BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"DESEMPEÑO DE ESTUDIANTES EN TAREAS CON FRACCIONES: DE SECUNDARIA A LICENCIATURA".

Tesis presentada como requisito para obtener el título de:

Maestría en Educación Matemática

PRESENTA:
YOSSELYN ESPERANZA LÓPEZ CRUZ

DIRECTOR DE LA TESIS:
MTRO. ADRIÁN CORONA CRUZ

Junio, 2017.

BUAP

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

YOSSELYN ESPERANZA LÓPEZ CRUZ

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 29 de mayo de 2017, con la tesis titulada:

"Desempeño de estudiantes en tareas con fracciones: de Secundaria a Licenciatura"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 02 de junio de 2017

DR. JOSÉ ANTONIO JUÁREZ LÓPEZ
COORDINADOR DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

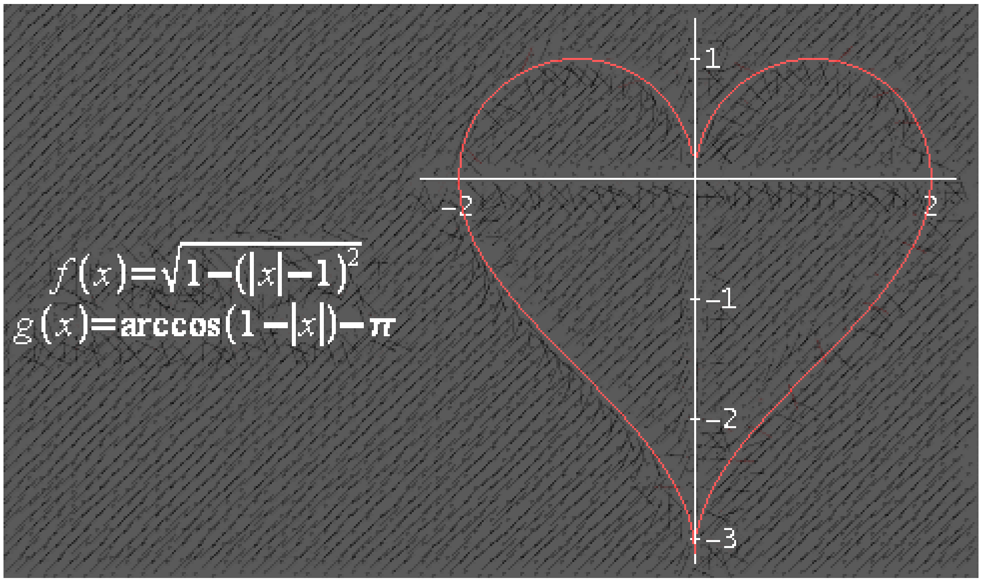
BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · 1578 · FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS - SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO

Ccp.Archivo
DRA. LAHR / l'agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. 111 A,
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

AGRADECIMIENTOS



A Dios, por brindarme sabiduría, paciencia y fortaleza para concluir una de mis metas.

A mis padres, que con amor supieron guiarme y alentarme a seguir mis sueños, compartiendo mis triunfos y fracasos; forjando la persona que soy. Gracias por que esto se lo debo a ustedes.

A mi esposo, por su amor y apoyo incondicional; por acompañarme en este camino lleno de aprendizaje.

A mis hermanos y familia, por su confianza y aliento.

A mis amigas, por todas las vivencias, las enseñanzas, alegrías y tristezas compartidas.

Al colegio de profesores de la Maestría en Educación Matemática que condujeron mi formación académica y contribuyeron a nuevos aprendizajes.

Al Mtro. Adrián Corona Cruz y al Dr. José Antonio Juárez López por su orientación, paciencia y conocimientos.

A todos aquellos que con su apoyo hicieron posible la culminación de este trabajo.

Gracias al CONACYT por la beca otorgada.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El maestro de matemáticas en su práctica cotidiana se encuentra con dificultades relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, como número, área, función, ecuaciones y sin duda alguna, uno de los que presenta mayores dificultades es el número fraccionario (Fandiño, 2009; Llinares, 2003; Perera y Valdemoros, 2007; entre otros).

Las fracciones son uno de los contenidos fundamentales en la educación básica; sin embargo, resulta difícil para los estudiantes construir un significado para un concepto multifacético, y más aún lo es dotar de sentido a los algoritmos para operar con ellas. Los algoritmos tradicionales, suelen ser abreviaciones de procesos más extensos; por ello, con frecuencia los estudiantes sólo logran seguir pasos de manera mecánica que carecen de justificación. Usualmente en el sistema de enseñanza predomina una concepción en la que los conocimientos matemáticos son memorizados y por lo tanto, en determinado plazo llegan a ser olvidados.

El trabajo que se presenta a continuación tuvo como finalidad mostrar el desempeño de estudiantes de diferentes niveles educativos con respecto a los conocimientos sobre fracciones, adquiridos y desarrollados por estudiantes entre los 9 y 12 años, periodo en el cual el tema se considera enseñado, son conocimientos de largo plazo y que al ser requeridos en problemas y/o situaciones que implican fracciones la mayoría de los estudiantes muestran dificultades, las cuales se encuentran asociadas a la comprensión del problema; a las estrategias lógicas para resolverlos; al análisis de la solución; preferencia por las matemáticas, etc.

Para el logro del objetivo se diseñó y aplicó una prueba de selección basado en la estrategia denominada “Ciclo de Aprendizaje” desarrollado por Lawson (1967), a estudiantes que al momento cursaban respectivamente, secundaria, preparatoria, alumnos de nuevo ingreso a diferentes licenciaturas universitarias y estudiantes que cursaban licenciatura universitaria.

El documento que se presenta consta de cinco capítulos, organizados de la siguiente manera:

El primer capítulo incluye las componentes iniciales bajo las cuales se ha basado la investigación, tales como los antecedentes, el planteamiento del problema y el objetivo.

En el segundo capítulo se presenta la revisión realizada acerca de los fundamentos teóricos relacionados con la comprensión de la noción de fracción y las relaciones de equivalencia y orden.

El tercer capítulo muestra la organización del trabajo de investigación, detallando la población participante y el instrumento implementado.

En el capítulo cuatro analizamos, de forma detallada, los resultados de la aplicación del instrumento y mostrando el desempeño de los estudiantes de secundaria, preparatoria y universidad.

Finalmente, en el capítulo V se establecen las conclusiones de la investigación.

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Antecedentes de la investigación

El trabajo de investigación relacionado con las fracciones durante las últimas décadas, constata que la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones generan algunos conflictos tanto a estudiantes como a profesores.

A continuación, se presentan de manera breve algunos de los trabajos de investigación relevantes:

Una de las dificultades para el aprendizaje de las fracciones es operar con ellas, Kieren (1975), citado en Fandiño (2009) evidencia la existencia de por lo menos siete significados del término "fracción" y demuestra que en esta polisemia se oculta precisamente uno de los problemas del aprendizaje del tema, ya sea por cuanto se refiere al concepto general, como a las operaciones.

Freudenthal (1983) exterioriza que enfocar las fracciones desde el subconstructo de "parte–todo" es algo bastante limitado. La didáctica tradicional de la aritmética se limita a este enfoque, mayoritariamente incluso en el sentido restringido de la división del pastel. Tras estas divisiones concretas del pastel —en fracciones propias sólo— se introduce inmediatamente al estudiante en la división de cantidades y valores de magnitudes presentados de manera abstracta.

Lamon (2001) indica que el plan de estudios de fracción actual solo consiste en un conjunto específico de procedimientos o algoritmos para fines de cálculo que proporcionan una base para la manipulación de expresiones algebraicas, pero no ayuda a la mayoría de los niños a entender las fracciones.

Valdemoros (2004) explora los contenidos semánticos asignados por los escolares de cuarto grado de Primaria a las fracciones, como también los componentes sintácticos y de “traducción” del lenguaje “natural” al aritmético. Seleccionado el significado de cociente susceptible de ser asignado a la fracción, en situaciones concretas de reparto.

Brown y Quinn (2006), citado en Mahmoud (2013) llevaron a cabo un estudio para analizar los errores y concepciones erróneas de los estudiantes acerca de las fracciones. El estudio reveló que la mayoría de los estudiantes mostraron errores en la comprensión de los conceptos básicos de la fracción.

Perera y Valdemoros (2007) identificaron las dificultades para interpretar la fracción como operador multiplicativo, observando que la mayoría de los estudiantes de cuarto grado de Primaria no reconocieron el todo como divisible para efectuar la distribución de él en los problemas de reparto o en las situaciones donde se requería su partición.

Flores (2010) determinó que en el discurso matemático escolar mexicano están presentes al menos 11 significados asociados a la noción de fracción revisados y demuestra las dificultades con la presencia de varios significados en un mismo problema; con los cambios de registro (geométrico, algebraico); y particularmente con los cambios de referente, cuando es preciso arribar a una “nueva unidad” para solucionar el problema. Por otra parte, se constata que los estudiantes recurren al trabajo con números decimales para evitar hacerlo con las fracciones.

Según lo informado por Mahmoud (2013) los estudiantes quieren memorizar los métodos y algoritmos en lugar de comprender los conceptos que subyacen detrás de fracciones.

Cabe señalar, que una de las autoras más reconocidas en la última década por sus trabajos relacionados sobre las fracciones es Martha Isabel Fandiño Pinilla; por su obra *“Las fracciones: Aspectos conceptuales y didácticos”*, quien, señala que las dificultades que los estudiantes presentan se deben a argumentos precedentes, a formalismos o a conceptualizaciones aparentemente banales que tendrían que haber aprendido incluso en la escuela primaria. La revisión bibliográfica exhaustiva realizada por la autora; distingue tres periodos.

- En el primer periodo (1960 a 1980), las investigaciones se centraban en cuestiones generales sobre el concepto, las distintas interpretaciones y las operaciones entre fracciones.
- En el segundo periodo, el cual comprende de los años 80 a los 90; se incluyen además de estudios con los problemas relacionados con las distintas interpretaciones del término “fracción”; estudios relacionados con el aprendizaje general y el aprendizaje de las operaciones entre fracciones, así mismo, la relación entre las fracciones y los números decimales; destacándose el surgimiento de un grupo de investigadores: K. Cramer, T. Post, M. J. Behr, G. Harel y R. Lesh creando el proyecto “Número Racional” (The Rational Number Project).
- De manera que, en el último periodo, (1990 a 2005) las investigaciones se refieren a áreas más específicas: fracciones, números decimales, números racionales y algunas combinaciones, principalmente de nivel básico.

1.2 Las fracciones en el currículo mexicano

Las fracciones siempre han ocupado un amplio lugar en el currículo de la escuela básica en nuestro país, pero durante mucho tiempo y en la actualidad ha predominado una enseñanza bajo los esquemas tradicionales, donde el docente expone una serie de contenidos y, por último, se resuelven “problemas” relacionados con estos contenidos.

El enfoque didáctico que se sugiere para el estudio de las matemáticas en el Programa de Estudio de Matemáticas en Secundaria: “consiste en utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados” (SEP, 2011, p. 19).

Las fracciones se estudian desde tercer grado de primaria, continuando hasta al primer año de secundaria. De acuerdo con lo formulado en el Plan y Programas de Estudio de Secundaria 2011, se espera que los estudiantes de primero hayan alcanzado aprendizajes conceptuales significativos en lo relativo a las fracciones y sus diferentes significados; sin embargo, en el aula de clase cuando se propone ampliar al conjunto numérico de los racionales, se evidencian dificultades de comprensión principalmente en lo referente al concepto de fracción y al manejo procedimental de las operaciones con fracciones.

De acuerdo con la SEP (2011) "el conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos lo puedan usar para solucionar problemas" (p. 20); señalando que el razonamiento es la base de los procesos de estudio como el lenguaje, las representaciones y procedimientos. Sin embargo, en la experiencia nos podemos dar cuenta que la memorización es el proceso predominante en la mayoría de los estudiantes.

La reforma educativa al Plan de Estudio del 2011 de Educación Primaria, organiza los contenidos relacionados con las fracciones de la siguiente forma:

CUADRO 1: Aprendizajes esperados de la Educación Primaria

Grado	Aprendizajes Esperados
Tercero (a partir del tercer bloque)	• Uso de fracciones del tipo m/2n (medios, cuartos, octavos, etc.) para expresar oralmente y por escrito medidas diversas. • Uso de fracciones del tipo m/2n (medios, cuartos, octavos, etc.) para expresar oralmente y por escrito el resultado de repartos. • Identificación de escrituras equivalentes (aditivas, mixtas) con fracciones.

	• Comparación de fracciones en casos sencillos (con igual numerador o igual denominador). • Elaboración e interpretación de representaciones gráficas de las fracciones. Reflexión acerca de la unidad de referencia. • Resolución de problemas sencillos de suma o resta de fracciones (medios, cuartos, octavos).
Cuarto	• Resolución de problemas que impliquen particiones en tercios, quintos y sextos. • Análisis de escrituras aditivas equivalentes y de **fracciones mayores o menores que la unidad.** • Resolución de sumas o restas de números decimales en el contexto del dinero. • Análisis de **expresiones equivalentes.** • **Representación de fracciones de magnitudes continuas (longitudes, superficies de figuras).** • Identificación de la unidad, dada una fracción de la misma. • Identificación de fracciones equivalentes al resolver problemas de reparto y medición. • Resolución, con procedimientos informales, de sumas o restas de fracciones con diferente denominador en casos sencillos (medios, cuartos, tercios, etcétera). • Uso de las fracciones para expresar partes de una colección. Cálculo del total conociendo una parte. • Resolución de sumas o restas de números decimales en diversos contextos. • Obtención **de fracciones equivalentes** con base en la idea de multiplicar o dividir al numerador y al denominador por un mismo número natural.

	• Expresiones equivalentes y cálculo del doble, mitad, cuádruple, triple, etc., de las fracciones más usuales (1/2, 1/3, 2/3, 3/4, etcétera).
Quinto	• Resolución de problemas que impliquen sumar o restar fracciones cuyos denominadores son múltiplos uno de otro. • **Conocimiento de diversas representaciones de un número fraccionario: con cifras, mediante la recta numérica, con superficies, etc. Análisis de las relaciones entre la fracción y el todo.** • **Comparación de fracciones con distinto denominador**, mediante diversos recursos. • Uso del cálculo mental para resolver adiciones y sustracciones con números fraccionarios y decimales. • Resolución de problemas que impliquen sumas o restas de fracciones comunes con denominadores diferentes. • Uso de la expresión n/m para representar el cociente de una medida entera (n) entre un número natural (m): 2 pasteles entre 3; 5 metros entre 4, etcétera
Sexto	• Lectura, escritura y comparación de números naturales, fraccionarios y decimales. Explicitación de los criterios de comparación. • Resolución de problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios, variando la estructura de los problemas. • Estudio o reafirmación de los algoritmos convencionales. • Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales.

	• Ubicación de fracciones y decimales en la recta numérica en situaciones diversas. Por ejemplo, se quieren representar medios y la unidad está dividida en sextos, la unidad no está establecida, etcétera • Identificación de una fracción o un decimal entre dos fracciones o decimales dados. • Acercamiento a la propiedad de densidad de los racionales, en contraste con los números naturales. • Conversión de fracciones decimales a escritura decimal y viceversa. Aproximación de algunas fracciones no decimales usando la notación decimal. • Resolución de problemas que impliquen calcular una fracción de un número natural, usando la expresión "*a*/*b* de *n*". • Resolución de problemas que impliquen una división de número fraccionario o decimal entre un número natural.

La organización que establece el Programa de Estudio, evidencia el énfasis que se da a la interpretación parte-todo y sus relaciones (equivalencia, orden-comparación) en la educación primaria; considerando de la misma forma, las representaciones en modelos continuos o discretos, así como en la recta numérica y número decimal. Sin embargo, autores como Freudenthal (1983) y Lamon (2001), demuestran que el enfoque que se da a las fracciones con base en esta interpretación pide a los estudiantes relacionar los diferentes significados dado que sus representaciones llegan a ser un obstáculo para abordar otras interpretaciones.

1.3 Problema de investigación

Desde hace varios años, a través de diversas investigaciones y de las evaluaciones, tanto nacionales como internacionales, se ha demostrado que la mayoría de los estudiantes encuentran problemas significativos en la comprensión conceptual y la operatividad con fracciones; presentando en muchas ocasiones, concepciones erróneas cuando se aprende este tema, a pesar de que formalmente se introduce en la escuela primaria y se continúa a lo largo de varios ciclos escolares.

Por lo tanto, se espera que cuando los estudiantes lleguen a primer grado de secundaria tengan bases sólidas de estos conocimientos; sin embargo, podemos darnos cuenta que no es así y, por lo contrario, se identifican dificultades que han de ser superadas a través de los ciclos escolares posteriores.

Dado las dificultades al abordar las fracciones; Perera y Valdemoros (2007), concluyen que las fracciones es uno de los contenidos de las matemáticas que presentan mayores dificultades tanto para la enseñanza como para su aprendizaje. Siendo este contenido, uno de los más estudiados desde los inicios de la investigación en Educación Matemática.

Llinares (2003) menciona que la dificultad de los números fraccionarios a lo largo del proceso de la enseñanza y aprendizaje, radica básicamente en que:

- Están relacionados con diferentes interpretaciones o significados (como medida, con el significado de parte de un todo, o como parte de un conjunto de objetos, de reparto utilizadas como cociente, como índice comparativo usadas como razón y como un operador).
- Y, además, pueden representarse de varias maneras (3/4, fracciones; 75/100, fracciones decimales; 0.75, expresiones decimales; 75%, porcentajes, de manera gráfica).

Es a partir del tercer grado de primaria, con escasos 9 años de edad (aproximadamente) que los estudiantes entran al mundo de los números fraccionarios, bombardeados con diferentes interpretaciones, así como, las diversas formas de representarlos; provocando en muchas ocasiones desconciertos en los estudiantes.

Fandiño (2009) advierte de los errores típicos que comenten los estudiantes identificados por la literatura internacional, como son:

- ordenar y comparar fracciones,
- realizar operaciones entre fracciones,
- reconocer los diagramas más comunes,
- utilizar el adjetivo "igual",
- utilizar de manera autónoma o espontánea los diferentes esquemas, figuras o modelos,
- la manipulación de la equivalencia entre fracciones,
- la reducción a los mínimos términos de una fracción, etc…

Como se había mencionado anteriormente, las fracciones son estudiadas desde tercero de primaria, hasta primero de secundaria. Es en esta etapa en la que los estudiantes cognitivamente transitan del nivel cognitivo concreto al formal de acuerdo con Inhelder & Piaget (1958, citado en Lawson, 1994). Sin embargo, las dificultades y errores en la comprensión de las fracciones persisten a pesar del tiempo que se les dedica y del nivel educativo en el que se encuentre el estudiante.

A partir de aquí, definimos las **preguntas** que guían esta **investigación**:

¿El conocimiento sobre fracciones depende de las metodologías de enseñanza?

¿Los conocimientos sobre fracciones permanecen en el tiempo?

¿Cuál es el desempeño de los estudiantes en tareas con fracciones de acuerdo a su edad?

Objetivo general

- Caracterizar el desempeño de los estudiantes de secundaria, preparatoria y de universidad en las relaciones de equivalencia, comparación y orden, que se establecen en el significado de la fracción como parte-todo.

Objetivos específicos

- Identificar la habilidad de los estudiantes para identificar propiedades matemáticas de conjunto de fracciones.
- Identificar la permanencia de los conocimientos sobre fracciones.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 Un panorama general

Resultados de varias investigaciones indican que la capacidad de razonamiento científico es necesario para la toma de decisiones, solución de problemas, comprensión de conceptos complejos de teorías y lo natural de la ciencia, y las matemáticas (Chakkrapan, Niwat & Rekha, 2014). Hargrove (2015), por su parte, cita la importancia que tiene el que a los estudiantes se les instruya para ser capaces de resolver problemas que involucren un pensamiento matemático.

SEP (2011) señala que:

> La formación matemática que permite a los individuos enfrentar con éxito los problemas de la vida cotidiana depende en gran parte de los conocimientos adquiridos y de las habilidades y actitudes desarrolladas durante la Educación Básica. La experiencia que vivan los alumnos al estudiar matemáticas en la escuela puede traer como consecuencias: el gusto o el rechazo por ellas, la creatividad para buscar soluciones o la pasividad para escucharlas y tratar de reproducirlas, la búsqueda de argumentos para validar los resultados o la supeditación de éstos según el criterio del docente. (p. 19)

Arnett (2010) citado en Harrison (2015), señala que no todos los individuos llegan a ser capaces de realizar acciones clasificadas como operaciones formales, esto puede implicar que las personas tomen decisiones que los lleven al éxito o el fracaso, en particular los estudiantes de nivel escolar básico, según la OCDE (2010) y Mahmoud (2013); esto impacta directamente en estudiantes de educación superior al sentirse capaz de elegir, por ejemplo, una carrera universitaria. También, su capacidad cognitiva, los ayuda a identificar sus preferencias, como sus afinidades por las matemáticas. Todo esto, permite identificar el porqué, en particular, el aprendizaje de fracciones es un tema de las matemáticas básicas, identificado como el más problemático (Tanner, 2008) o sofisticado (Calhoon, Emerson, Flores & Houchins, 2007).

En cuanto a la didáctica de las fracciones; Post, Wachsmuth, Lesh & Berh (1985) señalan que el desarrollo de la comprensión de los números racionales de los niños parece estar relacionado a tres características del pensamiento:

(a) flexibilidad de pensamiento en la coordinación de las traducciones entre los modos de representación de los números racionales,
(b) la flexibilidad de pensamiento para las transformaciones dentro de un modo dado de la representación, y
(c) el razonamiento cada vez más libre de una dependencia de realizaciones concretas de los números racionales.

Fandiño (2009), derivado de su investigación bibliográfica sobre las dificultades en el aprendizaje de las fracciones, señala que los docentes en lo general no son conscientes de la complejidad conceptual y cognitiva asociada al aprendizaje de las fracciones, y señala a través de la literatura que la conceptualización de las fracciones y los números racionales son un proceso que mediante acciones noéticas y semióticas evolucionan por necesidad humana.

2.2 Noción de fracción y sus interpretaciones

En general, la palabra "fracción" se define como un número de la forma a/b donde a y b, son números enteros y $b \neq 0$, esta forma es utilizada en diversos contextos y situaciones que muchas veces puede parecer que no tengan nada en común.

Cotidianamente un número a/b se entiende como el resultado de dividir una unidad o un todo en partes iguales (b) y luego tomar una cantidad (a) de esas partes. Donde a se conoce como numerador y b como denominador de la fracción.

Sin embargo, un número racional a/b tiene muchas interpretaciones, lo que determina como objetivo de enseñanza que los alumnos lleguen a dotar de significado a las diferentes representaciones, establecer relaciones (equivalencia y orden) y realizar operaciones entre ellas (Llinares, 2003).

En coincidencia con otros investigadores (Block, 2001; Valdemoros, 2007; Fandiño, 2009), se atribuye a T. Kieren haber sido el pionero en poner atención en los significados que puede tener la fracción, con la intención de superar una enseñanza caracterizada por el conocimiento estructural del concepto. Kieren inicialmente identificó cuatro subconstructos de fracciones: medida, razón, cociente y operador. Identificó un quinto subconstructo como una relación parte-todo, considerándola como la base para la construcción de los otros cuatro (Kieren, 1983; citado en Valdemoros, 2007).

2.2.1 La fracción como parte-todo.

Esta definición le da a la fracción el significado de división de un todo "continuo o discreto" en partes iguales, que comúnmente es denominada parte-todo o sub-área, donde el denominador indica las partes en que se divide la totalidad y el numerador las que se toman.

Ejemplo:

Se debe repartir un pastel entre 10 personas. ¿Qué fracción del pastel le corresponde a cada persona?

La relación parte-todo es un camino natural para la conceptualización de algunas propiedades (como la que conduce a la denominación "fracción propia" e "impropia"), algunas relaciones (como la de equivalencia), y algunas operaciones (como la suma y la resta).

Para una comprensión operativa de este subconstructo se necesita previamente el desarrollo de algunas habilidades como:

- la identificación de la unidad (qué «todo» es el que se considera como unidad en cada caso concreto);
- la de realizar divisiones (el todo se conserva aun cuando lo dividamos en trozos, conservación de la cantidad), y
- manejar la idea de área (en el caso de las representaciones continuas) (Llinares y Sánchez, 2000).

Las representaciones de esta relación son desarrolladas en contextos continuos, discretos y mediante la utilización de la recta numérica.

2.2.2 La fracción como medida.

El uso de las fracciones como expresión de una medida o de una cantidad es bastante común y es quizá el que más se utiliza en la vida cotidiana; expresiones del tipo $\frac{1}{4}$ kg de azúcar, $\frac{1}{2}$ litro de leche, etc. son de uso cotidiano y pueden contribuir a establecer un vínculo directo entre el conocimiento informal de los alumnos y la necesidad de su formalización.

Ejemplo:

Esmeralda se comió $\frac{1}{2}$ de barra de chocolate.

La fracción a/b aparece cuando se desea medir una determinada magnitud, en la cual la unidad no está contenida un número entero de veces en la magnitud que se quiere medir.

Para obtener la medida exacta se deben:

- Medir utilizando múltiplos y submúltiplos de la unidad.
- Realizar comparaciones con la unidad.

Al considerar las fracciones (número racional) en la interpretación de medida, se proporciona el contexto natural para la «suma» (unión de dos medidas), y para la introducción de los decimales (notación decimal) (Kieren, 1980; citado en Llinares y Sánchez, 2000).

2.2.3 La fracción como cociente.

La fracción como cociente es el resultado de dividir uno o varios objetos entre un número de personas o partes. También, se puede definir como el valor numérico de la fracción a/b. En este caso, la fracción es el resultado de una situación de reparto donde se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir a unidades en b partes iguales.

Ejemplo:

Juan tiene que repartir 3 pizzas entre 5 amigos. ¿Qué fracción de pizza le corresponde a cada amigo?

Block y Solares (2001) a este respecto observan que la fracción como cociente puede concebirse así:

a) Una magnitud (dividendo) entre un escalar (divisor) y el cociente es una magnitud. Ejemplo: 3 metros entre 4 = $\frac{3}{4}$ metro
b) Una magnitud (dividendo) entre otra magnitud (divisor) es un escalar. Ejemplo: ¿Cuántas veces caben 3 metros en 4 metros? 3 metros entre 4 metros = $\frac{3}{4}$

2.2.4 La fracción como operador.

La fracción como un operador, se define como el resultado de la ejecución de dos operaciones la división y la multiplicación, en ese orden o el inverso. Es un número racional actuando sobre otro número, transformándolo. Así, la fracción a/b empleada como operador es el número que modifica un valor particular n multiplicándolo por a y dividiéndolo por b.

Ejemplo:

Encontrar los $\frac{4}{5}$ de 20 peras.

La comprensión de este significado les permitirá a los estudiantes resolver con mayor habilidad multiplicaciones de fracciones (Hincapié, 2011).

2.2.5 La fracción como razón.

Es una comparación entre dos cantidades o conjuntos de unidades (de igual o diferente magnitud). Las razones pueden ser comparaciones parte-parte en un conjunto (magnitud discreta) o comparaciones parte todo (magnitud continua y discreta). La generalidad de la interpretación de la fracción como razón consiste en que nos permite comparar cantidades de magnitudes diferentes, mientras que en la interpretación parte – todo en un contexto de medida sólo nos permite comparar cantidades del mismo tipo (Llinares, 2003).

Ejemplo:

Iván encesta 3 tiros de cada 6 lanzados.

Este significado se usa comúnmente con la idea de formar proporciones y permite también desarrollar o integrar los conceptos de fracciones equivalentes, probabilidad y porcentajes.

Para alcanzar el concepto de fracción con todas sus relaciones conlleva un proceso de aprendizaje a largo plazo. La variedad de estructuras cognitivas a las que las diferentes interpretaciones de las fracciones están conectadas condiciona este proceso de aprendizaje (Llinares y Sánchez, 2000).

Algunos errores conceptuales aparecen al relacionar distintas interpretaciones de la fracción. La identificación de la fracción con una cantidad es un obstáculo para interpretar y manejar la fracción como razón, y para el número racional.

2.3 Sistemas de representaciones

Durante la enseñanza se hace uso de diferentes materiales para representar la fracción (figuras geométricas, rectas numéricas, dibujos que representan a personas y objetos por repartir, etc.), Se sabe que las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las fracciones se deben a las diversas interpretaciones que se les asocian; sin embargo, durante los últimos años las investigaciones también han hecho énfasis en la influencia de las representaciones.

Además, se plantean problemas con diversos significados que no necesariamente se adaptan a estas formas de representación, por ejemplo, cuando se propone un problema de reparto, pero se ha modelado la fragmentación de una figura geométrica. La situación se agudiza cuando se utilizan, además, indiferenciadamente los tipos de cantidades en las que se puede presentar la fracción (discreta o continua, por ejemplo). Este uso arbitrario y confuso de los modelos se ha relacionado con la falta de dominio de las diferentes interpretaciones de la fracción (Piñón, 1995; citado en Parra y Flores; 2008).

Nos referimos al término representación como “el modo en que los sujetos expresan sus conocimientos con notaciones simbólicas o mediante algún tipo de gráfico”. Los modelos sirven para la presentación y el desarrollo de un concepto determinado.

Las diversas representaciones permiten establecer relaciones entre la situación concreta y la modelización matemática, éstas son mediadoras entre la situación empírica y el conocimiento matemático, de ahí su importancia. Esto lo reafirma Azcarate y Cardeñoso (1994) al expresar que cuando los alumnos realizan los procesos cognitivos propios del quehacer matemático, tales como, organizar, comparar, inferir, decidir y analizar, éstos necesitan de medios concretos de representación que les permitan elaborar su significado.

Las representaciones juegan una doble función:

a) actúan como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales,
b) permiten la expresión de conceptos e ideas a los sujetos que las utilizan.

Rico (1995), por otro lado, clasifica las representaciones en dos grandes grupos:

- Discretas o sistema de representación simbólico, cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento.
- Continuas o sistema de representación gráfico, cuya sintaxis viene dada principalmente por reglas de composición y convenios de interpretación.

Lesh, Post y Behr (1987, citado en Maza, 1995) distinguen cinco representaciones. A continuación, se hará una breve descripción de cada uno de ellos.

- Los guiones, son los esquemas en los que el conocimiento se organiza alrededor de sucesos experimentados por el individuo.
- Los modelos manipulativos son objetos tridimensionales creados a partir de las ideas piagetianas, donde se entiende que las acciones cognitivas se van convirtiendo en esquemáticas y abstractas.

- Los diagramas o gráficos, llamados también representaciones icónicas; son modelos de figuras estáticas bidimensionales, que pueden ser internalizados como imágenes.
- El lenguaje hablado o escrito incluye el lenguaje formal e informal. Cuando se aprende matemática el individuo se ve inmerso en el lenguaje natural y científico, utilizando palabras propias de cada lenguaje y palabras que tienen significados distintos o iguales en el ámbito cotidiano y el científico.
- Las representaciones simbólicas son las que necesitan un esfuerzo mayor en el aprendizaje de los estudiantes. Su carácter arbitrario, propio de la comunidad científica, condiciona su relación con las representaciones internas y las hacen materia de aprendizaje, pues no evidencian las propiedades del referente, por lo que su transparencia no podrá medirse por preservar las propiedades del referente, sino por presentar la menor cantidad de significados adicionales de otros conceptos propios de la cultura particular.

Mientras tanto, Llinares y Sánchez (1988, citado en Moreno y Martínez, 2000) señalan que las fracciones pueden representarse de manera geométrica, discreta, numérica y literal.

- Las representaciones geométricas se realizan en un contexto continuo y las más frecuentes son los diagramas circulares, rectangulares y la recta numérica.
- En las representaciones discretas la unidad está formada por un conjunto discreto de objetos.
- Las representaciones numéricas encuentran distintas formas de utilizar los números para indicar una relación parte-todo: representación como división indicada ($\frac{3}{5}$), representación como razón (3:5), representación decimal (0.6), representación de porcentajes (60%).
- En las representaciones literales podemos distinguir distintas formas: tres quintos, tres de cinco y proporción de tres a cinco.

Entre los modelos usuales en el trabajo con números y operaciones se destacan los siguientes: Modelos lineales. Éstos utilizan la recta numérica como modelo de representación numérica. Modelos métricos, los cuales emplean longitudes, superficies, balanzas para el estudio de conceptos numéricos. Modelos geométricos, son los que utilizan figuras geométricas para representar partes de la unidad. Y los modelos funcionales, aunque no son los modelos habituales actualmente se emplean para operaciones con racionales, pero no con decimales, excepto algunos casos de porcentajes.

2.4 Fracciones equivalentes

Las investigaciones alrededor de las fracciones señalan como una de las principales dificultades el manejo de las equivalencias ya sea para obtenerlas o identificarlas en las diferentes representaciones del tipo continuo o discreto.

A manera de ejemplo, decimos que $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ son equivalentes, no porque contengan las mismas cantidades numéricas; la denominación "equivalentes", se debe a que representan al mismo número racional, aunque su representación simbólica o gráfica sea diferente.

Dickson (1991, citado en Maza, 1999) a través de varios estudios constatan que para los estudiantes es más fácil obtener fracciones equivalentes a partir de una fracción elemental que, por lo contrario, resulta ser complicado obtener una fracción simplificada de una fracción dada.

Arteaga (2016) reporta las dificultades que estudiantes de secundaria presentan al trabajar con equivalencias, en diferentes representaciones y la obtención de las mismas con diferente denominador.

Maza (1999), plantea que las fuentes principales de dificultad en el aprendizaje de la equivalencia de fracciones; en primer lugar, es el paso de las representaciones manipulativas o icónicas a las simbólicas y, en segundo lugar, las provenientes de las mismas manipulaciones simbólicas. Estableciendo que es indispensable que el alumno reconozca la equivalencia entre dos representaciones icónicas (gráficas) y trasladen la comparación a las representaciones simbólicas.

Cabe mencionar que la noción de equivalencia de fracciones es origen de errores también debido al manejo simultáneo de diversos sentidos de fracción y de equivalencia; es decir, se sabe que $\frac{5}{3}$ y $\frac{10}{6}$ son equivalentes; sin embargo, para ello hay diversas explicaciones:

- si las representamos en la recta numérica, les corresponde el mismo punto;
- si las representamos en dos rectángulos, las dos representan la misma sub-área;
- si las interpretamos como reparto donde el numerador indica las unidades y el denominador las personas a las cuales se le van a repartir estas unidades, obtenemos que a cada cinco o diez personas le corresponde la misma parte de la unidad;
- si las concebimos como operador, resulta lo mismo multiplicar por tres y dividir entre cinco que multiplicar por seis y dividir entre diez;
- si relacionamos los cuatro números que las conforman, se observa que son proporcionales (3 es a 5 como 6 es a 10) y si los dividimos los cocientes (0,6) son iguales;

y otras veces por los problemas originados ante la transitividad del signo igual.

Maza (1999), considera que la enseñanza de la equivalencia, es una herramienta indispensable para la construcción de conocimientos sobre fracciones como la ordenación, la simplificación y la operatividad (específicamente, suma y resta).

2.5 Orden y comparación entre fracciones (ordenamiento)

Una de las dificultades que diversos autores como Post, et. al. (1984; 1985); Maza (1999); Cubillo y Ortega (2003); Lamon (2006); Fandiño (2009); han identificado es el aprendizaje del orden en las fracciones; presentando dificultades tanto de tipo de comprensión conceptual como de destrezas de cálculo; señalando que la dificultad de la comparación de dos fracciones puede variar mucho dependiendo de los enteros que figuren en los numeradores y denominadores.

Cubillo y Ortega (2003) evidenciaron dificultades de aprendizaje acerca del orden y representación de las fracciones en la recta, confirmando que la comparación de fracciones puede variar enormemente, dependiendo de las relaciones entre los números.

Post, et al. (1986, citado en Mancera, 1992) encontraron que inicialmente los conceptos sobre el orden en los números enteros influyen en la falta de comprensión del orden en las fracciones; las palabras “más” y “mayor”, y sus contrapartes “menos” y “menor”, causan dificultades en los niños al tratar con relaciones de orden; la falta de habilidad para pasar de un modo de representación a otro retarda la abstracción de relaciones matemáticas; los niveles de pensamiento concreto o formal con respecto al concepto de fracción parece estar relacionado con el buen desempeño en tareas de orden y equivalencia; los niños desarrollan o diseñan estrategias para abordar situaciones de orden o equivalencia de fracciones las cuales están muy ligadas a las propiedades de los enteros.

Maza (1999), establece que las dificultades al efectuar la relación de orden entre dos fracciones se deben a: la influencia de los números naturales, las características lingüísticas del orden entre fracciones y la constitución de la fracción como pareja de números.

Lamon (2006) resume las estrategias que utilizan los estudiantes para establecer el orden entre fracciones de la siguiente manera:

a) Partes de igual tamaño, es cuando la fracción es dividida en el mismo número de partes (mismo denominador); por lo tanto, establecen que la fracción es mayor por su numerador ($\frac{4}{8} < \frac{5}{8}$).

b) Igual número de partes; es decir, las fracciones tienen el mismo numerador, pero los denominadores son diferentes, indicando que el denominador más grande es la fracción más pequeña ($\frac{3}{4} > \frac{3}{7}$).

c) Comparando un punto de referencia; significa que se debe comparar tanto numeradores como denominadores utilizando una fracción o número de referencia, por ejemplo, 1, $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$. Ejemplo: ($\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$) ó ($\frac{1}{7} < \frac{1}{2}$).

En efecto, se puede afirmar que la ordenación de fracciones es un campo lleno de procedimientos intuitivos, incompletos, informales y de falsas generalizaciones. Es por ello, que los estudiantes tienen serias dificultades para entender la relación entre fracciones.

2.6 Operatividad con fracciones

La investigación en el tema de fracciones; señala que una de las dificultades que los estudiantes presentan al abordar este tema además de que el concepto es multifacético es que los estudiantes no pueden realizar operaciones entre fracciones. Siendo que los estudiantes prefieren memorizar los métodos en lugar de comprender los conceptos que subyacen detrás de fracciones.

Se ha encontrado (Nunes y Bryant, 1998) que alumnos de primaria, y varios de secundaria, poseen un conocimiento rudimentario de las fracciones, pero aparentan comprenderlas ampliamente porque utilizan la terminología de las fracciones y dominan ciertas partes de los procedimientos, aunque no reconocen los problemas en los que éstos pueden ser empleados. Además, los alumnos tratan de aplicar su conocimiento sobre los números enteros para realizar operaciones con fracciones sin comprender las propiedades de éstas.

Brown y Quinn (2006; citado en Mahmoud, 2013), encontró que la mayoría de los alumnos de 9 años tenían conocimiento fragmentado de fracciones y optaron por aplicar algoritmos con poca comprensión del significado. Además, señalaron que muchos de los errores que los estudiantes se debe a que aplican "atajos" en los algoritmos.

El cálculo algorítmico puede provocar confusiones en los estudiantes debido a la similitud entre las notaciones de los números naturales y las fracciones. En este sentido se puede considerar que las operaciones aprendidas con los números naturales son un obstáculo para las operaciones realizadas con racionales ya que, por ejemplo, la multiplicación no significa siempre un aumento de la cantidad. Estas dificultades se deben en gran medida a la persistencia de conocimientos de los números naturales.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

La investigación es de tipo exploratorio enmarcado en un enfoque mixto. Se llevó a cabo el diseño de un instrumento denominado "Tarea de Selección", posteriormente, se aplicó a estudiantes de diferentes niveles educativos (Secundaria, Preparatoria y Licenciatura). Una vez obtenidos los datos, se llevó a cabo la organización de los mismos, realizándose el análisis de los porcentajes de las respuestas correctas por grupo y por nivel; los porcentajes con la que se resuelve cada tarea y el porcentaje con que es marcada cada opción de las tareas.

3.1 Población

Los participantes fueron 710 estudiantes con edades que oscilan entre 11 y 21 años; considerando a 103 estudiantes de primero de secundaria de escuelas oficiales o particulares, a 297 estudiantes que ingresaron a preparatorias BUAP o a preparatoria particular, 223 alumnos de nuevo ingreso a carreras universitarias (física, matemáticas, química, ingeniería y electrónica) y 87 alumnos que se encontraban cursando la mitad de las carreras de química, matemáticas, electrónica o física.

3.2 Instrumento

El contexto de este reporte de investigación se apoya en la aplicación de una actividad basada en la estrategia de enseñanza "ciclo de aprendizaje", actividad fundamentalmente de autorregulación, propuesta por Fuller, Karplus & Lawson (1977); en la que el estudiante basándose en su capacidad cognitiva y conocimientos previos, encuentra patrones con los que construye conceptos específicos (Lawson, 1994; Marek & Cavallo, 1997).

El método de enseñanza "Ciclo de Aprendizaje" se introduce inicialmente en el contexto de la enseñanza de la biología. Lawson (1967, citado en Lawson, 1994), diseñó una prueba mediante figuras de supuestas criaturas (bacterias u micro organismos), en la que los estudiantes debían identificar propiedades de un conjunto que denomina “mellinarks”, e identificar que en otro grupo las criaturas no presentan las propiedades antes identificadas y finalmente de otro conjunto, los estudiantes debían identificar las criaturas que los identifica como elementos del primer grupo.

El ciclo de aprendizaje tiene tres fases: exploración, introducción de términos y la aplicación de concepto. La exploración permite a los estudiantes investigar nuevos materiales y / o ideas para identificar patrones de regularidad y se planteen preguntas que los estudiantes intenten contestar. La introducción de términos permite al profesor introducir términos para etiquetar los patrones y explicar los conceptos recién inventados. La aplicación del concepto provoca que los estudiantes busquen los patrones en otros lugares y apliquen los nuevos conceptos a ejemplos adicionales, a menudo empleando técnicas de abstracción o generalización.

Lawson (2001), señala que el enfoque propuesto por el “ciclo de aprendizaje” ha demostrado ser eficaz para ayudar a los estudiantes a construir conceptos y sistemas conceptuales, así como desarrollar patrones de razonamiento más efectivos, principalmente porque permite a los estudiantes usar el razonamiento para probar sus propias ideas y participar en el proceso de construcción del conocimiento.

Los conocimientos básicos sobre fracciones que se demandan para resolver las tareas, y que para el propósito se consideran conocidas por los estudiantes, son sus diferentes representaciones principalmente las icónicas (gráficas, objetos, figuras, etc.) y simbólicas (fracciones equivalentes y la realización de operaciones directas como sumar, restar, multiplicar, reducir, comparar fracciones (mayor que (>), menor que (<) e igual que (=)), además de reconocer las diferentes interpretaciones que se asocian con las fracciones (como número decimal, porcentaje y parte-todo).

Al mismo tiempo, se ponen en juego habilidades como: la observación, ordenación, comparación, análisis, la búsqueda de patrones los estudiantes identifiquen propiedades para resolver cada tarea. Cabe mencionar que se nombró al conjunto de elementos en cada una de las tareas de manera peculiar, con el objetivo de que el estudiante a través de la búsqueda de patrones infiera las características y propiedades de cada tarea y por lo tanto, el nombre no sea un obstáculo para resolverlas.

A continuación, se describe en que consiste cada tarea.

Tarea 1

Todos estos son números Promps

$\frac{1}{8}=\frac{2}{16}$ $\qquad$ $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ $\qquad$ $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$ $\qquad$ $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

Ninguno de estos es número Promps

$\frac{1}{8}=\frac{2}{8}$ $\qquad$ $\frac{9}{3}=\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{3}{12}=\frac{9}{24}$ $\qquad$ $\frac{10}{40}=\frac{1}{8}$

¿Cuál(es) de estos es (son) número(s) Promps?

(A) $\frac{6}{10}=\frac{2}{5}$ $\qquad$ (B) $\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$ $\qquad$ (C) $\frac{5}{8}=\frac{4}{4}$ $\qquad$ (D) $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

- Esta tarea se basa en el manejo de fracciones equivalentes, en ella se deberá específicamente; inferir, relacionar, seleccionar y realizar las reducciones para determinar las equivalencias; para que el alumno resuelva bien la tarea debe identificar que en primer renglón el signo de igualdad se cumple, y que no se cumple en las fracciones del segundo renglón. En consecuencia, se infirió que las fracciones deben cumplir la regla de igualdad, podrá identificar en el tercer renglón las fracciones que cumplen la igualdad (B y D).

Tarea 2

Todos estos son números Blomps

$\frac{2}{4}$ $\qquad$ $\frac{8}{16}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{10}{20}$

Ninguno de estos es número Blomps

$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{8}$

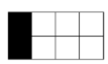
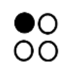
¿Cuál(es) de estos es (son) número(s) Blomps?

(A) $\frac{5}{10}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $1\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{10}$

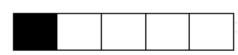
- Esta tarea se basa fundamentalmente en la identificación de fracciones equivalentes en una misma representación, el alumno deberá organizar la información, abstraer, clasificar e inferir que todas las fracciones son equivalentes y que de manera simplificada representa un medio; en el segundo reglón se presentan diversas fracciones que no cumplen con el primer reglón y que servirá para encontrar en el tercer renglón la única opción que cumple con la propiedad en el inciso D.

Tarea 3

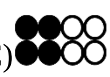
Todos estos son Snoops

$\frac{6}{24}$  0.25 

Ninguno de estos es Snoops

$\frac{3}{4}$  25 

¿Cuál(es) de estos es o son Snoops?

(A) 25% (B) $\frac{3}{12}$ (C) (D) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$

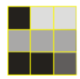
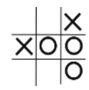
- En la tarea 3, se debe seleccionar, organizar e inferir qué representaciones equivalen a un cuarto. El alumno deberá identificar que las representaciones ya sean simbólicas y/o gráficas planteadas en el primer renglón son fracciones equivalentes, aunque en el segundo reglón se presentan diversas representaciones que no son equivalentes. Para esta tarea, en el tercer renglón los incisos A y B cumplen con estas propiedades que se encuentran inmersas en la misma.

Tarea 4

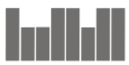
Todos estos son Xomps

Ninguno de estos es Xomps

¿Cuál(es) de estos es (son) Xomps?

(A)  (B)  (C)  (D) 

- En la tarea 4, se propone que los estudiantes sepan identificar en representaciones gráficas fracciones equivalentes; para ello se deberá relacionar y comparar los diversos esquemas (continuos o discretos) interpretados como parte-todo que se presentan en el primer renglón, en el segundo renglón solo se muestran diferentes representaciones sin ser equivalentes y para el tercer renglón se utiliza como distracción una opción gráfica la cual es interpretada como una razón; el valor equivalente es de un cuarto, correspondiendo a la opción B.

Tarea 5

Todos estos son números Glomps

$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$ $\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}$ $\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}$ $\frac{5}{3}-\frac{4}{6}$

Ninguno de estos es número Glomps

$\frac{1}{2}\times 1$ $\frac{2}{5}-\frac{4}{2}$ $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$ $\frac{4}{2}\div\frac{2}{2}$

¿Cuál(es) de estos es (son) número(s) Glomps?

(A) $\frac{3}{6}-\frac{3}{6}$ (B) $\frac{2}{5}\times\frac{2}{1}$ (C) $\frac{2}{5}\div\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

- En el caso de esta tarea, se plantea que los estudiantes exploren las operaciones básicas entre fracciones. El alumno deberá efectuar las operaciones del primer renglón para inferir las propiedades que lo llevan a resolver la tarea; para todos los casos el resultado de las operaciones es 1. Mientras tanto, las operaciones con fracciones del segundo renglón no comparten el mismo resultado. En el inciso A del tercer renglón se puede inferir que el resultado de restar un mismo número a la misma cantidad, el resultado siempre será cero, la cual no cumple con la característica de la tarea; por otro lado, en la opción C también se puede inferir que dividir un número entre sí mismo, siempre será 1, opción que si cumple con la esta tarea.

Tarea 6

Todos estos son números Troomps ($\therefore$ puede ser: > (mayor que), o < (menor que), o = (igual)

$\frac{4}{5} \therefore \frac{3}{4}$ $\qquad$ $\frac{5}{8} \therefore \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{10}{10} \therefore \frac{8}{9}$ $\qquad$ $\frac{2}{6} \therefore \frac{2}{8}$

Ninguno de estos es número Troomps

$\frac{1}{5} \therefore \frac{2}{4}$ $\qquad$ $\frac{4}{5} \therefore \frac{4}{4}$ $\qquad$ $\frac{2}{8} \therefore \frac{2}{4}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} \therefore \frac{3}{4}$

¿Cuál(es) de estos es (son) número(s) Troomps?

(A) $\frac{4}{5} \therefore \frac{3}{8}$ $\qquad$ (B) $\frac{1}{3} \therefore \frac{3}{4}$ $\qquad$ (C) $\frac{3}{5} \therefore \frac{3}{7}$ $\qquad$ (D) $\frac{4}{9} \therefore \frac{2}{4}$

- La tarea 6, explora la comparación entre fracciones identificando que la primera fracción es mayor que la segunda independientemente de los denominadores; dentro del primer renglón se muestra esta característica particular, y en el segundo renglón el par de fracciones que se comparan no la cumplen; ya sea que los alumnos conviertan las fracciones a números decimales o utilicen algún otro proceso deben seleccionar una o más opciones que tengan esta propiedad; las opciones que tienen esta propiedad en el tercer renglón son los incisos A y C.

Tarea 7

Todos estos son números Shooms

$\frac{1}{10}$	0.125	15%	$2\frac{1}{5}$

Ninguno de estos es número Shooms

-452	π	$\sqrt{25}$	0

¿Cuál(es) de estos es (son) número(s) Shooms?

(A) 1.25 (B) $\sqrt[3]{12}$ (C) 3 (D) $\frac{9}{5}$

- En la tarea 7, se plantean diferentes representaciones simbólicas e interpretaciones de una fracción; el estudiante debe conocer e identificar que todas las representaciones en el primer renglón pertenecen al conjunto de los números fraccionarios; y que en el segundo renglón ninguna de las cantidades pertenece a este conjunto; así que los alumnos deberá reconocer que un número decimal y que una fracción impropia, pertenece a este conjunto.

Tarea 8

Todos estos son números Rhomps

$2\frac{1}{2}$	$1\frac{4}{6}$	$4\frac{2}{3}$	$3\frac{5}{8}$

Ninguno de estos son números Rhomps

$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	45%	$\frac{1}{10}$

¿Cuál(es) de estos es (son) números Rhomps?

(A) 8.5% (B) $1\frac{3}{9}$ (C) 2.750 (D) $4\frac{5}{10}$

- Finalmente, la tarea 8 se refiere a la representación de una “fracción mixta”. El alumno deberá identificar las características de este tipo de fracciones en las que se encuentran en el primer renglón; para el segundo renglón solo se presentan fracciones menores a la unidad y un porcentaje que no comparten las características del primer renglón; y en el tercer renglón, se cuenta con una opción que es confusa, pues se pone en juego inferir que una fracción mixta se puede escribir como un número decimal, es decir, utilizando una representación diferente.

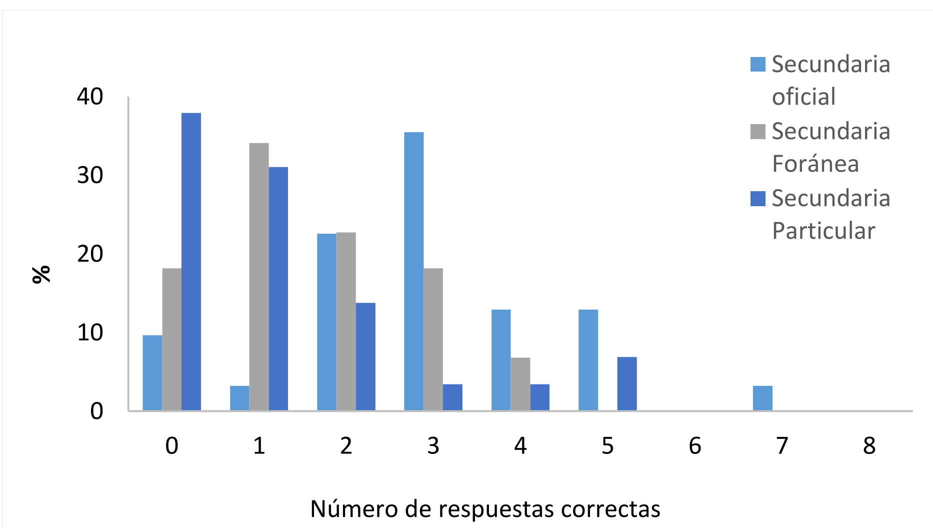
CAPÍTULO IV

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Se aplicó el instrumento denominado “Tarea de Selección” y a continuación, se presentan los resultados; los cuales se analizaron a través del número de tareas resueltas, los porcentajes con los que se resuelve cada tarea y de acuerdo a las opciones seleccionadas en cada tarea. Los alumnos participantes se encontraban en el primer año de secundaria, alumnos que en primaria ya habían sido instruidos para expresar cocientes de una medida entera entre un número natural, números fraccionarios y decimales, representaciones como porcentajes y gráficas, comparar y operar con fracciones, etc.; respecto a los alumnos que ingresaron a preparatorias con diferentes perfiles, fueron instruidos durante los dos primeros años de secundaria en resolución de problemas que implican convertir números fraccionarios a decimales y viceversa, operar con fracciones: suma, resta, multiplicación y división de fracciones; y alumnos que ya no estudian explícitamente fracciones e ingresan a carreras universitarias (física, matemáticas, actuaria, química, ingeniería y electrónica) y alumnos que cursaban media carrera (química, matemáticas, electrónica, física).

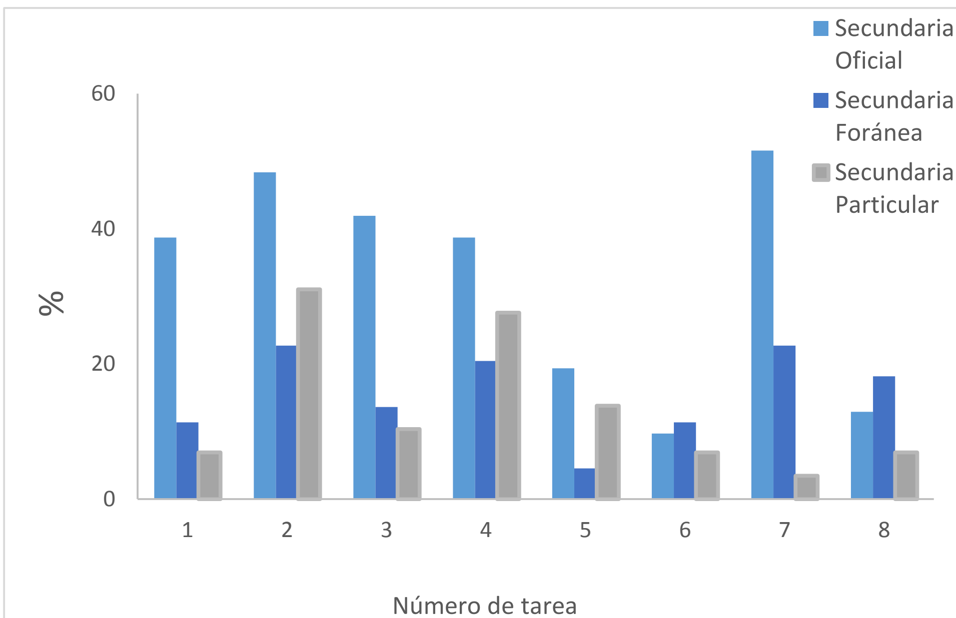
ANÁLISIS DE RESULTADOS DE ACUERDO AL NÚMERO DE TAREAS RESUELTAS Y A LAS RESPUESTAS CORRECTAS EN CADA TAREA

Alumnos de 1° de secundaria (edad promedio: 13 años)



GRÁFICA 1. Número de "tareas" resueltas por estudiantes de Secundaria.

En la gráfica 1, se muestran los porcentajes con los cuales los alumnos que egresaron de la primaria (primer grado de secundaria) resolvieron las tareas. Se puede ver que los mayores porcentajes de cada uno de los grupos, el 38% de los estudiantes de la secundaria particular no fueron capaces de resolver ninguna tarea, el 35% los de la secundaria foránea pudieron resolver una actividad y el 37% de los estudiantes de la secundaria oficial resolvieron por lo menos tres tareas. Cabe señalar que hubo alumnos que fueron capaces de identificar las propiedades y resolvieron cinco tareas.

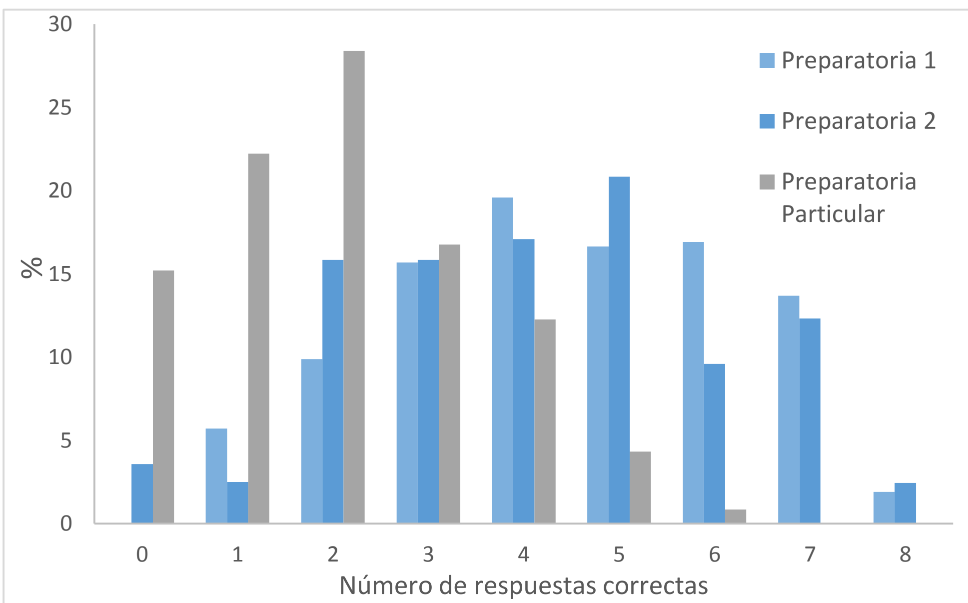


GRÁFICA 2. Porcentaje de estudiantes de Secundaria que responden correctamente por cada "Tarea".

Respecto al porcentaje con que los estudiantes resuelven cada una de las tareas, en la gráfica 2 se puede ver que los estudiantes de la escuela oficial, resolvieron más tareas (35% en promedio), que los estudiantes de la escuela foránea y particular, los cuales sólo logran resolver en promedio el 18%. Una de la tareas en las que se muestra mayor diferencia en cuanto al porcentaje de alumnos que respondieron correctamente es la tarea 7, la cual consiste en identificar las diversas representaciones de una fracción; donde los alumnos de la escuela oficial la resolvieron en un 50%, mientras que los alumnos de la secundaria foránea apenas lo hicieron en un 21% y los de la particular no rebasaron ni el 5%. En cuanto a la tarea que presentó mayores dificultades fue la 6, que corresponde a la comparación de fracciones; siendo en que las tres secundarias contestaron menos del 12% de los estudiantes en cada una de las escuelas.

Tomando como suficiente, el resolver cinco o más tareas, los alumnos de la secundaria oficial fue del 24%, los de la particular de 13% y la foránea el 16%. Podemos decir que la mayoría de los estudiantes se encuentran en un nivel cognitivo concreto, siendo que la mitad de las tareas corresponden al manejo de equivalencias y una de orden; debido a que los niveles de pensamiento con respecto al concepto de fracción parecen estar relacionado con el buen desempeño en tareas de orden y equivalencia, de acuerdo con Post, et al. (1986, citado en Mancera, 1992.

Alumnos de 1° de Preparatoria (edad promedio: 15 años, con 6 meses)

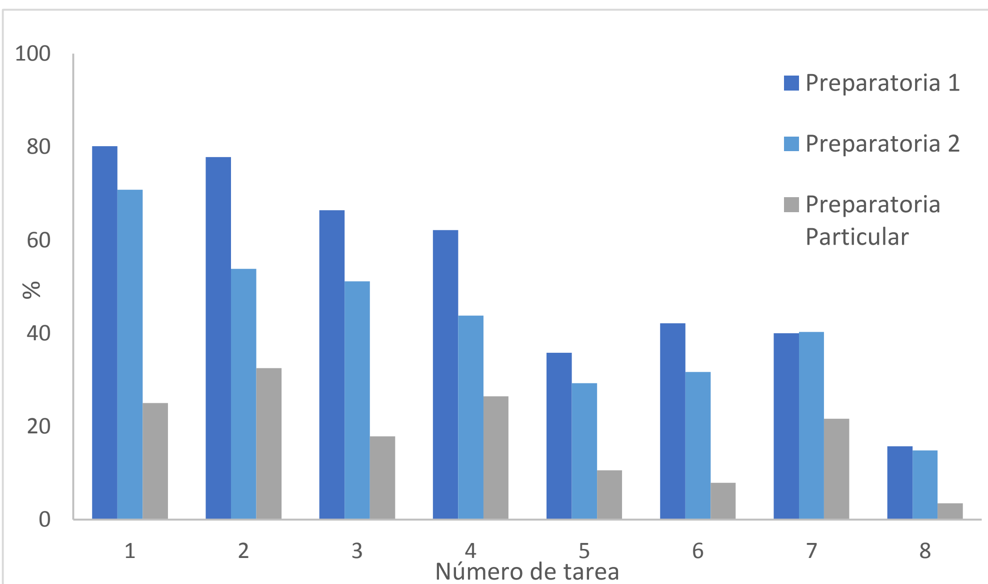


GRÁFICA 3. Número de "tareas" resueltas por estudiantes de Preparatoria.

La aplicación de la prueba fue con estudiantes que ingresaron a tres preparatorias, a la preparatoria denominada 1, los estudiantes son admitidos mediante una evaluación aplicada por CENEVAL, además la comunidad la reconoce por la calidad de sus egresados. La preparatoria 2, los estudiantes también son admitidos por el mismo examen, mientras que los estudiantes admitidos a la preparatoria particular, en su mayoría no fueron admitidos en las preparatorias oficiales.

Considerando que el error es del 5%, que corresponde a ± 2 alumnos, es posible considerar que los alumnos que ingresaron a las preparatorias oficiales, resolvieron las tareas en promedio con los mismos porcentajes, mientras que los estudiantes que no fueron admitidos, obtuvieron resultados similares a los obtenidos por los estudiantes de primero de secundaria.

Tomando como suficiente, el resolver cinco o más tareas, los estudiantes de la preparatoria 1, el 50% en promedio lo hicieron correctamente, los de la preparatoria 2 en un 44%, mientras que los de la preparatoria particular sólo fue el 5%.

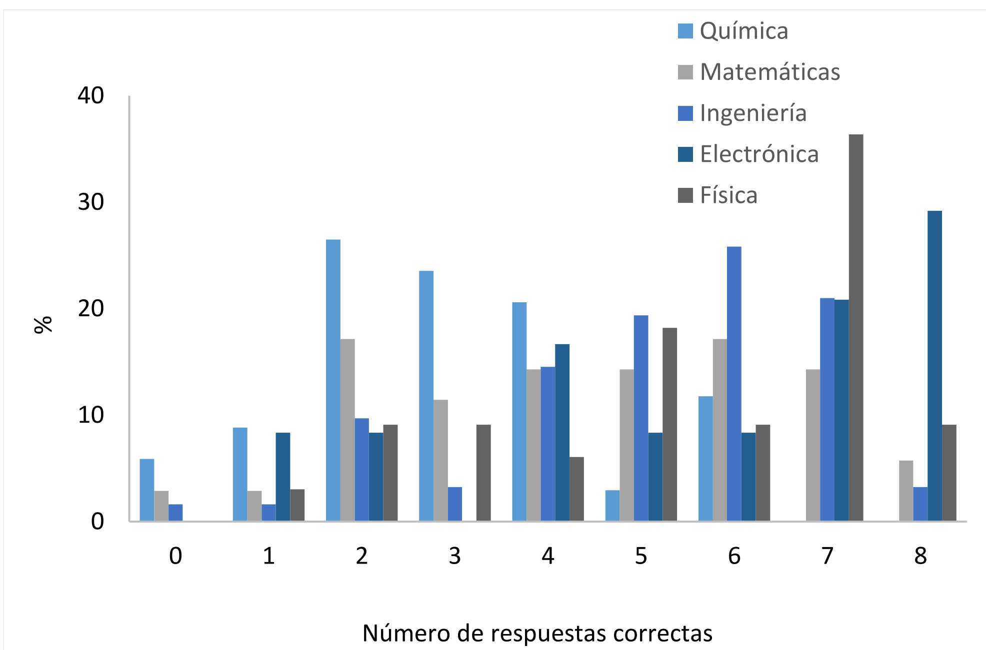


GRÁFICA 4. Porcentaje de estudiantes de Preparatoria que responden correctamente por cada "Tarea".

Respecto al promedio de respuestas correctas por tarea, el 55% y 48% respectivamente obtuvo la preparatoria 1 y 2, mientras que alumnos de la preparatoria particular fue de 25%.

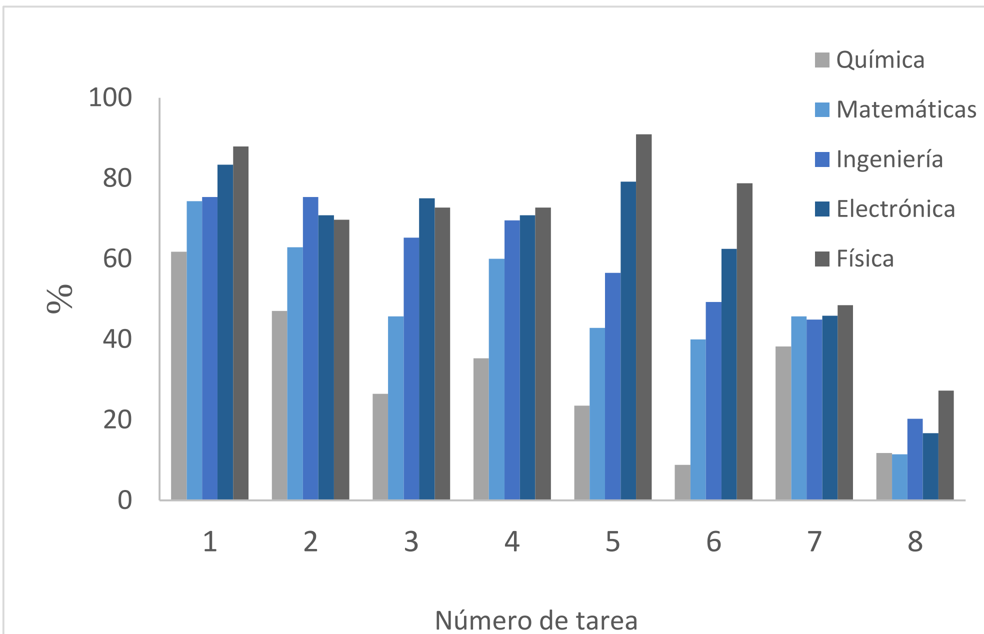
Las tareas que fueron mejor resueltas por los estudiantes de preparatoria fueron las relacionadas al manejo de equivalencias en diferentes representaciones. Aunque es evidente que los porcentajes de la preparatoria particular se encuentran por debajo del promedio, siendo que contestan con un máximo de un 35% en la tarea 2. La tarea 5 (operaciones entre fracciones) y 6 (orden y comparación entre fracciones), son las tareas que se responden correctamente en menor porcentaje; debido a la influencia de los conocimientos y procedimientos sobre números enteros.

Alumnos Universitarios de nuevo ingreso (edad promedio: 18 años, con 11 meses)



GRÁFICA 5. Número de "tareas" resueltas por estudiantes de nuevo ingreso a la Universidad.

Las tareas se aplicaron a alumnos aceptados en el primer periodo de electrónica, ingeniería, física y, alumnos de química y matemáticas, quienes ingresaron en el segundo periodo. Con el criterio antes establecido, relacionado con el porcentaje de alumnos que fueron capaz de resolver cinco o más tareas, se tiene que los de Química obtuvieron el 15%, los Matemáticas el 51%, los de Ingeniería el 69%, los Electrónica 67%, mientras que los de Física un 73%.



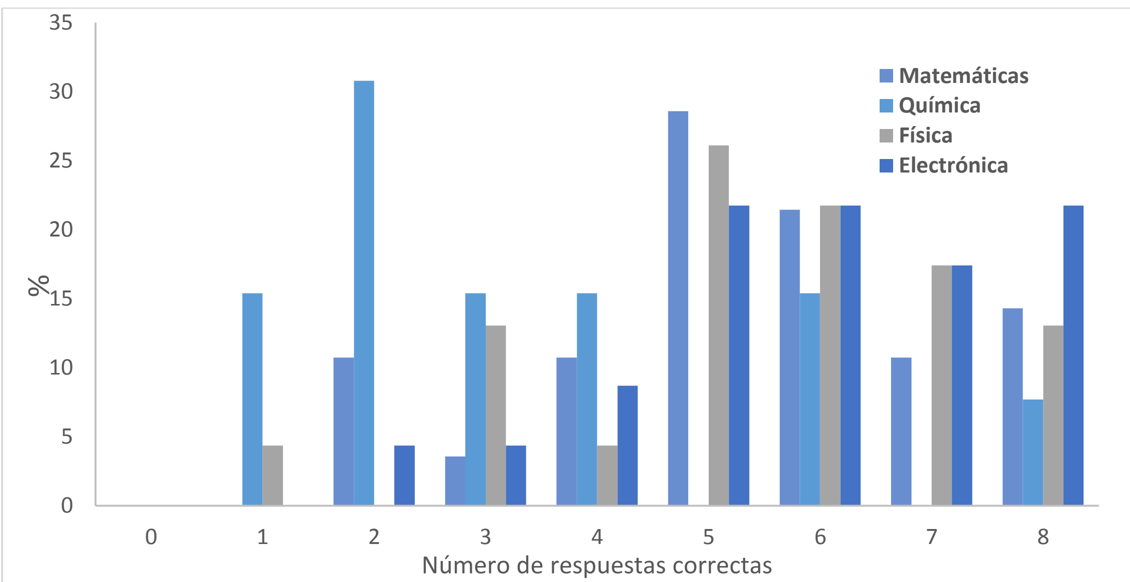
GRÁFICA 6. Porcentaje de estudiantes de nuevo ingreso a la Universidad que responden correctamente en cada "Tarea".

Se encontró que los estudiantes de Química, resolvieron en promedio el 30% las tareas 2, 3 y 4, mientras que los de matemáticas en promedio resolvieron de 2 a 7 tareas, éstos dos grupos corresponden a alumnos que, aunque es posible que tengan afinidad por las matemáticas, no acreditaron en la primera oportunidad su ingreso, respecto a los estudiantes de química, son alumnos que también, ingresaron en una segunda oportunidad. Respecto a los estudiantes de física e ingeniería el 35% pudieron resolver siete y seis tareas respectivamente. Finalmente se encontró que 20%, de estudiantes de electrónica pudieron resolver las ocho tareas, estos alumnos acreditan su inscripción, quienes obtienen los mayores puntajes de una población el 80% fueron rechazados.

Tomando como suficiente, el resolver cinco o más tareas, los estudiantes que entraron a: la Facultad de Físico Matemáticas, licenciatura en Física (F) lograron el 71%, Ingenierías (I) lograron el 69%, la Facultad de Electrónica (FE) lograron el 54%, los que entraron a la Facultad de Físico Matemáticas, licenciatura en Matemáticas (FM) obtuvieron el 48% y los que entraron a la Facultad de Química (FQ), solo el 15%.

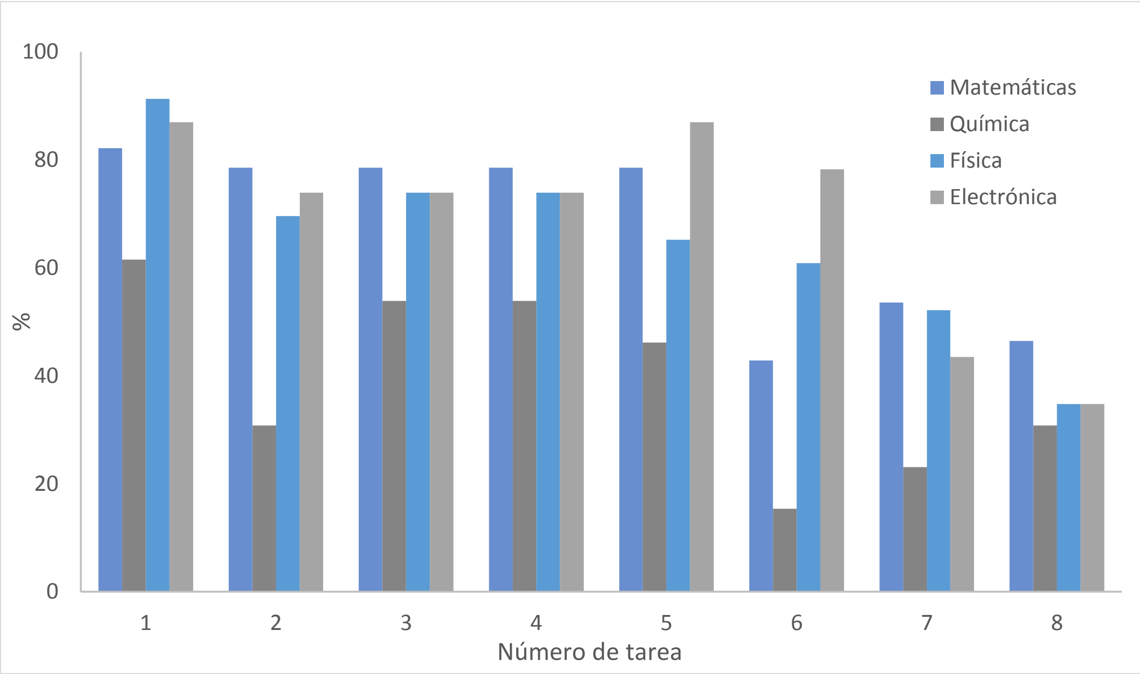
Respecto al promedio de respuestas correctas por tarea, los alumnos de Física (F) obtuvieron el 69°, los de FM obtuvieron el 52%, y los FQ, el 38%.

Alumnos Universitarios de Licenciatura (edad promedio: 21 años)



GRÁFICA 7. Número de "tareas" resueltas por estudiantes universitarios.

Los siguientes resultados se derivan de la aplicación de las tareas a estudiantes que en promedio habían cursado de cinco a siete semestres en las licenciaturas; Física (F), Matemáticas (M), Química (Q) y Electrónica (E), por lo tanto, fueron alumnos cuya edad oscila en el rango de 21 a 23 años. Con el criterio antes establecido, relacionado con el porcentaje de alumnos que fueron capases de resolver más de cinco tareas, se tiene que los F obtuvieron el 75%, los M el 70%, los E, 69%, mientras que los Q, solo el 23%.



GRÁFICA 8. Porcentaje de estudiantes universitarios que responden correctamente cada "Tarea".

Respecto al promedio de respuestas correctas por tarea, los F obtuvieron el 67%, los M el 71%, los E, 73%, mientras que los Q, sólo 41%.

Se esperaría que los porcentajes fueran mayores con respecto a los diferentes niveles educativos o grados. También se puede señalar que los márgenes de error son menores, aunque los estudiantes siguen presentando dificultades para resolver las diversas tareas.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE ACUERDO A LAS OPCIONES SELECCIONADAS

Tarea 1

Todos estos son números Promps

$\frac{1}{8}=\frac{2}{16}$ $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$ $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

Ninguno de estos es número Promps

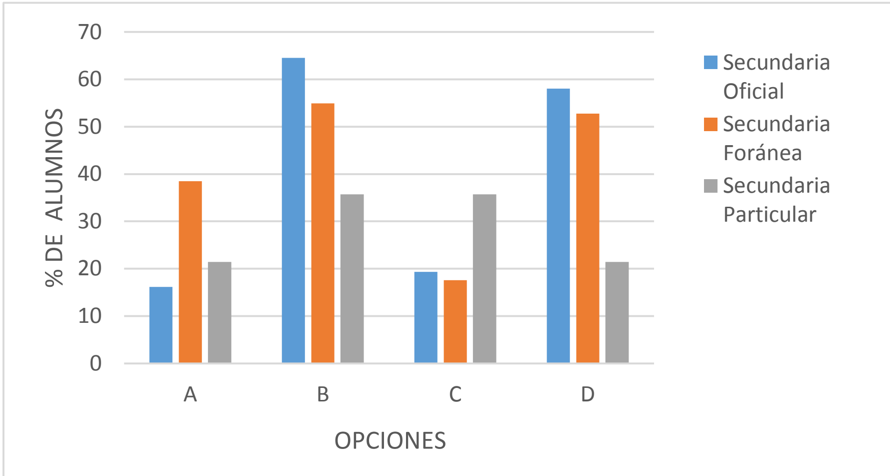
$\frac{1}{8}=\frac{2}{8}$ $\frac{9}{3}=\frac{1}{3}$ $\frac{3}{12}=\frac{9}{24}$ $\frac{10}{40}=\frac{1}{8}$

¿Cuál(es) de estos es (son) número(s) Promps?

(A) $\frac{6}{10}=\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$ (C) $\frac{5}{8}=\frac{4}{4}$ (D) $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

Esta tarea, exige que los estudiantes identifiquen conscientemente ideas conceptuales que subyacen a los algoritmos para determinar las relaciones de equivalencias entre el par de fracciones que se presentan. Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Las opciones correctas son: el inciso B, en la cual a partir de una fracción elemental se debe obtener una fracción equivalente y D, donde el alumno debe obtener una fracción simplificada a partir de una fracción dada. Aunque ambas opciones fueron contestadas de forma similar; alumnos de secundaria, preparatoria y de nuevo ingreso a la universidad presentaron mayor dificultad en reconocer la equivalencia en la opción D, debido a que es más complicado obtener una fracción simplificada (Dickson, 1991 citado en Maza, 1999). Sin embargo, estudiantes de diferentes niveles eligieron la opción A como respuesta correcta; sin considerar la importancia de dividir la fracción entre 1 (es decir, al numerador y denominador dividirlos por la misma cantidad). En esta opción, el numerador (6) se divide entre 3 y el denominador (10) entre 2.

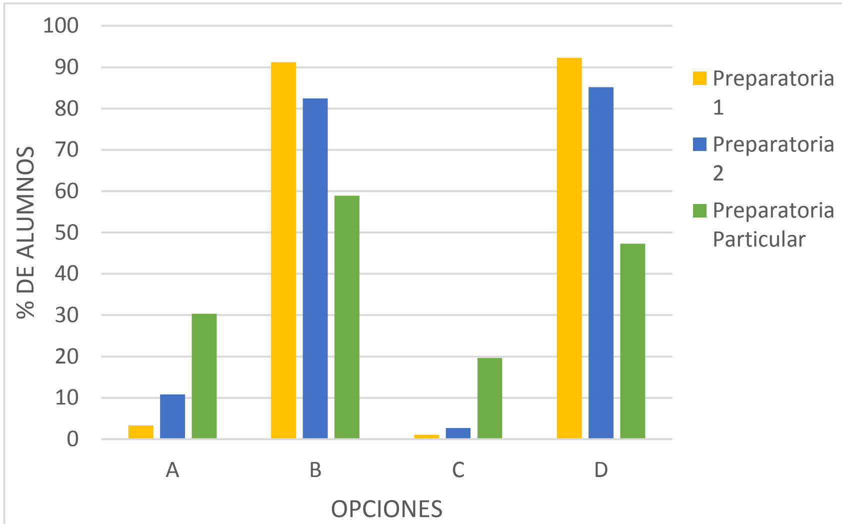
Alumnos de 1° de Secundaria



GRÁFICA 9. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Secundaria en la "Tarea 1".

En esta tarea, el 60% de los estudiantes de la secundaria oficial identifican y obtienen fracciones equivalentes a partir de una fracción dada, mientras que los estudiantes de la secundaria foránea solo lo hacen en un 53% y en un 27% los estudiantes de la escuela particular. En el caso para los estudiantes de la secundaria foránea y particular, quienes eligieron en un mayor porcentaje la opción A y C respectivamente; constata que obtener una fracción simplificada resulta más complicado como lo señala Maza (1999), debido a que para obtenerlas se debe dividir al numerador y denominador entre un divisor común, es decir, dividir por la misma cantidad tanto el numerador como el denominador; sin embargo, estas opciones solo hacen la división para el denominador.

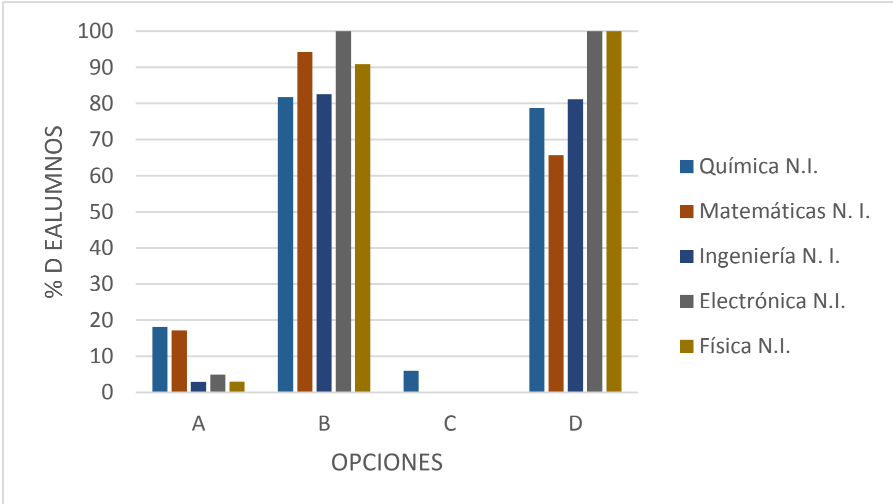
Alumnos de 1° de Preparatoria



GRÁFICA 10. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Preparatoria en la “Tarea 1".

Considerando que el 90% de los alumnos de la preparatoria 1 y el 85% de la preparatoria 2 eligen correctamente las opciones que establecen las fracciones equivalentes, es evidente que el margen de error es bajo; sin embargo, solo el 59% de estudiantes de la preparatoria particular señalan la opción B como correcta y el 48% la opción D, porcentajes similares a los que alcanzó la secundaria oficial. De acuerdo a los resultados presentados, los estudiantes de la preparatoria particular presentaron mayores dificultades para obtener una fracción simplificada a partir de una dada, debido a que no solo los porcentajes son bajos con respecto a las otras preparatorias, sino que además eligen la opción A y C como opciones correctas, en un 25% (promedio) cuando las fracciones no son equivalentes, porque el numerador no se divide entre la misma cantidad que el denominador.

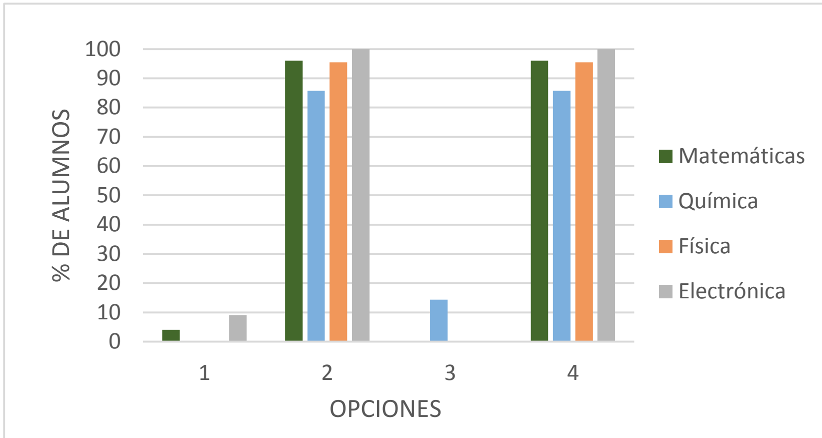
Alumnos Universitarios de nuevo ingreso



GRÁFICA 11. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Nuevo Ingreso a la Universidad en la “Tarea 1".

Los estudiantes de nuevo ingreso a carreras universitarias, obtienen un alto porcentaje al identificar fracciones equivalentes, el cual es mayor al 80% al elegir la opción B; sin embargo, para los estudiantes de Matemáticas, se les dificulta obtener fracciones equivalentes al simplificar una fracción; para los estudiantes de Física les resulta más fácil y los estudiantes de las carreras restantes se mantienen con un margen de error muy bajo. Esta tarea es de baja demanda, por ello se evidencia menores errores; debido a que son capaces de establecer relaciones de equivalencias.

Alumnos Universitarios de Licenciatura



GRÁFICA 12. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Universidad en la “Tarea 1".

Los estudiantes que cursaban la mitad de la carrera, independientemente de ella; con un porcentaje mayor al 85% fueron capaces de identificar que la opción B y D, correspondían a fracciones equivalentes; obtienen mayores porcentajes a los alumnos de nuevo ingreso, con ello se deduce que la preparación académica obtenida en la universidad les ayuda a mejorar y superar dificultades.

Tarea 2

Todos estos son números Blomps

$\frac{2}{4}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{20}$

Ninguno de estos es número Blomps

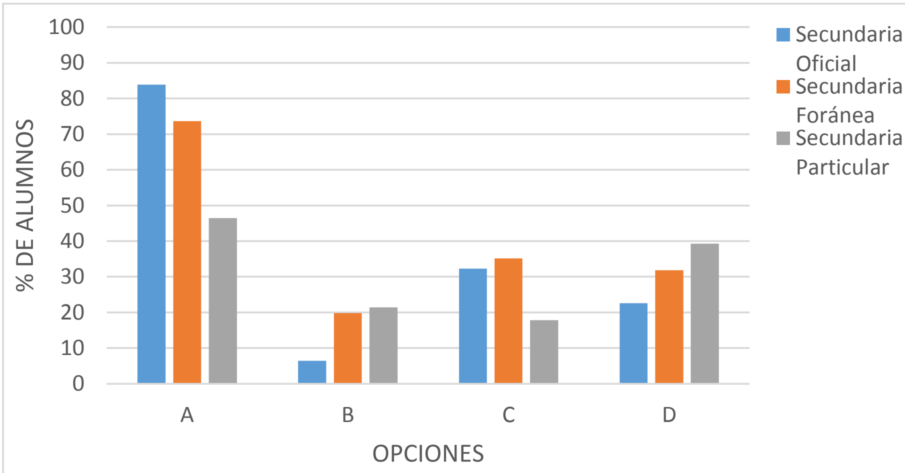
$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{8}$

¿Cuál(es) de estos es (son) número(s) Blomps?

(A) $\frac{5}{10}$	(B) $\frac{5}{8}$	(C) $1\frac{1}{2}$	(D) $\frac{2}{10}$

La tarea consiste en identificar fracciones equivalentes a ½; todas las fracciones que se presentan se encuentran en la misma representación simbólica. La opción correcta en esta tarea es la opción A, la cual se obtiene al multiplicar el numerador y denominador por 5; la denominación “equivalente”, se debe a que representan al mismo número aunque no tengan las mismas cantidades numéricas. Es así que uno de los errores que presentaron constantemente los estudiantes al momento de responder la tarea fue elegir la opción C como respuesta correcta al observar que contenía la fracción ½; sin embargo, no lograron establecer la relación de la inexistencia de equivalencia.

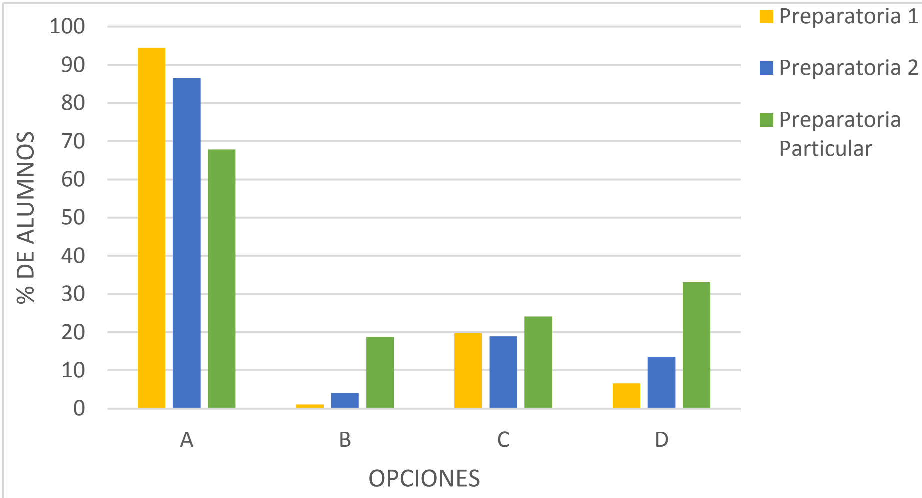
Alumnos de 1° de Secundaria



GRÁFICA 13. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Secundaria en la “Tarea 2".

El 83% de los estudiantes de la secundaria oficial, el 72% de la secundaria foránea y un 48% de la escuela particular, identifican que 5/10 es equivalente a 1/2; sin embargo, también una tercera parte de los estudiantes seleccionan las demás opciones demostrando que el manejo de equivalencias es bajo y que no logran identificar un patrón de regularidad; dado que para obtener una fracción equivalente es necesario dividir o multiplicar por un mismo número al numerador y denominador, quedando descartada la opción C ya que el número que representa es mayor a la unidad.

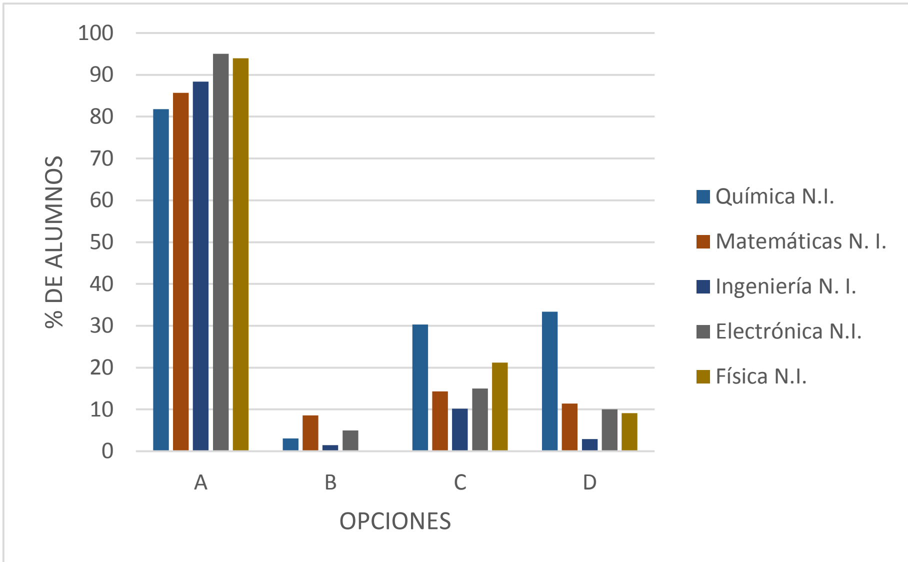
Alumnos de 1° de Preparatoria



GRÁFICA 14. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Preparatoria en la "Tarea 2".

Los porcentajes obtenidos por los alumnos de la preparatoria 1 y 2 superan a los de la secundaria, en el caso de los estudiantes de la preparatoria particular obtienen un porcentaje por debajo de los estudiantes de la secundaria oficial y foránea, identificando que las fracciones propuestas son equivalentes a 5/10 y con un porcentaje similar seleccionan la opción D, la cual no representan una fracción equivalente dado que si se simplifica la fracción corresponde a 1/5. De la misma forma la opción C, causa confusión en los estudiantes de preparatoria, por contener ½ como parte de la fracción; sin percatarse de que se trata de una fracción mayor a la unidad; la cual no corresponde con las demás fracciones.

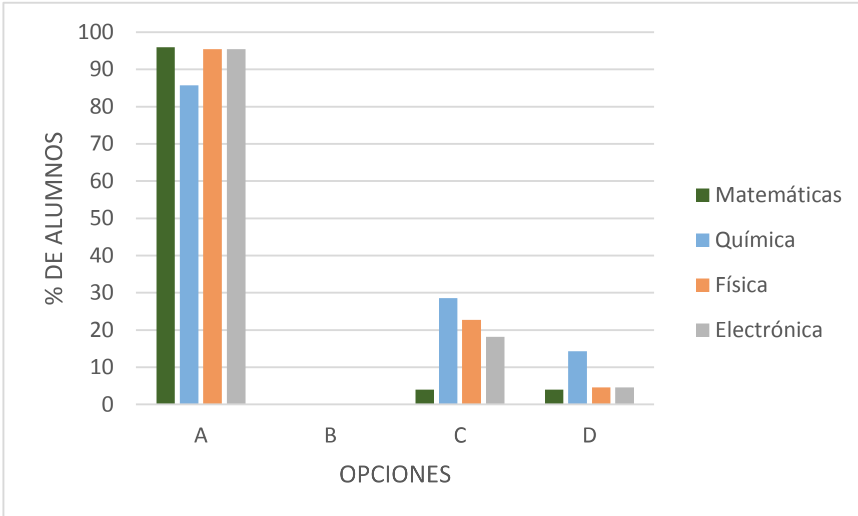
Alumnos Universitarios de nuevo ingreso



GRÁFICA 15. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Nuevo Ingreso a la Universidad en la "Tarea 2".

En la tarea 2, con un porcentaje mayor al 80% de los estudiantes de las diferentes carreras responden correctamente identificando que 5/10 pertenece al conjunto de fracciones equivalentes de ½. Sin embargo, los estudiantes de la Facultad de Química, presentan mayores dificultades al identificar el patrón de regularidad; además de haber elegido la opción C y D en porcentajes similares a los de secundaria y preparatoria.

Alumnos Universitarios de Licenciatura

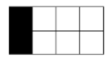


GRÁFICA 16. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Universidad en la "Tarea 2".

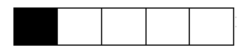
Si bien, los estudiantes que se encontraban a mitad de carrera eligen la opción A como respuesta correcta; a través de la gráfica, identificamos que los estudiantes de la Facultad de Química tienen mayor margen de error al contestar que 1 ½ es equivalente a 1/2; sin embargo, aunque 1 ½ es igual a 3/2 y a la vez, este se obtiene multiplicando ½ x 3 , es decir, es 3 veces 1/2 , lo cual no significa que sean equivalentes debido a que se debe multiplicar tanto al numerador y denominador por la misma cantidad, propiedad que no se cumple en esta fracción.

Tarea 3

Todos estos son Snoops

$\frac{6}{24}$		0.25	

Ninguno de estos es Snoops

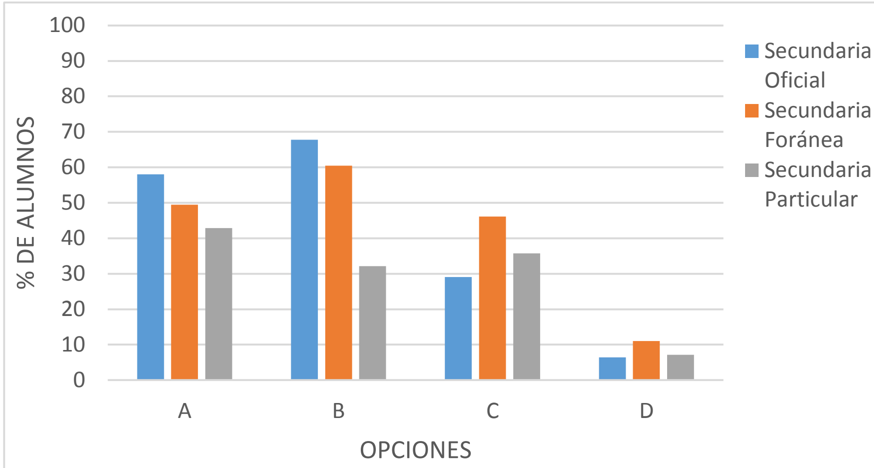
$\frac{3}{4}$		25	

¿Cuál(es) de estos es o son Snoops?

(A) 25%	(B) $\frac{3}{12}$	(C) 	(D) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$

En esta tarea se presentan cuatro elementos, los cuales representan la misma fracción a pesar de que su representación es diferente, ya sea numérica o gráfica. El estudiante debe seleccionar la(s) opción(es) equivalente(s) sin importar el tipo de representación en que se encuentre(n). La resolución conecta diversas representaciones. Se representan de varias formas y los estudiantes utilizan aquellas que les llevan a un razonamiento más abstracto. Las opciones correctas son el 25% (opción A) y 3/12(opción B); la opción A representación al mismo número en un porcentaje y la opción B, se encuentra en una fracción simplificada a 6/24. Los estudiantes de los diferentes niveles eligen también la opción C con frecuencia, debido a que una de las representaciones del primer conjunto (modelo discreto) se presenta en las opciones; sin embargo, no representa una fracción equivalente a ¼.

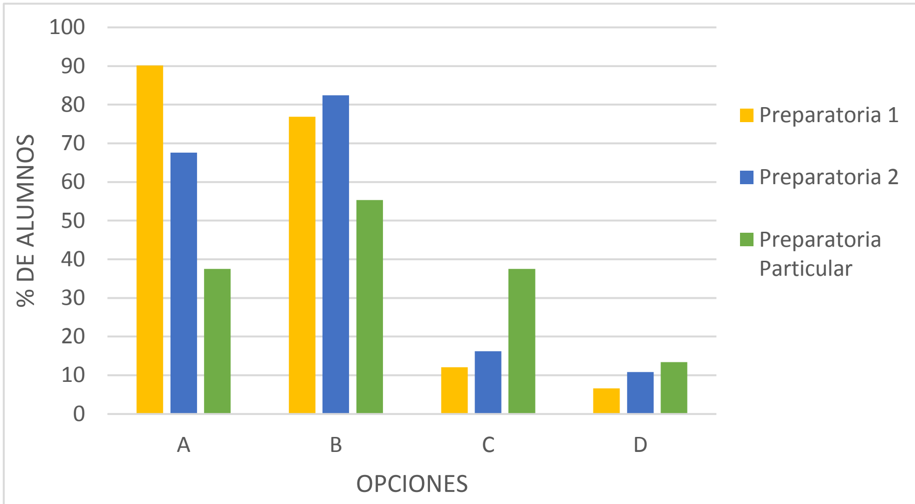
Alumnos de 1° de Secundaria



GRÁFICA 17. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Secundaria en la “Tarea 3".

Los estudiantes de la secundaria oficial en un 58% reconocen que el porcentaje es una manera de representar una fracción además de identificar que las diferentes representaciones que se muestran son equivalentes a un cuarto; así mismo con un porcentaje del 68% seleccionan la opción B, que corresponde a una fracción simplificada de 6/24. Mientras tanto, los estudiantes de la secundaria foránea y particular, responden en un menor porcentaje que la oficial. Sin embargo, más del 30% de los estudiantes de la secundaria eligen la opción C, la cual se representa un modelo discreto pero la cantidad de círculos sombreados no corresponde a 1/4 del total de los objetos.

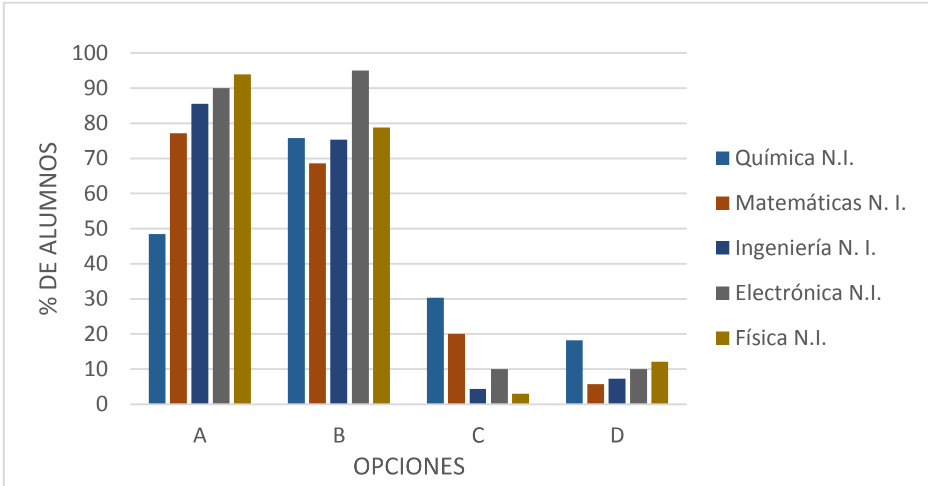
Alumnos de 1° de Preparatoria



GRÁFICA 18. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Preparatoria en la "Tarea 3".

En la tarea 3, los estudiantes de la preparatoria 1 responden en un 90% de manera correcta, identificando y señalando que el porcentaje es una forma de representar una fracción equivalente. Por su parte, los de la preparatoria 2 lo hacen en un 68%; sin embargo, sólo el 38% de los estudiantes de la preparatoria particular responden correctamente, evidenciando que presentan mayores dificultades para identificar una misma fracción en diferentes representaciones. Por otra parte, los estudiantes de la preparatoria 2 y particular, aumentan su porcentaje de alumnos que identificaron que 3/12 es equivalente a 6/24, siendo una fracción simplificada, y al mismo tiempo que las diversas representaciones equivalen a 1/4. Sin embargo, los alumnos de la preparatoria particular en un poco más del 35% no identifican la regularidad de las equivalencias; sino que ponen mayor énfasis en el uso de modos de representación.

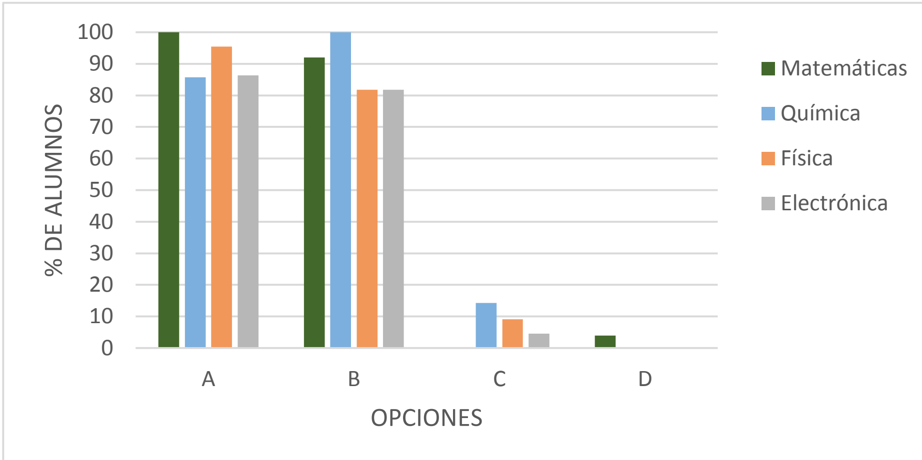
Alumnos Universitarios de nuevo ingreso



GRÁFICA 19. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Nuevo Ingreso a la Universidad en la “Tarea 3".

Estudiantes de las diferentes carreras excepto los pertenecientes a la Facultad de Química, responden correctamente la tarea 3 en un 78% de manera correcta e identificando fracciones equivalentes de un conjunto de diversas representaciones simbólicas y gráficas a la fracción ¼; mientras tanto, los de la Facultad de Química apenas el 48% lo hace correctamente, cuando se debe identificar equivalencias en un porcentaje. Así mismo, los estudiantes de Química y Electrónica incrementan su porcentaje al obtener una fracción simplificada de 6/24. De la misma manera, que los estudiantes de secundaria y preparatoria, ellos presentan dificultades con respecto a identificar una fracción equivalente en un modelo discreto.

Alumnos Universitarios de Licenciatura



GRÁFICA 20. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Universidad en la "Tarea 3".

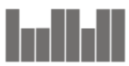
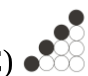
Para la tarea 3, estudiantes de las cuatro facultades respondieron correctamente en un porcentaje mayor del 81%; identificando fracciones equivalentes con respecto a 1/4 y reconociendo equivalencias en diferentes representaciones ya sean simbólicas o gráficas, respectivamente. Algunos estudiantes presentan error al elegir que el modelo discreto representa una fracción equivalente a 1/4; siendo que se ilumina la mitad de los círculos del total.

Tarea 4

Todos estos son Xomps

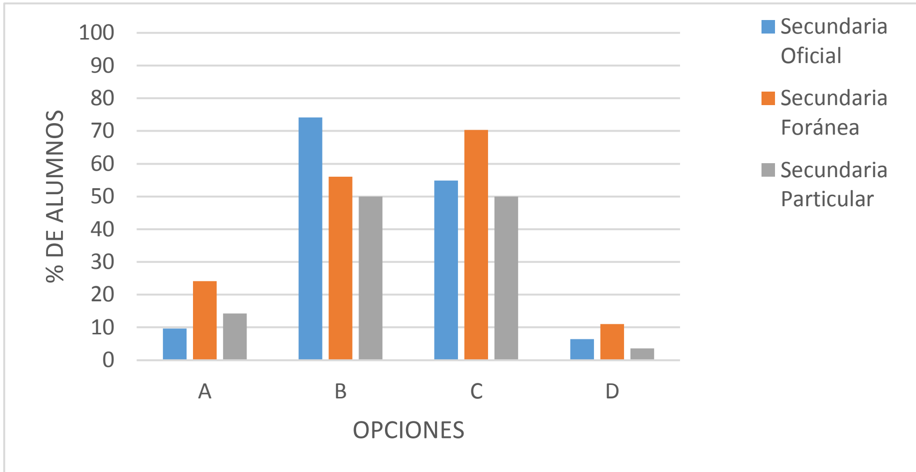
Ninguno de estos es Xomps

¿Cuál(es) de estos es (son) Xomps?

(A)  (B)  (C)  (D) 

La tarea 4 demanda identificar la fracción ¼ en una representación gráfica ya sea del tipo continuo o discreto, asociado a la fracción como parte-todo. La opción correcta es representada en el inciso B, el esquema cuadrangular se divide en ocho partes iguales y se sombrean dos, las cuales representan de forma simbólica 2/8 que es equivalente a ¼. Sin embargo, una de las opciones que es selecciona con frecuencia en los diferentes grupos es la opción C; esto se debe a la influencia de observar la misma representación en el primer conjunto sin lograr identificar que el esquema tiene 10 círculos y de los cuales se sombrean 4 de ellos que equivalen a 4/10 o 2/5; por lo tanto, no hay equivalencia aunque la representación es la misma.

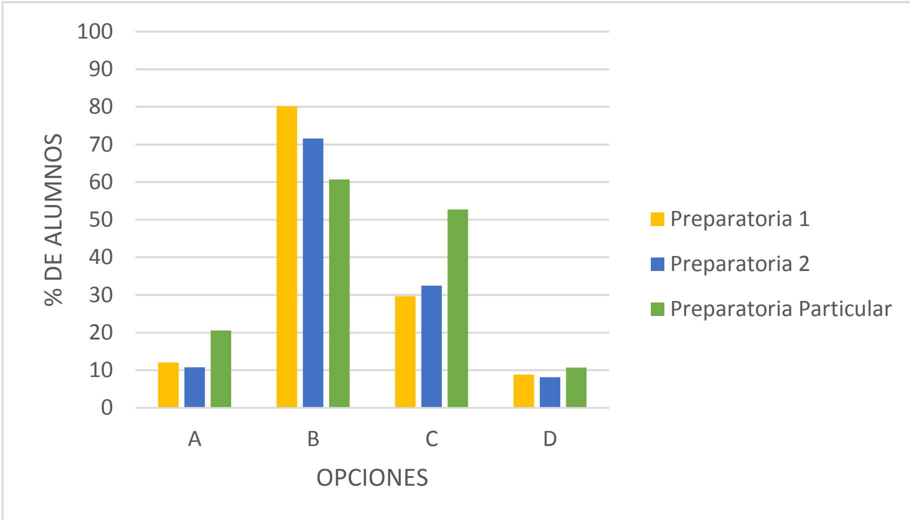
Alumnos de 1° de Secundaria



GRÁFICA 21. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Secundaria en la “Tarea 4".

Los estudiantes de secundaria reconocen la equivalencia en representaciones continuas; contestando al menos en un 50% de los estudiantes, donde la opción B que representa 2 regiones sombreadas de un total de 8, es equivalente a 1/4. Por otro lado, en ese mismo porcentaje los estudiantes también seleccionan la opción C, dado que los estudiantes infieren que por pertenecer a un modelo similar al que se propone en la tarea, deberían elegir esta opción sin considerar la interpretación que se le da al sombreado de las regiones con respecto al total, es decir, considerar la fracción como parte-todo y menos aún que sea equivalente; presentando mayores dificultades en la representación de contextos discretos.

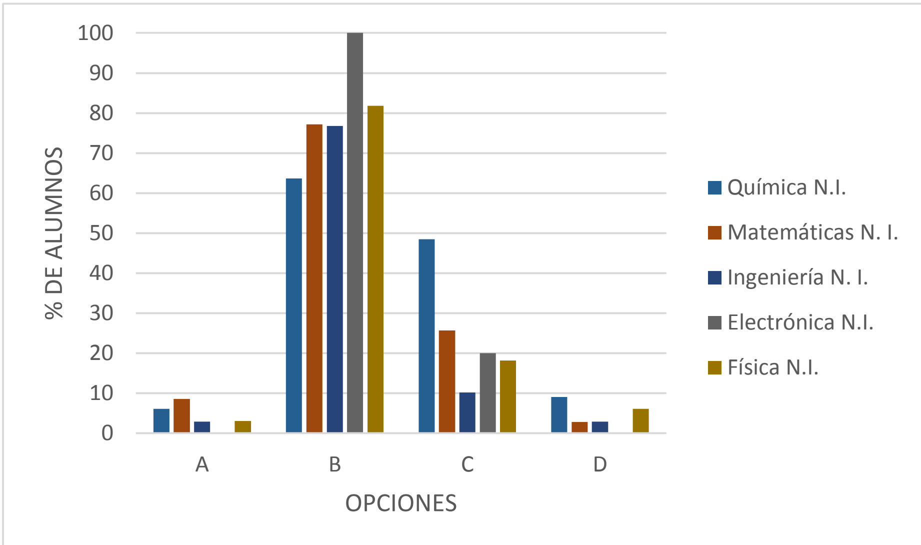
Alumnos de 1° de Preparatoria



GRÁFICA 22. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Preparatoria en la "Tarea 4".

Más del 60% de los estudiantes de las tres preparatorias, en esta tarea, reconocen en una representación gráfica (contextos continuos y discretos), fracciones equivalentes. Los resultados, muestran mayores dificultades al trabajar en modelos discretos, debido a que el conjunto de elementos no es considerado como un todo. Los estudiantes de las tres preparatorias en una tercera parte de su población, contestan que la opción C es correcta; al presentar un modelo similar en el conjunto de elementos dados.

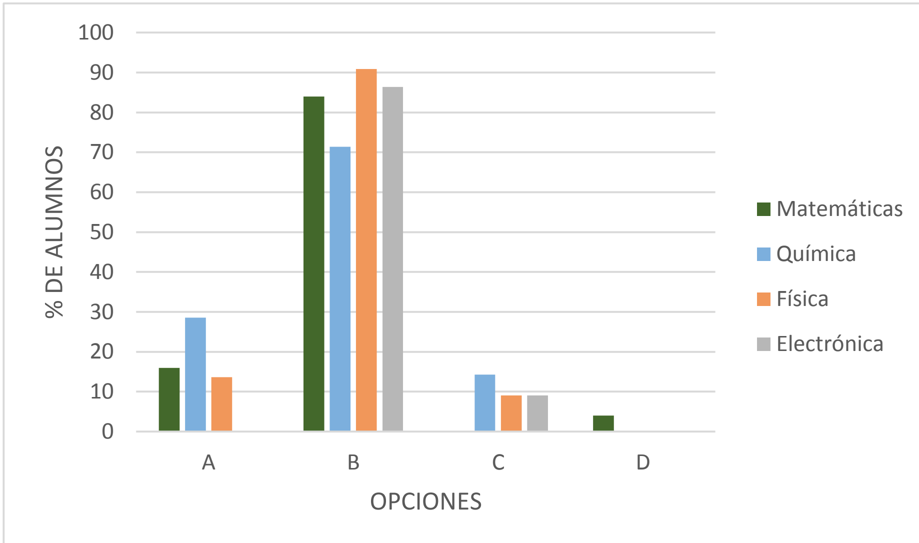
Alumnos Universitarios de nuevo ingreso



GRÁFICA 23. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Nuevo Ingreso a la Universidad en la “Tarea 4".

En la tarea 4 (fracciones equivalentes en representaciones gráficas), estudiantes de la Facultad de Electrónica sobresalen de los demás debido a que identifican en la opción B un cuarto en un modelo continuo; así mismo, en un 20% se guían por el modelo discreto. Mientras tanto, los otros estudiantes responden en un porcentaje que oscila entre el 65% y el 80%. Siendo los estudiantes de la Facultad de Química que responden en menor porcentaje y que, con un mayor margen de error, del 49 % seleccionan la opción C; superando a los estudiantes secundaria y preparatoria que lo hacen en un 30%. Estudiantes de nuevo ingreso al contestar la opción C, se infieren dificultades en este tipo de representaciones.

Alumnos Universitarios de Licenciatura



GRÁFICA 24. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Universidad en la “Tarea 4".

A diferencia de los estudiantes de secundaria, preparatoria incluso los de nuevo ingreso a la universidad; los estudiantes de licenciatura, seleccionan la opción C en un bajo porcentaje. Caso contrario, los estudiantes de Química seleccionan la opción; evidenciando que no encontró un patrón de regularidad. Fueron los estudiantes de Electrónica, quienes establecieron en un porcentaje alto la equivalencia entre diferentes representaciones gráficas.

Tarea 5

Todos estos son números Glomps

$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$ $\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}$ $\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}$ $\frac{5}{3}-\frac{4}{6}$

Ninguno de estos es número Glomps

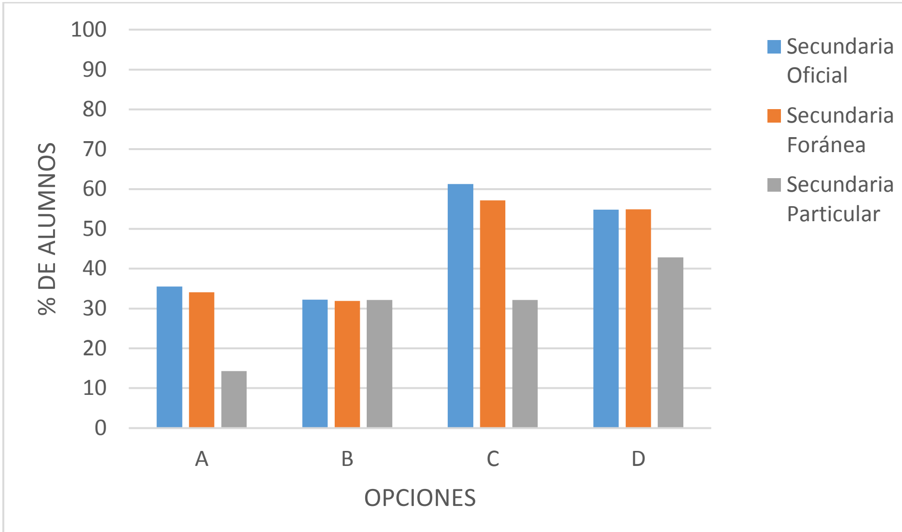
$\frac{1}{2}\times 1$ $\frac{2}{5}-\frac{4}{2}$ $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$ $\frac{4}{2}\div\frac{2}{2}$

¿Cuál(es) de estos es (son) número(s) Glomps?

(A) $\frac{3}{6}-\frac{3}{6}$ (B) $\frac{2}{5}\times\frac{2}{1}$ (C) $\frac{2}{5}\div\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

La tarea 5, está enfocada al uso de procedimientos con conexiones estrechas con las ideas conceptuales subyacentes. Se proponen cuatro operaciones (suma, resta, división y multiplicación) con fracciones, las cuales se deben efectuar para inferir las características de la misma; donde el resultado de las operaciones siempre es 1. Las opciones C y D son las correctas; la opción C, corresponde a una división y el D, a una suma. Uno de los obstáculos que se enfrentan los estudiantes es la similitud entre las notaciones de los números naturales y las fracciones, además de aplicar su conocimiento sobre los números enteros y algoritmos con poca comprensión para realizar operaciones; es por ello que hubo estudiantes que seleccionaron la opción B como respuesta correcta.

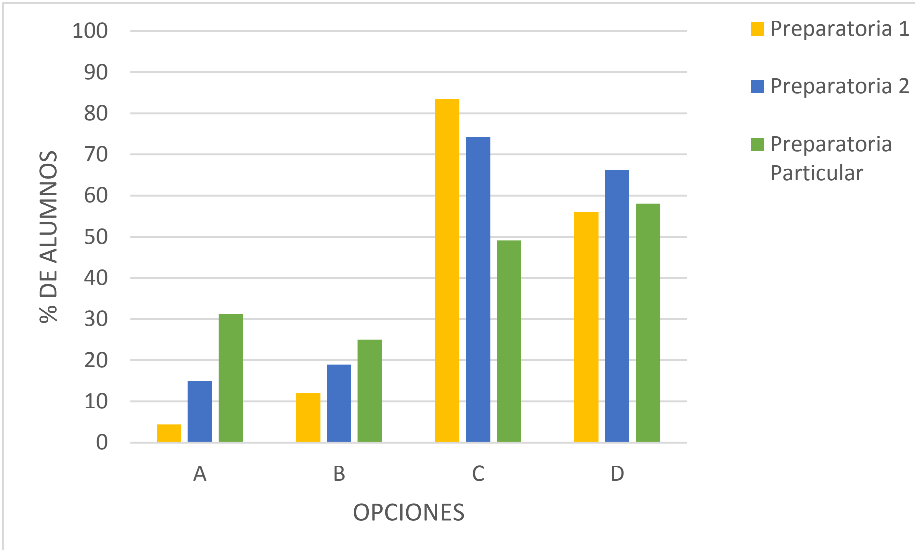
Alumnos de 1° de Secundaria



GRÁFICA 25. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Secundaria en la "Tarea 5".

Estudiantes de las diferentes secundarias respondieron en un porcentaje igual; al considerar que multiplicar 2/5 x 2/1 se obtiene 1; debido a la incomprensión o a la fragmentación que tienen del procedimiento, haciendo uso de diferentes operaciones. Así mismo, los alumnos eligen que 3/6 – 3/6 es igual a 1, en un 35 %; se debe la falta de compresión de algoritmos. Aproximadamente un 60% de los estudiantes de la secundaria oficial y foránea responden que 2/5 ÷ 2/5 da como resultado 1; ya sea porque algunos de los estudiantes saben dividir una fracción o porque infieren una regla de los números enteros en las fracciones; en otras palabras, una fracción dividida entre sí misma siempre dará 1. Entre un 40% y 50% de los estudiantes, además de realizar la operación de suma entre fracciones con el mismo denominador, señalada como operación sencilla entre fracciones, deberían haber obtenido mejores resultados.

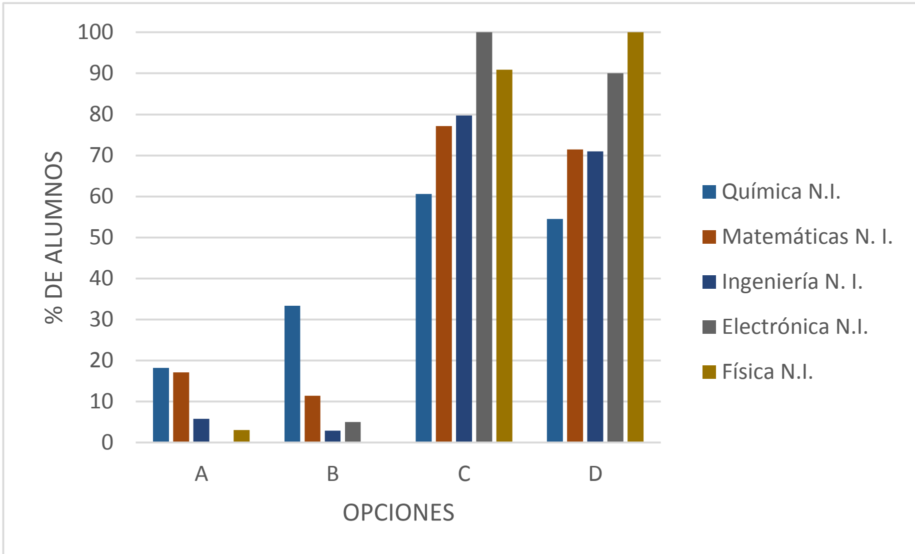
Alumnos de 1° de Preparatoria



GRÁFICA 26. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Preparatoria en la “Tarea 5".

Mientras tanto; en la tarea 5, la preparatoria 1 y 2 responden en un porcentaje similar en un 80% y 77%, respectivamente; por otro lado, los estudiantes de la preparatoria particular apenas en un 50% responden correctamente, realizando la división de fracciones sin ningún problema e identificando que el resultado es 1, característica común de las operaciones propuestas. En los estudiantes de la preparatoria 1 y 2 aumentan los porcentajes con respecto a los de secundaria, al efectuar la suma de fracciones y comparando los resultados; sin embargo, no alcanzan los porcentajes que obtienen para realizar una división de fracciones.

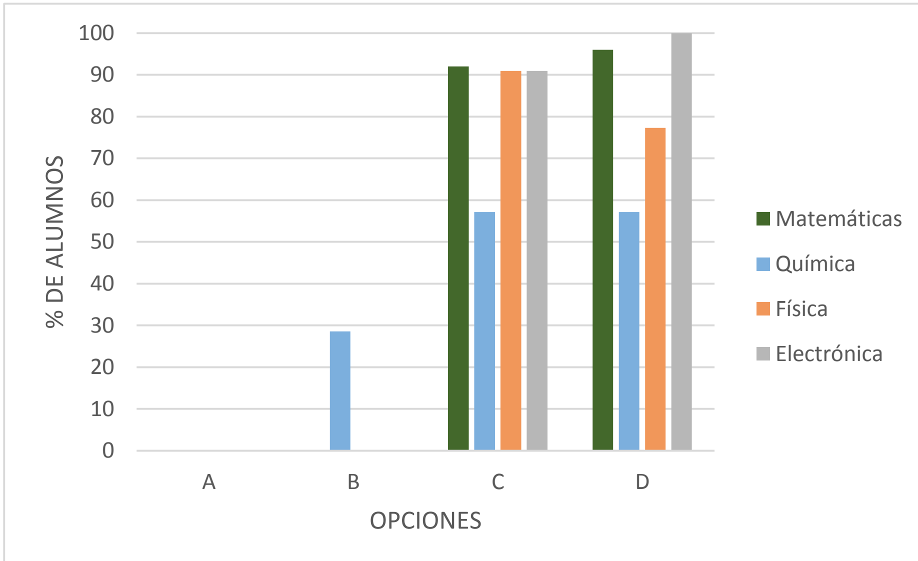
Alumnos Universitarios de nuevo ingreso



GRÁFICA 27. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Nuevo Ingreso a la Universidad en la “Tarea 5".

Estudiantes de la Facultad de Química presentan mayores dificultades en comparación con los demás, al identificar y conocer la propiedad de la tarea 5 y por lo tanto, elegir la opción como respuesta correcta sólo el 60% de los estudiantes de esta facultad; por otra parte, los de la Facultad de Matemáticas e Ingenierías logran identificar la propiedad en un 78% aproximadamente y más del 90% los de Física y Electrónica. Para la tarea 5, a pesar que de manera generaliza más del 55% de los estudiantes de las diferentes facultades responden correctamente pueden realizar una operación sencilla al ser una suma de fracciones con el mismo denominador, no le es tan sencillo identificar la propiedad del conjunto de operaciones de fracciones. Se esperaría que el porcentaje fuera mayor en el caso de los estudiantes de Matemáticas; sin embargo, presentan porcentajes bajos que se relacionan fuertemente a los puntajes que obtuvieron los estudiantes en la evaluación de ingreso, debido a que las carreras como Física, Electrónica e Ingenierías solicita un puntaje alto para poder ingresar a alguna carrera, en comparación con las otras dos carreras que se mencionan en el presente trabajo.

Alumnos Universitarios de Licenciatura



GRÁFICA 28. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Universidad en la “Tarea 5".

En la tarea 5, los estudiantes de Matemáticas, Física y Electrónica en un 90% señalan e identifican que una división de una fracción entre sí misma es 1. Sin embargo, sólo el 55% de los estudiantes de Química logran identificar las características en juego, mostrando mayores dificultades por sus bajos porcentajes. En la tarea, hay mayor discrepancia a la hora de responder de los estudiantes dependiendo de la facultad; sorprendentemente, solo el 75% de los de Física responden correctamente realizando una operación sencilla como lo es una suma de fracciones con el mismo denominador; siendo mejor porcentaje al momento de resolver una división; sin embargo, para los alumnos de matemáticas y electrónica no le fue tan difícil de identificar que el resultado del conjunto de operaciones de fracciones siempre era 1.

Tarea 6

Todos estos son números Troomps ($\therefore$ puede ser: > (mayor que), o < (menor que), o = (igual)

$\frac{4}{5} \therefore \frac{3}{4}$ $\frac{5}{8} \therefore \frac{1}{2}$ $\frac{10}{10} \therefore \frac{8}{9}$ $\frac{2}{6} \therefore \frac{2}{8}$

Ninguno de estos es número Troomps

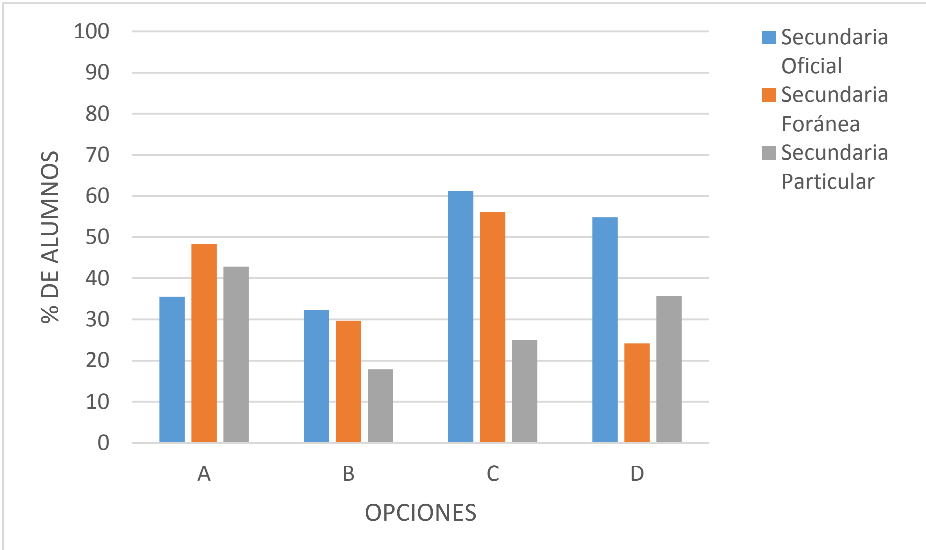
$\frac{1}{5} \therefore \frac{2}{4}$ $\frac{4}{5} \therefore \frac{4}{4}$ $\frac{2}{8} \therefore \frac{2}{4}$ $\frac{2}{3} \therefore \frac{3}{4}$

¿Cuál(es) de estos es (son) número(s) Troomps?

(A) $\frac{4}{5} \therefore \frac{3}{8}$ (B) $\frac{1}{3} \therefore \frac{3}{4}$ (C) $\frac{3}{5} \therefore \frac{3}{7}$ (D) $\frac{4}{9} \therefore \frac{2}{4}$

Los estudiantes necesitan explorar y comprender los conceptos y las relaciones matemáticas. Además, requiere que se analice la tarea y las restricciones que pueden limitar las posibles estrategias para su resolución. Se debe establecer una relación de orden entre el par de fracciones e identificar que la primera fracción es mayor que la segunda. Las opciones correctas son la opción A ($\frac{4}{5} > \frac{3}{8}$) y la opción C ($\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$). Para los estudiantes de secundaria y preparatoria resultó difícil identificar que en la opción C se estableciera una relación de "mayor que"; sin embargo, para los estudiantes de nuevo ingreso y los que estaban estudiando la mitad de la carrera, obtuvieron porcentajes más bajos al seleccionar la opción A. Maza (1999), establece que las dificultades al efectuar la relación de orden entre dos fracciones se deben a: la influencia de los números naturales, las características lingüísticas del orden entre fracciones y la constitución de la fracción como pareja de números.

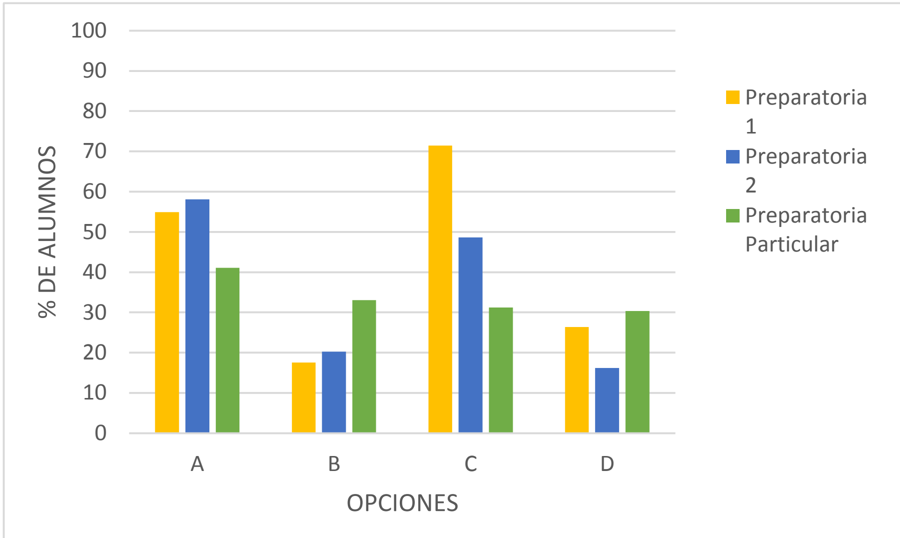
Alumnos de 1° de Secundaria



GRÁFICA 29. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Secundaria en la "Tarea 6".

Los estudiantes de secundaria, presentan mayores dificultades en esta tarea; aunque el 40% en promedio de los estudiantes reconocen y realizan una comparación entre dos fracciones, identificando que la primera fracción es mayor que la segunda. Sin embargo; los estudiantes de la secundaria oficial en un 55% indican que 5/9 es mayor que 2/4, debido a que la tarea exige que el estudiante además de establecer una relación entre el par de fracciones, debe conocer el significado de los símbolos que se manejan, la influencia de los enteros y el lenguaje lingüístico puede provocar dificultades en los estudiantes al establecer una relación de orden. En este caso que significa que sea mayor; los estudiantes pueden entender que las cantidades que forman la fracción sean mayor o que la fracción como número sea mayor al segundo.

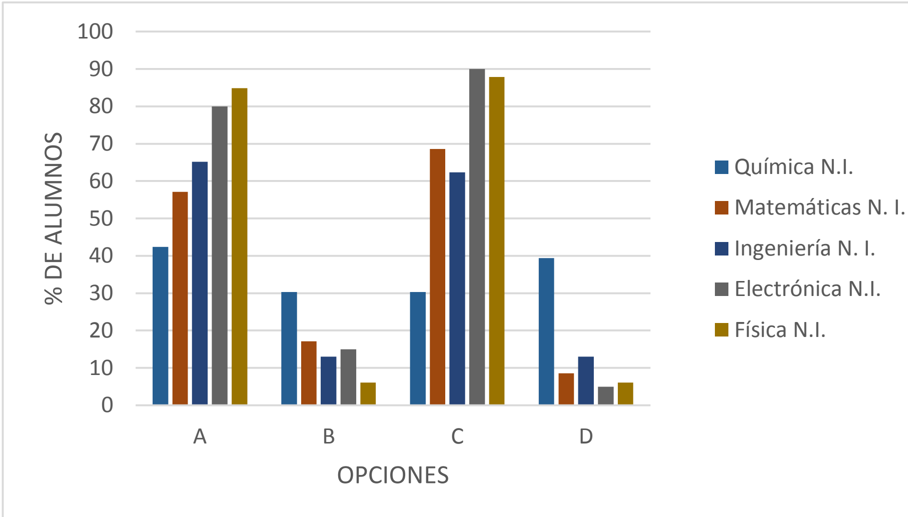
Alumnos de 1° de Preparatoria



GRÁFICA 30. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Preparatoria en la “Tarea 6".

En esta tarea la mayoría de los estudiantes de la preparatoria 1 responden adecuadamente identificando que la opción A y C, corresponden a una relación donde la primera fracción es *mayor que* la segunda; sin embargo, para los estudiantes de la preparatoria particular les resultó difícil identificar que 3/5 es mayor que 3/7, alcanzando en promedio solo un 41%, por debajo del promedio; además, de que contestaron en un 30% seleccionando opciones que corresponden a una relación diferente.

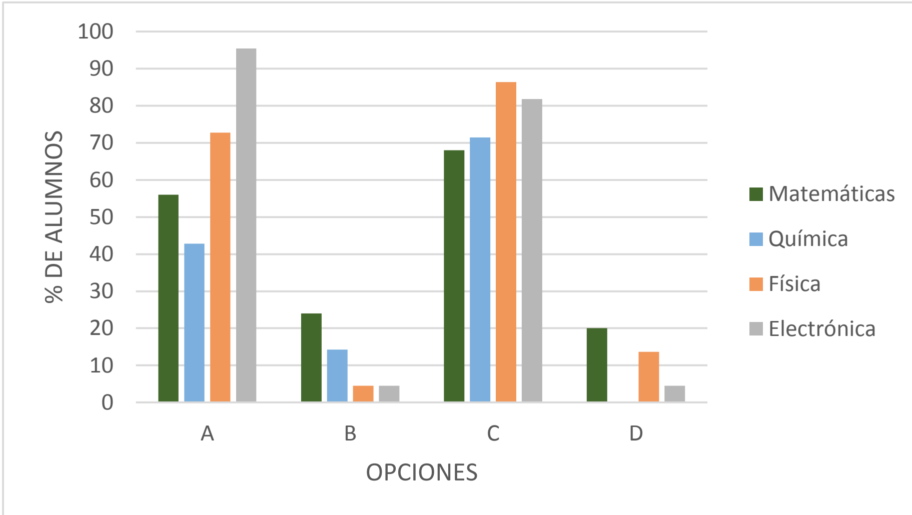
Alumnos Universitarios de nuevo ingreso



GRÁFICA 31. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Nuevo Ingreso a la Universidad en la "Tarea 6".

Los porcentajes en estudiantes de nuevo ingreso a la universidad aumentan al comparar e identificar que la primera fracción es *mayor que* la segunda. Los estudiantes de Física y Electrónica responden correctamente en un 88%, los de la Facultad de Matemáticas e Ingenierías en un 70%; pero los de Química apenas alcanzando un 35%, presentando mayores errores, al elegir opciones incorrectas, como resultado de la influencia de los números enteros. Cabe señalar que existe una la relación entre los porcentajes obtenidos en cada tarea con el puntaje de ingreso, dado que es menor a las demás carreras.

Alumnos Universitarios de Licenciatura



GRÁFICA 32. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Universidad en la “Tarea 6".

Para la tarea 6, se obtienen mejores resultados que en los niveles escolares anteriores y por ende hay menores errores; sin embargo, en el caso de los estudiantes de Matemáticas, el porcentaje de respuesta correcta disminuye considerablemente con respecto a los estudiantes de nuevo ingreso en la misma carrera e incrementa el porcentaje en opciones incorrectas similar al de los estudiantes de preparatoria.

Tarea 7

Todos estos son números Shooms

$\frac{1}{10}$	0.125	15%	$2\frac{1}{5}$

Ninguno de estos es número Shooms

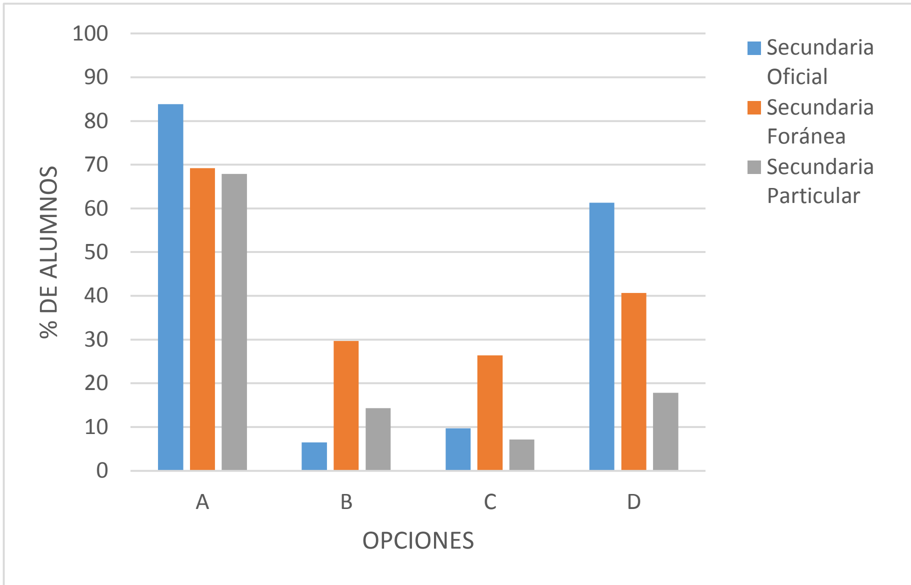
-452	π	$\sqrt{25}$	0

¿Cuál(es) de estos es (son) número(s) Shooms?

(A) 1.25 (B) $\sqrt[3]{12}$ (C) 3 (D) $\frac{9}{5}$

El alumno necesita establecer una relación entre las diferentes representaciones simbólicas de las fracciones; en el primer renglón se propone una fracción decimal, un número decimal, un porcentaje y una fracción mixta. Requiere un cierto grado de esfuerzo cognitivo. Los estudiantes deben reconocer e identificar las representaciones como formas de representar una fracción. Las opciones correctas son: la opción A, que corresponde a un número decimal y la B, que representa una fracción mixta; sin embargo, hubo alumnos que no lograron identificar la propiedad y que seleccionaron el inciso C, que corresponde al número entero 3.

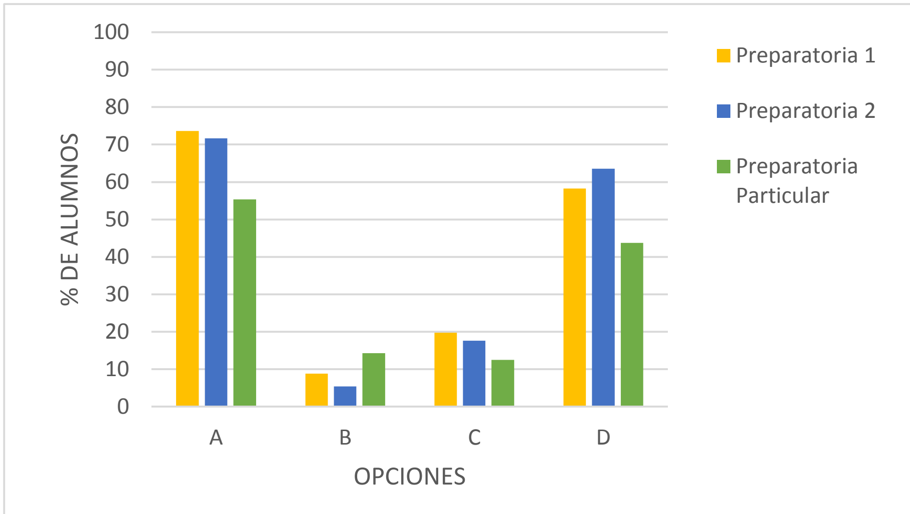
Alumnos de 1° de Secundaria



GRÁFICA 33. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Secundaria en la “Tarea 7".

Una de las dificultades que se presenta al abordar el tema de las fracciones, es que los estudiantes identifiquen las diversas representaciones que se le asocian a las fracciones; este es el objetivo de la presente tarea. Donde las tres escuelas, al menos en un 67% de los estudiantes asocian de manera correcta la representación de una expresión decimal como una manera de representar una fracción. Sin embargo, reconocer que una fracción impropia pertenece al conjunto de las diversas representaciones de una fracción, es más difícil para los estudiantes de la secundaria pues solo en un 40% de la secundaria foránea lo identifica correctamente y en un 18% los estudiantes de la secundaria particular.

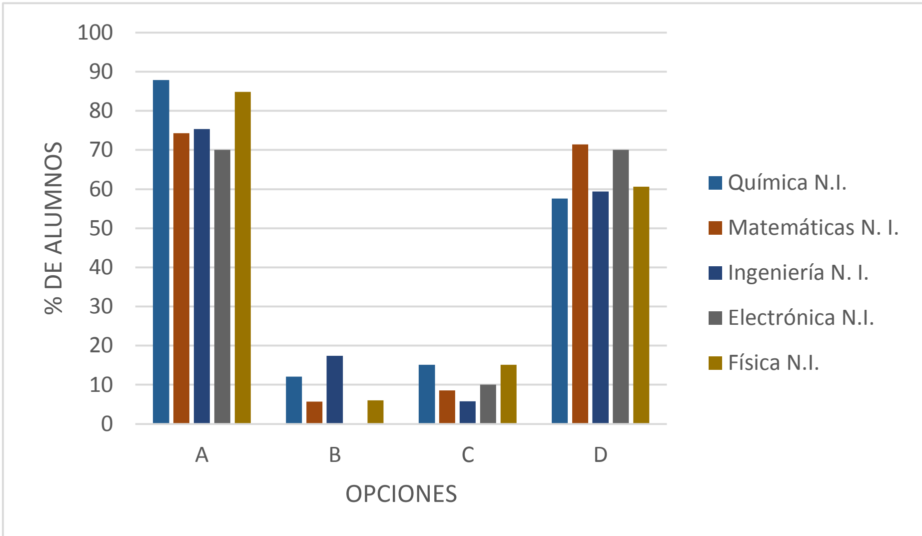
Alumnos de 1° de Preparatoria



GRÁFICA 34. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Preparatoria en la "Tarea 7".

Es evidente, el aumento en cuanto al porcentaje de las opciones correctas; como lo son la opción A (expresión decimal) y D (fracción impropia); al igual que los estudiantes de secundaria identifican fácilmente la expresión decimal y se dificulta al reconocer la fracción impropia c Así mismo, se presentan menores errores. Para nuestra sorpresa, eligen la opción del número entero; siendo que no pertenece a este conjunto.

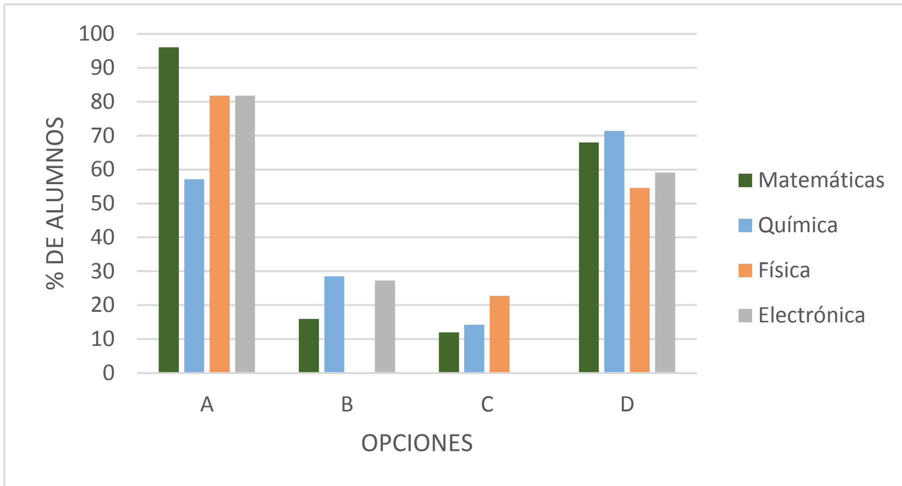
Alumnos Universitarios de nuevo ingreso



GRÁFICA 35. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Nuevo Ingreso a la Universidad en la “Tarea 7".

Comparando los resultados con los de las escuelas de secundarias como de las preparatorias, hay un aumento solo en cuanto a los estudiantes de las carreras como Química y Física en cuestión al identificar la expresión decimal como forma de representar una fracción; sin embargo, los estudiantes de Matemáticas y Electrónica, superan en un 10% a los estudiantes de niveles educativos anteriores, al indicar que una fracción mixta es un modo de representación. Por lo contrario, estudiantes de Química, Ingeniería y Física; presentan dificultades en el momento de identificar el patrón de regularidad al seleccionar un número irracional y entero como formas de representar una fracción en un nivel simbólico.

Alumnos Universitarios de Licenciatura



GRÁFICA 36. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Universidad en la “Tarea 7".

En esta tarea, aunque incrementa el porcentaje de respuestas correctas al reconocer un número decimal como una representación simbólica de las fracciones. Estudiantes de Química solo lo hacen el 58%, los de Electrónica y Física en un 81% y en un 95% los de Matemáticas. Y se mantienen al igual que los estudiantes de nuevo ingreso con un porcentaje que va del 60% al 70%, en reconocer e identificar una fracción mixta como modo de representación. Presentando errores en un 20% al seleccionar opciones incorrectas.

Tarea 8

Todos estos son números Rhomps

$2\frac{1}{2}$ $\quad 1\frac{4}{6}$ $\quad 4\frac{2}{3}$ $\quad 3\frac{5}{8}$

Ninguno de estos son números Rhomps

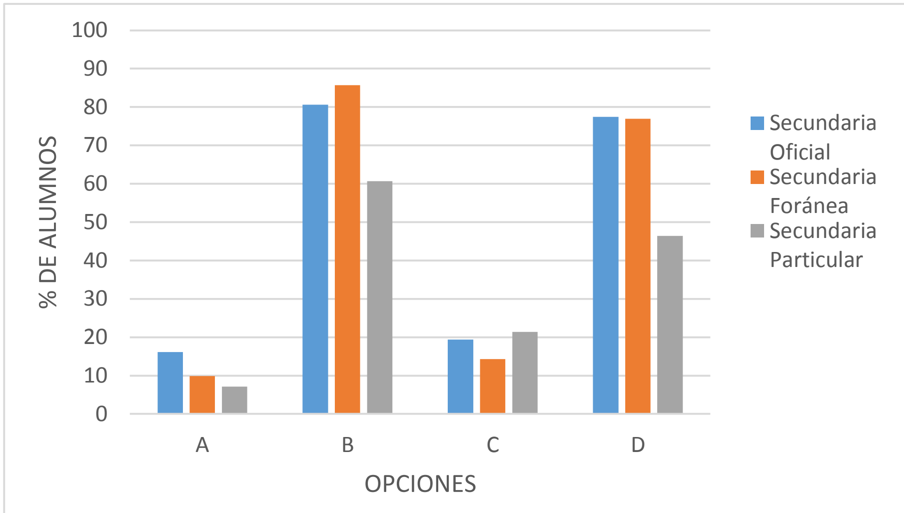
$\frac{5}{9}$ $\quad \frac{1}{3}$ $\quad$ 45% $\quad \frac{1}{10}$

¿Cuál(es) de estos es (son) números Rhomps?

(A) 8.5% $\quad$ (B) $1\frac{3}{9}$ $\quad$ (C) 2.750 $\quad$ (D) $4\frac{5}{10}$

La tarea requiere que el alumnado entienda y explore la naturaleza de los conceptos, analizando la actividad y las restricciones que pueden limitar las posibles estrategias para su resolución. Los estudiantes de los diferentes niveles educativos deben identificar que las fracciones propuestas en el primer renglón son denominadas “fracciones mixtas”, dado a que contienen un número entero y una fracción. Al momento de responder los alumnos no dudaron en elegir la opción B y D, ya que la representación corresponde con la estructura de las fracciones dadas; sin embargo, fue más complicado para los estudiantes establecer conexión entre la representación de fracción mixta y un número decimal. Solo estudiantes de Matemáticas y Electrónica en un 50% o más establecieron que el número 2.750 (opción C) también representa una fracción mixta.

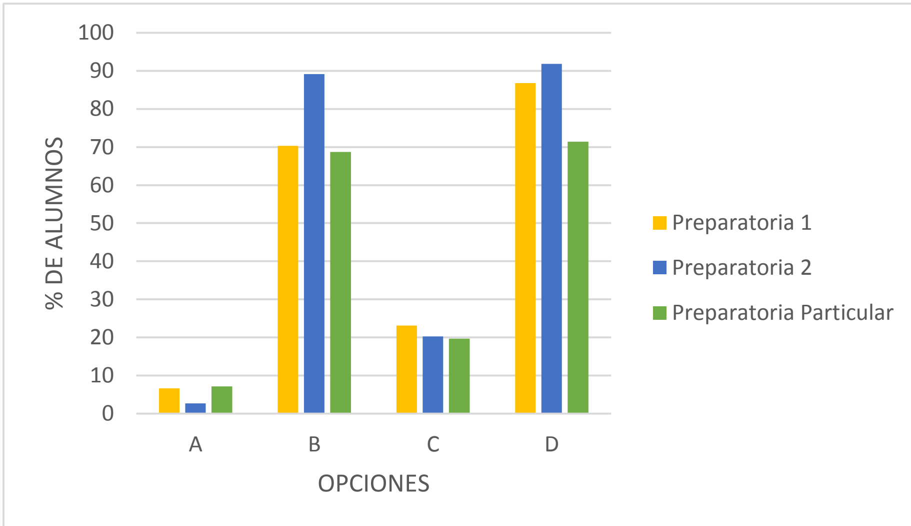
Alumnos de 1° de secundaria



GRÁFICA 37. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Secundaria en la “Tarea 8".

La tarea involucra el reconocimiento de la fracción mixta, a pesar de que en el conjunto de elementos solo se presenta en una representación, recordemos que hay diversos modos de representar la fracciones; se esperaría que los estudiantes reconocieran en un alto porcentaje aquellas que se encuentran en la misma representación. Pero solo alcanzan un 85%, siendo el porcentaje más alto que corresponde a estudiantes de la secundaria foránea y fue más difícil para los estudiantes de la secundaria particular identificar la característica de la tarea. La opción C, corresponde a una representación de una fracción mixta y en general, no lograron establecer conexiones entre los diferentes conceptos; ya que solo el 20% selecciona esta opción como correcta.

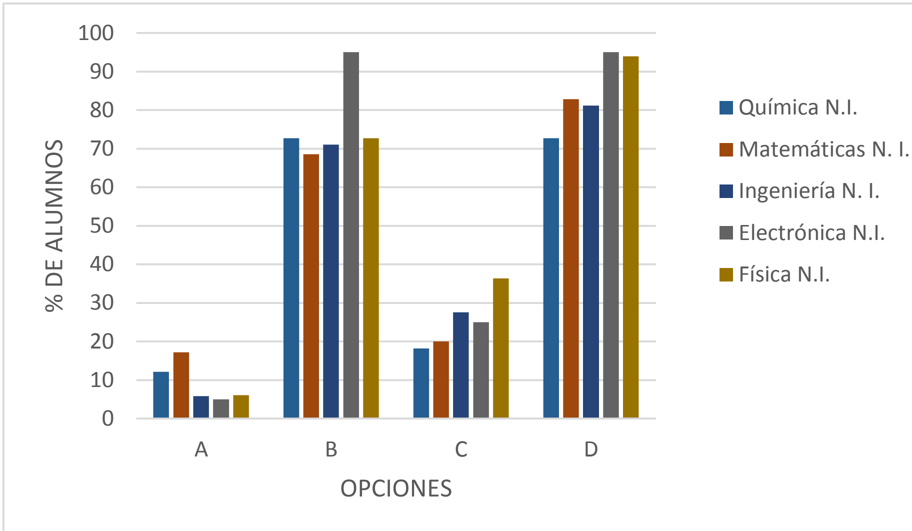
Alumnos de 1° de Preparatoria



GRÁFICA 38. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Preparatoria en la "Tarea 8".

Los estudiantes de preparatoria, por lo menos, en un 70% lograron identificar las características de una fracción mixta, aunque el porcentaje sigue siendo bajo. Al mismo tiempo, que los estudiantes de secundaria seleccionan la opción C, lo hacen los estudiantes de preparatoria tan solo en un 20%; no logrando establecer conexiones entre los diferentes conceptos y representaciones.

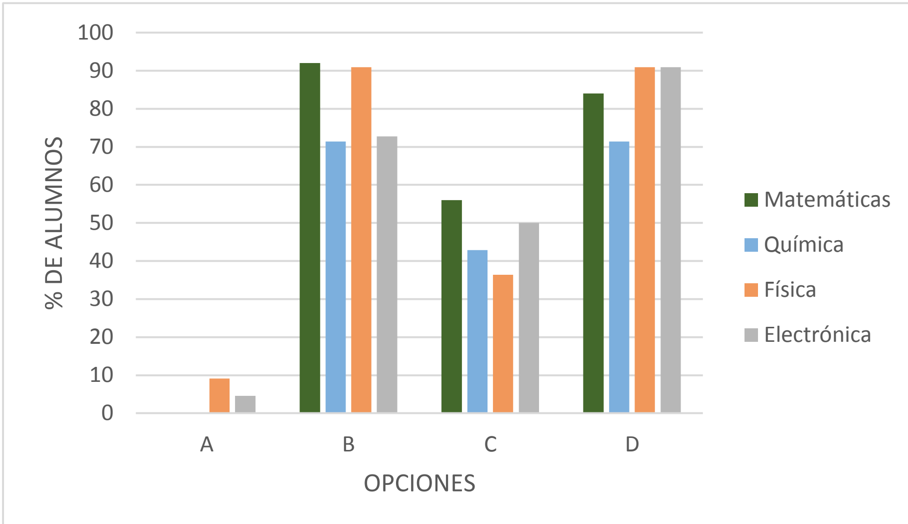
Alumnos Universitarios de nuevo ingreso



GRÁFICA 39. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Nuevo Ingreso a la Universidad en la “Tarea 8".

Uno de los resultados inesperados, es que los estudiantes de nuevo ingreso alcanzaran porcentajes similares (por no decir idénticos) a los estudiantes de preparatoria y por debajo de los resultados obtenidos por alumnos de secundaria, en el caso de la opción B; con excepción de los estudiantes de electrónica, quienes obtienen un porcentaje del 95% contestando correctamente. Con respecto a la opción D, los alumnos de nuevo ingreso a la Universidad contestan en porcentaje similar a los de la preparatoria. Además de que los estudiantes, identifican y reconocen a una expresión decimal como un modo de representar una fracción mixta.

Alumnos Universitarios de Licenciatura



GRÁFICA 40. Distribución de porcentajes de acuerdo a la opción seleccionada por estudiantes de Universidad en la “Tarea 8".

Los porcentajes se mantienen independientemente del nivel educativo, superando el 70% de estudiantes que reconocen la fracción mixta en una misma representación, como lo son las respuestas del inciso B y D; sin embargo, en ningún caso se obtuvo el 100% en esta tarea. Por otra parte, si hay un aumento en el porcentaje de alumnos que reconocen y seleccionan que 2.750 también se puede considerar una fracción mixta aunque su representación sea diferente.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

Las investigaciones en el tema de fracciones se han incrementado a través del tiempo, es evidente que a pesar de los años sigue siendo un tema complejo debido al conjunto de elementos teóricos que las involucran.

Los resultados obtenidos en la presente investigación, utilizando el instrumento denominado “Tarea de Selección”, evidencia que los estudiantes de los diferentes niveles educativos obtienen porcentajes similares en cada una de las tareas; siendo la tarea número 2 (fracciones equivalentes) la que se responde en mayor porcentaje de forma correcta, mostrando mayor dominio y presentando las mayores dificultades en la tarea número 6 (comparación entre fracciones) y 8 (las diferentes representaciones de un fracción).

Mientras tanto, el número de tareas resueltas correctamente incrementa de acuerdo al nivel educativo en el que se encuentran los estudiantes; resaltando la diferencia entre los puntajes obtenidos por los estudiantes que se encuentran en carreras relacionadas específicamente con las matemáticas, debido a que son mayores en comparación, con los puntajes de los estudiantes de la licenciatura de Química que muestran porcentajes bajos de respuestas correctas, tanto en alumnos de nuevo ingreso y aquellos que ya se encontraban cursando la carrera.

Se puede identificar que siempre hay un 10% de estudiantes capaces de resolver las ocho tareas y un 15% de estudiantes que independientemente de la edad, no fueron capaces de resolver más de una tarea.

Finalmente, es importante mencionar que los resultados obtenidos son independientes a la metodología de enseñanza y del docente, y que el aprendizaje de las fracciones a largo plazo parece ser en promedio igual. El enfoque de enseñanza de las fracciones, haciendo mayor énfasis en la interpretación como parte-todo, ha provocado la comprensión parcial de este contenido; por lo tanto, aquello que no tiene sentido ni significado para los estudiantes solo se puede mecanizar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arteaga, M. (2016). *El aprendizaje de las fracciones: Operatividad mediante gestión de equivalencias y su incidencia en la resolución de problemas* (Tesis de Maestría). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla.

Azcarate, P. y Cardeñoso, J. (1994). La naturaleza de la matemática escolar: un problema fundamental de la Didáctica de la Matemática. *Revista Investigación en la Escuela, 23*, 79-88.

Block, D. y Solares, D. (2001). Las fracciones y la división en la escuela primaria: análisis didáctico de un vínculo. *Educación Matemática*, *13*(2), 5-30.

Calhoon, M., Emerson, R., Flores, M. & Houchins, D. (2007). Computational fluency performance profile of high school students with mathematics disabilities. *Remedial arid Special Education*, 28, 292-303.

Chakkrapan, P., Niwat, S. & Rekha, K. (2014). Exploring Scientific Reasoning Ability in Thai University Students: A Case Study of Khon Kaen University, Thailand. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 116*,486-491. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.01.245

Cubillo, C. y Ortega, T. (2003). Análisis de un modelo didáctico para la enseñanza/aprendizaje del orden de las fracciones. *Educación Matemática*, *15*(2), 55-75.

Fandiño, M.I. (2009). *Las fracciones: Aspectos Conceptuales y Didácticos*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Flores, G. (2010). *Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria* (Tesis de Maestría). Recuperado de: http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/flores_2010.pdf

Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

Fuller, R., Karplus, R. & Lawson, A. E., (1977). "Can physics develop reasoning?”. *DigitalCommons@University of Nebraska - Lincoln*, 2(1), 23-28. Recuperado de: http://digitalcommons.unl.edu/physicsfuller/31

Hargrove, D. L. (2015). Developing Primary (K-2) Teachers’ Understanding of High Cognitive Demand Mathematical Tasks. Recuperado de: http://digilib.gmu.edu/jspui/bitstream/handle/1920/9814/Hargrove_gmu_0883E_10800.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Harrison, D. (2015). Factors correlated with students’ scientific reasoning ability in an introductory university physics course. Recuperado de http://www.upscale.utoronto.ca/PVB/Harrison/CTSR_Factors/CTSR_Factors.pdf

Hincapié, C. (2011). Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la institución educativa San Andrés de Girardota (Tesis de Maestría). Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/6084/1/43701138.2012.pdf

Lamon, S. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. En Cuoco, A. (Ed.), *The roles of representation in school* mathematics. 2001 Yearbook ofthe National Council of Teacher of Mathematics (pp.146-165) Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Lamon, S. (2006). Teaching fractions and ratios for understanding (2nd ed.). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lawson, A. (1994). Uso de los ciclos de aprendizaje para la enseñanza de destrezas de razonamiento científico y de sistemas conceptuales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *12*(2), 165-187.

Lawson, A. (2001). Using the learning cycle to teach biology concepts and reasoning patterns. *Journal of Biological Education*, 35(4), 165-169.

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte - todo al razonamiento proporcional. En M. d. Chamorro. (Ed.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 187 - 220). Madrid, España: Pearson Educación.

Linares, S. y Sánchez, M. V. (2000). *Fracciones*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Mahmoud, Y. (2013). *The Relationship Between the Learning Styles of Students in Grades Five and Six and Their Held Misconceptions About Dividing Fractions Based on Kolb's Model* (Thesis Doctoral). Recuperado de https://bspace.buid.ac.ae/bitstream/1234/511/1/90015.pdf

Mancera, E. (1992). Significados y significantes relativos a las fracciones. *Educación Matemática. 4*(2). 30-54.

Maza, C. (1995). *Aritmética y representación: De la comprensión del texto al uso de materiales.* Barcelona: Paidos.

Maza, C. (1999). Equivalencia y orden: la enseñanza de la comparación de las fracciones. *Revista Suma, 31*, 87-95.

Marek, E. & Cavallo, A. (1997). *The Learning Cycle and Elementary School Science*, Portsmuth, NH: Heinemann.

Moreno, A. y Flores, P. (2000). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Un acercamiento a los números racionales. En Gámez y otros (Eds.) *IX Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas "THALES"* (211-214). Cádiz, España: SAEM THALES.

Nunes, T. & Bryant, P. (2008). Key understanding in mathematics learning. Paper 3: Understanding rational numbers and intensive quantities. Recuperado de: http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/P3_amended_FB2.pdf

OCDE (2010). Mejorar las escuelas. Estrategias para la acción en México. París: OCDE. Recuperado de: http://www.oecd.org/education/school/47101613.pdf

Parra, M. y Flores, R. (2008). Aprendizaje cooperativo en la solución de problemas con fracciones. *Educación Matemática, 20* (1), 31-52.

Perera, B. y Valdemoros, M. (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. *Investigación en Educación Matemática XI*, 209-218.

Post, T., Wachsmuth, I., Behr, M. & Lesh, R. (1984). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(5), 323-341.

Post, T., Wachsmuth, I., Lesh, R. & Behr, M. (1985). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Cognitive Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 16* (1), 18-36.

Rico, L. (1995). Conocimiento Numérico y Formación del Profesorado. Granada: Universidad de Granada.

Tanner, K. (2008). Working with Students to Help Them Understand Fractions. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *13*(3), 28-31.

SEP (2011). Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Primaria. Tercero a Sexto grado. México: SEP.

SEP (2011). Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas. México: SEP.

Valdemoros, M. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7*(3), 235-256.