



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Simetrías de las ecuaciones de movimiento que no son compartidas por la
lagrangiana

Tesis presentada como requisito para obtener el título de:

Licenciatura en Física

Presenta

Alhan Moreno Ruiz

asesorado por

Gerardo Francisco Torres del Castillo

Junio 2017

Título: Simetrías en las ecuaciones de movimiento que no son compartidas por la lagrangiana

Estudiante: ALHAN MORENO RUIZ

JURADO

Gilberto Silva Ortigosa
Presidente

Cupatitzio Ramírez Romero
Secretario

Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Vocal

Irais Rubalcava García
Suplente

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
Asesor

Asesor

Agradecimientos

A María Teresa, aunque ya no pueda leerlo.

Quiero agradecer a mi familia por todo el apoyo que me brindaron durante todos estos años. A mi abuela, a quien le debo más de la mitad del ser humano que soy. A mis tías María del Carmen y María de Lourdes por apoyar mis decisiones y respetarlas. A mi tía Hilda por apoyar y fomentar mi curiosidad. A mi hermana Ezlhy por aguantar mis peores momentos. A mis hermanos Andrea y Edrayth por todas las cosas que hemos vivido juntos.

A mis amigos Jason y Fernando con quienes he crecido no sólo físicamente, sino también como persona. A mis amigos de la Facultad: Enrique, Lucía, Giovanni, Kevin y Mauro con quienes compartí momentos bastante gratos que siempre recordaré y que me ayudaron a lo largo de mi vida en la Universidad, gracias por el apoyo a cada uno de ellos. A mi amiga Rosa por compartir conmigo su gusto por el café, por todo el apoyo y motivación que me ha brindado durante este año. A Laura y Michelle por ser tan buenas manejando el drama. A Manuel por los consejos, apoyo y tantos gratos momentos que he pasado junto a él. A Javier, quien siempre mostró su apoyo y afecto incondicional aún en momentos bastante difíciles.

A la familia Castañeda Ricardez por todo el cariño y afecto que me ofrecieron justo cuando más lo necesitaba.

A mis profesores, especialmente al profesor Jesús García por las lecciones de Métodos Matemáticos y también por las lecciones de vida que me dio. Al Dr. Gerardo Torres del Castillo, por compartir conmigo su pasión por el conocimiento, su ética por el trabajo y darme la oportunidad de trabajar con él.

A la VIEP por el apoyo económico para realizar esta tesis .

A todas aquellas personas que no están mencionadas pero que han marcado mi vida.

Resumen

En este trabajo se muestra que si una lagrangiana es invariante bajo un grupo de transformaciones, entonces, las ecuaciones de Lagrange tanto para el caso discreto como para el caso continuo mantiene su forma bajo este grupo de transformaciones. Mientras que el caso inverso, no siempre es cierto, se hace esto evidente con los casos de la partícula libre, oscilador armónico, ecuación de Klein-Gordon y la electrodinámica.

Palabras clave: Lagrangiana, invariante, simetría, ecuaciones de Lagrange, transformación de coordenadas.

Introducción

Las simetrías juegan un papel ampliamente reconocido en la Física, particularmente en las teorías de campo, al grado de que en muchos casos son una guía para establecer las ecuaciones básicas de una teoría o modelo. Por ello, comúnmente se estudian en disciplinas como mecánica clásica, cuántica o teoría de campos, describiendo, sin existir una demostración formal, las propiedades que deben tener las lagrangianas al buscar que las ecuaciones de movimiento o las ecuaciones de campo mantengan su forma bajo algún grupo de transformaciones, como el de Lorentz, el de las rotaciones o grupos de simetría interna.

Comúnmente, en los textos de mecánica clásica, de mecánica cuántica o de teoría de campos se presentan afirmaciones sin demostración acerca de las propiedades que deben tener las lagrangianas si se busca que las ecuaciones de movimiento, o las ecuaciones de campo, mantengan su forma bajo algún grupo de transformaciones, como el grupo de Lorentz, el grupo de rotaciones o grupos de simetría interna. Dichas afirmaciones se refieren al comportamiento de una lagrangiana, y de las ecuaciones derivadas de ella, bajo un grupo de transformaciones y son de dos tipos: (i) Si la lagrangiana es invariante bajo el grupo, entonces las ecuaciones correspondientes son covariantes bajo las transformaciones del grupo, y (ii) para que un conjunto de ecuaciones de movimiento o de campo sean covariantes bajo un grupo de transformaciones, la lagrangiana correspondiente debe ser invariante bajo el grupo (ver, por ejemplo, las Refs. [1–6]).

Se demostrará que la afirmación (i) es verdadera, mientras que para (ii) se estudiarán un par de contraejemplos que servirán para demostrar que ésta es falsa.

En el primer capítulo, se presentan brevemente antecedentes y análisis complementarios del estudio del movimiento de un sistema: la descripción lagrangiana, para sistemas discretos y continuos, recalcando algunos conceptos relevantes que es imperativo considerar en el desarrollo de este trabajo.

Posteriormente, en el capítulo dos se estudia la relación que existe entre las ecuaciones de Lagrange, para un sistema discreto, bajo una transformación de coordenadas, se establece la definición de una lagrangiana invariante bajo esta transformación y como consecuencia de lo anterior: la conservación de forma de las ecuaciones de Lagrange. En el capítulo tres se revisan los mismos puntos para el caso de sistemas continuos.

En el capítulo cuatro se aterrizan los conceptos estudiados previamente para enfocarse en el análisis de casos específicos en que las lagrangianas del sistema no son invariantes bajo transformaciones de Galileo para el problema de la partícula libre y para un boost en dirección del eje x y para la operación de paridad, que son casos particular de las transformaciones de Lorentz, para la electrodinámica. El resultado es generalizado para boosts en las tres direcciones. Se estudia la lagrangiana de la ecuación de Klein-Gordon para el caso de reescalamiento del campo escalar, también se estudia el caso del oscilador armónico bajo transformaciones que son invertibles. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo realizado.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
Introducción	VII
1. Conceptos básicos	1
1.1. Principio de Hamilton	1
1.1.1. Ecuaciones de Lagrange	1
1.2. Ecuaciones de Lagrange para sistemas continuos	3
1.2.1. Variación de una integral múltiple	3
1.2.2. Sistemas físicos	4
2. Simetrías en sistemas discretos	7
2.1. Transformaciones	7
2.2. Ecuaciones de Lagrange covariantes	7
2.2.1. Transformación de coordenadas	8
2.2.2. Transformación general	8
2.3. Conservación de la forma de las ecuaciones de Lagrange	10
3. Simetrías en sistemas continuos	11
3.1. Transformaciones	11
3.2. Ecuaciones de Lagrange covariantes	11
3.2.1. Transformaciones de las variables de campo	12
3.2.2. Transformación general	12
3.3. Conservación de la forma de las ecuaciones de Lagrange	15
4. Lagrangianas que no son invariantes bajo transformaciones	17
4.1. Partícula libre	17
4.1.1. Lagrangiana invariante bajo transformaciones de Galileo	17
4.1.2. Lagrangiana que no es invariante bajo transformaciones de Galileo	18
4.2. Oscilador armónico n -dimensional isótropo	18
4.3. Electrodinámica	19
4.3.1. Lagrangiana invariante	20
4.3.2. Lagrangiana no invariante	20
4.4. Ecuación de Klein-Gordon	23

4.4.1. Reescalamiento del campo	23
5. Conclusión	25

Capítulo 1

Conceptos básicos

1.1. Principio de Hamilton

El principio de Hamilton es un principio variacional que al aplicarse a un sistema físico puede ser usado para obtener las ecuaciones de Lagrange, Hamilton o Newton. El principio de Hamilton puede ser escrito como:

El movimiento del sistema del tiempo t_1 al tiempo t_2 es tal que la integral de línea (llamada acción)

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (1.1)$$

donde $L = T - V$ tiene un valor estacionario para el camino real de movimiento y los límites de integración están fijos, las coordenadas permanecen fijas al tiempo t_1 y t_2 .

Esto es, de todos los caminos posibles por los cuales el sistema puede evolucionar del tiempo t_1 al tiempo t_2 , con las coordenadas $q^i(x)$ fijas, lo hará a través del cual el valor de la integral (1.1) es optimizado. [1]

1.1.1. Ecuaciones de Lagrange

Para obtener las ecuaciones de Lagrange del principio de Hamilton usamos el cálculo variacional [1].

Sea f una función de las n variables y_i y de sus derivadas \dot{y}_i (suponemos que son funciones de una variable paramétrica x) con $i = 1, 2, \dots, n$.

$$J = \int_1^2 f(y_i; \dot{y}_i; x) \quad (1.2)$$

La variación es obtenida considerando J como una función de un parámetro perturbativo α , que etiqueta a un conjunto de posibles curvas $y(x, \alpha)$, estas curvas se construyen de la siguiente forma:

$$y_i(x, \alpha) = y_i(x, 0) + \alpha \eta_i(x) \quad (1.3)$$

donde $y_i(x, 0)$ es por hipótesis solución al problema de hacer extrema J y las $\eta_i(x)$ son funciones arbitrarias, independientes de α , además deben cumplir un par de requisitos: son cero en los

extremos y son clase C2.

Ahora, la variación de J es

$$\delta J [y_i, \alpha] = \frac{\partial J}{\partial \alpha} [y_i, \alpha] d\alpha \quad (1.4)$$

para $\alpha = 0$, por construcción de las y_i , la variación de la funcional J debe ser cero esto implica que la condición para hacer extrema la funcional J es

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_1^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} \right) dx \quad (1.6)$$

El segundo término se integra por partes

$$\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right|_1^2 - \int_1^2 \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) dx \quad (1.7)$$

Al derivar la ecuación (1.3) respecto del parámetro α obtenemos el resultado

$$\frac{\partial y_i}{\partial \alpha} = \eta_i \quad (1.8)$$

Así, el primer término de la ecuación (1.7) es cero porque por hipótesis las funciones η_i son cero en los extremos.

Teniendo

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_1^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \right) \eta_i dx \quad (1.9)$$

Por la condición (1.5) y dado que las funciones η_i son funciones arbitrarias se concluye que para que la variación δJ sea cero se requiere que:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) = 0 \quad (1.10)$$

Lo que deseamos es hacer extrema la integral (1.1), hacemos la sustitución

$$\begin{aligned} x &\rightarrow t \\ y &\rightarrow q \\ f(y_i; \dot{y}_i; x) &\rightarrow L(q_i, \dot{q}_i; t) \end{aligned}$$

Obteniendo así las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (1.11)$$

1.2. Ecuaciones de Lagrange para sistemas continuos

1.2.1. Variación de una integral múltiple

Para maximizar la integral de la ecuación (1.1) en el caso de un sistema continuo es necesario utilizar el cálculo variacional para una integral múltiple [14].

Denotaremos la región de integración como D , un rectángulo o cilindro en \mathbb{R}^m . Un punto en D será denotado por $t = (t^1, \dots, t^m)$ y $dt = dt^1 \cdots dt^m$. La frontera de D será etiquetada por BdD .

Sea $C^2(D)$ el conjunto de todas las funciones en D cuyas segundas derivadas parciales son continuas y sea $C_n^2(D)$ el conjunto de todas las funciones vectoriales

$$x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

cuyas componentes $x^k(t)$ son elementos de $C^2(D)$. Definimos las derivadas

$$\dot{x}_\alpha^k \equiv \frac{\partial x^k}{\partial t^\alpha} \tag{1.12a}$$

$$\ddot{x}_{\alpha\beta}^k \equiv \frac{\partial^2 x^k}{\partial t^\beta \partial t^\alpha} \tag{1.12b}$$

con los índices latinos $i = 1, 2, \dots, n$ y los índices griego $\beta = 1, 2, 3, \dots, m$.

La funcional es

$$J[x] = \int_D f(x^i, \dot{x}_\beta^j, t^\alpha) dt \tag{1.13}$$

La variación es obtenida considerando J como una función de un parámetro perturbativo α , que etiqueta a un conjunto de posibles curvas $x(t, \alpha)$, estas curvas se construyen de la siguiente forma:

$$x^i(t^\nu, \alpha) = x^i(t^\nu, 0) + \alpha \eta^i(t^\nu) \tag{1.14}$$

donde $x^i(t^\nu, 0)$ es la solución al problema de maximizar la funcional (1.13) y $\eta^i(t^\nu)$ son funciones arbitrarias clase C^2 , pero tiene las siguientes restricciones: son cero en BdD y son clase C^2 .

Ahora, hacemos la variación

$$\delta J[x(t), \alpha] = \left(\frac{d}{d\alpha} \int_D f(x^i + \alpha \eta^i, \dot{x}_\beta^j + \alpha \dot{\eta}_\beta^j, t^\alpha) dt \right) \tag{1.15}$$

por la construcción, para $\alpha = 0$ la funcional J es extrema

$$\delta J[x(t), \alpha = 0] = \frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = 0 \tag{1.16}$$

de lo cual se obtiene la condición

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 0 \tag{1.17}$$

Usando la regla de la cadena se llega a

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \eta^i + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_\beta^j} \dot{\eta}_\beta^j \right) dt \tag{1.18}$$

Hay que notar que

$$\delta\dot{\eta}^i_\beta = \delta \frac{\partial \eta^i}{\partial t^\beta} = \frac{\partial}{\partial t^\beta} \delta\eta^i \quad (1.19)$$

Usando la ecuación (1.19) y la identidad

$$\partial_\beta (a^\beta_\alpha b^\alpha) = \partial_\beta (a^\beta_\alpha) b^\alpha + a^\beta_\alpha \partial_\beta (b^\alpha)$$

la ecuación (1.18) es

$$\delta J[x] = \int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i_\alpha} \right) \right) \eta^i dt + \int_D \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i_\alpha} \eta^i \right) dt \quad (1.20)$$

Haciendo uso del teorema de la divergencia para el segundo término de la suma

$$\int_D \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i_\alpha} \eta^i \right) dt = \int_{\text{Bd}D} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^k_\alpha} \eta^k \cos(n, t^\alpha) dt = 0 \quad (1.21)$$

dado que las funciones η^k son cero en la superficie.

Así, el segundo término no contribuye, se tiene

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i_\alpha} \right) \right) \eta^i dt$$

De la condición (1.17) y dado que las η^k son funciones arbitraria se sigue que:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i_\alpha} \right) = 0 \quad (1.22)$$

1.2.2. Sistemas físicos

Ahora, para un sistema físico continuo se tiene un densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(\eta^i, \frac{\partial \eta^i}{\partial t^k}, t^j \right) \quad (1.23)$$

La lagrangiana es

$$L = \int \mathcal{L} dt^1 dt^2 dt^3 \quad (1.24)$$

y la acción es:

$$I = \int_V \mathcal{L} dt^1 dt^2 dt^3 dt^4 \quad (1.25)$$

Haciendo uso del principio de Hamilton

$$\delta I = 0 \quad (1.26)$$

y del resultado de la sección anterior, hacemos la sustitución

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t \\ x &\rightarrow \eta \\ f(x^i, \dot{x}^j, t^\alpha) &\rightarrow \mathcal{L} \left(\eta^i, \frac{\partial \eta^i}{\partial t^k}, t^j \right) \end{aligned}$$

Obteniendo así las ecuaciones de Lagrange para campos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^i} - \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\alpha^i} \right) = 0 \quad (1.27)$$

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS BÁSICOS
1.2. ECUACIONES DE LAGRANGE PARA SISTEMAS CONTINUOS

Capítulo 2

Simetrías en sistemas discretos

2.1. Transformaciones

Una transformación en el espacio de configuraciones es una función de la forma

$$\begin{aligned}x' &= x'(x, t) \\ t' &= t'(x, t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

la transformación es invertible

$$\begin{aligned}x &= x(x', t') \\ t &= t(x', t')\end{aligned}\tag{2.2}$$

2.2. Ecuaciones de Lagrange covariantes

Las ecuaciones de Lagrange en un sistema de coordenadas son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} L(x^i(t); \dot{x}^i(t); t) \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} L(x^i(t); \dot{x}^i(t); t) = 0\tag{2.3}$$

A fin de encontrar una relación entre las ecuaciones de movimiento entre un sistema y otro hacemos la siguiente definición

$$L'(x'^i, \dot{x}'^i, t') \equiv L(x^j(x'^k, t'), \dot{x}^j(x'^k, \dot{x}'^k, t'), t(x'^k, t')) \frac{dt}{dt'}\tag{2.4}$$

Las ecuaciones de Lagrange bajo la transformación (2.1) son

$$\frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}'^i} L'(x'^i(t'), \dot{x}'^i(t'), t') \right) - \frac{\partial}{\partial x'^i} L'(x'^i(t'), \dot{x}'^i(t'), t') = 0\tag{2.5}$$

La pregunta natural es ¿Cómo se relacionan estas ecuaciones?

Para simplificar la escritura hacemos las siguientes definiciones

$$L' \equiv L'(x'^i, \dot{x}'^i, t')\tag{2.6a}$$

$$L \equiv L(x^i, \dot{x}^i, t)\tag{2.6b}$$

2.2.1. Transformación de coordenadas

La transformación es de la forma

$$\begin{aligned} x'^i &= x'^i(x^j, t) \\ t' &= t \end{aligned} \quad (2.7)$$

La ecuación (2.4) se puede escribir como:

$$L' \left(x'^i, \dot{x}'^i, t \right) = L \left(x^j \left(x'^k, t \right), \dot{x}^j \left(x'^k, \dot{x}'^k, t \right), t \left(x'^k, t \right) \right) \quad (2.8)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones (2.6a) y (2.6b), sustituimos la ecuación (2.8) en las ecuaciones para el sistema primado (2.5) y vemos cómo se transforman.

Usando la regla de la cadena se llega a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'^i} \right) - \frac{\partial L'}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^j} \right) \quad (2.9)$$

2.2.2. Transformación general

Para este caso se toma al tiempo como una coordenada adicional $x^0 \equiv t$ [9]. Así, la transformación (2.1) queda expresada en una sola ecuación.

$$x'^\alpha = x'^\alpha \left(x^\beta \right) \quad (2.10)$$

con $\alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots, n$.

Además, introducimos una variable auxiliar u . El tiempo y las coordenadas serán función de ella.

La acción puede escribirse como

$$\int_{t_0}^{t_1} L \left(x^i; \dot{x}^i; t \right) dt = \int_{u_0}^{u_1} L \left(x^i; \frac{dx^i/du}{dt/du}; t \right) \frac{dt}{du} du \quad (2.11)$$

Definimos una nueva lagrangiana

$$\hat{L} \left(x^\alpha, \frac{dx^\alpha}{du} \right) \equiv L \left(x^i; \frac{dx^i/du}{dt/du}; t \right) \frac{dt}{du} \quad (2.12)$$

Las ecuaciones de Lagrange para esta nueva acción son:

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (2.13)$$

Para las coordenadas ($\alpha = i$) se obtiene

$$0 = \frac{\partial \hat{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial dx^i/du} \right) = \frac{dt}{du} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \right) - \frac{d}{du} \left(\frac{dt}{du} \frac{1}{\frac{dt}{du}} \frac{\partial L}{\partial x^i} \right) \quad (2.14)$$

CAPÍTULO 2. SIMETRÍAS EN SISTEMAS DISCRETOS
2.2. ECUACIONES DE LAGRANGE COVARIANTES

Simplificando se obtiene la relación

$$0 = \frac{\partial \hat{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial dx^i/du} \right) = \frac{dt}{du} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \right) \quad (2.15)$$

Lo que demuestra que la \hat{L} reproduce las ecuaciones de Lagrange para L .

Ahora, para $\alpha = 0$

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial x^0} - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial dx^0/du} \right) = \frac{\partial L}{\partial t} \frac{dt}{du} - \frac{d}{du} \left(L - \frac{dx^i}{du} \frac{du}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \quad (2.16)$$

Simplificando se llega a la siguiente relación:

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial x^0} - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial dx^0/du} \right) = -\frac{dt}{du} \dot{x}^i \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \right) \quad (2.17)$$

Para una transformación de la forma (2.1) \hat{L}' es

$$\hat{L}' \left(x'^\alpha, \frac{dx'^\alpha}{du} \right) = \hat{L} \left(x^\alpha(x'^\beta), \frac{dx^\alpha}{du} \left(x'^\beta, \frac{dx'^\alpha}{du} \right) \right) \quad (2.18)$$

y usando la relación de la ecuación (2.9) para \hat{L} :

$$\frac{\partial \hat{L}'}{\partial x'^i} - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial \hat{L}'}{\partial dx'^i/du} \right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial dx^\alpha/du} \right) \right) \quad (2.19)$$

Sustituimos las ecuaciones (2.15) y (2.17) para llegar a la relación:

$$\begin{aligned} \frac{dt'}{du} \left(\frac{\partial \hat{L}'}{\partial x'^i} - \frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial \hat{L}'}{\partial \dot{x}'^i} \right) \right) &= \frac{dt}{du} \left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} - \frac{\partial t}{\partial x'^i} \dot{x}^j \right) \\ &\cdot \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Si tomamos $u = t'$ y como está definida \hat{L} (2.12), la ecuación (2.18) se reduce a

$$\hat{L}' \left(x'^\alpha, \frac{dx'^\alpha}{du} \right) = L \left(x^i(x'^j, t'), \dot{x}^i(x'^j, \dot{x}'^j, t') \right) \frac{dt}{dt'} \quad (2.21)$$

Así, substituyendo la ecuación (2.4)

$$\frac{\partial L'}{\partial x'^i} - \frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'^i} \right) = \frac{dt}{dt'} \left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} - \frac{\partial t}{\partial x'^i} \dot{x}^j \right) \left(\frac{\partial L}{\partial x^j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} \right) \right) \quad (2.22)$$

De la ecuación (2.22) se observa que las ecuaciones de Lagrange se transforman de manera covariante bajo transformaciones de la forma (2.1).

2.3. Conservación de la forma de las ecuaciones de Lagrange

Definición 2.3.1 *La acción (1.1) es invariante bajo la transformación (2.1) si cumple con la condición:*

$$\begin{aligned} \int_{t'_1}^{t'_2} L(x^{ni}(x^j, t), \dot{x}^{ni}(x^k, \dot{x}^k, t), t'(x^k, t)) dt' - \int_{t_1}^{t_2} L(x^i, \dot{x}^i, t) dt \\ = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF(x, t)}{dt} dt \end{aligned} \quad (2.23)$$

F es una función arbitraria de tiempo y las coordenadas, y es continua [10].

Transformando la integral de la definición (2.3.1) hecha sobre el intervalo $[t'_1, t'_2]$ al intervalo $[t_1, t_2]$, la condición (2.23) se puede expresar en términos de las lagrangianas

$$L(x^{ni}(x^j, t), \dot{x}^{ni}(x^k, \dot{x}^k, t), t'(x^k, t)) \frac{dt'}{dt} = L(x^i, \dot{x}^i, t) + \frac{dF(x, t)}{dt} \quad (2.24)$$

La transformación es invertible, entonces, se tiene que la ecuación (2.24) también puede ser escrita como

$$L(x^i(x^{nj}, t'), \dot{x}^i(x'^k, \dot{x}'^k, t'), t(x'^k, t')) \frac{dt}{dt'} = L(x'^i, \dot{x}'^i, t') + \frac{dG(x', t')}{dt'} \quad (2.25)$$

Sustituyendo la ecuación (2.4)

$$L'(x'^i, \dot{x}'^i, t') = L(x'^i, \dot{x}'^i, t') + \frac{dG(x', t')}{dt'} \quad (2.26)$$

El término que contiene a la derivada de G no contribuye a las ecuaciones de movimiento, por lo tanto no afecta. Las lagrangianas L' y L poseen la misma forma.

Y por la ecuación (2.22) se ve que las ecuaciones de Lagrange para ambas deben conservar la forma.

Capítulo 3

Simetrías en sistemas continuos

3.1. Transformaciones

Una transformación en el espacio de configuraciones es una función de la forma

$$\begin{aligned}\eta'^\alpha &= \eta'^\alpha(\eta^\nu, t^\mu) \\ t'^\beta &= t'^\beta(\eta^\mu, t^\phi)\end{aligned}\tag{3.1}$$

la transformación debe ser invertible

$$\begin{aligned}\eta^\alpha &= \eta^\alpha(\eta'^\nu, t'^\mu) \\ t^\beta &= t^\beta(\eta'^\mu, t'^\phi)\end{aligned}\tag{3.2}$$

3.2. Ecuaciones de Lagrange covariantes

Las ecuaciones de Lagrange en un sistema de coordenadas son

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\eta}^i_\alpha} \mathcal{L} \left(\eta^i, \frac{\partial \eta^j}{\partial t^\alpha}, t^\alpha \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \eta^i} \mathcal{L} \left(\eta^i, \frac{\partial \eta^j}{\partial t^\alpha}, t^\alpha \right) = 0\tag{3.3}$$

Con el fin de encontrar la relación entre un sistema y otro bajo la transformación (3.1) hacemos la siguiente definición

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' \left(\eta'^k, \frac{\partial \eta'^k}{\partial t'^\mu}, t'^\mu \right) &\equiv \mathcal{L} \left(\eta^k(\eta'^j, t'^\alpha), \frac{\partial \eta^k}{\partial t^\gamma} \left(\eta'^j, \frac{\partial \eta'^j}{\partial t'^\mu}, t'^\mu \right), t^\gamma(\eta'^j, t'^\alpha) \right) \\ &\cdot \det \left(\frac{\partial t^\rho}{\partial t'^\beta} \right)\end{aligned}\tag{3.4}$$

Las ecuaciones de Lagrange bajo la transformación (3.1) son

$$\frac{\partial}{\partial t'^\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\eta}'^i_\alpha} \mathcal{L}' \left(\eta'^i, \frac{\partial \eta'^j}{\partial t'^\alpha}, t'^\alpha \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \eta'^i} \mathcal{L}' \left(\eta'^i, \frac{\partial \eta'^j}{\partial t'^\alpha}, t'^\alpha \right) = 0\tag{3.5}$$

Para simplificar la escritura introducimos las definiciones

$$\mathcal{L}' \equiv \mathcal{L}' \left(\eta'^i; \frac{\partial \eta'^i}{\partial t'^\alpha}; t'^\alpha \right)\tag{3.6a}$$

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L} \left(\eta^i, \frac{\partial \eta^j}{\partial t^\alpha}, t^\alpha \right) \quad (3.6b)$$

3.2.1. Transformaciones de las variables de campo

La transformación es la siguiente

$$\begin{aligned} \eta'^j &= \eta'^j(\eta^i, t^\alpha) \\ t'^\alpha &= t^\alpha \end{aligned} \quad (3.7)$$

Por la forma de la transformación, el jacobiano cumple

$$\det \left(\frac{\partial t'^\beta}{\partial t^\alpha} \right) = 1 \quad (3.8)$$

Con estas consideraciones la ecuación (3.4) es

$$\mathcal{L}' \left(\eta'^k, \frac{\partial \eta'^k}{\partial t'^\mu}, t'^\mu \right) = \mathcal{L} \left(\eta^k(\eta'^j, t^\alpha), \frac{\partial \eta^k}{\partial t^\gamma} \left(\eta'^j, \frac{\partial \eta'^j}{\partial t^\mu}, t^\mu \right), t^\gamma \right) \quad (3.9)$$

tomando en consideración las definiciones (3.6a) y (3.6b).

Ahora, sustituimos la ecuación (3.9) en las ecuaciones de movimiento del sistema primado (3.5). Usando la regla de la cadena se obtiene la relación.

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \eta'^j} - \frac{\partial}{\partial t'^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\eta}'^j} \right) = \frac{\partial \eta^k}{\partial \eta'^j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^k} - \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}^k_\alpha} \right) \right) \quad (3.10)$$

3.2.2. Transformación general

La transformación es la siguiente:

$$\begin{aligned} \eta'^j &= \eta'^j(\eta^i, t^\alpha) \\ t'^\alpha &= t'^\alpha(\eta^i, t^\alpha) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Tomamos la definición

$$\det \left(\frac{\partial t'^\beta}{\partial t^\alpha} \right) \equiv A \quad (3.12)$$

Resolveremos el problema desde la acción, consideramos la acción

$$\int_{\Omega} \mathcal{L} \left(\eta^j, \partial \eta^j / \partial t^\mu, t^\mu \right) dt \quad (3.13)$$

Si hacemos una transformación en el espacio de integración, tomando las t^α como componentes adicionales. La transformación se puede ver de manera reducida en la expresión:

$$\eta'^{\alpha'} = \eta'^{\alpha'}(\eta^{\mu'}) \quad (3.14)$$

CAPÍTULO 3. SIMETRÍAS EN SISTEMAS CONTINUOS

3.2. ECUACIONES DE LAGRANGE COVARIANTES

con los índices primados $\alpha', \beta' = 0', 1', 2', 3', 1, 2, \dots, m$. Los primeros 4 términos primados hacen referencia a las coordenadas y los siguientes m sin primar se refieren a las variables de campo. Introducimos 4 variables auxiliares u , así, la acción bajo esta transformación es:

$$\int_{\Omega} \mathcal{L} \left(\eta^j, \partial \eta^j / \partial t^\mu, t^\mu \right) dt = \int_{\Omega_u} \mathcal{L} \left(\eta^j, \frac{\partial \eta^j}{\partial u^\rho} \left(\frac{\partial t^\mu}{\partial u^\rho} \right)^{-1}, t^\mu \right) B du \quad (3.15)$$

con

$$B \equiv \det \left(\frac{\partial t^\beta}{\partial u^\alpha} \right) \quad (3.16)$$

Definimos una lagrangiana auxiliar

$$\hat{\mathcal{L}} \left(\eta^{\gamma'}, \frac{\partial \eta^{\gamma'}}{\partial u^\mu} \right) \equiv \mathcal{L} \left(\eta^j, \frac{\partial \eta^j}{\partial u^\rho} \left(\frac{\partial t^\mu}{\partial u^\rho} \right)^{-1}, t^\mu \right) B \quad (3.17)$$

Las ecuaciones de Lagrange se cumplen para esta nueva $\hat{\mathcal{L}}$.

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \eta^{\mu'}} - \frac{\partial}{\partial u^\nu} \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \frac{\partial \eta^{\mu'}}{\partial u^\nu}} \right) = 0 \quad (3.18)$$

Para las m variables de campo se tiene:

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \eta^i} - \frac{\partial}{\partial u^\nu} \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \frac{\partial \eta^i}{\partial u^\nu}} \right) = 0 \quad (3.19)$$

Usando la regla de la cadena y la definición de $\hat{\mathcal{L}}$ (3.17).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \eta^i} - \frac{\partial}{\partial u^\nu} \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \frac{\partial \eta^i}{\partial u^\nu}} \right) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^i} B - \frac{\partial}{\partial u^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\beta^i} \frac{\partial u^\mu}{\partial t^\beta} B \right) \\ &= B \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^i} - \frac{\partial}{\partial t^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\mu^i} \right) \right) \end{aligned}$$

Lo cual reproduce las ecuaciones de Lagrange para \mathcal{L} .

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \eta^i} - \frac{\partial}{\partial u^\nu} \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \frac{\partial \eta^i}{\partial u^\nu}} \right) = B \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^i} - \frac{\partial}{\partial t^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\mu^i} \right) \right) \quad (3.20)$$

Ahora, para las 4 coordenadas:

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \eta^{\mu'}} - \frac{\partial}{\partial u^\nu} \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \frac{\partial \eta^{\mu'}}{\partial u^\nu}} \right) = 0 \quad (3.21)$$

Con $\mu' = 1, 2, 3, 4$. Entonces

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial t^\mu} - \frac{\partial}{\partial u^\nu} \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \frac{\partial t^\mu}{\partial u^\nu}} \right) = 0 \quad (3.22)$$

CAPÍTULO 3. SIMETRÍAS EN SISTEMAS CONTINUOS
3.2. ECUACIONES DE LAGRANGE COVARIANTES

Usando la definición de $\hat{\mathcal{L}}$ (3.17), la fórmula de Jacobi y la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial t^\mu} - \frac{\partial}{\partial u^\nu} \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \frac{\partial t^\mu}{\partial u^\nu}} \right) = B \frac{\partial \eta^i}{\partial t^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^i} - \frac{\partial}{\partial t^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \eta^i}{\partial t^\nu}} \right) \right) \quad (3.23)$$

Para una transformación de la forma (3.1) $\hat{\mathcal{L}}$ es

$$\hat{\mathcal{L}}' \left(\eta'^{\gamma'}, \frac{\partial \eta'^{\gamma'}}{\partial u^\mu} \right) = \hat{\mathcal{L}} \left(\eta^{\gamma'}(\eta'^{\gamma'}), \frac{\partial \eta^{\gamma'}}{\partial u^\mu} \left(\eta'^{\gamma'}, \frac{\partial \eta'^{\gamma'}}{\partial u^\mu} \right) \right) \quad (3.24)$$

usando el resultado obtenido en la subsección anterior, para $\hat{\mathcal{L}}$ (3.10), se tiene

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}'}{\partial \eta'^j} - \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}'}{\partial \dot{\eta}'_\alpha^j} \right) = \frac{\partial \eta^{\kappa'}}{\partial \eta'^j} \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \eta^{\kappa'}} - \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\eta}_\alpha^{\kappa'}} \right) \right) \quad (3.25)$$

usando las ecuaciones (3.20) y (3.23), sustituyéndolas, se tiene:

$$B' \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}'}{\partial \eta'^j} - \frac{\partial}{\partial t^\nu} \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}'}{\partial \dot{\eta}'_\nu^j} \right) \right) = B'' \left(\frac{\partial \eta^i}{\partial \eta'^j} - \frac{\partial t^\alpha}{\partial \eta'^j} \dot{\eta}_\alpha^i \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^i} - \frac{\partial}{\partial t^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\nu^i} \right) \right) \quad (3.26)$$

B' y B'' por (3.16) son.

$$B' = \det \frac{\partial t'^\beta}{\partial u^\mu} \quad (3.27a)$$

$$B'' = \det \frac{\partial t^\beta}{\partial u^\mu} \quad (3.27b)$$

Tomando $u^\alpha = t'^\alpha$, $\hat{\mathcal{L}}'$ es

$$\hat{\mathcal{L}}' \left(\eta'^{\gamma'}, \frac{\partial \eta'^{\gamma'}}{\partial u^\mu} \right) = \mathcal{L} \left(\eta^i(\eta'^j, t'^\mu), \dot{\eta}_\alpha^i(\eta'^j, \dot{\eta}'_\mu^j, t'^\mu), t'^\mu(\eta'^j, t'^\mu) \right) \cdot \det \left(\frac{\partial t^\rho}{\partial t'^\mu} \right) \quad (3.28)$$

considerando lo anterior, (3.26) se reduce a:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta'^j} - \frac{\partial}{\partial t^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}'_\nu^j} \right) \right) = \det \left(\frac{\partial t^\mu}{\partial t'^\nu} \right) \left(\frac{\partial \eta^i}{\partial \eta'^j} - \frac{\partial t^\alpha}{\partial \eta'^j} \dot{\eta}_\alpha^i \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^i} - \frac{\partial}{\partial t^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\nu^i} \right) \right) \quad (3.29)$$

La ecuación (3.29) nos muestra que las ecuaciones de movimiento para sistemas continuos se transforman de manera covariante, entre un sistema y otro.

3.3. Conservación de la forma de las ecuaciones de Lagrange

Definición 3.3.1 Una lagrangiana es invariante si bajo la transformación (3.1) cumple con la condición:

$$\int_{\Omega'} \mathcal{L} \left(\eta^i, \frac{\partial \eta^j}{\partial t'^\alpha}, t'^\alpha \right) dt' - \int_{\Omega} \mathcal{L} \left(\eta^i, \frac{\partial \eta^j}{\partial t^\alpha}, t^\alpha \right) dt = \int_{\Omega} \frac{\partial F^\mu (\eta^i, t^\alpha)}{\partial t^\mu} dt \quad (3.30)$$

F^μ es un campo vectorial continuo que depende de las coordenadas y de las variables de campo [14].

La condición puede ser expresada en términos de las densidades lagrangianas como

$$\mathcal{L} \left(\eta^i, \frac{\partial \eta^j}{\partial t'^\alpha}, t'^\alpha \right) \det \left(\frac{\partial t'^\alpha}{\partial t^\beta} \right) = \mathcal{L} \left(\eta^i, \frac{\partial \eta^j}{\partial t^\alpha}, t^\alpha \right) + \frac{\partial F^\mu (\eta^i, t^\alpha)}{\partial t^\mu} \quad (3.31)$$

Considerando que la transformación es invertible y usando la ecuación (3.4), la ecuación (3.31) nos lleva a la relación

$$\mathcal{L}' \left(\eta'^k, \dot{\eta}'^k_\rho, t'^\rho \right) = \mathcal{L} \left(\eta'^k, \dot{\eta}'^k_\rho, t'^\rho \right) + \frac{\partial G^\mu (\eta'^i, t'^\alpha)}{\partial t'^\mu} \quad (3.32)$$

La divergencia de G se puede ignorar ya que es un término de superficie y las variables de campo permanecen fijas durante la variación. Por lo tanto se puede afirmar que las lagrangianas \mathcal{L}' y \mathcal{L} tienen la misma forma.

De la ecuación (3.29) se concluye que las ecuaciones de movimiento también tienen la misma forma en bajo la transformación (3.1).

CAPÍTULO 3. SIMETRÍAS EN SISTEMAS CONTINUOS
3.3. CONSERVACIÓN DE LA FORMA DE LAS ECUACIONES DE LAGRANGE

Capítulo 4

Lagrangianas que no son invariantes bajo transformaciones

4.1. Partícula libre

La lagrangiana estándar de la partícula libre es:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \quad (4.1)$$

que al sustituirse en las ecuaciones de Lagrange (1.11), nos lleva a la ecuación de movimiento.

$$\ddot{x} = 0 \quad (4.2)$$

4.1.1. Lagrangiana invariante bajo transformaciones de Galileo

Una transformación de Galileo para una dimensión en su forma más general es

$$\begin{aligned} x' &= x + x_0 + v_0 t \\ t' &= t + t_0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Necesitamos las componentes de la velocidad, usando la regla de la cadena se encuentra:

$$\dot{x}' = \dot{x} + v_0 \quad (4.4)$$

Se sustituye en la lagrangiana (4.1)

$$L' = \frac{m}{2} (\dot{x} + v_0)^2 \quad (4.5)$$

Al desarrollar el cuadrado y agrupar términos, se obtiene

$$L' = L + \frac{d}{dt} \left(m x v_0 + \frac{v_0^2 m}{2} t \right) \quad (4.6)$$

Contrastando con la definición 2.3.1, se concluye que la lagrangiana (4.1) es invariante bajo transformaciones de Galileo.

CAPÍTULO 4. LAGRANGIANAS QUE NO SON INVARIANTES BAJO TRANSFORMACIONES

4.2. OSCILADOR ARMÓNICO N -DIMENSIONAL ISÓTROPO

Las ecuaciones de Lagrange se transforman según la ecuación (2.22) como:

$$\frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \quad (4.7)$$

ó

$$\ddot{x}' = \ddot{x} \quad (4.8)$$

4.1.2. Lagrangiana que no es invariante bajo transformaciones de Galileo

Considere la siguiente lagrangiana [15] :

$$L = \log(\dot{x}) - \frac{t\dot{x}}{x} - \log(x) \quad (4.9)$$

La lagrangiana propuesta no es una función bien comportada y no está definida en todo el espacio de configuraciones, pero estos inconvenientes pueden ser obviados ya que la lagrangiana sólo es una función auxiliar para obtener las ecuaciones de movimiento y no tiene significado físico y al momento de realizar la variación de la acción no se especifica la trayectoria por la cual se realiza.

Al sustituir en las ecuaciones de Lagrange, se obtiene

$$\ddot{x} = 0 \quad (4.10)$$

Como vimos en la sección anterior esta ecuación se transforma de manera covariante (4.7). Mientras que la lagrangiana (4.9)

$$L' = \log\left(\frac{dx'}{dt'} - v_0\right) - (t' - t_0) \frac{\frac{dx'}{dt'} - v_0}{x' - x_0 - v_0(t' - t_0)} - \log(x' - x_0 - v_0(t' - t_0)) \quad (4.11)$$

bajo la transformación de Galileo no puede ser llevada a una expresión que tome la forma de la definición 2.3.1. Por lo tanto la lagrangiana (4.9) no es invariante bajo una transformación de Galileo.

4.2. Oscilador armónico n -dimensional isótropo

La lagrangiana es

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x})^T \dot{x} - kx^T x \quad (4.12)$$

que al sustituir en las ecuaciones de Lagrange (1.11)

$$\ddot{x}_i + \omega^2 x_i = 0 \quad (4.13)$$

con $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Si consideramos una transformación de la forma [17]

$$x' = ax \quad (4.14)$$

donde $\det a \neq 0$.

Al sustituir en las ecuaciones de movimiento (4.13), se tiene

$$\ddot{x}'_i + \omega^2 x'_i = 0 \quad (4.15)$$

se transforma de manera covariante.

Sustituimos la transformación en la lagrangiana (4.12)

$$L' = \frac{m}{2} \dot{x}'^T a^T a \dot{x}' - \frac{k}{2} x'^T a^T a x' \quad (4.16)$$

Si la transformación cumple

$$a^T a \neq \mathbb{I} \quad (4.17)$$

la lagrangiana no es invariante bajo la transformación (4.14).

4.3. Electrodinámica

La densidad lagrangiana usual de la electrodinámica en el vacío es [4]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.18)$$

donde $F_{\mu\nu}$ es conocido como el tensor de campo electromagnético

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial t^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial t^\mu} \quad (4.19)$$

Así, la densidad lagrangiana queda expresada en función de los potenciales

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\beta} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial t^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial t^\mu} \right) \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial t^\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial t^\rho} \right) \quad (4.20)$$

y A_μ son las componentes del cuatripotencial.

Sustituyendo la densidad lagrangiana en las ecuaciones de Lagrange (1.27), se obtiene el resultado:

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial t^\alpha} = 0 \quad (4.21)$$

Son las ecuaciones de Maxwell sin fuentes.

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.22a)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (4.22b)$$

Las dos restantes ecuaciones de Maxwell son obtenidas de como son definidas \vec{E} y \vec{B} respecto a los potenciales vectorial y escalar.

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.23a)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (4.23b)$$

y éstas son:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.24a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.24b)$$

4.3.1. Lagrangiana invariante

Bajo una transformación de Lorentz los campos y las coordenadas se transforman de la siguiente manera

$$A'_\mu = \Lambda_\mu^\beta A_\beta \quad (4.25a)$$

$$t'^\mu = \Lambda^{-1\mu}_\beta t^\beta \quad (4.25b)$$

Se puede demostrar usando la regla de la cadena y el hecho que las entradas de la matriz Λ son constantes que la derivada se transforma como

$$\frac{\partial \psi}{\partial t'^\mu} = \Lambda^\alpha_\mu \frac{\partial \psi}{\partial t^\alpha} \quad (4.26)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (4.25a) y (4.26) se obtiene la forma en la que se transforma el tensor electromagnético bajo una transformación de Lorentz

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta F_{\alpha\beta} \quad (4.27)$$

Y el tensor $F^{\mu\nu}$ se transforma de la siguiente manera

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{-1\mu}_\alpha \Lambda^{-1\nu}_\beta F^{\alpha\beta} \quad (4.28)$$

Ahora, haciendo la contracción de los tensores

$$F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta F_{\alpha\beta} \Lambda^{-1\mu}_\rho \Lambda^{-1\nu}_\gamma F^{\rho\gamma}$$

Simplificando, se llega a la condición de que es un invariante

$$F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.29)$$

Dado que $\mathcal{L} \sim F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ se concluye que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' \quad (4.30)$$

Lo cual cumple con la definición (3.3.1). Por lo tanto la densidad lagrangiana (4.18) es invariante bajo transformaciones de Lorentz. De acuerdo a la ecuación (3.29), las ecuaciones de movimiento se transforman como

$$\frac{\partial}{\partial t'^\mu} F'^{\mu\nu} = \Lambda^{-1\nu}_\alpha \frac{\partial}{\partial t^\mu} F^{\mu\alpha} \quad (4.31)$$

4.3.2. Lagrangiana no invariante

Si consideramos la siguiente densidad lagrangiana [7, 8].

$$\mathcal{L} = \vec{B} \cdot \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \nabla \times \vec{B} \right) - \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} \right) \quad (4.32)$$

**CAPÍTULO 4. LAGRANGIANAS QUE NO SON INVARIANTES BAJO
TRANSFORMACIONES
4.3. ELECTRODINÁMICA**

tomando las componentes de los campos eléctrico y magnético como variables de campo. Además, suponemos como condiciones iniciales

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.33a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.33b)$$

Con estas consideraciones se tienen seis ecuaciones de Lagrange. Las primeras tres son:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \nabla \times \vec{B} = 0 \quad (4.34)$$

Y las tres siguientes son:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (4.35)$$

Boosts

Los campos eléctrico y magnético están contenidos en el tensor electromagnético

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Para un boost en el eje x en forma infinitesimal la matriz Λ toma la forma [4]

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\beta & 0 & 0 \\ -\beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

β es

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (4.38)$$

el tensor $F^{\mu\nu}$ se transforma como lo establece la ecuación (4.28), de hacer esto se obtiene que las componentes de los campos se transforman como

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 & E'_2 &= E_2 - \beta B_3 & E'_3 &= E_3 + \beta B_2 \\ B'_1 &= B_1 & B'_2 &= B_2 + \beta E_3 & B'_3 &= B_3 - \beta E_2 \end{aligned} \quad (4.39)$$

También, hay que notar que el término $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \nabla \times \vec{B}$ es la componente espacial de un tensor (4.21). Definimos

$$M^\beta \equiv \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial t^\alpha} \quad (4.40)$$

para un boost en dirección del eje x , M^ρ se transforma

$$\begin{aligned} M'^0 &= M^0 - \beta M^1 & M'^1 &= M^1 - \beta M^0 \\ M'^2 &= M^2 & M'^3 &= M^3 \end{aligned} \quad (4.41)$$

**CAPÍTULO 4. LAGRANGIANAS QUE NO SON INVARIANTES BAJO
TRANSFORMACIONES
4.3. ELECTRODINÁMICA**

Definimos al vector

$$N^j \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} \right)_j \quad (4.42)$$

Para encontrar cómo se transforman sus componentes bajo un boost en el eje x usamos el hecho que $\frac{\partial}{\partial t^\alpha} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$

$$\begin{aligned} N'^1 &= N^1 - \beta N^0 \\ N'^2 &= N^2 \\ N'^3 &= N^3 \end{aligned} \quad (4.43)$$

con $N^0 = \nabla \cdot \vec{B}$.

Bajo un boost en dirección x , la lagrangiana es

$$\mathcal{L} \left(E'^i \left(E^j, B^j \right), B'^i \left(E^j, B^j \right) \right) = B'_i M'^i - E'_i N'^i \quad (4.44)$$

sustituyendo los resultados obtenidos en las ecuaciones (4.39), (4.41) y (4.43)

$$\mathcal{L} = B_i M^i - E_i N^i + F \left(E^i, B^i \right) \quad (4.45)$$

F es

$$\begin{aligned} F &= \beta \left(E_1 \nabla \cdot \vec{B} - B_1 \nabla \cdot \vec{E} + \partial_0 (E_3 E_2 + B_3 B_2) \right. \\ &\quad - 2E_2 \partial_0 E_3 - 2B_2 \partial_0 B_3 - E_3 \partial_3 B_1 + E_3 \partial_1 B_3 - E_2 \partial_1 B_2 \\ &\quad \left. + E_2 \partial_2 B_1 + B_3 \partial_3 E_1 - B_3 \partial_1 E_3 - B_2 \partial_1 E_2 + B_2 \partial_2 E_1 \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Tomando en cuenta las condiciones iniciales (4.33a) y (4.33b) y manipulando la ecuación anterior se tiene

$$\begin{aligned} F &= \beta \left(\partial_0 (E_3 E_2 + B_3 B_2) + \partial_1 (E_2 B_2 + E_3 B_3) \right. \\ &\quad \partial_2 (E_2 B_1 - B_2 E_1) + \partial_3 (B_3 E_1 - E_3 B_1) \\ &\quad - 2(E_2 \partial_0 E_3 + B_2 \partial_0 B_3 + B_2 \partial_1 E_2 + B_3 \partial_1 E_3) \\ &\quad \left. - B_1 \partial_2 B_2 + E_1 \partial_2 B_2 - E_1 \partial_3 B_3 + B_1 \partial_3 E_3 \right) \end{aligned} \quad (4.47)$$

La función F no puede ser llevada a una forma en la que sea solamente el resultado de una cuatridivergencia de un campo vectorial.

La lagrangiana (4.32) no es invariante bajo un boost en dirección en el eje x .

Si rotamos los ejes espaciales el resultado obtenido sigue siendo válido, dado que los operadores rotacional y divergencia son invariantes bajo rotaciones, como también lo es el producto punto, por lo que la lagrangiana (4.32) no es invariante bajo boosts en cualquier dirección.

Inversión espacial

Para inversión espacial la matriz Λ toma la forma [16]

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

**CAPÍTULO 4. LAGRANGIANAS QUE NO SON INVARIANTES BAJO
TRANSFORMACIONES**
4.4. ECUACIÓN DE KLEIN-GORDON

Bajo la operación de paridad el campo magnético \vec{B} es un pseudovector [4]

$$\vec{B}' = \vec{B} \quad (4.49)$$

el campo eléctrico \vec{E} es un vector [4]

$$\vec{E}' = -\vec{E} \quad (4.50)$$

El vector \vec{M} por ser las componentes espaciales de un 4-vector se transforma

$$M'^j = -M^j \quad (4.51)$$

El tensor ∂_α se transforma

$$\begin{aligned} \partial'_0 &= \partial_0 \\ \partial'_i &= -\partial_i \end{aligned} \quad (4.52)$$

con los resultados de las ecuaciones (4.49), (4.50) y (4.52) se encuentra que las componentes del vector \vec{N} se transforman

$$N'^j = N^j \quad (4.53)$$

Al sustituir en la lagrangiana (4.32)

$$\mathcal{L}' = -\vec{B} \cdot \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \nabla \times \vec{B} \right) + \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} \right) \quad (4.54)$$

no puede ser llevada a la forma de la definición de Lagrangiana invariante (3.31), por lo tanto la lagrangiana no es invariante bajo paridad.

4.4. Ecuación de Klein-Gordon

La densidad lagrangiana de la ecuación de Klein-Gordon es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 \quad (4.55)$$

que al sustituir en las ecuaciones de campo (1.27) obtenemos la ecuación de Klein-Gordon

$$\left(\partial_0^2 - \nabla^2 + \mu^2 \right) \phi = 0 \quad (4.56)$$

4.4.1. Reescalamiento del campo

Si reescalamos el campo escalar la transformación es

$$\phi' = a\phi \quad (4.57)$$

a es una constante arbitraria, distinta de cero.

Al sustituir en la ecuación de Klein-Gordon se tiene

$$\left(\partial_0^2 - \nabla^2 + \mu^2 \right) \frac{\phi'}{a} = 0 \quad (4.58)$$

**CAPÍTULO 4. LAGRANGIANAS QUE NO SON INVARIANTES BAJO
TRANSFORMACIONES**
4.4. ECUACIÓN DE KLEIN-GORDON

dado que a es una constante arbitraria se sigue

$$\left(\partial_0^2 - \nabla^2 + \mu^2\right) \phi' = 0 \quad (4.59)$$

La ecuación de Klein-Gordon se transforma de manera covariante bajo reescalamientos.

Si se sustituye en la densidad lagrangiana (4.55) se tiene

$$\mathcal{L}' = a^2 \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \mu \phi^2 \right) \quad (4.60)$$

La densidad lagrangiana no cumple con la definición (3.31), por lo tanto no es invariante bajo reescalamiento.

Capítulo 5

Conclusión

Las ecuaciones de Lagrange bajo una transformación de coordenadas para sistemas discretos (2.1) o para sistemas continuos (3.1) se transforman de la siguiente manera

$$\frac{\partial L'}{\partial x'^i} - \frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'^i} \right) = \frac{dt}{dt'} \left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} - \frac{\partial t}{\partial x'^i} \dot{x}^j \right) \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \right) \quad (5.1)$$

esto es para el caso discreto.

Para el caso continuo es

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \eta'^j} - \frac{\partial}{\partial t'^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\eta}'_\nu^j} \right) \right) = \det \left(\frac{\partial t^\mu}{\partial t'^\nu} \right) \left(\frac{\partial \eta^i}{\partial \eta'^j} - \frac{\partial t^\alpha}{\partial \eta'^j} \dot{\eta}_\alpha^i \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^i} - \frac{\partial}{\partial t^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\nu^i} \right) \right) \quad (5.2)$$

En esta tesis se demostró que si las transformaciones preservan la forma de la lagrangiana, entonces las ecuaciones de movimiento preservan su forma, tanto para sistemas discretos como continuos.

Los ejemplos expuestos en el último capítulo fueron un contraejemplo ante la idea de pensar que si las ecuaciones de movimiento se transforman de manera covariante bajo un grupo de transformaciones, entonces éstas se derivan de una lagrangiana que también es invariante.

Por lo tanto, sólo es verdad la suposición: si la lagrangiana es invariante bajo transformaciones (2.1) para sistemas discretos y (3.1) para sistemas continuos, entonces las ecuaciones de Lagrange mantienen su forma; la afirmación: si las ecuaciones de Lagrange mantienen su forma bajo las transformaciones (2.1) y (3.1), entonces la lagrangiana es invariante bajo éstas transformaciones, no es cierta.

Bibliografía

- [1] H Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd ed. Addison-Wesley, 1980 p. 571, Sec 2.1, 2.2.
- [2] L. Landau and E.M. Lifshitz, *Mechanics*, 3rd ed., Butterworth-Heinemann, 1981, Sec 4.
- [3] L. Landau and E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 4th rev. ed., Butterworth-Heinemann, secs. 8, 27.
- [4] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., Wiley, 1999, p. 580, Sec. 6.10, Sec 11.
- [5] A.O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, Dover, 1980, p. 87.
- [6] W. Greiner, *Classical Electrodynamics*, Springer, 1998, p. 482.
- [7] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, 4th ed. Dover, 1986.
- [8] G.F. Torres del Castillo and D. Acosta Dávalos, Hamiltonian structures for massless free fields, *Rev. Mex. Fís.*, **40**, 405 (1994).
- [9] G.F. Torres del Castillo, Point symmetries of the Euler-Lagrange equations, *Rev. Mex. Fís.*, **60**, 129 (2014).
- [10] G.F. Torres del Castillo, C. Andrade Mirón, and R.I. Bravo Rojas, Variational symmetries of Lagrangians, *Rev. Mex. Fís.*, **59**, 140 (2013).
- [11] K. Sundermeyer; *Constrained Dynamics with Application to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model*, Springer (1982), p. 123,124.
- [12] G.F. Torres del Castillo, I. Rubalcava-García, Variational symmetries as the existence of ignorable coordinates, *Eur. J. Phys.*, **38**, 025002, 2017.
- [13] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd ed., Wiley, 1975, pp. 245-247.
- [14] John David Logan, *Invariant Variational Principles*, Academic Press Inc, 1977.
- [15] P.G.L. Leach, Lie symmetries and Noether symmetries, *Appl. Anal. Discrete Math.*, **6**, 238 (2012).
- [16] George Arfken, *Métodos matemáticos para físicos*, 1ra. ed., Diana, 1981, pp. 163, 164.
- [17] Alexei Deriglazov, *Classical Mechanics*, 2nd ed., Springer, 2017, p. 248.