BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

G-FIBRACIONES Y PRODUCTOS TORCIDOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

RAÚL JUÁREZ FLORES

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ALEXANDER BYKOV

PUEBLA, PUEBLA. 2015

Agradecimientos

He querido agradecer la particiación de todos los que me han acompañado a lo largo de todo este sendero. A mi hija Angélica Monserrat Juárez Jiménez, a mi esposa María de los Ángeles Jiménez García. A mis padres María y Cruz por su amor, y su respaldo absoluto.

Al Dr. Alexander Bykov, por darme la oportunidad de trabajar con él, por su paciencia y apoyo inconmensurable. A mis sinodales los doctores Oleg Okunev, Raúl Escobedo Conde, Ferando Macías Romero, Iván Martínez Ruiz y Hugo Juárez Anguiano, por sus comentarios a la tesis. Al CONACYT por darme una beca mientras estudié el doctorado. A todos mis amigos.

Para mi hija Angélica Monserrat Juárez Jiménez

Índice general

Introducción

La línea de investigación del presente trabajo de tesis está en la intersección de dos ramas de la topología: la teoría de homotopías y la teoría equivariante, conocida también como la teoría de grupos de transformaciones. Ésta última tiene sus fundamentos en los trabajos clásicos de S. Lie.

En la teoría equivariante, en general, se estudian los G-espacios y las G-funciones (o funciones G-equivariantes)[1]. La categoría G-TOP de G-espacios y G-funciones (obtenida para un grupo topológico G dado), es en cierto sentido "paralela" a la categoría TOP de espacios topológicos y funciones continuas. Naturalmente se pueden trasladar muchos conceptos de la teoría clásica de homotopías a la teoría equivariante y obtener de este modo nociones tales como homotopía equivariante o G-homotopía, retracto equivariante o G-retracto, espacio ANR equivariante o G-ANR, etc.

[1] En el Capítulo 1 de preliminares serán dadas todas las nociones básicas

El concepto de una G-fibración representa una versión equivariante del concepto de una fibración de Hurewicz. Más precisamente, una G-función se llama G-fibración si tiene la propiedad de levantamiento de G-homotopías para la clase de todos los G-espacios; esto es, si tiene la *propiedad equivariante de levantamiento derecho* (ERLP) con respecto a los G-encajes $X \times \{0\} \hookrightarrow X \times [0,1]$ (ver, por ejemplo, [12, p.53]).

Las G-fibraciones juegan un papel importante en la teoría equivariante de homotopías, tanto como las fibraciones de Hurewicz lo hacen en la teoría homotópica usual. Muchos de los hechos generales sobre las fibraciones pueden trasladarse a la teoría equivariante, sin embargo, nuestro especial interés son aquellos resultados acerca de G-fibraciones que no tienen análogos en la teoría de homotopía clásica.

Uno de los hechos notables en la teoría de G-espacios es el siguiente: *si H es un subgrupo cerrado de un grupo compacto de Lie G, entonces cada G-función*

$$p : E \to G/H$$

es una G-fibración. Las funciones de esta forma se conocen como funciones rebanadoras pues están involucradas en el Teorema clásico de rebanada y, también en su versión generalizada, el Teorema de la rebanada aproximativa. Estos teoremas aseguran la existencia de tubos alrededor de órbitas y desempeñan un papel muy importante en la teoría de grupos topológicos de transofomaciones. Nuestro interés al estudio de las G-funciones rebanadoras está motivado por el Teorema de la rebanada aproximativa cuando el grupo G no necesariamente es un grupo de Lie. La idea inicial del trabajo fue probar que las G-funciones rebanadoras siguen siendo G-fibraciones para alguna clase más amplia que la clase de grupos compactos de Lie. Hemos probado en la presente tesis que es así para la clase de grupos compactos metrizables. Este resultado, en particular, generaliza el Teorema de Madison-Mostert que dice que cada proyección $G/K \to G/H$ es una fibración (usual, es decir, no equvariante) de Hurewicz si G es un grupo compacto.

Cabe mencionar que el conocimiento de que una G-función es una G-fibración simplifica mucho su estudio. Por ejemplo, el hecho de que cada G-función $p : E \to G/H$ es una G-fibración para cada grupo compacto metrizable G (Corolario 2.6.5) nos permite dar la respuesta positiva a las Preguntas 4.4 y 4.5 planteadas por S.Antonyan en [5] (ver Proposiciones 3.4.4 y 3.4.6(2)).

Naturalmente, el estudio de las propiedades de las G-funciones rebanadoras está estrechamente relacionada con el estudio de los productos torcidos de la forma $G \times_H F$ en virtud de la afirmación elemental (para G un grupo compacto de Hausdorff): un G-espacio E se puede considerar como el producto torcido $G \times_H F$ para algún H-espacio F si y sólo si existe una G-función $E \to G/H$. En realidad, en la tesis probamos que el funtor de producto torcido $G \times_H -$ preserva fibraciones equivariantes para grupos compactos metrizables. Esto es una generalización de nuestro resultado mencionado arriba (cada función rebanadora es nada más que el resultado de aplicar el funtor del producto torcido a una función constante).

El presente trabajo se ha estructurado en tres capítulos.

En el Capítulo 1 se establece la terminología que será utilizada a lo largo del trabajo. Iniciamos con las definiciones básicas y los resultados elementales de la teoría de G-espacios. Luego presentamos las herramientas que emplearemos en la demostración de los resultados principales, tales como: los límites inversos, el funtor de cambio de grupos y el funtor de producto torcido.

El objetivo del Capítulo 2 es nuestro resultado principal, el Teorema 2.6.4. Este teorema afirma que el functor de producto torcido envía H-fibraciones a G-fibraciones en el caso de grupo compacto metrizable G. Como caso particular de inmediato obtenemos el resultado ya mencionado: cada G-función $E \to G/H$ es una G-fibración (Corolario 2.6.5). Para llevar a cabo la demostración de dichos resultados desarrollamos la teoría de G-fibraciones, presentamos varias propiedades que tienen las G-fibraciones de Hurewicz y las G-fibraciones regulares. Introducimos los conceptos de cuadrado G-fibrado y cuadrado G-fibrado regular los cuales están involucrados con estos dos tipos de G-fibraciones respectivamente y los cuales nos proporcionan una herramienta importante en el trabajo. Hacemos un estudio en la Teoría de haces principales equivariantes con el objetivo de presentar los Teoremas 2.3.3 y 2.5.1. Los puntos cruciales de todo el trabajo son las consecuencias de estos teoremas, el Corolario 2.5.2 y el Teorema 2.5.7 que nos dice que bajo ciertas condiciones la proyección natural $q : G/M \to G/K$ considerada como H-función por conjugación es una H-fibración regular. El Lema 2.6.1 nos permite reducir la prueba del resultado principal (Teorema 2.6.4) a probar que la proyección $G \to G/H$ es una H-fibración con respecto a la acción de H sobre G por conjugación.

En Capítulo 3 consideramos algunas consecuencias del resultado principal. Por un lado, las aplicaciones concernientes a las G-fibraciones fuertes introducidas en [8], se obtienen del Corolario 2.6.5 modificadolo como sigue: cada G-función $p : E \to G/H$ es una G-fibración fuerte siempre que E sea un espacio G-fibrante (Proposición 3.4.5). También mostramos que el funtor de producto torcido $G \times_H -$ manda H-fibraciones fuertes a G-fibraciones fuertes si G/H es un espacio G-ANE metrizable (Proposición 3.4.9).

Por otro lado, el hecho de que cada G-función $p : E \to G/H$ es una G-fibración para cada grupo compacto metrizable G (Corolario 2.6.5) implica la respuesta parcial positiva a las Preguntas 4.4 y 4.5 planteadas por S.Antonyan en [5] (ver Proposiciones 3.4.4 y 3.4.6(2)).

Finalmente, las conclusiones están dadas al final del texto, en estas destacamos los resultados originales de esta tesis.

Las nociones sobre teoría de categorías que usamos en este trabajo pueden ser consultados en [27].

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo damos algunos resultados sobre grupos topológicos, y G-espacios que vamos a utilizar frecuentemente en este trabajo. La mayoría de estos resultados se puede encontarar en los libros clásicos [10], [12] y [23].

1.1. Grupos topológicos

Una de las interacciones más exitosas dentro de las matemáticas se observa en la noción de grupo topológico, la cual es fundamental en esta tesis.

Definición 1.1.1. *Sea* (G, τ) *un espacio topológico con la estructura de grupo* $(G, \cdot)$*, diremos que* G *es un* ***grupo topológico*** *si las funciones*

$$\mu : G \times G \to G,\ (g, g') \mapsto g \cdot g'$$

y

$$\iota : G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$$

son funciones continuas.

En adelante vamos a denotar la identidad de un grupo topológico G con el símbolo e.

Ejemplo 1.1.2. (a) Cualquier grupo G con la topología discreta es un grupo topológico llamado grupo *discreto*.

(b) El grupo aditivo $\mathbb{R}^n$ con su topología usual.

(c) El grupo general lineal de orden n sobre $\mathbb{R}$. Consideremos el grupo $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ de las matrices no singulares de orden n con elementos en el campo de los números reales $\mathbb{R}$ y, como operación de grupo, la mutiplicación de matrices. En $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ consideramos la topología heredada como subespacio del espacio euclidiano $\mathbb{R}^{n^2}$, $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ es un grupo topológico.

Definición 1.1.3. *Sea G un grupo topológico. Un subconjunto H de G se llama **subgrupo topológico** de G si* *(a) H es un subgrupo de G.*

(b) H es un subespacio con la topología inducida de G.

Es fácil ver que si H es un subgrupo topológico de un grupo G, entonces H es un grupo topológico con la topología que hereda de G.

En este contexto simplemente diremos que H es un subgrupo de G.

Ejemplo 1.1.4. Los subgrupos topológicos de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ son:

(a) El grupo especial lineal

$$\mathbf{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \mid det(A) = 1\}.$$

(b) El grupo ortogonal $\mathbf{O}(n) = \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \mid AA^t = I\}$.

(c) El grupo especial ortogonal $\mathbf{SO}(n) = \mathbf{O}(n) \cap \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$.

Para cada H subgrupo de un grupo G, se define el conjunto de clases laterales izquierdas de H en G

$$G/H = \{gH | g \in G\},$$

dotado con la topología cociente respecto a la proyección natural $q : G \to G/H$, $g \mapsto gH$; esto es $U \subseteq G/H$ es abierto si y sólo si $q^{-1}(U)$ es abierto en G.

Proposición 1.1.5. ([10, Prop. 1.4]) *Sean H un subgrupo de un grupo topológico G y $q : G \to G/H$ la proyección natural. Entonces:*

(a) q es una función abierta.

(b) Si H es cerrado, entonces G/H es un espacio de Hausdorff.

(c) Si H es compacto, entonces q es una función cerrada.

Definición 1.1.6. *Sea X un espacio de Hausdorff. Una función continua $f : X \to Y$ se llama* ***función perfecta*** *si f es una función cerrada y sus fibras $f^{-1}(y)$ son subconjuntos compactos en X.*

Si el grupo G es compacto de Hausdorff, la proyección natural se vuelve perfecta.

Corolario 1.1.7. ([25, Prop.5.2]) *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto de Hausdorff. La proyección natural $q : G \to G/H$ es una función perfecta.*

Proposición 1.1.8. ([10, Prop.1.5]) *Sea N es un subgrupo normal cerrado de un grupo topológico G, entonces G/N es un grupo topológico.*

Sean G y G' grupos topológicos. Por un ***homomorfismo*** $\alpha : G \longrightarrow G'$ ***de grupos topológicos***, entendemos un homomorfismo de grupos tal que α es continua.

Los siguientes resultados están demostrados en [10] y [22], §20.

Proposición 1.1.9. *Sean G y G' grupos topológicos de Hausdorff. Si $\alpha : G \longrightarrow G'$ es un homomorfismo sobreyectivo de grupos topológicos (es decir, un epimorfismo) y G es compacto, entonces la función α es abierta.*

Proposición 1.1.10. *Sea $\alpha : G \longrightarrow G'$ un epimorfismo de grupos topológicos de Hausdorff. Si $N = ker(\alpha)$, entonces el homomorfismo inducido $\alpha^* : G/N \longrightarrow G'$ (definido por $\alpha^*(gN) = \alpha(g)$) es continuo y biyectivo. Además, si α es abierta, entonces α^* es un homeomorfismo; en otras palabras, es un* ***isomorfismo de grupos topológicos****. En particular, si G es compacto, α^* es un isomorfismo de grupos topológicos.*

Definición 1.1.11. *Un grupo topológico de Hausdorff G es un* ***grupo de Lie*** *si tiene una estructura de una variedad diferenciable tal que las operaciones de grupo $\mu(g,h) = gh$ y $\iota(g) = g^{-1}$ son diferenciables.*

Ejemplo 1.1.12. Grupos de Lie.

(a) Cualquier grupo discreto es un grupo de Lie.

(b) El grupo aditivo $\mathbb{R}^n$ con la topología usual es un grupo de Lie.

(c) La circunferencia $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{C} \mid \|x\| = 1\}$ como subgrupo del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es un grupo de Lie compacto.

(d) El toro $T^n = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1$ es grupo de Lie, ya que el producto finito de grupos de Lie es un grupo de Lie.

(e) El grupo general lineal $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie.

Proposición 1.1.13. ([10, Thm. 5.1]) *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G. Si H tiene la topología inducida por G, entonces H es un grupo de Lie.*

Los grupos $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ y $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ son subgrupos cerrados de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, por lo tanto, son grupos de Lie.

La siguiente proposición caracteriza los grupos compactos de Lie.

Proposición 1.1.14. ([10, Thm. 5.2]) *Un grupo compacto de Hausdorff G es un grupo de Lie si y sólo si es isomorfo a un subgrupo cerrado de $\mathbf{O}(n)$ para algún n.*

1.2. G-espacios

Para cada grupo topológico G que actúa de manera continua en un espacio topológico X, obtenemos un nuevo objeto llamado G-espacio. Una manera de relacionar dos G-espacios es mediante las así llamadas G-funciones, de esta manera obtenemos una categoría que denotamos por G-TOP. Esta categoría se conoce como la categoría de G-espacios.

Definición 1.2.1. *Sea G un grupo topológico. Un **G-espacio** es un espacio topológico X equipado con una acción continua $\theta : G \times X \to X$, esto es:*

(a) $\theta(e, x) = x$

(b) $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$

para cada $x \in X$ y cualesquiera $g, h \in G$, y $e \in G$ es el elemento identidad del grupo G.

Para simplificar la notación, la imagen $\theta(g, x)$ se denota usualmente por $g \cdot x$ o simplemente gx. De esta manera las condiciones de una acción son $ex = x$ y $g(hx) = (gh)x$, respectivamente. Al fijar un elemento $g \in G$, éste induce una **traslación**(izquierda) continua $\theta_g : X \to X$, $x \mapsto gx$. Es fácil ver entonces que θ_g es invertible y $\theta_g^{-1} = \theta_{g^{-1}}$.

Ejemplo 1.2.2. Algunos ejemplos de G-espacios.

(a) Para cada grupo topológico G, cada espacio topológico X es un G-espacio mediante ***la acción trivial*** θ, es decir, para cada $g \in G$ y cada $x \in X : \theta(g, x) = x$.

(b) Sea H un subgrupo de un grupo topológico G. Entonces G es un H-espacio ya que el subgrupo H de G actúa por ***traslación izquierda*** $(h, g) \mapsto hg$.

(c) Para cada H subgrupo de un grupo topológico G, el espacio cociente G/H es un G-espacio con la ***acción por traslación izquierda*** $(g', gH) \mapsto g'gH$. Notemos que la acción está bien definida: si $g_1H = g_2H$, entonces $g'g_1H = g'g_2H$ ya que

$$(g'g_2)^{-1}g'g_1 = g_2^{-1}(g')^{-1}g'g_1 = g_2^{-1}g_1 \in H.$$

(d) Sea G un grupo topológico. Si $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\wedge}$ es una colección de G-espacios, el producto $\prod X_\lambda$ es un G-espacio con ***la acción diagonal*** de G en el producto $\prod X_\lambda$ dada por $g(x_\lambda) = (gx_\lambda)$.

Los siguientes hechos relacionados con los G-espacios, fueron tomados de la Proposición 4.2 de [25] y el Teorema 1.2 de [10].

Proposición 1.2.3. *Sea X un G-espacio de Hausdorff con la acción continua $\theta : G \times X \to X$ entonces*

(a) θ es abierta.

(b) Si G es compacto, θ es una función cerrada.

Sea X un G-espacio, para cada $H \subseteq G$ y cada $A \subseteq X$, se usa la siguiente notación

$$H(A) = \{ha | h \in H, a \in A\}$$

Definición 1.2.4. *Sea X un G-espacio. Un subconjunto A de X se llama G-**invariante**, o simplemente **invariante**, si $G(A) = A$. Si A es cerrado en X, diremos que (X, A) es un G-par.*

El concepto de G-función nos permite relacionar los G-espacios.

Definición 1.2.5. *Sea G un grupo topológico. Una función continua $f : X \to Y$ entre G-espacios se llama G-**función** (o **función equivariante**) si*

$$f(gx) = gf(x)$$

*para cada $x \in X$ y cada $g \in G$. Si Y tiene la acción trivial de G, diremos que f es **invariante**.*

Si $f : X \to Y$ es una G-función en la que además es homeomorfismo, entonces $f^{-1} : Y \to X$ también es G-función, en este caso diremos que f es G-***homeomorfismo***. Diremos que dos G-espacios X y Y son G-***homeomorfos*** o G-***equivalentes*** si existe un G-homeomorfismo entre estos, en este caso escribiremos $X \approx Y$.

Observación 1.2.6. Dado X un G-espacio:

(a) Si A es G-invariante, A es un G-espacio con la misma acción que X. En este caso podemos considerar a A como G-*subespacio* de X puesto que la inclusión $A \hookrightarrow X$ es G-función.

(b) Dada una familia de G-espacios $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ la acción diagonal de G sobre el producto $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ hace que las proyecciones $p_{\lambda'} : \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to X_{\lambda'}$ sean G-funciones.

Ejemplo 1.2.7. (a) Para cada G-espacio X, la función identidad $1_X : X \to X$ es una G-función

(b) Dado G un grupo topológico, si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son G-funciones, entonces $g \circ f$ es una G-función.

Definición 1.2.8. *Sean X un G-espacio y $x \in X$. Los conjuntos:*

(a) $G_x = \{g \in G | gx = x\}$ *se llama* ***grupo de isotropía o estabilizador*** *de* x.

(b) $G(x) = \{gx | g \in G\}$ *se llama* ***órbita de*** x.

Notemos que si $f : X \to Y$ es una G-función y $x \in X$, entonces f manda órbitas en órbitas, es decir, $f(G(x)) = G(f(x))$, y no es defícil ver que $G_x \subseteq G_{f(x)}$. Si f tiene la propiedad $G_x = G_{f(x)}$, decimos que f es ***isovariante***.

Dado un G-espacio X, definimos en el la relación

$$x \sim y \text{ si } y = gx \text{ para alguna } g \in G.$$

Es fácil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia y que la clase de equivalencia $[x]$ de $x \in X$ es precisamente la G-órbita $G(x)$. Denotemos por X/G al conjunto de G-órbitas y lo dotaremos de la *topología cociente* respecto a la proyección canónica

$$q : X \to X/G,\ x \mapsto [x] = G(x),$$

es decir, se supone que $\widetilde{U} \subset X/G$ es abierto si y sólo si $q^{-1}(\widetilde{U}) \subset X$ es abierto. El espacio X/G se llama G-***espacio órbital*** y la identificación q se llama ***proyección*** G-***orbital***.

Notemos que $q : X \to X/G$ es una G-función considerando a X/G como G-espacio con la acción trivial.

Sea X un G-espacio. Diremos que la acción de G en X es:

(a) ***trivial*** si $G_x = G$ para todo $x \in X$,

(b) ***libre*** si $G_x = \{e\}$ para todo $x \in X$,

(c) ***efectiva o fiel*** si $\bigcap_{x\in X} G_x = \{e\}$,

(d) ***transitiva*** si tiene una sola órbita.

Proposición 1.2.9. ([25, Prop. 4.3(3)]) *Sean G un grupo compacto, un X G-espacio de Hausdorff, y $x \in X$. La G-función*

$$G/G_x \to G(x)$$

dada por $gG_x \mapsto gx$ es un G-homeomorfismo.

Denotamos por (H) a la *clase conjugada* del subgrupo H de G, esto es,

$$(H) = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}.$$

Si G y X son como en el contexto de la Proposición 1.2.9, para cada $x \in X$ la órbita $G(x)$ y $H = G_x$, como los grupos de isotropía de puntos en la misma órbita son conjugados, esto es $G_{gx} = gG_x g^{-1}$, para cada $g \in G$ y $x \in X$, entonces $(H) = \{G_y \mid y \in G(x)\}$. Además $G(x)$ es G-equivalente a G/G_y para cada $y \in G(x)$, en particular, $G(x) \approx G/H$. Por este motivo decimos que (H) es un *tipo de G-órbitas.*

Un G-espacio X tiene ***un sólo tipo de órbitas*** (H) si los grupos de isotropía de todos sus puntos están en la clase (H), en otras palabras, si $(G_x) = (H)$ para cada punto $x \in X$. En este caso cada órbita es G-equivalente a G/H. Para un G-espacio de Hausdorff toda acción libre tiene un sólo tipo de órbitas $(\{e\})$, y en este caso, cada órbita es G-homeomorfo a G.

Proposición 1.2.10. *Si $f : X \to Y$ es una G-función, entonces existe una única función continua $f/G : X/G \to Y/G$, llamada la función inducida por f, tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\ X/G \arrow[r, "f/G"] & Y/G \end{tikzcd}$$

conmuta. Claramente, f/G está definida por $(f/G)(G(x)) = G(f(x))$.

Proposición 1.2.11. *Sea G un grupo topológico compacto y X un G-espacio. Entonces la proyección G-orbital $q : X \to X/G$ es una función perfecta, es decir, cerrada y con fibras $q^{-1}(G(x))$ compactas.*

Sea G un grupo comacto de Hausdorff, los G-espacios metrizables son de especial interés para este trabajo.

Definición 1.2.12. *Una métrica ρ para un G-espacio metrizable X, compatible con su topología, se llama **métrica invariante** si para toda $g \in G$ y todo $x, y \in X$:*

$$\rho(gx, gy) = \rho(x, y).$$

Proposición 1.2.13. ([25, Teo. 5.22])*Sea G un grupo topológico compacto de Hausdorff. Si X es un G-espacio metrizable, entonces existe una métrica invariante ρ para X y*

$$\rho^*(x^*, y^*) = inf\{\rho(x, y) : x \in q^{-1}(x^*), y \in q^{-1}(y^*)\}, \quad x^*, y^* \in X/G,$$

donde $q : X \to X/G$ es la proyección orbital, es una métrica en X/G compatible con su topología cociente.

1.3. Espacios G-ANR y G-ANE

Definición 1.3.1. *Una **clase topológica débilmente hereditaria** es una clase $\mathcal{C}$ de espacios topológicos de Hausdorff que satisfacen:*

(a) Si $X \in \mathcal{C}$ y es homeomorfo a X', entonces $X' \in \mathcal{C}$.

(b) Si $X \in \mathcal{C}$ y A es un subespacio cerrado de X, entonces $A \in \mathcal{C}$.

Ejemplos de clases débilmente hereditarias

a) La clase de todos los espacios normales de Hausdorff $\mathcal{N}$.

b) La clase de todos los espacios paracompactos de Hausdorff $\mathcal{P}$.

c) La clase de todos los espacios metrizables $\mathcal{M}$.

Designamos por G-$\mathcal{C}$ la clase de todos los G-espacios que pertenecen a la clase topológica débilmente hereditaria $\mathcal{C}$. Un *G-par* (X, A) de G-$\mathcal{C}$ consta de un G-$\mathcal{C}$ espacio X y de un subespacio cerrado invariante A de X (y, por lo tanto, $A \in G$-$\mathcal{C}$).

Definición 1.3.2. *Un G-espacio, Y, es llamado un G-**extensor absoluto de vecindades** (ó G-**extensor absoluto**) para la clase G-$\mathcal{C}$, lo cual se abrevia $Y \in G$-$ANE(\mathcal{C})$ (ó G-$AE(\mathcal{C})$) si y sólo si para cada G-par (X, A) de G-$\mathcal{C}$ y cada G-mapeo equivariante $f : A \longrightarrow Y$ admite una G-extensión equivariante a una vecindad invariante U de A en X, $\bar{f} : U \to Y$ (resp. admite una G-extensión equivariante $\bar{f} : X \to Y$).*

Definición 1.3.3. *Sean X un G-espacio y A un subconjunto invariante de X. Por una G-**retracción de** X **en** A entendemos una G-función*

$$r : X \longrightarrow A$$

tal que para cada $a \in A$ se cumple $r(a) = a$. Si existe un G-encaje cerrado $i : Y \hookrightarrow Z$ y una G-retracción $r : Z \longrightarrow i(Y)$, entonces diremos que Y es un ***G-retracto de*** *Z, y a la composición $Z \overset{r}{\hookrightarrow} i(Y) \to Y$, le llamaremos también una G-retracción.*

Definición 1.3.4. *Sea $\mathcal{C}$ una clase topológica débilmente hereditaria. Un G-espacio $X \in G$-$\mathcal{C}$ es* ***G-retracto absoluto de vecindades para la clase*** *G-$\mathcal{C}$, lo cual abreviaremos diciendo que X es un* ***G-$ANR(\mathcal{C})$-espacio*** *y escribiendo $X \in G$-$ANR(\mathcal{C})$ cuando para cada $Y \in G$-$\mathcal{C}$ y toda G-inmersión cerrada $i : X \hookrightarrow Y$, existe una vecindad invariante U de $i(X)$ en Y y una G-retracción $r : U \to i(X)$.*

Un G-espacio $X \in G$-$\mathcal{C}$ es un ***G-retracto absoluto para la clase*** *G-$\mathcal{C}$, lo cual abreviaremos diciendo que X es un* ***G-$AR(\mathcal{C})$-espacio*** *y escribiendo $X \in G$-$AR(\mathcal{C})$ cuando para cada $Y \in G$-$\mathcal{C}$ y toda G-inmersión cerrada $i : X \hookrightarrow Y$, existe una G-retracción $r : Y \to i(X)$.*

Si G es el grupo trivial, entonces G-$\mathcal{C}$ coincide con la clase $\mathcal{C}$, y por lo tanto los espacios G-$AR(\mathcal{C})$ y G-$ANR(\mathcal{C})$ son simplemente los espacios $AR(\mathcal{C})$ y $ANR(\mathcal{C})$ respectivamente.

Si G es el grupo trivial, obtenemos las definiciones usuales de AE y ANE.

Las pruebas de las siguientes tres proposiciónes se puede encontrar en [25]

(Proposiciones 6.3, 6.11, 6.13). De hecho, son completamente análogas a las demostraciones dadas, por ejemplo, en [16] para el caso no equivariante.

Proposición 1.3.5. *Si $Y \in G$-$ANE(\mathcal{C})$ y V es un abierto e invariante de Y, entonces $V \in G$-$ANE(\mathcal{C})$.*

Proposición 1.3.6. *Si Y es un G-retracto de $Z \in G$-$AE(\mathcal{C})$(o de $Z \in ANE(\mathcal{C})$), entonces $Y \in G$-$AE(\mathcal{C})$(resp. $Y \in G$-$ANE(\mathcal{C})$).*

Proposición 1.3.7. *Sea $Y \in G$-$\mathcal{C}$. Si $Y \in G$-$AE(\mathcal{C})$ (o $Y \in G$-$ANE(\mathcal{C})$), entonces $Y \in G$-$AR(\mathcal{C})$ (resp. $Y \in G$-$ANR(\mathcal{C})$).*

El siguiente teorema afirma que para la clase G-$\mathcal{M}$ de G-espacios metrizables la implicación inversa de la última proposición también es cierta. Esto hecho importante fue probado por S.Antonyan en [1] (también véase la demostración dada en [25], Proposición 6.14).

Teorema 1.3.8. *Sean G un grupo compacto de Hausdorff y Y un G-espacio metrizable. Entonces*

(a) $Y \in G$-$AR(\mathcal{M})$ si y sólo si $Y \in G$-$AE(\mathcal{M})$.

(b) $Y \in G$-$ANR(\mathcal{M})$ si y sólo si $Y \in G$-$ANE(\mathcal{M})$.

En la tesis trabajamos sólo con G-$ANR(\mathcal{M})$-espacios y G-$ANE(\mathcal{M})$-espacios. Por lo tanto, en adelante, vamos a llamarlos simplemente G-ANE-espacios y G-ANR-espacios.

Del teorema anterior y de la Proposición 1.3.5 se obtiene inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 1.3.9. *Si U es un subconjunto abierto e invariante de un G-ANR-espacio X, entonces U también es un G-ANR-espacio.*

Más adelante vamos a utilizar los siguientes dos resultados fundamentales. El primer resultado pertenece a R.Palais [24] (Proposición 1.6.6.) y el segundo fue probado por S.A.Antonyan en ([2],[4])

Proposición 1.3.10. Si G es un grupo compacto de Lie y H es un subgrupo cerrado en G, entonces G/H es un G-ANR-espacio (o, equivalentemente, un G$-$ANE-espacio).

Teorema 1.3.11. *Sean G un grupo compacto de Hausdorff y N un subgrupo normal cerrado en G. Si X es un G-$A(N)R$-espacio, entonces X/N es un G/N-$A(N)R$-espacio. En particular, X/G es un $A(N)R$-espacio.*

Definición 1.3.12. *Un subgrupo cerrado H de un grupo compacto G se llama* ***grande*** *si existe un subgrupo normal cerrado N de G tal que $N \subseteq H$ y G/N es un grupo de Lie.*

Esta propiedad fue usada en la definición original de subgrupos grandes dada en [3, Definition 2]; algunas otras propiedades equivalentes se dan a continuación:

Proposición 1.3.13. ([4],[5]) *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto G. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) H es grande,

(b) G/H es G-ANR,

(c) G/H es localmente conexo y $\dim G/H < \infty$*,*

(d) G/H es una variedad suave.

1.4. Límites inversos.

Definición 1.4.1. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y Λ un conjunto dirigido por la relación $\leq$. La familia $\mathbf{X} = \{X_\lambda, q_\lambda^{\lambda'}, \Lambda\}$ se llama* ***sistema inverso*** *de $\mathcal{C}$-objetos si*

(a) *Para cada* $\lambda \in \Lambda$ *le corresponde un* $\mathcal{C}$*-objeto* X_λ.

(b) *Para cada* λ', $\lambda \in \Lambda$ *tales que* $\lambda \leq \lambda'$, *se define una* $\mathcal{C}$*-morfismo* $q_\lambda^{\lambda'}: X_{\lambda'} \to X_\lambda$ *que cumple*

- $q_\lambda^{\lambda'} q_{\lambda'}^{\lambda''} = q_\lambda^{\lambda''}$, *para* λ, λ', $\lambda'' \in \Sigma$ *tales que* $\lambda \leq \lambda' \leq \lambda''$;
- $q_\lambda^\lambda = id_{X_\lambda}$.

Un sistema inverso $\boldsymbol{X} = \{X_i, q_i^j, \mathbb{N}\}$, donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales, es conocido como ***sucesión inversa***, y lo denotamos simplemente como $\{X_i, q_i^j\}$.

Definición 1.4.2. *Sea* $\mathbf{X} = \{X_\lambda, q_\lambda^{\lambda'}, \Lambda\}$ *un sistema inverso de* $\mathcal{C}$*-objetos. Un objeto* X *de* $\mathcal{C}$ *junto con una familia* $\{q_\lambda : X \to X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *de morfismos en* $\mathcal{C}$, *se llama* ***límite inverso*** *de* $\mathbf{X}$, *si se satisfacen las condiciones siguientes.*

(a) $q_\lambda^{\lambda'} q_{\lambda'} = q_\lambda$ *para cada* $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, $\lambda \leq \lambda'$.

(b) *Se cumple la siguiente propiedad universal: Para cada* Y *objeto de* $\mathcal{C}$ *y* $\{f_\lambda : Y \to X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *un* ***cono*** *sobre* $\mathbf{X}$, *es decir, que satisface* $q_\lambda^{\lambda'} f_{\lambda'} = f_\lambda$, *para cada* $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, $\lambda \leq \lambda'$; *entonces existe un único morfismo* $f : Y \to X$ *tal que* $q_\lambda f = f_\lambda$, *para cada* $\lambda \in \Lambda$.

Usamos la siguiente notación

$$(X, \{q_\lambda\}) = \varprojlim \mathbf{X} = \varprojlim \{X_\lambda, q_\lambda^{\lambda'}, \Lambda\},$$

o simplemente $X = \varprojlim \mathbf{X}$.

Los morfismos q_λ se les conoce como *proyecciones naturales del límite inverso.*

De la propiedad universal del límite inverso podemos concluir que el límite es único salvo isomorfismo.

Ejemplo 1.4.3. Sea $\boldsymbol{X} = \{X_i, q_i^j, \mathbb{N}\}$ una sucesión inversa. El *límite inverso* en las siguientes categorías se describe como sigue:

(a) En Set: $(X, \{q_i\}) = \varprojlim \boldsymbol{X}$, donde

$$X = \{x \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i | q_i(x) = q_i^j q_j(x); i \leq j\} \tag{1.4.1}$$

y para cada $i \in \mathbb{N}$, $q_i : X \to X_i$, $x \mapsto x_i$ es la proyección en el i-ésimo factor.

(b) En TOP: $(X, \{q_i\}) = \varprojlim \boldsymbol{X}$, donde X es el conjunto descrito en (1.4.1) dotado con la topología más gruesa que hace continuas a todas las proyecciones $\{q_i\}$. Además los conjuntos $q_i(U)$, donde U es aberto en X_i, forman una base para la topología de X.

(c) En G-TOP : Consta de X la cual tiene estructura natural de G-espacio junto con la familia de G-funciones $\{q_\lambda\}$.([26, Teo. 1.5.2])

Proposición 1.4.4.([8, Prop. 2.5]) *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto G. Si el espacio cociente G/H es metrizable, entonces existe una sucesión decreciente $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de subgrupos normales cerrados de G tales que G/N_i es un grupo de Lie y $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(N_iH) = H$. Por lo tanto*

$$\underleftarrow{lim}\{G/(N_iH), q_i^j\} = G/H,$$

donde $q_i^j : G/(N_jH) \to G/(N_iH)$, $j \geq i$, son las proyecciones naturales.

Definición 1.4.5. *Diremos que una sucesión $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una **sucesión pro-Lie para G/H** si satisface las condiciones de la Proposición 1.4.4.*

1.5. Cambio de grupos

Recordemos que dado un grupo G obtenemos la categoría G-TOP, vamos a denotar por $TOP_G(X,Y)$ al conjunto de G-funciones $X \to Y$. En esta sección vamos a establecer la relación que hay entre las categorías G-TOP y G'-TOP, mediante los funtores *restricción* y *producto torcido* para grupos dados G y G'.

Sea $\beta : G' \to G$ un homomorfismo continuo de grupos topológicos. Cada G-espacio X se puede considerar como un G'-espacio *via* β, i.e. respecto a la acción $*$ del grupo G' dada por $g' * x = \beta(g')x$. Claramente cada G-función puede considerarse como una G'-función via β. Así obtenemos el funtor

$$Res_\beta : G\text{-}TOP \to G'\text{-}TOP$$

el cual manda cada G-espacio X a un G'-espacio X via β y cada G-función f a una G'-función f via β.

Este funtor tiene como adjunto izquierdo el *funtor de producto torcido via* β que describiremos a continuación y denotamos como

$$G \times_\beta - : G'\text{-}TOP \to G\text{-}TOP.$$

Definición 1.5.1. *Sea $\beta : G' \to G$ un homomorfismo de grupos topológicos. Si X es un G'-espacio, entonces podemos considerar $G \times X$ como G'-espacio con la acción*

$$g' \cdot (g, x) = (g\beta(g')^{-1}, g'x).$$

*El **producto torcido via β**, $G \times_\beta X$ se define como el correspondiente espacio orbital*

$$G \times_\beta X = (G \times X)/G'.$$

La G'-órbita del punto $(g, x) \in G \times X$ la denotamos por $[g, x]$.

Observación 1.5.2. Se tienen las siguientes dos propiedades:

(a) Se define una acción continua de G en $G \times_\beta X$ dada por

$$g_1 \cdot [g_2, x] = [g_1 g_2, x],$$

por lo tanto, $G \times \times_\beta X$ es un G-espacio.

(b) Si X es un G'-espacio, entonces el funtor $G \times_\beta -$ asocia X con su correspondiente producto torcido via β, $G \times_\beta X$; asimismo si $f \in TOP_{G'}(X, Y)$, entonces $G \times_\beta f : G \times_\beta X \to G \times_\beta Y$ definida como $G \times_\beta f([g, x]) = [g, f(x)]$ es una G-función.

Los funtores de restricción y de producto torcido via β son adjuntos ya que cumplen la siguiente propiedad:

Proposición 1.5.3. *Sea $\beta : G' \to G$ un homomorfismo de grupos. Sea X un G'-espacio y Y un G-espacio. Entonces existe una biyección natural*

$$TOP_G(G \times_\beta X, Y) \leftrightarrow TOP_{G'}(X, res_\beta(Y)).$$

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una G'-función. La función $\varphi : G \times X \to Y$ dada por $\varphi((g, x)) = g \cdot f(x)$ admite una factorización sobre $G \times_\beta X$, ya que para cada $g' \in G'$,

$$\begin{aligned}\varphi(g\beta(g')^{-1}, g'x) &= g\beta(g')^{-1} \cdot f(g'x) = g\alpha(g')^{-1} \cdot (g' * f(x)) \\ &= g\beta(g')^{-1} \cdot (\beta(g') \cdot f(x)) \\ &= g\beta(g')^{-1}\beta(g') \cdot f(x) \\ &= g \cdot f(x).\end{aligned}$$

Así $G \times_\beta X \to Y$ dada por $[g, x] \mapsto g \cdot f(x)$ es una G-función.

Por otro lado, si $\widehat{f} : G \times_\beta X \to Y$ es una G-función, entonces $f : X \to Y$ definida como $f(x) = \widehat{f}([e, x])$ es una G'-función.

Es fácil ver que estas construcciones son inversas una de la otra. $\square$

En otras palabras, dado un G'-espacio X, la función $i_X : X \to G \times_\beta X$ dada por $i_X(x) = [e, x]$, para cada $x \in X$ (veremos en la Proposición 1.5.5 que en realidad es una G'-función), satisface la siguiente propiedad universal: para cada G'-función $f : X \to Y$, donde Y es un G-espacio tratado como G'-espacio via α, existe una única función $\widehat{f} : G \times_\beta X \to Y$ G-equivariante que hace conmutativo el diagrama siguiente.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i_X"] \arrow[dr, "f"'] & & G \times_\beta X \arrow[dl, dotted, "\widehat{f}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Observación 1.5.4. El funtor de producto torcido se reduce a estudiar los dos siguientes casos:

(a) Sea N un subgrupo normal cerrado de un grupo G. Entonces la proyección natural $q : G \to G/N$, $g \mapsto gN$, es un homomorfismo de grupos e induce el funtor de restricción res_q cuyo adjunto izquierdo es el funtor de proyección N-orbital

$$-/N : G\text{-}TOP \to G/N\text{-}TOP;$$

en efecto, la G-función $G/N \times_q X \to X/N$ dada por $[gN, x] \mapsto N(gx)$ es G/N-equivalencia.

(b) Sea H un subgrupo cerrado de un grupo G. La inclusión $i : H \hookrightarrow G$ induce el funtor de restricción res_i, de manera que cada G-función es considerada también como H-función. res_i es adjunto derecho del funtor $G \times_i - : H\text{-}TOP \to G\text{-}TOP$ que asocia cada H-espacio X con el G-espacio $G \times_i X$ el cual, en este caso particular, denotamos por $G \times_H X$ y se le conoce simplemente como *producto torcido* (usual).

Proposición 1.5.5. *Sea $\beta : G' \to G$ un homomorfismo, donde G' es un grupo compacto; y sea X un G'-espacio. Entonces la función*

$$i_X : X \to G \times_\beta X$$

dada por $i_X(x) = [e, x]$, es una G'-función cerrada; y si β es inyectiva, i_X es un G'-encaje.

Demostración. Observemos que $i_X = \pi\delta_e$, donde $\delta_e : X \to G \times X$ es el encaje cerrado dado por $\delta_e(x) = (e, x)$ y $\pi : G \times X \to G \times_\alpha X$ es la proyección orbital. Luego, i_X es continua. Además, por la Proposición 1.2.11, π es cerrada, y como δ_e es cerrado, entonces i_X también lo es.

Ahora veamos que i_X es G'-función. En efecto, $G \times_\beta X$ es un G'-espacio via β, y para cada $x \in X$, $g' \in G'$, se cumple

$$\begin{aligned} i_X(g'x) &= [e, g'x] = [\alpha(g'), x] = \beta(g') \cdot [e, x] \\ &= \beta(g') \cdot i_X(x) = g' * i_X(x). \end{aligned}$$

Supongamos ahora que β es inyectiva. Veamos que i_X es también inyectiva. Sean $x, y \in X$ tales que $i_X(x) = i_X(y)$, es decir $[e, x] = [e, y]$; luego existe $g' \in G'$ tal que $(e, y) = (\beta(g')^{-1}, g'x)$, y en este caso, por la inyectividad de β, $g' = e'$ (donde e' es el elemento neutro en G'), por lo que $x = y$. $\square$

Proposición 1.5.6. *Sea $\beta : G' \to G$ un homomorfismo y X un G' espacio. Los espacios orbitales $(G \times_\beta X)/G$ y X/G' son homeomorfos.*

Demostración. La proyección $pr : G \times X \to X$ es G'-equivariante ya que

$$pr(g' \cdot (g, x)) = pr((g\beta(g')^{-1}, g'x)) = g'x = g'pr((g, x)).$$

Luego la función inducida

$$\psi = pr/G' : G \times_\beta X \to X/G'$$

dada por $\psi([g,x]) = G'(x)$, $[g,x] \in G \times_\beta X$, está bien definida y es continua (Proposición 1.2.10); además como la proyección es abierta, ψ también lo es.

Notemos que $\psi(G([g,x])) = G'(x)$, así podemos factorizar ψ como

$$\begin{tikzcd} G \times_\beta X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ (G \times_\beta X)/G \arrow[r, "\varphi"'] & X/G' \end{tikzcd}$$

Del diagrama vemos que $\varphi : G([g,x]) \mapsto G'(x)$ es continua (ya que la proyección orbital π es abierta) y abierta, además de ser claramente sobreyectiva.

Veamos que φ es inyectiva: Supongamos que $G([g_1,x_1])$ y $G([g_2,x_2])$ son tales que $G'(x_1) = G'(x_2)$, entonces existe $g' \in G'$ tal que $x_1 = g'x_2$, luego tenemos

$$G([g_1,x_1]) = G([g_1,g'x_2]) = G([g_1\beta(g'),x_2]) = G([g_2,x_2]).$$

Concluímos que φ es un homeomorfismo. $\square$

Omitimos la demostración del siguiente resultado que está probado con todo detalle en [20, Cap.1, Prop.1.6.6].

Proposición 1.5.7. *Sea $\beta : G' \to G$ un homomorfismo de grupos compactos tal que $coker(\beta) = G/Im(\beta)$ es metrizable. Si X es un G'-espacio metrizable, entonces el G-espacio inducido $G \times_\beta X$ es también metrizable.*

Proposición 1.5.8. *Sea $\beta : G' \to G$ un homomorfismo de grupos compactos tal que el cokernel de β es metrizable, y sea E un G-espacio. Supongamos que E es un espacio G-ANR, entonces E, tratado como G'-espacio via β, es un G'-ANR.*

Demostración. Sea A un subconjunto cerrado invariante de un G'-espacio metrizable X, y sea $f : A \to E$ una G'-función.

Consideremos las G'-funciones i_A, i_X definidas como en la Proposición 1.5.5; por la Proposición 1.5.3, sabemos que f induce una G-función $\hat{f} : G \times_\beta A \to E$ tal que $\hat{f} \circ i_A = f$.

Notemos también, que como G' es compacto, $G \times_\beta A$ es un subconjunto cerrado (G-invariante) del G-espacio $G \times_\beta X$. Estos G-espacios son metrizables debido a la Proposición 1.5.7.

Luego, como E es G-ANR, existe una vecindad G-invariante U de $G \times_\beta A$ en $G \times_\beta X$, y una G-extensión $\bar{f} : U \to E$ de $\hat{f}$.

Esto es, el siguiente diagrama es conmutativo.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, "i_A"] \arrow[ddd, hook] & & & E \\
& G \times_\beta A \arrow[urr, "\widehat{f}"'] \arrow[dr, hook] \arrow[dd, hook] & & \\
& & U \arrow[uur, dotted, "\bar{f}"'] \arrow[dl, hook] & \\
X \arrow[r, "i_X"'] & G \times_\beta X & &
\end{tikzcd}
$$

Sea $V = i_X^{-1}(U)$, resulta que V es una vecindad G'-invariante de A en X, y $(\bar{f} \circ i_X)\mid_V : V \to E$ es una G'-extensión de f, y por lo tanto E es un G'-ANR.

□

1.6. Producto torcido y rebanadas

Los productos torcidos son objetos importantes en el estudio de los G-espacios y como veremos también de las G-funciones.

Sean H un subgrupo cerrado de un grupo G, y X un H-espacio. Por el *producto torcido* $G \times_H X$ entendemos el G-espacio $G \times_\alpha X$, donde $\alpha = i : H \hookrightarrow G$ (ver Ejemplo 1.5.4(2)).

Este concepto está relacionado de manera importante con el de rebanada.

Definición 1.6.1. *Sean H un subgrupo cerrado de un grupo G, y X un G-espacio. Un subconjunto H-invariante S de X se llama **H-rebanada** (o bien, rebanada) de X, si satisface:*

(a) GS es abierto en X,

(b) S es cerrado en GS,

(c) si $g \in G \backslash H$, entonces $gS \cap S = \emptyset$.

*S es llamada **H-rebanada global** de X cuando $GS = X$.*

La siguiente proposición establece una relación entre los conceptos de producto torcido y rebanada.

Proposición 1.6.2. *Sean H un subgrupo cerrado de un grupo compacto G, y S un subconjunto H-invariante de un G-espacio X, tal que GS es abierto en X. Entonces S es una H-rebanada si y sólo si la función*

$$\eta : G \times_H S \to GS$$

dada por $\eta([g,s]) = gs$, es una G-equivalencia.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sean $[g,s], [g',s'] \in G \times_H S$.

- Observemos primero que η está bien definida:

  Supongamos que $[g, s] = [g', s']$, entonces existe $h \in H$ tal que $g = g'h^{-1}$ y $s = hs'$; luego,

  $$\eta([g, s]) = gs = g'h^{-1}hs' = g's' = \eta([g', s']).$$

- Consideremos ahora el diagrama conmutativo

  $$\begin{tikzcd} G \times S \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\pi"'] & & GS \\ & G \times_H S \arrow[ur, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

  donde $\theta((g, s)) = gs$ y π es la proyección orbital correspondiente. Sabemos que π es continua, abierta (Proposición 1.2.11) y sobreyectiva; y θ es continua y sobreyectiva como restricción de la acción

  $$T : G \times X \to X$$

  de donde es inmediata la continuidad y sobreyectividad de η.

- Veamos que η es cerrada:

  Sea C un subconjunto cerrado de $G \times_H S$. Del diagrama anterior,

  $$\eta(C) = \theta(\pi^{-1}(C)).$$

  Por continuidad de π, $\pi^{-1}(C)$ es cerrado en $G \times S$, y como G es compacto, por la Proposición 1.2.3*(ii)*, θ es una función cerrada. Luego $\eta(C)$ es cerrado en GS.

- Supongamos ahora que

$$\eta([g,s]) = \eta([g',s']),$$

entonces $gs = g's'$, esto es, $s = g^{-1}g's'$. Como S es una H-rebanada, entonces $g^{-1}g' \in H$, luego

$$[g',s'] = [g'(g^{-1}g')^{-1}, (g^{-1}g')s'] = [g,s].$$

Por lo tanto, η es inyectiva.

- Además η es G-equivariante, ya que para toda $\tilde{g} \in G$,

$$\eta(\tilde{g}[g,s]) = \eta([\tilde{g}g,s]) = \tilde{g}gs = \tilde{g}\eta([g,s]).$$

($\Leftarrow$) Supongamos que η es un G-homeomorfismo. Veamos que S satisface las condiciones (b) y (c) de la Definición 1.6.1:

(c) Supongamos que $gS \cap S \neq \emptyset$, entonces existen s, $s' \in S$ tales que $gs = s'$. Como

$$\eta([e,s']) = es' = s' = gs = \eta([g,s])$$

y η es inyectiva, entonces $[e,s'] = [g,s]$; es decir, existe $h \in H$ tal que $e = gh^{-1}$ y $s' = hs$, por lo tanto, $g = h \in H$.

(b) Observemos primero que $\theta^{-1}(S) = H \times S$. En efecto, $H \times S \subset \theta^{-1}(S)$ ya que $\theta(h,s) = hs \in S$ para toda $h \in H$, $s \in S$.

Ahora, sea $(g, s) \in \theta^{-1}(S)$, entonces $\theta(g, s) = gs \in S$ y por *(c)*, tenemos que $g \in H$; es decir, $(g, s) \in H \times S$, luego $\theta^{-1}(S) = H \times S$. Por lo tanto, $\theta^{-1}(S) = H \times S$. Pero $H \times S$ es cerrado en $G \times S$. Así,

$$\pi^{-1}(\eta^{-1}(S)) = \theta^{-1}(S)$$

es cerrado en $G \times S$.

Por la definición de topología cociente $\eta^{-1}(S)$ es cerrado en $G \times_H S$ y, como η es homeomorfismo, $S = \eta(\eta^{-1}(S))$ es cerrado en GS. $\square$

Proposición 1.6.3. *Sean H un subgrupo cerrado de un grupo topológico G, y X un G-espacio. Si $f : X \to G/H$ es una G-función, entonces $S = f^{-1}(eH)$ es una H-rebanada global de X.*

Demostración. Sea $S = f^{-1}(eH)$, entonces

- S es H-invariante:

  Sean $h \in H$, $s \in S$. Como $f(s) = eH$, tenemos que $f(hs) = hf(s) = h(eH) = eH$. Luego $hs \in f^{-1}(eH) = S$.

- $G(S) = G(f^{-1}(eH)) = f^{-1}(G(eH)) = f^{-1}(G/H) = X$.

- De la Proposición 1.1.5(b) tenemos que G/H es un G-espacio de Hausdorff, luego $\{eH\}$ es cerrado en G/H; por lo que $S = f^{-1}(eH)$ es cerrado en X.

- Supongamos que $gS \cap S \neq \emptyset$, entonces existen $s_1, s_2 \in S$ tales que $s_1 = gs_2$. Luego $f(s_1) = f(gs_2) = gf(s_2) \in gH$, y como $f(s_1) = eH$, entonces $g \in H$.

De lo anterior concluimos que S es una H-rebanada global de X. $\square$

El símbolo $\approx$ que aparece en el siguiente corolario significa que son equivalentes como G-espacios.

Corolario 1.6.4. *Sean H un subgrupo cerrado de un grupo compacto G, y X un G-espacio. Entonces para cada G-función $f : X \to G/H$ se cumple que*

$$X \approx G \times_H S,$$

donde $S = f^{-1}(eH)$.

Demostración. Por la Proposición 1.6.3, S es una H-rebanada global de X, es decir, $GS = X$. Luego, por la Proposición 1.6.2, $G \times_H S \approx GS = X$ (véase figura 1.1). $\square$

Definición 1.6.5. *Sea G un grupo compacto, X un G-espacio y $x \in X$. Decimos que una vecindad abierta G-invariante U de $G(x)$ en X, es un* ***tubo*** *alrededor de la órbita $G(x)$ si existe una G-función $f : U \to G/G_x$.*

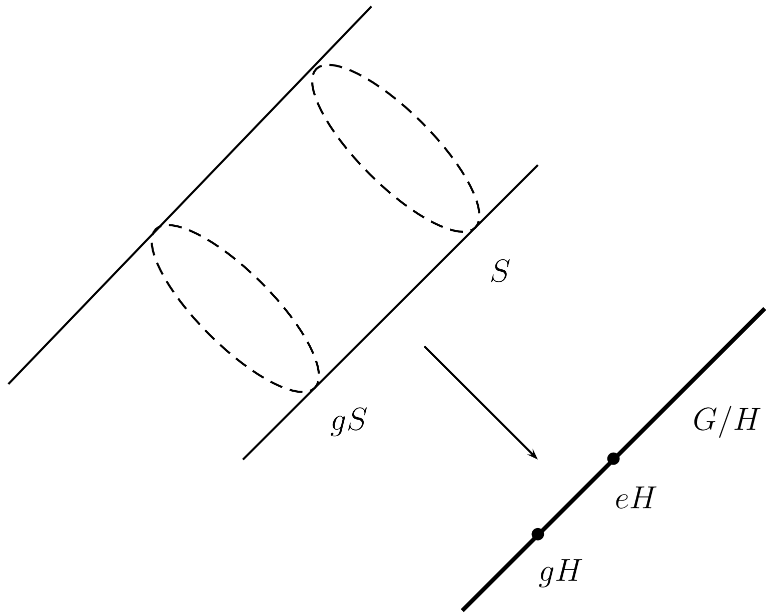

Figura 1.1: Estructura de una G-función sobre G/H.

Observemos que, en este caso, $U \approx G \times_{G_x} S \approx GS$ y S es una G_x-rebanada.

El siguiente teorema desempeña un papel central dentro de la teoría de grupos topológicos de transformaciones (ver [10, Ch.II, Th.5.4]).

Teorema 1.6.6. *Sean G un grupo compacto de Lie y X un G-espacio de Tychonoff, entonces existe un tubo alrededor de cada una de las órbitas de X.*

Este teorema sirve de base para mostrar la propiedad local siguiente de las proyecciones orbitales, misma que será generalizada en más adelante.

Presentamos dos resulatdos más que nos proporcionan más ejemplos de espacios que tienen estructura de producto torcido.

Proposición 1.6.7. ([10, Ch.II, Th.5.8]) *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto de Lie G, y sea X un G-espacio de Tychonoff con un sólo tipo de órbitas (H). Entonces la proyección orbital $\pi : X \to X/G$ satisface la siguiente propiedad: para cada $b \in X/G$ existe una vecindad abierta U de b en X/G y un G-homeomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to G/H \times U$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & G/H \times U \arrow[dl, "pr_U"] \\ & U & \end{tikzcd} \tag{1.6.1}$$

es conmutativo.

Proposición 1.6.8. *Sea G un grupo compacto y X un G-espacio con un sólo tipo de órbitas (H). Entonces la G-función*

$$\eta : G \times_N X^H \to X$$

dada por $\eta([g,x]) = gx$, es una G-equivalencia. Donde $N = N(H)$ es el normalizador de H en G, y $X^H = \{x \in X \mid H \subseteq G_x\}$ es el conjunto de puntos H-fijos.

Demostración. η es continua, sobreyectiva y cerrada (ver, por ejemplo, demostración de la Proposición 1.6.2).

Veamos que η es inyectiva. Sean $[g_1, x_1], [g_2, x_2] \in G \times_N X^H$ tales que $\eta([g_1, x_1]) = \eta([g_2, x_2])$, esto es $g_1 x_1 = g_2 x_2$.

Como x_1, $x_2 \in X^H$ y $(G_{x_1}) = (G_{x_2}) = (H)$, resulta que $G_{x_1} = G_{x_2} = H$. Sea $n = g_2^{-1} g_1$. Entonces

$$H = G_{x_2} = G_{nx_1} = nG_{x_1}n^{-1} = nHn^{-1},$$

lo que significa que $n \in N$. Luego $[g_1, x_1] = [g_1 n^{-1}, nx_1] = [g_2, x_2]$. $\square$

Finalmente, siguiente resultado nos dice que el funtor de producto torcido preserva ANE's (metrizables).

Proposición 1.6.9. ([5, Prop. 3.1]) *Sea H un subgrupo grande de un grupo compacto G y S un H-espacio. Si S es un H-ANE entonces $G \times_H S$ es un G-ANE.*

Capítulo 2

G-fibraciones y productos torcidos

Una *G-fibración* representa una versión equivariante de una fibración de Hurewicz, es decir, una G-función que tiene la propiedad de levantamiento de G-homotopías.

En este capítulo iniciaremos primero con las definiciones y propiedades de las G-fibraciones, uno de los resultados cruciales de este capítulo concierne a la proyección canónica $q : G \to G/H$ con la acción de H en G por conjugación, el cual afirma que esta es una H-fibración, para luego ver que el funtor de producto torcido preserva fibraciones. Cabe resaltar que este es un resulatado original y es el principal teorema de la tesis.

2.1. G-fibraciones y G-fibraciones regulares

Definición 2.1.1. *Sean X y Y G-espacios. Una homotopía equivariante o* ***G-homotopía*** *es una función continua $H : X \times I \to Y$, tal que $H(g \cdot x, t) = g \cdot H(x, t)$ para cada $(x, t) \in X \times I$ y toda $g \in G$, es decir, H es G-función considerando $X \times I$ con la acción diagonal, donde G actúa trivialmente en el intervalo unitario $I = [0, 1]$.*

*Si para un subconjunto cerrado invariante A de X se cumple $H(a, t) = H(a, 0)$, para cada $a \in A$ y $t \in I$, se dice que H es una G-**homotopía relativa** a A.*

Definición 2.1.2. *Decimos que una G-función $p : E \to B$ tiene la* ***propiedad equivariante de levantamiento de G-homotopías*** *respecto a un G-espacio X ($EHLP(X)$) si para toda G-función $f : X \to E$, y toda G-homotopía $F : X \times I \to B$ tal que $F(x, 0) = p \circ f(x)$ para cada $x \in X$,* *existe un relleno* $\widetilde{F} : X \times I \to E$ *para el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\partial_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{F}"] & B \end{tikzcd} \tag{2.1.1}$$

donde $\partial_0(x) = (x, 0)$*. Es decir* $\widetilde{F}$ *satisface* $p\widetilde{F} = F$ *y* $\widetilde{F}\partial_0 = f$*.*

Una G*-función* p *se llama **G-fibración** de Hurewicz si* p *tiene la propiedad de levantamiento de* G*-homotopías respecto a todo* G*-espacio* X*.*

Diremos también que p tiene la EHLP *relativa* si para cada diagrama conmutativo (2.1.1) existe un relleno $\widetilde{F} : X \times I \to E$ el cual es una G-homotopía relativa a $A \subset X$ siempre y cuando F sea G-homotopía relativa a A.

Proposición 2.1.3. *Sea* $p : E \to B$ *una* G*-fibración donde* G *es un grupo compacto. Si* B *es un* G*-espacio metrizable, entonces* p *tiene la EHLP relativa.*

Demostración. Consideremos el diagrama conmutativo (2.1.1) donde F es una G-homotopía relativa a $A \subset X$. Como G es compacto, B admite una métrica compatible G-invariante d, es decir una métrica que satisface $d(gb, gb') = d(b, b')$ para todo $b, b' \in B$ y $g \in G$. Además, podemos elegir

d tal que $diam(B) \leq 1$. Sea $\varphi : X \to I$ una función dada por $\varphi(x) = diam(F(\{x\} \times I))$. Claramente φ es una G- función continua invariante. Modifiquemos la G-homotopía F como sigue:

$$F^{'}(x,t) = \begin{cases} F(x, t/\varphi(x)) & \text{if } t < \varphi(x) \\ F(x,1) & \text{if } t \geq \varphi(x) \end{cases}$$

Es fácil ver que F' es una G-función continua para la cual $F'\partial_0 = pf$. Como p es una G-fibración, existe una G-homotopía $\widehat{F} : X \times I \to E$ tal que $\widehat{F}\partial_0 = f$ y $p\widehat{F} = F'$. Ahora definamos una G-homotopía $\widetilde{F} : X \times I \to E$ por $\widetilde{F}(x,t) = \widehat{F}(x, t\varphi(x))$. Es rutina checar que $\widetilde{F}$ es un relleno para el diagrama (2.1.1) la cual es una G-homotopía relativa a A. $\Box$

Como ya mencionamos en la Introducción, en la teoría de G-espacios el concepto de G-fibración surge de manera natural: cada G-función $E \to G/H$ es una G-función si G es un grupo compacto de Lie. Este resultado es muy conocido para pero no es fácil encontar su demostración en la literatura; la demostración directa para el caso metrizable se puede encontrar en [8]:

Proposición 2.1.4. ([8, Proposition 3.1]) *Sean H un subgrupo cerrado de un grupo compacto de Lie G y E un G-espacio metrizable. Entonces cada G-función $p : E \to G/H$ es una G-fibración.*

En efecto, uno de los objetivos principales de la presente tesis es obtener una generalización de la Proposición 2.1.4 para el caso de grupos compactos metrizables G.

Otra clase más de G-fibraciones que nos será de utilidad, es la siguiente.

Definición 2.1.5. *Decimos que una G-función $p : E \to B$ de G-espacios metrizables es una **G-fibración regular** si para cada subconjunto invariante A de un G-espacio metrizable X y para cada diagrama de G-funciones*

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \cup A \times I \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "F"'] & B \end{tikzcd}$$

existe una G-homotopía $\widetilde{F} : X \times I \to E$ como relleno (es decir, $\widetilde{F}i = f$ y $p\widetilde{F} = F$).

Claramente, cada G-fibración de G-espacios metrizables es una G-fibración regular (basta tomar $A = \emptyset$). Por otro lado, se tiene la siguiente afirmación:

Proposición 2.1.6. ([8]) *Si $p : E \to B$ es una G-fibración, donde E y B son espacios G-ANE metrizables, entonces p es una G-fibración regular.*

De hecho, probaremos la Proposición 2.1.6 en el Capítulo III (justo despues de la Proposición 3.1.6).

Proposición 2.1.7. *Sea $\beta : G' \to G$ un homomorfismo de grupos compactos. Si $p : E \to B$ es una G-fibración (regular) entonces, al ser considerada como G'-función via β, p es también una G'-fibración (regular).*

Demostración. Supongamos que p es una G-fibración.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i_X"] \arrow[ddd, "\partial_0"'] & & E \arrow[ddd, "p"] \\
& G \times_\beta X \arrow[ur, "\widehat{f}"] \arrow[d, "\bar{\partial}_0"'] & \\
& G \times_\beta (X \times I) \arrow[dr, "\widehat{F}"] & \\
X \times I \arrow[ur, "i_{X \times I}"'] \arrow[rr, "F"'] & & B
\end{tikzcd}$$

donde $\widehat{f}$ y $\widehat{F}$ son las G-funciones inducidas por las G'-funciones f y F respectivamente (Proposición 1.5.3), $\partial_0(x) = (x, 0)$ y $\bar{\partial}_0 = G \times_\alpha \partial_0$.

Notemos que $G \times_\beta (X \times I)$ es G-equivalente a $(G \times_\beta X) \times I$ por medio del G-homeomorfismo

$$\gamma : G \times_\beta (X \times I) \to (G \times_\beta X) \times I$$

$$[g, (x, t)] \longmapsto ([g, x], t)$$

y $\bar{\partial}_0 : G \times_\beta X \to (G \times_\beta X) \times I$ se define como $\bar{\partial}_0([g, x]) = ([g, x], 0)$.

Como p es una G-fibración, existe un relleno $\bar{F} : (G \times_\beta X) \times I \to E$. Así, la G'-función $\widetilde{F} : X \times I \to E$ definida como $\widetilde{F} = \bar{F} \circ i_{X\times I}$ es también un relleno del diagrama, lo que prueba que p es una G'-fibración.

La demostración del teorema para el caso de G-fibración regular p es absolutamente análoga. $\square$

Destacamos dos casos particulares de la Poroposición 2.1.7.

Corolario 2.1.8.

(i) *Sea $p : E \to B$ una G-fibración (regular). Si H es un subgrupo cerrado de G, entonces p es también una H-fibración (regular) via $H \hookrightarrow G$.*

(ii) *Sea N un subgrupo cerrado normal de un grupo G. Si para una G-función $p : E \to B$, la G/N-función inducida $p/N : E/N \to E/N$ es una G/N-fibración (regular), entonces p/N es también una G/N-fibración (regular) via $G \to G/N$.*

Las G-fibraciones regulares se pueden caracterizar localmente (como las G-fibraciones, ver e.g., [12, Exercise 5, p.53]) de la siguiente forma:

Proposición 2.1.9.([8, Prop. 3.6]). *Sea $p : E \to B$ una G-función entre G-espacios metrizables. Si para cada punto $b \in B$ existe una vecindad abierta*

G-invariante U tal que la restricción de p, $p^{-1}(U) \to U$ es una G-fibración regular, entonces p es una G-fibración regular.

2.2. Cuadrados pull-back y cuadrados G-fibrados

La noción de cuadrado G-fibrado puede considerarse como una generalización de cuadrado pull-back. Podemos observar que la propiedad la cual utilizamos en la definición de un cuadrado fibrado es análoga a la usada en [15, Proposition 3.2.7, p.60] para caracterizar fibraciones en una pro-categoría. En esta sección recordaremos la definición de un cuadrado pull-back y daremos algunos ejemplos de cuadrados pull-back importantes para el trabajo. Asímismo abordaremos el concepto de un cuadrado G-fibrado el cual, para nuestros resultados, representa un herramienta muy importante.

Definición 2.2.1. *El diagrama conmutativo de G-funciones*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \tag{2.2.1}$$

se llama ***cuadrado pull-back*** *(o cuadrado universal) si satisface la siguiente propiedad universal:*

Si X es un G-espacio y $\alpha : X \to B'$ y $\beta : X \to E$ son funciones equivariantes tales que $f\alpha = p\beta$, entonces existe una única G-función $h : X \to Z$ tal que el diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, bend left, "\beta"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha"'] & & \\
& Z \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\
& B' \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd} \tag{2.2.2}$$

Al G-espacio Z se le conoce también como ***pull-back*** (o *producto fibrado*) de $B' \xrightarrow{f} B \xleftarrow{p} E$, y debido a la propiedad universal, es único salvo isomorfismo. Este G-espacio puede ser definido de manera explícita como

$$Z = \{(b', e) \in B' \times E \mid f(b') = p(e)\},$$

con la acción diagonal de G, es decir, $g \cdot (b', e) = (gb', ge)$.

Al igual que en el caso de límites inversos, si está dado que el cuadrado (2.2.1) es un diagrama en G-TOP (de G-espacios y G-funciones) tal que es pull-back en TOP, entonces es también un cuadrado pull-back en la categoría G-TOP.

En efecto, si X es un G-espacio, y α y β son G-funciones tales que $f\alpha = p\beta$, como (2.2.1) es un cuadrado pull-back en TOP, existe una única función continua h tal que el diagrama (2.2.2) es conmutativo. Esta h es G-equivariante, ya que para cada $x \in X$ y $g \in G$, tenemos

$$f'(h(gx)) = \beta(gx) = g\beta(x) = gf'(h(x)) = f'(gh(x)),$$

análogamente, se verifica que $p'(h(gx)) = p'(gh(x))$; lo que significa que $h(gx) = gh(x)$.

Proposición 2.2.2. *En el cuadrado pull-back (2.2.1) se cumple:*

(a) Si p es sobreyectiva (o inyectiva), también lo es p'.

(b) Si p es abierta, también lo es p'.

(c) Si p tiene una sección s, entonces p' también tiene una sección s' tal que $f \circ s' = s \circ f$.

(d) Si p es perfecta, p' también lo es.

Un caso importante es aquel en el que p es una proyección orbital, es decir, cuando $B = E/G$; y la acción de G en B' es trivial. En esta situación p' se puede considerar también como la proyección orbital de Z.

Proposición 2.2.3. *Sea X un G-espacio, y sea Z el pull-back de $B' \xrightarrow{f} X/G \xleftarrow{\pi} X$, donde B' es un G-espacio con la acción trivial. Entonces el espacio B' es homeomorfo al espacio orbital Z/G.*

Demostración. La proyección $\pi' : Z \to B'$ induce la función $\varphi = \pi'/G : Z/G \to B'/G = B'$ (Proposición 1.3.1). Como π es una función abierta (pues B'/G tiene la topología cociente) y sobreyectiva, π' también lo es (Proposición 2.2.2); luego es fácil ver que φ es abierta y sobreyectiva. Por otro lado, si (b, x_1), $(b, x_2) \in Z$, entonces $\pi(x_1) = f(b) = \pi(x_2)$, lo que significa que x_1 y x_2 están en la misma órbita, luego (b, x_1) y (b, x_2) están también en la misma órbita; lo que prueba la inyectividad de φ. Por lo tanto φ es un homeomorfismo. $\square$

Proposición 2.2.4. *Sea $f : X \to Y$ una G-función, donde G es un grupo compacto, y X y Y son G-espacios de Hausdorff. El diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\ X/G \arrow[r, "f/G"'] & Y/G \end{tikzcd}$$

es un cuadrado pull-back si y sólo si f es isovariante.

Demostración. Supongamos que f es isovariante.

Sea $P = \{(G(x), y) \mid G(f(x)) = G(y)\}$ el pull-back de $X/G \to Y/G \leftarrow Y$. Veamos que la G-función inducida $h : X \to P$, $x \mapsto (G(x), f(x))$, es un G-homeomorfismo. En efecto, si $(G(x), y) \in P$, existe $g \in G$ tal que $y = gf(x)$, y $h(gx) = (G(gx), f(gx)) = (G(x), y)$, luego h es sobreyectiva.

Supongamos ahora que $(G(x_1), f(x_1)) = (G(x_2), f(x_2))$, entonces existe $g \in G$ tal que $x_1 = gx_2$, luego $f(x_2) = f(x_1) = f(gx_2) = gf(x_2)$, lo que significa $g \in G_{f(x_2)} = G_{x_2}$, y por tanto $x_1 = x_2$, es decir, h es inyectiva.

Por último podemos afirmar que h es cerrada ya que la proyección orbital π_X es perfecta (Proposición 1.3.2) y el espacio P es de Hausdorff (ver, por ejemplo, [14, Prop. 3.7.5]).

Recíprocamente, si el diagrama es pull-back, entonces X es G-equivalente a P, y $G_x = G_{(G(x),f(x))} = G_{G(x)} \cap G_{f(x)} = G \cap G_{f(x)} = G_{f(x)}$, y por tanto, f es isovariante. $\square$

Proposición 2.2.5. *Suponga que el diagrama conmutativo de G-funciones*

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B' & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

es un cuadrado pull-back. Entonces

(a) *si p es una G-fibración (regular), entonces p' es una G-fibración (regular);*

(b) *si E, B y B' son espacios G-ANE y p es una G-fibración, entonces E' es un espacio G-ANE.*

Demostración. Solo probaremos la afirmación (b) pues la prueba de (a) es sencilla y son similares a las pruebas de las correspondientes versiones no equivariantes (ver, e.g., [17, Proposition 6.31] and [13, Proposition 6.4]).

Sea $h : A \to E'$ una G-función, donde A es un G-subconjunto cerrado de un G-espacio metrizable X. Como E y B' son G-ANE's, existen G-extensiones $\tilde{f} : U \to E$ y $\tilde{p} : U \to B'$ de las G-funciones $f'h$ y $p'h$, respectivamente, sobre una vecindad G-invariante U de A en X. Obtenemos la G-función $p\tilde{f}, f\tilde{p} : U \to B$ para la cual $p\tilde{f}|_A = f\tilde{p}|_A$. Usando que B es un G-ANE, por un argumento estándar (ver, e.g., [17, Proposition 8.12]), para alguna vecindad G-invariante V de A en U (y por lo tanto en X) podemos encontrar una G-homotopía $F : V \times I \to B$ relativa a A tal que $F(v, 0) = p\tilde{f}(v)$ y $F(v, 1) = f\tilde{p}(v)$ para todo $v \in V$. Como p es una G-fibración, existe una G-homotopía $\widetilde{F} : V \times I \to E$ tal que $\widetilde{F}(v, 0) = \tilde{f}(v)$ y $p\widetilde{F} = F$. Además, afirmamos que $\widetilde{F}$ se puede elegirse así esta será relativa a A al igual que F (aunque no se supone que p tiene EHLP relativa).

Para probar la última afirmación, notemos que la función F se factoriza atraves del espacio cociente $V \times I/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia minimal sobre $V \times I$ tal que $(a, t) \sim (a, t')$ para $a \in A$ y $t, t' \in I$. Entonces podemos construir el siguiente diagrama conmutativo de G-funciones

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "\partial_0"'] & Z \arrow[r, "\widehat{F}"] \arrow[d, "\widehat{p}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ V \times I \arrow[r, "\tau"] & V \times I/\sim \arrow[r, "F'"] & B \end{tikzcd}$$

donde τ es la función cociente, $F = F'\tau$, el cuadrado derecho es un cuadrado pull-back y φ es tal que $\tilde{f}|_V = \widehat{F}\varphi$ (φ es una G-función inducida por $\tilde{f}|_V$ y $\tau\partial_0$). Ahora observe que $\widehat{p}$ es una G-fibración por la afirmación (a) y el espacio cociente $V \times I/\sim$ es metrizable por [14, Theorem 4.4.15], ya que $V \times I$ es metrizable y τ obviamente es una función perfecta. Claramente τ es una G-homotopía relativa a A y por lo tanto por la Proposición 2.1.3, existe una G-homotopía $D : V \times I \to Z$ relativa a A como relleno para el cuadrado izquierdo. Ahora la G-homotopía requerida $\widetilde{F}$ se obtiene como una composición de D y $\widehat{F}$.

Finalmente definamos $\widehat{f} : V \to E$ por $\widehat{f}(v) = \widetilde{F}(v, 1)$. Entonces $p\widehat{f} = f\tilde{p}|_V$ y además para todo $a \in A$, $\widehat{f}(a) = \widetilde{F}(a, 1) = \widetilde{F}(a, 0) = \tilde{f}(a) = f'h(a)$, esto es, $\widehat{f}|_A = f'h$. También como $\tilde{p}|_A = p'h$, podemos concluir que por la propiedad universal de pull-back, las G-funciones $\widehat{f}$ y $\tilde{p}|_V$ determinan una G-extensión $V \to E'$ de $h : A \to E'$. $\square$

La siguiente proposición tendrá muchas consecuencias relevantes para la presente tesis.

Proposición 2.2.6. *Sean K y N subgrupos cerrados de un grupo compacto G tales que $KM = MK$, entonces el diagrama de proyecciones naturales*

$$\begin{tikzcd} G/(K\cap M) \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[d, "\pi_K"'] & G/M \arrow[d, "\beta_K"] \\ G/K \arrow[r, "\beta_M"'] & G/KM \end{tikzcd} \tag{2.2.3}$$

es un cuadrado pull-back.

Demostración. Sea P el pull-back de $G/K \xrightarrow{\beta_N} G/KN \xleftarrow{\beta_K} G/N$ dado por

$$P = \{(xK, yM) \in G/K \times G/M \mid xKM = yKM\}.$$

Por la propiedad universal de pull-back existe una única función continua $\varphi : G/(K\cap M) \to P$ inducida por las proyecciones π_K y π_K. Esta función se define explícitamente como $\varphi(x(K\cap M)) = (xK, xM)$ y es una G-función.

Veamos que φ es un homeomorfismo.

- φ es inyectiva: Sean $x(K\cap M)$, $y(K\cap M) \in G/(K\cap M)$ tales que $\varphi(x(K\cap M)) = \varphi(y(K\cap M))$, entonces $(xK, xM) = (yK, yM)$, luego $y^{-1}x \in K$ y $y^{-1}x \in M$, esto es $y^{-1}x \in K\cap M$, lo que significa que $x(K\cap M) = y(K\cap M)$.

- φ es sobreyectiva: Supongamos que $(xK, yM) \in P$. Entonces $xKM = yKM$. Como $yM \subseteq yKM$, tenemos $xKM \cap yM \neq \emptyset$, lo que implica que $xK \cap yM \neq \emptyset$.

  Sea $z \in xK \cap yM$, entonces existen $k \in K$ y $m \in M$ tales que $z = xk = ym$. Luego $\varphi(z(K \cap M)) = (xkK, ymM) = (xK, yM)$.

Concluimos que φ es un homeomorfismo por ser una función continua biyectiva entre espacios compactos. □

Corolario 2.2.7. *Sean K y M subgrupos cerrados de un grupo compacto G tales que K es normal y $K \cap M = \{e\}$. Entonces el cuadrado pull-back (2.2.3) tiene la forma*

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{\pi_M} & G/M & & gM \\ {\scriptstyle \pi_K}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta_K} & & \downarrow \\ \widehat{G} & \xrightarrow[\beta_M]{} & \widehat{G}/\widehat{M} & & \pi_K(g)\widehat{M} \end{array} \tag{2.2.4}$$

donde $\widehat{G} = G/K$ y $\widehat{M} = \pi_K(M)$.

Además, las proyecciones π_K y β_K se pueden considerar como proyecciones K-orbitales respecto a las acciones de K sobre G y G/M por traslaciones izquierdas; estas acciones son libres.

Demostración. Cosideremos el diagrama (2.2.3). Como $K \cap M = \{e\}$, tenemos $G/(K \cap M) = G$ y

$$\widehat{M} = \pi_K(M) = \{mK \mid m \in M\} = KM/K.$$

Notemos que el espacio G/KM se puede identificar con $(G/K)/(KM/K)$, es decir, con con $\widehat{G}/\widehat{M}$, usando el G-homeomorfismo canónico

$$G/KM \to (G/K)/(KM/K)$$

dado por $gKM \mapsto (gK)(KM/K)$.

Como $(gK)(KM/M) = \pi_K(g)\widehat{M}$, la proyección $\beta_K : gM \mapsto gKM$ está identificada con $gM \mapsto \pi_K(g)\widehat{M}$ y la proyección $\beta_M : gK \mapsto gKM$ está identificada con $gK \mapsto \pi_K(g)\widehat{M}$.

Así obtenemos el diagrama (2.2.4) el cual es un cuadrado pull-back por la Proposición 2.2.6.

Claramente, π_K y β_K se pueden considerar como proyecciones K-orbitales por las traslaciones izquierdas (ver el Ejemplo 1.2.2(c)) $g \mapsto gk$ y $gM \mapsto kgM$ respectivamente. En efecto,

$$K(gM) = \{kgM \mid k \in K\} = KgM = gKM$$

pues K es un subgrupo normal de G. Así, $\beta_K(gM) = K(gM)$.

La acción por traslación de K sobre G es obviamente libre y por lo tanto así es la acción de K sobre G/M ya que π_M es una K-función isovariante debido a la Proposición 2.2.4. (Note que (2.2.4) se puede considerar como un cuadrado pull-back de K-funciones). $\square$

Definición 2.2.8. *El diagrama conmutativo (2.2.1) de G-funciones se llama* ***cuadrado*** G***-fibrado*** *si en el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[dr, "q"] \arrow[drr, "f'"] \arrow[ddr, "p'"'] & & \\ & P \arrow[r, "\widetilde{f}"'] \arrow[d, "\widetilde{p}"] & E \arrow[d, "p"] \\ & B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \tag{2.2.5}$$

donde el cuadrado interior es pull-back, la función inducida q es una G-fibración.

Suponga que todos los G-espacios en (2.2.1) son metrizables. Si la G-función q en el diagrama (2.2.2) es un G-fibración regular diremos que el diagrama (2.2.1) es un ***cuadrado*** G***-fibrado regular.***

La siguiente proposición será usada en la prueba de la Proposición 2.6.3:

Proposición 2.2.9. *Sea $\{p_i\} : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{B}$ un morfismo de sucesiones inversas $\boldsymbol{E} = \{E_i, q_i^j\}$ y $\boldsymbol{B} = \{B_i, r_i^j\}$ de G-espacios y G-funciones tales que el* *diagrama*

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[d, "p_i"'] & E_{i+1} \arrow[l, "q_i^{i+1}"'] \arrow[d, "p_{i+1}"] \\ B_i & B_{i+1} \arrow[l, "r_i^{i+1}"] \end{tikzcd}$$

es un cuadrado G-fibrado (regular) para cada i. Si p_1 es una G-fibración (regular) entonces

$$p = \varprojlim\{p_i\} : \varprojlim \ \boldsymbol{E} \to \varprojlim \ \boldsymbol{B}$$

es una G-fibración (regular).

Demostración. Consideremos el diagrama conmutativo de G-funciones

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook, "\partial_0"'] & \varprojlim \boldsymbol{E} \arrow[d, "\varprojlim \boldsymbol{p}"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] & \varprojlim \boldsymbol{B} \end{tikzcd}$$

Para cada i, vamos a definir $\tilde{H}_i : X \times I \to E_i$ tal que $\tilde{H}_i = q_i^{i+1}\tilde{H}_{i+1}$; procederemos por inducción.

Como p_1 es una G-fibración, existe $\tilde{H}_1 : X \times I \to E_1$ tal que $p_1 \circ \tilde{H}_1 = r_1 \circ H$ y $\tilde{H}_1 \circ \partial_0 = q_1 \circ h$; donde $q_i : \varprojlim \boldsymbol{E} \to E_i$ y $r_i : \varprojlim \boldsymbol{B} \to B_i$ son las proyecciones.

Supongamos que existe $\tilde{H}_i : X \times I \to E_i$ tal que $p_i \circ \tilde{H}_i = r_i \circ H$, $\tilde{H}_i \circ \partial_0 = q_i \circ h$ y $q_{i-1}^i \circ \tilde{H}_i = \tilde{H}_{i-1}$.

Sea P_i el pull-back de $E_i \xrightarrow{p_i} B_i \xleftarrow{r_i^{i+1}} B_{i+1}$. Así, por la propiedad universal de pull-back, existe $\hat{H}_{i+1} : X \times I \to P_i$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
E_i \arrow[d, "p_i"'] & & X \times I \arrow[ll, "\tilde{H}_i"'] \arrow[dl, dotted, "\hat{H}_{i+1}"'] \arrow[d, "r_{i+1}H"] \\
& P_i \arrow[ul, "\beta_i"] \arrow[dr, "\alpha_i"] & \\
B_i & & B_{i+1} \arrow[ll, "r_i^{i+1}"]
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Como el cuadrado exterior

$$\begin{tikzcd}
E_i \arrow[d, "p_i"'] & & E_{i+1} \arrow[ll, "q_i^{i+1}"'] \arrow[dl, dotted, "\pi_i"'] \arrow[d, "p_{i+1}"] \\
& P_i \arrow[ul, dotted, "\beta_i"] \arrow[dr, dotted, "\alpha_i"] & \\
B_i & & B_{i+1} \arrow[ll, "r_i^{i+1}"]
\end{tikzcd}$$

es G-fibrado, la G-función única $\pi_i : E_{i+1} \to P_i$, tal que $\alpha_i \circ \pi_i = p_{i+1}$ y $\beta_i \circ \pi_i = q_i^{i+1}$, es una G-fibración. Luego, existe $\tilde{H}_{i+1} : X \times I \to E_{i+1}$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "q_{i+1}h"] \arrow[d, "\partial_0"'] & E_{i+1} \arrow[d, "\pi_i"] \\
X \times I \arrow[r, "\hat{H}_{i+1}"'] \arrow[ur, dotted, "\tilde{H}_{i+1}"] & P_i
\end{tikzcd}$$

y además cumple

- $p_{i+1}\tilde{H}_{i+1} = \alpha_i \pi_i \tilde{H}_{i+1} = \alpha_i \hat{H}_{i+1} = r_{i+1}H,$

- $\tilde{H}_{i+1}\partial_0 = q_{i+1}h$,

- $q_i^{i+1}\tilde{H}_{i+1} = \beta_i\pi_i\tilde{H}_{i+1} = \beta_i\hat{H}_{i+1} = \tilde{H}_i$.

La colección $\{\tilde{H}_i\}$ determina una G-homotopía única $\tilde{H} : X \times I \to \underleftarrow{lim}\,\boldsymbol{E}$ tal que $q_i\tilde{H} = \tilde{H}_i$ para cada i.

Se cumple que $\underleftarrow{lim}\,\boldsymbol{p}\tilde{H} = H$ y $\tilde{H}\partial_0 = h$ ya que para cada i, $r_i\,\underleftarrow{lim}\,\boldsymbol{p}\tilde{H} = p_iq_i\tilde{H} = p_i\tilde{H}_i = r_iH$ y $q_i\tilde{H}\partial_0 = \tilde{H}_i\partial_0 = q_ih$. $\square$

2.3. Haces principales equivariantes

En esta sección usaremos el enfoque general de un haz principal equivariante dado en el trabajo de R.K.Lashof y J.P.May [21].

Recordemos que una ***sucesión exacta corta*** es un diagrama de homomorfismos de grupos

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{\iota} \Gamma \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1 \tag{2.3.1}$$

donde $1 = \{e\}$ es el grupo trivial, tal que ι es un monomorfismo, π es un epimorfismo y $Im(\iota) = Ker(\pi)$. En esta situación se dice que Γ es una ***extensión de*** G ***por*** K.

En caso de grupos topoógicos siempre se supone que

- ι es un encaje cerrado (es decir, ι realiza un homeomorfismo entre K y el subgrupo cerrado $\iota(K) = Im(\iota)$),
- la función π es abierta.

Por consiguiente, podemos considerar K como un subgrupo normal de Γ (al identificar K con $\iota(K)$ y suponer que $G = \Gamma/K$, mientras π es la proyección canónica $\Gamma \to \Gamma/K$ (véase Proposición 1.1.10).

Definición 2.3.1. *Sean G y K grupos topológicos. Sea Γ una extensión de G por K mediante la sucesión exacta corta (2.3.1). Una Γ-función $p : E \to B$ un $(K;\Gamma)$-**haz principal** si cumplen las siguientes condiciones:*

(a) p es una función sobreyectiva y abierta;

(b) la acción $\cdot$ de K en E via ι (es decir, tal que $k \cdot x = \iota(k)x$ para $k \in K$ y $x \in E$) es libre;

(c) para $x, y \in E$, $p(x) = p(y)$ si y sólo si $y = k \cdot x$ para algún $k \in K$.

Observación 2.3.2. Supongamos $p : E \to B$ es un $(K;\Gamma)$-haz principal.

(i) Podemos tratar $p : E \to B$ como una proyección K-orbital (respecto a la acción $\cdot$ de K en E dada por (c)) en virtud de conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\pi_E"'] \arrow[dr, "p"] & \\ E/K \arrow[rr, "h"'] & & B \end{tikzcd}$$

donde h es un homeomorfismo dado por $h(K(x)) = p(x)$. En verdad, la condición (c) nos dice que h es inyectiva y está bien definida. Es continua por la definición de la topología cociente. Además, h es sobreyectiva y abierta gracias a la condición (a). Por lo tanto, h es un homeomorfismo y, en particular, podemos identificar B con el espacio K-orbital E/K y escribir $B = E/K$.

(ii) Por la definición E y B son Γ-espacios con las acciones $(\gamma, y) \mapsto \gamma y$ y $(\gamma, b) \mapsto \gamma b$, $\gamma \in \Gamma$, respectivamente; $p : E \to B$ es una Γ-función pero, en general, no es una G-función. No obstante, siempre podemos tratar B como un G-espacio con la acción $*$ dada por

$$g * b = \gamma b, \quad \gamma \in \pi^{-1}(g).$$

Supongamos que $\gamma, \gamma' \in \pi^{-1}(g)$. Entonces $\gamma^{-1}\gamma' \in Ker(\pi)$ y existe $k \in K$ tal que $\gamma' = \gamma\iota(k)$. Como p es sobreyectiva, existe $x \in p^{-1}(b)$ y tenemos

$$\gamma' b = \gamma\iota(k)b = \gamma p(\iota(k)x) = \gamma p(k \cdot x) = \gamma p(x) = \gamma b.$$

Por lo tanto, la función $G \times B \to B$, $(g, b) \mapsto g * b$, está bien definida.

Es fácil ver que de verdad $*$ es una acción continua.

Teorema 2.3.3. *Sea Γ un grupo compacto de Lie. Si $p : E \to B$ es un $(K;\Gamma)$-haz principal, donde E es un Γ-espacio metrizable, entonces p es una Γ-fibración regular.*

Demostración. Sin perdida de generalidad podemos considerar K como un subgrupo normal de G.

Dado un punto $b \in B$, tomemos algún punto $y \in p^{-1}(b)$. Para el subgrupo de isotropía Γ_y, tenemos $K \cap \Gamma_y = \{e\}$. En verdad, si $k \in K \cap \Gamma_y$, entonces $ky = y$ que implica $k = e$ pues por la definición de $(K;\Gamma)$-haz principal la restricción de la acción de Γ en su subgrupo K es libre (véase Definición 2.3.1(b) tomando en cuenta que $K \equiv \iota(K)$). Además, K es un subgrupo normal de Γ y $G = \Gamma/K$. Según la Proposición 2.2.6 tenemos el cuadrado pull-back de proyecciones naturales

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \longrightarrow & \Gamma/\Gamma_y \\ {\scriptstyle \pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \widehat{\pi}} \\ G & \longrightarrow & \Gamma/K\Gamma_y \end{array}$$

Notemos que se puede considerar π y $\widehat{\pi}$ como proyecciones K-orbitales si tratamos Γ y Γ/Γ_y como K-espacios respecto a las acciones de K por traslaciónes izquierdas. Además, estas acciones son libres: la traslación de K en Γ es obviamente libre y la acción de K en Γ/Γ_y es libre ya que la proyección $\Lambda \to \Gamma/\Gamma_y$ es isovariante por la Proposición 2.2.4 (véase también el Corolario 2.2.7).

Como Γ es un grupo compacto de Lie, existe un tubo alrededor de la órbita $\Gamma(y)$ (véase el Teorema 1.6.6), es decir, existe una Γ-función $f : U \to \Gamma/\Gamma_y$ para alguna vecindad abierta Γ-invariante U de y.

Observemos que $U = p^{-1}(p(U))$. Claramente, $U \subseteq p^{-1}(p(U))$. Por otro lado, si $x \in p^{-1}(p(U))$, entonces $p(x) = p(y)$ para algún punto $y \in U$. De acuerdo con la definición de un haz principal equivariante existe $k \in K$ tal que $x = ky$ y, como U es Γ-invariante, $x \in U$.

Sea $V = p(U)$, entonces V es una vecindad abierta Γ-invariante de $b = p(y)$ pues la función p es abierta. La Γ-función $f : p^{-1}(V) \to \Gamma/\Gamma_y$ induce la función f/K de los espacios orbitales tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(V) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p|_U"'] & \Gamma/\Gamma_y \arrow[d, "\widehat{\pi}"] \\ V \arrow[r, "f/K"'] & \Gamma/K\Gamma_y \end{tikzcd} \tag{2.3.2}$$

es conmutativo. Como f se puede considerar como una K-función de K-espacios libres (en particular, f es K-isovariante), este diagrama es un un cuadrado pull-back por la Proposición 2.2.4.

En virtud de la Proposición 2.1.4 $\widehat{\pi}$ es una Γ-fibración. Además, los espacios cocientes Γ/Γ_y y $\Gamma/K\Gamma_y$ son Γ-ANE (ver [24, Corollary 1.6.7]) que significa que la proyección $\widehat{\pi}$ es una Γ-fibración regular (por la Proposición 2.1.6). Como el diagrama (2.3.2) es un cuadrado pull-back, la proyección $p|_U$ también lo es. Ahora aplicando la Proposición 2.1.9 concluimos que p es una G-fibración regular. $\square$

2.4. Sucesiones exactas cortas escindidas

En esta sección vamos a considerar detalladamente el caso cuando la sucesión exacta corta (2.3.1) es ***escindida***, es decir, cuando para (2.3.1), existe un homomorfismo de grupos topológicos $j : G \to \Gamma$ tal que $\pi \circ j = id_G$.

Como un ejemplo de una sucesión exacta corta escindida sirve la sucesión

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{in} G \times K \xrightarrow{pr} G \longrightarrow 1 \qquad (2.4.1)$$

donde $G \times K$ es el producto directo de los grupos topológicos G y K, in es la inyección natural de K en $G \times K$, $in(k) = (e, k)$, y pr es la proyección natural de $G \times K$ sobre G, $pr(g, k) = g$. Claramente, la inyección $j : G \hookrightarrow G \times K$ dada por $j(g) = (g, e)$ es un homomorfismo tal que $pr \circ j = id_G$.

Veremos que, en general, cada grupo Γ obtenido como una extensión de G por K mediante una sucesión exacta corta escindida tiene estructura de un producto semidirecto que generaliza la noción de un producto directo. Recordemos la definición de esta noción generalizada.

Sean G y K grupos topológicos y supongamos que $\alpha : G \to Aut(K)$, $g \mapsto \alpha_g$ es un homomorfismo, donde $Aut(K)$ es el grupo de automorfismos de K, tal que la correspondiente acción

$$G \times K \to K$$

$$(g, k) \mapsto \alpha_g(k),$$

de G sobre K es continua, es decir, G actúa en K por medio de automorfismos.

Bajo las condiciones de arriba diremos que *G y K están relacionados por α*. En esta situación podemos considerar un nuevo grupo denotado por $G \ltimes_\alpha K$ y llamado el ***producto semidirecto*** de los grupos G y K que se define como sigue:

(a) $G \ltimes_\alpha K = G \times K$, es decir, como un espacio topológico $G \ltimes_\alpha K$ es nada más que el producto topológico $G \times K$.

(b) La operación en $G \ltimes_\alpha K$ está definida por

$$(g, k) \cdot (g', k') = (gg', k\alpha_g(k')).$$

Es fácil ver que $G \ltimes_\alpha K$ es un grupo topológico y se tiene la sucesión exacta corta escindida

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{in} G \ltimes_\alpha K \xrightarrow{pr} G \longrightarrow 1 \tag{2.4.2}$$

donde *in* y *pr* (y j que escinde la sucesión) se defininen como en (2.4.1).

Diremos que dos extensiones Γ_1 y Γ_2 de K por G son ***equivalentes*** si existe un isomorfismo $\psi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & \Gamma_1 \arrow[dd, "\psi"] \arrow[dr] & & \\
1 \arrow[r] & K \arrow[ur] \arrow[dr] & & G \arrow[r] & 1 \\
 & & \Gamma_2 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Proposición 2.4.1. *Si la sucesión exacta corta de grupos topológicos (2.3.1) es escindida por medio de un homomorfismo $j : G \hookrightarrow \Gamma$, entonces es equivalente a una sucesión exacta corta que tiene la forma (2.4.2), es decir, existe un isomorfismo de grupos topológicos $\psi : G \ltimes_\alpha K \to \Gamma$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & & G \ltimes_\alpha K \arrow[dd, "\psi"] \arrow[dr, "pr"] & & \\
1 \arrow[r] & K \arrow[ur, "in"] \arrow[dr, "\iota"'] & & G \arrow[r] & 1 \\
 & & \Gamma \arrow[ur, "\pi"'] & &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Más precisamente, ψ se define por

$$\psi(g, k) = \iota(k)j(g) \tag{2.4.3}$$

mientras para el homomorfismo $\alpha : G \to Aut(K)$, $g \mapsto \alpha_g$, el automorfismo $\alpha_g : K \to K$ está definido como sigue:

$$k \mapsto \iota^{-1}(j(g)\iota(k)j(g^{-1})), \quad k \in K. \tag{2.4.4}$$

Demostración. Claramente, la función ψ dada por (2.4.3) es continua pues las funciones ι y j son continuas.

ψ *es un homomorfismo*:

Como $(g_1, k_1)(g_2, k_2) = (g_1 g_2, k_1 \alpha_{g_1}(k_2))$ tenemos

$\psi(g_1, k_1)(g_2, k_2) = \iota(k_1 \alpha_{g_1}(k_2))j(g_1 g_2) = \iota(k_1)\iota(\alpha_{g_1}(k_2))j(g_1)j(g_2) =$

$= \iota(k_1)i(\iota^{-1}(j(g_1)\iota(k_2)j(g_1^{-1})))j(g_1)j(g_2) = \iota(k_1)j(g_1)\iota(k_2)j(g_1^{-1})j(g_1)j(g_2) =$

$= \iota(k_1)j(g_1)\iota(k_2)j(g_2) = \psi(g_1, k_1)\psi(g_2, k_2)$.

ψ *es inyectiva*:

Sea $(g, k) \in Ker(\psi)$. Entonces $\iota(k)j(g) = e$ y, por lo tanto,

$$e = \pi(\iota(k)j(g)) = \pi\iota(k) \cdot \pi j(g) = e \cdot g = g.$$

Ahora $e = \iota(k)j(g) = \iota(k)j(e) = \iota(k)$ y, como ι es inyectiva, $k = e$. Resulta que $Ker(\psi) = \{(e, e)\}$ (desde luego, (e, e) es el elemento del grupo $G \ltimes_\alpha K$).

ψ *es sobreyectiva*:

Sea $\gamma \in \Gamma$. Tenemos $\pi\big(\gamma j(\pi(\gamma^{-1}))\big) = \pi(\gamma)\pi j \pi(\gamma^{-1}) = \pi(\gamma)\pi(\gamma^{-1}) = e$, es decir, $\gamma j(\pi(\gamma^{-1})) \in Ker(\pi)$. Como $Ker(\pi) = Im(\iota)$ existe único $k \in K$ tal que $\iota(k) = \gamma j(\pi(\gamma^{-1}))$. De aquí, $\gamma = \iota(k)j(\pi(\gamma)) = \psi(\pi(\gamma), k)$.

De la prueba que ψ es sobreyectiva, vemos que la función ψ^{-1} inversa de ψ está dada por medio de la correspondencia

$$\gamma \mapsto (\pi(\gamma), \iota^{-1}(\gamma j \pi(\gamma^{-1}))) \tag{2.4.5}$$

y es evidentemente continua pues j y π son continuas mientras ι establece el homeomorfismo $K \to \iota(K)$. $\square$

Aplicamos la Proposición 2.4.1 a la siguiente situación.

Sean G y K subgrupos cerrados de un grupo topológico Γ tales que

(i) $\Gamma = KG$,

(ii) $G \cap K = \{e\}$,

(iii) K es un subgrupo normal de Γ.

Dado $\gamma \in \Gamma$, su representación como $\gamma = kg$, $(g, k) \in G \times K$ (que existe por (i)) es única debido a (ii). En efecto, si $kg = k'g'$, entonces $K \ni (k')^{-1}k = g'g^{-1} \in G$, que implica $(k')^{-1}k = g'g^{-1} = e$, es decir, $g = g'$ y $k = k'$. Notemos que la función $\pi : \Gamma \to G$, $kg \mapsto g$, es un homomorfismo bien definido: $\pi(kg \cdot k'g') = \pi(kk''gg') = gg' = \pi(kg)\pi(kg')$ (aquí usamos que $k'' = gk'g^{-1} \in K$ debido a (iii)). Obtenemos la sucesión exacta corta de grupos topológicos

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{\iota} \Gamma \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

donde $\iota(k) = k$ escindida por $j : G \hookrightarrow \Gamma$, $j(g) = g$.

Según la Proposición 2.4.1 tenemos el isomorfismo

$$\psi : G \ltimes_\sigma K \to \Gamma, \quad \psi(g, k) = kg$$

donde el homomorfismo $\sigma : G \to Aut(K)$, $g \mapsto \sigma_g$ está definido por

$$\sigma_g(k) = gkg^{-1}.$$

En otras palabras, G actúa en K por conjugación.

En esta situaciacón, es decir, cuando un grupo Γ satisface las condiciones (i)-(iii), se dice que Γ es un ***producto semidirecto interno*** de sus subgrupos G y K y se escribe simplemente $\Gamma = G \ltimes K$.

Ya hemos visto que el producto semidirecto interno $\Gamma = G \ltimes K$ es naturalmente isomorfo al producto semidirecto "externo" $\Gamma = G \ltimes_\sigma K$. En realidad cada producto semidirecto es un producto semidirecto interno en virtud de la siguiente consecuencia de la Proposición 2.4.1:

Corolario 2.4.2. *Si la sucesión exacta corta de grupos topológicos (2.3.1) es escindida por medio de un homomorfismo* $j : G \hookrightarrow \Gamma$*, entonces* $\Gamma = \overline{G} \ltimes \overline{K}$*, donde* $\overline{G} = j(G)$ *y* $\overline{K} = \iota(K)$*. En particular,*

$$G \ltimes_\alpha K = \overline{G} \ltimes \overline{K},$$

donde $\overline{G} = \{(g, e) \mid g \in G\}$ *y* $\overline{K} = \{(e, k) \mid g \in K\}$*.*

Demostración. Veamos que Γ satisface la condiciones (i)-(iii) de la definición de un producto semidirecto interno.

Por la formula (2.4.3) tenemos

$$\Gamma = \{i(k)j(g) \mid k \in K, g \in G\}$$

ya que ψ es sobreyectiva. Por lo tanto, $\Gamma = \overline{K} \cdot \overline{G}$. Si $\gamma \in \overline{K} \cap \overline{G}$, entonces existen $k \in K$ y $g \in G$ tales que $\gamma = \iota(k) = j(g)$. Luego $\gamma = j(g) = j(\pi j(g)) = j(\pi \iota(k)) = j(e) = e$. Resulta que $\overline{K} \cap \overline{G} = \{e\}$. Por fin, $\overline{K} = i(K) = ker(\pi)$. Así, $\overline{K}$ es un subgrupo normal de Γ. $\square$

2.5. Haces principales como G-fibraciones

En esta sección consideremos el caso particular de un $(K;\Gamma)$-haz principal, cuando Γ es una extensión de un grupo G por K por medio de una sucesión exacta corta escindida o, equivalentemente, en virtud de la Proposición 2.4.1 y el Corolario 2.4.2 cuando Γ es un producto semidirecto.

Supongamos que una Γ-función $p : E \to B$ es un $(K;\Gamma)$-haz principal (véase la Definición 2.3.1), donde Γ es una extensión de un grupo G por K por medio de una sucesión exacta corta

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{\iota} \Gamma \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

que es escindida por un homomorfismo $j : G \to \Gamma$, es decir, $\pi \circ j = id_G$. La acción de Γ en E induce la acción izquierda $\star$ de G en E y la acción derecha $\cdot$ de K en E via j y ι respectivamente:

$$g \star y = j(g)y, \quad y \cdot k = \iota(k^{-1})y, \quad k \in K, g \in G, y \in E$$

Notemos que la acción $\star$ de K es libre debido la condición (b) de la Definición 2.3.1.

Es muy importante para las metas de la tesis que ahora podemos considerar la Γ-función $p : E \to B$ como una G-función via $j : G \hookrightarrow \Gamma$.

De verdad, ya sabemos que el Γ-espacio B tiene una estructura natural de un G-espacio según la Observación 2.3.2(ii): la acción $*$ de G en B fue definida de la siguiente manera:

$$g * b = \gamma b, \quad \gamma \in \pi^{-1}(g).$$

Como $j(g) \in \pi^{-1}(g)$ (pues $\pi(j(g)) = g$), tenemos $g * b = j(g)b$. En otras palabras, $*$ es una acción de G en B via j.

Por consiguiente, la Γ-función $p : E \to B$ es una G-función via $j : G \hookrightarrow \Gamma$

en el sentido de la Sección 1.5:

$$p(g \star y) = p(j(g)y)) = j(g)p(y) = g * p(y)$$

para $g \in G$ y $y \in E$.

Ahora, tomando en cuenta estas observaciones, podemos presentar la siguiente versión particular del Teorema 2.3.3.

Teorema 2.5.1. *Sea E un Γ-espacio merizable, donde Γ es un grupo compacto de Lie. Supongamos que Γ es una extensión de un grupo topológico G por un grupo topológico K mediante la sucesión exacta corta*

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{\iota} \Gamma \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

escindida por medio de $j : G \hookrightarrow \Gamma$.

Si una Γ-función $p : E \to B$ es un $(K;\Gamma)$-haz principal, entonces p es una G-fibración regular respecto las acciones de G en E y B via j.

Demostración. Por el Teorema 2.3.3 p es una Γ-fibración regular. Por consiguiente, p es también una G-fibración regular como una G-función via j en virtud de la Proposición 2.1.7. $\square$

Estamos intersados en situaciones cuando haces principales equivariantes cuales satisfacen al Teorema 2.5.1 surgen de una manera natural.

Notemos primero que para las acciones $\star$ y $\cdot$ definidas arriba tenemos la relación:

$$g \star (y \cdot k) = (g \star y) \cdot \alpha_g(k), \quad g \in G,\ k \in K, \quad y \in E \tag{2.5.1}$$

donde α_g se define por (2.4.4).

De hecho, las acciones $\star$ y $\cdot$ determinan la acción inicial de Γ en E; en otras palabras, podemos reestablecer la acción de Γ en E usando las acciones $\star$ y $\cdot$. Más precisamente, $(g \star y) \cdot k^{-1} = \big(i(k^{-1})\big)^{-1} j(g)y = i(k)j(g)y$ y según las formulas (2.4.3) y (2.4.5) obtenemos

$$\gamma y = (g \star y) \cdot k^{-1}, \quad \gamma \in \Gamma, \quad y \in E \tag{2.5.2}$$

donde $g = \pi(\gamma)$ y $k = \iota^{-1}(\gamma j(\pi(\gamma^{-1})))$.

Las relaciones (2.5.1) y (2.5.2) se utilizan en el siguiente corolario del Teorema 2.5.1.

Corolario 2.5.2. *Sean G y K grupos compactos de Lie realcionados por el homomorfismo $\alpha : G \to Aut(K)$. Sea E un G-espacio izquierdo metrizable dotado también de una acción derecha libre del grupo K tal que se tiene la relación*

$$g \star (y \cdot k) = (g \star y) \cdot \alpha_g(k), \quad g \in G,\ k \in K, \quad y \in E$$

(aquí $\star$ y $\cdot$ denotan las acciones G y K respectivamente). Entonces la proyección K-orbital $p : E \to B$ es una G-fibración regular, donde el espacio K-orbital $B = E/K$ está considerado como un G-espacio dotado de la acción $g * yK = (g \star y)K$ (aquí, $yK = (y)K = \{y \cdot k \mid k \in K\}$ denota la K-órbita de $y \in E$).

Demostración. Las acciones $\star$ y $\cdot$ determinan la acción izquierda de $\Gamma = G \ltimes_\alpha K$ en E como sigue:

$$(g,k)y = (g \star y) \cdot k^{-1}, \quad (g,k) \in \Gamma, \quad y \in E.$$

Notemos que la acción $*$ está bien definida: si $yK = y'K$ entonces $y' = y \cdot k$ para alguna $k \in K$ y

$$(g \star y')K = (g \star (y \cdot k))K = ((g \star y) \cdot \alpha_g(k))K = (g \star y)K.$$

Por consiguiente, la acción de Γ en B dada por $(g,k)yK = g * yK$ está bien definida y podemos considerar $p : E \to B$ como una Γ-función pues

$$p((g,k)y) = p((g \star y) \cdot k^{-1}) = ((g \star y) \cdot k^{-1})K = (g \star y)K = g * yK = (g,k)p(y).$$

Con estas acciones de Γ, $p : E \to B$ es un $(K;G)$-haz ya que obviamente se cumplen las condiciones (a)-(c) de la Definición 2.3.1.

Además, la sucesión exacta corta

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{in} G \ltimes_\alpha K \xrightarrow{pr} G \longrightarrow 1$$

escinde por $j : G \hookrightarrow \Gamma$, $g \mapsto (g, e)$.

Evidentemente, las acciones $\star$ y $*$ pueden tratadas como las acciones de G en E y B obtenidas de las acción de Γ la via j. En efecto, para $g \in G$,$y \in E$ y $b = yK \in B$, tenemos

$$j(g)y = (g, e)y = (g \star y) \cdot e^{-1} = g \star y$$

y

$$j(g)b = j(g)(yK) = (g, e)yK = g * yK.$$

Por último, el grupo Γ es un grupo compacto de Lie porque, como un espacio topológico, es $G \times K$. Concluimos que el $(K; G)$-haz $p : E \to B$ satisface el Teorema 2.5.1 y por lo tanto p es una G-fibración regular. $\square$

Dado un subgrupo cerrado K de un grupo topológico G, es costumbre considerar el espacio cociente G/K como un G-espacio con la acción por traslación izquierda $g \cdot g'K = gg'K$ (ver el Ejemplo 1.2.2(c)). Claramente, si H es un subgrupo cerrado de G, podemos considerar G/K como un H-espacio por traslación izquierda. Pero en la presente tesis estamos interesados en la posibilidad de considerar G/K con la acción $\star$ del subgrupo H de G sobre G/K ***por conjugación*** dada por $h \star gK = hgh^{-1}K$. Vamos a dar las condiciones para tener esta acción.

Observemos primero que no hay obstáculos para considerar la acción por conjugación de H sobre G dada por $h \star g = hgh^{-1}$. Es fácil ver que en verdad es una acción. Notemos que un subgrupo K de G es invariante respecto a esta acción es decir, cumple $hKh^{-1} = K$ para todo $h \in H$, si y sólo si se tiene

$$H \subset N(K),$$

donde $N(K) = \{g \in G \mid gKg^{-1} = K\}$ es el *normalizador* de K en G.

Proposición 2.5.3. *Sean H y K subgrupos cerrados de un grupo G. La función*

$$H \times G/K \to G/K,$$

dada por $(h, gK) \mapsto h \star gK = hgh^{-1}K$ es una acción si y sólo si $H \subset N(K)$.

Demostración. Supongamos que $\star$ es una acción bién definida.

Sea $h \in H$. Veamos que $hKh^{-1} \subset K$. Si $y \in hKh^{-1}$, entonces $y = hkh^{-1}$ para alguna $k \in K$ y $hkh^{-1}K = h \star kK$. Como la acción está bien definida y $kK = eK$, tenemos:

$$hkh^{-1}K = h \star kK = h \star eK = hh^{-1}K = K$$

lo cual implica que $y = hkh^{-1} \in K$ y, por lo tanto, $hKh^{-1} \subset K$. Como $hKh^{-1} \subset K$ para cada $h \in H$, en realidad tenemos $hKh^{-1} = K$, es decir, $h \in N(H)$.

Ahora supongamos que $H \subset N(K)$. Si $g_1K = g_2K$, entonces $g_2^{-1}g_1 \in K$. Para cada $h \in H$, tenemos $hKh^{-1} = K$ y, en particular, $hg_2^{-1}g_1h^{-1} \in K$. Esto se puede reescribir $(hg_2h^{-1})^{-1}(hg_1h^{-1}) \in K$, lo cual implica que $hg_1h^{-1}K = hg_2h^{-1}K$, es decir, $h \star g_1K = h \star g_2K$. Concluimos que la función $(h, gK) \mapsto h \star gK$ está bien definida.

Veamos que es una acción. Sean $e \in H$, $h_1, h_2 \in H$ y $gK \in G/K$.

(a) $e \star gK = gK$

(b) $h_1h_2 \star gK = (h_1h_2)g(h_1h_2)^{-1}K = h_1(h_2gh_2^{-1})h_1^{-1}K = h_1 \star (h_2 \star gK)$.

La continuidad se sigue de la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
H \times G \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "id_H \times q"'] & G \arrow[d, "q"] \\
H \times G/K \arrow[r, "\theta^*"'] & G/K
\end{tikzcd}$$

donde $\theta(h,g) = hgh^{-1}$, $q(g) = gK$, y $\theta^*(h, gK) = h \star gK = hgh^{-1}K$, y además de que q es una función abierta (ver Proposición 1.1.9.) $\square$

Observación 2.5.4. La acción de H en G/H por conjugación está bien definida pues $H \subseteq N(H)$. De hecho esta acción coincide con la acción por traslación izquierda de H sobre $G/H : (h, gH) \mapsto h \star gH = hgh^{-1}H = hgH$.

Corolario 2.5.5. *Sean H, K y M son subgrupos cerrados de G tales que $M \subset K$. Si $H \subset N(M) \cap N(K)$, entonces la proyección natural*

$$q : G/M \to G/K, \quad gM \mapsto gK.$$

es una H-función respecto a las acciones de H en G/M y G/K por conjugación.

Demostración. Como $H \subset N(M)$ y $H \subset N(K)$, de la Proposición 2.5.3 H actúa sobre G/M y G/K por conjugación, es decir, tenemos las acciones $h \star gM = hgh^{-1}M$ y $h \star gK = hgh^{-1}K$.

Ahora es inmediato verificar que q es una H función, en efecto, sean $h \in H$ y $gM \in G/M$, entonces

$$q(h \star gM) = q(hgh^{-1}M) = hgh^{-1}K = h \star gK = h \star q(gM).$$

$\square$

Definición 2.5.6.

(i) *Sean* H *y* K *subgrupos cerrados de un grupo* G*. Vamos a decir que* G/K *es un* H***-espacio por conjugación*** *si* $H \subset N(K)$ *y* G/K *está dotado de la acción* $(h, gK) \mapsto h \star gK = hgh^{-1}K$*.*

(ii) *Sean* H*,* K *y* M *son subgrupos cerrados de* G *tales que* $M \subset K$*. Se dice que la proyección natural*

$$q : G/M \to G/K, \quad gM \mapsto gK.$$

es una H***-función por conjugación*** *si* $H \subset N(M) \cap N(K)$ *y los espacios* G/M *y* G/K *son* H*-espacios por conjugación.*

En particular, si H es un subgrupo cerrado de un grupo G, entonces siempre podemos considerar la proyección natural $q : G \to G/H$ como una H-función por conjugación.

En realidad, el propósito de esta sección es probar la siguiente afirmación:

Teorema 2.5.7. *Sea* G *un grupo compacto y sean* H *y* K *subgrupos cerrados de* G *tales que* $H \subset N(K)$*. Si* M *es un subgrupo normal grande de* G *tal que* $M \subset K$*, entonces la proyección*

$$q : G/M \to G/K,$$

considerada como H*-función por conjugación es una* H*-fibración regular.*

Demostración. Como M es un subrupo normal cerrado de$G$, HM y KM son subgrupos cerrados de G y los grupos cocientes HM/M y KM/M son subgrupos cerrados de del grupo cociente G/M. Como, además, M es un subgrupo grande, G/M es un grupo compacto de Lie y, por lo tanto, HM/M y KM/M también son grupos compactos de Lie pues son subgrupos cerrados de G/M.

Vamos a considerar G/M como como un HM/M-espacio izquierdo con la acción de HM/M por conjugación

$$hM \star gM = (hM)(gM)(hM)^{-1} = hgh^{-1}M$$

y como un K/M-espacio derecho por traslaciones derechas

$$gM \cdot kM = (gM)(kM) = gkM.$$

Obviamente, esta acción derecha es libre.

Sea $\alpha : HM/M \to Aut(K/M)$, $hM \mapsto \alpha_{hM}$, el homomorfismo dado por $\alpha_{hM}(kM) = hkh^{-1}M$. Este está bien definido ya que $H \subset N(K)$. Además tenemos

$$hM\star(gM\cdot kM) = hgkh^{-1}M = (hgh^{-1})M\cdot hkh^{-1}M = (hM\star gM)\cdot\alpha_{hM}(kM).$$

Esto significa que el espacio G/M (que, desde luego, es metrizable por ser un grupo de Lie) con las acciones $\star$ y $\cdot$ satisface las condiciones del Corolario

2.5.2. Por lo tanto, la proyección K/M-orbital

$$q' : G/M \to (G/M)/(K/M)$$

es una HM/M-fibración regular.

Según la Proposición 2.1.7, q' es también una H-fibración regular respecto a la acción de H sobre G/M y $(G/M)/(K/M)$ via el homomorfismo $\beta : H \to HM/M$, $h \mapsto hM$. Evidentemente, es una acción por conjugación debido a la definición de la acción $\star$. De manera natural podemos identificar el espacio $(G/M)/(K/M)$ con G/K por medio del homeomorfismo

$$(G/M)/(K/M) \to G/K, \quad gM(K/M) \mapsto gK.$$

Por consiguiente, podemos identificar q' con la H-función $q : G/M \to G/K$. $\square$

Observación 2.5.8.

(a) Tomando $M = \{e\}$ y $K = H$ en el Teorema 2.5.7, tenemos la siguiente afirmación: *la proyección natural $G \to G/H$, considerada como H-función por conjugación, es una H-fibracion siempre que G sea un grupo compacto de Lie y H sea un subgrupo cerrado de este.* Este hecho se puede encontar en [19, p.266] y la generalizamos en la siguiente sección.

(b) Observe que la función $p : E \to B$ del Teorema 2.3.3 es un (G, α, K)-haz numerable en el sentido de [12, (8.7)]. La demostración del Teorema 2.3.3 es, de hecho, una realización de la idea de la prueba de [12, Proposition (8.10)] la cual afirma que p es localmente trivial como (G, α, K)-haz. Así la proyección $q : G/M \to G/K$ en el Teorema 2.5.7 se puede considerar como un $(HM/M,\ \alpha,\ K/M)$-haz localmente trivial. Uno puede usar argumentos estándares para probar que un (G, α, K)-haz numerable localmente trivial tiene la EHLP, utilizando la estructura de haz sobre $B \times I$; esta estructura está dada en [12, Proposition (8.13)].

2.6. El funtor de producto torcido preserva fibraciones

El siguiente lema explica porqué estamos interesados en las acciones por conjugación. La idea de esta prueba en efecto está contenida en la prueba del [19, Lema 2.8].

Lema 2.6.1. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto G. Sea $p : E \to B$ una H-fibración. Si la proyección natural $q : G \to G/H$ considerada* *como H-función por conjugación es una H-fibración, entonces la G-funcion*

$$\tilde{p} = G \times_H p : G \times_H E \to G \times_H B$$

es una G-fibración.

Demostración. Consideremos el diagrama conmutativo de G-funciones

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\partial_0"'] & G \times_H E \arrow[d, "\tilde{p}"] \\ X \times I \arrow[r, "F"'] & G \times_H B \end{tikzcd} \tag{2.6.1}$$

Debemos encontrar un relleno $\widetilde{F} : X \times I \to G \times_H E$ del diagrama. Consideremos la proyección natural $\lambda : G \times_H B \to G/H$, $\lambda([g,b]) \mapsto gH$, y sea $A = \partial_0^{-1} F^{-1} \lambda^{-1}(eH)$. Entonces A es un subconjunto H-invariante de X y tenemos el siguiente diagrama conmutativo de H-funciones

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "c_e"] \arrow[d, hook, "\partial_0|_A"'] & & G \arrow[d, "q"] \\ A \times I \arrow[r, "F|_{A\times I}"'] & G \times_H B \arrow[r, "\lambda"'] & G/H \end{tikzcd}$$

donde G lo consideramos como un H-espacio con la acción por conjugación $h \star g = hgh^{-1}$, y c_e es la H-función constante $a \mapsto e$.

Como la proyección $q : G \to G/H$ es una H-fibración, existe una H-función $\theta : A \times I \to G$ tal que $\theta \circ \partial_0 = c_e$ y $q \circ \theta = \lambda \circ F$. Usamos la función θ para modificar $F|_{A\times I}$ como sigue: Sea $\Phi : A \times I \to G \times_H B$ dada por

$$\Phi(a,t) = (\theta(a,t))^{-1} F(a,t)$$

para $(a,t) \in A \times I$. Es fácil ver que Φ es una H-función como lo es $F|_{A\times I}$. En efecto, como $\theta(ha,t) = h\theta(a,t)h^{-1}$ para $h \in H$, tenemos

$$\Phi(ha,t) = (h\theta(a,t)h^{-1})^{-1}hF(a,t) = h(\theta(a,t))^{-1}F(a,t) = h\Phi(a,t)$$

para $(a,t) \in A \times I$ y $h \in H$. Notemos que $\Phi(A \times I) \subset \lambda^{-1}(eH)$, ya que

$$\begin{aligned}
\lambda(\Phi(a,t)) &= \lambda((\theta(a,t))^{-1}F(a,t)) = (\theta(a,t))^{-1}\lambda(F(a,t)) \\
&= (\theta(a,t))^{-1}q(\theta(a,t)) = q((\theta(a,t))^{-1}\theta(a,t)) \\
&= q(e) = eH.
\end{aligned}$$

Como H es compacto, la H-función $B \to G \times_H B$, $b \mapsto [e,b]$, es un encaje cerrado H-equivariante, así que el H-conjunto B se puede identificar con el subconjunto H-invariante $[e,B] = \{[e,b] | b \in B\} = \lambda^{-1}(eH)$ de $G \times_H B$ por medio de la correspondencia $b \leftrightarrow [e,b]$. Análogamente, el conjunto E se identifica con $[e,E]$. Bajo esta identificación la función $p : E \to B$ se puede considerar como una restricción de $\tilde{p}$. Además, tenemos $\Phi(A \times I) \subset B$ y $f(A) \subset E$ (ya que $A = f^{-1}\tilde{p}^{-1}\lambda^{-1}(eH) = f^{-1}\tilde{p}^{-1}([e,B])$). La conmutatividad del diagrama (2.6.1) implica la conmutatividad del diagrama de H-funciones

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f|_A"] \arrow[d, hook, "\partial_0|A"'] & E \arrow[d, "p"] \\
A \times I \arrow[r, "\Phi"'] & B
\end{tikzcd}$$

pues $\Phi(a,0) = (\theta(a,0))^{-1}F(a,0) = F(a,0)$ para todo $a \in A$, recordando que $\theta(a,0) = \theta \circ \partial_0(a) = c_e(a) = e$. Como p es una H-fibración, existe una H-función $\widetilde{\Phi} : A \times I \to E$ tal que $\widetilde{\Phi} \circ \partial_0(a) = f(a)$ y $p \circ \widetilde{\Phi}(a,t) = \Phi(a,t)$.

Ahora notemos que $X = GA$; más precisamente, X se puede identificar con el producto torcido $G \times_H A$ mediante la correspondencia $ga \leftrightarrow [g,a]$, la cual define un G-homeomorfismo (ver [10, Ch.II, Proposition 3.2]). Usando este hecho, definimos la función $\widetilde{F} : X \times I \to G \times_H E$ comon sigue: si $x = ga$ para $g \in G$ y $a \in A$, entonces

$$\widetilde{F}(x,t) = [g\theta(a,t), \widetilde{\Phi}(a,t)].$$

Es fácil ver que $\widetilde{F}$ está bie definida y que es una G-función. Además,

$$\widetilde{F}(x,0) = [g\theta(a,0), \widetilde{\Phi}(a,0)] = [ge, f(a)] = gf(a) = f(ga) = f(x)$$

y

$$\begin{aligned}
\tilde{p} \circ \widetilde{F}(x,t) &= \tilde{p}([g\theta(a,t), \widetilde{\Phi}(a,t)]) = [g\theta(a,t), p(\widetilde{\Phi}(a,t))] \\
&= [g\theta(a,t), \Phi(a,t)] = [g\theta(a,t), (\theta(a,t))^{-1}F(a,t)] \\
&\equiv g\theta(a,t)(\theta(a,t))^{-1}F(a,t) = gF(a,t) \\
&= F(ga,t) = F(x,t).
\end{aligned}$$

Así $\widetilde{F}$ es el relleno requerido del diagrama (2.6.1). $\square$

Corolario 2.6.2. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto G. Si la proyección natural $q : G \to G/H$ considerada como H-función por conjugación es una H-fibración. Entonces cada G-función $p : E \to G/H$ es una G-fibración (aquí, G/H es el G-espacio con la acción usual de G por traslaciones izquierdas).*

Demostración. Basta observar que $G/H = G \times_H \{*\}$ para el H-espacio singular $\{*\} = \{eH\}$. La G-función p se puede considerar como la función $G \times_H c : G \times_H F \to G \times_H \{*\}$, donde $F = p^{-1}(eH)$ y la función constante $c : F \to \{*\}$ trivialmente es una H-fibración. Luego aplicamos el Lema 2.6.1.

□

Teorema 2.6.3. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto metrizable G. Entonces la proyección natural*

$$q : G \to G/H,$$

considerada como H-función por conjugación, es una H-fibración regular.

Demostración. Sea $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión pro-Lie para G tal que $N_1 = G$.

Para cada i consideremos el diagrama conmutativo de proyecciones naturales

$$\begin{tikzcd}
G/N_{i+1} \arrow[dr, "\widetilde{q}_i"] \arrow[drr, "q_i^{i+1}"] \arrow[ddr, "q/N_{i+1}"'] & & \\
& G/(N_i \cap HN_{i+1}) \arrow[r] \arrow[d] & G/N_i \arrow[d, "q/N_i"] \\
& G/HN_{i+1} \arrow[r, "r_i^{i+1}"] & G/HN_i
\end{tikzcd}$$

Todas las proyecciones se pueden considerar como H-funciones por conjugación ya que todos los subgrupos N_i, HN_i y $N_i \cap HN_{i+1}$ son invariantes respecto a la acción por conjugación de H sobre G . En este diagrama el cuadrado interno es pull-back (ver la Proposición 2.2.6) y la función $\widetilde{q}_i$ es una H-fibración regular (como H-función por conjugación) de acuerdo con la Proposición 2.5.7. Aquí el cuadrado externo es H-fibrado regular para cada i. Como $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión pro-Lie para G, tenemos

$$q = \varprojlim\{q/N_i, (q_i^{i+1}, r_i^{i+1})\}.$$

La función $q/N_1 : G/G \to G/G$ trivialmente es una H-fibración. Por lo tanto, aplicando la Proposición 2.2.9, concluimos que la función límite q es también una H-fibración regular. $\square$

Como una consecuencia inmediata del Teorema 2.6.3, el Lema 2.6.1 y el

Corolario 2.6.2 tenemos el resultado principal de la tesis.

Teorema 2.6.4. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto metrizable G. Si $p : E \to B$ es una H-fibración, entonces la G-función*

$$\tilde{p} = G \times_H p : G \times_H E \to G \times_H B$$

es una G-fibración.

Demostración. Dado H un subgrupo cerrado de un grupo compacto metrizable G, la proyección natural $q : G \to G/H$ considerada como H-función por conjugación es una H-fibración según el Teorema 2.6.3 y como p es una H-fibración, entonces el Lema 2.6.1 nos asegura que $\tilde{p}$ es una G-fibración. □

Corolario 2.6.5. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto metrizable G. Entonces cada G-función $p : E \to G/H$ es una G-fibración.*

Capítulo 3

Espacios G-fibrantes y productos torcidos

A lo largo de este capítulo consideraremos G-espacios metrizables, donde G es un grupo compacto (metrizable).

3.1. G-$SSDR$-mapeos

Un concepto de gran utilidad en la teoría de G-homotopías es el concepto de G-SDR-mapeo, el cual nos proporciona una caracterización para las G-fibraciones, esta caracterización sirve de base para definir una clase más estrecha de G-fibraciones que se estudian en este capítulo.

Definición 3.1.1. *Sea X un G-espacio y A un subconjunto cerrado invariante de X. Se dice que A es un G-**retracto fuerte por deformación** de X si existe una G-homotopía $D : X \times I \to X$ tal que $D(x, 0) = x$, $D(x, 1) \in A$ para todo $x \in X$ y $D(a, t) = a$ para toda $(a, t) \in A \times I$.*

*Un G-encaje cerrado $i : A \hookrightarrow X$ se llama G-SDR-**mapeo** si encaja a A en X como un G-retracto fuerte por deformación de X (véase la figura 3.1).*

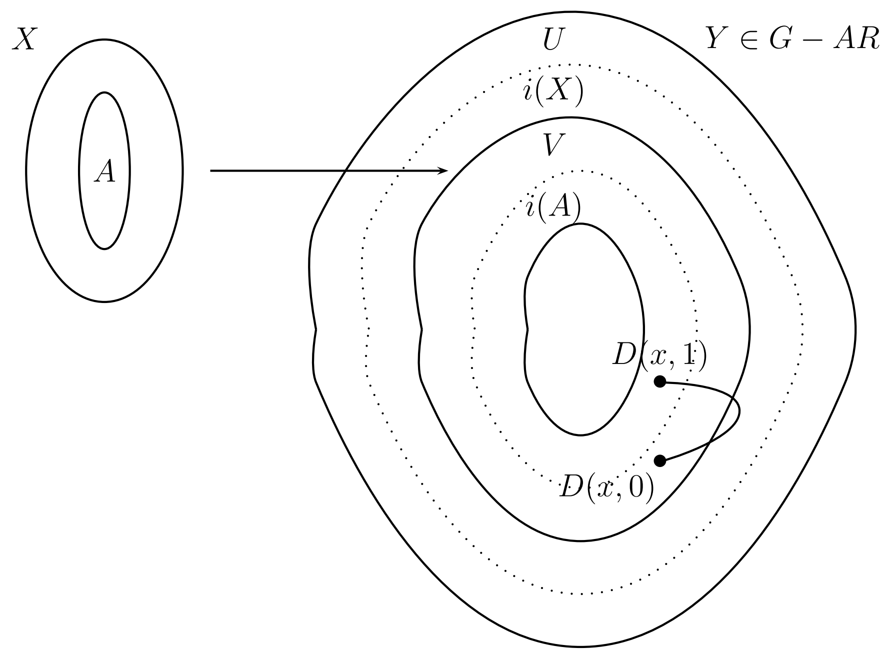

Figura 3.1: Representación geométrica de G-$SSDR$-mapeo.

Proposición 3.1.2. *Sean G un grupo compacto de Hausdorff y $p : E \to B$*

una G-función entre G-espacios metrizables. Entonces la función, $p : E \to B$ es una G-fibración si y sólo si para todo G-SDR-mapeo, $i : A \longrightarrow X$ y todo diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[F]{} & B \end{array}$$

donde f y F son G-funciones, existe un relleno para el diagrama.

Demostración. $\Leftarrow$) Es evidente ya que $\partial_0 : X \hookrightarrow X \times I$ dado por $\partial_0(x) = (x, 0)$ es un G-SDR-mapeo.

$\Rightarrow$) Sea

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[F]{} & B \end{array}$$

un diagrama conmutativo de G-funciones tal que $i : A \hookrightarrow X$ es un G-SDR-mapeo. Sin perdida de generalidad podemos asumir que $A = i(A) \subseteq X$.

Ya que i es un G-SDR-mapeo, existe una G-homotopía $D : X \times I \longrightarrow X$ tal que $D(x, 1) = x$, $D(x, 0) \in A$ para todo $x \in X$ y $D(a, t) = a$ para toda $(a, t) \in A \times I$.

Al definir la G-retracción $r : X \to A$ por $r(x) = D(x, 0)$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\partial_0"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "D"'] & X \arrow[r, "F"'] & B. \end{tikzcd}$$

donde $\partial_0(x) = (x, 0)$. Para todo $a \in A$ y $t \in I$ tenemos $F(D(a,t)) = F(a)$, es decir, $F \circ D$ es una G-homotopía relativa a A. Como p tiene la $EHLP$ según la proposición 2.1.3, existe una G-homotopía $H : X \times I \to E$ relativa a A tal que $p \circ H = F \circ D$ y $H \circ \partial_0 = f \circ r$.

Definimos la G-función $\bar{F} : X \to E$ por $\bar{F} = H(x, 1)$, $x \in X$. Entonces

$$\bar{F} \circ i(a) = \bar{F}(a) = H(a, 1) = H(a, 0) = f(r(a)) = f(a)$$

para cada $a \in A$ y para cada $x \in X$ se tiene que $p \circ \bar{F}(x) = p \circ H(x, 1) = F \circ D(x, 1) = F(x)$. Por lo tanto, $\bar{F} \circ i = f$ y $p \circ \bar{F} = F$ lo que deseábamos demostrar. $\Box$

La siguiente noción es una generalización del concepto de G-SDR-mapeo.

Definición 3.1.3. *Un subespacio invariante cerrado A de un G-espacio X se llama un G-**retracto por deformación de strong shape de** X si existe un G-encaje cerrado $\alpha : X \hookrightarrow M$ de X en un G-AR espacio M que satisface la condición siguiente: para cualquier par de vecindades invariantes (U, V)*

de $(\alpha(X), \alpha(A))$ en M, existe una G-homotopía $H : X \times I \to U$ rel.A tal que $H(x,0) = \alpha(x)$ y $H(x,1) \in V$ para todo $x \in X$.

Definición 3.1.4. *Un G-encaje cerrado $s : A \hookrightarrow X$ se le llama **G-$SSDR$-mapeo** si s encaja a A como un G-retracto por deformación de strong shape de X.*

El teorema siguiente es nos proporciona varias caracterizaciones del concepto de G-$SSDR$-mapeo.

Teorema 3.1.5. ([9, Thm. 2.1]) *Sea $s : A \hookrightarrow X$ un G-encaje cerrado. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) s es un G-$SSDR$-mapeo.

(b) Para toda función G-equivariante $f : A \longrightarrow Y$, donde Y es un G-ANE-espacio, existe una G-extensión $\bar{f} : X \longrightarrow Y$ tal que $\bar{f} \circ s = f$, y si $\bar{f}_1, \bar{f}_2 : X \longrightarrow Y$ son dos G-extensiones de f, entonces $\bar{f}_1 \simeq_G \bar{f}_2 rel\ s(A)$.

(c) Para cualquier G-fibración $p : E \longrightarrow B$, donde E y B son G-ANE

espacios, y cada diagrama conmutativo de G-funciones

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[F]{} & B \end{array} \tag{3.1.1}$$

existe un relleno $\bar{F} : X \longrightarrow E$.

La siguiente afirmación nos da un ejemplo importante de un G-$SSDR$-mapeo.

Proposición 3.1.6. *Sea A un subconjunto cerrado invariante de un G-espacio X, entonces la inclusión*

$$i : X \times \{0\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$$

es un G-$SSDR$-mapeo.

Demostración. Supongamos que V es una vecindad invariante de $T = X \times \{0\} \cup A \times I$ en $X \times I$. Entonces por la compacidad de I y de G, existe una vecindad abierta invariante U de A en X tal que $U \times I \subset V$. Como X es metrizable, existe una función invariante $\varphi : X \to I$ (es decir, $\varphi(gx) = \varphi(x)$ para cada $g \in G$ y $x \in X$) tal que $\varphi(X \setminus U) = 0$ y $\varphi(A) = 1$. La G-función

$$D : (X \times I) \times I \to X \times I$$

definida por $D((x,t),\tau) = (x, \varphi(x)t\tau + t - t\tau)$ deforma $X \times I$ en V dejando fijos los puntos de T. Por lo tanto i es un G-$SSDR$-mapeo según la definición.

□

Como un corolario de la Proposición 3.1.6 tenemos:

Demostración de la Proposición 2.1.6. Sea dado un diagrama conmutativo de G-funciones

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \cup A \times I \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "F"'] & B
\end{tikzcd}$$

donde A es un subconjunto cerrado invariante de X (y p es una G-fibración de G-ANE's de acuerdo con la hipótesis de la Proposición 2.1.6). Como i es un G-$SSDR$-mapeo existe una G-función $X \times I \to E$ como un relleno del diagrama por el Teorema 3.1.5. Esto significa que p es una G-fibración regular. □

3.2. G-fibraciones fuertes y espacios G-fibrantes

Definición 3.2.1. *Una G-función $p : E \to B$ entre G-espacios metrizables se llama G-**fibración fuerte** si para cada diagrama conmutativo (3.1.1) de G-funciones, donde $s : A \hookrightarrow X$ es un G-$SSDR$-mapeo, existe una G-función $\widetilde{F} : X \to E$ como un relleno.*

Definición 3.2.2. *Un G-espacio metrizable E se llama espacio **fibrante equivariante** o espacio G- **fibrante** si la G-función $E \to *$ es una G-fibración fuerte (donde $*$ es el espacio singular con la acción trivial de G).*

Proposición 3.2.3. *Cada G-ANE-espacio Y es un espacio G-fibrante.*

Demostración. Sea $s : A \longrightarrow X$ un G-$SSDR$-mapeo y $f : A \longrightarrow Y$ una G-función. Por el Teorema 3.1.5, (a)$\Rightarrow$(b), existe una G-función $\bar{f} : X \longrightarrow Y$ tal que $\bar{f} \circ s = f$. Por lo tanto, Y es un G-espacio fibrante. □

El siguiente resultado nos proporciona una clase importante de espacios G-fibrantes.

Proposición 3.2.4. ([6, Th. 5.1]). *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo compacto metrizable G. Entonces el espacio cociente G/H es un espacio G-*

fibrante.

Observación 3.2.5. En virtud del teorema 3.1.5 toda G-fibración de G-ANR espacios es una G-fibración fuerte.

Tenemos una afirmación más general la cual nos dan una relación entre las G-fibraciones fuertes y los espacios G-fibrantes (vea también [11, Examples (2.2)] para el caso no equivariante).

Proposición 3.2.6. ([8, Appendix. A.2]) *Sean E y B espacios G-fibrantes. Cada G-fibración $p : E \to B$ es una G-fibración fuerte.*

Proposición 3.2.7. *Si $p : E \to B$ es una G-fibración fuerte tal que B es G-fibrante, entonces E es un espacio G-fibrante.*

Demostración. Sea $s : A \hookrightarrow X$ un G-$SSDR$-mapeo y sea $f : A \to E$ una función G-equivariante. Deseamos encontrar una G-función $F : X \to E$ tal que $F \circ s = f$. Como B es un G-fibrante existe $F' : X \to B$ tal que $F' \circ s = p \circ f$. Ahora, como p es una G-fibración fuerte, existe una función G-equivariante $F : X \to E$ tal que $p \circ F = F'$ y $F \circ s = f$. $\square$

La relación entre tres tipos de G-fibraciones consideradas en la tesis se expresa como sigue:

$$\{G\text{-fibraciones }\} \supset \{G\text{-fibraciones regulares }\} \supset \{G\text{-fibraciones fuertes }\}$$

La primera inclusión es obvia: basta tomar $A = \emptyset$ en la definición de G-fibración regular y recordar que cada G-función entre G-espacios metrizables que tiene la EHLP respecto a los G-espacios metrizables, también tiene la EHLP respecto a todos los G-espacios (ver [8, Remark A.1]). La segunda inclusión es una consecuencia de la Proposición 3.1.6.

Proposición 3.2.8. *Sea $\boldsymbol{E} = \{E_i, q_i^j\}$ una sucesión inversa de G-espacios y G-funciones. Si todas las funciones $q_i^{i+1} : E_{i+1} \to E_i$ son G-fibraciones fuertes, entonces todas las proyecciones naturales $q_i : \varprojlim \boldsymbol{E} \to E_i$ también son G-fibraciones fuertes. Por consiguiente, si E_k es un G-fibrante para alguna $k \in \mathbb{N}$, entonces $\varprojlim \boldsymbol{E}$ también es un G-fibrante.*

Demostración. Dado $i \in \mathbb{N}$, tenemos que probar que para todo diagrama conmutativo de G-funciones

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & E \arrow[d, "q_i"] \\ X \arrow[r, "F_i"'] & E_i \end{tikzcd}$$

donde s es un G-$SSDR$-mapeo y $E = \varprojlim \boldsymbol{E}$, existe una G-función $F : X \to E$ que preserva la conmutatividad. Vamos a construir, por inducción, las G-funciones $F_j : X \to E_j$ para $j > i$ como sigue:

si F_j ya está encontrada definamos F_{j+1} de tal manera que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "q_{j+1}\circ f"] \arrow[d, "s"'] & E_{j+1} \arrow[d, "q_j^{j+1}"] \\ X \arrow[r, "F_j"'] \arrow[ur, "F_{j+1}"] & E_j \end{tikzcd}$$

F_{j+1} existe ya que q_j^{j+1} es una G-fibración fuerte. La familia $\{F_j\}_{j\geq i}$ determina unívocamente una G-función $F : X \to E$ tal que $q_j \circ F = F_j$ para cada $j \geq i$, en particular, $q_i \circ F = F_i$. Por otro lado, como $q_j \circ f = F_j \circ s = q_j \circ (F \circ s)$ para cada $j \geq i$ tenemos $f = F \circ s$. Así q_i es una G-fibración fuerte.

Ahora, si E_k es un G-fibrante para alguna k, entonces E es un G-fibrante en virtud de la proposición 3.2.7. □

Como G-fibraciones de G-fibrantes son G-fibraciones fuertes (Proposición 3.2.6) inmediatamente obtenemos:

Corolario 3.2.9. *Sea $\boldsymbol{E} = \{E_i, q_i^j\}$ una sucesión inversa tal que todos E_i son G-fibrantes y todas $q_i^{i+1} : E_{i+1} \to E_i$ son G-fibraciones. Entonces $E = \varprojlim \boldsymbol{E}$ es un G-fibrante y todas proyecciones $q_i : E \to E_i$ son G-fibraciones fuertes.*

Corolario 3.2.10. *Si $\boldsymbol{E} = \{E_i, q_i^j\}$ es una sucesión inversa de G-ANR espacios y G-fibraciones, entonces $E = \varprojlim \boldsymbol{E}$ es un G-fibrante y todas proyecciones $q_i : E \to E_i$ son G-fibraciones fuertes.*

3.3. Propiedades de los G-$SSDR$-mapeos y G-fibraciones fuertes.

Describiremos la posibilidad de cambio de grupos en los conceptos de G-$SSDR$-mapeo, G-fibración fuerte y espacio G-fibrante.

Proposición 3.3.1. *Sea $\beta : G' \to G$ un homomorfismo continuo de grupos topológicos compactos. Si $coKer\beta = G/Im\beta$ es metrizable, entonces*

(a) si $s : A \to X$ es un G'-$SSDR$-mapeo, entonces la función

$$G \times_\beta s : G \times_\beta A \to G \times_\beta X$$

es un G-$SSDR$-mapeo;

(b) si p G-fibración fuerte, entonces p es una G'-fibración fuerte via β;

(c) si E es un espacio G-fibrante, entonces E es un espacio G'-fibrante via β.

Demostración.

Sea A un subconjunto cerrado invariante de un G'-espacio X y sea $p : E \to B$ una G-función. Según el enfoque de cambio de grupos descrito en la sección 1.5, debemos considerar un diagrama conmutativo de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[ddd, hook, "s"'] & & E \arrow[ddd, "p"] \\
& G \times_\beta A \arrow[ur, "\widehat{f}"'] \arrow[d, hook, "G\times_\beta s"'] & \\
& G \times_\beta X \arrow[dr, "\widehat{F}"] & \\
X \arrow[rr, "F"] \arrow[ur, "i_X"] & & B
\end{tikzcd} \tag{3.3.1}$$

donde f y F son G'-funciones (respecto a las acciones de G' sobre E y B via β) y $\widehat{f}$ y $\widehat{F}$ son las G-funciones inducidas por f y F respectivamente. Observe que, por la propiedad universal, la existencia de una G'-función $\widetilde{F} : X \to E$ (con la acción de G' sobre E via β) como un relleno del diagrama es equivalente a la existencia de una G-función $\overline{F} : G \times_\beta X \to E$ como un relleno.

(a). Supongamos que p es una G-fibración entre espacios G-ANE . Para probar que $G \times_\beta s$ es un G-$SSDR$-mapeo, basta mostrar en virtud del Teorema 3.1.5 que existe un relleno $\overline{F} : G \times_\beta X \to E$. Según las proposiciones 1.5.8 y 2.1.7, p también es una G'-fibración entre espacios G'-ANE's via β y como s es un G'-$SSDR$-mapeo, existe un relleno $\widetilde{F} : X \to E$. Esto implica la existencia del relleno $\overline{F}$ deseado.

(b). Supongamos que en diagrama (3.3.1) s es un G'-$SSDR$-mapeo. Como p es una G-fibración fuerte y $G \times_\beta s$ es un G-$SSDR$-mapeo según (a), existe un relleno $\overline{F} : G \times_\beta X \to E$. Por lo tanto la G'-función $\widetilde{F} : X \to E$ via β dada por $\widetilde{F} = \overline{F} \circ i_X$, es también un relleno para el diagrama. Esto prueba que p es una G'-fibración fuerte.

(c) Se sigue inmediatamente de (b) y de la definición de un espacio G-fibrante. $\square$

Proposición 3.3.2. *Sea*

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

un cuadrado pull-back de G-funciones tal que $p : E \to B$ es una G-fibración fuerte. Entonces la función $p' : E' \to B'$, también es G-fibración fuerte.

Además

(a) si E, B y B' son G-fibrantes entonces E' también lo es;

(b) si E, B y B' son G-ANE espacios entonces E' también lo es.

Demostración. Sea $i : A \hookrightarrow X$ un G-SDR-mapeo y sean G-funciones $h : A \to E'$, $H : X \to E'$ tales que $p' \circ h = H \circ i$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & E' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "H"'] \arrow[urr, "F"] & B' \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

donde la G-función $F : X \to E$, encontramos en virtud que p es una G-fibración. Por la propiedad característica de un cuadrado pull-back las G-funciones H y F determinan unívocamente una G-función $\bar{H} : X \to E'$ tal que $p' \circ \bar{H} = H$ y $f' \circ \bar{H} = F$. Por otro lado, $p' \circ (\bar{H} \circ i) = H \circ i = p' \circ f$ y $f' \circ (\bar{H} \circ i) = F \circ i = f' \circ h$, pero esto implica $\bar{H} \circ i = h$. Por tanto p' es una G-fibración.

Absolutamente del mismo modo se verifica que p' es una G-fibración fuerte si p lo es.

(a). Como E y B son G-fibrantes, p es una G-fibración fuerte según la proposición 3.2.6. Por tanto, p' también es una G-fibración y, como B' es un fibrante, E' es un G-fibrante debido a la proposición 3.2.7.

(b). Sea A un subconjunto cerrado invariante de un G-espacio metrizable X y sea $h : A \to E'$ una G-función. Veamos que existe una G-extensión $\bar{h} : V \to E'$ de h en alguna vecindad invariante V de A en X. De esta forma, probaremos que E' es un G-ANE espacio.

Ya que B' y E son G-ANE espacios, existen G-extensiones $\widetilde{p} : U_1 \to B'$

y $\widetilde{f} : U_2 \to E$ de $p' \circ h$ y $f' \circ h$ respectivamente en vecindades invariantes U_1 y U_2 de A en X. De hecho, podemos asumir que $U_1 = U_2 = U$, tomando $U = U_1 \cap U_2$ si sea necesario. Ahora definamos una función

$$\widetilde{h} : U \times \{0,1\} \cup A \times I \to B$$

como sigue:

$$\widetilde{h}(x,0) = p \circ \widetilde{f}(x), \quad x \in U,$$

$$\widetilde{h}(x,1) = f \circ \widetilde{p}(x), \quad x \in U,$$

$$\widetilde{h}(a,t) = p \circ \widetilde{f}(a) = p \circ f' \circ h(a), \quad a \in A, \ t \in I$$

Claramente, $\widetilde{h}$ es continua, pues $f \circ \widetilde{p}|_A = p \circ \widetilde{f}|_A = p \circ f' \circ h$, y, por supuesto, es G-función.

Ya que B es G-ANE-espacio, existe una extensión equivariante $F : W \to B$ de $\widetilde{h}$ en una vecindad invariante W de $U \times \{0,1\} \cup A \times I$ en $U \times I$. Sea $V_t \times \{t\} = W \cap U \times t$ para cada $t \in I$. Entonces, para cada t, V_t es una vecindad invariante de A en U y, por tanto, en X (pues U es una vecindad de A en X). Sea $V = \cap_{t \in I} V_t$. Es fácil ver que V es un subconjunto invariante y es una vecindad de A en X en virtud de la compacidad de I. Además, $V \times I \subset W$, y, consecuentemente, podemos considerar la restricción $H : V \times I \to B$ de F en $V \times I$. De hecho, $H : p \circ \widetilde{f}|_V \simeq_G f \circ \widetilde{p}|_V \ rel.A$.

Como p tiene la $EHLP$, existe una G-homotopía $\overline{H} : V \times I \to E$ tal que $p \circ \overline{H} = H$, $\overline{H}(x,0) = \widetilde{f}(x)$ para $x \in V$ y $\overline{H}(a,t) = \overline{f}(a) = f' \circ h(a)$ para $a \in A$ y para toda $t \in I$.

Definamos $\widetilde{f_1} : V \to E$ por $\widetilde{f_1} = \overline{H}(x,1)$ para $x \in V$. Entonces $\widetilde{f_1}$ es una G-función para la cual se tiene

$$p \circ \widetilde{f_1}(x) = p \circ \overline{H}(x,1) = H(x,1) = f\widetilde{p}(x)$$

para $x \in V$, es decir, $p \circ \widetilde{f_1} = f \circ \widetilde{p}|_V$. Por lo tanto, $\widetilde{f_1}$ y $\widetilde{p}|_V$ determinan una G-función única $\bar{h} : V \to E'$ tal que $f' \circ \bar{h} = \widetilde{f_1}$ y $p' \circ \bar{h} = \widetilde{p}$. Ya que $\widetilde{f_1}|_A = f' \circ h$ y $\widetilde{p}|_A = p' \circ h$, se cumple $\bar{h}|_A = h$. Así, $\bar{h}$ es la G-extensión de h que deseábamos encontrar. □

3.4. G-fibraciones fuertes y el funtor de producto torcido.

La aportación destacada de esta sección y de todo el trabajo de tesis son las Proposiciones 3.4.4 y 3.4.6(b) que dan respuesta positiva a las Preguntas 4.4 y 4.5 planteadas por S.A. Antonyan en [5] para el caso de un grupo compacto metrizable G.

Definición 3.4.1. *Diremos que un G-subconjunto A de un G-espacio X es un G-**retracto fuerte por deformación de vecindad de** X si para alguna vecindad G-invariante U de A en X, existe una G-deformación fuerte de U en A sobre X, es decir, existe una G-función*

$$D : U \times I \to X$$

tal que $D(u, 0) = u$, $D(u, 1) \in A$ y $D(a, t) = a$ para todo $u \in U$, $a \in A$ y $t \in I$.

Proposición 3.4.2. *Sea $p : E \to B$ es una G-función que tiene la $EHLP$ relativa y A es un G-retracto fuerte por deformación de vecindad de B, entonces $p^{-1}(A)$ es un G-retracto fuerte por deformación de vecindad de E.*

Demostración. Por hipótesis existe una vecindad G-invariante U de A en B y una G-deformación fuerte de U en A sobre B, es decir, $D : U \times I \to B$ tal que $D(u, 0) = u$, $D(u, 1) \in U$ y $D(a, t) = a$. Sea $U' = p^{-1}(U)$, es claro que esta es una vecindad G-invariante de $p^{-1}(A)$ en E. Entonces podemos considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "\partial_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ U' \times I \arrow[r, "D'"'] & B \end{tikzcd}$$

donde $\partial_0(u') = (u', 0)$, $D'(u', t) = D(p|_{U'}(u'), t)$, y $d'(u') = u'$ para cada $u' \in U$ y cada $t \in I$. Dedibo a las definiciones de estas funciones el diagrama es conmutativo, y como p tiene $EHLP$ relativa, existe un relleno para el diagrama, tal relleno verifica las condiciones de una G-deformación fuerte de U' en $p^{-1}(A)$ sobre E. Por lo tanto $p^{-1}(A)$ es un G-retracto fuerte por deformación de vecindad de E. $\square$

Proposición 3.4.3. *Si x es un punto de un espacio G-ANE metrizable E, entonces $\{x\}$ es un G_x-retracto fuerte por deformación de vecindad de E.*

Demostración. Consideremos el G_x-par (X, A) y $1_A : X \to X$ y una G_x-función, donde $A = \{x\}$ y sea la G_x-homotopía $H : A \times I \to X$ tal que $H(a, 0) = 1_A(a)$. Definamos la G_x-función $F : T \to X$, $T = X \times \{0\} \cup A \times I$ por $F(x, 0) = 1_X(x)$ para cada $\in X$ y $F(a, t) = H(a, t)$ para cada $(a, t) \in A \times I$. Ahora consideremos la G_x-función $F : T \to X$ y el G_x-par $(X \times I, T)$. Como X es G_x-ANE, existe una G_x-vecindad abierta V de T en $X \times I$ y $\overline{F} : V \to X$ tal que $\overline{F}|_T = F$. En virtud de la compacidad de I, existe una G_x-vecindad U de A en X tal que $U \times I \subset V$. Luego $\overline{F}|_{U \times I} : U \times I \to X$ es una G_x-deformación fuerte de U en A sobre X y por lo tanto $\{x\}$ es un G_x-retracto fuerte por deformación de vecindad de E. $\square$

Proposición 3.4.4. *Sea H un subgrupo grande de un grupo compacto metrizable G. Si F es un H-espacio, entonces F es un H-retracto fuerte por deformación de vecindad del producto torcido $G \times_H F$.*

Demostración. Como G/H es G-ANE metrizable , el conjunto singular $\{eH\}$ es un H-retracto fuerte por deformación de vecinadad de G/H, pues $G_{eH} = H$ (ver Proposición 3.4.3). La G-función $p : G \times_H F \to G/H$, $[g, y] \mapsto gH$, es una G-fibración y por lo tanto es una H-fibración. Además por la Proposición 2.1.3, esta tiene la EHLP relativa, pues G/H es metrizable. Por lo tanto $p^{-1}(eH) = F$ es un H-retracto fuerte por deformación de vecindad de $G \times_H F$. □

Proposición 3.4.5. *Sean H un subgrupo cerrado de un grupo compacto metrizable G, y E un espacio G-fibrante. Entonces cada G-función $p : E \to G/H$ es una G-fibración fuerte.*

Demostración. El espacio cociente G/H es un espacio G-fibrante por [6, Theorem 5.1]. Así, p es una G-fibración (por el Corolario 2.6.5) entre espacios G-fibrantes y por la Proposición 3.2.6, tenemos que p es una G-fibración fuerte. □

Proposición 3.4.6. *Sea F un H-espacio, donde H es un subgrupo cerrado de un grupo compacto metrizable G.*

(a) Si el producto torcido $G \times_H F$ es un espacio G-fibrante, entonces F es un espacio H-fibrante.

(b) Si el producto torcido $G \times_H F$ es un espacio G-ANE y H es un subgrupo grande de G, entonces F es un H-ANE.

Demostración. Tenemos el siguiente cuadrados pull-back de H-espacios y H-funciones

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook] \arrow[d, "p'"'] & G \times_H F \arrow[d, "p"] \\ \{eH\} \arrow[r, hook] & G/H \end{tikzcd}$$

donde $p([g, x]) = gH$.

(a). Como $G \times_H F$ es G-fibrante, entonces p es una G-fibración fuerte por la Proposición 3.4.5; en particular, es una H-fibración fuerte. Por lo tanto p' es también una H-fibración fuerte. Como el H-espacio singular $\{eH\}$ es H-fibrante, el H-espacio F también es H-fibrante.

(b). note que como los espacios $G \times_H F$ y G/H, son G-ANE's, entonces también son H-ANE's y como p, es una G-fibración por el Corolario 2.6.5, es una H-fibración. Por lo tanto F es un H-ANE debido a la Proposición 2.2.5 (b). $\square$

En la prueba de la Proposición 3.4.8 usaremos la siguiente proposición, la cual es la afirmación inversa de (b) de la Proposición 3.4.6.

Proposición 3.4.7. ([4, Prop. 8 (1)]) *Sea H un subgrupo grande de un grupo compacto metrizable G. Si F es un H-ANE, entonces el producto torcido $G \times_H F$ es un espacio G-ANE.*

Proposición 3.4.8. *Sea H un subgrupo grande de un grupo compacto metrizable G. Sea $s : A \hookrightarrow X$ un H-encaje cerrado tal que $G \times_H s : G \times_H A \hookrightarrow G \times_H X$ es un G-$SSDR$-mapeo. Entonces s es un H-$SSDR$-mapeo.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de H-funciones

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "s"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "F"'] & B \end{tikzcd} \tag{3.4.1}$$

donde E y B son H-ANE's y p es una H-fibración. Para probar la proposición debemos de encontrar un relleno $X \to E$.

Por el Teorema 2.6.4 y [4, Proposition 8 (1)] la G-función $G \times_H p$ es una G-fibración de G-ANE's. Como $G \times_H s$ es un G-$SSDR$-mapeo, existe una

G-función $\bar{F} : G \times_H X \to G \times_H E$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times_H A \arrow[r, "G\times_H f"] \arrow[d, hook, "G\times_H s"'] & G \times_H E \arrow[d, "G\times_H p"] \\ G \times_H X \arrow[r, "G\times_H F"'] \arrow[ur, "\bar{F}"] & G \times_H B \end{tikzcd}$$

conmuta.

Recordando que X, A, E y B están identificados con los subespacios H-invariantes $[e, X] = \{[e, x] \mid x \in X\}$, $[e, A]$, $[e, E]$ y $[e, B]$ de los correspondientes productos torcidos. Notemos que $(G \times_H p)^{-1}([e, B]) = [e, E]$ y por lo tanto

$$(G \times_H p) \circ \bar{F}([e, X]) = G \times_H F([e, X]) \subset [e, B],$$

concluimos que $\bar{F}([e, X]) \subset [e, E]$.

Claramente, la restricción $\bar{F}\mid_{[e,X]}$: $[e, X] \to [e, E]$ se puede considerar como el relleno del diagrama (3.4.1) que requerimos $X \to E$. $\square$

El siguiente resultado es el análogo del Teorema 2.6.4 para G-fibraciones fuertes.

Teorema 3.4.9. *Sea H un subgrupo grande de un grupo compacto metrizable G. Si $p : E \to B$ es una H-fibración fuerte, entonces la G-función*

$$G \times_H p : G \times_H E \to G \times_H B$$

G-fibración fuerte.

Demostración. Sea $s : A \hookrightarrow X$ un G-$SSDR$-mapeo. Supongamos que $f : A \to G\times_H E$ y $F : X \to G\times_H B$ son G-funciones tales que $(G\times_H p)\circ f = F\circ s$. Entonces A y X se pueden considerar como los productos torcidos $G \times_H A'$ y $G \times_H B'$, respectivamente, donde $A' = f^{-1}([e, E])$ y $X' = F^{-1}([e, B])$. De la identificación usual $[e, E]$ con E y $[e, B]$ con B, obtenemos el diagrama conmutativo de H-funciones

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "s'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X' \arrow[r, "F'"'] & B \end{tikzcd} \tag{3.4.2}$$

donde f', F' y s' son las restricciones f, F y s, respectivamente (así que $f = G \times_H f'$, $F = G \times_H F'$ y $s = G \times_H s'$). De la Proposición 3.4.8, tenemos que s' es un H-$SSDR$-mapeo, existe una H-función $\bar{F} : X' \to E$ como relleno del diagrama (3.4.2). Obviamente, para la G-función $\widetilde{F} = G \times_H \bar{F}$, $\widetilde{F} : X \to G \times_H E$, tenemos $(G \times_H p) \circ \widetilde{F} = F$ y $\widetilde{F} \circ s = f$. Esto prueba que $G \times_H p$ es una G-fibración fuerte. □

Corolario 3.4.10. *Sea H un subgrupo grande de un grupo compacto metrizable G. Si F es un espacio H-fibrante, entonces el producto torcido $G \times_H F$ es un espacio G-fibrante.*

Demostración. La función canónica $\widetilde{p} : G \times_H F \to G/H$, $[g, x] \mapsto gH$, se puede considerar como la G-función $G \times_H p$ para la H-función constante

$p : F \to \{eH\}$ la cual es una H-fibración fuerte, pues F es H-fibrante. Por lo tanto, por el Teorema 3.4.9, $\widetilde{p}$ G-fibración fuerte. Así concluimos que $G \times_H F$ es G-fibrante pues así lo es G/H (ver [6, Theorem 5.1]). $\square$

Observación 3.4.11. Las Proposiciones 3.4.4 y 3.4.6(b) dan respuesta positiva a las Preguntas 4.4 y 4.5 planteadas por S.A. Antonyan en el artículo [5] para el caso de un grupo compacto metrizable G.

Conclusiones

La tesis se centra en la categoría G-TOP de G-espacios y G-funciones, con el propósito de estudiar las G-funciones de la forma $p : E \to G/H$, ya que el hecho bien conocido: si H es un subgrupo cerrado de un grupo *compacto de Lie* G, entonces cada G-función

$$p : E \to G/H$$

es una G-fibración ([12, p.54, Ex. 7]) nos dice que surgen de manera natural. Entonces es natural pensar que clase de G-fibración debería de ser si G no necesariamente es un grupo compacto de Lie.

A continuación presentamos las contribuciones de este trabajo.

El resultado principal de la tesis es el Teorema 2.6.4, el cual generaliza el hecho ya mencionado el cual nos dice que el funtor de producto torcido $G \times_H -$ manda H-fibraciones a G-fibraciones siempre que G sea un grupo compacto metrizable y H sea un subgrupo cerrado de este . El Lema 2.6.1 nos permite reducir la prueba de este resultado general a probar que la proyección $G \to G/H$ es una H-fibración con respecto a la acción de H sobre G por conjugación. Por la Proposición 2.6.3 es crucial en la demostración del Teorema princial, la cual afirma que la proyección canónica se puede considerar como una H-fibración para cada grupo compacto metrizable G.

La Proposición 3.4.5 que nos dice: cada G-función $p : E \to G/H$ es una G-fibración fuerte siempre que E sea un espacio G-fibrante, y la Proposición 3.4.9 que nos muestra: el funtor de producto torcido $G \times_H -$ preserva fibraciones fuertes siempre y cuando G/H sea un espacio G-ANE metrizable.

Las contribuciones de interes independientes referentes al Corolario 2.6.5 es la respuesta parcial positiva a las Preguntas 4.4 y 4.5 planteadas por S.Antonyan en [5] (ver Proposiciones 3.4.4 y 3.4.6(2)).

Finalmente el artículo "G-fibrations and twisted products"(autores: A.Bykov y R. Juárez)) fue aceptado en Septiembre de 2014 para su publicación en la revista `Topology and its Applications`. Este artículo refleja los resultados principaes de la tesis ya mencionados ([7]).

Bibliografía

[1] S.A. Antonyan, *Equivariant embeddings into G-AR's*, Glasnik Mat. 22(42) (1987) 503-533.

[2] S.A. Antonyan, *Retraction properties of the orbit space*, Mat.Sb. 137 (1988), 300-318.

[3] S.A. Antonyan, *Existence of a slice for arbitrary compact transformation group*, Mat. Zametki 56 (1994), no.5, 3-9 (in Russian); English transl.: Math. Notes 56 (1994)

[4] S.A. Antonyan, *Extensorial properties of orbit spaces of proper group actions*, Topology Appl. 98 (1999) 35-46.

[5] S.A. Antonyan, *Orbit spaces of proper equivariant absolute extensors*, Topology Appl. 153 (2005) 698-709.

[6] A. Bykov, *The homogeneous space G/H as an equivariant fibrant space*, Topology Appl. 157 (2010), 2604-2612.

[7] A. Bykov, R. Juárez Flores, *G-fibrations and twisted products*, Topology Appl. Por publicar.

[8] A. Bykov, A.L. Kantún Montiel, *Strong G-fibrations and orbit projections*, Topology Appl. 163 (2014), 46-65.

[9] A. Bykov, M. Texis, *Equivariant strong shape*, Topology Appl. 154 (2007), 2026-2039.

[10] G.E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, New York, 1972.

[11] F. Cathey, *Strong shape theory*, in: Shape Theory and Geometric Topology, Lecture Notes Math., Springer, Berlin, 1981, pp. 216-239.

[12] T. tom Dieck, *Transformation groups*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1987.

[13] J. Dydak, S. Nowak, *Funtion Space and Shape Theories*, Fund. Math. 171 (2002), 117-154.

[14] R. Engelking, *General Topology*, PWN, Warszawa, 1977.

[15] D.A.Edwards, H.M.Hastings, *Čech and Steenrod Homotopy Theories with applications to Geometric Topology*, SLNM 542, Springer Verlag, Berlin, 1976.

[16] S.-T. Hu, *Theory of Retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, 1965.

[17] I.M. James, *General Topology and Homotopy Theory*, Springer-Verlag, 1984.

[18] John F. Price *Lie Groups and Compact Groups*, Cambridge University Press, 1979

[19] R.K. Lashof, *Equivariant bundles*, Illinois J. of Math., 26 (1982), no.2, 257-271.

[20] L. Kantún, *Caractrizaciones de G-fibraciones*, Tesis doctoral, BUAP, 2013.

[21] R.K. Lashof, J.P.May, *Generalized Equivariant Bundles*, Bulletin de la Soc.Math. de Belgique, XXXVIII (1986), p.265-271.

[22] L.S. Pontrjagin, *Topological Groups*, Princenton Univ. Press, 1939.

[23] D.Montgomery, L.Zippin, *Topological Transformation groups*, Krieger, Huntington, 1974.

[24] R.S. Palais, *The classification of G-spaces*, Mem. Amer.Math. Soc. 36, 1960.

[25] S. De Neymet, *Grupos de Transformaciones*, Sociedad Matemática Mexicana, 2005.

[26] M. Texis, *Espacios fibrantes equivariantes y la categoría de Strong Shape equivariante*, Tesis doctoral, BUAP, 2005.

[27] J. De Vries, *Topological Transformation groups 1 a Categorical Approach*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1975.