# Conclusión

Este trabajo de revisión nos muestra que es posible incorporar la Termodinámica a la Mecánica analítica mediante un tratamiento adecuado. Quienes tratan frecuentemente con la Mecánica analítica miran con cierto recelo a la Termodinámica, argumentando (correctamente) que es una ciencia fenomenológica. Sin embargo, este trabajo muestra que puede estudiarse desde un enfoque teórico, al igual que la Electrodinámica, por ejemplo.

Muestra también a los estudiantes que tienen interés en la Mecánica teórica, pero que no se sienten aún listos para abordar sistemas físicos modernos (es decir, sistemas que consideran los efectos de la Relatividad y de la Mecánica cuántica), que es posible manejar sistemas clásicos, y que incluso puede brindar maneras más fáciles de entender resultados cuyos orígenes pueden resultar difíciles de percibir para los alumnos. Un ejemplo claro de esto es que mediante este tratamiento surge la Primera Ley de la Termodinámica, también conocida como *Ley de Conservación de la Energía*, ¡justo como predice la independencia temporal de la lagrangiana!

Queda como tarea para futuras generaciones de estudiantes el uso de métodos alternativos para analizar las teorías que ellos ya conocen, pues es muy probable que haciendo esto, descubran características de dichas teorías que hubieran permanecido imperceptibles u ocultas si continuaran usando exclusivamente los métodos tradicionales.



# Bibliografía

- [1] JOHN R. TAYLOR, *Classical Mechanics*, primera edición, University Science Books, Estados Unidos de América, 2005.
- [2] STEPHEN T. THORNTON y JERRY B. MARION, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, quinta edición, Cengage Learning, Virginia, 2003.
- [3] J. W. LEECH, *Mecánica Clásica*, primera edición en español, Unión Tipográfica Editorial Hispanoamericana, México, 1968.
- [4] ÁNGEL FIERROS PALACIOS, *Termodinámica: una formulación lagrangiana*, Revista Mexicana de Física, México, 1999.
- [5] GERARDO TORRES DEL CASTILLO, *Comentario a "Termodinámica: una formulación lagrangiana"*, Revista Mexicana de Física, México, 2000.
- [6] CHENFANFU JIANG, et al., *The Material Point Method for Simulating Continuum Materials*, SIGGRAPH 2016 Course Notes Version 1, 2016.