



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

TEORÍA CLÁSICA Y CUÁNTICA DE LA DISIPACIÓN

Tesis presentada para obtener el grado de:
Maestría en Física Aplicada

Presenta:
Oscar Cruz Limón

Asesores de tesis:
Dr. Cupatitzio Ramírez Romero y
Dr. Roberto Cartas Fuentesvilla

Puebla, Pue.
Noviembre 2020

Resumen

Este trabajo se ocupará de la formulación de una teoría cuántica de campos disipativa por medio de un campo escalar hiper-complejo en un anillo hiper-complejo, considerando el enfoque de la duplicación de campos para modelar el sistema de interés y el entorno.

Esta tesis está basada en el trabajo ⁰. En dicha referencia, la formulación se desarrolla para los sistemas disipativos usando el formalismo hiperbólico, en este trabajo se generaliza esta formulación, incorporando sistemas cargados, por lo que los campos ahora son complejos, pudiendo así, incorporar el formalismo hiper-complejo. Siguiendo esta referencia, en esta tesis se muestra que la presencia de las rotaciones hiperbólicas se revelan como una simetría interna para la dinámica disipativa. Se identifica un potencial químico asociado a una carga hiper-compleja, obtenida por el teorema de Noether, dando lugar a la construcción de una función de gran partición. Por último, se evalúa la evolución del estado del vacío y da como resultado un estado de modos entrelazados.

⁰R. Cartas-Fuentevilla, J. Berra-Montiel, and O. Meza-Aldama. *Hyperbolic ring based formulation for thermo field dynamics, quantum dissipation, entanglement, and holography*. The European Physical Journal C. Vol 80, 603 (2020).

Agradecimientos

Agradezco a mis asesores, al Dr. Roberto Cartas Fuentevilla y al Dr. Cupatitzio Ramírez Romero que me han enseñado bastantes cosas, más de las que pensé que aprendería durante un trabajo como este y por su paciencia que tuvieron conmigo. Agradezco a mi familia que estuvo apoyándome de toda forma posible . Gracias a Conacyt por el apoyo que me otorgó durante la elaboración de esta tesis.

Índice general

Introducción	1
1 Los números hiperbólicos	3
1.1 Números hiperbólicos	4
1.2 Conjugación e inversión	5
1.3 Geometría asociada con los números hiperbólicos	6
1.4 Anillo algebraico	8
1.5 Anillo conmutativo hiperbólico	9
2 Lagrangiano disipativo	12
2.1 Lagrangiano disipativo	13
2.2 Ecuación de movimiento	15
2.3 Solución a la ecuación de movimiento	16
2.4 Campos cuánticos y conmutadores de campo	17
3 Mecánica estadística	21
3.1 Operador de evolución temporal y función de gran partición	22
3.2 Operador de carga, el potencial químico y la función de gran partición	24
3.2.1 Función de gran partición	25
4 Estados entrelazados	29
4.1 El vacío como un estado coherente	30
4.2 Estados entrelazados	32
4.2.1 Entrelazamiento	35
4.2.2 Estado entrelazado sin disipación	37
4.2.3 Estado entrelazado con disipación	37

Conclusiones	39
Apéndices	41
Bibliografía	46

Introducción

A nivel microscópico, el entrelazamiento cuántico ha sido demostrado en sistemas que involucran fotones, electrones, iones, etc. Sin embargo, a nivel macroscópico el entrelazamiento es sensible a perturbaciones ambientales, este fenómeno se ha inferido por medio de diversos experimentos que involucran objetos a escala macroscópica [1]. Además, se ha demostrado experimentalmente que la disipación genera entrelazamiento entre dos objetos macroscópicos [2]. La dinámica disipativa es intrínsecamente estable bajo perturbaciones, estabilizando el entrelazamiento, en contraste con otros sistemas que están basados en una evolución coherente, los cuales siempre son susceptibles a sufrir decoherencia.

Las teorías de campos que incluyan efectos disipativos son de interés en física de altas energías; por ejemplo, las técnicas de temperatura finita son necesarias para estimar los coeficientes de transporte del plasma quark-gluón, y las técnicas holográficas permiten obtener resultados sobre la viscosidad, en una versión súper-simétrica del plasma de Yang-Mills [3]. Además, el movimiento browniano de un quark pesado ha sido estudiado desde diferentes puntos de vista: desde los agujeros negros holográficos [4], el esquema holográfico de Schwinger-Keldysh [5] y la dinámica del campo térmico [6]; los resultados sugieren que los efectos disipativos generados por la emisión de cuantos gluónicos son relevantes en la dinámica de los quarks, incluso a temperatura cero, en consistencia con las conclusiones obtenidas en [7].

Aunque estos temas de altas energías son de mi interés, en esta tesis de maestría solo trabajaremos en un lado de la correspondencia holográfica, es decir, solo en la formulación de una teoría clásica y cuántica de la disipación, involucrando solamen-

te campos escalares definidos sobre un anillo hiper-complejo; dichas formulaciones tienen un interés por si mismas dentro de la física moderna. A continuación describiremos algunos ejemplos de interés.

El entrelazamiento dinámico generado por la disipación se ha estudiado en el contexto de la correspondencia ADS/CFT [8]; la correspondencia holográfica relaciona las cantidades geométricas con la información proveniente de la teoría cuántica de campos; además de que propone la conjetura de que un sistema gravitatorio es equivalente a una teoría cuántica de campos fuertemente acoplada sin gravedad. En esta referencia, las fórmulas de Ryu-Takayanagi para el área de una superficie mínima en una geometría holográfica, se utilizan para estudiar el entrelazamiento de los grados de libertad de las teorías de campo conformal disipativa; la correspondencia holográfica sugiere entonces un protocolo de teletransportación que intercambia información cuántica entre las dos teorías de campos conformes en los límites de la geometría dual; dicho protocolo es similar al mecanismo que hace que un agujero de gusano sea transitable [9, 10].

Por otro lado, algunos sistemas de materia condensada de baja dimensión exhiben disipación, y se debe explorar una interpretación holográfica dentro de la dualidad gravedad/materia condensada, siguiendo las líneas descritas anteriormente; por ejemplo, en la dinámica de una impureza puntual en un condensado de Bose-Einstein a temperatura cero, la disipación se genera por la emisión de excitaciones elementales, como los fonones [11]; un mecanismo similar funciona en la disipación de la turbulencia cuántica en el superfluido 4He [12]. Además, en los sistemas de electrones, la decoherencia intrínseca (disipación) puede ser causada por interacciones de tipo electrón-fonón, electrón-electrón y por impurezas magnéticas. Se ha diseñado un conjunto de experimentos con alambres de oro para comprender la dependencia funcional del tiempo de coherencia de fase de la temperatura [13].

Capítulo 1

Los números hiperbólicos

El sistema de números reales se puede extender en tres formas; sea un número arbitrario $x + \beta y$, donde “ β ” es una unidad compleja, ésta puede tomar el valor de alguna de las tres unidades complejas posibles: *parabólica con $\beta^2 = 0$* , *elíptica con $\beta^2 = -1$* o *hiperbólica con $\beta^2 = 1$* , ésta última es la más relevante y fundamental para el desarrollo de este trabajo. También se pueden construir más extensiones no conmutativas y conmutativas que relacionen a más de una unidad compleja, *ver* [14].

De la misma manera en que los números complejos (o elípticos) están asociados con la geometría euclidiana, los otros dos sistemas de números hiper-complejos bidimensionales (parabólicos e hiperbólicos) también pueden asociarse con geometrías de relevancia física, los números parabólicos se pueden asociar con el grupo de Galileo y los números hiperbólicos con el grupo de relatividad especial de Lorentz [15, 16]. Dichos números sirven no sólo para poner a la geometría lorentziana de forma similar con la geometría euclidiana, sino que, existen diversas aplicaciones de los números hiperbólicos. En 1986, Fjelstad [17] presentó una aplicación de estos números para interpretar los fenómenos superluminales; Reany [18] también los aplicó pero en las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden; Kunstatter los ha aplicado a la relatividad general [17, 19–25]. Además, varios autores han proporcionado extensiones a un espacio n-dimensional [26–28], incluido un análisis de transformaciones de Fourier hiperbólicas [29]. Band [30], obtuvo los resultados matemáticos esenciales de Fjelstad a partir de dos postulados simples [31]. A pesar de la diversidad de aplicacio-

nes de los números hiperbólicos que se encuentran en la literatura, la mayoría de los matemáticos y físicos no conocen las matemáticas implícitas y por tanto, tampoco las posibilidades que estos números abren para obtener más aplicaciones a diferencia de los números complejos ordinarios. Existe toda una serie de teoremas fundamentales para este sistema de números, los cuales no serán mencionados en este trabajo.

En este capítulo se revisarán algunas características geométricas y propiedades básicas de los números hiperbólicos, las cuales serán las herramientas base para el desarrollo y entendimiento de los capítulos posteriores. Además, se incluye la definición de un anillo algebraico, ya que los números hiperbólicos cumplen todas las propiedades que definen a un anillo, por otro lado, dicho anillo surgirá naturalmente cuando se construya un lagrangiano con disipación dado en términos de un campo hiperbólico puro.

1.1. Números hiperbólicos

Los números hiperbólicos $\mathbb{P} \equiv \mathbb{R}[j]$ (también llamados números dobles, espacio-temporales y a veces números complejos divididos) son los números reales extendidos para incluir a la unidad compleja j , de la misma manera que los números complejos $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}[i]$ son los números reales extendidos que incluyen al elemento complejo i . Este sistema está definido por,

$$\{w = x + jy; \quad j^2 = 1, \quad \bar{j} = -j; \quad x, y \in \mathbb{R}\}. \quad (1.1)$$

El álgebra definida por (1.1) se denotará con el símbolo \mathbb{P} y la letra w será reservada para elementos en \mathbb{P} .

Ahora, dados dos números hiperbólicos $w_1 = x_1 + jy_1$ y $w_2 = x_2 + jy_2$, se pueden realizar las operaciones básicas:

$$\text{Suma: } w_1 + w_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2), \quad (1.2)$$

$$\text{multiplicación: } w_1 \cdot w_2 = (x_1x_2 + y_1y_2) + j(x_2y_1 + x_1y_2). \quad (1.3)$$

Esta multiplicación es conmutativa, asociativa y se distribuye sobre la suma.

1.2. Conjugación e inversión

Un interés primordial es saber que elementos de \mathbb{P} tienen inversos. Para esto, se introduce el concepto de conjugación que, al igual que para los números complejos, se puede definir la noción de complejo conjugado para los números hiperbólicos.

Dado cualquier número hiperbólico $w = x + jy$, el conjugado de w , escrito como \bar{w} , se define por:

$$\bar{w} = x - jy, \quad (1.4)$$

con $\bar{j} = -j$. Esto tiene las siguientes implicaciones; para cualquier $w_1, w_2 \in \mathbb{P}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \overline{w_1 + w_2} &= \bar{w}_1 + \bar{w}_2, \\ \overline{w_1 \cdot w_2} &= \bar{w}_1 \cdot \bar{w}_2 \quad y \\ \overline{(\bar{w})} &= w. \end{aligned}$$

También se tiene otra propiedad importante, el módulo de un número hiperbólico, que está dado por:

$$\bar{w} \cdot w = |w|^2 = x^2 - y^2, \quad (1.5)$$

notando que $\bar{w} \cdot w$ es real para cualquier número hiperbólico w , aunque a diferencia del caso complejo usual, éste puede tomar valores negativos. El módulo (1.5) es invariante bajo rotaciones hiperbólicas $w \rightarrow w e^{j\chi}$, con:

$$e^{j\chi} = \cosh \chi + j \sinh \chi, \quad \chi \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

(donde χ es un parámetro no compacto). Estas rotaciones se pueden representar por el componente conectado del grupo de Lie $SO(1, 1)$ que contiene al grupo unidad I , con $\chi = 0$, y se denota por $SO^+(1, 1)$.

Por otro lado, se observa que si $|w|^2$ no se desvanece, el inverso multiplicativo dado por:

$$w^{-1} = \frac{\bar{w}}{|w|^2} = \frac{x - jy}{x^2 - y^2}, \quad (1.7)$$

es un inverso bien definido para w ; es decir, un número hiperbólico tiene inverso si y solo si, su módulo es distinto de cero, $|w|^2 \neq 0$. Por lo tanto w no tiene inverso, en general. Además, nótese que cualquier número hiperbólico $w = x + jy$ con $x = \pm y$ es un *divisor de cero*, es decir, no tienen inverso.

Sea \mathfrak{A} un anillo, entonces, un elemento distinto de cero $a \in \mathfrak{A}$ se dice que es un divisor de cero por la derecha si existe un elemento diferente de cero $b \in \mathfrak{A}$, tal que $ba = 0$. Los divisores de cero izquierdos se definen de manera similar [32]. En el caso conmutativo, las nociones de divisores de cero por la derecha y por la izquierda coinciden y se puede hablar simplemente de divisores de cero. Es decir, mientras \mathbb{C} es un campo, \mathbb{P} no es un dominio integral [33], es un anillo abeliano [34]. Cuando se tienen los casos en que $x = \pm y$, estos definen dos líneas isotrópicas que separan los cuadrantes del plano hiperbólico *fig.(1.1)*, que a su vez también definen una base idempotente. La definición y propiedades de un anillo algebraico serán dadas con más detalle.

1.3. Geometría asociada con los números hiperbólicos

Así como \mathbb{C} describe la geometría del plano euclidiano \mathbb{R}^2 , \mathbb{P} describe la geometría del plano de Minkowsky bi-dimensional [35, 36]. El conjunto de puntos:

$$\{w : |w|^2 = a^2\}, \quad (1.8)$$

es una hipérbola para cada valor de a distinto de cero. Esta hipérbola tiene ramas que pasan por los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$. Si $a = 1$, se tiene una hipérbola unitaria.

El conjugado de esta hipérbola está dado por:

$$\{w : |w|^2 = -a^2\}, \quad (1.9)$$

donde sus ramas pasan por los puntos $(0, a)$ y $(0, -a)$. Además, la hipérbola y su conjugada están separadas por dos asíntotas diagonales que forman un conjunto de elementos nulos, separando los cuadrantes del plano hiperbólico, este conjunto es:

$$\{w : |w|^2 = 0\}. \quad (1.10)$$

Estas dos líneas son perpendiculares en \mathbb{R}^2 y tienen pendientes ± 1 .

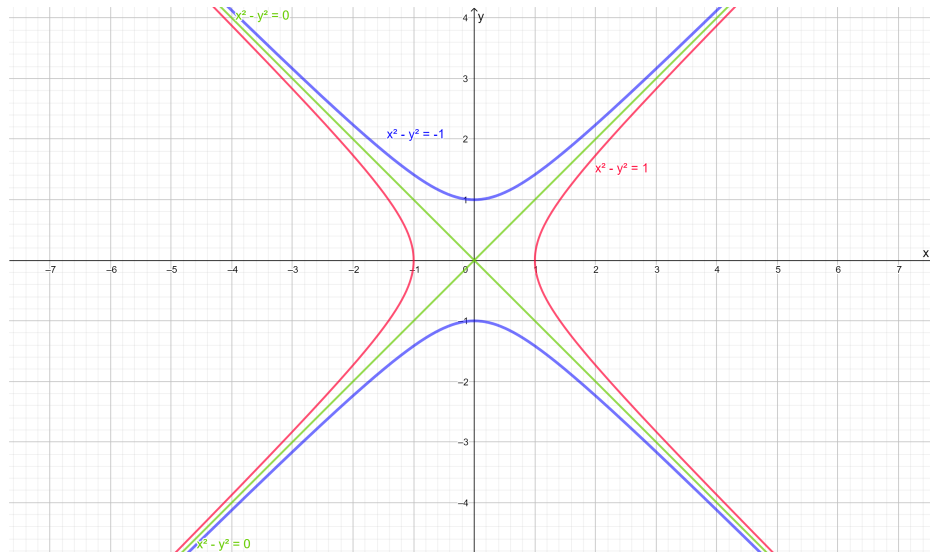


Figura 1.1: Hipérbolas: *unitaria con $\|z\| = 1$* , *conjugada con $\|z\| = -1$* y *asíntotas con $\|z\| = 0$*

Así que los divisores de cero en \mathbb{P} actúan como límites naturales entre los cuadrantes del plano hiperbólico. El plano hiperbólico a menudo se considera una proyección bidimensional del espacio-tiempo en cuatro dimensiones. Para un número hiperbólico $w = x + jy$, se tiene que:

- Si $|x| > |y|$, entonces w es un número temporal.
- Si $|x| < |y|$, entonces w es un número espacial.

- Si $|x| = |y|$, entonces w es un número luz.

Más información sobre los números hiperbólicos como: transformaciones polares hiperbólicas, rotaciones hiperbólicas como transformaciones de Lorentz, el ángulo hiperbólico están detalladas en [37], álgebra hiperbólica [38], geodésicas hiperbólicas, longitud de arco hiperbólico, volumen hiperbólico, entre otras, se encuentran en [39].

1.4. Anillo algebraico

Un anillo \mathfrak{R} es un conjunto no vacío con dos operaciones internas que cumplen con ciertas propiedades [40], estas operaciones son la suma y la multiplicación, denotadas por $(a + b)$ y (ab) respectivamente. Se requiere que \mathfrak{R} sea un grupo abeliano con respecto a $(+)$, con el elemento identidad designado como (0) y el opuesto denotado por $(-a)$. Para la multiplicación, \mathfrak{R} es un semi grupo conmutativo, de modo que el elemento identidad y los inversos no están necesariamente presentes. Entonces \mathfrak{R} se llama anillo si se cumplen los siguientes axiomas:

1. $(a + b) + c = a + (b + a)$, la suma es asociativa.
2. $a + b = b + a$, la suma es conmutativa.
3. Hay un elemento 0 tal que $(a + 0 = a)$, $\forall a \in \mathfrak{R}$.
4. Para cada $a \in \mathfrak{R}$ existe un elemento $-a$ tal que $(a - a) \equiv a + (-a) = 0$.
5. $(ab)c = a(bc)$, la multiplicación es asociativa.
6. Estas leyes están vinculadas por las leyes distributivas:
 $(\forall a, b, c \in \mathfrak{R}), (a + b)c = ac + bc$ y $c(a + b) = ca + cb$.

Cuando \mathfrak{R} tiene una identidad multiplicativa, se dice que \mathfrak{R} es un anillo con $\mathbf{1}$ o un anillo con una identidad. Cuando la multiplicación es conmutativa se dice que \mathfrak{R} es un anillo conmutativo. El elemento de identidad aditivo $\mathbf{0}$ se denomina cero del anillo. En un anillo es posible tener $ab = 0$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Estos elementos se denominan divisores de cero. Un anillo conmutativo con $\mathbf{1}$ que no tiene divisores de cero se llama *dominio integral* [41]. Si el anillo \mathfrak{R} tiene un $\mathbf{1}$ y $a \in \mathfrak{R}$ es tal que

existe $b \in \mathfrak{A}$ con $ab = 1 = ba$, entonces se dice que b es un inverso de a en \mathfrak{A} . Si todo elemento distinto de cero del anillo conmutativo \mathfrak{A} con un $\mathbf{1}$ tiene un inverso, entonces se dice que \mathfrak{A} es un campo, por lo que \mathfrak{A} es un campo si:

- \mathfrak{A} es un grupo abeliano aditivo,
- $\mathfrak{A} \setminus \{0\}$ es un grupo abeliano multiplicativo,
- las leyes distributivas se mantienen.

El anillo no-conmutativo $Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ de $n \times n$ matrices sobre \mathbb{R} tiene divisores de cero (para $n > 1$). Los sistemas numéricos $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, son campos. El sistema numérico \mathbb{Z} es un dominio integral que no es un campo. El anillo \mathbb{Z}_n de números enteros módulo n , es un dominio integral (de hecho, un campo) si y solo si n es primo [42].

1.5. Anillo conmutativo hiperbólico

Espacios vectoriales pueden ser definidos sobre el anillo conmutativo de los números hiperbólicos $\xi \in \mathbb{P}$. Esto puede ser visto como extensión de los números complejos [38] y se define por :

$$\mathbb{H} \equiv \{\xi = \sigma + j\varsigma \mid \sigma, \varsigma \in \mathbb{C}\} = \{x + iy + j(u + iv) \mid x, y, u, v \in \mathbb{R}\} \quad (1.11)$$

al igual que \mathbb{P} , \mathbb{H} también es un anillo conmutativo. Sea ξ un número hiper-complejo,

$$\xi = x + iy + ju + jv, \quad \xi \in \mathbb{H} : \quad (1.12)$$

donde la unidad compleja i y la unidad hiperbólica j tienen las propiedades:

$$i^2 = -1, \quad j^2 = 1.$$

Además $\bar{i} = -i$, $\bar{j} = -j$, $ij = ji$ y $\overline{ij} = ij$. Por lo tanto, la conjugación de ξ queda como:

$$\bar{\xi} = x - iy - ju + jv. \quad (1.13)$$

Con respecto a la conjugación de Clifford [9], el cuadrado del número hiper-complejo está dado por:

$$\xi\bar{\xi} = x^2 + y^2 - u^2 - v^2 + 2ij(xv - yu), \quad (1.14)$$

es decir, en general, la conjugación de un número hiper-complejo no es un número real. La expresión (1.14) es invariante bajo las rotaciones en el plano representadas por el grupo de Lie $U(1)$, y también es invariante bajo rotaciones hiperbólicas dadas en (1.6), el cual corresponde al grupo $SO(1, 1)$.

A diferencia de los números complejos habituales con sus bases idempotentes ¹ 0 y 1, el anillo \mathbb{H} posee las siguientes bases idempotentes

$$\begin{aligned} J^+ &= \frac{1}{2}(1 + j), & (J^+)^n &= J^+ \\ J^- &= \frac{1}{2}(1 - j), & (J^-)^n &= J^-, \quad n = 1, 2, 3 \dots; \end{aligned} \quad (1.15)$$

las cuales se eliminan entre sí:

$$J^+J^- = 0. \quad (1.16)$$

Esta propiedad puede ser vista como una propiedad de ortogonalidad entre las bases. La unidad hiperbólica j es absorbida por estas bases

$$jJ^+ = J^+, \quad jJ^- = -J^-. \quad (1.17)$$

Usando a estas bases, las rotaciones hiperbólicas (1.6) se pueden expresar en términos de la combinación de (J^+, J^-) , esto implica:

$$e^{J^+\chi} = J^+e^\chi + J^-, \quad e^{J^-\chi} = J^-e^\chi + J^+; \quad (1.18)$$

cantidades que tienen esta forma, tendrán la norma definida positivamente, ya que

$$\left| e^{J^+\chi} \right|^2 \equiv e^{J^+\chi} e^{J^-\chi} = e^\chi$$

¹Se dice que un elemento e de un anillo \mathfrak{A} es idempotente si $e^2 = e$. Dos idempotentes e y f , se llaman ortogonales si $ef = fe = 0$. El cero y la identidad de cualquier anillo son idempotentes. Sin embargo, pueden existir muchos otros elementos idempotentes [32].

y

$$\sqrt{|e^{J^+\chi}|^2} = e^{\frac{\chi}{2}},$$

así que, las expresiones de la ecuación (1.18) son inversas entre sí. Por otro lado, la expansión en serie de la expresión e^χ va a ser necesaria, esta puede obtenerse considerando la expansión usual para una función real, primero para el término

$$e^{J^+\chi} = J^+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi^n}{n!} + J^- = J^+ + J^- + J^+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi^n}{n!} = 1 + J^+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi^n}{n!}, \quad (1.19)$$

$$e^{J^-\chi} = J^- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi^n}{n!} + J^+ = J^- + J^+ + J^- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi^n}{n!} = 1 + J^- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi^n}{n!},$$

donde se han sumado las expresiones (1.15). Ya que estas series están construidas para $n \geq 1$, están bien definidas cuando χ corresponde a un operador, más adelante, la descripción de los estados entrelazados va a requerir este tipo de expansiones.

Retomando las bases idempotentes, estas funcionan como proyectores en el anillo \mathbb{H} ; entonces, para cualquier elemento del anillo $\rho \equiv \rho_1 + i\rho_2 + j\rho_3 + ij\rho_4$, se tiene:

$$\begin{aligned} J^+ \rho &= J^+ [\rho_1 + \rho_3 + i(\rho_2 + \rho_4)], \\ J^- \rho &= J^- [\rho_1 - \rho_3 + i(\rho_2 - \rho_4)]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Notando que las expresiones en (1.20) ayudan a factorizar cualquier elemento del anillo como producto de un número hiperbólico puro y un número complejo puro usual. Finalmente, si se suman estas proyecciones, el resultado será un número completo, es decir,

$$J^+ \rho + J^- \rho = \rho. \quad (1.21)$$

Por lo tanto, cualquier número hiper-complejo puede descomponerse en las bases (J^+, J^-) , con números complejos convencionales como componentes. Esto es la descomposición espectral de un elemento de \mathbb{H} .

Capítulo 2

Lagrangiano disipativo

El punto de partida para estudiar un sistema abierto es la formulación de campos térmicos que duplica el número de grados de libertad, representados por un campo ϕ (que vive en un espacio compacto $\Xi \in \mathfrak{R}^d$) para el sistema de interés (A), y un segundo campo ψ que representa el baño térmico o entorno (B). Al ubicarse en el marco del campo ϕ , se observa que existe un proceso disipativo que puede ser representado por una ecuación de movimiento [8]:

$$(\partial_t^2 - \nabla^2)\phi + \gamma\partial_t\phi = 0. \quad (2.1)$$

La ecuación correspondiente para ψ es similar a la ecuación para ϕ , pero difiere en un cambio de signo en el término disipativo:

$$(\partial_t^2 - \nabla^2)\psi - \gamma\partial_t\psi = 0; \quad (2.2)$$

donde γ representa a la disipación. Esta última expresión dice que el campo ψ es una copia idéntica del campo físico ϕ pero que evolucionará con la dirección del tiempo invertida. El comportamiento disipativo que ocurre en el sistema de interés está determinado por la interacción entre ψ y ϕ .

En este capítulo se obtendrá un lagrangiano dado en términos de cuatro campos escalares, generalizando al lagrangiano dado en [43]. También se mostrará la solución a la ecuación de movimiento del sistema de interés, así como las implicaciones del formalismo lagrangiano y hamiltoniano.

2.1. Lagrangiano disipativo

Se tiene un lagrangiano, el cual reproduce la ecuación de movimiento (2.1):

$$\mathcal{L} = \int_{\Xi} dx^d \psi [(\partial_t^2 - \nabla^2)\phi + \gamma \partial_t \phi]; \quad (2.3)$$

si el lagrangiano (2.3) es integrado por partes y se ignoran términos de frontera, se obtiene:

$$\mathcal{L} = \int_{\Xi} dx^d [\partial_\mu \phi \partial^\mu \psi + \frac{\gamma}{2} (\phi \partial_t \psi - \psi \partial_t \phi)]. \quad (2.4)$$

A partir de este lagrangiano se obtendrán las ecuaciones de movimiento para el campo físico dado por la ecuación (2.1), así como para el entorno dado por (2.2); estas ecuaciones se obtienen al hacer la variación con respecto a ψ y ϕ , respectivamente. Luego, con la definición:

$$\Phi = \frac{\phi + \psi}{\sqrt{2}}, \quad \Psi = \frac{\phi - \psi}{\sqrt{2}}; \quad (2.5)$$

el lagrangiano (2.4) puede reescribirse como:

$$\mathcal{L}(\Phi, \Psi) = \frac{1}{2} \int dx^d [(\partial_\mu \Phi)^2 - (\partial_\mu \Psi)^2 + \gamma(\Psi \dot{\Phi} - \Phi \dot{\Psi})]. \quad (2.6)$$

Φ y Ψ son campos reales, el punto sobre estos campos representa una derivada temporal. Este lagrangiano corresponde a la ecuación (10) en la referencia [43]. Siguiendo a [43], donde se define el siguiente campo hiperbólico,

$$\Omega = \Phi + j\Psi, \quad (2.7)$$

se pueden construir objetos invariantes tanto bajo rotaciones hiperbólicas globales, así como bajo transformaciones de tipo PT, es decir:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Omega \cdot \partial^\mu \bar{\Omega} &= (\partial_\mu \Phi)^2 - (\partial_\mu \Psi)^2, & SO(1, d-1), \quad SO(1, 1), \\ \frac{1}{2}[j\Omega \dot{\bar{\Omega}} + c.c.] &= \Psi \dot{\Phi} - \Phi \dot{\Psi}, & SO(1, 1). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Cuando se introduce disipación, aparece un problema, la ruptura de la covarianza de Lorentz. La disipación es un proceso típico que rompe la invariancia en los boost; además, ya que la disipación define una "flecha del tiempo", en un proceso disipativo hay un marco natural preferido, el del baño termal.

Usando a las expresiones en (2.8), el lagrangiano dado en (2.6), se reescribe como un invariante bajo $SO(1, 1)$, en donde se agregará el término de masa:

$$\mathcal{L}(\Omega, \bar{\Omega}) = \frac{1}{2} \int dx^d \left[\partial_\mu \Omega \cdot \partial^\mu \bar{\Omega} + \frac{\gamma}{2} (j\Omega\dot{\bar{\Omega}} + c.c) - m^2(\Omega\bar{\Omega}) \right]. \quad (2.9)$$

El lagrangiano (2.9) está construido con un campo hiperbólico puro Ω que está dado en (2.7); éste se generalizará al introducir campos complejos usuales, obteniendo dos campos complejos (cargados) interactuando por disipación, ampliando el caso anterior donde se tenían campos escalares neutros (reales), también interactuando por disipación,

$$\Phi = \phi_1 + i\phi_2, \quad \Psi = \psi_1 + i\psi_2, \quad (2.10)$$

donde $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}$. Ya que el campo Ω se ha generalizado a cuatro componentes, surge la presencia de una simetría adicional. Para visualizarla, se observan a los objetos que constituyen al lagrangiano dado en (2.9) pero en términos de las cuatro componentes:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Omega \cdot \partial^\mu \bar{\Omega} &= (\partial_\mu \phi_1)^2 + (\partial_\mu \phi_2)^2 - (\partial_\mu \psi_1)^2 - (\partial_\mu \psi_2)^2 \\ &+ 2ij (\partial_\mu \phi_1 \partial_\mu \psi_2 - \partial_\mu \phi_2 \partial_\mu \psi_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [j\Omega\dot{\bar{\Omega}} + c.c] &= (\psi_2 \dot{\phi}_2 + \psi_1 \dot{\phi}_1 - \phi_2 \dot{\psi}_2 - \phi_1 \dot{\psi}_1) \\ &+ ij (\psi_1 \dot{\psi}_2 + \phi_2 \dot{\phi}_1 - \psi_2 \dot{\psi}_1 - \phi_1 \dot{\phi}_2) \quad y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega\bar{\Omega} &= (\Phi\bar{\Phi} - \Psi\bar{\Psi}) + j (\Psi\bar{\Phi} - \Phi\bar{\Psi}) \\ &= (\phi_1^2 + \phi_2^2 - \psi_1^2 - \psi_2^2) + 2ij (\psi_2\phi_1 - \phi_2\psi_1). \end{aligned}$$

En esta formulación no habrá una teoría de campo libre, necesariamente las interacciones están presentes en el modelo más simple, esto es porque se tiene la

cantidad invariante más sencilla que se puede construir en \mathbb{H} , es decir, la norma y, como se observa, los elementos anteriores tienen esta forma, dada en (1.14). Entonces, cuando se tiene al lagrangiano construido de forma hiper-compleja, éste se puede re-interpretar en términos de las dos variables de campo hiper-complejificadas $(\Omega, \bar{\Omega})$ con la norma $\xi\bar{\xi}$. Por lo que la simetría adicional que surge al generalizar el campo Ω es el grupo $U(1) \times SO(1, 1)$. Así que las simetrías son del lagrangiano. Por otro lado, usando las bases idempotentes dadas en (1.15), el campo (2.7) se expresa como:

$$\Omega = J^+(\Phi + \Psi) + J^-(\Phi - \Psi). \quad (2.11)$$

Además, el lagrangiano (2.9) escrito en términos de estos dos campos complejos es,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi, \Psi, \bar{\Phi}, \bar{\Psi}) = & \frac{1}{2} \int \left\{ \partial_\mu \Phi \partial^\mu \bar{\Phi} - \partial_\mu \Psi \partial^\mu \bar{\Psi} + j (\partial_\mu \Psi \partial^\mu \bar{\Phi} - \partial_\mu \Phi \partial^\mu \bar{\Psi}) \right. \\ & \left. + \frac{\gamma}{2} [\Psi \bar{\Phi} - \Phi \bar{\Psi} + j(\Phi \bar{\Phi} - \Psi \bar{\Psi}) + c.c.] - m^2 [\Phi \bar{\Phi} - \Psi \bar{\Psi} + j(\Psi \bar{\Phi} - \Phi \bar{\Psi})] \right\} dx^d. \end{aligned} \quad (2.12)$$

En lo siguiente, se obtendrán las ecuaciones de movimiento y sus soluciones para el lagrangiano en (2.9). El lagrangiano (2.12) arroja cuatro ecuaciones de movimiento, por simplicidad solo se tomarán las ecuaciones de movimiento en términos de Ω . Siempre es posible regresar al lagrangiano original al no tomar en cuenta la parte hiperbólica y la masa en (2.12).

2.2. Ecuación de movimiento

Poniendo atención en la acción (2.9), donde las variables dinámicas corresponden al par $(\Omega, \bar{\Omega})$, recordando que el campo Ω está construido en términos de dos campos complejos usuales, es decir, $(\Omega, \bar{\Omega}) \rightarrow (\Phi, \Psi; \bar{\Phi}, \bar{\Psi})$. Al hacer la variación de (2.9) respecto a $\bar{\Omega}$, se obtiene la ecuación:

$$\partial_\mu \partial^\mu \Omega + j\gamma \partial_t \Omega + m^2 \Omega = 0. \quad (2.13)$$

Similarmente la variación respecto a Ω , arroja el complejo conjugado de (2.13). La sustitución de la expresión (2.11) en la ecuación de movimiento (2.13), entrega la

descomposición espectral de las ecuaciones de movimiento,

$$\begin{aligned} J^+ [\partial_\mu \partial^\mu (\Phi + \Psi) + \gamma \partial_t (\Phi + \Psi) + m^2 (\Phi + \Psi)] \\ + J^- [\partial_\mu \partial^\mu (\Phi - \Psi) - \gamma \partial_t (\Phi - \Psi) + m^2 (\Phi - \Psi)] = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Donde se hizo uso de las propiedades dadas en (1.17).

2.3. Solución a la ecuación de movimiento

La solución propuesta para la ecuación de movimiento (2.13), la cual se compone de una frecuencia puramente imaginaria, así como de su compleja conjugada es:

$$(\Phi + \Psi) = \mathbf{a} e^{[(\omega_1 + i\omega'_1)t - i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}]} + \mathbf{b} e^{[(\omega_1 - i\omega'_1)t + i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}]} \quad (2.15)$$

Y de manera similar para $(\Phi - \Psi)$. Al introducir estas soluciones en (2.14), se obtiene la relación de dispersión:

$$\omega_1'^2 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_1 + \left(\frac{\gamma^2}{4} - m^2 \right) = 0, \quad (2.16)$$

y las frecuencias son:

$$\omega_1 = -\frac{\gamma}{2} \quad , \quad \omega'_1 = \pm \sqrt{-\frac{\gamma^2}{4} + (k_1^2 + m^2)}. \quad (2.17)$$

De la misma manera se obtiene ω_2 y ω'_2 para la solución $(\Phi - \psi)$. Por lo que ambas componentes J^+ y J^- tienen la misma relación de dispersión. Teniendo en cuenta que el sistema tiene frecuencias reales, ya que γ define un corte de IR.

El campo Ω dado en (2.11) puede escribirse como:

$$\Omega = J^+ e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[\mathbf{a}_1 e^{i(\omega'_1 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x})} + \mathbf{a}_2 e^{-i(\omega'_1 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x})} \right] + J^- e^{\frac{\gamma}{2}t} \left[\mathbf{b}_1 e^{i(\omega'_2 - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x})} + \mathbf{b}_2 e^{-i(\omega'_2 - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x})} \right]. \quad (2.18)$$

Donde se ha utilizado la primera propiedad dada en (1.18).

2.4. Campos cuánticos y conmutadores de campo

Definiendo $\omega'_1 \equiv \omega_{k_1}$ y $\omega'_2 \equiv \omega_{k_2}$, la combinación de soluciones en términos de las bases (J^+, J^-) para el campo Ω es:

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{x}, t) = & J^+ e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[\mathbf{a}_1 e^{i(\omega_{k_1}t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x})} + \bar{\mathbf{a}}_2 e^{-i(\omega_{k_1}t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x})} \right] \\ & + J^- e^{\frac{\gamma}{2}t} \left[\bar{\mathbf{b}}_1 e^{i(\omega_{k_2}t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x})} + \mathbf{b}_2 e^{-i(\omega_{k_2}t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x})} \right], \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ son coeficientes arbitrarios. Por otro lado, se definen los rangos de los parámetros espectrales \mathbf{k} , de acuerdo con:

$$(-\infty, \infty) \leftrightarrow J^+ \quad y \quad (-\infty, \infty) \leftrightarrow J^-. \quad (2.20)$$

Así, la descomposición espectral del operador de campo se construye a partir de la solución (2.18), esto es:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}(\mathbf{x}, t) = & N \left\{ J^+ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\hat{\mathbf{a}}_1(\mathbf{k}_1) e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i(\omega_{k_1}t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x})} + \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(\mathbf{k}_1) e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i(\omega_{k_1}t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x})} \right] d\mathbf{k}_1 \right. \\ & \left. + J^- \int_{-\infty}^{\infty} \left[\hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(\mathbf{k}_2) e^{\frac{\gamma}{2}t} e^{i(\omega_{k_2}t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x})} + \hat{\mathbf{b}}_2(\mathbf{k}_2) e^{\frac{\gamma}{2}t} e^{-i(\omega_{k_2}t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x})} \right] d\mathbf{k}_2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Donde N es un factor de normalización. Luego, el conmutador de campo es:

$$\begin{aligned} & \left[\hat{\Omega}(\mathbf{x}, t), \hat{\Omega}^\dagger(\mathbf{x}', t) \right] \\ & = N^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k}_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k}'_2 \left\{ J^+ \left[e^{i[(\omega_{k_1} - \omega_{k'_2})t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x}']} \left[\hat{\mathbf{a}}_1(\mathbf{k}_1), \hat{\mathbf{b}}_1(\mathbf{k}'_2) \right] \right. \right. \\ & + e^{i[(\omega_{k_1} + \omega_{k'_2})t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x}']} \left[\hat{\mathbf{a}}_1(\mathbf{k}_1), \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(\mathbf{k}'_2) \right] \\ & + e^{-i[(\omega_{k_1} + \omega_{k'_2})t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x}']} \left[\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(\mathbf{k}_1), \hat{\mathbf{b}}_1(\mathbf{k}'_2) \right] \\ & + e^{i[(\omega_{k'_2} - \omega_{k_1})t + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x}']} \left[\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(\mathbf{k}_1), \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(\mathbf{k}'_2) \right] \\ & + J^- \left[\left[\hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(\mathbf{k}'_2), \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(\mathbf{k}_1) \right] e^{i[(\omega_{k_2} - \omega_{k_1})t - \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}']} \right. \\ & + \left[\hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(\mathbf{k}'_2), \hat{\mathbf{a}}_2(\mathbf{k}_1) \right] e^{i[(\omega'_{k_2} + \omega_{k_1})t - \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}']} \\ & + \left[\hat{\mathbf{b}}_2(\mathbf{k}'_2), \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(\mathbf{k}_1) \right] e^{-i[(\omega_{k_2} + \omega_{k_1})t - \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}']} \\ & \left. \left. + \left[\hat{\mathbf{b}}_2(\mathbf{k}'_2), \hat{\mathbf{a}}_2(\mathbf{k}_1) \right] e^{i[(\omega_{k_1} - \omega_{k_2})t + \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}']} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Una de las mayores dificultades que aparecen en el estudio de sistemas disipativos en la mecánica cuántica que involucran la duplicación de campos, es que las relaciones de conmutación canónicas no se mantienen debido a la evolución temporal de la disipación [44]. En el conmutador (2.22), dicha evolución temporal se ha eliminado debido a que $e^{\pm\frac{\gamma}{2}t}(J^+ \cdot J^-) = 0$, siendo causante de esto la propiedad (1.16) de la base J^+, J^- . Ahora, considerando las siguientes reglas de conmutación para los operadores de aniquilación y creación:

$$\begin{cases} [\hat{\mathbf{a}}_{1,2}(\mathbf{k}_1), \hat{\mathbf{b}}_{1,2}(\mathbf{k}'_2)] = \rho_{1,2,3,4} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_2) \\ [\hat{\mathbf{b}}_{1,2}^\dagger(\mathbf{k}'_2), \hat{\mathbf{a}}_{1,2}^\dagger(\mathbf{k}_1)] = \bar{\rho}_{1,2,3,4} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_2) \\ [\hat{\mathbf{a}}_{1,2}(\mathbf{k}_1), \hat{\mathbf{b}}_{1,2}^\dagger(\mathbf{k}'_2)] = 0 \\ [\hat{\mathbf{a}}_{1,2}^\dagger(\mathbf{k}_1), \hat{\mathbf{b}}_{1,2}(\mathbf{k}'_2)] = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

donde $\rho_{1,2,3,4}$ son elementos arbitrarios en el anillo que, en general dependen de $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'_2)$; conduciendo al conmutador (2.22) a la forma:

$$\begin{aligned} [\widehat{\Omega}(\mathbf{x}, t), \widehat{\Omega}^\dagger(\mathbf{x}', t)] &= N^2 \int_{-\infty}^{\infty} [(\rho_1 + \rho_2) e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} + (\rho_1 - \rho_2) e^{-i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}] d\mathbf{k}'_2 \\ &= 4\pi N^2 \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \rho_1. \end{aligned} \quad (2.24)$$

De la expresión (2.9), se obtienen los momentos canónicos conjugados correspondientes a los campos $(\Omega, \bar{\Omega})$:

$$\Pi_\Omega \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Omega}} = \dot{\bar{\Omega}} - j \frac{\gamma}{2} \bar{\Omega} = \Pi_\Phi + j\Pi_\psi, \quad \Pi_{\bar{\Omega}} = \Pi_\Phi - j\Pi_\psi. \quad (2.25)$$

El operador de momento conjugado es construido a través de esta expresión clásica:

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi}_\Omega(\mathbf{x}, t) &= -N \left\{ J^+ \int_{-\infty}^{\infty} i\omega_{k_2} \left[\hat{\mathbf{b}}_1(\mathbf{k}_2) e^{\frac{\gamma}{2}t} e^{-i(\omega_{k_2} t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x})} - \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(\mathbf{k}_2) e^{\frac{\gamma}{2}t} e^{i(\omega_{k_2} t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x})} \right] d\mathbf{k}_2 \right. \\ &\quad \left. + J^- \int_{-\infty}^{\infty} i\omega_{k_1} \left[\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(\mathbf{k}_1) e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i(\omega_{k_1} t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x})} - \hat{\mathbf{a}}_2(\mathbf{k}_1) e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i(\omega_{k_1} t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x})} \right] d\mathbf{k}_1 \right\}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

dando lugar a la construcción del conmutador de campo:

$$\begin{aligned}
\left[\widehat{\Pi}_\Omega(\mathbf{x}, t), \widehat{\Pi}_\Omega^\dagger(\mathbf{x}', t) \right] = & \\
N^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k}_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k}'_2 \left(\omega_{\mathbf{k}'_2} \omega_{\mathbf{k}_1} \right) \left\{ J^+ \left[-e^{i \left[(\omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}'_2}) t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}' + \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x} \right]} \left[\widehat{\mathbf{a}}_1(\mathbf{k}_1), \widehat{\mathbf{b}}_1(\mathbf{k}'_2) \right] \right. \right. & \\
+ e^{i \left[(\omega_{\mathbf{k}'_2} - \omega_{\mathbf{k}_1}) t + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}' - \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x} \right]} \left[\widehat{\mathbf{b}}_2^\dagger(\mathbf{k}'_2), \widehat{\mathbf{a}}_2^\dagger(\mathbf{k}_1) \right] & \\
- e^{-i \left[(\omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}'_2}) t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}' + \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x} \right]} \left[\widehat{\mathbf{b}}_1(\mathbf{k}'_2), \widehat{\mathbf{a}}_2^\dagger(\mathbf{k}_1) \right] & \\
+ e^{i \left[(\omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}'_2}) t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}' - \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x} \right]} \left[\widehat{\mathbf{b}}_2^\dagger(\mathbf{k}'_2), \widehat{\mathbf{a}}_1(\mathbf{k}_1) \right] & \\
+ J^- \left[\left[\widehat{\mathbf{b}}_1^\dagger(\mathbf{k}'_2), \widehat{\mathbf{a}}_1^\dagger(\mathbf{k}_1) \right] (-) e^{i \left[(\omega_{\mathbf{k}'_2} - \omega_{\mathbf{k}_1}) t + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x}' \right]} \right. & \\
+ \left[\widehat{\mathbf{a}}_2(\mathbf{k}_1), \widehat{\mathbf{b}}_2(\mathbf{k}'_2) \right] e^{i \left[(\omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}'_2}) t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x}' \right]} & \\
- \left[\widehat{\mathbf{a}}_1^\dagger(\mathbf{k}_1), \widehat{\mathbf{b}}_2(\mathbf{k}'_2) \right] e^{i \left[(\omega_{\mathbf{k}'_2} + \omega_{\mathbf{k}_1}) t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x}' \right]} & \\
\left. \left. + \left[\widehat{\mathbf{a}}_2(\mathbf{k}_1), \widehat{\mathbf{b}}_1^\dagger(\mathbf{k}'_2) \right] e^{i \left[(\omega_{\mathbf{k}'_2} + \omega_{\mathbf{k}_1}) t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x}' \right]} \right\}, & \tag{2.27}
\end{aligned}$$

que, al usar las reglas de conmutación (2.23) y, al resolver la integral ² da origen a:

$$\begin{aligned}
\left[\widehat{\Pi}_\Omega(\mathbf{x}, t), \widehat{\Pi}_\Omega^\dagger(\mathbf{x}', t) \right] = & \\
N^2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mathbf{k}'_2}^2 \left[(\rho_1 - \rho_2) e^{i\mathbf{k}'_2 \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} + (\rho_1 + \rho_2) e^{-i\mathbf{k}'_2 \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \right] d\mathbf{k}'_2 & \tag{2.28} \\
= -4\pi N^2 \left(-\frac{\gamma^2}{4} + m^2 \right) \rho_2 \delta''(\mathbf{x}' - \mathbf{x}). &
\end{aligned}$$

Nótese la presencia del factor cuadrático de la frecuencia, la cual es dependiente de \mathbf{k}'_2 , de acuerdo con (2.17).

²Tomando en cuenta que con $f_n(x) = \int_{-n}^n k^2 e^{ikx} dk$, una secuencia de funciones suaves f_n , converge en el sentido de distribuciones [45] a $2\pi\delta''(x)$.

Para la construcción de otro conmutador:

$$\begin{aligned}
& \left[\widehat{\Omega}(\mathbf{x}, t), \widehat{\Pi}_\Omega(\mathbf{x}', t) \right] = \\
& - N^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k}_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k}'_2 \left\{ i\omega_{k'_2} J^+ \left[e^{i[(\omega_{k_1} - \omega_{k'_2})t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x}']} [\hat{\mathbf{a}}_1(\mathbf{k}_1), \hat{\mathbf{b}}_1(\mathbf{k}'_2)] \right. \right. \\
& \quad - e^{i[(\omega_{k_1} + \omega_{k'_2})t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x}']} [\hat{\mathbf{a}}_1(\mathbf{k}_1), \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(\mathbf{k}'_1)] \\
& \quad + e^{-i[(\omega_{k_1} + \omega_{k'_2})t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x}']} [\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(\mathbf{k}_1), \hat{\mathbf{b}}_1(\mathbf{k}'_2)] \\
& \quad - e^{i[(\omega_{k'_2} - \omega_{k_1})t + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x}']} [\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(\mathbf{k}_1), \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(\mathbf{k}'_2)] \\
& \quad + i\omega_{k_1} J^- \left[[\hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(\mathbf{k}'_2), \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(\mathbf{k}_1)] e^{i[(\omega_{k'_2} - \omega_{k_1})t - \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}']} \right. \\
& \quad - [\hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(\mathbf{k}'_2), \hat{\mathbf{a}}_2(\mathbf{k}_1)] e^{i[(\omega_{k'_2} + \omega_{k_1})t - \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}']} \\
& \quad + [\hat{\mathbf{b}}_2(\mathbf{k}'_2), \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(\mathbf{k}_1)] e^{-i[(\omega_{k'_2} + \omega_{k_1})t + \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}']} \\
& \quad \left. \left. - [\hat{\mathbf{b}}_2(\mathbf{k}'_2), \hat{\mathbf{a}}_2(\mathbf{k}_1)] e^{i[(\omega_{k_1} - \omega_{k'_2})t + \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}']} \right] \right\}. \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Nuevamente la dependencia de los factores disipativos $e^{\pm \frac{\gamma}{2}t}$ ha sido eliminada. En los tratamientos convencionales, el conmutador de campo (el único) $[\widehat{\Omega}, \widehat{\Pi}_\Omega]$, es una función delta de Dirac, sin ninguna señal de la dimensión de fondo y de la interacción.

Al usar los conmutadores dados en (2.23) en la expresión (2.29), esta se reduce,

$$\begin{aligned}
& \left[\widehat{\Omega}(\mathbf{x}, t), \widehat{\Pi}_\Omega(\mathbf{x}', t) \right] = \\
& - N^2 \int_{-\infty}^{\infty} i\omega_{k'_2} \left[(\rho_1 + \rho_2) e^{i\mathbf{k}'_2 \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} + (\rho_1 - \rho_2) e^{-i\mathbf{k}'_2 \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \right] d\mathbf{k}'_2 \\
& = 4i\rho_2 N^2 \frac{\sqrt{-\frac{\gamma^2}{4} + m^2}}{(\mathbf{x}' - \mathbf{x})} K_1 \left(\left| -\frac{\gamma^2}{4} + m^2 \right| (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \right). \tag{2.30}
\end{aligned}$$

Donde $K_1(x)$ es una función de Bessel modificada. Esta integral depende solo de la dimensión espacial debido a la presencia de la frecuencia $\omega_{k'_2}$. Para la resolución de la integral (2.30) *ver el apéndice A*.

Capítulo 3

Mecánica estadística

Comúnmente se encuentra en la literatura de la mecánica estadística de sistemas en equilibrio tres tipos de ensambles, conocidos como el ensamble micro-canónico, canónico y gran-canónico. El ensamble micro-canónico es utilizado para describir sistemas aislados en los que la energía, su número de partículas N y su volumen V , son fijos. El ensamble canónico se utiliza para describir sistemas que están en contacto con un reservorio térmico o entorno con una temperatura T y los sistemas pueden intercambiar energía con el reservorio, sin embargo, el número de partículas y el volumen siguen siendo fijos. Por último, el ensamble gran-canónico, que describe sistemas en los que hay un potencial químico μ fijo; además, los sistemas pueden intercambiar partículas y también energía con el reservorio térmico, tanto el volumen como la temperatura aún son cantidades fijas. En este capítulo se obtendrá el operador hamiltoniano que como se verá, es independiente de los factores disipativos $e^{\pm\gamma t}$ y, que a su vez ayudará a la construcción del operador de evolución; también se construirá el operador de carga y la función de partición, esto mediante el uso del ensamble gran-canónico.

3.1. Operador de evolución temporal y función de gran partición

El hamiltoniano clásico que se construyó en [8] se puede reescribir como:

$$H = \frac{1}{2} \int \left[\Pi_\Omega \Pi_{\bar{\Omega}} + \partial_i \Omega \partial_i \bar{\Omega} + j \frac{\gamma^\alpha}{2} (\bar{\Omega} \Pi_{\bar{\Omega}} - \Omega \Pi_\Omega) - \left(\frac{\gamma^2}{4} - m^2 \right) \Omega \bar{\Omega} \right] dx^d, \quad (3.1)$$

y, como anteriormente, cada término es un invariante de $U(1) \times SO(1, 1)$, similar al lagrangiano calculado en el capítulo previo. Cada término en el hamiltoniano (3.1) no dependen de los factores disipativos $e^{\pm\gamma t}$, ya que los términos que contienen esta dependencia van acompañados por $J^+ J^- = 0$. Entonces, el operador hamiltoniano, en el caso presente, tiene la forma (*ver apéndice B*),

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}(t; \gamma) = & \\ & i \frac{N^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k}_1 \int_{-\infty}^{\infty} E \left\{ H_{k'_2 k_1} \left[J^+ \{ \hat{\mathbf{a}}_1(\mathbf{k}_1), \hat{\mathbf{b}}_1(-\mathbf{k}'_2) \} + J^- \{ \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(\mathbf{k}_1), \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-\mathbf{k}'_2) \} \right. \right. \\ & \left. \left. + J^+ \{ \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-\mathbf{k}'_2), \hat{\mathbf{a}}_1(\mathbf{k}_1) \} + J^- \{ \hat{\mathbf{b}}_2(-\mathbf{k}'_2), \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(\mathbf{k}_1) \} \right] \right. \\ & \left. + H_{-k'_2 k_1} \left[J^+ \{ \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(\mathbf{k}_1), \hat{\mathbf{b}}_1(-\mathbf{k}'_2) \} + J^- \{ \hat{\mathbf{a}}_2(\mathbf{k}_1), \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-\mathbf{k}'_2) \} \right. \right. \\ & \left. \left. + J^+ \{ \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(\mathbf{k}_1), \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-\mathbf{k}'_2) \} + J^- \{ \hat{\mathbf{a}}_2(\mathbf{k}_1), \hat{\mathbf{b}}_2(-\mathbf{k}'_2) \} \right] \right\} dk'_2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Este operador hamiltoniano tiene la estructura $J^+ \{ \hat{\mathbf{a}}_{1,2}, \hat{\mathbf{b}}_{1,2} \} + J^- \{ \hat{\mathbf{a}}_{1,2}^\dagger, \hat{\mathbf{b}}_{1,2}^\dagger \} = J^+ \{ \hat{\mathbf{a}}_{1,2}, \hat{\mathbf{b}}_{1,2} \} + h.c$; además, es hermitiano. También se han definido las siguientes funciones complejas:

$$\begin{aligned} E(k_1, k'_2; \gamma; t) &\equiv e^{i(\omega_{k_1} - \omega_{k'_2})t} G(k_1, k'_2; L_1, L_2) = (2\pi)^d \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_2) \\ H_{k'_2 k_1} &\equiv \omega_{k'_2} \omega_{k_1} + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}'_2 + \frac{i\gamma}{2} (\omega_{k'_2} + \omega_{k_1}) - \frac{\gamma^2}{4} + m^2 \\ H_{-k'_2 k_1} &\equiv \omega_{k'_2} \omega_{k_1} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}'_2 + \frac{i\gamma}{2} (\omega_{k'_2} + \omega_{k_1}) - \frac{\gamma^2}{4} + m^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

Además, se tiene que la función $G(k_1, k'_2; L_1, L_2) = \int e^{i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_2)} d^d x$ es esencialmente un delta de Dirac al tomar la integración en todo el espacio, por lo que, $(L_1, L_2) \rightarrow (-\infty, \infty)$, respectivamente; reduciendo el operador hamiltoniano a una

sola k -integración. Entonces el operador hamiltoniano (3.2) queda reescrito como,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}(t; \gamma) = & \\
i\pi N^2 \int_{-\infty}^{\infty} \{ & H_{k^+} \left[J^+ \left(\{ \hat{\mathbf{a}}_1(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_1(-\mathbf{k}) \} + \{ \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-\mathbf{k}), \hat{\mathbf{a}}_1(\mathbf{k}) \} \right) \right. \\
& \left. + J^- \left(\{ \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-\mathbf{k}) \} + \{ \hat{\mathbf{b}}_2(-\mathbf{k}), \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(\mathbf{k}) \} \right) \right] \\
& + H_{k^-} \left[J^+ \left(\{ \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_1(-\mathbf{k}) \} + \{ \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-\mathbf{k}) \} \right) \right. \\
& \left. + J^- \left(\{ \hat{\mathbf{a}}_2(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-\mathbf{k}) \} + \{ \hat{\mathbf{a}}_2(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_2(-\mathbf{k}) \} \right) \right] \} d\mathbf{k}. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Donde se ha reemplazado $(H_{k'_2 k_1}, H_{-k'_2 k_1}) \rightarrow (H_{k^+}, H_{k^-})$, respectivamente. La teoría cuántica de campos híbrida en construcción, es decir, con las dos unidades complejas ij , puede evolucionar de forma unitaria y la disipación será generada por la dinámica de todo el sistema. Un operador de evolución unitario (en el sentido híbrido), se puede construir como la exponencial del operador hamiltoniano, utilizando una combinación lineal de la unidad hiperbólica y la unidad imaginaria usual, esto es,

$$\begin{aligned}
e^{j\hat{\mathcal{H}}t+i\hat{\mathcal{H}}t} = & \\
\exp \left[(i-1)\pi J^+ \left(\{ \hat{\mathbf{a}}_1(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_1(-\mathbf{k}) \} + \{ \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-\mathbf{k}), \hat{\mathbf{a}}_1(\mathbf{k}) \} + \{ \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_1(-\mathbf{k}) \} + \{ \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-\mathbf{k}) \} \right) t \right. \\
& \left. + (-i-1)\pi J^- \left(\{ \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-\mathbf{k}) \} + \{ \hat{\mathbf{b}}_2(-\mathbf{k}), \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(\mathbf{k}) \} + \{ \hat{\mathbf{a}}_2(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-\mathbf{k}) \} + \{ \hat{\mathbf{a}}_2(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_2(-\mathbf{k}) \} \right) t \right]. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Si no se toma en cuenta el complejo conjugado de las soluciones a la ecuación de onda en la expresión (2.18), los elementos $\hat{\mathbf{a}}_2, \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger$ y $\hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger$ desaparecen y, considerando solamente a la parte hiperbólica en la exponencial (3.5), el operador de evolución (3.5) se reduce al operador de evolución de [43], salvo un signo (-) global. Aquí se usó la propiedad (1.17), además, la integración y las funciones H 's en (3.4) se han omitido por simplicidad. Obteniendo la descomposición espectral del operador de evolución.

3.2. Operador de carga, el potencial químico y la función de gran partición

La siguiente ley de conservación es una implicación directa de que el lagrangiano es invariante bajo $U(1) \times SO(1, 1)$:

$$\partial_t(\bar{\Omega}\dot{\Omega} - \Omega\dot{\bar{\Omega}} + j\gamma\Omega\bar{\Omega}) + \partial_i(\bar{\Omega}\partial^i\Omega - \Omega\partial^i\bar{\Omega}) = 0. \quad (3.6)$$

Con $j_0 = (\bar{\Omega}\dot{\Omega} - \Omega\dot{\bar{\Omega}} + j\gamma\Omega\bar{\Omega})$ y $j^i = (\bar{\Omega}\partial^i\Omega - \Omega\partial^i\bar{\Omega})$. Nótese que j^0 tiene el término adicional γ , con respecto a la expresión habitual de la teoría libre. Así que la carga asociada con esta corriente, está dada por:

$$Q = \int j_0 d^n x = \int (\bar{\Omega}\Pi_{\bar{\Omega}} - \Omega\Pi_{\Omega}) d^n x. \quad (3.7)$$

El momento ha sido definido en la expresión (2.25). En términos de las componentes reales de los campos, la carga puede toma la forma,

$$Q = \int \left[i(\dot{\phi}_2\phi_1 - \phi_1\dot{\phi}_2 + \dot{\psi}_1\psi_2 - \psi_2\dot{\psi}_1) + j(\dot{\psi}_1\phi_1 + \dot{\psi}_2\phi_2 - \dot{\phi}_1\psi_1 - \dot{\phi}_2\psi_2) \right] d^n x$$

y en el limite, cuando $\psi_1 = \psi_2 = 0$, se recupera la carga $U(1)$ dada por $i(\dot{\phi}_2\phi_1 - \dot{\phi}_1\phi_2)$. Luego, el operador de carga es:

$$\hat{Q}(L_1, L_2; t) = -\frac{j}{2} \int_{L_1}^{L_2} \left[j \left\{ \hat{\Omega}, \hat{\Pi}_{\Omega} \right\} + c.c \right] dx, \quad (3.8)$$

obteniendo, (*ver apéndice C*),

$$\begin{aligned} \hat{Q}(L_1, L_2; t) = & -2i^2\pi j \int_{-\infty}^{\infty} \omega_k \left\{ J^+ \left[\left\{ \hat{a}_1(\mathbf{k}), \hat{b}_1(-\mathbf{k}) \right\} + \left\{ \hat{b}_2^\dagger(-\mathbf{k}), \hat{a}_1(\mathbf{k}) \right\} \right. \right. \\ & \left. \left. + \left\{ \hat{a}_2^\dagger(\mathbf{k}), \hat{b}_1(-\mathbf{k}) \right\} + \left\{ \hat{a}_2^\dagger(\mathbf{k}), \hat{b}_2^\dagger(-\mathbf{k}) \right\} \right] \right. \\ & \left. + J^- \left[\left\{ \hat{a}_1^\dagger(\mathbf{k}), \hat{b}_1^\dagger(-\mathbf{k}) \right\} + \left\{ \hat{b}_2(-\mathbf{k}), \hat{a}_1^\dagger(\mathbf{k}) \right\} \right. \right. \\ & \left. \left. + \left\{ \hat{a}_2(\mathbf{k}), \hat{b}_1^\dagger(-\mathbf{k}) \right\} + \left\{ \hat{a}_2(\mathbf{k}), \hat{b}_2(-\mathbf{k}) \right\} \right] \right\} dk, \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nótese que el operador de carga es anti-hermitiano, debido a que tiene la forma

$$j \left[J^+ \{ \hat{\mathbf{a}}_{1,2}, \hat{\mathbf{b}}_{1,2} \} + J^- \{ \hat{\mathbf{a}}_{1,2}^\dagger, \hat{\mathbf{b}}_{1,2}^\dagger \} \right] = J^+ \{ \hat{\mathbf{a}}_{1,2}, \hat{\mathbf{b}}_{1,2} \} - h.c.$$

Entonces se tiene que $\hat{Q}^\dagger = -\hat{Q}$; además, la carga dada en (3.9) y el hamiltoniano en (3.4) conmutan, es decir, $[\hat{\mathcal{H}}, \hat{Q}] = 0$ (ver apéndice D), ya que tienen la forma $J^+[\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}] + J^-[\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}]^\dagger$ como operadores.

3.2.1. Función de gran partición

Para seguir con el desarrollo de la teoría, específicamente en este punto donde el objetivo es llegar a la función de gran partición, se tiene que introducir el concepto de temperatura en teoría de campos.

Para visualizar la forma que tiene esta función de gran partición se considera un sistema físico con un número constante de partículas N , cuyo hamiltoniano no tiene una dependencia explícita del tiempo. Al ponerse en contacto con un entorno a una temperatura T y además ha alcanzado el equilibrio, las propiedades termodinámicas pueden obtenerse a través de las siguientes reglas: a nivel de la mecánica clásica, cada elemento de volumen en el espacio de fase

$$\frac{dp dq}{h} = \frac{dp dq}{2\pi h} \quad (3.10)$$

está ocupado con una probabilidad proporcional al factor de Boltzmann $e^{-\frac{H(p,q)}{k_B T}}$. La cantidad $\frac{1}{k_B T}$ tiene la dimensión de una energía inversa y comúnmente se denota por β . (A veces se toma a T para medirla en unidades de energía k_B por Kelvin en vez de hacerlo solo por Kelvin, entonces se puede dejar k_B en todas las fórmulas.) La integral sobre los factores de Boltzmann de todos los elementos que están en el espacio fase (como es un volumen fijo V , se suprime el argumento de volumen V en todas partes.)

$$Z_{clásica}(T) \equiv \int \frac{dp dq}{2\pi h} e^{-H(p,q)/k_B T}, \quad (3.11)$$

es llamada *la función de partición clásica*. Esta contiene toda la información clásica del sistema. Para un sistema hamiltoniano general con un número infinito de grados

de libertad, la integral del espacio fase es

$$\prod_n \int \frac{dp_n dq_n}{2\pi\hbar}. \quad (3.12)$$

¿Por qué a una expresión que contiene a \hbar se le llama clásica?. Porque \hbar se puede omitir al calcular cualquier promedio termodinámico. En la estadística clásica se proporciona un factor de normalización irrelevante que hace que Z no tenga dimensiones. En la estadística cuántica, el hamiltoniano se reemplaza por el operador \hat{H} y la integral sobre el espacio fase se reemplaza por la traza en el espacio de Hilbert. Esto conduce a la función de partición de la estadística cuántica

$$Z(T) \equiv Tr \left(e^{-\hat{H}/k_B T} \right) \equiv Tr \left(e^{-H(\hat{p}, \hat{x})/k_B T} \right), \quad (3.13)$$

donde $Tr(\hat{O})$ denota la traza del operador \hat{O} . Si \hat{H} es un hamiltoniano de Schrödinger con N partículas, este es un *ensamble canónico*. En breve se dará la función de partición para el ensamble de interés.

Para sistemas que contienen una gran cantidad de partículas, se puede reemplazar la restricción inconveniente de un número fijo de partículas por su potencial químico μ y número promedio de partículas. En el ensamble gran-canónico, el sistema puede intercambiar tanto elementos constituyentes como energía con el entorno (o depósitos de partículas) descrito por su potencial químico (suponiendo en general que hay varias especies de elementos presentes). Es decir, las energías de un solo elemento se miden en relación con su potencial químico $H \rightarrow H - \sum_s \mu_s N_s$. En este caso, la función de partición en lugar de ser una función del número de partículas, es una función de la temperatura y de los potenciales químicos de la especie en cuestión

$$Z_{Gran-Canónico}(T, \mu) = Tr \left(e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})/k_B T} \right), \quad (3.14)$$

donde \hat{N} es el operador que cuenta el número de partículas en cada estado del conjunto. Para los sistemas de partículas donde no se conserva el número total de elementos, es decir, donde el operador hamiltoniano y el número total no conmutan, como los fonones y los fotones, el potencial químico se desvanece y se emplea el ensamble canónico. Para la representación integral de la función de gran partición,

es decir, para sistemas con simetrías continuas, se puede expresar a Z como una integral sobre campos y sus momentos conjugados [46]. Para hacer esta conexión, se realiza el cambio a una variable temporal imaginaria, $\tau = it$. Trabajando con la parte real e imaginara, en el sentido hiperbólico del campo,

$$\Omega = \Phi + j\Psi. \quad (3.15)$$

Además, como el sistema admite una carga conservada, se hace el reemplazo $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} - \mu\mathcal{N}$, donde \mathcal{N} es una densidad de carga conservada. Así que la función de gran partición, dada en cuatro dimensiones está dada por [46–48]:

$$Z = \int D\Pi_\Phi D\Pi_\Psi \int D\Phi D\Psi \cdot e^{\left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(i\Pi_\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} + i\Pi_\Psi \frac{\partial\Psi}{\partial\tau} - \mathcal{H}(\Pi_\Phi, \Pi_\Psi, \Phi, \Psi) + \mu j^0 \right) \right\}} \quad (3.16)$$

donde se ha usado la corriente de Noether conservada j^μ , dada en las ecuaciones (3.6) y (3.7). Los Π 's representan los momentos canónicos conjugados de los campos Φ y Ψ , además, \mathcal{H} es la densidad hamiltoniana dada en (3.1). Ahora, al realizar la integración sobre los momentos canónicos conjugados, esta ultima expresión de Z queda,

$$Z = \int D\Phi D\Psi \cdot \exp \left[\frac{1}{4} \int d^4x \left(-2 \left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} \right) - iv\Psi \right)^2 + 2 \left(\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} \right) - iv\Phi \right)^2 - (\nabla\Phi)^2 + (\nabla\Psi)^2 + \frac{\gamma^2}{8} \Phi^2 - \frac{\gamma^2}{8} \Psi^2 - m^2 (\Phi^2 - \Psi^2) \right) \right], \quad (3.17)$$

donde $v = -\mu + \frac{\gamma}{4}$, es el ajuste del potencial químico debido a la disipación. Para la función de gran partición de un campo complejo libre, se sabe que al elegir un valor adecuado para el potencial químico conduce a una condensación de Bose-Einstein, por lo que es válido preguntarse si esto también es cierto para la función de gran partición presente [46, 47, 49].

En términos de los cuatro campos, $\Phi = \phi_1 + i\phi_2$ y $\Psi = \psi_1 + i\psi_2$, e identificando la parte real y la parte imaginaria, se tiene:

$$\begin{aligned}
Z = \int D(\phi_1 + i\phi_2)D(\psi_1 + i\psi_2) \cdot \exp \left\{ \frac{1}{4} \int d^4x \left[-2 \left(\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} \right)^2 - \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} \right)^2 - \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial\tau} \right)^2 \right) \right. \right. \\
- 2\nu \left(\psi_2 \frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} - \psi_1 \frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} - \phi_2 \frac{\partial\psi_1}{\partial\tau} - \phi_1 \frac{\partial\psi_2}{\partial\tau} \right) - \nu^2 (\psi_1^2 - \psi_2^2 + \phi_1^2 - \phi_2^2) - (\nabla \cdot \phi_1)^2 + (\nabla \cdot \psi_1)^2 \\
+ (\nabla \cdot \phi_2)^2 - (\nabla \cdot \psi_2)^2 + \left(\frac{\gamma^2}{8} - m^2 \right) (\phi_1^2 - \phi_2^2 - \psi_1^2 - \psi_2^2) + 2i \left[2 \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} \right) \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} \right) - 2 \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau} \right) \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial\tau} \right) \right. \\
\left. \left. - 2\nu \left(\phi_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial\tau} - \phi_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial\tau} - \psi_1 \frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} + \psi_2 \frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} \right) + 2\nu^2 (\psi_1\psi_2 - \phi_1\phi_2) - (\nabla \cdot \phi_1)(\nabla \cdot \phi_2) + (\nabla \cdot \psi_1)(\nabla \cdot \psi_2) \right. \right. \\
\left. \left. + \left(\frac{\gamma^2}{2} - m^2 \right) (\phi_1\phi_2 - \psi_1\psi_2) \right] \right] \right\}, \tag{3.18}
\end{aligned}$$

que al hacer cero a la parte imaginaria de los campos Φ y Ψ , es decir, $\phi_2 = \psi_2 = 0$, la expresión (3.18) se reduce a la función de gran partición dada en [43]. Está bien establecido que cuando una partícula interactúa con un campo, esta se “viste” desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos. Así que, la interacción con el campo se absorbe como una masa efectiva de la partícula vestida y parece una partícula libre [50].

Capítulo 4

Estados entrelazados

En la mecánica clásica, dos (o más) sistemas que no interactúan, que no ejercen ningún tipo de fuerza entre sí, están completamente separados, es decir, los experimentos que se realicen localmente en uno de ellos no pueden influir de ninguna manera en los experimentos realizados localmente en el otro. Por otro lado, en la mecánica cuántica si se admite que puede haber una forma de correlación incluso en ausencia de interacción física. Este tipo de correlación recibe en nombre de *entrelazamiento*. El entrelazamiento significa no factorizabilidad del vector de estado que describe un sistema con al menos dos grados de libertad diferentes [51].

Existe una representación indicada para establecer comparaciones entre las teorías cuántica y clásica, que es la representación de estados coherentes, esto es, estados con la mínima incertidumbre permitida por el principio de indeterminación de Heisenberg, que al evolucionar a lo largo de la trayectoria clásica no se deforma con el paso del tiempo. Estos estados pueden definirse matemáticamente y generalizarse para cualquier sistema cuántico a partir de las propiedades de su grupo dinámico asociado [52]. Es posible definir diferentes medidas del entrelazamiento de un sistema. El entrelazamiento puede ser cuantificado, para esto pueden utilizarse diversos cuantificadores, entropías, por ejemplo. Sin embargo, una verdadera medida debería estar motivada por alguna razón física, es decir, la cantidad de entrelazamiento tendría que cuantificar, de alguna forma, una magnitud que pueda relacionarse con otras magnitudes físicas.

Hasta la fecha, los experimentos que investigan las superposiciones cuánticas y el entrelazamiento se ven obstaculizados por la decoherencia. Un sistema cuántico mantendría la coherencia si estuviera perfectamente aislado, pero sería imposible manipularlo e investigarlo; si el aislamiento no es perfecto, en una medición, por ejemplo, la coherencia se compartiría con el entorno y parecería que se pierde con el tiempo, este proceso es llamado *decoherencia cuántica*. La decoherencia se puede ver como la pérdida de información de un sistema con el entorno (frecuentemente modelado como un baño térmico) [53], ya que cada sistema está acoplado con el estado energético de su entorno. Al ver esto de una forma aislada, resulta que la dinámica del sistema no es unitaria (pero el sistema y el entorno juntos, evolucionan de forma unitaria) [54], por lo que la dinámica del sistema por sí sola es irreversible. Como ocurre con cualquier acoplamiento, se genera entrelazamiento entre el sistema y el entorno.

En este capítulo el estado de vacío y los valores de expectación de vacío para las observables cuánticas como el hamiltoniano y la carga son obtenidos. Concluyendo con el estado de vacío evolucionado construido como dos estados de dos modos entrelazados.

4.1. El vacío como un estado coherente

El vacío va a ser definido como un estado coherente para los siguientes operadores que involucran al menos un operador de aniquilación [14],

$$J^+ \{ \hat{a}_1(\mathbf{k}_1), \hat{b}_1(\mathbf{k}_2) \} |0\rangle = J^+ \lambda_1 |0\rangle, \quad J^+ \{ \hat{a}_2(\mathbf{k}_1), \hat{b}_2(\mathbf{k}_2) \}^\dagger |0\rangle = J^+ \lambda_2 |0\rangle, \quad (4.1)$$

$$J^+ \{ \hat{a}_{1,2}(\mathbf{k}_1), \hat{b}_{1,2}^\dagger(\mathbf{k}_2) \} |0\rangle = J^+ \lambda_3 |0\rangle, \quad J^+ \{ \hat{a}_{1,2}^\dagger(\mathbf{k}_1), \hat{b}_{1,2}(\mathbf{k}_2) \} |0\rangle = J^+ \lambda_4 |0\rangle, \quad (4.2)$$

para todo $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ y λ_{1-4} son elementos del anillo \mathbb{P} ; por lo que, para estas combinaciones cuadráticas de operadores, el vacío es un estado propio, pudiendo así determinar la acción de las proyecciones $J^{+,-}$ de las observables sobre el vacío. Con esta definición de vacío la acción de observables como el hamiltoniano y operador de carga están bien definidas. Por otro lado, la acción de la proyección de J^- de las observables sobre el estado de vacío, genera un estado simetrizado en los operadores

de creación,

$$\begin{aligned} J^- \{ \hat{\mathbf{a}}_1(\mathbf{k}_1), \hat{\mathbf{b}}_1(\mathbf{k}_2) \}^\dagger |0\rangle &= J^- \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(\mathbf{k}_1) \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(\mathbf{k}_2) |0\rangle + J^- \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(\mathbf{k}_2) \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(\mathbf{k}_1) |0\rangle \\ &= J^- (|{}^1\mathbf{a}_{k_1}, {}^1\mathbf{b}_{k_2}\rangle + |{}^1\mathbf{b}_{k_2}, {}^1\mathbf{a}_{k_1}\rangle), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$J^- \{ \hat{\mathbf{a}}_2(\mathbf{k}_1), \hat{\mathbf{b}}_2(\mathbf{k}_2) \}^\dagger |0\rangle = J^- (|{}^2\mathbf{a}_{k_1}, {}^2\mathbf{b}_{k_2}\rangle + |{}^2\mathbf{b}_{k_2}, {}^2\mathbf{a}_{k_1}\rangle); \quad (4.4)$$

la notación para los estados excitados dada en (4.3), dice que el primer estado contiene un bosón \mathbf{b} con momento \mathbf{k}_2 y un bosón \mathbf{a} con momento \mathbf{k}_1 , de manera similar para (4.4); dado que los operadores \mathbf{a}_1^\dagger y \mathbf{b}_1^\dagger no conmutan, los bosones \mathbf{a} y los bosones \mathbf{b} son distinguibles, así, los dos estados superpuestos en la expresión (4.3) son distinguibles, similarmente para la expresión en (4.4). Tomando en cuenta que en los estados simetrizados (4.3) y (4.4), los bosones pueden ser intercambiados.

Para obtener los valores de expectación del vacío correspondientes al hamiltoniano y al operador de carga, respectivamente, donde son utilizadas las expresiones dadas en (4.1) y (4.2), obteniendo

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\mathcal{H}} | 0 \rangle &= i\pi N^2 \langle 0 | (J^+ \lambda_1 + c.c. + J^+ \lambda_3 + c.c.) | 0 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} H_{k^+} dk \\ &\quad + i\pi N^2 \langle 0 | (J^+ \lambda_4 + c.c. + J^+ \lambda_2 + c.c.) | 0 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} H_{k^-} dk, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{Q} | 0 \rangle &= \pi N^2 \langle 0 | (J^+ \lambda_1 - c.c. + J^+ \lambda_3 - c.c. \\ &\quad + J^+ \lambda_4 - c.c. + J^+ \lambda_2 - c.c.) | 0 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} Q_k dk. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Las posibles divergencias de estos valores de expectación pueden ser controladas al fijar $\lambda_{1-4} = 0$. Ahora, al considerar

$$\lambda_1 = \lambda_{\text{I}} + j\lambda_{\text{II}}, \quad \lambda_2 = \lambda_{\text{III}} + j\lambda_{\text{IV}}, \quad (4.7)$$

$$\lambda_3 = \lambda_{\text{V}} + j\lambda_{\text{VI}}, \quad \lambda_4 = \lambda_{\text{VII}} + j\lambda_{\text{VIII}}; \quad (4.8)$$

se tiene,

$$J^+ \lambda_1 + c.c. = \lambda_{\text{I}} + \lambda_{\text{II}}, \quad J^+ \lambda_1 - c.c. = j(\lambda_{\text{I}} + \lambda_{\text{II}}); \quad (4.9)$$

similarmente para las demás λ' s. La condición $\lambda_I = -\lambda_{II}$ y, de manera similar con el resto de λ' s, conduce a la desaparición de estos valores de expectación del vacío, esto corresponde al caso en que $\lambda_n \sim J^-$ y, por lo tanto, a una solución que desaparece para el valor propio con la forma $J^+(J^-\lambda_{1-4}) = 0$ en las expresiones (4.1) y (4.2).

Por otro lado, además de controlar las divergencias de los valores de expectación cuando λ' s son cero, esto también causa que no exista evolución, por lo tanto, para que el vacío pueda evolucionar, se requiere encender al menos una λ para cada término en los valores de expectación, por lo que se considera λ_1 y $\lambda_2 \neq 0$, entonces,

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{\mathcal{H}}|0\rangle &= \pi N^2 \langle 0|0\rangle (J^+\lambda_1 + c.c.) \int_{-\infty}^{\infty} H_{k^+} dk \\ &+ i\pi N^2 \langle 0|0\rangle (J^+\lambda_2 + c.c.) \int_{-\infty}^{\infty} H_{k^-} dk \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\langle 0|\hat{Q}|0\rangle = 2\pi N^2 \langle 0|0\rangle [(J^+\lambda_1 - c.c.) + (J^+\lambda_2 - c.c.)] \int_{-\infty}^{\infty} \omega_k dk. \quad (4.11)$$

4.2. Estados entrelazados

Al considerar las definiciones del vacío en (4.1) y (4.2), la acción del operador de evolución en su forma (3.5), conduce a dos estados de dos modos entrelazados,

$$\begin{aligned} |0(t)\rangle &\equiv e^{j\hat{\mathcal{H}}t+i\hat{\mathcal{H}}t} |0\rangle = \\ &\exp \left[(i-1)\pi N^2 J^+ t \lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} H_{k^+} dk + (-i-1)\pi N^2 J^- t \int_{-\infty}^{\infty} H_{k^+} dk \left\{ \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(k), \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-k) \right\} \right. \\ &\left. + (i-1)\pi N^2 J^+ t \lambda_2 \int_{-\infty}^{\infty} H_{k^-} dk + (-i-1)\pi N^2 J^- t \int_{-\infty}^{\infty} H_{k^-} dk \left\{ \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(k), \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-k) \right\} \right] |0\rangle. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Este estado representa un estado normalizado para cualquier t siempre que el vacío original esté normalizado,

$$\langle 0(t)|0(t)\rangle \equiv \langle 0|e^{-(j\hat{\mathcal{H}}t+i\hat{\mathcal{H}}t)} \cdot e^{(j\hat{\mathcal{H}}t+i\hat{\mathcal{H}}t)} |0\rangle = \langle 0|0\rangle. \quad (4.13)$$

También, el estado evoluciona siempre alineado con el estado de vacío original,

$$\begin{aligned}
\langle 0|0(t)\rangle = & \exp \left[-tN^2\pi \left((\lambda_I + \lambda_{II}) \int_{-\infty}^{\infty} H_{k^+} d\mathbf{k} + (\lambda_{III} + \lambda_{IV}) \int_{-\infty}^{\infty} H_{k^-} d\mathbf{k} \right) \right] \\
& \cdot \left[\cos \left(-tN^2\pi \left((\lambda_I + \lambda_{II}) \int_{-\infty}^{\infty} H_{k^+} d\mathbf{k} + (\lambda_{III} + \lambda_{IV}) \int_{-\infty}^{\infty} H_{k^-} d\mathbf{k} \right) \right) \right. \\
& \left. + i \sin \left(-tN^2\pi \left((\lambda_I + \lambda_{II}) \int_{-\infty}^{\infty} H_{k^+} d\mathbf{k} + (\lambda_{III} + \lambda_{IV}) \int_{-\infty}^{\infty} H_{k^-} d\mathbf{k} \right) \right) \right]. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

La exponencial real en (4.14) es la que gobierna, ya que la exponencial imaginaria esta acotada. Enfocando la atención sobre la exponencial real y considerando que $\lambda_{III} = \lambda_I$ y $\lambda_{IV} = \lambda_{II}$, se tiene,

$$\exp \left[-t \left(N^2\pi(\lambda_I + \lambda_{II}) \int_{-\infty}^{\infty} (H_{k^+} + H_{k^-}) d\mathbf{k} \right) \right].$$

La integral diverge, por lo que la dependencia está en las λ' s, teniendo los casos:

1. Si $\lambda_I = -\lambda_{II}$, la exponencial es 1.
2. Si $\lambda_I + \lambda_{II} > 0$, se tiene que cuando $t \rightarrow \infty$, la exponencial tiende a cero.
3. Si $\lambda_I + \lambda_{II} < 0$, se tiene que cuando $t \rightarrow \infty$, la exponencial tiende a infinito.

Entonces, la expresión (4.14) es diferente de cero cuando se tienen los casos 1 y 3. El caso restante conduce a la evolución temporal fuera del espacio original de estados,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-t \Sigma_k \Gamma_k) = 0.$$

Esto es lo que sucede en la mecánica cuántica donde solo se consideran sistemas con un número finito de grados de libertad. En el límite de un volumen infinito se tienen infinitas representaciones unitariamente desiguales. Por otro lado, también se puede considerar el límite $V \rightarrow \infty$, usando la relación de límite continuo habitual $\Sigma_k \rightarrow (V/(2\pi)^3) \int d^3k$, en el límite de un volumen infinito se tiene (para $\int d^3k \Gamma_k$ finito y positivo),

$$\langle 0|0(t)\rangle \xrightarrow{V \rightarrow \infty} 0, \quad \forall t$$

La desigualdad unitaria expresada por la ecuación anterior, significa que en el límite de volumen infinito, el estado $|0(t)\rangle$, no se puede expresar en términos del estado

$|0\rangle$. Teniendo la transición a la física no perturbativa. La desigualdad unitaria entre $|0(t)\rangle$ y $|0\rangle$ surge, ya que se desprecian las contribuciones del orden de $(1/V)_{V \rightarrow \infty}$. Estas contribuciones infrarrojas (o $(1/V)_{V \rightarrow \infty}$) están necesariamente ausentes debido a la "localidad" de cualquier observación de laboratorio, donde el volumen V siempre se puede considerar extremadamente grande (infinito) con respecto a la finitud de la región espacial cubierta por las observaciones. Por lo tanto, la localidad del formalismo de la teoría cuántica de campos es exactamente el origen de la "diferencia" (desigualdad unitaria y, por lo tanto diversidad física observable) entre el estado entrelazado $|0(t)\rangle$ y el no entrelazado $|0\rangle$. En conclusión, se ha llegado al teorema de Von Neumann, que establece que para sistemas con un número finito de grados de libertad, que es siempre el caso de la mecánica cuántica, las representaciones de las relaciones de conmutación canónicas son todas unitariamente equivalentes entre sí y, por tanto, físicamente equivalentes. En este sentido, la mecánica cuántica solo puede describir sistemas en una única fase física especificada. En teoría cuántica de campos, el número de grados de libertad es infinito y el teorema de Von Neumann no se cumple, es decir, existen infinitas representaciones unitariamente desiguales de las relaciones de conmutación canónicas. La existencia de muchas representaciones unitariamente desiguales permite la descripción de sistemas que pueden estar en fases físicamente diferentes bajo diferentes condiciones de contorno [55–57].

Similarmente para dos tiempos diferentes t, t' , la descomposición del operador de evolución temporal dado en (4.13) es,

$$\begin{aligned}
& e^{-(j\hat{H}t' + i\hat{H}t')} \cdot e^{(j\hat{H}t + i\hat{H}t)} = \\
& \exp \left[(i-1)J^+ \left(\{\hat{\mathbf{a}}_1(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_1(-\mathbf{k})\} + \{\hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-\mathbf{k}), \hat{\mathbf{a}}_1(\mathbf{k})\} + \{\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_1(-\mathbf{k})\} + \{\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-\mathbf{k})\} \right) (t-t') \right. \\
& \left. + (-i-1)J^- \left(\{\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-\mathbf{k})\} + \{\hat{\mathbf{b}}_2(-\mathbf{k}), \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(\mathbf{k})\} + \{\hat{\mathbf{a}}_2(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-\mathbf{k})\} + \{\hat{\mathbf{a}}_2(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_2(-\mathbf{k})\} \right) (t-t') \right]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\langle 0(t')|0(t)\rangle = & \exp \left(-N^2\pi(\lambda_1 + c.c.)(t-t') \int_{-\infty}^{\infty} H_{k+} d\mathbf{k} - N^2\pi(\lambda_2 + c.c.)(t-t') \int_{-\infty}^{\infty} H_{k-} d\mathbf{k} \right) \\
& \cdot \left[\cos \left(-N^2\pi(\lambda_1 + c.c.)(t-t') \int_{-\infty}^{\infty} H_{k+} d\mathbf{k} - N^2\pi(\lambda_2 + c.c.)(t-t') \int_{-\infty}^{\infty} H_{k-} d\mathbf{k} \right) \right. \\
& \left. + i \sin \left(-N^2\pi(\lambda_1 + c.c.)(t-t') \int_{-\infty}^{\infty} H_{k+} d\mathbf{k} - N^2\pi(\lambda_2 + c.c.)(t-t') \int_{-\infty}^{\infty} H_{k-} d\mathbf{k} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

la igualdad o desigualdad de esta última expresión, está basada en los mismos argumentos que se utilizaron para la ecuación (4.14).

4.2.1. Entrelazamiento

Para seguir con los estados entrelazados, a continuación se dará una definición de entrelazamiento. El entrelazamiento es una característica de los sistemas cuánticos compuestos. En el caso más simple, se tienen dos sistemas y el sistema total se llama bipartito.

En lo que sigue, \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B son dos espacios de Hilbert de dimensión finita [58].

Definición. Sea η un vector en $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. El vector η se llama

1. *Factorizado* si $\eta = \phi \otimes \psi$ para algunos vectores $\phi \in \mathcal{H}_A$, $\psi \in \mathcal{H}_B$,
2. *Entrelazado* de otra manera.

El siguiente ejemplo ofrece una ilustración concreta de vectores entrelazados. Sea $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$ dos vectores unitarios ortogonales y sean α, β dos números complejos diferentes de cero, tales que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. El vector unitario

$$\eta = \alpha\varphi_1 \otimes \varphi_1 + \beta\varphi_2 \otimes \varphi_2 \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, \quad (4.17)$$

esta entrelazado. Para ver esto, tómesese vectores unitarios $\varphi_3, \varphi_4, \dots \in \mathcal{H}$, tal que el conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ es una base orto-normal para \mathcal{H} . Entonces un vector factorizado general en $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ toma la forma:

$$\phi \otimes \psi = \left(\sum_j c_j \varphi_j \right) \otimes \left(\sum_k d_k \varphi_k \right),$$

donde c_1, c_2, \dots y d_1, d_2, \dots son números complejos. Comparando esta expresión con (4.17), se obtienen las condiciones

$$c_1 d_1 = \alpha, \quad c_2 d_2 = \beta, \quad c_1 d_c = c_2 d_1 = 0.$$

Al multiplicar las dos primeras y las dos últimas ecuaciones juntas y observar que los lados izquierdos coinciden, se deduce que $\alpha\beta = 0$. Pero esto contradice el hecho de que tanto α como β fueron elegidos como números distintos de cero y, por lo tanto, η está entrelazado.

Ahora, se define un estado entrelazado como un estado del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ que no se puede expresar como un producto tensorial de estados en los diferentes espacios \mathcal{H}_i . Un ejemplo, es el de dos objetos con dos niveles que forman un estado de Bell [59]:

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle) \neq |a\rangle \otimes |b\rangle. \quad (4.18)$$

El significado de que dos objetos estén entrelazados es que no son independientes entre sí, sino que entre ellos existen correlaciones. Retomando el ejemplo anterior, cuando se realiza una medición sobre el primer estado y se obtiene el valor $|0\rangle$, en automático se sabe que el segundo estado tendrá el valor $|1\rangle$ o viceversa. El entrelazamiento dice que, aunque se tenga el conocimiento completo de un sistema cuántico, eso no implica que se tenga un conocimiento completo de cada una de sus partes por separado [60].

Regresando a la obtención de los estados entrelazados de la formulación presente, hasta este momento se ha considerado que $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \neq 0$; sin embargo, note el estado (4.12), que es donde se tiene a la dinámica del entrelazamiento, construida en la dirección J^- , donde se encuentran los estados excitados. A partir de aquí se impone la restricción $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, por lo que el estado (4.12), queda escrito como:

$$\begin{aligned} e^{j\hat{\mathcal{H}}t+i\hat{\mathcal{H}}t} |0\rangle &= \\ \exp \left[(-i-1)N^2\pi J^-t \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} H_{k+} \left\{ \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-\mathbf{k}) \right\} + (-i-1)N^2\pi J^-t \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} H_{k-} \left\{ \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-\mathbf{k}) \right\} \right] |0\rangle \\ &= |0\rangle + J^- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\int_{-\infty}^{\infty} {}^1f \left\{ \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-\mathbf{k}) \right\} d\mathbf{k} + \int_{-\infty}^{\infty} {}^2f \left\{ \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-\mathbf{k}) \right\} d\mathbf{k} \right)^n |0\rangle \\ &= |0\rangle - J^- \left[\int_{-\infty}^{\infty} {}^1f (|{}^1\mathbf{a}_k, {}^1\mathbf{b}_{-k}\rangle + |{}^1\mathbf{b}_{-k}, {}^1\mathbf{a}_k\rangle) d\mathbf{k} + \int_{-\infty}^{\infty} {}^2f (|{}^2\mathbf{a}_k, {}^2\mathbf{b}_{-k}\rangle + |{}^2\mathbf{b}_{-k}, {}^2\mathbf{a}_k\rangle) d\mathbf{k} + \dots \right] |0\rangle, \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde:

$${}^1f \equiv (i+1)\pi N^2 H_{k+} t, \quad {}^2f \equiv (i+1)\pi N^2 H_{k-} t, \quad (4.20)$$

las funciones H 's están dadas en (3.3), además se hizo uso de la notación para estados excitados dada en (4.3) y (4.4) y se hizo uso la expansión dada en (1.19). Este estado está entrelazado en los momentos, ya que no se pueden factorizar en un producto de modos únicos.

4.2.2. Estado entrelazado sin disipación

Anteriormente, el estado dado en (4.12), describió un estado entrelazado incluso con un parámetro disipativo γ que no aparece. Ahora, retomándolo y, con $\gamma = 0$, las funciones dadas en (3.3) son:

$$H_{k+} = 2(k^2 + m^2), \quad H_{k-} = 2m^2, \quad (4.21)$$

por lo que, para el estado general (4.12) se obtiene,

$$\begin{aligned} |0(t)\rangle = \exp \left[(-i - 1)2\pi N^2 J^- t \int_{-\infty}^{\infty} (k^2 + m^2) \left\{ \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-\mathbf{k}) \right\} d\mathbf{k} \right. \\ \left. + (-i - 1)2\pi m^2 N^2 J^- t \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-\mathbf{k}) \right\} d\mathbf{k} \right] |0\rangle. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Al hacer uso de la expansión (1.19) y definiendo,

$${}^{1\gamma=0}f \equiv 2\pi(i + 1)N^2 J^- t(k^2 + m^2), \quad {}^{2\gamma=0}f = 2\pi(i + 1)N^2 J^- t m^2, \quad (4.23)$$

se tiene,

$$\begin{aligned} |0(t)\rangle = |0\rangle - J^- \left[\int_{-\infty}^{\infty} {}^{1\gamma=0}f (|{}^1\mathbf{a}_k, {}^1\mathbf{b}_{-k}\rangle + |{}^1\mathbf{b}_{-k}, {}^1\mathbf{a}_k\rangle) d\mathbf{k} \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} {}^{2\gamma=0}f (|{}^2\mathbf{a}_k, {}^2\mathbf{b}_{-k}\rangle + |{}^2\mathbf{b}_{-k}, {}^2\mathbf{a}_k\rangle) d\mathbf{k} \dots \right] |0\rangle. \end{aligned} \quad (4.24)$$

La ecuación (4.24) es el caso particular de (4.19) cuando $\gamma = 0$. El entrelazamiento está presente incluso en ausencia de disipación. En teoría cuántica de campos la noción de entrelazamiento entra de forma natural a través de la estructura de estado coherente del estado de vacío [56].

4.2.3. Estado entrelazado con disipación

Un estado con disipación se puede determinar para el estado entrelazado general dado en (4.12). Ahora las funciones dadas en (3.3) con $\gamma \neq 0$ son,

$$H_{k+} = 2(k^2 + m^2) - \frac{\gamma^2}{2} + i\gamma\omega_k, \quad H_{k-} = 2m^2 - \frac{\gamma^2}{2} + i\gamma\omega_k, \quad (4.25)$$

por lo que el estado (4.12) queda escrito como:

$$\begin{aligned}
|0(t)\rangle = \exp \left[(-i-1)\pi N^2 J^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} \left(2(k^2 + m^2) + i\gamma\omega_k - \frac{\gamma^2}{2} \right) \{ \hat{a}_1^\dagger(\mathbf{k}), \hat{b}_1^\dagger(-\mathbf{k}) \} d\mathbf{k} \right. \\
\left. + (-i-1)\pi N^2 J^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} \left(2m^2 - \frac{\gamma^2}{2} + i\gamma\omega_k \right) \{ \hat{a}_2^\dagger(\mathbf{k}), \hat{b}_2^\dagger(-\mathbf{k}) \} d\mathbf{k} \right] |0\rangle.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Usando nuevamente la expansión (1.19), y definiendo

$${}^1_\gamma f \equiv (i+1)\pi N^2 t \left(2(k^2 + m^2) - \frac{\gamma^2}{2} + i\gamma\omega_k \right), \quad {}^2_\gamma f \equiv (i+1)\pi N^2 t \left(2m^2 - \frac{\gamma^2}{2} + i\gamma\omega_k \right) \tag{4.27}$$

la expresión (4.26) queda como,

$$\begin{aligned}
|0(t)\rangle = |0\rangle - J^{-} \left[\int_{-\infty}^{\infty} {}^1_\gamma f (|{}^1\mathbf{a}_k, {}^1\mathbf{b}_{-k}\rangle + |{}^1\mathbf{b}_{-k}, {}^1\mathbf{a}_k\rangle) d\mathbf{k} \right. \\
\left. + \int_{-\infty}^{\infty} {}^2_\gamma f (|{}^2\mathbf{a}_k, {}^2\mathbf{b}_{-k}\rangle + |{}^2\mathbf{b}_{-k}, {}^2\mathbf{a}_k\rangle) d\mathbf{k} + \dots \right] |0\rangle.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Este estado se reduce consistentemente al estado (4.24) cuando no se tiene al factor disipativo ($\gamma = 0$).

Lo que distingue a los estados entrelazados de los estados producto, es el poder predictivo que se tiene para mediciones locales sobre las partes. Para estados producto, se tiene máxima información sobre las partes del sistema, mientras que para estados entrelazados se tiene información no-máxima. Además, cuando se tiene un sistema puro, la condición necesaria y suficiente para que dos de sus partes estén entrelazadas, es que sus matrices reducidas correspondan a estados combinados. Esto permite elaborar diferentes medidas de entrelazamiento, como la entropía de entrelazamiento. En la actualidad, el entrelazamiento se concibe como un recurso físico que puede generarse, manipularse y utilizarse para realizar alguna tarea.

Conclusiones

En la formulación presente, no se pueden seguir los pasos de la cuantización de un oscilador armónico ya que, al estar construida en un anillo hiperbólico, la estructura algebraica de éste pone cierta limitación al identificar simetrías del sistema y el plano hiperbólico. Como consecuencia directa de la estructura algebraica del anillo hiperbólico, es la presentación de nuevas relaciones de conmutación, las cuales conducen a una teoría de campo no conmutativa; además, muestran que la cuantización es no canónica en el sentido que los conmutadores de campo no satisfacen las relaciones de conmutación canónica usuales.

En esta formulación no habrá una teoría de campo libre, necesariamente las interacciones están presentes en el modelo más simple, esto es porque se tiene la cantidad invariante más sencilla que se puede construir en \mathbb{H} , es decir, la norma. Entonces, cuando se tiene al lagrangiano construido de forma hiper-compleja, éste se puede re-interpretar en términos de las dos variables de campo hiper-complexificadas $(\Omega, \bar{\Omega})$ con la norma $\xi\bar{\xi}$. Por lo que la simetría adicional que surge al generalizar el campo Ω es el grupo $U(1) \times SO(1, 1)$.

Una de las mayores dificultades que se presenta al estudiar sistemas con disipación en la mecánica cuántica que involucran duplicación de campos, es que las reglas de conmutación canónicas no se cumplen debido a la evolución temporal de la disipación [61]. En la formulación de la teoría presente, la evolución temporal se desvanece debido a la inmersión de la teoría en el anillo.

El esquema estándar se basa en la cuantización del oscilador armónico, donde los conmutadores $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ y $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] \neq 0$ son imprescindibles, así que los términos disipativos se mantienen; en la formulación presente no aparecen dichos conmutadores. Para la cuantización estándar, el conmutador $[\hat{a}(k), \hat{b}(k')] = 0$; sin embargo, en la formulación

presente se mantiene, es decir, $[\hat{a}(k), \hat{b}(k')] \neq 0$, así que los demás conmutadores de campo son dependientes de dicho conmutador.

Para la formulación presente, hay dependencia tanto temporal como de la interacción γ entre el entorno y el sistema de interés en las integrales resultantes de los conmutadores de campo. Esto es una carencia en las formulaciones ya realizadas sobre el tema, donde los conmutadores de campo son funciones delta de Dirac en n -dimensiones.

Ya que se obtuvo una carga conservada, se identifica un potencial químico con esta carga, que a su vez, se determina una función de gran partición con la duplicación de grados de libertad en el formalismo de la teoría del doble campo. La nueva simetría continua implica un cambio cualitativo en la construcción de la función de partición correspondiente, incluye ahora el término correspondiente a la carga conservada; este nuevo término no se considera en los tratamientos anteriores.

La definición de vacío que se utilizó está construida con transformaciones de Bogoliubov en [14]; en general, la duplicación de los grados de libertad es intrínseca a la transformación de Bogoliubov, de modo que se maneja un sistema duplicado cada vez que se trabaja con estas transformaciones. Además, se observa que la duplicación de los grados de libertad en teoría cuántica de campos, permite parametrizar la representación unitariamente inequivalente de las relaciones canónicas de conmutación por un tiempo t , y por tanto, la evolución temporal se describe en términos de trayectorias en el espacio de representaciones.

Apéndices

Apéndice A

La integral dada en (2.30) tiene la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} i\sqrt{k^2 + a} e^{ikx} dk \quad (4.29)$$

Para su resolución, se considera que $a > 0$ y sea $a = b^2 > 0$. Denotando a la integral en cuestión por

$$I(b, x) = \int_{-\infty}^{\infty} i(k^2 + b^2)^{1/2} e^{ikx} dk, \quad (4.30)$$

y se tiene

$$\frac{\partial}{\partial b} I(b, x) = ib \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{k^2 + b^2}} dk. \quad (4.31)$$

Ahora, surge una nueva integral con la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + u)^{1/2}} e^{ikx} dk. \quad (4.32)$$

Esta integral no converge absolutamente, pero sí converge para la mayoría de los valores de u . Primero, suponiendo que $u = v^2 > 0$. Es bien sabido que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{k^2 + v^2}} dk = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it|b|x}}{\sqrt{t^2 + 1}} dt = 2K_0(|b|x) \quad (4.33)$$

donde $K_0(x)$ es una función de Bessel modificada. La integral diverge cuando $b \rightarrow 0$. Se puede producir la integral en cuestión (3) a partir de ésta tomando una derivada

con respecto a x que da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ik e^{ikx}}{\sqrt{k^2 + b^2}} dk = 2 \frac{d}{dx} K_0(|b|x) = -2|b| K_1(|b|x) \quad (4.34)$$

que de nuevo converge muy bien para cualquier valor distinto de cero de x , b . También la integral converge para $a < 0$ ya que los puntos de ramificación en el eje real son integrables. Usando este resultado, se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial b} I(b, x) = 2i|b| K_0(|b|x), \quad (4.35)$$

ahora, tratando a x como una constante y sustituyendo $b \rightarrow bx = c$,

$$\frac{\partial}{\partial c} I(c, x) = \frac{2i}{x^2} \int c K_0(c) dc = \frac{2i}{x^2} (-c, K_1(c)), \quad (4.36)$$

siendo nuevamente $K_1(c)$ una función de Bessel modificada.

Insertando el valor de $c = bx$, se tiene

$$I(b, x) = -\frac{2ib}{x} K_1(|b|x) \quad (4.37)$$

Apéndice B. Hamiltoniano

El primer anticonmutador en el hamiltoniano es:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N^2} \int_{L_1}^{L_2} \left\{ \hat{\Pi}_\Omega(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}_\Omega(\mathbf{x}', t) \right\} dx = \\ & i \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk'_2 (\omega_{k'_2} \omega_{k_1}) \left\{ e^{i(\omega_{k_1} - \omega_{k'_2})t} \left(\frac{e^{-i(k_1 + k'_2)L_1} - e^{-i(k_1 + k'_2)L_2}}{k_1 + k'_2} \right) [J^+ \{\hat{\mathbf{a}}_1(k_1), \hat{\mathbf{b}}_1(-k'_2)\} + J^- \{\hat{\mathbf{a}}_2(k_1), \hat{\mathbf{b}}_2(-k'_2)\}] \right. \\ & \quad + e^{i(\omega_{k'_2} - \omega_{k_1})t} \left(\frac{e^{i(k_1 + k'_2)L_1} - e^{i(k_1 + k'_2)L_2}}{k_1 + k'_2} \right) [J^+ \{\hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-k'_2), \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(k_1)\} + J^- \{\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(k_1), \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-k'_2)\}] \\ & \quad + e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k'_2})t} \left(\frac{e^{i(k_1 - k'_2)L_1} - e^{i(k_1 - k'_2)L_2}}{k_1 - k'_2} \right) [J^+ \{\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(k_1), \hat{\mathbf{b}}_1(-k'_2)\} + J^- \{\hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-k'_2), \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(k_1)\}] \\ & \quad \left. + e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k'_2})t} \left(\frac{e^{-i(k_1 - k'_2)L_1} - e^{-i(k_1 - k'_2)L_2}}{k_1 - k'_2} \right) [J^+ \{\hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-k'_2), \hat{\mathbf{a}}_1(k_1)\} + J^- \{\hat{\mathbf{a}}_2(k_1), \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-k'_2)\}] \right\} \end{aligned} \quad (4.38)$$

donde se tienen términos con la forma $\int e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}} dx^l$, esto es esencialmente un delta de Dirac, reduciendo el operador hamiltoniano a una sola integral. También se ha

considerado que $\omega_{k'_2} = \omega_{-k'_2}$. También se tiene el término,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{N^2} \int_{L_1}^{L^2} \{\partial_i \hat{\Omega}, \partial_i \hat{\Omega}^\dagger\} dx = \\
& i \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk'_2 \left[e^{i(\omega_{k_1} - \omega_{k'_2})t} (\{\hat{\mathbf{a}}_1(k_1), \hat{\mathbf{b}}_1(-k'_2)\} J^+ + \{\hat{\mathbf{b}}_2(-k'_2), \hat{\mathbf{a}}_2(k_1)\} J^-) \left(\frac{e^{-i(k_1+k'_2)L_1} - e^{i(k_1+k'_2)L_2}}{k_1+k'_2} \right) \right. \\
& \quad + e^{i(\omega_{k'_2} - \omega_{k_1})t} (\{\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(k_1), \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-k'_2)\} J^+ + \{\hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-k'_2), \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(k_1)\} J^-) \left(\frac{e^{i(k_1+k'_2)L_1} - e^{i(k_1+k'_2)L_2}}{k_1+k'_2} \right) \\
& \quad + e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k'_2})t} (-\{\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(k_1), \hat{\mathbf{b}}_1(-k'_2)\} J^+ - \{\hat{\mathbf{b}}_2(-k'_2), \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(k_1)\} J^-) \left(\frac{e^{i(k_1-k'_2)L_1} - e^{i(k_1+k'_2)L_2}}{k_1-k'_2} \right) \\
& \quad \left. + e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k'_2})t} (-\{\hat{\mathbf{a}}_1(k_1), \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-k'_2)\} J^+ - \{\hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-k'_2), \hat{\mathbf{a}}_2(k_1)\} J^-) \left(\frac{e^{-i(k_1-k'_2)L_1} - e^{-i(k_1-k'_2)L_2}}{k_1-k'_2} \right) \right] \tag{4.39}
\end{aligned}$$

y para otro término,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{N^2} \left(-\frac{\gamma^2}{4} + m^2 \right) \int_{L_1}^{L_2} \{\hat{\Omega}(\mathbf{x}, t), \hat{\Omega}^\dagger(\mathbf{x}', t)\} dx = \\
& i \left(-\frac{\gamma^2}{4} + m^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk'_2 \left\{ e^{i(\omega_{k_1} - \omega_{k'_2})t} \left(\frac{e^{-i(k_1+k'_2)L_1} - e^{-i(k_1+k'_2)L_2}}{k_1+k'_2} \right) [J^+ \{\hat{\mathbf{a}}_1(k_1), \hat{\mathbf{b}}_1(-k'_2)\} + J^- \{\hat{\mathbf{b}}_2(-k'_2), \hat{\mathbf{a}}_2(k_1)\}] \right. \\
& \quad + e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k'_2})t} \left(\frac{e^{-i(k_1-k'_2)L_1} - e^{-i(k_1-k'_2)L_2}}{k_1-k'_2} \right) [J^+ \{\hat{\mathbf{a}}_1(k_1), \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-k'_2)\} + J^- \{\hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-k'_2), \hat{\mathbf{a}}_2(k_1)\}] \\
& \quad + e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k'_2})t} \left(\frac{e^{i(k_1-k'_2)L_1} - e^{i(k_1-k'_2)L_2}}{k_1-k'_2} \right) [J^+ \{\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(k_1), \hat{\mathbf{b}}_1(-k'_2)\} + J^- \{\hat{\mathbf{b}}_2(-k'_2), \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(k_1)\}] \\
& \quad \left. + e^{i(\omega_{k'_2} - \omega_{k_1})t} \left(\frac{e^{i(k_1+k'_2)L_1} - e^{i(k_1+k'_2)L_2}}{k_1+k'_2} \right) [J^+ \{\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(k_1), \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-k'_2)\} + J^- \{\hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-k'_2), \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(k_1)\}] \right\} \tag{4.40}
\end{aligned}$$

por último,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{N^2} \left(-\frac{\gamma}{2} \right) \int_{L_1}^{L_2} (j\{\hat{\Omega}, \hat{\Pi}_\Omega\} + h.c.) dx = \\
& -\frac{\gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk'_2 \left\{ e^{i(\omega_{k_1} - \omega_{k'_2})t} \left(\frac{e^{-i(k_1+k'_2)L_1} - e^{-i(k_1+k'_2)L_2}}{k_1+k'_2} \right) [\omega_{k'_2} J^+ \{\hat{\mathbf{a}}_1(k_1), \hat{\mathbf{b}}_1(-k'_2)\} + \omega_{k_1} J^- \{\hat{\mathbf{b}}_2(-k'_2), \hat{\mathbf{a}}_2(k_1)\}] \right. \\
& \quad + e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k'_2})t} \left(\frac{e^{-i(k_1-k'_2)L_1} - e^{-i(k_1-k'_2)L_2}}{k_1-k'_2} \right) [\omega_{k'_2} J^+ \{\hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-k'_2), \hat{\mathbf{a}}_1(k_1)\} + \omega_{k_1} J^- \{\hat{\mathbf{a}}_2(k_1), \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-k'_2)\}] \\
& \quad + e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k'_2})t} \left(\frac{e^{i(k_1-k'_2)L_1} - e^{i(k_1-k'_2)L_2}}{k_1-k'_2} \right) [\omega_{k'_2} J^+ \{\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(k_1), \hat{\mathbf{b}}_1(-k'_2)\} + \omega_{k_1} J^- \{\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(k_1), \hat{\mathbf{b}}_2(-k'_2)\}] \\
& \quad \left. + e^{i(\omega_{k'_2} - \omega_{k_1})t} \left(\frac{e^{i(k_1+k'_2)L_1} - e^{i(k_1+k'_2)L_2}}{k_1+k'_2} \right) [\omega_{k'_2} J^+ \{\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(k_1), \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-k'_2)\} + \omega_{k_1} J^- \{\hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-k'_2), \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(k_1)\}] \right\} \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Apéndice C. Operador de carga

$$\begin{aligned}
\hat{Q} &= -\frac{j}{2} \int_{L_1}^{L_2} \left[j\{\hat{\Omega}, \hat{\Pi}_\Omega + c.c.\} dx \right. \\
&= -\frac{j}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk'_2 \left\{ iE_1 \left[i\omega_{k'_2} J^+ \{\hat{a}_1(k_1), \hat{b}_1(k'_2)\} + i\omega_{k_1} J^- \{\hat{b}_2(k'_2), \hat{a}_2(k_1)\} \right] \right. \\
&\quad + i\bar{E}_3 \left[i\omega_{k'_2} J^+ \{\hat{b}_2^\dagger(k'_2), \hat{a}_1(k_1)\} + i\omega_{k_1} J^- \{\hat{a}_2(k_1), \hat{b}_1^\dagger(k'_2)\} \right] \\
&\quad + iE_3 \left[i\omega_{k'_2} J^+ \{\hat{a}_2^\dagger(k_1), \hat{b}_1(k'_2)\} + i\omega_{k_1} J^- \{\hat{a}_1^\dagger(k_1), \hat{b}_2(k'_2)\} \right] \\
&\quad \left. + i\bar{E}_1 \left[i\omega_{k'_2} J^+ \{\hat{a}_2^\dagger(k_1), \hat{b}_2^\dagger(k'_2)\} + i\omega_{k_1} J^- \{\hat{b}_1^\dagger(k'_2), \hat{a}_1^\dagger(k_1)\} \right] + c.c. \right\} \\
&= -\frac{ji^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk'_2 (\omega_{k'_2} + \omega_{k_1}) \left\{ J^+ \left[\{\hat{a}_1(k_1), \hat{b}_1(-k'_2)\} E_1 + \{\hat{b}_2^\dagger(-k'_2), \hat{a}_1(k_1)\} \bar{E}_3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \{\hat{a}_2^\dagger(k_1), \hat{b}_1(-k'_2)\} E_3 + \{\hat{a}_2^\dagger(k_1), \hat{b}_2^\dagger(-k'_2)\} \bar{E}_1 \right] \right. \\
&\quad \left. + J^- \left[\{\hat{a}_1^\dagger(k_1), \hat{b}_1^\dagger(-k'_2)\} \bar{E}_1 + \{\hat{b}_2(-k'_2), \hat{a}_1^\dagger(k_1)\} E_3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \{\hat{a}_2(k_1), \hat{b}_1^\dagger(-k'_2)\} \bar{E}_3 + \{\hat{a}_2(k_1), \hat{b}_2(-k'_2)\} E_1 \right] \right\} \quad (4.42)
\end{aligned}$$

Al considerar la delta de Dirac dada por las E 's, se obtiene,

$$\begin{aligned}
\hat{Q}(L_1, L_2; t) &= \\
&-2i^2\pi j \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{k'_2} \left\{ J^+ \left[\{\hat{a}_1(\mathbf{k}_2), \hat{b}_1(-\mathbf{k}'_2)\} + \{\hat{b}_2^\dagger(-\mathbf{k}'_2), \hat{a}_1(\mathbf{k}'_2)\} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \{\hat{a}_2^\dagger(\mathbf{k}'_2), \hat{b}_1(-\mathbf{k}'_2)\} + \{\hat{a}_2^\dagger(\mathbf{k}'_2), \hat{b}_2^\dagger(-\mathbf{k}'_2)\} \right] \right. \\
&\quad \left. + J^- \left[\{\hat{a}_1^\dagger(\mathbf{k}'_2), \hat{b}_1^\dagger(-\mathbf{k}'_2)\} + \{\hat{b}_2(-\mathbf{k}'_2), \hat{a}_1^\dagger(\mathbf{k}'_2)\} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \{\hat{a}_2(\mathbf{k}'_2), \hat{b}_1^\dagger(-\mathbf{k}'_2)\} + \{\hat{a}_2(\mathbf{k}'_2), \hat{b}_2(-\mathbf{k}'_2)\} \right] \right\} dk'_2. \quad (4.43)
\end{aligned}$$

Apéndice D. $[\hat{\mathcal{H}}, \hat{Q}] = 0$

El operador hamiltoniano está dado en (3.4), y la carga está dada en (3.9), por lo que se tiene,

$$[\hat{\mathcal{H}}, \hat{Q}] = \hat{\mathcal{H}}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{\mathcal{H}} \quad (4.44)$$

donde el primer término es,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}\hat{Q} = & \\ & - (2i^3 N^4 \pi^2 j) \int_{-\infty}^{\infty} dk'_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 [H_{k'_2} \omega_{k'_2} (\mathbf{I} \cdot i) + H_{k'_2} \omega_{k'_2} (\mathbf{II} \cdot ii) + H_{-k'_2} \omega_{k'_2} (\mathbf{III} \cdot i) + H_{-k'_2} \omega_{k'_2} (\mathbf{IV} \cdot ii)] \end{aligned} \quad (4.45)$$

y el segundo término,

$$\begin{aligned} -\hat{Q}\hat{\mathcal{H}} = & \\ & (2i^3 N^4 \pi^2 j) \int_{-\infty}^{\infty} dk'_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 [\omega_{k'_2} H_{k'_2} (i \cdot \mathbf{I}) + \omega_{k'_2} H_{k'_2} (ii \cdot \mathbf{II}) + \omega_{k'_2} H_{-k'_2} (i \cdot \mathbf{III}) + \omega_{k'_2} H_{-k'_2} (ii \cdot \mathbf{IV})]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Con los valores correspondientes al operador hamiltoniano,

$$\mathbf{I} = J^+ \left(\{\hat{\mathbf{a}}_1(k'_2), \hat{\mathbf{b}}_1(-k'_2)\} + \{\hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-k'_2), \hat{\mathbf{a}}_1(k'_2)\} \right) \quad (4.47)$$

$$\mathbf{II} = J^- \left(\{\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(k'_2), \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-k'_2)\} + \{\hat{\mathbf{b}}_2(-k'_2), \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(k'_2)\} \right) \quad (4.48)$$

$$\mathbf{III} = J^+ \left(\{\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(k'_2), \hat{\mathbf{b}}_1(-k'_2)\} + \{\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(k'_2), \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-k'_2)\} \right) \quad (4.49)$$

$$\mathbf{IV} = J^- \left(\{\hat{\mathbf{a}}_2(k'_2), \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-k'_2)\} + \{\hat{\mathbf{a}}_2(k'_2), \hat{\mathbf{b}}_2(-k'_2)\} \right) \quad (4.50)$$

y para el operador de carga,

$$\begin{aligned} i = J^+ \left(\{\hat{\mathbf{a}}_1(k'_2), \hat{\mathbf{b}}_1(-k'_2)\} + \{\hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-k'_2), \hat{\mathbf{a}}_1(k'_2)\} \right. \\ \left. + \{\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(k'_2), \hat{\mathbf{b}}_1(-k'_2)\} + \{\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger(k'_2), \hat{\mathbf{b}}_2^\dagger(-k'_2)\} \right) \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} ii = J^- \left(\{\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(k'_2), \hat{\mathbf{b}}_1^\dagger(-k'_2)\} + \{\hat{\mathbf{b}}_2(-k'_2), \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger(k'_2)\} \right. \\ \left. + \{\hat{\mathbf{a}}_2(k'_2), \hat{\mathbf{b}}_1(-k'_2)\} + \{\hat{\mathbf{a}}_2(k'_2), \hat{\mathbf{b}}_2(-k'_2)\} \right), \end{aligned} \quad (4.52)$$

los demás términos que resultan del producto en (8) y (9), han desaparecido debido a que tienen la forma $J^+ J^- = 0$. Por lo tanto,

$$\left[\hat{\mathcal{H}}, \hat{Q} \right] = \hat{\mathcal{H}}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{\mathcal{H}} = 0 \quad (4.53)$$

Bibliografía

- [1] K. C. Ockeloen, E. Damskagg, Pirkkalainen, M. Asjad, A. Clerk, A. Massel, F. Woolley, and M. Sillanpaa, “*Stabilized entanglement of massive mechanical oscillators,*” LETTER, NATURE, vol. 556, 478, 2018.
- [2] H. Krauter, C. Muschik, J. Jensen, W. Wasilewski, J. Petersen, J. Cirac, and E. Polzik, “*Entanglement generated by dissipation and steady state entanglement of two macroscopic objects,*” PHYS. REV. LETT., vol. 107, 080503, 2011.
- [3] G. Policastro, D. Son, and A. Starinets, “*The Shear viscosity of strongly coupled $N=4$ supersymmetric Yang-Mills plasma,*” PHYS. REV. LETT., vol. 87, 081601, 2001.
- [4] P. Banerjee and B. Sathiapalan, “*Holographic Brownian motion in 1+1 dimensions,*” NUC.PHYS.B, vol. 884, pp. 74–105, 2014.
- [5] J. De Boer, V. Hubeny, M. Rangamani, and M. Shigemori, “*Brownian motion in $AdS/Cft,$ ” JHEP, 0907, vol. 094, 2009.*
- [6] M. Botta-Cantche, A. Gadelha, D. Marchioro, and D. Nedel, “*String in AdS black hole: a thermo field dynamic approach,*” PHYS.REV.D, vol. 86, 086006, 2012.
- [7] P. Banerjee and B. Sathiapalan, “*Zero temperature dissipation and holography,*” SPRINGER JOURNAL OF HIGH ENERGY PHYSICS, no. 89, 2016.
- [8] A. Gadelha, M. Botta-Cantcheff, D. Marchioro, and D. Nedel, “*Entanglement from dissipation and holographic interpretation,*” THE EUR. PHYS. JOUR. C, vol. 78 105, 2018.

- [9] P. Gao, D. Jafferis, and A. Wall, “*Traversable wormholes via a double trace deformation*,” SPRINGER, JOURNAL OF HIGH ENERGY PHYSICS, no. 151, 2017.
- [10] J. Maldacena, D. Stanford, and Z. Yang, “*Diving into traversable wormholes*,” FORTSCHR. PHYS., vol. 65(5), 1700034, 2017.
- [11] G. Astrakharchik and L. Pitaevski, “*Motion of a heavy impurity through a Bose-Einstein condensate*,” PHYS. REV. A, vol. 70, 013608, 2004.
- [12] P. Walmsley, “*Dissipation of quantum turbulence in the zero temperature limit*,” PHYS. REV. LETT., vol. 99, 265302, 2007.
- [13] P. Mohanty, E. Jariwala, and R. Webb, “*Intrinsic decoherence in mesoscopic systems*,” PHYS. REV. LETT., vol. 78, 3366, 1997.
- [14] R. Cartas Fuentevilla and A. Juárez Domínguez, “*Quantum field theory of a hyper-complex scalar field on a commutative ring*”. arxiv.org/pdf/1705.07981.pdf, 2017.
- [15] I. Yaglom, “*A Simple Non-Euclidean Geometry and its Physical Basis*”. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [16] G. Sobczyk, “*Spacetime vector analysis*,” PHYSICS LETTER, vol. 84 A, (1981) 45, 1981.
- [17] P. Fjelstad AMER. J. PHYS., 54, 416, 1986.
- [18] P. Reany ADV.APPL.CLIFFORD ALGEBRAS, vol. 3 (2), 121, 1993.
- [19] P. Capelli, Bull AMER. MATH. SOC., vol. 47, 584, 1941.
- [20] G. Mack and A. Salam ANN. PHYS. 53, 174, 1969.
- [21] G. Kunstatter, J. Moffat, and J. Malzan MATH. PHYS. 24, 886, 1983.
- [22] P. Hestenes, G. Reany, and G. Sobczyk ADV.APPL.CLIFFORD ALGEBRAS, vol. 1(1), 51, 1991.
- [23] A. Kwasniewski ADV. APPL. CLIFFORD ALGEBRAS, vol. 2 (1), 1992.

- [24] Y. Xuegang and Y. Xuequian ACTA MATH. SCI., vol. 15 (4), 435, 1995.
- [25] Y. Xuegang ADV. APPL. CLIFFORD ALGEBRAS, vol. 9 (1), 109, 1999.
- [26] P. Reany ADV. APPL. CLIFFORD ALGEBRAS, vol. 4 (1), 89, 1994.
- [27] P. Fjelstad and S. Gal ADV. APPL. CLIFFORD ALGEBRAS, vol. 8 (1), 47, 1998.
- [28] L. Wuming ADV. APPL. CLIFFORD ALGEBRAS, vol. 12 (1), 7, 2002.
- [29] Z. Zheng and Y. Xuegang ADV. APPL. CLIFFORD ALGEBRAS, vol. 14 (1), 207, 2004.
- [30] W. Band AMER. J. PHYS., 56, 469, 1988.
- [31] A. Ronveaux AMER. J. PHYS. LETTERS TO THE EDITOR, vol. 55, 392., 1987.
- [32] M. Hazewinkel and V. K. Nadiya Gubareni, “*Algebras, Rings and Modules*”, vol. Volume 1 of *Mathematics and Its Applications*. SPRINGER, 1 ed., 2004.
- [33] P. Poodiack Robert and J. LeClair Kevin, “*Theorems of Algebra for the Perplex*,” THE COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL, 2009.
- [34] H. Matsumura and M. Reid, “*Commutative ring theory*”. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1989.
- [35] G. Sobczyk, “*The Hyperbolic Number Plane*,” THE COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL, vol. 26, N.4, pp. 268–280, Sep. 1995.
- [36] P. Fjelstad, “*Extending Special Relativity via the Perplex Numbers*,” AM. J. PHYS., vol. 54, 416, 1986.
- [37] F. Catoni, D. Boccaletti, R. Cannata, V. Catoni, and P. Zampetti, “*Geometry of Minkowski Space-Time*”. SPRINGER BRIEFS IN PHYSICS, 2011.
- [38] S. Ulrych, “*Relativistic quantum physics with hyperbolic numbers*,” PHYSICS LETTERS, vol. B 625, pp. 313–323, 2005.
- [39] J. G. Ratcliffe, “*Foundations of Hyperbolic Manifolds*”. Graduate Texts in Mathematics 149, SPRINGER NEW YORK, 2nd ed ed., 1994.

- [40] P. Szekeres, “*A course in modern mathematical physics: groups, Hilbert space and differential geometry*”. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2004.
- [41] D. A. Wallace, “*Groups, Rings and Fields*”. Springer Undergraduate Mathematics Series, SPRINGER, 1998.
- [42] T. S. Blyth and E. F. Robertson, “*Algebra Through Practice: Volume 3, Groups, Rings and Fields: A Collection of Problems in Algebra with Solutions*”. Algebra Thru Practice, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1984.
- [43] J. Berra-Montiel, R. Cartas-Fuentevilla and O. Meza-Aldama, “*Hyperbolic ring based formulation for thermo field dynamics, quantum dissipation, entanglement, and holography,*” THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL C, vol. 80, 603, 2020.
- [44] H. Dekker, “*Classical and quantum mechanics of the damped harmonic oscillator,*” PHYS. REPORTS, vol. 80, 1, 1981.
- [45] R. Estrada and R. P. Kanwal, “*A distributional approach to asymptotics: theory and applications*”. BIRKHÄUSER ADVANCED TEXTS BASLER LEHRBÜCHER, 2 ed., 2002.
- [46] C. G. Joseph I. Kapusta, “*Finite-temperature field theory: principles and applications*”. Cambridge monographs on mathematical physics, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2 ed., 2006.
- [47] M. L. Bellac, “*Thermal Field Theory*”. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1996.
- [48] A. Alexander and D. Simons Ben, “*Condensed Matter Field Theory*”. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2 ed., 2010.
- [49] H. Kleinert, “*Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets*”. WORLD SCIENTIFIC PUBLISHING COMPANY, 5th revised ed., 2009.
- [50] H. Chen and X. Wu, “*Effective Mass Approximation for Tunneling States with Dissipation,*” PHYS. STAT. SOL (B), vol. 152,499, 1989.

- [51] G. Auletta, M. Fortunato, and G. Parisi, “*Quantum Mechanics*”. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1 ed., 2009.
- [52] E. M. Fierro, “*Tesis: Los estados coherentes en la descripción semi-clásica de la mecánica cuántica*”. UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA, 2004.
- [53] D. Bacon, “*Decoherence, Control and Symmetry in Quantum Computers*”. arxiv.org/abs/quant-ph/0305025, 2003.
- [54] D. A. Lidar and K. B. Whaley, “*Decoherence-Free Subspaces and Subsystems*,” SPRINGER, BERLIN, HEIDELBERG, vol. Irreversible Quantum Dynamics, pp. 83–120.
- [55] P. Jizba, B. Massimo and G. Vitiello, “*Quantum Field Theory and its Macroscopic Manifestations: Boson Condensation, Ordered Patterns and Topological Defects*”. IMPERIAL COLLEGE PRESS, 2011.
- [56] S. A. Sabbadini and G. Vitiello, “*Entanglement and Phase-Mediated Correlations in Quantum Field Theory: Application to Brain-Mind States*,” APPL. SCI., vol. 9(15), 3203, 2019.
- [57] G. Vitiello, E. Celeghini and M. Rasetti, “*Quantum Dissipation*,” ANNALS OF PHYSICS, vol. 215, pp. 156–170, 1992.
- [58] T. Heinosaari and M. Ziman, “*The Mathematical Language of Quantum Theory: From Uncertainty to Entanglement*”. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2011.
- [59] C. Gerry and P. Knight, “*Introductory Quantum Optics*”. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2004.
- [60] J. A. Gallo, “*Cálculo numérico en teoría cuántica de campos de la materia condensada*”. UNIVERSIDAD ZARAGOZA, 2015.
- [61] K. Trachenko, “*Quantum dissipation in a scalar field theory with gapped momentum states*,” SCIENTIFIC REPORTS, vol. 9, 6766, 2019.