



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

**Evolución Espacial de Distribuciones de Intensidad
de Tipo Poligonal e Hipocicloide.**

Tesis Presentada al

Posgrado en Ciencias (Física Aplicada)

como requisito parcial para la obtención del grado de

Maestro en Ciencias (Física Aplicada)

por

César de Gante González

asesorado por

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero

Julio de 2017

Puebla, Pue.

Título: Evolución Espacial de Distribuciones de Intensidad de Tipo Poligonal e Hipocicloide.

Estudiante: César de Gante González

COMITÉ TUTORIAL

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco
Presidente

Dr. Marcelo David Iturbe Castillo
Secretario

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar
Vocal

Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez
Suplente

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero
Asesor

Índice General

Resumen	II
Capítulo 1: Introducción	1
1.1 Antecedentes.....	1
1.2 Objetivo y Contenido de la Tesis.....	4
Capítulo 2: Teoría	5
2.1 La Ecuación de Onda en el Espacio Libre.....	5
2.2 Propagación de la Luz.....	7
2.3 Solución de la Ecuación Paraxial de Helmholtz.....	9
2.4 Funciones Hipocicloides.....	15
Capítulo 3: Resultados Experimentales	19
3.1 Arreglo Experimental.....	19
3.2 Resultados Experimentales de la Evolución Espacial.....	20
Capítulo 4: Resultados Numéricos	37
4.1 Desarrollo Numérico.....	37
4.2 Resultados Numéricos de las Distribuciones de Intensidad.....	42
Capítulo 5: Conclusiones	64
Bibliografía	66

Resumen

En este trabajo de tesis se estudió la evolución espacial, numérica y experimental, de distribuciones de intensidad generadas por aberturas y rendijas de tipo poligonal e hipocicloide, en ambos casos se consideraron figuras que van desde tres hasta diez lados (picos en el caso de hipocicloides). Las mascarillas empleadas en la parte experimental se diseñaron a partir de las ecuaciones paramétricas de las hipocicloides y a partir de polígonos dibujados mediante el programa Inkscape. Para la parte numérica se desarrolló un programa computacional elaborado en Python a partir de la solución de la *Ecuación Paraxial de Helmholtz* y empleando el *Método de Paso Dividido*, dada la forma de las ecuaciones de las hipocicloides se optó por aproximar las curvas mediante circunferencias que se intersectan y en el proceso se encontró que se obtiene una mejor aproximación empleando curvas cónicas.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Antecedentes

La luz ha sido quizás el fenómeno físico que más a maravillado y atraído al hombre, tan sólo imaginemos a los primeros humanos (capaces de razonar), lo maravillados que estarían cuando salían de sus refugios y observaban el día y la noche. Con el paso del tiempo, gracias a los trabajos de muchas personas se han desarrollado teorías para explicar los fenómenos que se producen a partir de fuentes luminosas, todas ellas han formado la rama de la Física que conocemos como Óptica, ésta al igual que cualquier área científica, se subdivide en otras áreas como son la óptica geométrica, óptica física, óptica no-lineal, óptica cuántica, etc. De ellas, la óptica física se enfoca en el estudio de la propagación de la luz y de los fenómenos que surgen durante la misma, como la interferencia y la difracción, considerando para ello el carácter ondulatorio de la luz.

Desde un punto de vista clásico la luz es considerada como una onda de campos eléctrico y magnético, perpendiculares entre sí y que se pueden propagar a través del vacío o de algún medio como el aire, el agua, fibras ópticas[1], dieléctricos, etc. Matemáticamente, la luz se describe mediante una *función de onda* la cual debe satisfacer a una ecuación diferencial parcial de segundo grado

que depende de las variables espaciales x,y,z y de la variable temporal t : la llamada *ecuación de onda*[19]. Cuando en la ecuación de onda consideramos como solución una onda armónica en el tiempo y realizamos las operaciones necesarias, la parte temporal se cancela y la ecuación de onda se transforma en una ecuación diferencial, que solo depende de la parte espacial y es llamada *ecuación de Helmholtz*[3], a partir de la cual es posible obtener la propagación de una onda en el vacío[13, 14].

Durante su propagación la luz puede interactuar con diferentes objetos o medios, lo que provoca que ocurran ciertos fenómenos como por ejemplo la *reflexión*, la *refracción*, la *interferencia* y la *difracción* entre otros. Física y matemáticamente los fenómenos de reflexión y refracción pueden ser explicados mediante la llamada *óptica geométrica*, mientras que la interferencia y difracción requieren de un tratamiento ondulatorio[2].

Ambos fenómenos, interferencia y difracción son una clara muestra del carácter ondulatorio de la luz y están relacionados entre sí, ya que no hay una diferencia física significativa entre ambos. La interferencia se produce cuando se superponen dos o más ondas en algún punto en el espacio generando una onda resultante con una amplitud distinta a las amplitudes de las ondas superpuestas. Mientras que la difracción se produce cuando la luz es desviada al pasar a través de una abertura o por el contorno de un objeto, estas ondas desviadas interfieren entre sí en algún punto generando una distribución de intensidad llamada *patrón de difracción*, así que, la difracción es en realidad un fenómeno de interferencia de ondas de luz.

La difracción ha sido estudiada experimentalmente por científicos como Francesco Maria Grimaldi (1618–1663), Christiann Huygens (1629–1695) y Thomas Young (1773–1829) entre otros. Analíticamente fue descrita hasta que Augustín Jean Fresnel (1788–1827), unió el principio de Huygens y el trabajo de interferencia de ondas de Young en el principio de Huygens-Fresnel que establece que: “*cada punto de un frente de onda sin obstrucción genera una onda esférica secundaria, estas ondas esféricas secundarias, cierta distancia después,*

interfieren para generar una envolvente que constituye el nuevo frente de onda”[19].

Un haz de luz que incide sobre una abertura cualquiera genera una distribución de intensidad en un plano posterior a la abertura, si ésta se propaga tiende a aumentar su tamaño debido a la difracción y también cambia su forma dependiendo de la distancia a la cual se propaga, sin embargo algunos haces tienen la característica de que su tamaño no se ensancha conforme se propagan y mantienen este comportamiento por algunos metros de propagación, estos haces son conocidos como *haces adifraccionales*.

Generalmente se consideran aberturas difractoras con geometrías comunes, como círculos, anillos, y algunos polígonos[1,3,4,7,10] y se ha dejado un poco de lado el caso de aberturas un poco más complicadas. En 2012, G. Martínez Niconoff[8] reportó el uso de aberturas con geometría hipocicloide, las cuales generan distribuciones de intensidad con la particularidad de que concentran la mayor intensidad de luz alrededor de zonas conocidas como cáusticas; algunos autores han llamado a los patrones de difracción generados por aberturas hipocicloides como *haces poligonales acelerados*[20,21].

En este trabajo se obtienen la evolución espacial, numérica y experimental, de las distribuciones de intensidad obtenidas al iluminar aberturas y rendijas hipocicloides y poligonales, con la finalidad de comparar su comportamiento a distintas distancias y observar que tanto influye la curvatura de los lados de las hipocicloides en la forma de las distribuciones y saber si éstos llegan primero a la forma que tienen a campo lejano[12] o lo hacen las distribuciones que se obtienen con las aberturas y rendijas poligonales.

1.2 Objetivo y Contenido de la Tesis

El objetivo de este trabajo de tesis fue realizar un estudio experimental y numérico de la evolución espacial de distribuciones de intensidad generadas por aberturas y rendijas con geometría hipocicloide y hacer una comparación con las distribuciones generadas por aberturas y rendijas poligonales.

Contenido

En el capítulo siguiente se presenta la teoría referente a este trabajo, comenzando con la ecuación onda en el espacio libre. Posteriormente se analiza la propagación de la luz en el vacío partiendo de la *Ecuación de Helmholtz* y llegando a la solución de la *Ecuación Paraxial de Helmholtz*, a partir de la cuál se obtienen las distribuciones numéricas. Se obtienen también las ecuaciones paramétricas de las curvas hipocicloides.

En los Capítulos 3 y 4 se presentan los resultados experimentales y numéricos del trabajo, respectivamente, y al final de cada uno de ellos se hacen comentarios referentes a los resultados obtenidos. El Capítulo 5 contiene las conclusiones generales de este trabajo y en la parte final se anexa la bibliografía revisada durante el proyecto.

Capítulo 2

Teoría

2.1 La Ecuación de Onda en el Espacio Libre

De la teoría electromagnética desarrollada durante la primera mitad del siglo XIX, gracias a los trabajos realizados por Oersted, Ampere, Faraday, Coulomb, Gauss, entre otros, sabemos que la luz es una onda compuesta por un campo eléctrico \vec{E} y un campo magnético \vec{H} , los cuales son periódicos y perpendiculares entre sí, Maxwell retomó sus resultados y los tradujo a un lenguaje matemático, desarrollando así las relaciones que describen el electromagnetismo: *las ecuaciones de Maxwell*. A partir de ellas encontró la ecuación clásica de onda para campos eléctricos y magnéticos en el espacio libre

[19], con lo que concluyo que la luz es una onda electromagnética que viaja en el espacio con una velocidad finita c_0 , las ecuaciones de Maxwell para el caso del espacio libre son:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde: \vec{D} y \vec{B} son conocidos como vector de desplazamiento eléctrico y vector de inducción magnética, respectivamente y están relacionados con el campo eléctrico y el campo magnético mediante las relaciones constitutivas:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} , \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} ,\end{aligned}\tag{2.2}$$

con ϵ_0 el coeficiente de permitividad en el vacío y μ_0 el coeficiente de permeabilidad en el vacío. La deducción de la ecuación de onda en el espacio libre comienza considerando el rotacional del rotacional del campo eléctrico:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) ,\tag{2.3}$$

Empleando identidades vectoriales y sustituyendo la ecuación para la divergencia del campo eléctrico, obtenemos:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} , \quad (2.4)$$

o escrita de otra manera:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 . \quad (2.5)$$

donde $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ es la velocidad de la luz en el vacío y la ecuación (2.5) es la llamada *Ecuación de onda en el espacio libre*.

2.2 Propagación de la Luz

En la sección anterior se expuso la forma matemática de la ecuación de onda para el caso del espacio libre, tomando como función de onda el campo eléctrico \vec{E} , en esta sección, haremos un *cambio de nombre* de esta función de onda y la llamaremos u , de modo que la ecuación de onda queda como sigue:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 , \quad (2.6)$$

donde el operador Laplaciano en coordenadas rectangulares está dado por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

Ya que en muchas ocasiones es más sencillo realizar operaciones matemáticas con números complejos, es común expresar la función de onda

$u(\vec{r}, t)$ en términos de una función compleja $U(\vec{r}, t)$ que satisface la ecuación de onda (2.6) y que cumpla con la siguiente relación:

$$u(\vec{r}, t) = \text{Re}\{U(\vec{r}, t)\} . \quad (2.7)$$

Al considerar que se tiene una dependencia armónica en el tiempo en la función $U(\vec{r}, t)$, ésta puede ser separada en una parte espacial y una parte temporal de la forma:

$$U(\vec{r}, t) = U(\vec{r})\exp(i\omega t) , \quad (2.8)$$

donde $U(\vec{r})$ es llamada *amplitud compleja de la onda*.

Durante su propagación, sí la luz se encuentra en su camino con algún medio material interaccionan de tal manera que él o los fenómenos ópticos resultantes de dicha interacción dependen de las condiciones bajo las cuales se realiza la misma. Así, por ejemplo, la luz puede ser refractada, reflejada, absorbida, dispersada, difractada, etc. Podemos esquematizar lo anterior de manera sencilla considerando que una función de entrada $f(x, y)$ incide sobre un medio y que a la salida se tiene una nueva función $g(x, y)$, la cuál contiene la información del fenómeno óptico ocurrido en el medio y se encuentra expresada en términos de la función $H(f_x, f_y)$ conocida como *función de transferencia del sistema*, la figura siguiente muestra el esquema descrito:

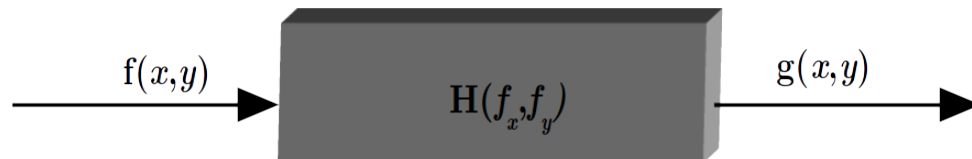


Fig. 2.1: Esquema de un sistema óptico lineal

En general, la función de salida del sistema se puede expresar como:

$$g(x, y) = H(f_x, f_y) f(x, y) . \quad (2.9)$$

En la siguiente sección, se obtendrá la función de transferencia a partir de la ecuación paraxial de Helmholtz.

2.3 Solución de la Ecuación Paraxial de Helmholtz

Sustituyendo la ecuación (2.8) en (2.6), se obtiene una ecuación diferencial conocida como *Ecuación de Helmholtz*:

$$\nabla^2 U(\vec{r}) + k^2 U(\vec{r}) = 0 . \quad (2.10)$$

donde $k^2 = \omega^2 / c_0^2$ y recordemos que se ha supuesto que hay una dependencia temporal armónica en la función de onda.

Si consideramos ahora una onda paraxial (definida como aquella donde las normales a los frentes de onda son rayos paraxiales), expresada como:

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r}) \exp(-ikz) , \quad (2.11)$$

y la sustituimos en la ecuación de Helmholtz (2.10) obtenemos:

$$(\nabla^2 + k^2) A(\vec{r}) \exp(-ikz) = 0 . \quad (2.12)$$

Encontrando las derivadas que indica el operador Laplaciano, tenemos:

$$\frac{\partial^2[A(\vec{r})\exp(-ikz)]}{\partial x^2} = \exp(-ikz)\frac{\partial^2 A(\vec{r})}{\partial x^2} , \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2[A(\vec{r})\exp(-ikz)]}{\partial y^2} = \exp(-ikz)\frac{\partial^2 A(\vec{r})}{\partial y^2} , \quad (2.14)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2[A(\vec{r})\exp(-ikz)]}{\partial z^2} &= -k^2 A(\vec{r})\exp(-ikz) - i2k \exp(-ikz)\frac{\partial A(\vec{r})}{\partial z} \\ &+ \exp(-ikz)\frac{\partial^2 A(\vec{r})}{\partial z^2} , \end{aligned} \quad (2.15)$$

Sustituyendo (2.13),(2.14) y (2.15) en (2.12), obtenemos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A(\vec{r}) - i2k \frac{\partial A(\vec{r})}{\partial z} + \frac{\partial^2 A(\vec{r})}{\partial z^2} = 0 . \quad (2.16)$$

Suponiendo que la envolvente compleja $A=A(\vec{r})$ varía lentamente a lo largo del eje z (dentro de una longitud de onda λ), entonces se cumple que

$$\frac{\partial^2 A(\vec{r})}{\partial z^2} \ll k \frac{\partial A(\vec{r})}{\partial z} ,$$

de modo que en la ecuación (2.16) se puede despreciar la segunda derivada parcial de A respecto de z , obtenemos como resultado la *Ecuación Paraxial de Helmholtz*:

$$\nabla_T^2 A(\vec{r}) - i2k \frac{\partial A(\vec{r})}{\partial z} = 0 , \quad (2.17)$$

donde $\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ es el operador Laplaciano transversal.

Con el fin de estudiar numéricamente la propagación de una onda, normalicemos la ecuación (2.17) utilizando los parámetros de un haz Gaussiano de radio mínimo w_0 y distancia de Rayleigh L_D . De manera que para las coordenadas transversales (x,y) tenemos:

$$X = \frac{x}{w_0} , \quad (2.18)$$

y

$$Y = \frac{y}{w_0} . \quad (2.19)$$

Mientras que para la coordenada longitudinal z :

$$Z = \frac{z}{L_D} , \quad (2.20)$$

donde $L_D = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ y λ es la longitud de onda.

Utilizando las nuevas coordenadas normalizadas expresadas en (2.18), (2.19) y (2.20) encontremos las derivadas parciales indicadas por el operador Laplaciano transversal de la ecuación paraxial de Helmholtz:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial X} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial X} A \right) = \frac{\partial}{\partial X} \frac{1}{w_0} \left(\frac{\partial}{\partial X} \frac{1}{w_0} A \right) = \frac{1}{w_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} , \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial Y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial Y} A \right) = \frac{\partial}{\partial Y} \frac{1}{w_0} \left(\frac{\partial}{\partial Y} \frac{1}{w_0} A \right) = \frac{1}{w_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2} , \quad (2.22)$$

y

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{L_D} \frac{\partial A}{\partial Z} . \quad (2.23)$$

Sustituyendo (2.21), (2.22) y (2.23) en (2.17) llegamos a:

$$\frac{1}{w_0} \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \frac{1}{w_0} \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2} - i \frac{2k}{L_D} \frac{\partial A}{\partial Z} = 0 . \quad (2.24)$$

Ahora, sustituyendo la expresión para la distancia de Rayleigh podemos despejar la derivada parcial respecto de Z , con lo que obtenemos la llamada *Ecuación Paraxial de Helmholtz Normalizada*:

$$\frac{\partial A}{\partial Z} = \frac{-i}{4} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2} \right] . \quad (2.25)$$

Para resolver la ecuación anterior, hacemos uso de la *Transformada de Fourier* en dos dimensiones[4] de la siguiente manera:

$$F_{XY} \left\{ \frac{\partial A(X, Y, Z)}{\partial Z} \right\} = F_{XY} \left\{ \frac{-i}{4} \left[\frac{\partial^2 A(X, Y, Z)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 A(X, Y, Z)}{\partial Y^2} \right] \right\} . \quad (2.26)$$

Aplicando la siguiente propiedad[15]:

$$F\{f''(\xi)\} = -\xi^2 F\{f(\xi)\} , \quad (2.27)$$

la ecuación (2.26) se transforma en la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{\partial A(f_x, f_y, Z)}{\partial Z} = -\frac{i}{4} (f_x^2 + f_y^2) A(f_x, f_y, Z) . \quad (2.28)$$

Para obtener la solución de la ecuación paraxial de Helmholtz normalizada, es necesario resolver la ecuación (2.28), la expresión obtenida es:

$$A(f_x, f_y, \Delta Z) = C_0 \exp \left[\frac{-i}{4} (f_x^2 + f_y^2) \Delta Z \right] , \quad (2.29)$$

donde f_x y f_y son las frecuencias espaciales, ΔZ es la distancia de propagación y $C_0 = A_0(f_x, f_y)$ es la Transformada de Fourier de la condición inicial, es decir del campo de entrada $A_0(X, Y)$ en el plano $Z=0$. Tomando en cuenta lo anterior, la ecuación (2.29) se puede expresar como:

$$A(f_x, f_y, \Delta Z) = A_0(f_x, f_y) \exp \left[\frac{-i}{4} (f_x^2 + f_y^2) \Delta Z \right] . \quad (2.30)$$

Tomando la *Transformada Inversa de Fourier* en dos dimensiones en ambos lados de la ecuación (2.30), obtenemos el campo propagado a una distancia ΔZ en el dominio espacial:

$$A(X, Y, \Delta Z) = F_{XY}^{-1} \left\{ F_{XY} \{ A_0(X, Y) \} \exp \left[\frac{-i}{4} (f_x^2 + f_y^2) \Delta Z \right] \right\}. \quad (2.31)$$

Finalmente, comparando las expresiones (2.30) y (2.9) podemos encontrar la función de transferencia de la propagación de la luz a través de una distancia ΔZ en el espacio libre:

$$H(f_x, f_y) = \frac{A(f_x, f_y, \Delta Z)}{A_0(f_x, f_y)} = \exp \left[\frac{-i}{4} (f_x^2 + f_y^2) \Delta Z \right]. \quad (2.32)$$

Más adelante, en el Capítulo 4 se hará uso de la expresión anterior para realizar la propagación numérica de los patrones de difracción. En algunas ocasiones, al momento de diseñar los algoritmos para éste fin es común que a la ecuación (2.34) se le llama *propagador*.

2.4 Funciones Hipocicloides

Una hipocicloide es el lugar geométrico de un punto fijo cualquiera de una circunferencia que rueda *interiormente*, sin resbalar, sobre otra circunferencia fija [7]

A continuación se deducirán las ecuaciones paramétricas de una hipocicloide en el caso en que la circunferencia fija tiene su centro en el origen y la posición del punto que describe la curva está sobre la parte positiva del eje X y sobre la circunferencia fija, como se ve en la siguiente figura:

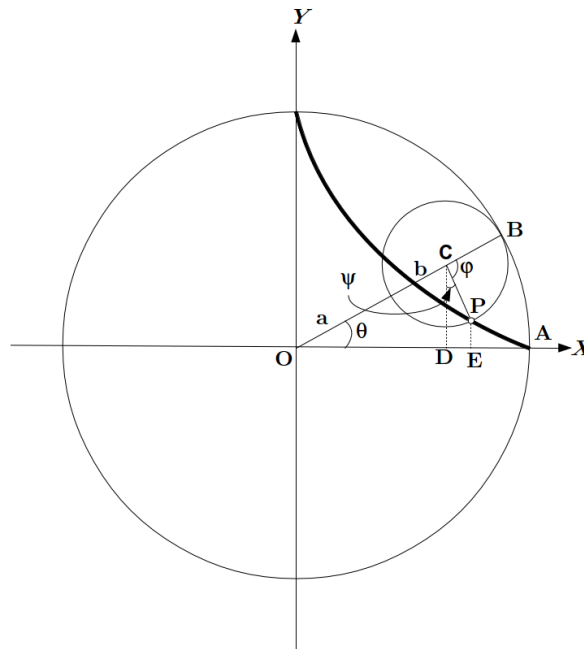


Figura 2.4.- Geometría auxiliar en la deducción de las ecuaciones de una hipocicloide.

Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico sobre la curva hipocicloide; sean a y b , respectivamente, los radios de las circunferencias fija y rodante, y sea C el centro de la circunferencia rodante o generatriz. Se considera como parámetro el ángulo θ que forma la recta de los centros OC con la parte positiva del eje X . Sea A el punto sobre el eje X que representa la posición inicial del punto P que describe la curva hipocicloide, y sea B el punto de tangencia de las dos circunferencias. Desde C y P bajemos las perpendiculares CD y PE , respectivamente, al eje X . Llamemos ϕ al ángulo BCP y ψ al ángulo PCD . Consideraremos ambos ángulos medidos en radianes.

Como la circunferencia generatriz rueda, sin resbalar, de A a B , tenemos:

$$\text{arco } AB = \text{arco } PB , \quad (2.33)$$

es decir,

$$a \theta = b \phi , \quad (2.34)$$

así que, $\phi = \frac{a}{b} \theta$. Y se tiene también:

$$\psi = \pi - \phi - \text{ángulo } OCD = \pi - \frac{\pi}{2} + \theta - \phi = \frac{\pi}{2} + \theta - \phi . \quad (2.35)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \text{sen } \psi &= \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \theta - \phi \right) = \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos(\theta - \phi) + \text{sen}(\theta - \phi) \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \\
 &\Rightarrow \text{sen}(\psi) = \cos(\theta - \phi) = \cos \left(\theta - \frac{a}{b} \theta \right) \quad , \quad (2.36) \\
 &\Rightarrow \text{sen}(\psi) = \cos \left(\frac{b-a}{b} \theta \right)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \cos \psi &= \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta - \phi \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos(\theta - \phi) - \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) \text{sen}(\theta - \phi) \\
 &\Rightarrow \cos(\psi) = \text{sen}(\theta - \phi) \quad . \quad (2.37) \\
 &\Rightarrow \cos(\psi) = \text{sen} \left(\frac{b-a}{b} \theta \right)
 \end{aligned}$$

Ahora, para las coordenadas (x, y) del punto P , tenemos:

$$\begin{aligned}
 x &= \overline{OE} = \overline{OD} + \overline{DE} = \overline{OC} \cos \theta + \overline{CP} \text{sen } \psi \\
 y &= \overline{EP} = \overline{CD} - \overline{CP} \cos \psi = \overline{OC} \text{sen } \theta - \overline{CP} \cos \psi \quad . \quad (2.38)
 \end{aligned}$$

Pero, notemos que, $\overline{OC} = a - b$ y $\overline{CP} = b$ sustituyendo las expresiones encontradas para el seno y el coseno de ψ obtenemos:

$$\begin{aligned}
 x &= (a - b) \cos(\theta) + b \cos \left(\frac{b-a}{b} \theta \right) \\
 y &= (a - b) \text{sen}(\theta) + b \text{sen} \left(\frac{b-a}{b} \theta \right) \quad . \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

Si ahora consideramos que el seno es una función impar y el coseno es una función par, es decir: $\text{sen}(x)=-\text{sen}(-x)$ y $\text{cos}(x)=\text{cos}(-x)$, obtendremos finalmente las ecuaciones paramétricas para una hipocicloide:

$$\begin{aligned} x &= (a-b)\cos(\theta) + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right) \\ y &= (a-b)\text{sen}(\theta) - b\text{sen}\left(\frac{a-b}{b}\theta\right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Sea k la razón de a a b , de modo que $a=kb$. Si k es un número entero, tendremos una *hipocicloide de k picos*. Por ejemplo, si tenemos que $k=3$ obtendremos la hipocicloide llamada *Deltoide* (su forma es parecida a la letra griega delta mayúscula) o *Tricúspide*, (ver figura 2.5a), la cual fue concebida primero por Leonhard Euler, matemático suizo (1707-1783), en 1745 en relación con un estudio de curvas caústicas y posteriormente investigada en 1856 por otro matemático suizo: Jakob Steiner (1796-1863); por lo que a veces es llamada también hipocicloide de Steiner.

Si $k=4$ la curva descrita por las ecuaciones (2.48) es llamada *Astroide*, (Figura 2.5b). Esta curva fue descubierta por el astrónomo danés Olaf Roemer en su búsqueda por mejorar los dientes de los engranes. Naturalmente aumentando el valor de k aumenta el número de picos que tiene la hipocicloide, así por ejemplo el inciso c) de la Figura 2.5 muestra las hipocicloides obtenidas para valores de $k=3, 4$, y 6 .

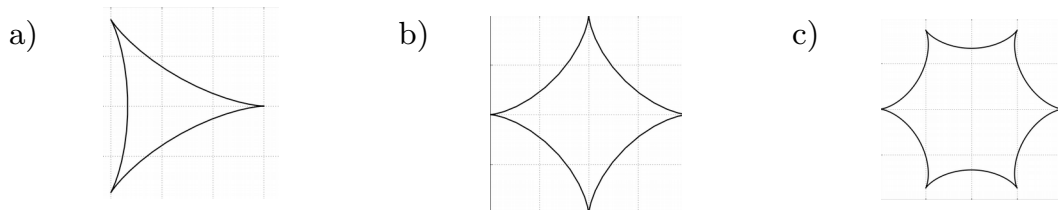


Figura 2.5.- Curvas hipocicloides obtenidas para valores de: a) $k=3$ (deltoide), b) $k=4$ (astroide) y c) $k=6$.

Capítulo 3

Resultados Experimentales

3.1 Arreglo Experimental

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos experimentalmente, el arreglo experimental empleado consta de un láser He-Ne de 632nm , cuyo haz fue expandido con un expansor de 10X y filtrado con un pinhole de $25\mu\text{m}$, posteriormente fue colimado con una lente de 40cm de longitud focal y un diámetro de 2.54cm . Una vez colimado el haz del láser, la mascarilla se puede colocar en cualquier posición, en este caso se colocó a 10cm aproximadamente delante de la lente de colimadora. En el espacio intermedio entre el pinhole y la lente colimadora se colocaron atenuadores ópticos, ésto con la finalidad de reducir la intensidad que llega al detector y de esa manera evitar dañarlo y obtener una mejor imagen de las distribuciones. Finalmente, el detector se fue

moviendo a lo largo del eje óptico del sistema tomando fotografías a distintas distancias de separación entre la mascarilla y el detector. En la figura siguiente se muestra un esquema del arreglo experimental empleado:

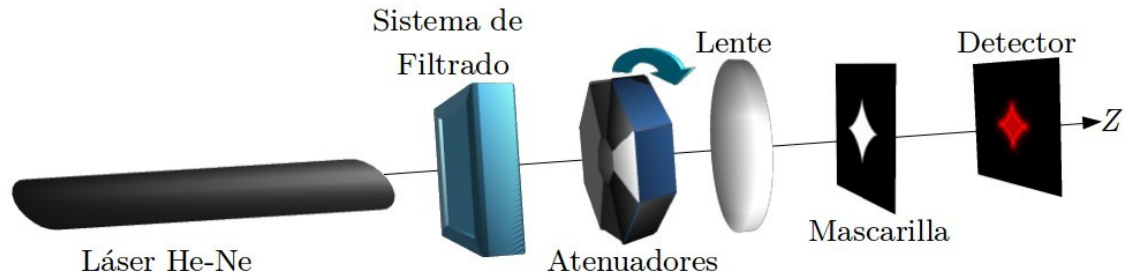


Figura 3.1: Diagrama del arreglo experimental empleado para obtener la propagación de los patrones de difracción.

3.2 Resultados Experimentales de la Evolución Espacial.

En esta sección se muestra los resultados obtenidos con el arreglo mostrado en la Figura 3.1, empleado mascarillas con aberturas y rendijas de tipo hipocicloide y poligonal. Los resultados se encuentran agrupados de acuerdo a la distancia de propagación a la cual se tomo la imagen.

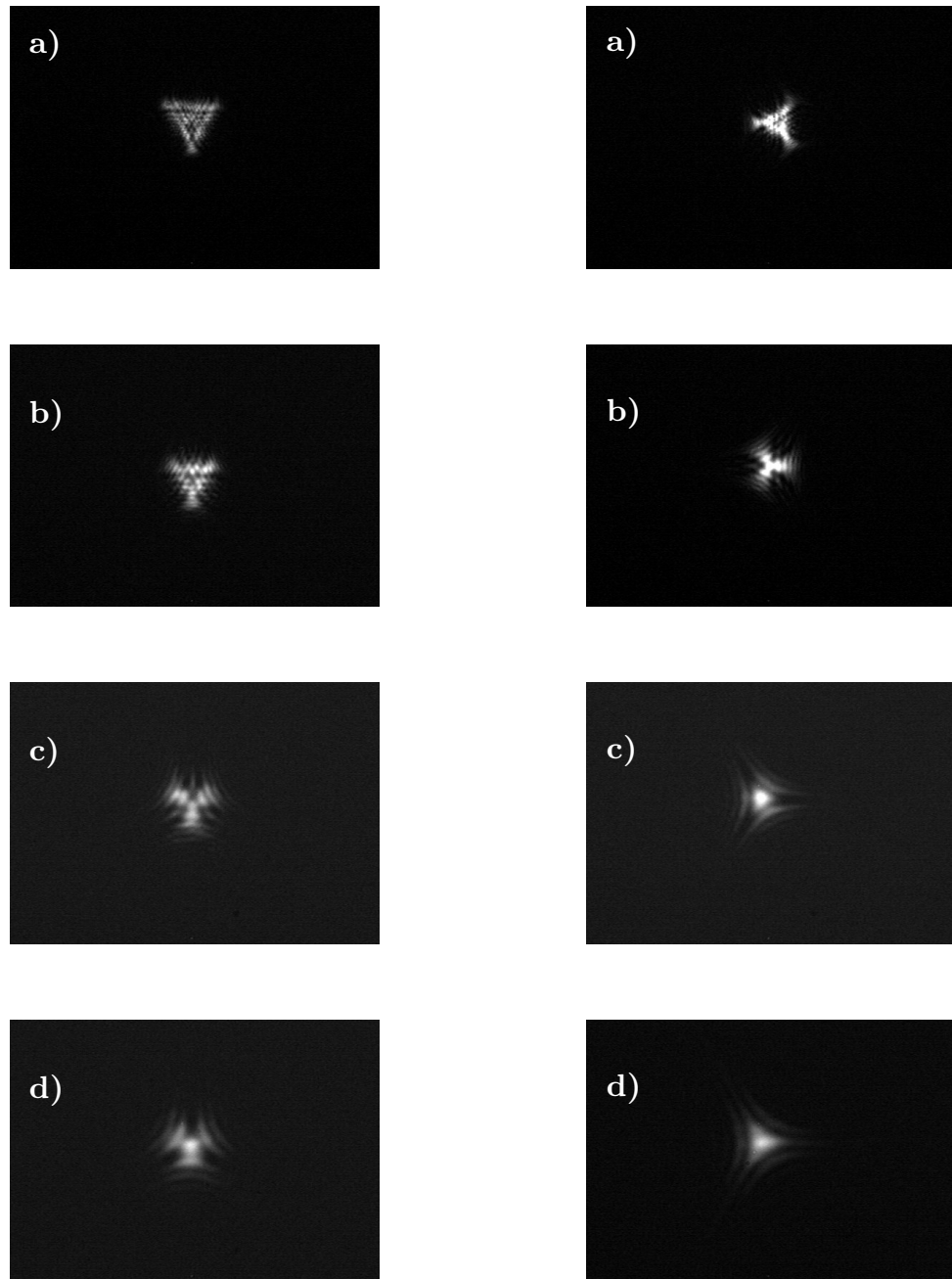


Figura 3.2.- Distribuciones generadas por una abertura de tres lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes tomadas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

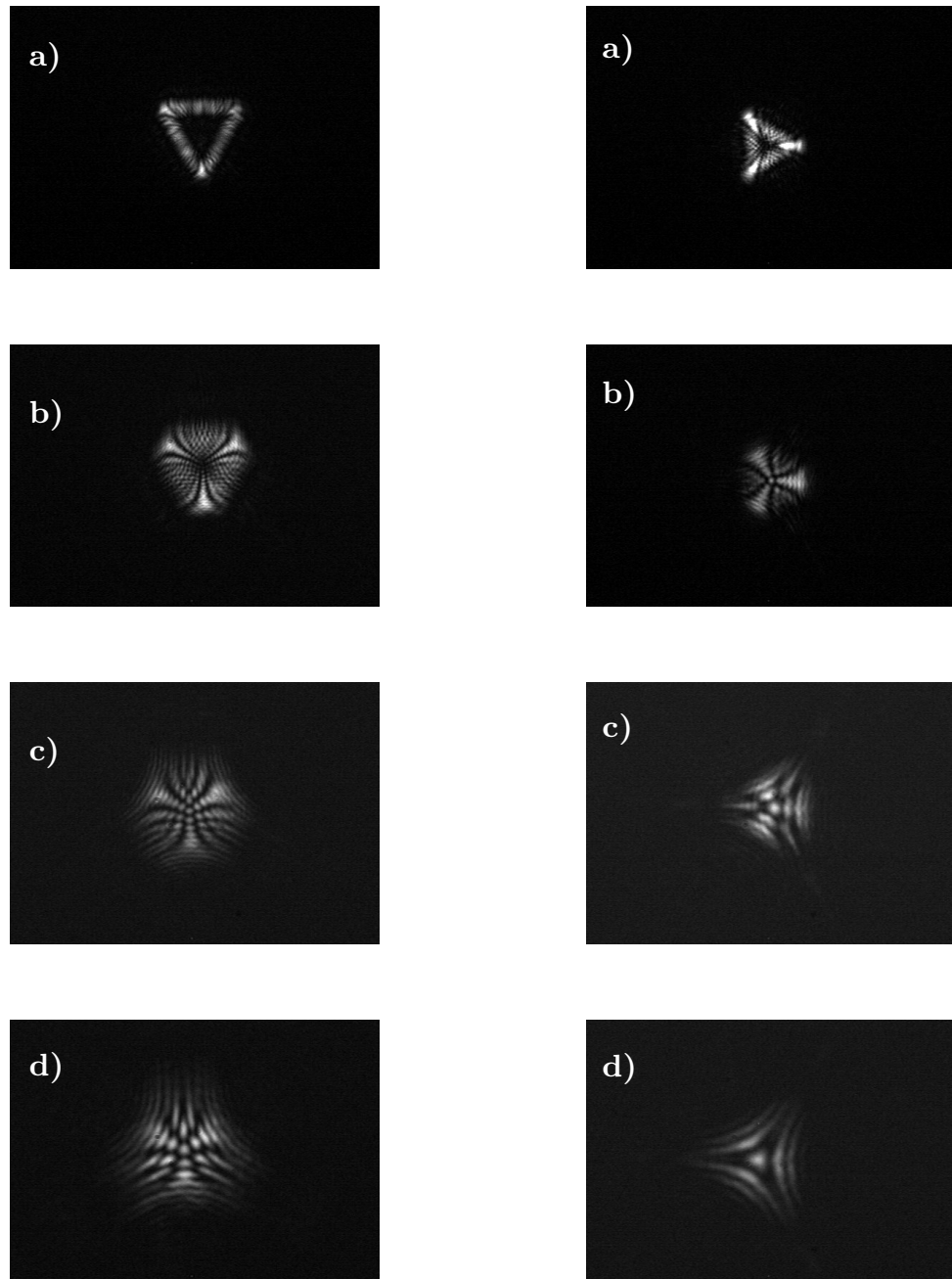


Figura 3.3.- Distribuciones generadas por una rendija de tres lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes tomadas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

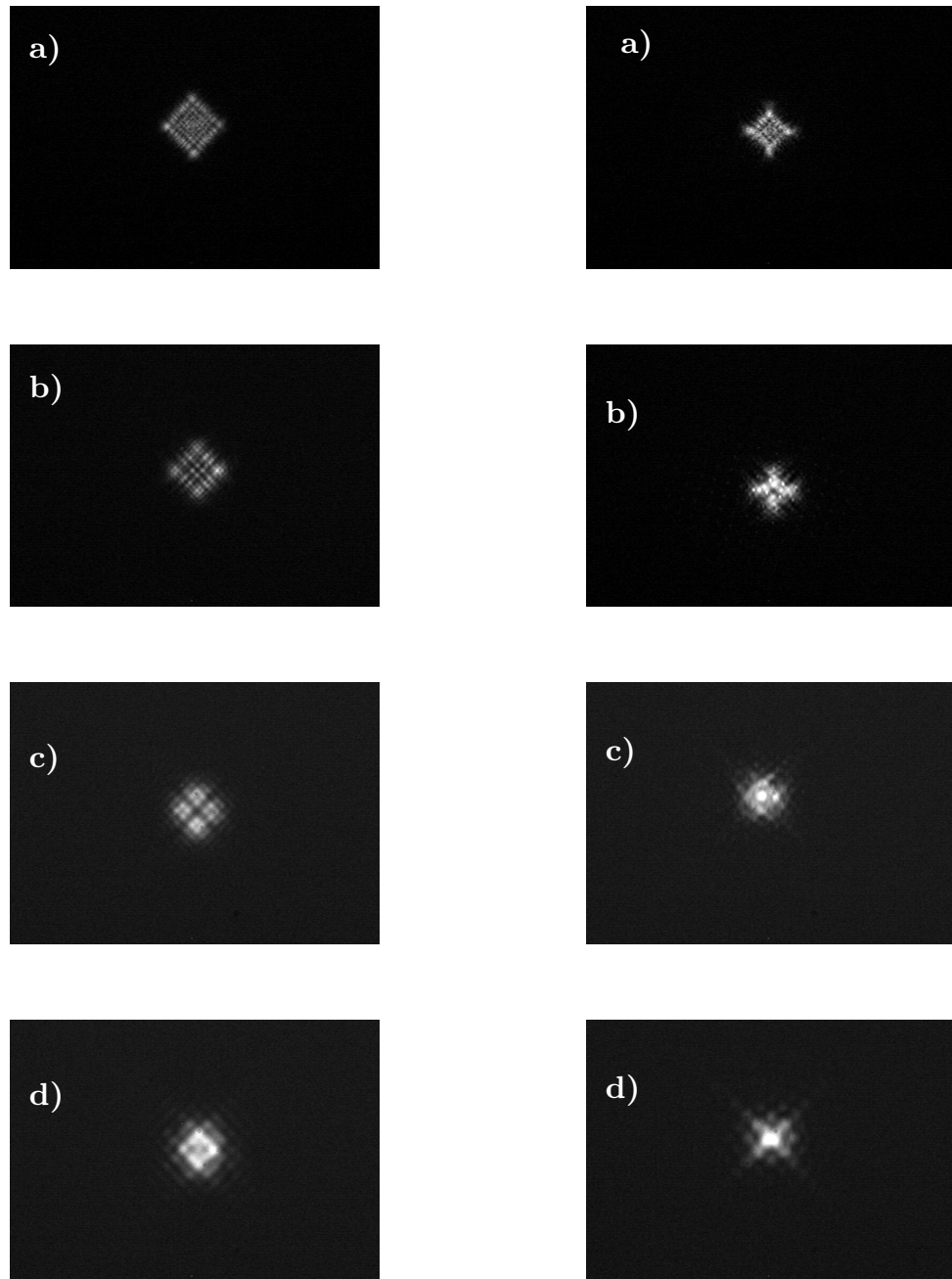


Figura 3.4.- Distribuciones generadas por una abertura de cuatro lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes tomadas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

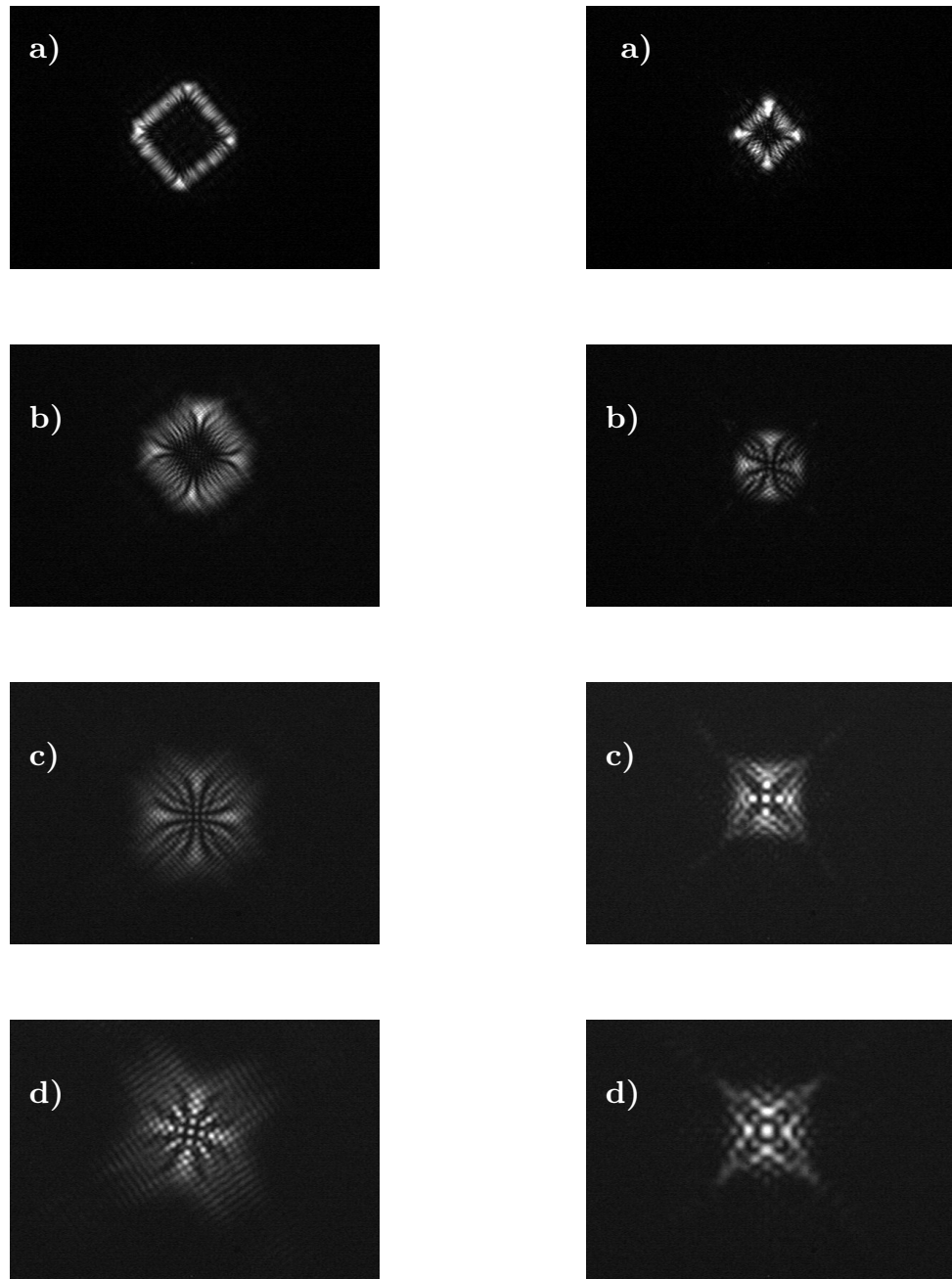


Figura 3.5.- Distribuciones generadas por una rendija de cuatro lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes tomadas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

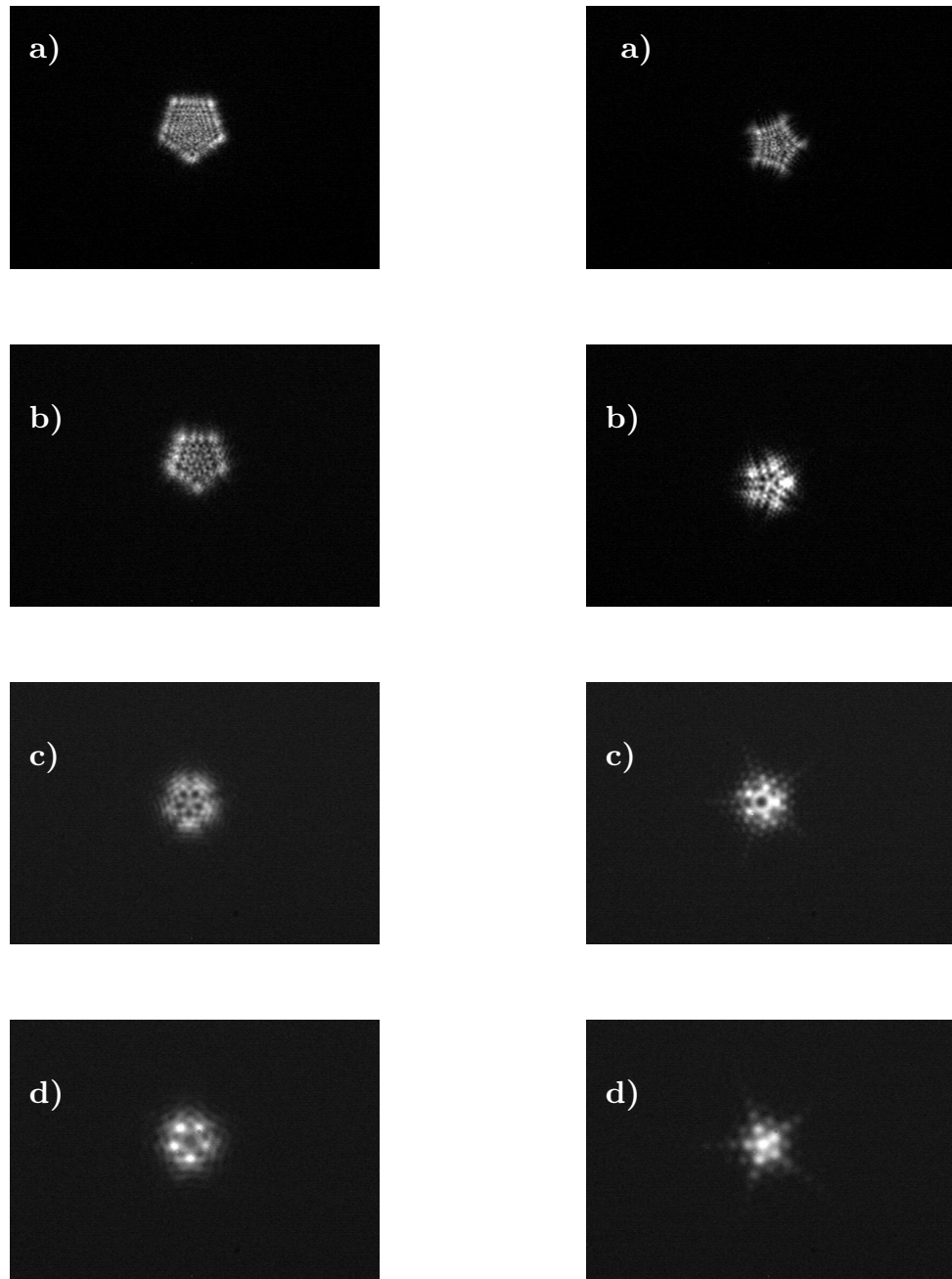


Figura 3.6.- Distribuciones generadas por una abertura de cinco lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes tomadas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

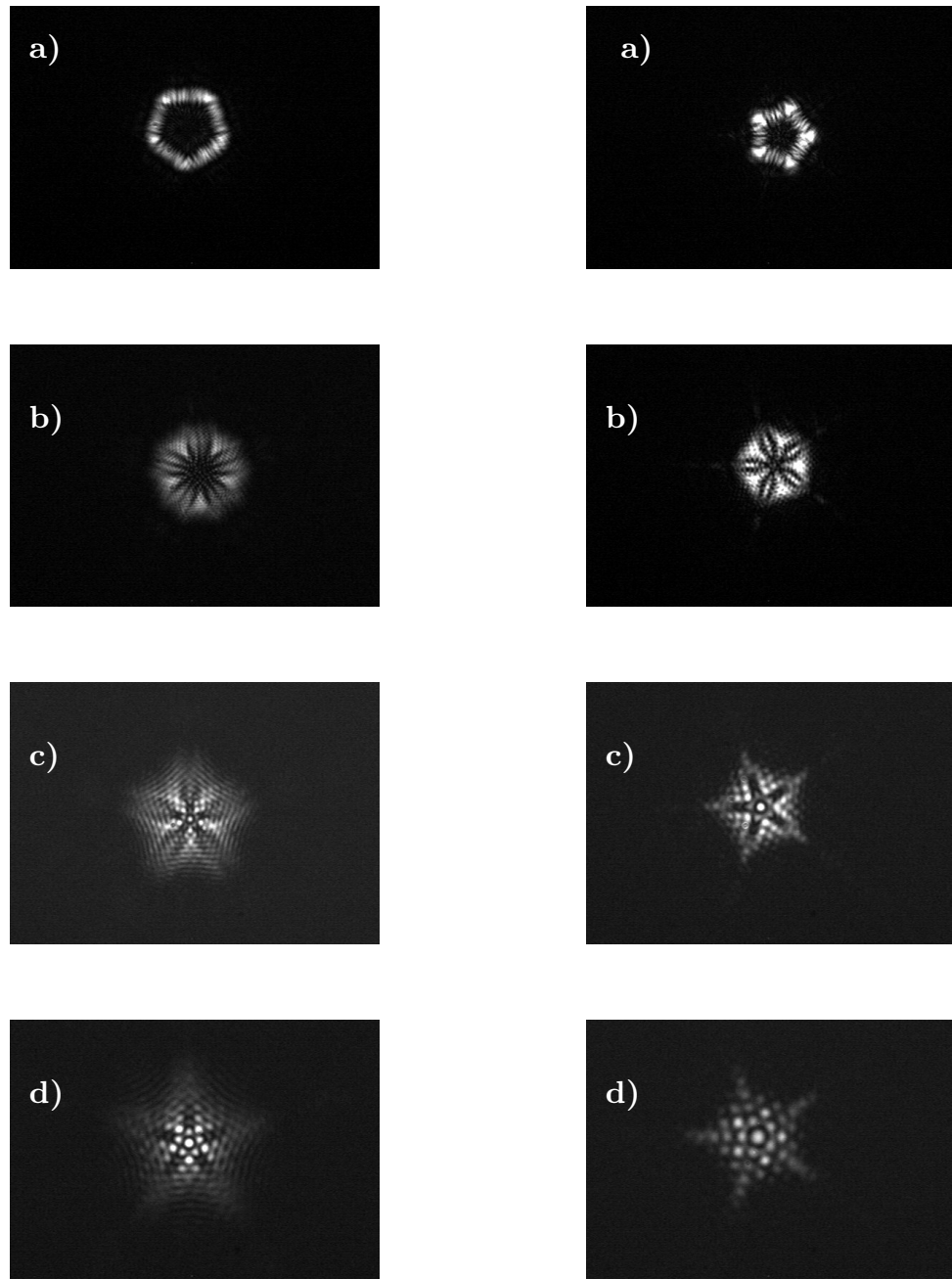


Figura 3.7.- Distribuciones generadas por una rendija de cinco lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes tomadas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

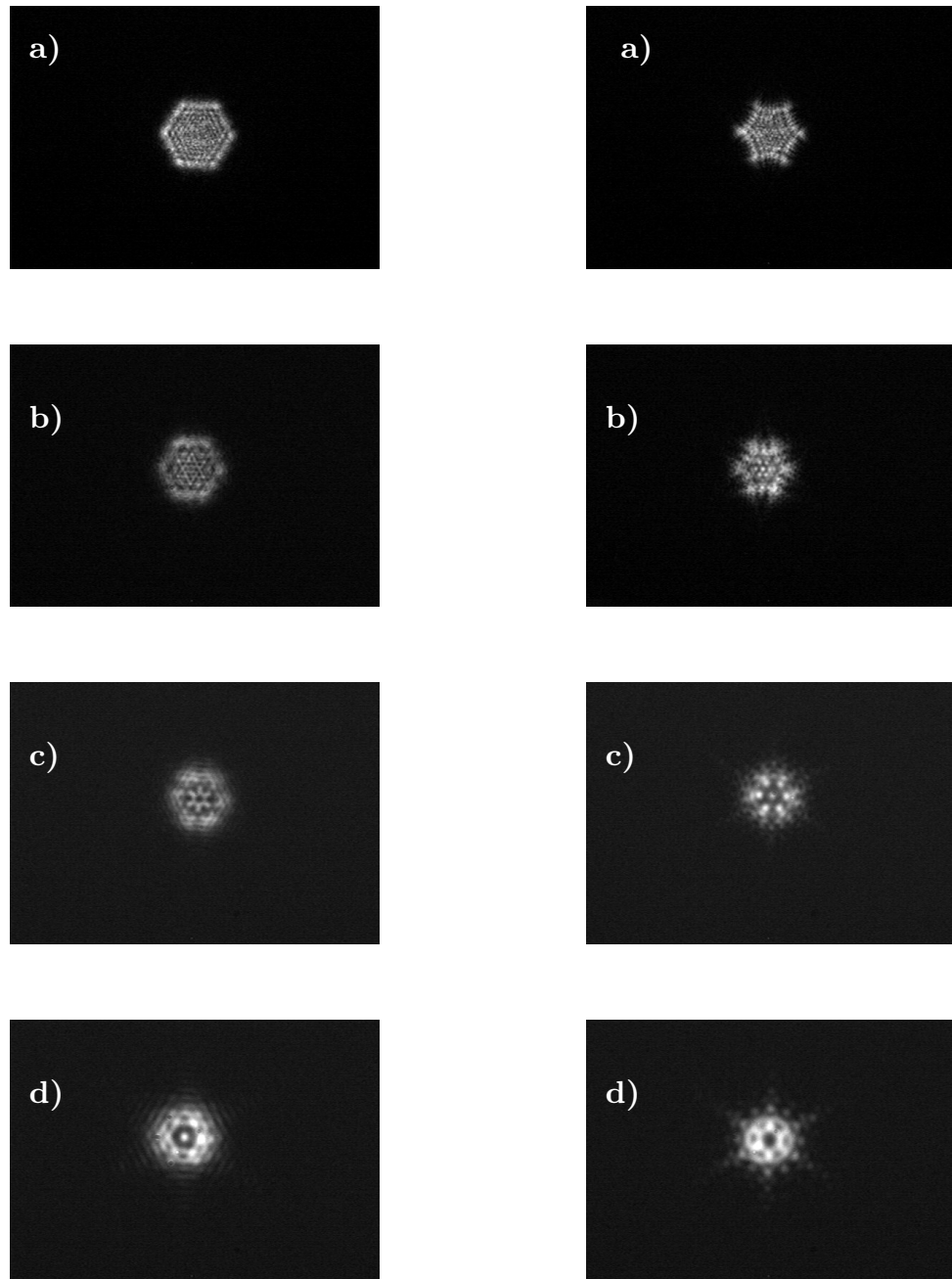


Figura 3.8.- Distribuciones generados por una abertura de seis lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes tomadas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

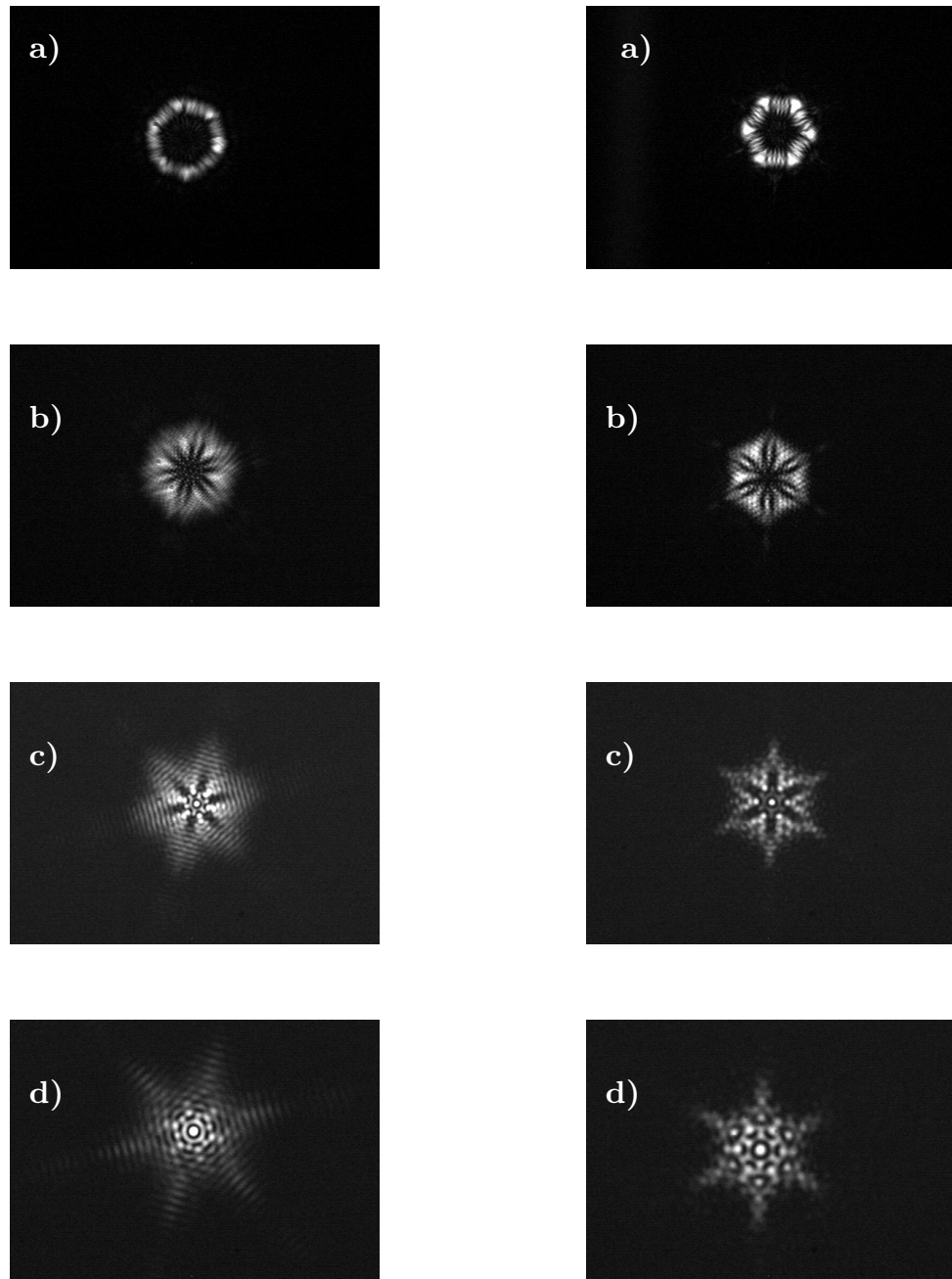


Figura 3.9.- Distribuciones generadas por una rendija de seis lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes tomadas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

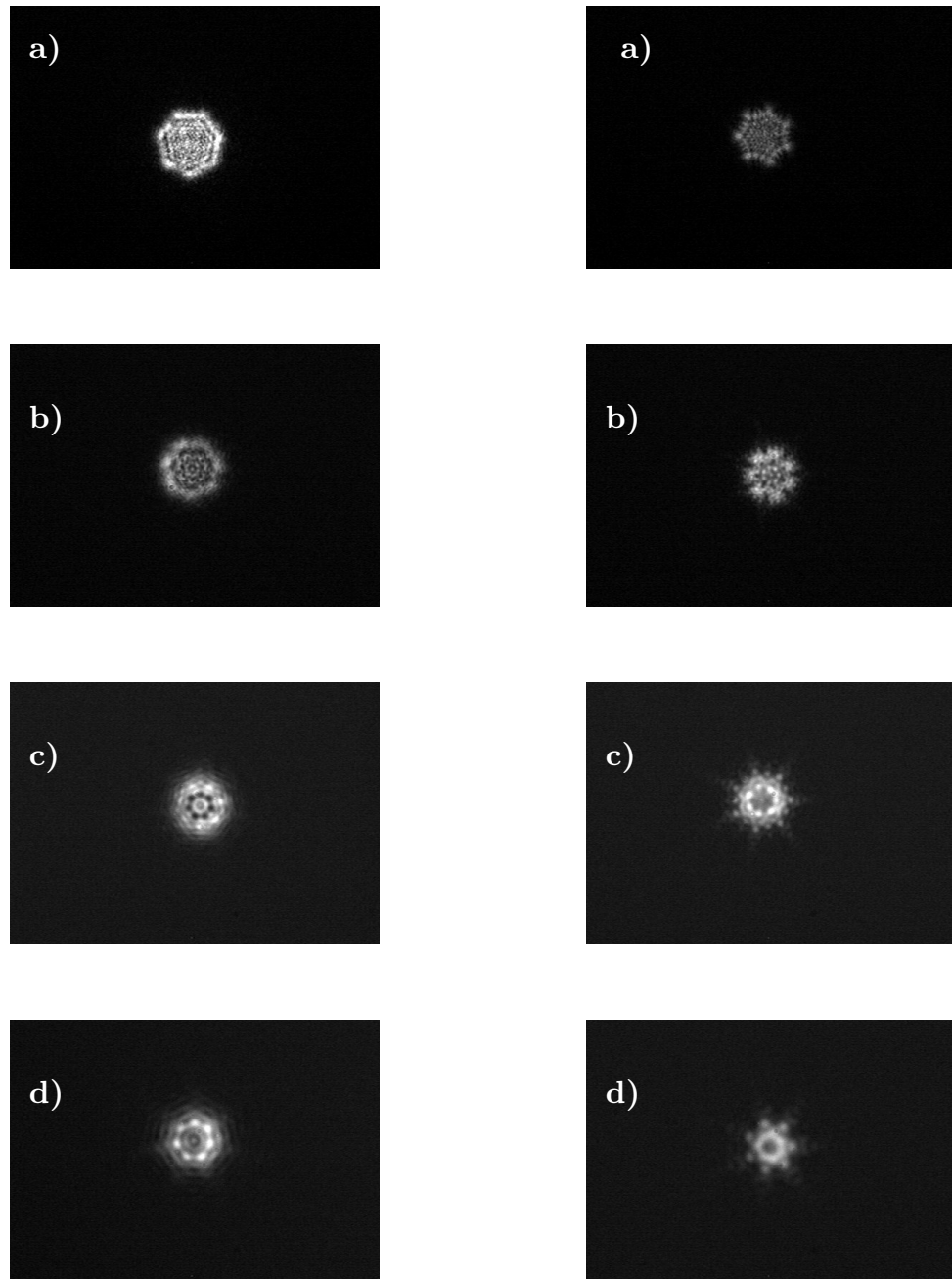


Figura 3.10.- Distribuciones generadas por una abertura de siete lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes tomadas a las distancias: a) $z=2\text{ cm}$, b) $z=5\text{ cm}$, c) $z=10\text{ cm}$ y d) $z=15\text{ cm}$.

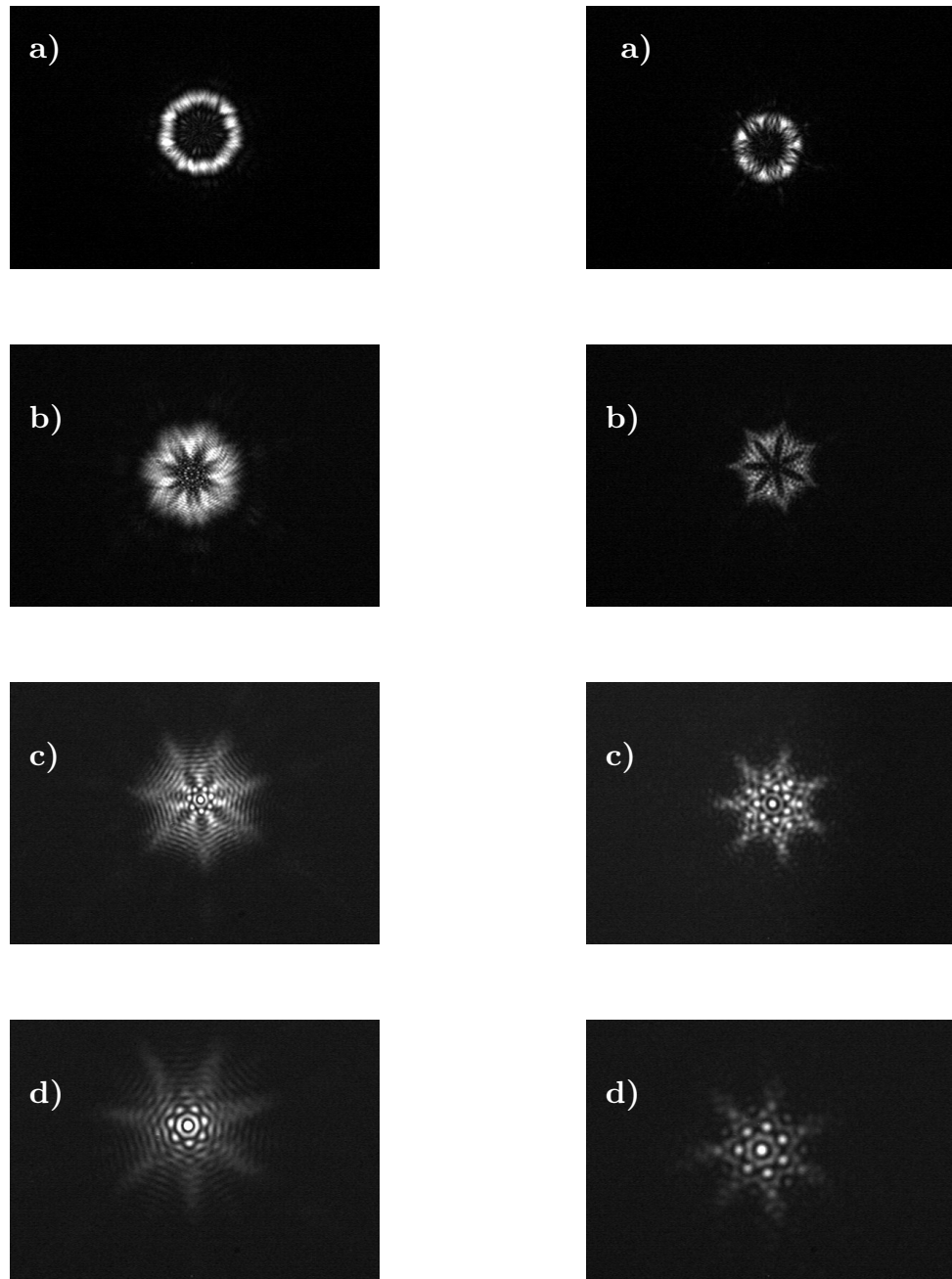


Figura 3.11.- Distribuciones generadas por una rendija de siete lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes tomadas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

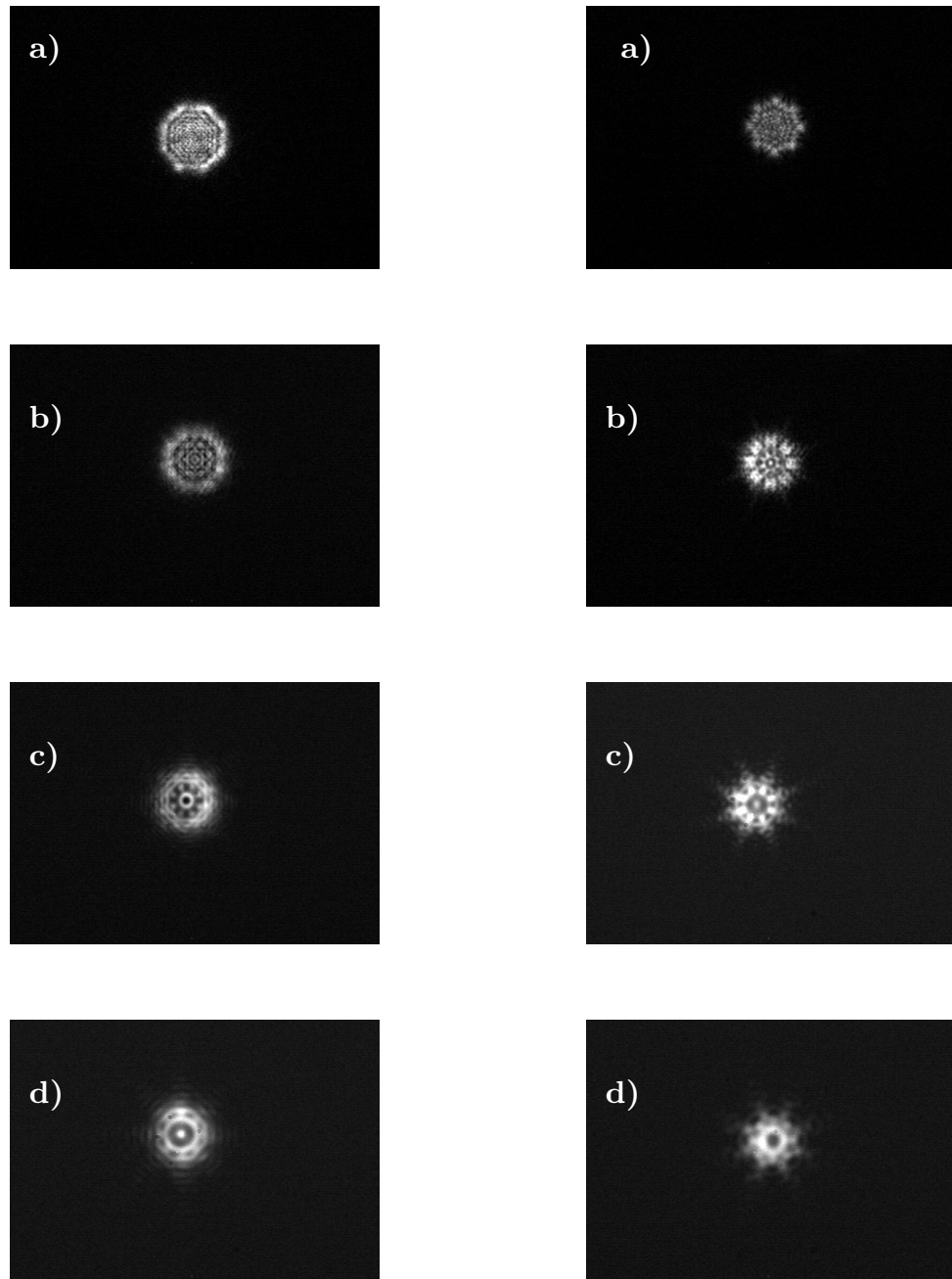


Figura 3.12.- Distribuciones generadas por una abertura de ocho lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes tomadas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

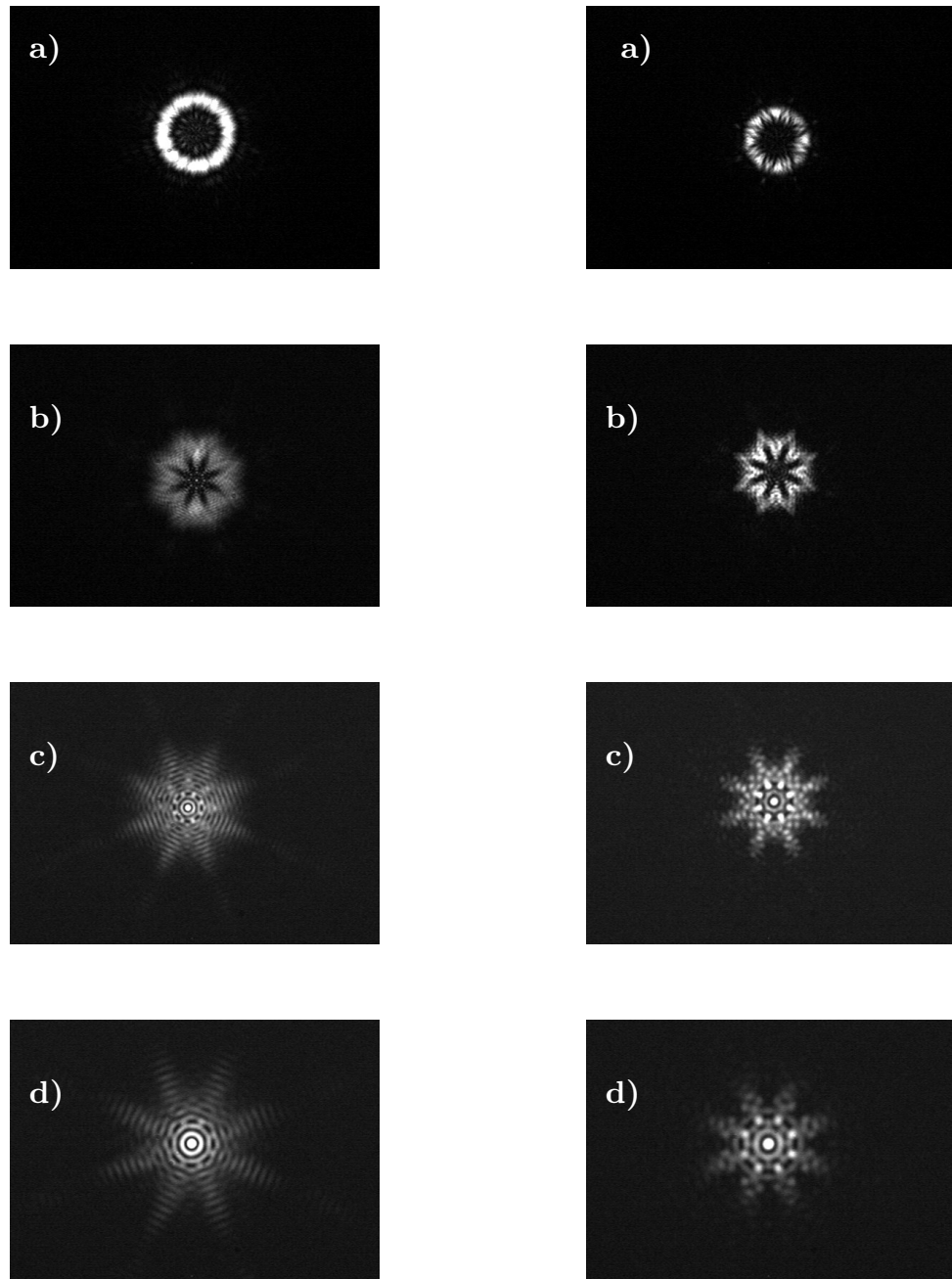


Figura 3.13.- Distribuciones generadas por una rendija de ocho lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes tomadas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

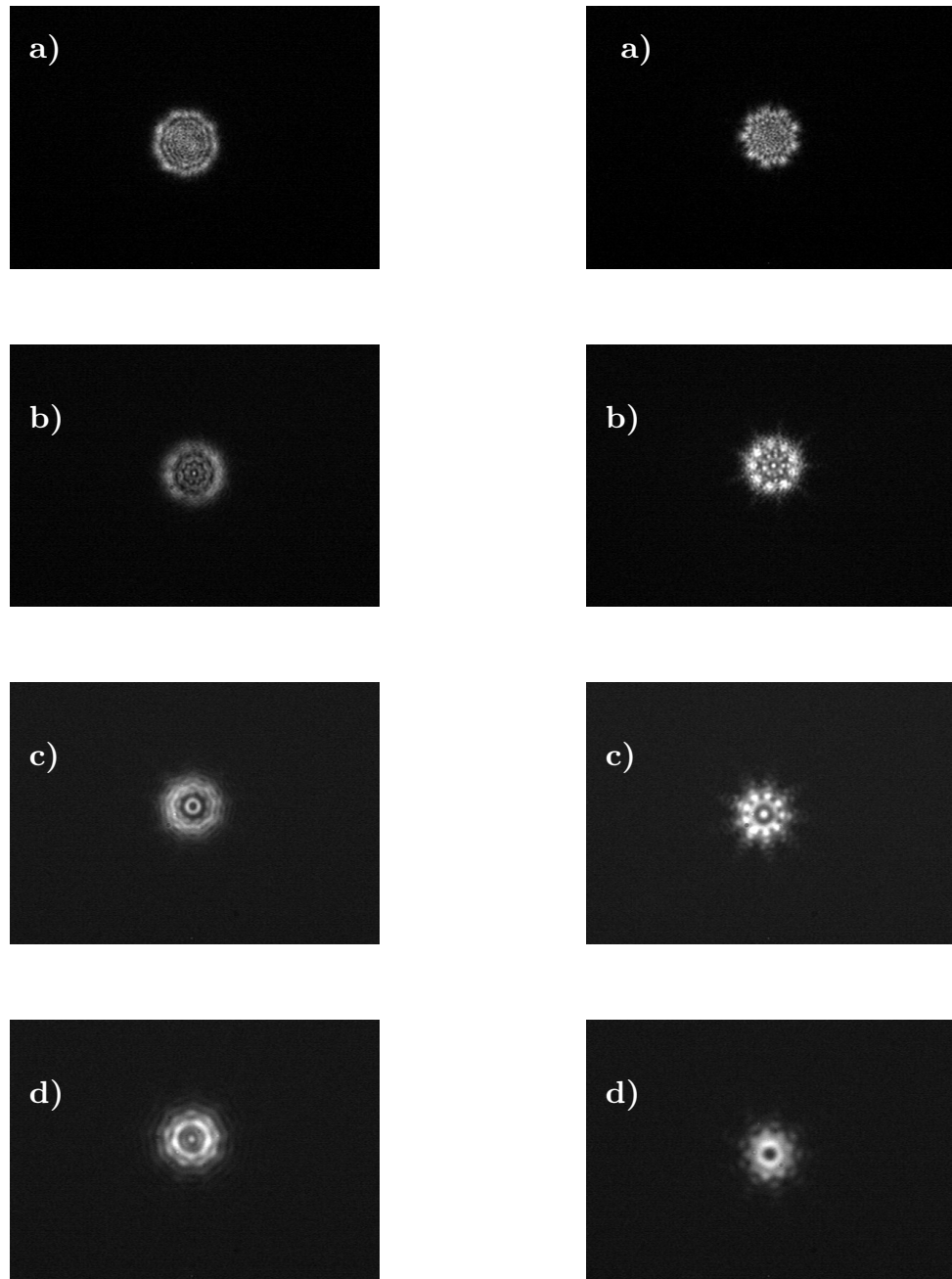


Figura 3.14.- Distribuciones generadas por una abertura de nueve lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes tomadas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

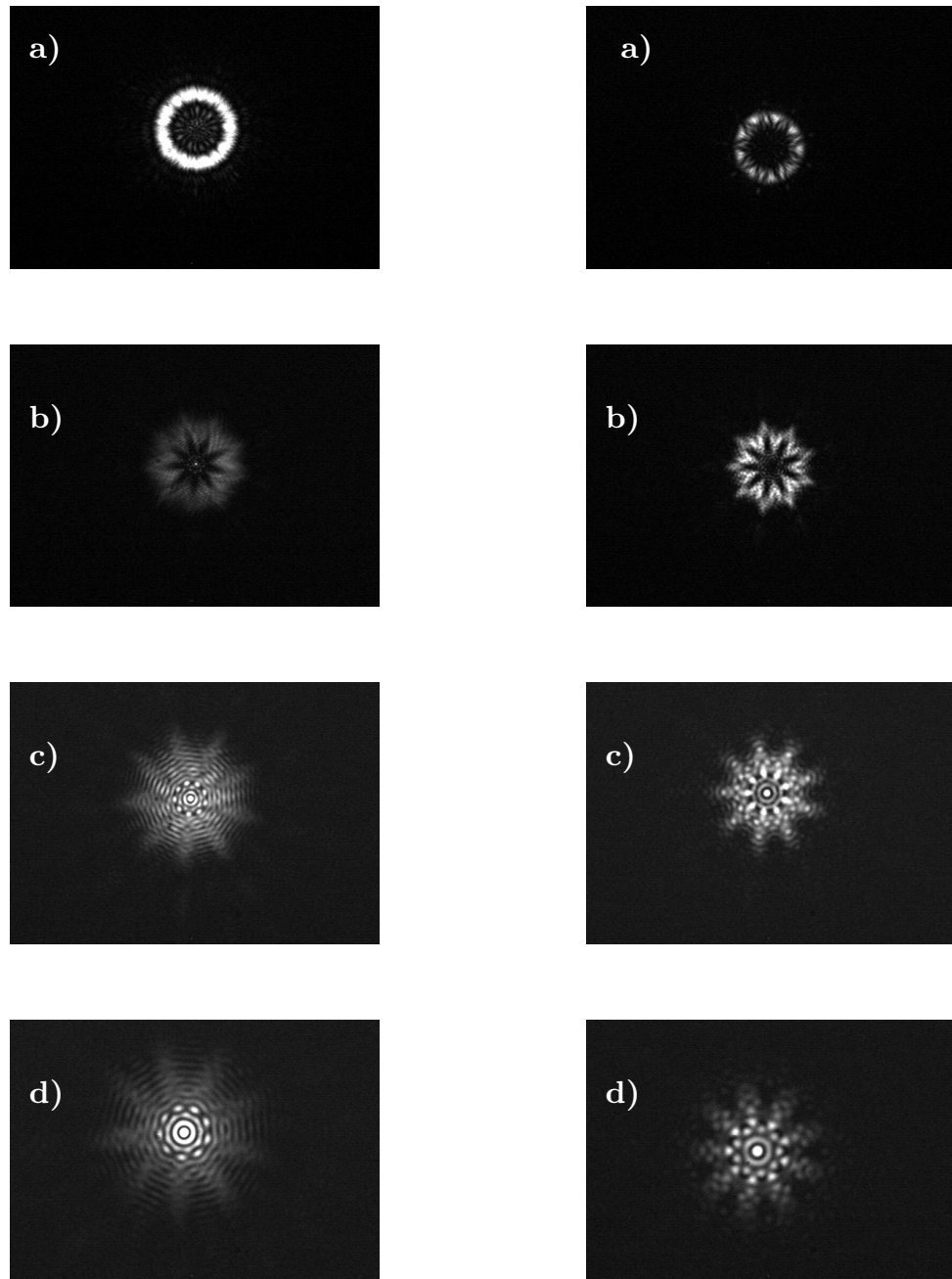


Figura 3.15.- Distribuciones generadas por una rendija de nueve lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes tomadas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

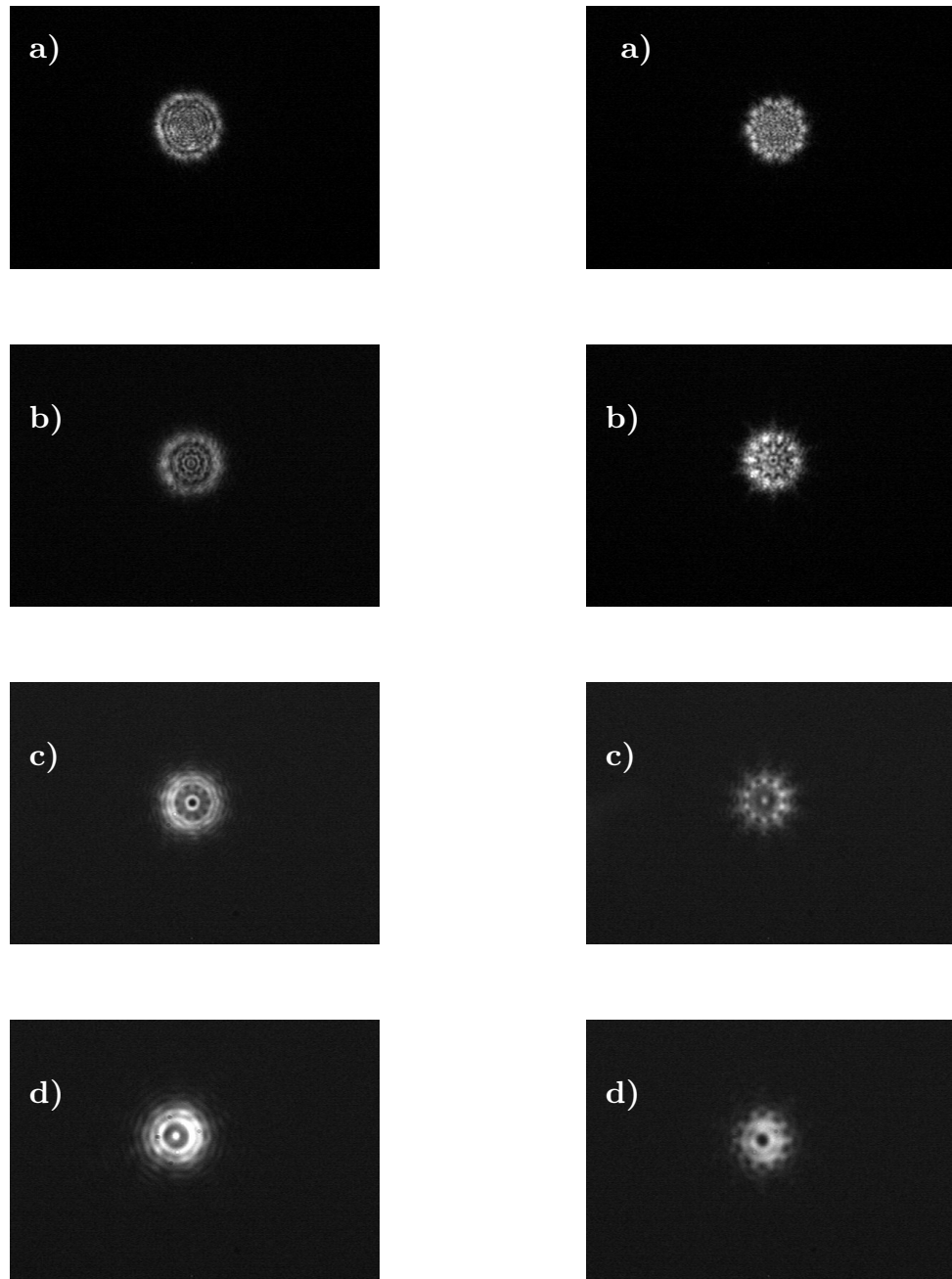


Figura 3.16.- Distribuciones generadas por una abertura de diez lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes tomadas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$

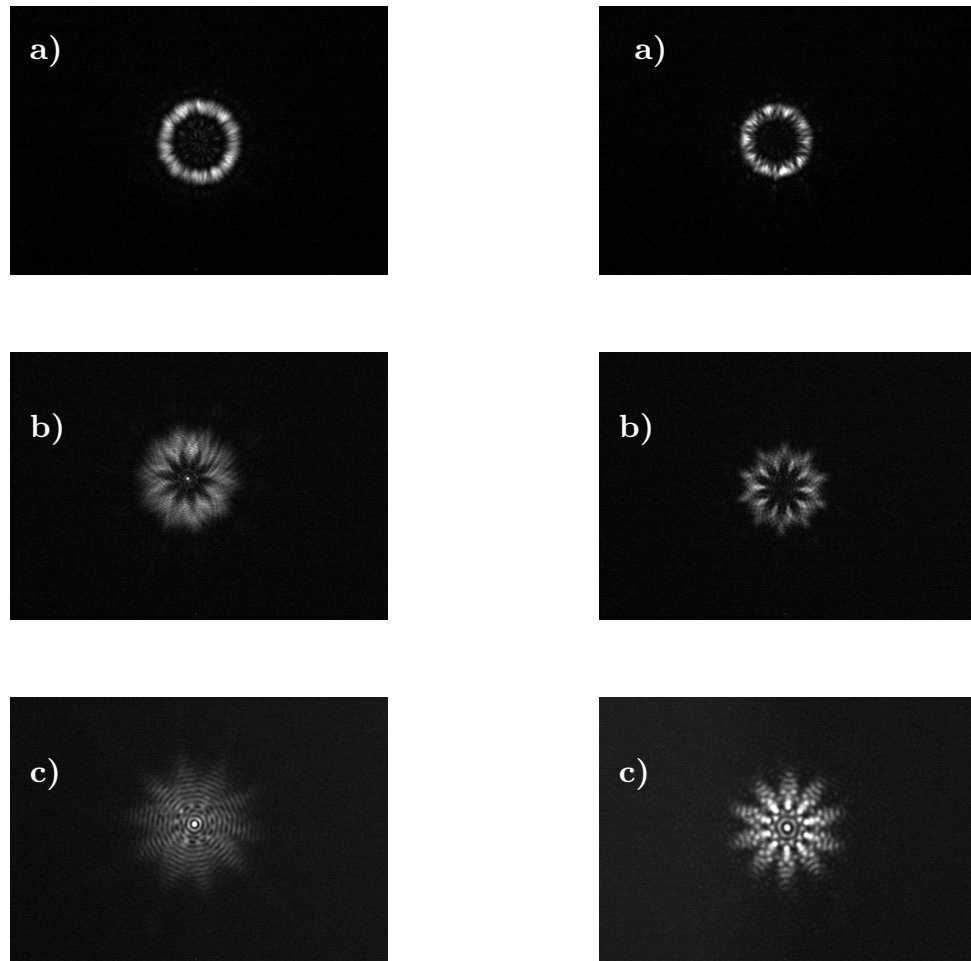


Figura 3.17.- Distribuciones generadas por una rendija de diez lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$ y c) $z=10\text{cm}$.

De los resultados mostrados hasta este punto se puede observar la evolución espacial de las distribuciones de intensidad, note que aún cuando la curvatura de los lados de la hipocicloide, comparada con los lados rectos de un polígono, pareciera insignificante; influye mucho en la forma de las distribuciones, haciendo que éstas no sean iguales. En el capítulo siguiente, una vez presentados los resultados numéricos, se abordarán con más detalle las diferencias observadas.

Capítulo 4

Resultados Numéricos

4.1 Desarrollo Numérico

La evolución espacial, numérica, se obtuvo a partir de la solución de la *ecuación paraxial de Helmholtz*, obtenida en el Capítulo 2. Retomemos la ecuación (2.31):

$$A(X, Y, \Delta Z) = F_{XY}^{-1} \left\{ F_{XY} \{ A_0(X, Y) \} \exp \left[\frac{-i}{4} (f_x^2 + f_y^2) \Delta Z \right] \right\} .$$

En la expresión anterior, el lado izquierdo de la igualdad corresponde al campo observado a una distancia ΔZ posterior a la abertura que genera la distribución, en principio para evaluar este campo sólo es necesario conocer la función $A_0(X, Y)$, es decir, el campo de entrada que en nuestro caso

corresponde a las aberturas y rendijas hipocicloides y poligonales. La parte exponencial $\exp\left[\frac{-i}{4}(f_x^2 + f_y^2)\right]$ algunas veces es llamada *propagador*, en su argumento aparecen las frecuencias espaciales f_x y f_y , con las cuales debemos tener cuidado al momento de definir las ya que en la simulación éstas están relacionadas con el tamaño de la ventana computacional que elijamos para observar los resultados.

De acuerdo con la ecuación (2.31), basta con calcular la transformada de Fourier del producto del campo de entrada por el propagador y al resultado sacarle la transformada inversa de Fourier, ambas transformadas en dos dimensiones. Para ésto, aprovechamos que en Python ya se encuentran definidos los algoritmos FFT e IFFT; entonces, el problema radica en definir la función de entrada A_θ .

El caso sencillo es el de los polígonos, donde éstos se pueden generar al hacer intersectar rectas, las cuales se definen a partir de la ecuación general de una recta[5] tomando como puntos de inicio y final los vértices del polígono. Para garantizar que el polígono este dentro de una circunferencia de radio=1, los vértices se tomaron todos sobre dicha circunferencia.

Por otra parte, para definir numéricamente las mascarillas con aberturas de tipo hipocicloide nos encontramos con el problema de que las ecuaciones que describen las curvas están expresadas en forma paramétrica como se presenta en la ecuación (2.40). Para tratar de resolver esa dificultad se propuso aproximar las curvas por medio de circunferencias que se intersectan, sin embargo, en el proceso se encontró que hay una mejor aproximación empleando curvas cónicas, en particular elipses.

A continuación se describe la construcción, en términos generales, del programa elaborado en Python.

Como primer paso importamos las librerías necesarias para realizar operaciones entre vectores, operaciones científicas, transformadas de Fourier y para gráficar:

1 →

```
from __future__ import division
import numpy as np
import scipy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.colors import LogNorm
from numpy.fft.fftpack import fft2, ifft2
from numpy.fft.helper import fftshift
```

El paso número 2 comprende la definición de las condiciones iniciales para nuestro programa:

2 →

```
xm = 4      #mitad de la ventana computacional
nx = 2**10 #numero de puntos de la ventana computacional
lz = 0.1    #distancia de propagación
           #numero de pasos
dz = 0.01   #division del paso en z
nz = np.round(lz/dz) #numero de pasos en z
```

Es en esta parte donde se puede modificar los valores iniciales para correr el programa, como por ejemplo el tamaño de la ventana computacional, es decir, el área en la que se grafican y presentan nuestros resultados. La división del paso, es decir, cada cuánto se “registra” un resultado, el número de pasos y el número de puntos de la ventana se mantiene fijos y de acuerdo a los valores presentados en otros trabajos[13,14]. El único valor que se requiere modificar es la distancia de propagación, de acuerdo a la distancia normalizada deseada.

Como paso siguiente, se generan los vectores a partir de los cuales se define la “base” para nuestra mascarilla y se genera también el espacio de frecuencias, para lo cual debemos considerar el tamaño de la ventana computacional.

3

```
x = sp.linspace(-xm,xm,nx)
[X,Y] = sp.meshgrid(x,x)
fx1 = sp.arange(-nx/2,nx/2)
fx = fx1*2*sp.pi/(2*xm)
[Fx,Fy] = sp.meshgrid(fx,fx)
```

La siguiente parte del programa consiste en la condición inicial, es decir, las aberturas. Éstas se definen a partir de las ecuaciones de rectas que se intersectan en el caso de polígonos y a partir de cónicas que se intersectan en el caso de las hipocicloides:

4

```
#RADIO DE LAS CONICAS
r = 1.35
c1 = -1.2*X**2 - 0.83*X*Y - 0.93*Y**2 + 2.55*X + 1.85*Y < r
c2 = -0.71*X**2 + 0.52*X*Y - 1.42*Y**2 - 0.98*X + 3*Y < r
c3 = -1.5*X**2 - 0.63*Y**2 - 3.15*X < r
c4 = -0.71*X**2 - 0.51*X*Y - 1.42*Y**2 - 0.97*X - 3*Y < r
c5 = -1.2*X**2 + 0.83*X*Y - 0.93*Y**2 + 2.55*X - 1.85*Y < r
"""mascarilla de las conicas"""
base1 = sp.zeros(sp.shape(X),dtype='complex')
T1 = (c1)&(c2)&(c3)&(c4)&(c5)
base1[T1] = 1
mascara1 = abs(base1)**2
"""mascarilla para bloquear"""
base2 = sp.zeros(sp.shape(X),dtype='complex')
T2 = (X**2 + Y**2 < 1)
base2[T2] = 1
mascara2 = abs(base2)**2
"""abertura final"""
mascara3 = abs(mascara1*mascara2)**2
mascara = mascara3
U = mascara
```

$$I_e = \text{abs}(U)**2$$

Ahora, la parte 5 presenta la imagen de la condición inicial donde se incluyen los comandos para “mejorar” la presentación de la misma:

5 →

```
plt.figure(1)
extension = [x.min(), x.max(), x.min(),x.max()]
figura1= plt.imshow(Ie,origin = 'lower', extent = extension)
plt.title('$Z=0$', fontsize = 12)
plt.axis('scaled')
plt.axis(extension)
plt.xlabel('$x$',fontsize=22)
plt.colorbar()
#plt.axis('off')
figura1.set_cmap("gist_heat")
```

A continuación, se define el *propagador* y se realiza la propagación de la distribución:

6 →

```
p=fftshift(sp.exp(-1j*(Fx**2+Fy**2)*dz/4)) #propagador
rango=sp.arange(1,nz+1)
for n in rango:
    U = (ifft2(fft2(U)*p))
    Is = abs(U)**2
    Isn = Is/Is.max()
#PERFIL DEL HAZ DE SALIDA
perfilsalida=Is[len(Is)/2]
```

Finamente, se muestra la evolución espacial de la distribución a la distancia lz elegida en las condiciones iniciales del programa:

7



```
plt.figure(2)
extension = [x.min(), x.max(), x.min(),x.max()]
figura2=plt.imshow(Isn,origin='lower',extent=extension)
plt.title(lz,fontsize=12)
plt.axis('scaled')
plt.axis(extension)
plt.xlabel('$x$',fontsize=22)
figura2.set_cmap('gist_heat')
```

4.2 Resultados Numéricos de las Distribuciones de Intensidad

En esta sección se presentan los resultados obtenidos numéricamente, los resultados están organizados de acuerdo a la distancia de propagación de cada distribución de intensidad. Por ejemplo, la Figura 4.1 en la columna izquierda contiene los resultados obtenidos al propagar la distribución generada por una abertura triangular a diferentes distancias y en la columna derecha se muestran los resultados obtenidos al propagar a las mismas distancias, que en el caso anterior, la distribución generada por una abertura hipocicloide. En el pie de cada figura se especifica cada caso. La Figura 4.2 contiene los resultados al propagar bajo las mismas condiciones la distribución generada por rendijas de tres lados, así, las figuras se van “intercalando” de esta manera con la finalidad de tratar de hacer más fácil la comparación entre los resultados obtenidos.

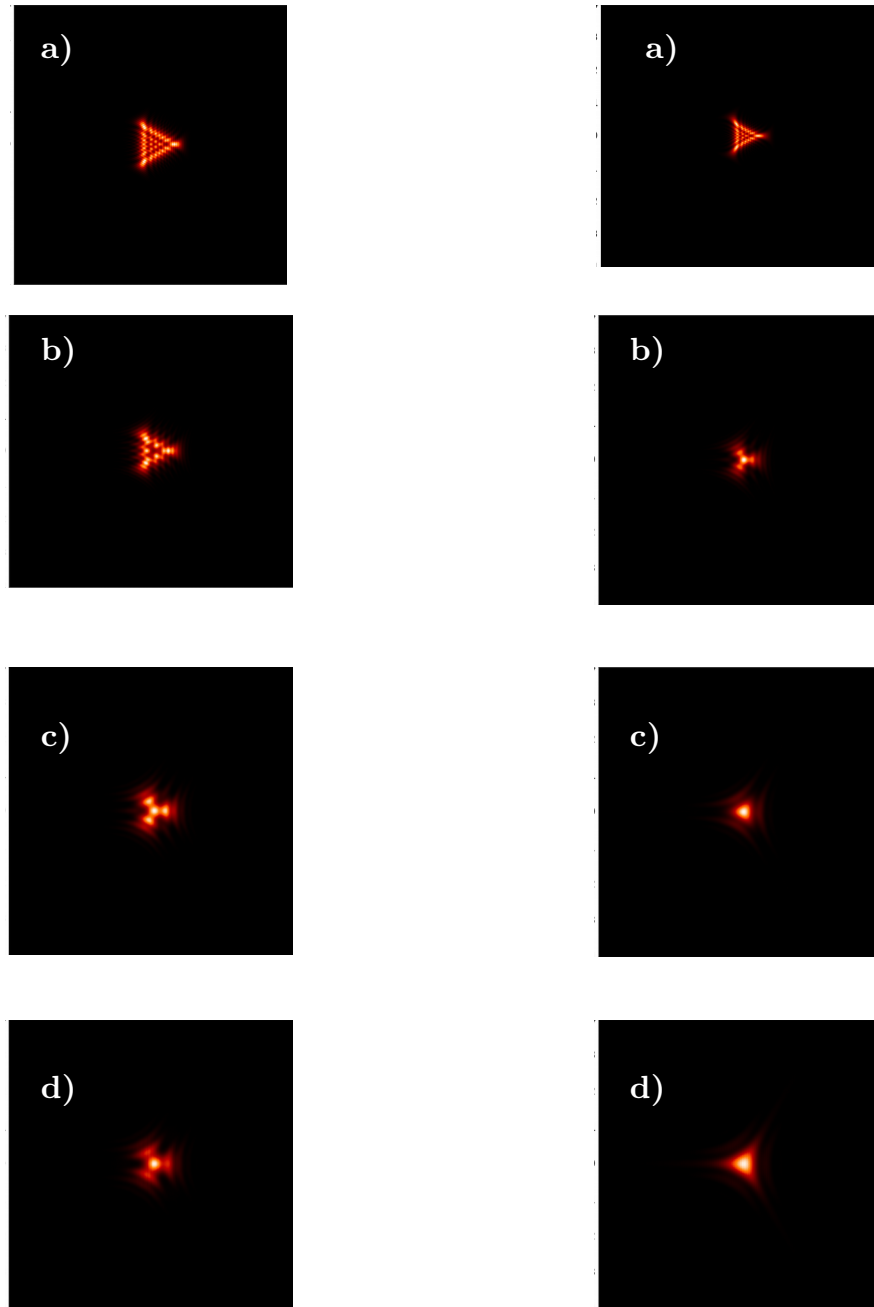


Figura 4.1.- Distribuciones generadas por una abertura de tres lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha) imágenes simuladas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

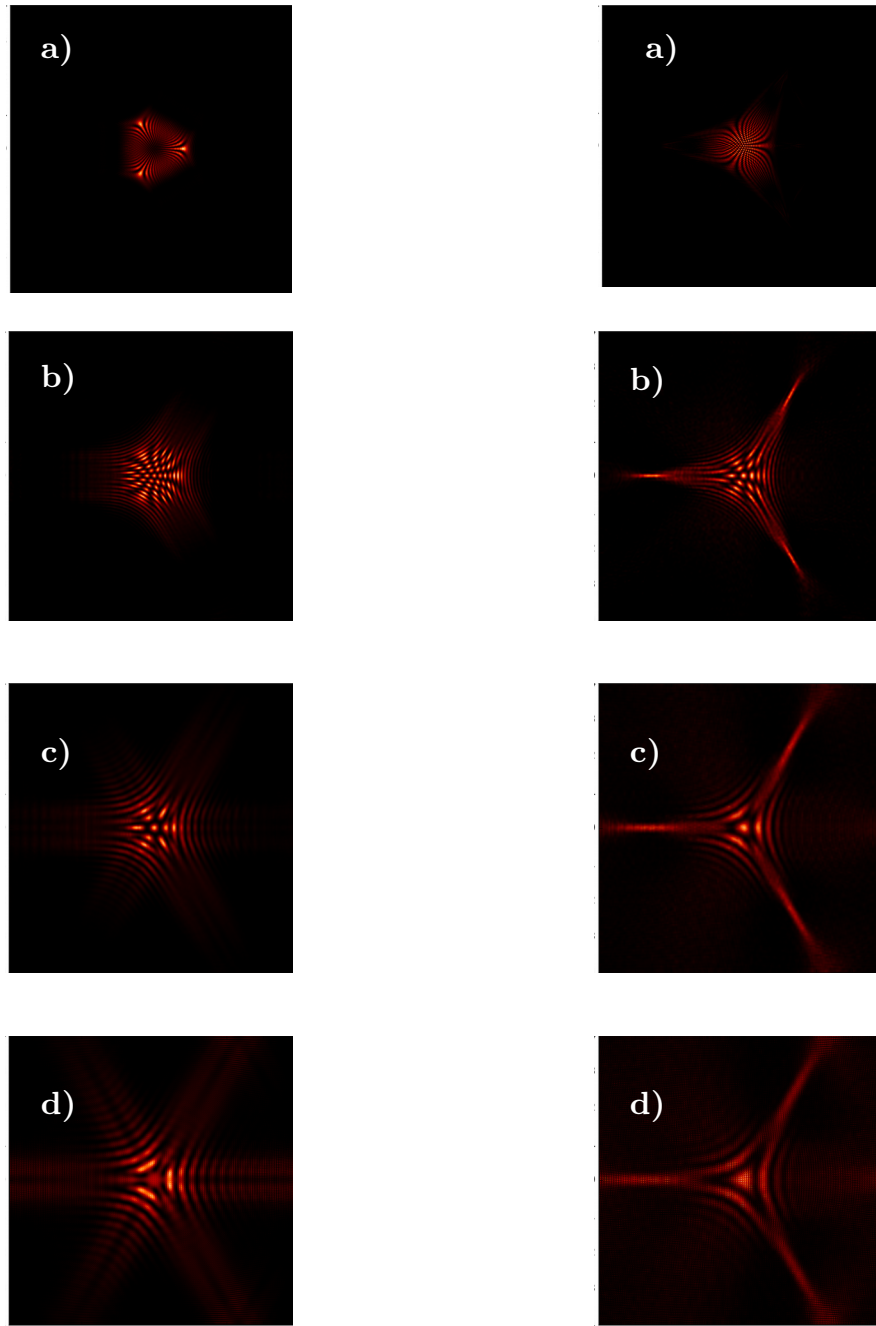


Figura 4.2.- Distribuciones generadas por una rendija de tres lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes simuladas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

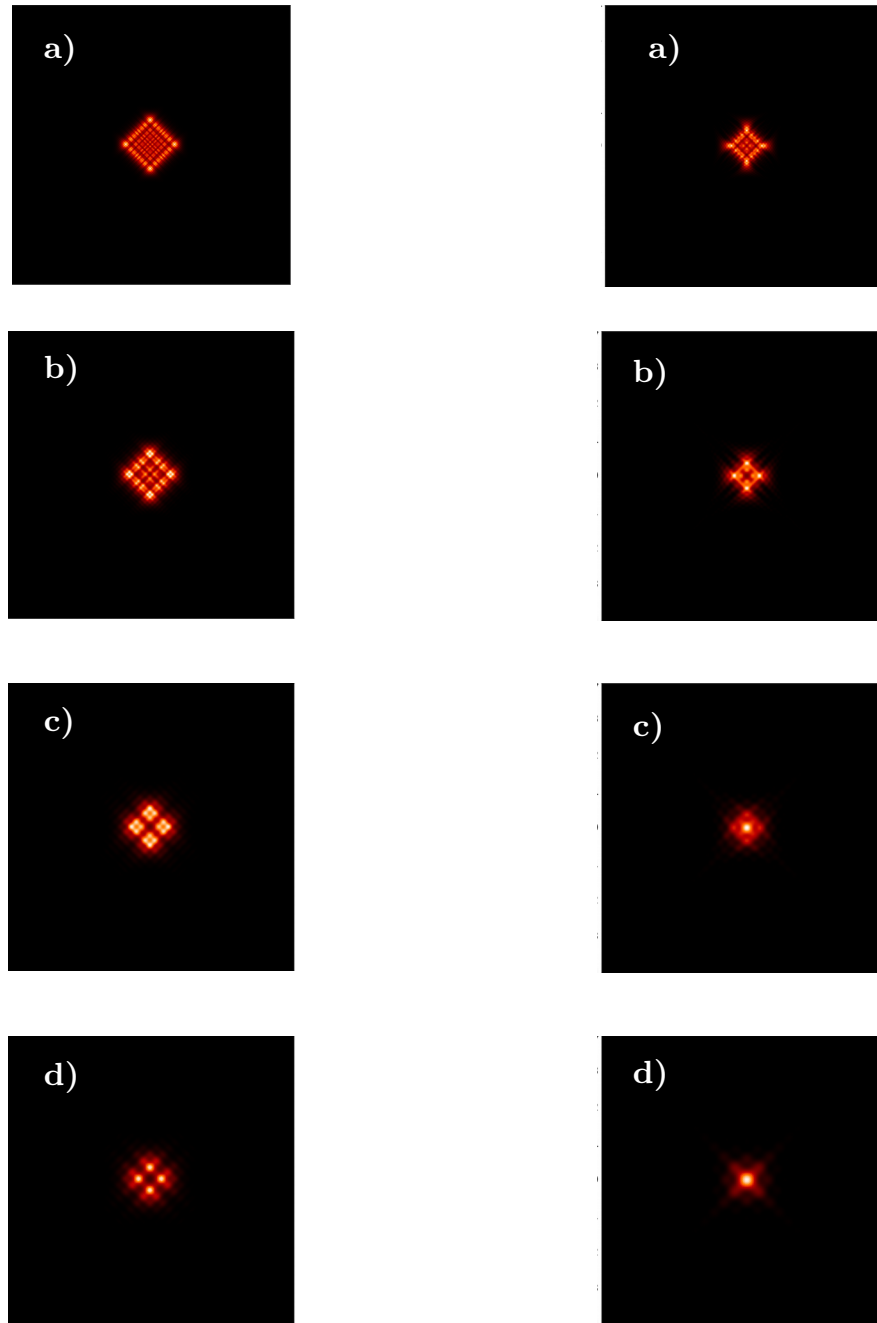


Figura 4.3.- Distribuciones generadas por una abertura de cuatro lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes simuladas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

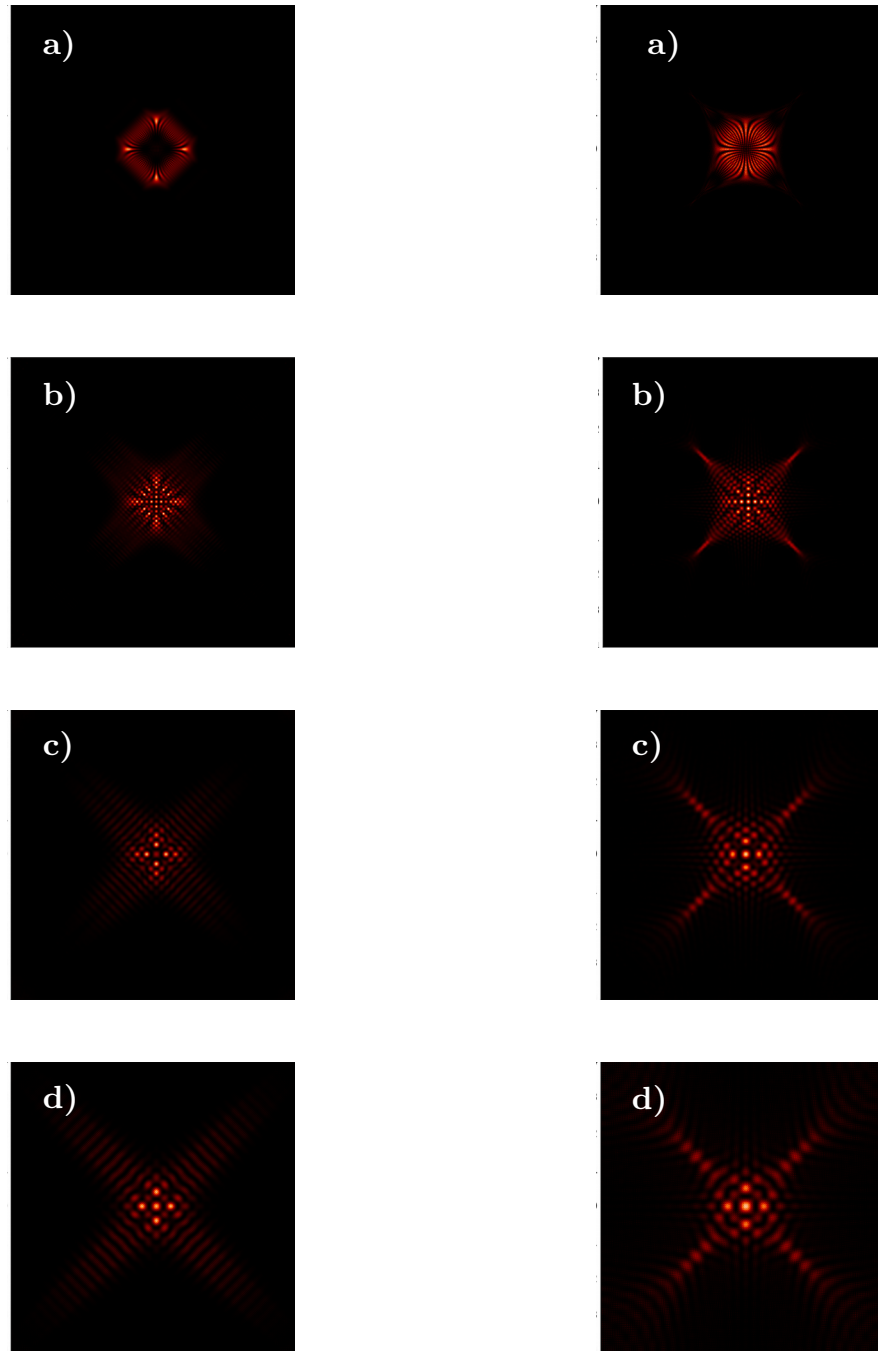


Figura 4.4.- Distribuciones generadas por una rendija de cuatro lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes simuladas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

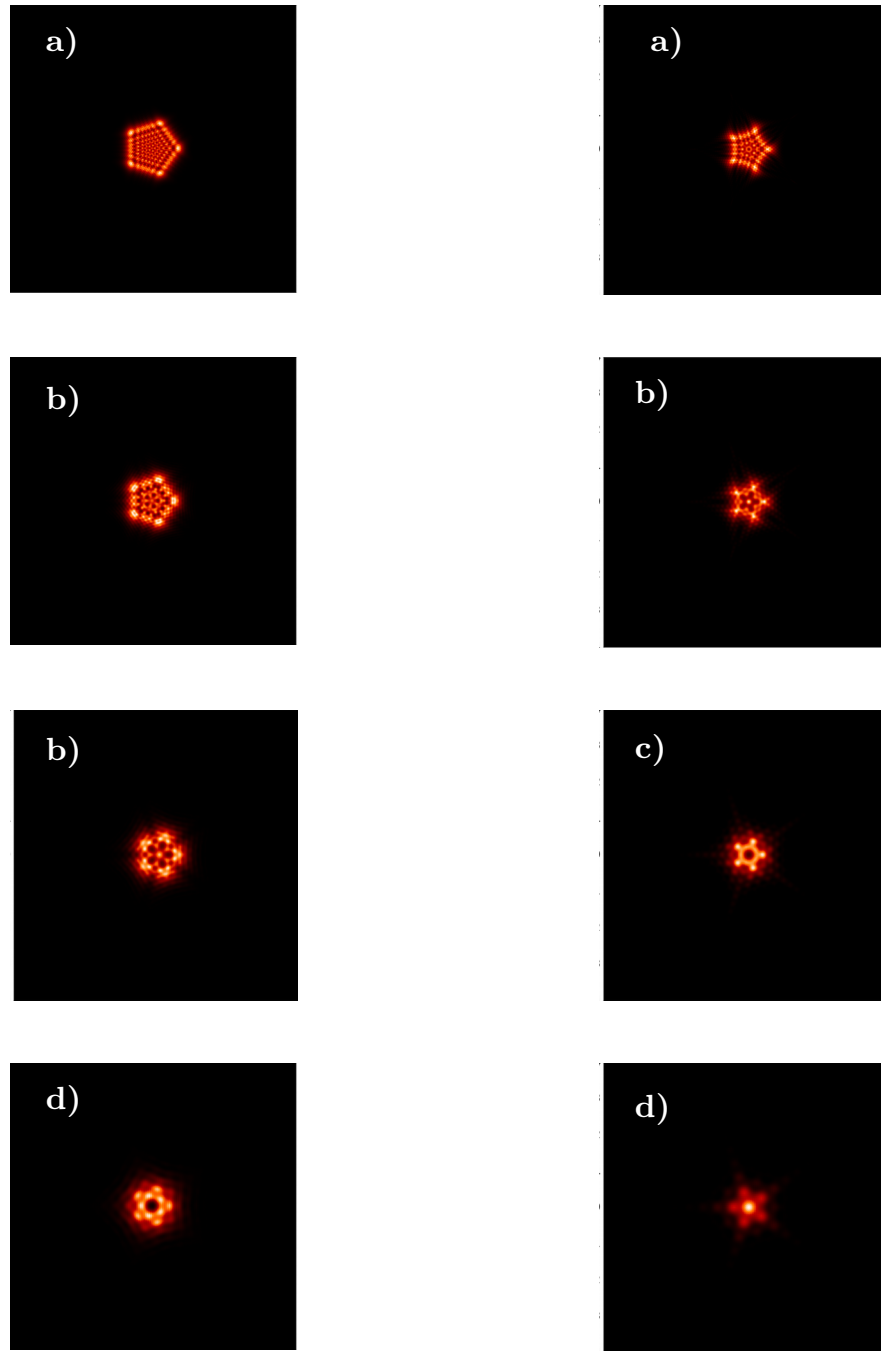


Figura 4.5.- Distribuciones generadas por una abertura de cinco lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes simuladas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

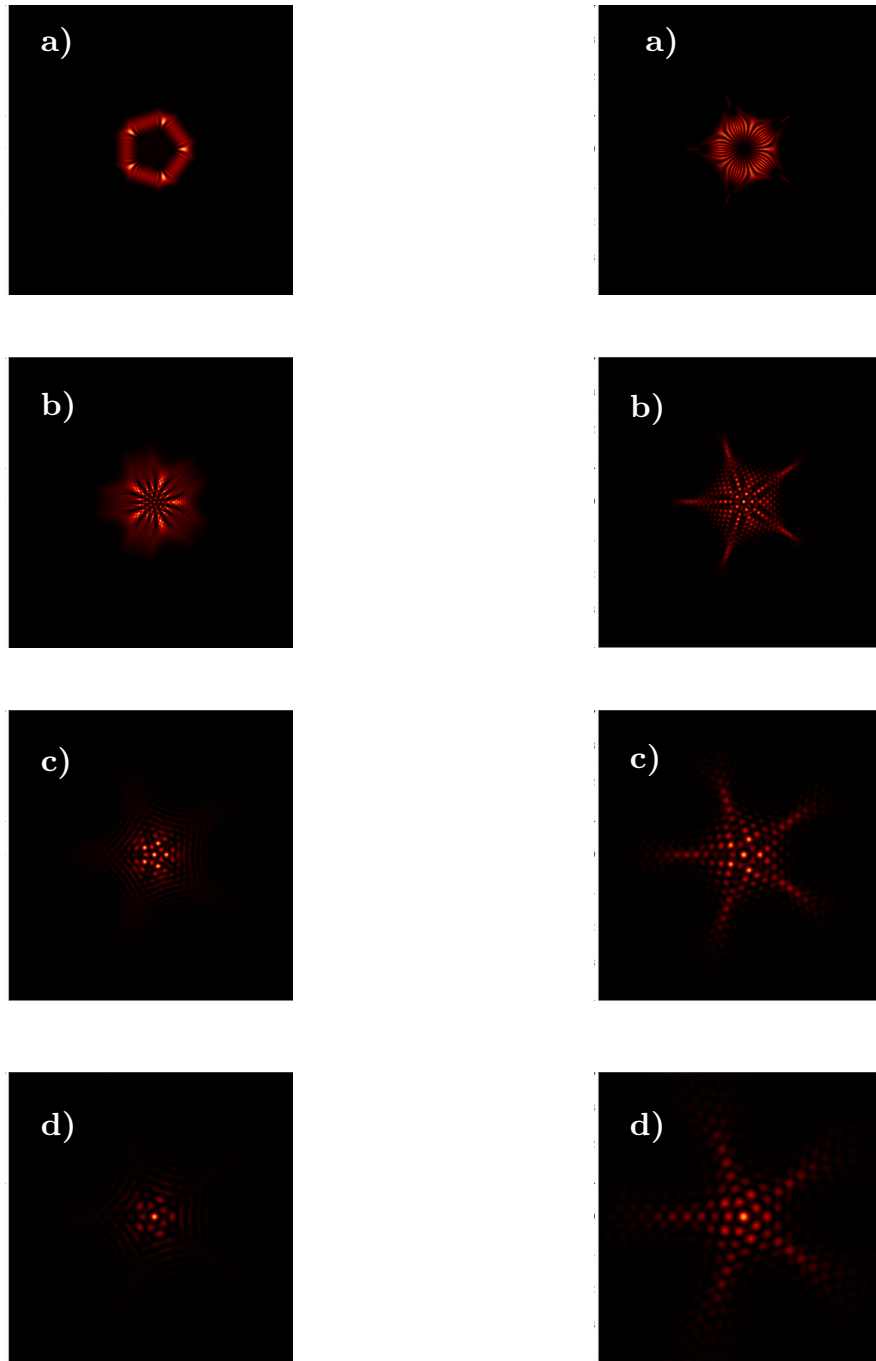


Figura 4.6.- Distribuciones generadas por una rendija de cinco lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes simuladas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

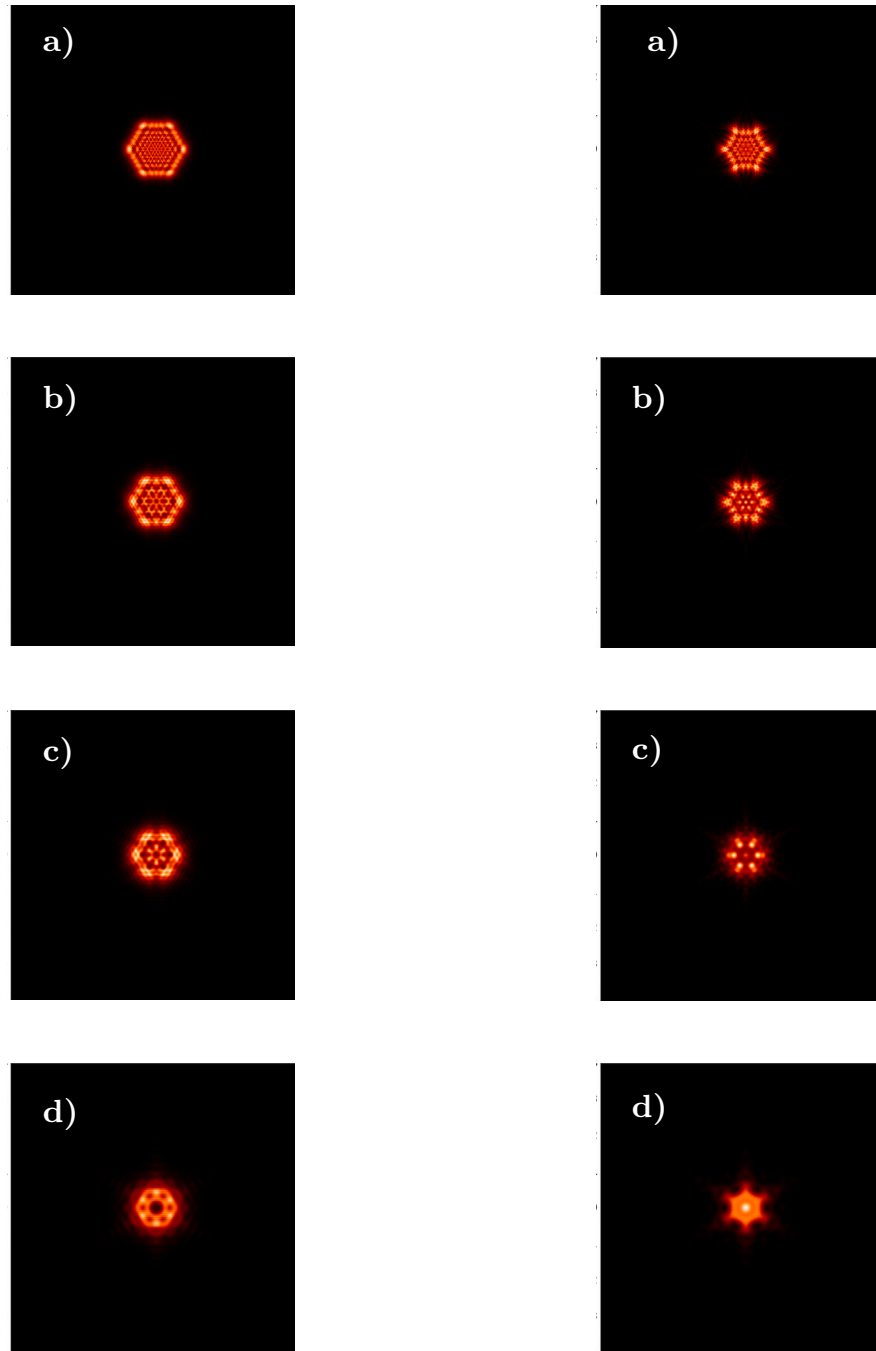


Figura 4.7.- Distribuciones generadas por una abertura de seis lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes simuladas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

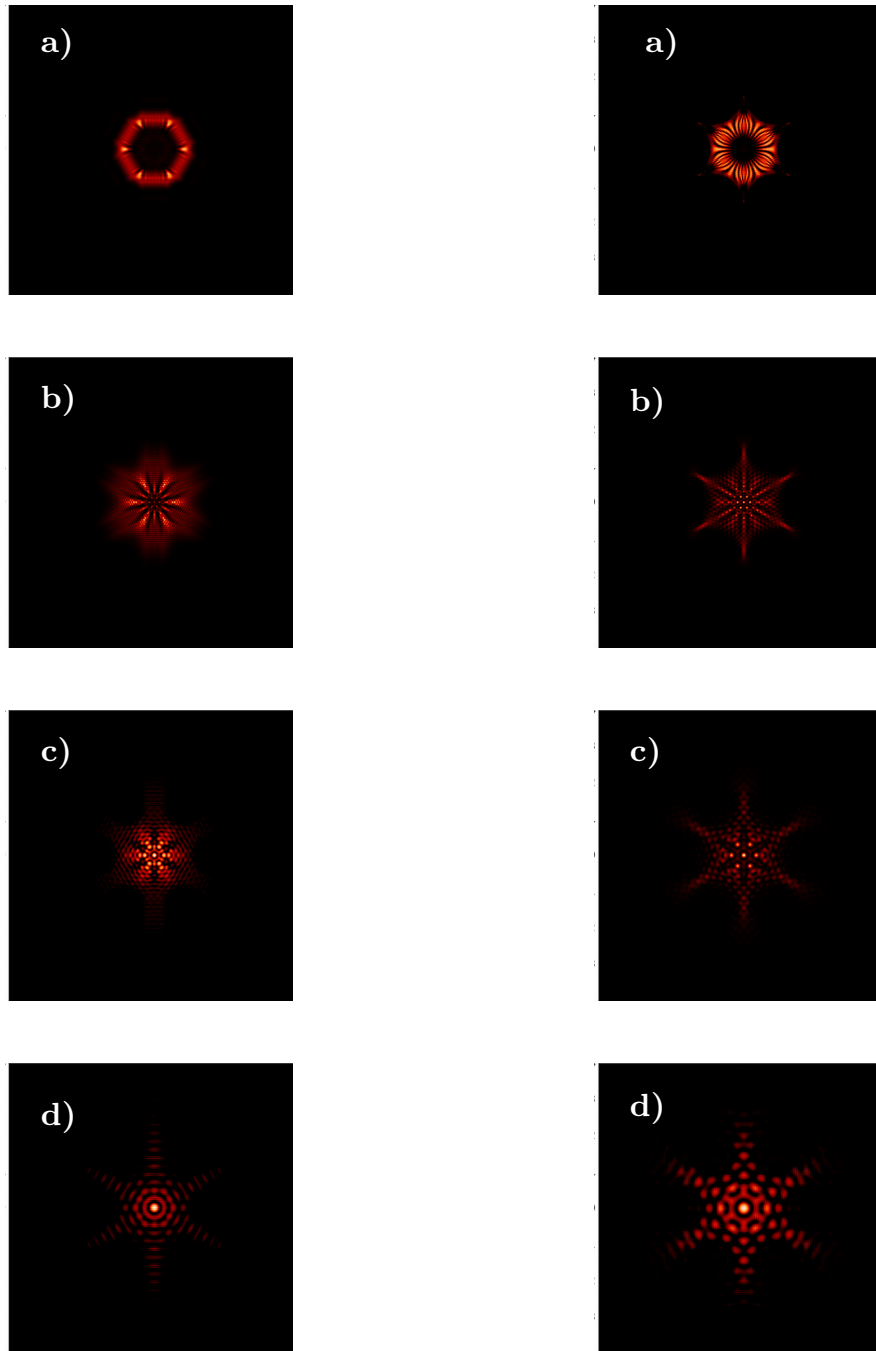


Figura 4.8.- Distribuciones generadas por una rendija de seis lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes simuladas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

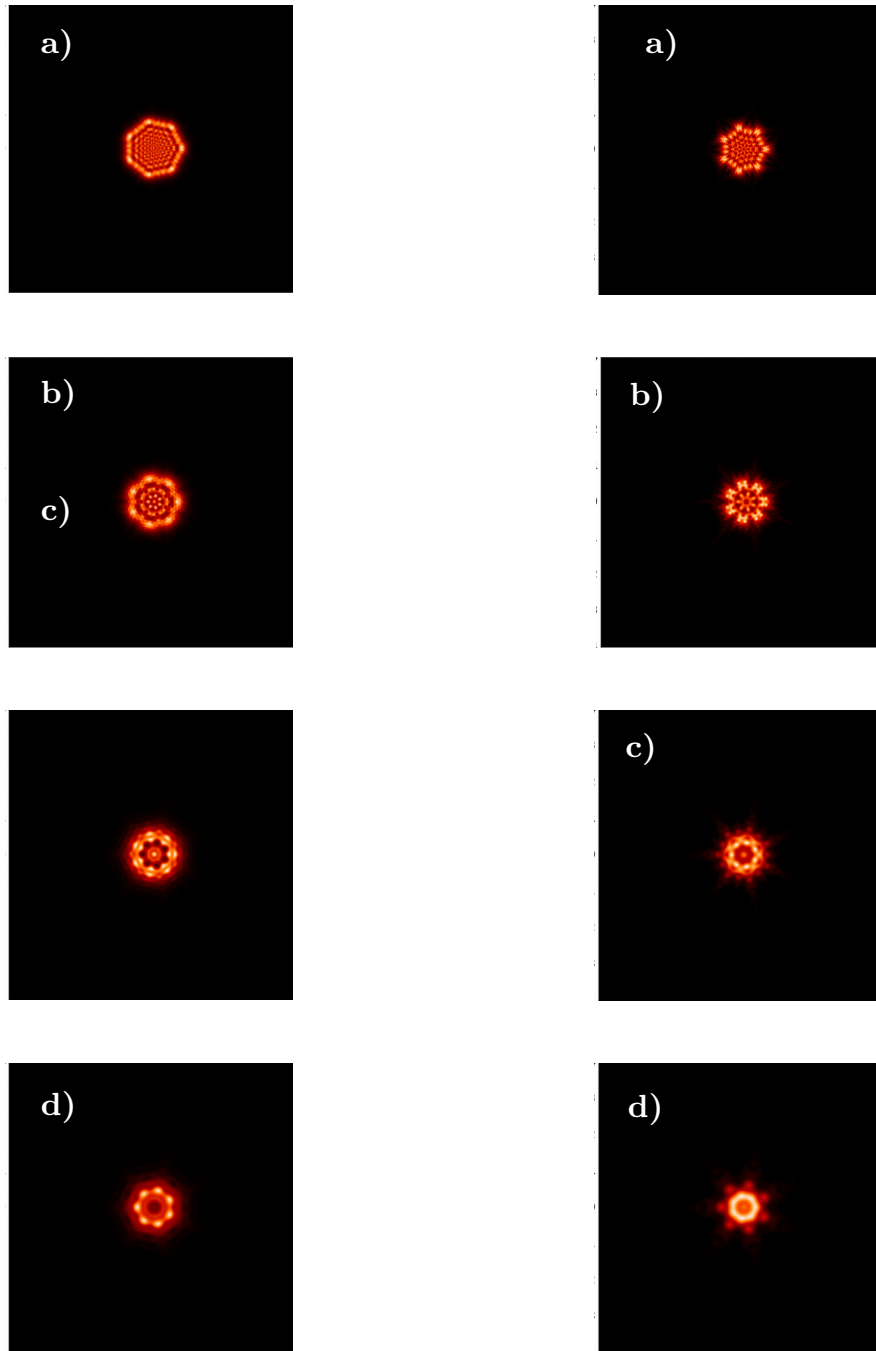


Figura 4.9.- Distribuciones generadas por una abertura de siete lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes simuladas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

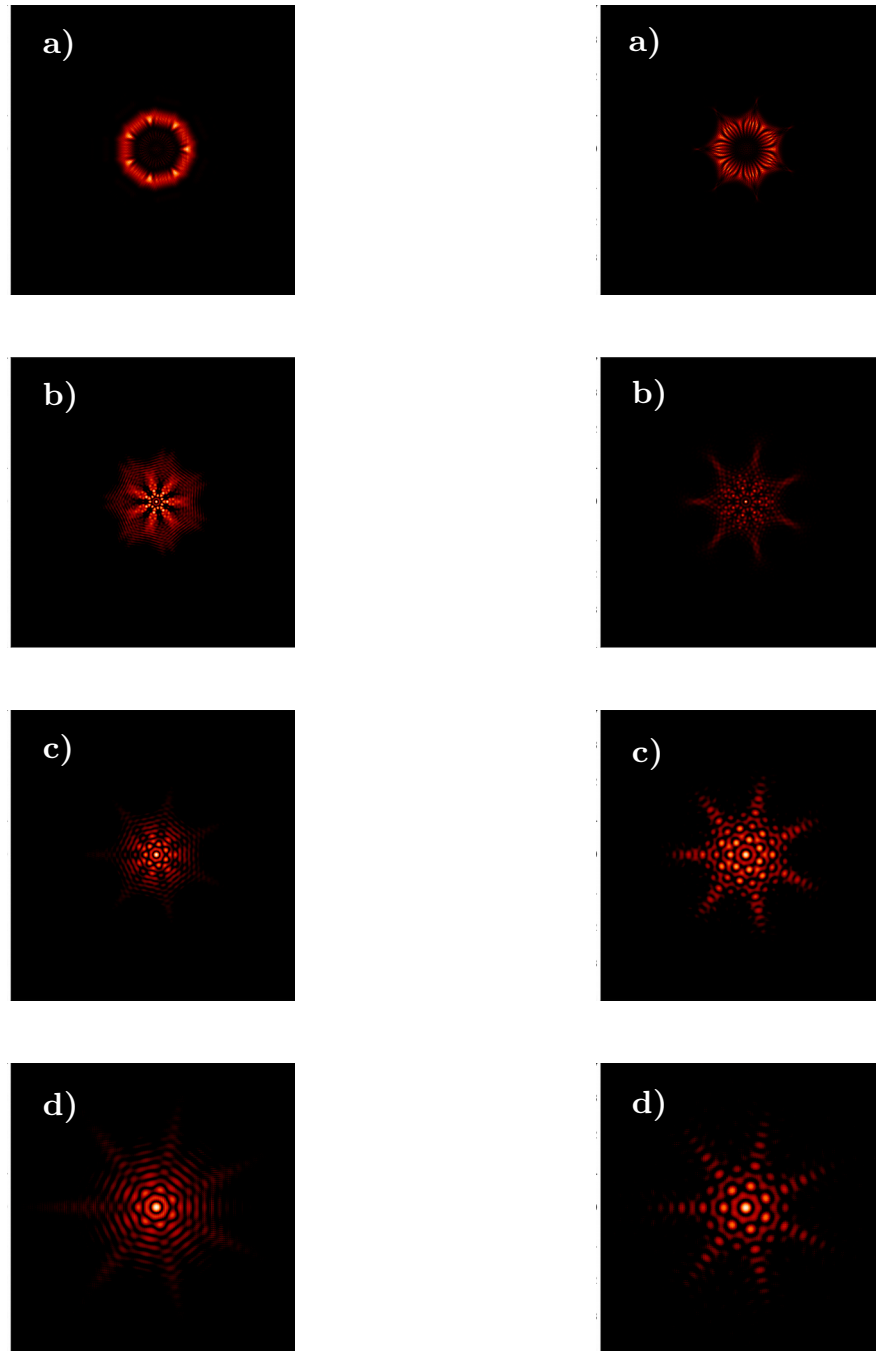


Figura 4.10.- Distribuciones generadas por una rendija de siete lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes simuladas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

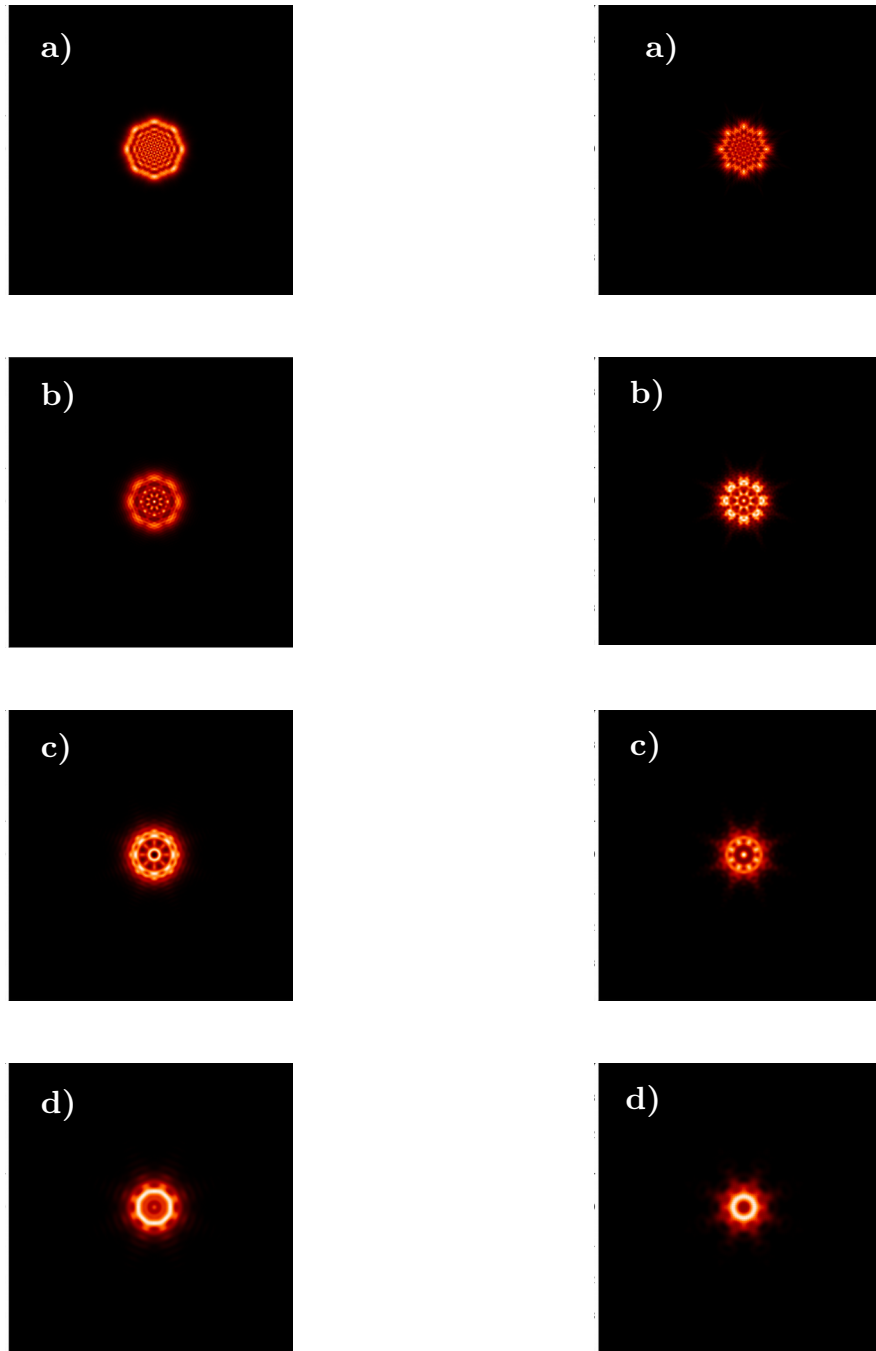


Figura 4.11.- Distribuciones generadas por una abertura de ocho lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes simuladas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

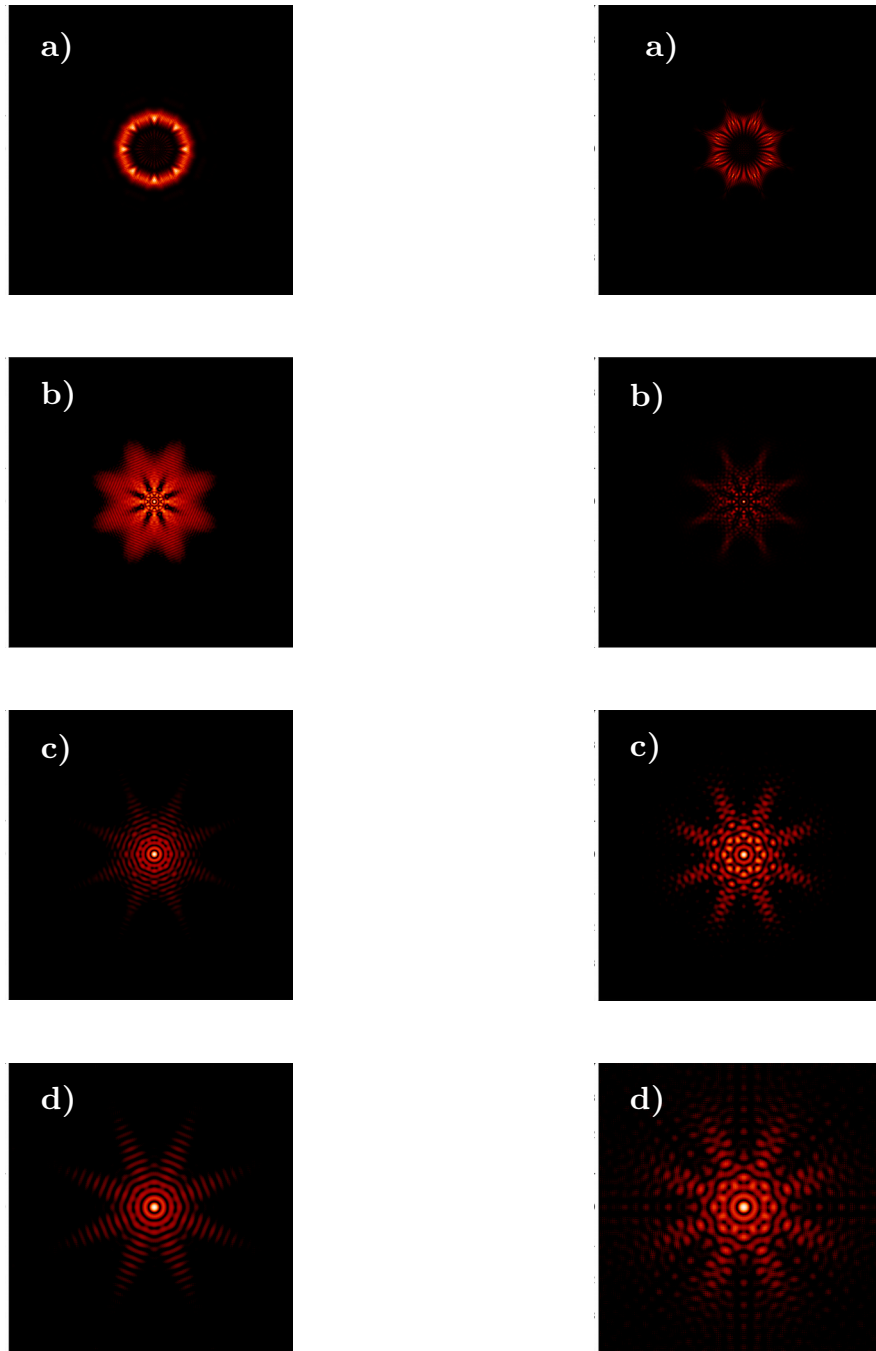


Figura 4.12.- Distribuciones generadas por una rendija de ocho lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes simuladas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

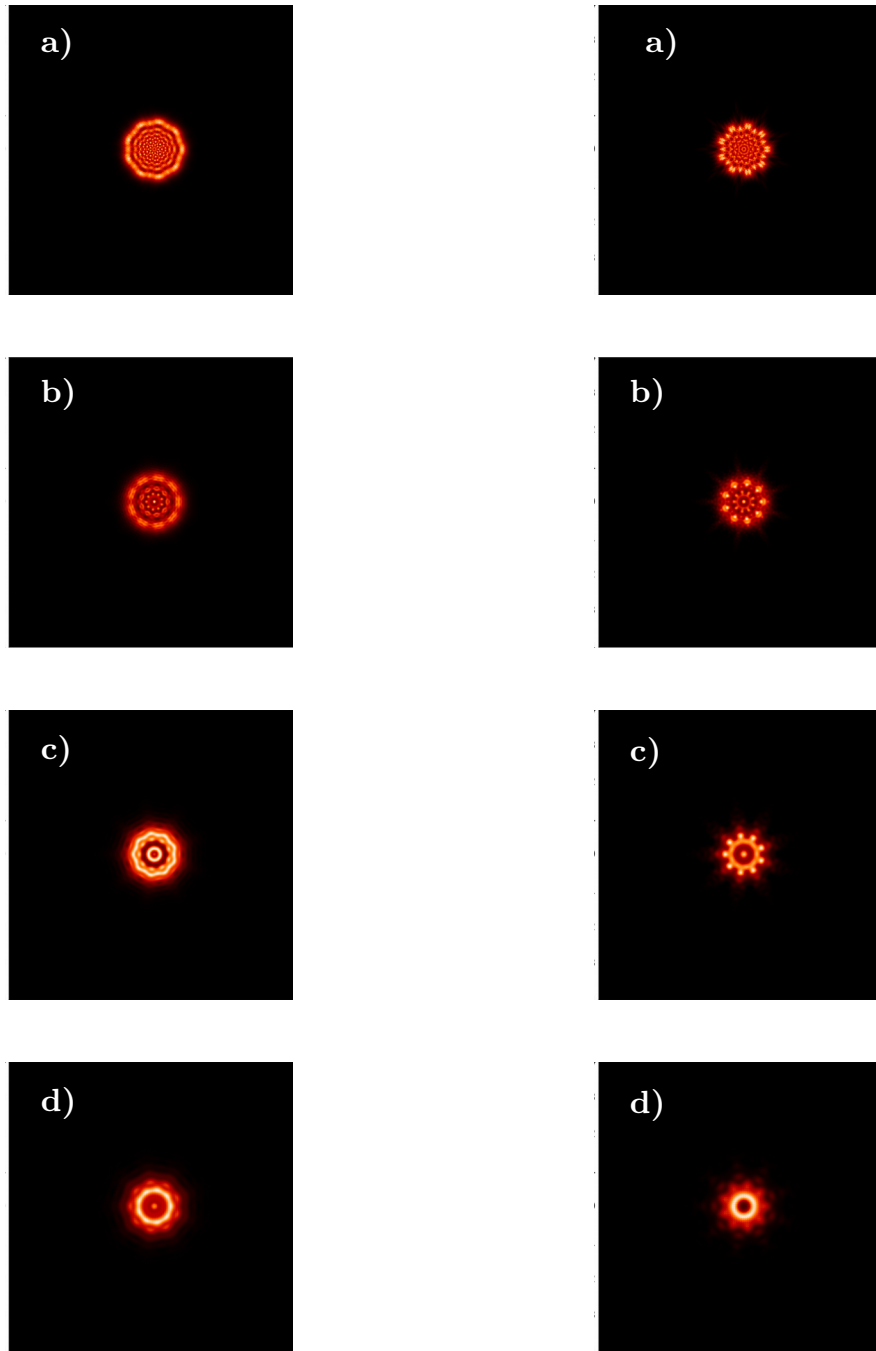


Figura 4.13.- Patrones de difracción generados por una abertura de nueve lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), propagados a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

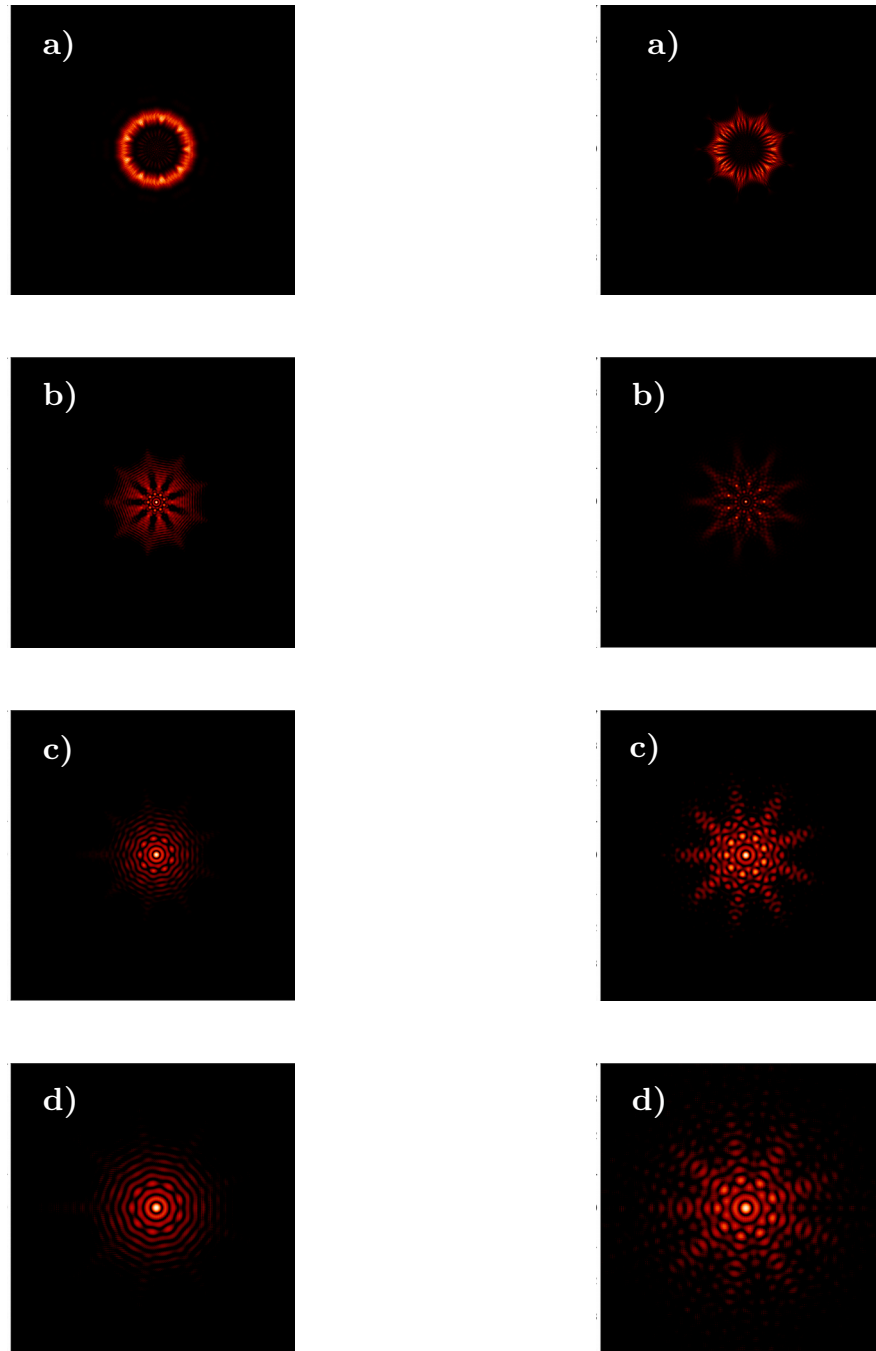


Figura 4.14.- Distribuciones generados por una rendija de nueve lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes simuladas a las distancias: a) $z=2\text{ cm}$, b) $z=5\text{ cm}$, c) $z=10\text{ cm}$ y d) $z=15\text{ cm}$.

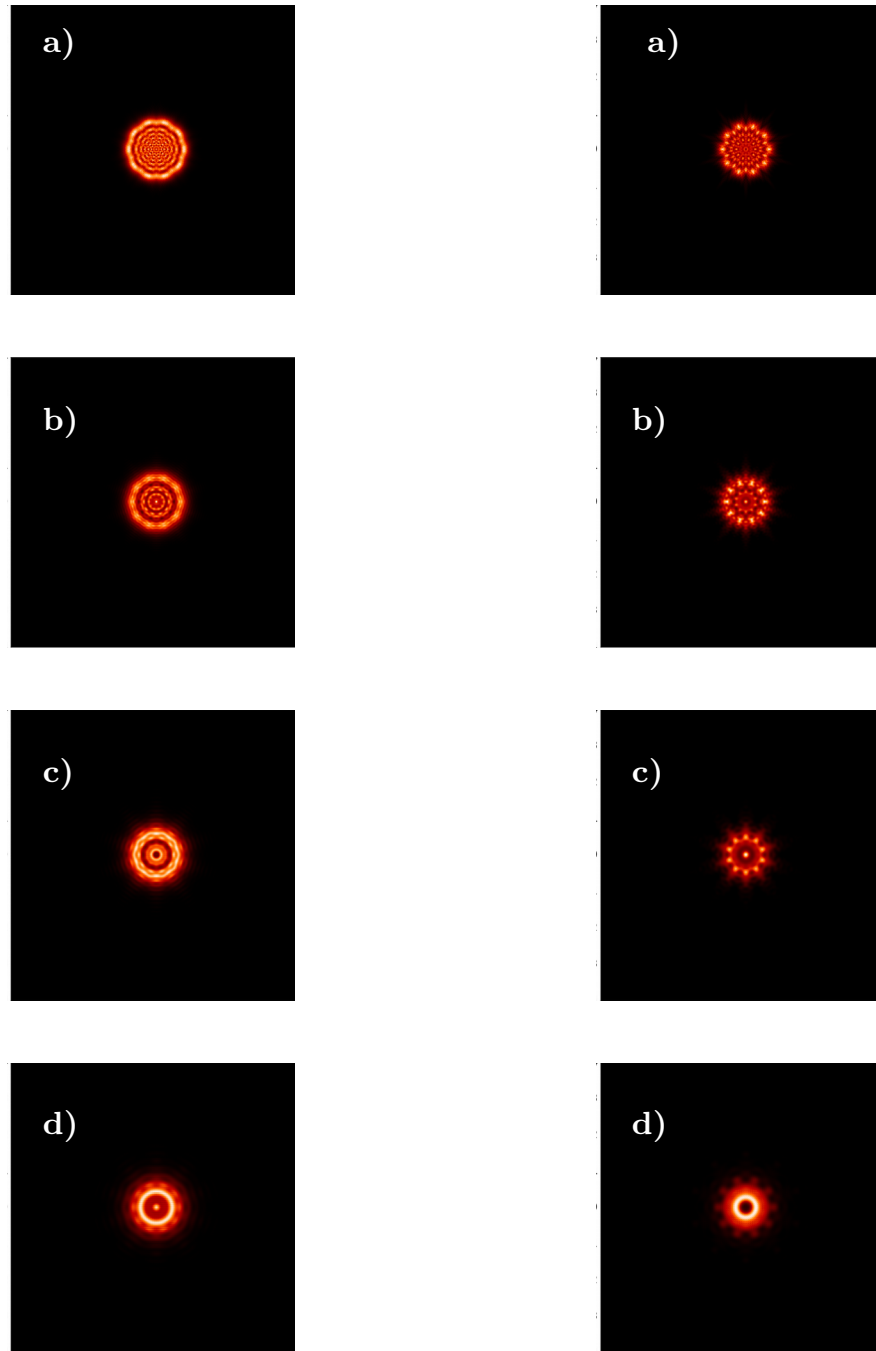


Figura 4.15.- Distribuciones generadas por una abertura de diez lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes simuladas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$.

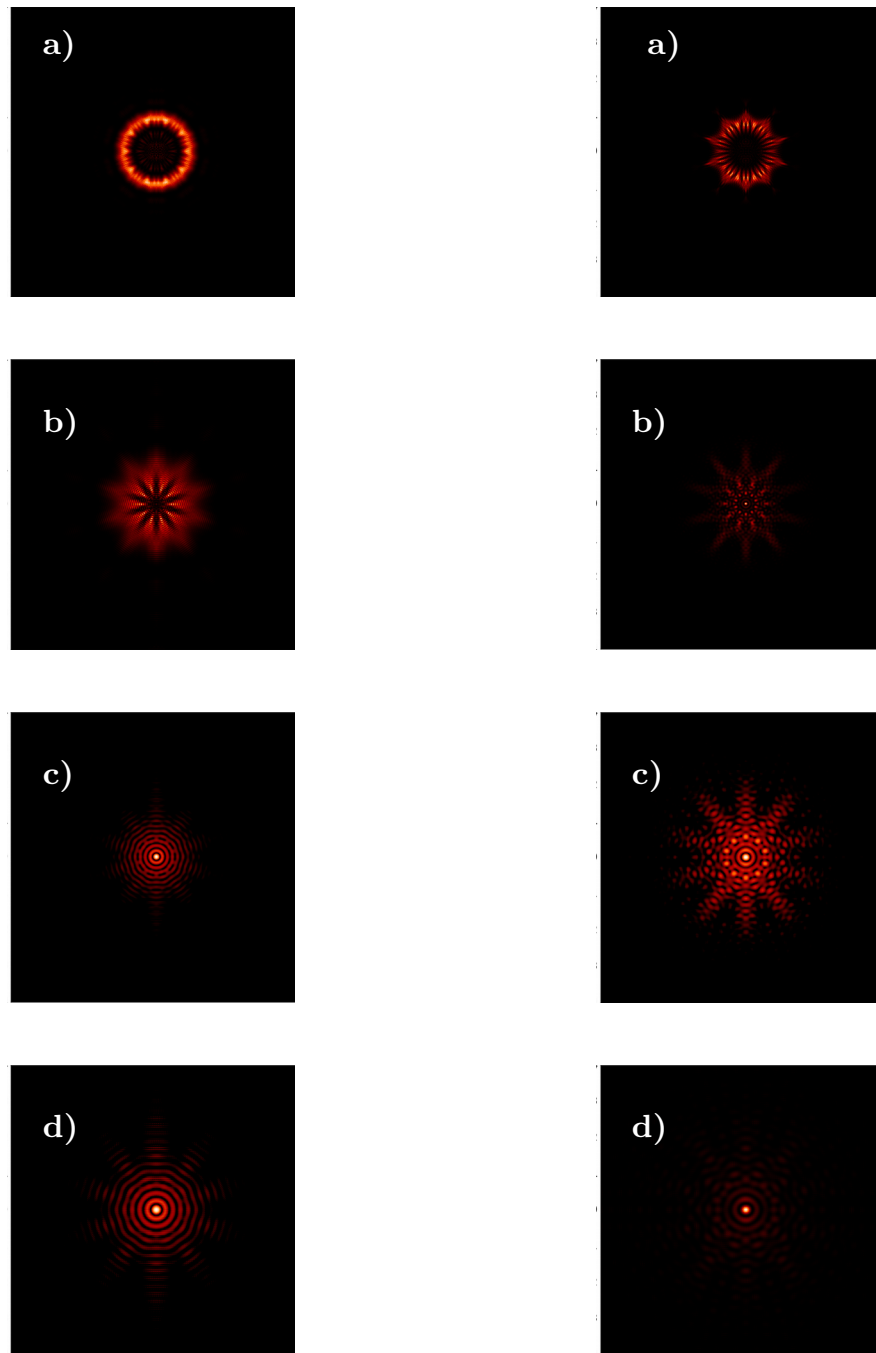


Figura 4.16.- Distribuciones generadas por una rendija de diez lados de tipo poligonal (columna izquierda) y de tipo hipocicloide (columna derecha), imágenes simuladas a las distancias: a) $z=2\text{cm}$, b) $z=5\text{cm}$, c) $z=10\text{cm}$ y d) $z=15\text{cm}$

Capítulo 4. Resultados Numéricos

4.2 Resultados Numéricos de la Evolución Espacial

Una vez que se ha presentado la evolución espacial de las distribuciones, obtenida de forma experimental y numérica, podemos dar paso a realizar una comparación entre los resultados obtenidos, con la finalidad de ver que de verdad la curvatura de las hipocicloides influye en la forma de las distribuciones que se generan, haciendo que éstas sean diferentes a las generadas por polígonos. Para lo anterior nos auxiliaremos de algunos perfiles centrales de intensidad, en los cuales observaremos de manera más clara las diferencias de las distribuciones. Es importante señalar que no se incluyen los perfiles centrales de *todos* los resultados presentados por cuestiones de espacio y para evitar ser repetitivos en las observaciones hechas en cada caso.

Dado que las distribuciones generadas por un cuadrado se encuentran en algunos libros[2,3,4] y tomando en cuenta que un rombo es un *cuadrado rotado*, comencemos comparando la evolución de las distribuciones generadas por un polígono de cuatro lados (rombo) y por una hipocicloide de cuatro cúspides (astroide); la Figura 4.17 muestra los perfiles centrales de intensidad, tomados de las distribuciones presentadas en la Figura 4.3, correspondientes a dicho caso.

Observemos que a una distancia de 2 cm los máximos de intensidad se encuentran en los puntos extremos de cada perfil y que en el caso de la hipocicloide éstos se hallan más alejados del centro, esto nos indica que hay un *factor de escala* distinto para cada geometría (poligonal o hipocicloide). Conforme aumentamos el número de lados-picos de nuestras aberturas notamos que son los extremos del perfil correspondiente al polígono los que se alejan más del centro, como se puede observar en la Figura 4.18, donde se presentan los perfiles tomados de las distribuciones mostradas en la Figura 4.11.

Considerando ahora los resultados obtenidos a una distancia de 5 cm notamos que en el centro del perfil, la distribución generada por el polígono tiene un máximo, mientras que la generada por la hipocicloide tiene un mínimo. Este comportamiento, de alternancia entre máximos y mínimos, se observa también al considerar un número mayor de lados-picos de la abertura, sin embargo, no ocurre

Capítulo 4. Resultados Numéricos

4.2 Resultados Numéricos de la Evolución Espacial

a la mismas distancias. Por ejemplo, para el caso de una abertura poligonal de 8 lados y una hipocicloide de 8 cúspides ésto se observa a una distancia de 10 cm, donde la distribución generada por la hipocicloide tiene un máximo en el centro y la generada por el polígono un mínimo. A una distancia mayor, 15 cm, observemos que ahora el centro en el caso de la hipocicloide es un mínimo mientras que el del polígono es un máximo (ver Figuras 4.18 ó 4.11).

Notemos también que conforme aumentamos la distancia de captura las hipocicloides generan cambios más notorios en sus distribuciones que los polígonos y que a una distancia de 15 cm las distribuciones se aproximan a las que se obtienen a *campo lejano*[12].

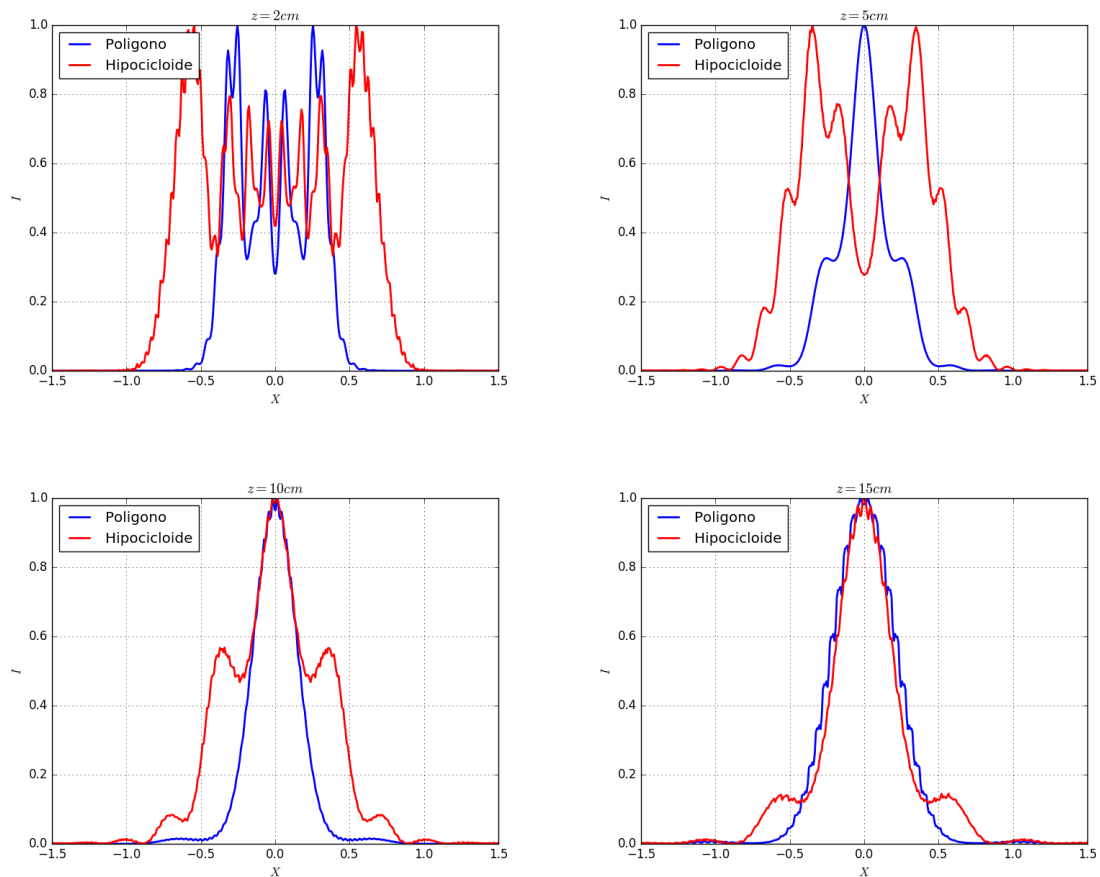


Figura 4.17.- Perfiles centrales de intensidad de las distribuciones generadas por una abertura poligonal de 4 lados y por una abertura hipocicloide de 4 cúspides.

Capítulo 4. Resultados Numéricos

4.2 Resultados Numéricos de la Evolución Espacial

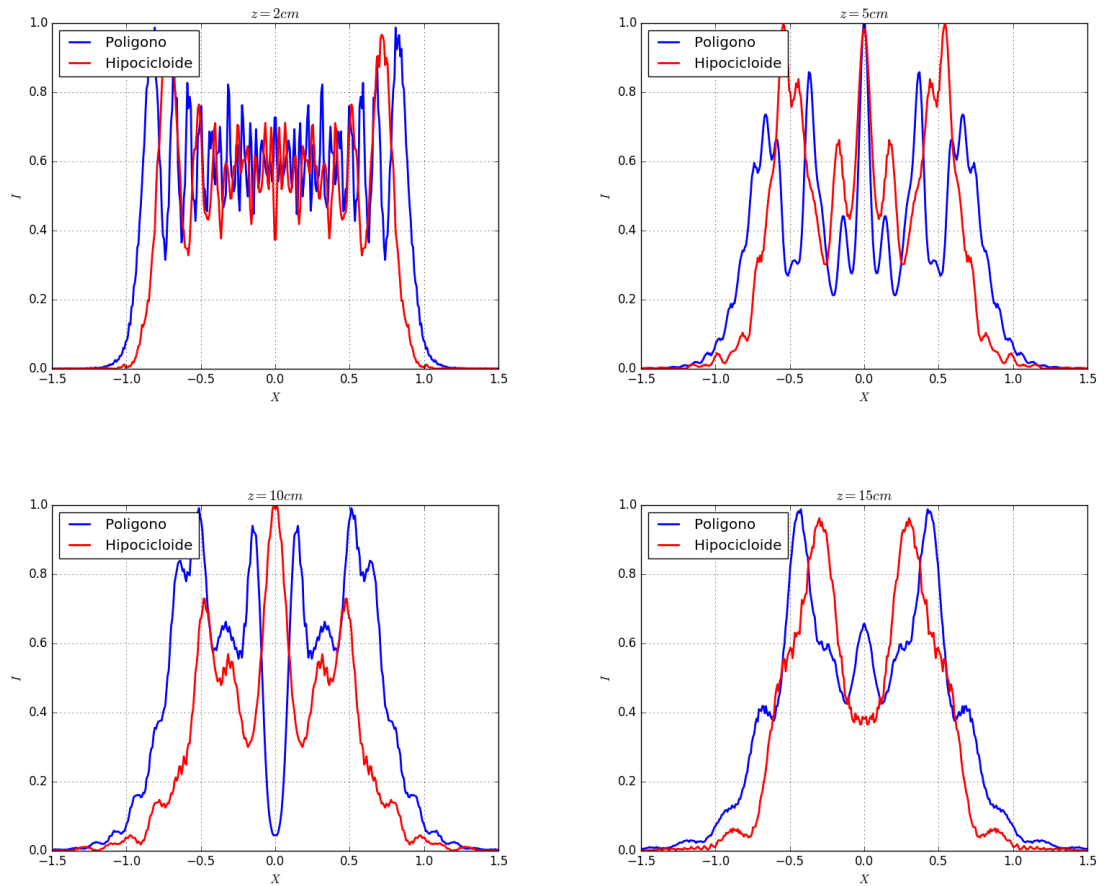


Figura 4.18.- Perfiles centrales de intensidad de las distribuciones generadas por una abertura poligonal de 8 lados y por una abertura hipocicloide de 8 cúspides.

Las Figuras 4.19 y 4.20 contienen los perfiles centrales de intensidad de las distribuciones generadas por rendijas de 4 y 8 lados-picos, respectivamente. Observemos que debido a que ahora la luz no pasa por toda la superficie de la figura las distribuciones presentan una “mejor definición”, lo cuál provoca que los perfiles se observen “saturados”, sobre todo al considerar distancias de 2 y 5 cm.

Capítulo 4. Resultados Numéricos

4.2 Resultados Numéricos de la Evolución Espacial

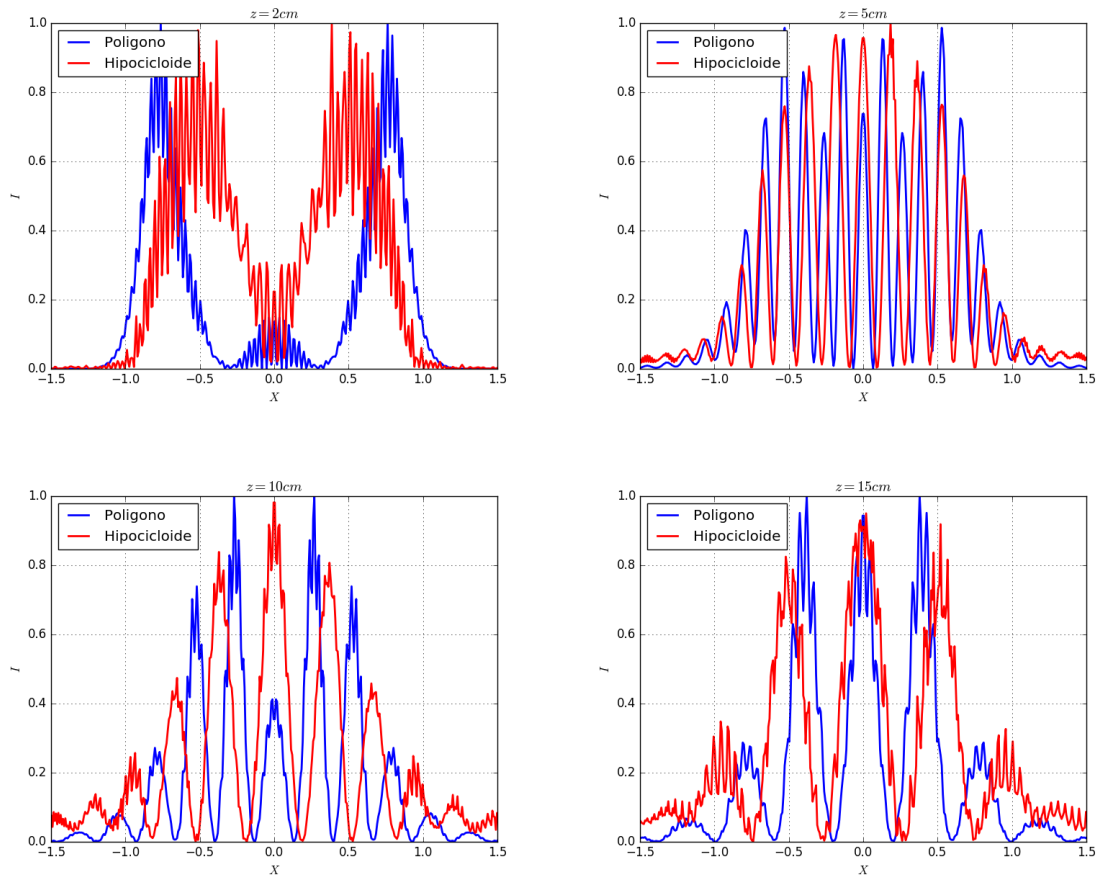


Figura 4.19.- Perfiles centrales de intensidad de las distribuciones generadas por una rendija poligonal de 4 lados y por una rendija hipocicloide de 4 cúspides.

Notemos que ahora no hay una alternancia en los centros de los perfiles, por ejemplo a una distancia de 5 cm tanto el perfil de la distribución del polígono de cuatro lados, como la de la hipocicloide de cuatro cúspides tienen un máximo (Figura 4.19) y este mismo comportamiento se observa para el resto de las distribuciones obtenidas.

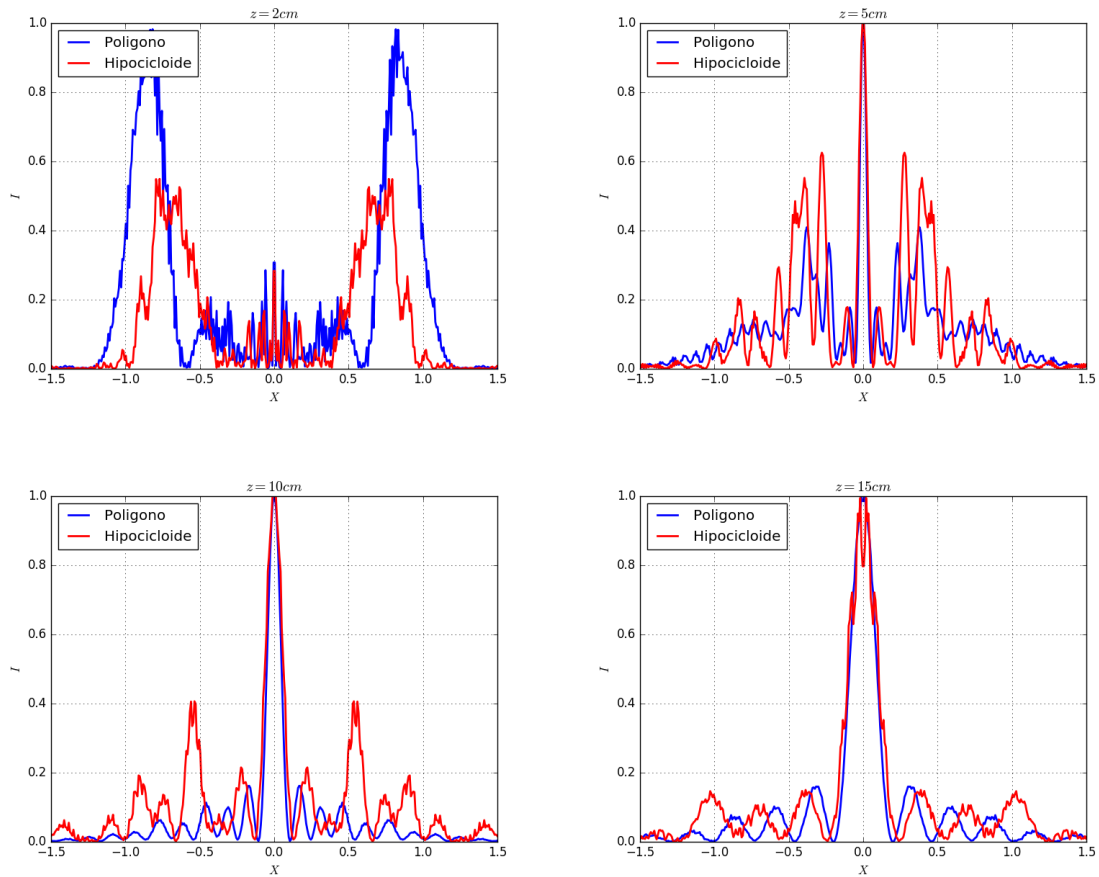


Figura 4.20.- Perfiles centrales de intensidad de las distribuciones generadas por una rendija poligonal de 8 lados y por una rendija hipocicloide de 8 cúspides.

En general, conforme aumentamos el número de lados o de picos de las rendijas, la mayor intensidad se concentra en el centro de la distribución, esto se observa un poco mejor en la figura anterior.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se obtuvo, de manera experimental y numérica, la evolución espacial de las distribuciones generadas por aberturas y rendijas de tipo poligonal e hipocicloide. En términos generales tanto las distribuciones experimentales como las numéricas coinciden. En el caso de las rendijas se observa que los resultados numéricos están “corridos” respecto de los experimentales, ésto puede deberse a dos razones: a una confusión al momento de colocar las imágenes de los resultados o a las dimensiones reales de las rendijas empleadas, ésto es natural si consideramos que no estamos seguros de que las impresiones de las mascarillas se realizaron respetando al 100% las dimensiones establecidas ya sea por error humano de la persona encargada o por la resolución de la máquina. Por desgracia, un error de este tipo influye en la normalización empleada en la parte numérica.

En cuanto a la forma de las distribuciones notamos cosas interesantes, principalmente que la mayor intensidad no se concentra siempre en el centro de la distribución y que ésta va cambiando de acuerdo con las distancias a las que se realiza la propagación; así, en algunos casos se observa mayor intensidad en los vértices o picos de las distribuciones y en otros en las zonas cercanas al centro e incluso en el centro de la distribución. Esto podría llegar a ser de utilidad para aplicaciones de óptica no lineal, donde se requiere una gran cantidad de intensidad en cierta región.

Algo muy interesante es que en el caso de las aberturas los centros de las distribuciones a partir de ciertas distancias comienzan a alternar de brillantes a oscuros y que este comportamiento no se presentó cuando se emplearon las rendijas.

Las distribuciones generadas por las aberturas y rendijas poligonales son completamente diferentes a las que se obtienen con aberturas y rendijas hipocicloides, lo cuál confirma que la curvatura de las hipocicloides influye bastante en la distribución. Sin embargo, no se observa que éstas lleguen primero que las distribuciones de los polígonos a la forma que se obtiene a campo lejano.

Bibliografía

- [1]. Okan K. Ersoy, “*Diffraction Fourier Optics and Imaging*”, Wiley-Interscience A John Wiley & Sons, Inc. Publication, (2007).
- [2]. E. Hecht, “*Optica*”, Pearson-Addison Wesley, (2000)
- [3]. J. W. Goodman, “*Introduction to Fourier Optics*”, McGraw-Hill Companies, Inc, (2000).
- [4]. R. D. Guenther, “*Modern Optics*”, Jhon Wiley & Sons, Inc., (1990).
- [5]. C. H. Lehman, “*Geometría Analítica*”, Editorial Limusa, (1999).
- [6]. P. K. Srivastava, “*Optics*”, CBS Publishers & Distributors, (2002).
- [7]. J. Komrska, “*Simple derivation of formulas for Fraunhofer diffraction at polygonal apertures*” J. Opt. Soc. Am./Vol.72,No.10/October 1982.
- [8]. G. Martinez-Niconoff, J. Muñoz-Lopez, J. Silva-Barranco, A. Carbajal-Dominguez, P. Martinez-Vara, “*Self-focusing Transmittances*”, June 1,2012/Vol. 37, No.11/OPTICS LETTERS.
- [9]. R. E. English Jr, “*Diffraction theory for polygonal apertures*”, the Optics University of Rochester, Rochester, New York (1988).
- [10]. Gonzalo Urcid and Alfonso Padilla, “*Far-field diffraction patterns of circular sectors and related apertures*”, 20 December 2005/Vol.44, No.36/ APPLIED OPTICS.
- [11] Fabian Shen and Anbo Wang, “*Fast-Fourier-transform based numerical integration method for the Rayleigh-Sommerfield diffraction formula*”, Applied Optics/ Vol. 45/No.6/(1102-1110)/2006

- [12] C. de Gante González, “*Obtención y comparación de patrones de difracción de aberturas Poligonales e hipocicloides*”, Tesis de Licenciatura en Física Aplicada, FCFM, BUAP, (2014)
- [13] L. A. Blas Sánchez, “*Estudio de la propagación de patrones de interferencia obtenidos a través de un interferómetro fractal*”, Tesis de Licenciatura en Ciencias de la Electrónica, FCE, BUAP, (2013)
- [14] J. Méndoza Hernández, “*Estudio de la generación y auto-reconstrucción de nuevos haces invariantes*”, Tesis de Maestría en Ciencias(Física Aplicada), FCFM, BUAP, (2011).
- [15] L. A. Fernández, “*Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales*”, Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria,(junio 2015).
- [16] D. Ramírez Martínez, “*Simulación Numérica de la Generación e Interacción de Solitones Ópticos Espaciales Unidimensionales en Medio Kerr*”, Tesis de Doctorado en Ciencias (Física Aplicada), FCFM, BUAP, (junio de 2012).
- [17] Bahaa E. A. Saleh, Malvin Carl Teich, “*Fundamentals of Photonics*”, Jhon Wiley & Sons, Inc. (1991).
- [18] D. Malacara, “*Óptica Básica*”, FCE, México, (2015).
- [19] J. R. Reitz, F. J. Milford, R. W. Christy, “*Fundamentos de la Teoría Electromagnética*”, Addison-Wesley Iberoamericana, (1986).
- [20] Shane Barwick, “*Accelerating regular polygon beams*”, OPTICS LETTERS/Vol. 35, No. 24/December 15, 2010.
- [21] Y. Zhang, F. Dong, K. Quian, Q. Zhang, W. Chu, X. Ma, X. Wu, “*Study on evolving phases of accelerating generalized polygon beams*”, OPTICS EXPRESS/7 Mar 2016/Vol. 24, No. 5.