BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA: UN ESTUDIO CON PROFESORES DE EDUCACIÓN MEDIO SUPERIOR

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. MODEMAR CAMPOS CANO

DIRECTOR DE TESIS
DR. ERIC FLORES MEDRANO

CO-DIRECTOR DE TESIS
DR. MÓNICA MONROY KUHN

PUEBLA, PUE. ABRIL 2021

A aquellos dos seres que me dieron la vida y un nombre tan peculiar: mi amada madre, Marcelina y mi amado padre, Modesto. ♥

Agradezco la confianza y apoyo financiero otorgado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) para la elaboración y culminación de mi trabajo comprendido en el período: Enero de 2019 a Diciembre de 2020.

N° de CVU: 958197

AGRADECIMIENTOS

Allá por los años 70's cuando tenía 11 años mi padre salió de su pueblo natal hacía la ciudad de Tlapa de Comonfort con la esperanza de superarse en la vida. Mi padre Modesto no hablaba español, su lengua materna era el mixteco. Estudió la primaria a la edad de 12 años, a pesar de las dificultades de no hablar el mismo idioma, él se superó y logró ingresar a la secundaria en Chilapa, Guerrero. A través de sus esfuerzos y dedicación aprendió a tocar la guitarra para apoyarse económicamente y gracias a las becas, él logró superar barreras de la gente que tiene poco en la vida.

Mi padre siempre me enseñó a ayudar a los que menos tienen, a compartir lo poco o mucho que uno tiene con los demás. Él siempre fue y será mi ejemplo, ayudó a la gente de su pueblo, creó escuelas y caminos en su pueblo Cahuatache. Era abogado de los que menos tenían, siempre levantaba la voz por sus paisanos, fue maestro, veterinario, músico. Fue de los fundadores junto a otros tres del mariachi en mi ciudad natal, enseñó música a muchos sin ninguna paga. Él amaba las películas chinas y japonesas, los mariscos, y un sinfín de cosas. Pero, sobre todo, él fue mi padre, mi maestro, mi compañero a lo largo de estos años. Siempre te llevaré en cada uno de mis triunfos, en mi corazón y en mi vida.

Una cuartilla o dos hojas jamás bastarán para resumir y agradecer a mis padres Modesto y Marcelina por el apoyo y la libertad que me dieron de elegir una hermosa ciencia: las Matemáticas. En cada uno de mis pasos se encuentran todas sus enseñanzas, desde la más pequeña hasta la más enorme. Que la vida me siga iluminando con su presencia.

También, quiero agradecer a mis hermanos: Cruz y Walker, con quienes he compartido muchos momentos de mi vida, momentos que han sido los mejores y que recuerdo siempre. Escribo unos renglones más para ti: Cruz, querido hermano mío. Eres una persona maravillosa, una de mis personas favoritas. Gracias por alentarme tantas veces con mis demostraciones y ejercicios, por inspirarme a superarme a mí misma, por estar en los buenos y malos momentos. Eres de esas mentes extraordinarias que nacen en la panza de alguien y cuando llegan deslumbran con su personalidad e inteligencia.

A mis hermanas, Oyuki, Mari y Luz por ser parte de mi vida y por brindarme tantos momentos de diversión y alegría. A mí preciosa, chistosa y hermosa, sobrina, Diana; eres y siempre serás un rayito de luz en crecimiento. Quiero escribirte más de lo que puedo expresar, Oyuki, gracias por quererme tal y como soy. Preciosas son tus manos que crean objetos tan perfectos para mis ojos. Te agradezco y te dedico cada uno de mis esfuerzos.

Agradezco a mi director de tesis, el doctor Eric Flores Medrano por todo el apoyo brindado en la elaboración de este trabajo, porque aparte de ser un excelente profesor fue una gran inspiración en la culminación de la maestría. Gracias por enseñarme tanto, por todas las clases donde tenía que ponerme a investigar y que al final sirvieron para conocer más y más del mundo enorme de la matemática educativa. Al profesor Gabriel Katún Montiel y a las profesoras Mónica Monroy Kuhn, María Araceli Juárez Ramírez y Estela de Lourdes Juárez Ruíz por formar parte de mi jurado, por el tiempo dedicado a la revisión y observaciones realizadas a mi tesis que finalmente concluyeron en mejorar la versión final. Agradezco mucho a la doctoro Araceli porque a lo largo de los años que la he conocido siempre me ha inspirado por todos sus saberes matemáticos.
También, agradezco a la profesora Estela por todas esas bellas clases llenas de discusión y enseñanza, por ayudarnos a todos y todas al inicio de nuestras tesis.

Amado mío: doy gracias a tus padres, a la vida, al momento exacto en que apareciste. Tú eres luminoso, tan brillante como la Luna, tienes mucho de lo que amo y me hace amarte en tiempo y destiempo. Gracias a la noche, el día, a los árboles, el viento, todo lo que condujo nuestro encuentro. Que el amor que nació en mi al mirar tus ojos dulces se mantenga eternamente, tu presencia es luz y vida.

Finalmente, agradezco a todos esos libros que se cruzaron en mi camino para llevarme a un camino infinito donde no hay dirección, orientación y un solo horizonte. Gracias, porque sin ustedes jamás habría elegido a las Matemáticas.

Contenido

Índice de cuadros

Índice de figuras

Índice de Tablas

Resumen

En este estudio proponemos un sistema de categorías para las prácticas matemáticas de definir y demostrar. Nuestro trabajo se apoyó en una amplia revisión de literatura, corroboración con matemáticos profesionales y trabajo con profesores de matemáticas que nos permitieron obtener información acerca de las prácticas.

Nos basamos en el modelo denominado *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK, Carrillo, et al., 2018), el cual considera un sistema de subdominios y categorías acerca del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En particular, consideramos el subdominio del Conocimiento de la Práctica Matemática ya que carece de una propuesta sólida de categorías. Entre las propuestas para lograr dicha categorización, hemos tomado una en la que cada práctica matemática detectada conforme una categoría.

En este trabajo presentamos una caracterización teórica de las prácticas de demostrar y definir por medio de un análisis documental, que, además, fue validada por doctores en Ciencias Matemáticas que se dedican a la investigación en distintas áreas de la matemática. También, se consideró un estudio de caso donde el estudio de caso el profesor de matemáticas. Se trabajó con los profesores en dos sesiones para discutir y comparar respuestas respecto a las actividades referentes a la propuesta de caracterización. Las reuniones fueron grabadas con audio y video. Además, se utilizó un enfoque cualitativo con un paradigma interpretativo. Los datos fueron analizados bajo el acercamiento *Top Down*, que nos permitió visualizar y contrastar nuestro sistema de categorías.

Abstract

In this study, we propose a categories system for the mathematics practices of definition and demonstration. Our work was supported on a wide literature revision, corroborated with professional mathematicians and with mathematics teachers who allowed us to obtain information from their practice.

Our work is based on the *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK, Carillo, et al, 2018) which considers a subdomains system and the specialized knowledge of the mathematics teacher. In particular, we considerate the mathematics practice subdomain which lacks a solid categorization proposal. Among the propositions to get a categorization, we have picked one in which each mathematics practice detected conforms a category.

In this work, we present a theoretical categorization to the practices to demonstrate and to define by a documental analysis that also, was validated by mathematics PhD who research different mathematics areas. Also, a case study was considered where the case was the mathematics teacher. We worked with the teachers on two sessions to argue and compare answers related to the referred activities proposed for the categorizations. The meetings were recorded with audio and video. We also used a qualitative focus with an interpretative paradigm. The data was analysed under the *Top Down* approach, which allowed as to visualize and contrast our category system.

Capítulo 1. Introducción

En SEP (2017) se menciona que la labor del docente es fundamental para que los estudiantes aprendan los diferentes conocimientos, habilidades y valores planteados. Además, que dichos aprendizajes trasciendan incluso los obstáculos materiales y de rezago que los estudiantes deben afrontar.

El conocimiento que requiere un profesor de matemáticas para realizar su labor tiene distintas componentes. Generalmente al referirnos a dicho conocimiento, nos remetimos a una componente disciplinar y una componente didáctico-disciplinar, los cuales tienen sus bases en el trabajo de Shulman (1986). Algunos autores han retomado estas ideas y han establecido bloques internos con la finalidad de realizar investigaciones con mayor precisión analítica (e.g. Ball, Thames y Phelps, 2008). En particular, el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) se ha desarrollado y constituido a partir de diversas investigaciones, dando como resultado un sistema de subdominios y categorías al interior de cada dominio de conocimiento (Flores-Medrano, Escudero y Aguilar, 2013).

El subdominio *Conocimiento de la Práctica Matemática* forma parte del MTSK (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), lo definen como el conocimiento de las formas de proceder y producir en matemáticas. Incluye también el conocimiento de las formas de conocer y crear en matemáticas, el conocimiento de aspectos de la comunicación matemática, saber qué es definir y cómo usar definiciones. Flores-Medrano (2015) destaca que demostrar, ejemplificar, definir y usar heurísticos son las prácticas matemáticas más comunes entre los profesores de matemáticas y que es posible estudiar el conocimiento que estos tienen sobre dichas prácticas una vez que se identifiquen características concretas que permitan analizarlas puntualmente. Sin embargo, hasta el momento no existe un sistema de categorías internas al subdominio de la práctica matemática que permita realizar análisis finos, como sí lo hay en el resto de los subdominios.

1.1 Preguntas de investigación

Por lo expuesto anteriormente y tomando en cuenta la carencia de un sistema de categorías para el Conocimiento de la Práctica Matemática y la necesidad de categorizar este subdominio para poder analizar el conocimiento del profesor, planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué conocimientos de las prácticas matemáticas manifiesta el profesor de matemáticas del nivel medio superior?

Para abordar dicha pregunta requerimos de la construcción y prueba de un sistema de categorías para el subdominio del Conocimiento de la Práctica Matemática. La construcción fue realizada por medio de literatura especializada en las prácticas de definir y demostrar, el sistema de categorías fue puesto a prueba realizando sesiones de trabajo con profesores de nivel medio superior para poder determinar su eficacia.

1.2 Objetivos de investigación

Para enfrentarnos a nuestro problema de investigación, nos planteamos el siguiente objetivo general.

Construir y poner a prueba un sistema de categorías para el subdominio del Conocimiento de la Práctica Matemática con profesores de nivel medio superior para poder determinar su eficacia.

El logro del objetivo general lo pensamos alcanzar a partir de los siguientes objetivos particulares:

Caracterizar las prácticas matemáticas de demostrar y definir.

Contrastar el sistema de categorías con la evidencia empírica acerca de los conocimientos presentados por el profesor de nivel medio superior.

1.4 Justificación

Se encontraron pocos trabajos acerca de propuestas de categorización del *Conocimiento de la Práctica Matemática*, el cual se refiere al conocimiento acerca de qué y cómo hacer matemáticas. Sin embargo, este subdominio no está definitivamente categorizado. Por consiguiente, no se tiene un marco consistente para analizar el conocimiento del profesor acerca de este subdominio.

Este trabajo tiene dos líneas, una teórica acerca de las cualidades o características que tienen estas prácticas matemáticas. Por otro lado, una línea empírica acerca de la importancia de estudiar que un profesor de matemáticas tenga conocimiento sobre estas prácticas nos ayudará a establecer relaciones entre el conocimiento que maneja un profesor a la hora de dar definiciones y demostraciones que presenta en el salón de clase. Se presenta una propuesta de categorización para las prácticas de demostrar y definir. Esta propuesta con elementos característicos acerca del KPM puede contribuir con futuras investigaciones cuyo interés sea acerca del conocimiento del profesor de matemáticas sobre el quehacer matemático.

Este trabajo presenta características de las prácticas matemáticas definir y demostrar vistas como objeto matemático. Mostramos los instrumentos que fueron resultados de la investigación, la tabla de categorías, el instrumento para recopilación de datos, así como el formato de validación. La categorización que se presenta puede colaborar con futuras investigaciones cuyo interés sea constituir el KPM con lo referente al conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

1.5 Estructura del trabajo

La presente investigación se divide en distintos capítulos que reflejan cómo se realizó el trabajo de investigación.

En el capítulo 2 presentamos los fundamentos teóricos que sustentan esta tesis. Se exponen aportes de distintos autores que exponen la naturaleza del conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Iniciando con aportes de Shulman (1986) y brevemente el modelo de Ball, et al. (2008), los cuales realizaron un refinamiento para el CCE. Enseguida presentamos el modelo MTSK describiendo sus componentes y particularmente el subdominio del KPM, así como las características que se encontraron en la literatura especializada acerca de las prácticas de demostrar y definir.

Además, presentamos la propuesta del sistema de categorías de estas prácticas que servirán para la conformación del modelo MTSK. Este sistema servirá como herramienta de análisis de datos en esta investigación.

En el Capítulo 3 se describe el diseño metodológico que sustenta la investigación. Se menciona el porqué de la elección de un paradigma interpretativo como el que más se adecua a esta tesis y el estudio de caso instrumental (Stake, 1995). Se describen las características del tipo de investigación al que nos adscribimos, los instrumentos de la recogida de datos y las especificaciones de los informantes.

En el Capítulo 4, se describe la perspectiva metodológica bajo la cual se diseña el estudio, la metodología Top-Down que nos permite alcanzar los objetivos de investigación. Se presenta el análisis de información que se realizó con el sistema de categorías que proponemos. Hemos dividido el análisis para la práctica de demostrar y para la práctica de definir.

Finalmente, se presentan las conclusiones obtenidas a lo largo del estudio sustentado en la investigación y análisis realizados acerca del *Conocimiento de la Práctica Matemática* (KPM) del modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK).

Capítulo 2. Marco teórico

En este capítulo se presentan las bases teóricas que nos permiten definir las prácticas matemáticas, demostrar y definir. De esta manera damos sustento a la caracterización de estas prácticas. Desarrollamos la literatura especializada de cada práctica con la intención de obtener características. Finalmente, concluimos este capítulo con una síntesis para hacer la lectura más ligera y comprensible, de esta manera sintetizar los subdominios y posibles descriptores para las prácticas de definir y demostrar.

Nos enfocamos en el modelo *Matematics Teacher's Specialised* Knowledge (Carrillo et al., 2018), principal contribución teórica desarrollada para modelar el conocimiento que usa y requiere el profesor de matemáticas en su labor docente. Este modelo es un medio para comprender el conocimiento del profesor de matemáticas, se divide en siete subdominios cada uno con sus respectivas características y subcategorías.

2.1 Antecedentes del *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK)

Desde hace varios años y en la actualidad se han realizado estudios para comprender los elementos que intervienen en la práctica y desarrollo profesional del profesor (e.g. Climent et al., 2013; Wilson et al., 1987). Trabajos como los de Schön (1983) y Shulman (1986) se consideran inicios y orientación para la investigación sobre diversos aspectos del profesor de matemáticas.

Shulman (1986) inspirado en investigar cuáles eran los conocimientos necesarios en pedagogía y contenido, si se mantiene una división de estos, cómo mejorar la adquisición y desarrollo del conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico propuso tres categorías para el conocimiento del contenido: *Conocimiento del Contenido de la Materia* (el conocimiento de la materia en sí misma, su estructura y organización disciplinar); C*onocimiento Didáctico del Contenido* (incluye formas más útiles de representación de las ideas centrales de una materia, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones; es decir, las formas de representar y formular el tema que lo hace comprensible para los demás, las concepciones y preconceptos que los estudiantes de diferentes edades y procedencias traen consigo al aprendizaje de los temas).

Finalmente, el *Conocimiento Curricular* (el conocimiento del plan de estudios que está representado por los programas diseñados para la enseñanza de materias en un cierto nivel, el conjunto de características que sirven como indicaciones para el uso de un material del programa en particular en circunstancias específicas). Posteriormente, Shulman fue agregando dominios a las categorías anteriormente planteadas, pero esta propuesta no es específica para el área de matemáticas.

Para el estudio de los elementos de conocimiento del profesor de matemáticas se han propuesto modelos analíticos que describen algún aspecto de dicho conocimiento. El modelo *Mathematical Knowledge for Teaching*- MKT (Ball et al., 2008) persigue responder cuál es el conocimiento que requiere el profesor de matemáticas para llevar a cabo su labor, qué tipos de tareas promueven en los profesores un rico conocimiento matemático para la enseñanza (Susuka et al., 2009) y qué elementos conforman una instrucción de calidad (*Learning Mathematics for Teaching Project*, 2011). Estos autores proponen que el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* comprende dos dominios, el *Conocimiento de la Matemática Escolar* y el *Conocimiento Didáctico del Contenido*.

El *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* está constituido por tres subdominios: *el Conocimiento Común del Contenido* que se refiere al conocimiento disciplinar del área de matemáticas, dominio de contenidos matemáticos que debe enseñar, incluye reconocer las respuestas incorrectas de los alumnos, definiciones inexactas en los libros; *el Conocimiento del Horizonte Matemático* que incluye el conocimiento de matemáticas adicionales que un profesor debe conocer para comprender la estructura en donde está insertado lo que va a enseñar y pueda tener ideas que aclaren el sentido.

Finalmente, el *Conocimiento Especializado del Contenido* que habla acerca del conocimiento disciplinar especializado en las necesidades de la enseñanza, como disponer de variedad de representaciones de las ideas matemáticas que se enseñan, definiciones precisas y correctas, de comprender procedimientos originales o poco usuales.

El dominio *Conocimiento Didáctico del Contenido* también está compuesto por tres subdominios: *Conocimiento del Contenido y los Alumnos,* este conocimiento se refiere a la forma en que los alumnos aprenden ciertos temas, sus confusiones, errores frecuentes, respuestas que tienen a tareas comunes, las representaciones que les resultan más naturales ante ciertos temas; *Conocimiento del Contenido y la Enseñanza* que se refiere a las teorías educativas en las que se puede apoyar el profesor para la enseñanza de contenidos específicos; por último, el *Conocimiento Curricular* que habla acerca de la estructura de contenidos de la matemática escolar, sus relaciones antes y después de alguna materia en un cierto nivel.

De acuerdo con sus autores, uno de los constructos que es el de mayor relevancia en el MKT es el *Conocimiento Especializado del Contenido* (*Specialized Content Knowledge*) con el cual exponen la consideración de un conocimiento puramente matemático que es exclusivo del profesor de matemáticas.

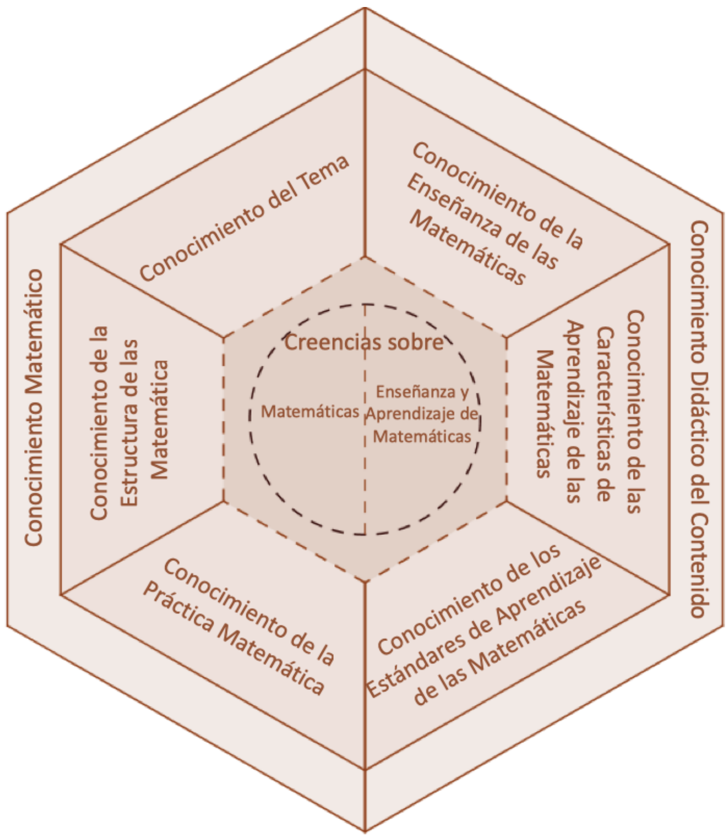
Para atender algunas dificultades de delimitación entre los subdominios del MKT, sobre todo las referentes al Conocimiento Especializado del Contenido (Flores et al, 2013) y las de carácter epistemológico de las evidencias para elementos de conocimiento (Carrillo et al., 2013), en los últimos años ha desarrollado un modelo analítico de base teórica y empírica llamado *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK). Este modelo considera que la especialización en el conocimiento del profesor de matemáticas es un conjunto de elementos normados por el contenido matemático y que sólo tienen sentido para la figura del profesor (Escudero et al., 2013).

2.2. El modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK)

De los diversos modelos que existen para modelar el conocimiento del profesor, en esta investigación utilizamos el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK, Figura 1) el cual modela el conocimiento del profesor de matemáticas que utiliza, tiene y requiere en su labor docente. Carrillo, et al. (2018) menciona que este modelo considera el conocimiento especializado del profesor de manera integral. Así proponen este modelo centrado en el conocimiento específico del profesor de matemáticas, el cual mantiene la separación que hace Shulman (1986) en dos dominios de conocimiento (*Conocimiento Matemático* y *Conocimiento Didáctico del Contenido*). Estos dos dominios constan de tres subdominios, a su vez los subdominios presentan categorías internas que permiten establecer posibles relaciones y repercusiones entre los distintos tipos de conocimiento.

Figura 1

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)



Resaltamos que este modelo no prescribe lo que el profesor de matemáticas debería usar en su labor docente. Tampoco que prescriba lo que requiere el profesor, sino que analiza, interpreta, describe y categoriza el conocimiento del profesor. El MTSK permite modelar el conocimiento disciplinar del conocimiento profesional del profesor de matemáticas (Escudero, 2015).

La forma en que se divide el dominio del *Conocimiento Matemático* es de las principales aportaciones del MTSK (Flores-Medrano, 2015). Además, este modelo considera de manera explícita elementos de la Educación Matemática como una disciplina científica y la consideración de las concepciones del profesor acerca de las matemáticas, de la manera en que se enseña y se aprende.

A continuación, detallamos cada subdominio del modelo MTSK. Comenzamos con el *Conocimiento Didáctico del Contenido* (PCK[1]), que se divide en tres subdominios:

*Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (*KFLM*)*: se refiere al conocimiento de cómo aprenden los estudiantes los contenidos matemáticos, a conocer los modos habituales de razonamiento de los alumnos en ciertos contenidos, conocer las dificultades que presentan, los aspectos que resultan más comprensibles, así como los temas que les resultan más y menos atractivos. También, se incluyen conocer el lenguaje habitual que utilizan los estudiantes con relación al concepto que se esté viendo en clase y conocimiento de teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático.

*Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (*KMT*)*: se considera el conocimiento que tiene el profesor acerca de los modos de presentar contenido y el potencial de éste para la instrucción, conocimiento de ejemplos adecuados para los contenidos y la potencialidad de los recursos y materiales didácticos en la actividad matemática.

*Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (*KMLS*)*: considera el conocimiento que tiene el profesor sobre lo que espera que el estudiante aprenda en un nivel escolar, así como secuenciaciones del contenido y las razones que lo sustentan. También, se refiere al conocimiento sobre la profundidad con la que se debe abordar un contenido matemático en un determinado ciclo escolar.

Ahora detallaremos los subdominios del C*onocimiento Matemático* que lo constituyen tres subdominios.

*Conocimiento de los temas (*KoT*)*: se refiere al conocimiento que tiene el profesor sobre los contenidos matemáticos escolares. Incluye el conocimiento de la matemática como disciplina

[1] Todas las siglas de los dominios y subdominios se refieren a su nombre en inglés.

y la matemática escolar. Que el profesor conozca el qué y el porqué de los contenidos que enseña. Además, la forma en la que los contenidos deben ser manejados y trabajados por el profesor de matemáticas.

*Conocimiento de la estructura matemática (*KSM*)*: Conocimiento acerca de las conexiones interconceptuales y conocimientos avanzados y elementales con respecto al contenido que permiten al profesor trabajar la matemática de manera integral y estructurada. También, se incluye el conocimiento de ideas principales de distintos contenidos y de las relaciones de distintos temas y relaciones dadas por simplificación o complejización del tema.

*Conocimiento de la práctica matemática (*KPM*)*: se refiere al conocimiento del profesor sobre las formas de proceder en matemáticas para llegar a resultados, del razonamiento matemático y sus tipos. También, la manera en que se genera conocimiento en matemáticas, cómo se argumenta, razona y generaliza. Conocer la diferencia entre una demostración, una comprobación, el valor en ésta de los ejemplos y distintos tipos de demostración. En el siguiente apartado extenderemos más este subdominio que es en el que estamos interesados en este trabajo.

2.2.1 Conocimiento de la Práctica Matemática

El término *Práctica* ha tenido diversos usos en la investigación en Educación Matemática. Quizá el más empleado es para referirse a las acciones que suceden en el proceso de enseñanza-aprendizaje. De este se desprenden los términos: *práctica de enseñanza* cuyo énfasis está puesto en el profesor (e. g. Llinares, 2000), *práctica de aula* que incluye los comportamientos de estudiantes y profesores, individualmente e interaccionando e incluso con algunos artefactos externos (e. g. Franke et al., 2007). También, es usado como parte de términos acuñados en teorías de Educación Matemática, tal es el caso, *Práctica Social* (Cantoral y Farfán, 2003) o *Práctica Matemática* que es el que tomaremos.

Así, con *Práctica Matemática* nos referimos al conocimiento de heurísticos para resolver problemas, conocimiento de las situaciones que requieren un uso del pensamiento inductivo o deductivo. A todas las acciones realizadas para lograr la resolución de problemas matemáticos o enfrentarse a otra actividad matemática (Escudero, 2015).

Escudero, menciona que el KPM es fundamental para que el profesor no sólo sea capaz de conocer los diferentes temas que pudiera impartir, y la integración en la estructura matemática que considere el propio profesor. Asimismo, el tener conciencia de cómo se razona y produce en matemáticas para de esta manera dar solidez a su propio conocimiento.

En este subdominio se incluyen entre otras cosas, el conocimiento que tiene el profesor de matemáticas sobre qué es demostrar, justificar, deducir, definir, ejemplificar, y usar heurísticos. También, se incluyen el conocimiento de la lógica que sustenta a estas prácticas, el uso y funcionamiento del ejemplo y contraejemplo. Se refiere a la actividad matemática llevada sistemáticamente, se ajusta a una base lógica partir de la cual se pueden extraer reglas. En este trabajo no pretendemos prescribir el conocimiento del profesor de matemáticas acerca de estas nociones de la matemática, sino esclarecer cuáles de estos conocimientos son especializados al tener relación con la labor de enseñanza.

Todas las características anteriores hacen que el Conocimiento de la Práctica Matemática esté relacionado con la noción de *metaconocimiento matemático* (e. g. Robert y Robinet, 1996) y *conocimiento sobre matemáticas* (e. g. Ball y McDiarmid, 1990). Robert y Robinet, consideran los métodos, estructuras y organización del conocimiento matemático; el papel de los cuestionamientos, del ejemplo y contraejemplo y de la reflexión epistemológica como medios de acceso al conocimiento matemático (desde una visión personal o general), y los modos de producción y funcionamiento matemático.

En la búsqueda de caracterizar de la forma más útil posible a los subdominios del *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (*MTSK*)*, en diversas ocasiones se ha enfatizado que el *Conocimiento de la Práctica Matemática* (KPM) no ha alcanzado un nivel de categorización similar al resto de subdominios. En Flores-Medrano y Aguilar (2017) proponen dos maneras posibles de organizar este subdominio, una mediante indicadores específicos sin presentar categorías, por ejemplo, la jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticas, y, formas de validación y demostración (e.g. Carrillo et al., 2014).

Otra categorización se basa en tomar a cada práctica matemática identificada como una categoría (e.g. Flores-Medrano, 2015). Esta última será con la idea que presentamos en este trabajo, así cada categoría representa cada práctica matemática, las cuales nos servirán para explorar el conocimiento del profesor de matemáticas acerca de estas prácticas matemáticas.

Según Kitcher (1984), para comprender el desarrollo del conocimiento matemático, uno debe enfocarse en el desarrollo de la práctica matemática que consta de cinco componentes: un lenguaje, un conjunto de afirmaciones aceptadas, un conjunto de razonamientos aceptados, un conjunto de preguntas aceptadas y un conjunto de puntos de vista metamatemáticos. En este último se incluyen estándares de demostración y definición, afirmaciones acerca del alcance y estructura de la matemática.

2.2.1.1 La práctica de demostrar

La demostración muchas veces se centra en los niveles superiores de enseñanza matemática, resulta importante que aparezcan elementos de ésta en niveles tempranos de formación (Schoenfeld, 1994) y, por lo tanto, que los profesores deberían conocer su naturaleza, funciones y constitución (Vicario y Carrillo, 2005).

Godino y Recio (2001) señalaron que la demostración en el contexto institucional de la clase de matemáticas, puede ser descrita como emergente de prácticas argumentativas analíticas formales y su significado está dado por los rasgos intencionales (un objeto matemático, por ejemplo el signo, tiene intención para un contexto; es decir, se reconoce una funcionalidad para la resolución de problemas o situaciones), extensionales (el significado de un objeto matemático puede desempeñar una referencia para seleccionar la evaluación y las situaciones de enseñanza) y las representaciones descritas (presentan un concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere, y que intervienen en la actividad de resolución). Pero esto no quiere decir que en estos contextos no se utilicen argumentaciones sustanciales para justificar afirmaciones.

Godino y Recio, consideran que la demostración en los niveles de primaria, secundaria y en general, se basa en argumentaciones deductivas informales, argumentaciones no deductivas e incluso argumentaciones basadas en criterios externos de autoridad. Agregan que usualmente los teoremas que se intentan demostrar son siempre ciertos, produciendo una visión platonista, tanto de los conocimientos matemáticos como de los criterios de validez.

Lo y McCrory (2009) destacan que los futuros profesores de matemáticas necesitan aprender acerca de la demostración en tres niveles: como una técnica de verificación de que algo es o no cierto; segundo, como un objeto matemático, donde se hagan explícitos los pasos y las representaciones utilizadas y para mostrar que algo es cierto; y como un elemento que favorece el desarrollo de los estudiantes, el tipo de argumentos que son capaces de hacer dependiendo el nivel de enseñanza, entre otros.

Las investigaciones acerca de la demostración matemática en el campo de la matemática educativa se vienen desarrollando desde el siglo pasado. Se presenta una pequeña revisión de algunos trabajos que nos permiten indagar y sistematizar los elementos de la demostración. El trabajo de Ibañes (2001) y las publicaciones de Ibañes y Ortega (1997, 2001, 2005) han influido fuertemente en esta parte, pero añadimos algunos trabajos de otros autores que tratan acerca de las funciones de la demostración y esquemas de pruebas.

Cabe señalar que existe una gran variedad de trabajos acerca de la demostración en el aula (e.g. Bell, 1976; Fischbein, 1982). Pretendemos separarnos del carácter didáctico de la demostración para centrarnos en su caracterización.

Flores (2007) para diferenciar las formas en las que un individuo utiliza sus razonamientos durante una práctica argumentativa (conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema), presenta una construcción de esquemas argumentativos (la forma en que un individuo utiliza sus razonamientos durante una práctica argumentativa). Estos esquemas pueden ser de convicción externa, empíricos, y, analíticos.

Los de convicción externa pueden ser *autoritarios* cuando se apoyan en afirmaciones hechas por alguna autoridad (el profesor, un libro de texto, una definición); *simbólicos* en los que se utiliza un sistema de símbolos y lenguaje matemático de manera superflua y poco consistente; *fácticos* en los que se argumenta con base en hechos evidentes o anteriores a manera de explicación o justificación, a menudo expuestos como su fueran un algoritmo. Los esquemas empíricos, pueden ser *inductivos* (son apoyados en hechos físicos o en dibujos); *perceptivos* (apoyados a experiencias de manipulación física, real o virtual para llevar a cabo la argumentación). Los analíticos se dividen en *esquema de transformación* (durante una validación se usa la transformación de los objetos mediante un proceso deductivo y una anticipación de los resultados de tal transformación) y *esquema axiomático* (el individuo es consciente de que existen términos indefinidos y axiomas). El uso de los esquemas no necesariamente implica llegar a una conclusión válida. No deben confundirse con los tipos de demostración (contradicción, inducción, etcétera) que también forman parte del conocimiento que consideramos en esta categoría, así como sus posibles usos y fundamentos.

El uso de los esquemas no necesariamente implica llegar a una conclusión válida. No deben confundirse estos esquemas de argumentación con los tipos de demostración (contradicción, inducción, geométrica, etcétera) que también forman parte del conocimiento que consideramos en esta categoría, así como sus posibles usos y fundamentos.

Por otro lado, Carrillo et al. (2016) proponen los esquemas de prueba que pueden ser empleados por los profesores para justificar y/o validad algunos resultados matemáticos. Estos pueden ser, *esquema de prueba experimental* (establece validez de un enunciado mediante experimentación); *esquema de prueba inductivo de un caso* (establece la validez de un enunciado mediante el estudio de un caso particular); *esquema de prueba inductivo de varios casos* (establece la validez de un enunciado mediante más de un caso particular); *esquema de prueba inductivo sistemático* (establece la validez de un enunciado mediante casos particulares que pueden hacerse atendiendo a un criterio); *esquema de prueba transformacional* (establece la validez de un enunciado mediante transformaciones de imágenes o signos por deducción).

Continuando con los esquemas de pruebas de Carrillo et al., encontramos el *esquema de prueba preformal* (refleja la esencia de una demostración formal que refleja el carácter axiomático y transformacional); *esquema de prueba axiomático* (son demostraciones matemáticas y la validez de un enunciado se establece mediante un proceso deductivo a partir de axiomas, enunciados primarios y resultados deducidos en demostraciones); *esquema de prueba gráfico* (basa sus conclusiones en consecuencias directas de visualización de representaciones gráficas); *esquema de prueba numérico* (establece propiedades mediante procesos numéricos), y, *esquema de prueba de inducción completa* (lo constituye el método de inducción, se compone de un proceso inductivo y deductivo).

La demostración puede desempeñar roles diferentes: puede servir como una validación, para conducir a nuevos descubrimientos, como foco de debate y para ayudar a eliminar errores (Davis y Hersh, 1986). La demostración matemática consiste en cadenas explícitas de inferencia que siguen reglas de deducción acordadas y, a menudo, se caracteriza por el uso de la notación formal, la sintaxis y las reglas de manipulación (Hanna y Villiers, 2008).

Según Donaldson (1979), el ser humano desde muy temprano consigue razonar lógicamente, desde que el contexto es real y significativo para él. Así, el significado, las representaciones de objetos y las concepciones son las premisas del desarrollo del razonamiento y del desempeño lógico. De acuerdo con Radford (1994), los aspectos anteriores están íntimamente relacionados con la demostración. A pesar de esta relación, la práctica escolar no suele tomar en cuenta el cambio de conceptualización que implica un proceso de aprendizaje de la demostración deductiva.

Acerca de las funciones de la demostración, Villiers (1990) criticó fuertemente el uso exclusivo de la función *verificativa* de la demostración matemática. Propuso cinco funciones para dicha demostración: *verificación* (sobre la verdad de una afirmación); *explicación* (por qué es verdad y qué significados envuelven a una afirmación); *sistematización* (organización de resultados en un sistema axiomático); *descubrimiento* (posibilidad de surgimiento de nuevos resultados) y *comunicación* (de los resultados y de por qué son, o no ciertos). Vicario y Carrillo (2005) dotaron a este sistema de algunas subfunciones en el trabajo con profesores de matemáticas, entre las que destacan la *simplificativa* y la *didáctica*, ambas pertenecientes a la jerarquía de la función explicativa.

Ibañes y Ortega (1998) por su parte, propusieron una clasificación para las demostraciones, hacen uso de las funcionalidades de la metodología demostrativa de las Matemáticas. Ellos establecen cuatro dimensiones de la demostración que contribuyen a una mayor aproximación y a una mejor interpretación de demostración (histórica, epistemológica, social y cognitiva).

En la dimensión histórica se da una breve descripción de los aspectos relevantes de la demostración, historiadores como Boyer, Gherveghese coinciden en que antes de los griegos no existían demostraciones, pero sí explicaciones de la validez de resultados que aplicaban (método hipotético-deductivo). En el siglo V a.C. (Kleine, 1991) Eudoxo utilizó métodos de demostración (por ejemplo, exhaustivo, reducción al absurdo) y modos de exposición (analítico, sintético).

Para el siglo XII inicia un período de reflexión y fundamentación hacia los métodos utilizados dos siglos anteriores. El método axiomático moderno integra una herramienta de descubrimiento de resultados nuevos, así el descubrimiento y la demostración coexisten en el método axiomático. Surgieron corrientes para la fundamentación de las matemáticas: logicismo, formalismo (las demostraciones son constructivas) e intuicionismo (no se admite el método por reducción al absurdo). Seguido de esto, Gödel en 1931 expuso el teorema de incompletitud (una teoría axiomática que incluya la aritmética no puede ser a la vez consistente y completa), este teorema derrumba el sistema de axiomas de Whitehead y Russell, la axiomatización de Zermelo y Frankel para su teoría de conjuntos. Todo esto hasta mediados del siglo XX produjo una división respecto a lo que debe considerarse una demostración.

Dado que nuestro interés es establecer elementos de conocimiento especializado respecto a la demostración, esta dimensión no será tratada en este trabajo, ya que esboza ideas de la demostración en distintas épocas, donde la demostración es construida por los matemáticos de la época, se muestra que el rigor en la argumentación matemática varía a lo largo de los años, además que no hay total acuerdo entre los matemáticos acerca de los conceptos y procedimientos son los más adecuados.

En la dimensión epistemológica se tratan aspectos acerca de la fundamentación y métodos del conocimiento científico relativos a la demostración. En la dimensión social Ibañes y Ortega presentan un análisis de las funciones de la demostración en matemática educativa. Finalmente, en la dimensión cognitiva describen un marco de esquemas de prueba, los cuales serán desarrollados a continuación.

En la dimensión epistemológica, encontramos el trabajo de Miyazaki (2000), señala cuatro niveles básicos en los procesos de prueba en función de las diferencias, razonamiento inductivo y lenguaje funcional; razonamiento deductivo y lenguaje funcional; razonamiento inductivo y lenguaje no funcional; razonamiento deductivo y lenguaje no funcional. Mientras Ibañes y Ortega (1997) proponen una clasificación de las técnicas de demostración relacionándolas con los enunciados de los teoremas y teniendo en cuenta distintos criterios a la vez, dependiendo al criterio obtendremos etiquetas para la demostración, a continuación, detallamos estas características.

Según el *tipo* (estructura lógica del enunciado), *en relación a la implicación*, de condición necesaria o suficiente y de condición necesaria y suficiente; *en relación al cuantificador existencial*: no existencial y de existencia (que puede ser simple, de imposibilidad, de unicidad); *en relación al cuantificador universal* (cuando las proposiciones con condición necesaria, suficiente o necesaria y suficiente pueden ser expresados de manera explícita o implícita con el cuantificador universal).

Según el *método* (atendiendo los procedimientos lógicos), *por silogismos* (esquema de razonamiento matemático ordinario) y *por reducción al absurdo* (basado en el deseo de respetar la consistencia de las matemáticas, como es el “principio de no contradicción” y en el “principio del tercio excluso”); *por inducción completa; constructivo* (ejemplo o contraejemplo); *por analogía* (se utiliza la semejanza en algunos aspectos entre dos teorías matemáticas para deducir su semejanza en todos los aspectos); *por dualidad*.

Según el *estilo* (si atendemos a los procedimientos matemáticos), que puede ser geométrico (utilización exclusiva de recursos geométricos); *algebraico* (el uso de símbolos para representar objetos matemáticos cualesquiera y operar con ellos); *de las coordenadas* (enlaza los estilos geométrico y algebraico en fructífera simbiosis); *vectorial;* del Análisis Matemático (el uso de los procedimientos del Análisis Matemático, en particular el concepto de límite); *probabilístico* y *topológico*, etc.

Finalmente, por el *modo* (si atendemos al procedimiento de exposición), *sintético o directo* (propio de la presentación formalizada del producto) y *analítico o indirecto* (más adecuado para la exposición didáctica).

Mientras en la dimensión social, se encuentra el tratamiento de la demostración casi en términos de verificación o justificación de enunciados matemáticos. Se encuentra el trabajo de Bell (1976) el cual menciona tres significados de la demostración matemática, *verificación o justificación* (a la verdad de la proposición); *iluminación*, se espera que una buena demostración proporcione ideas de por qué la proposición es cierta. También, encontramos el trabajo de Villiers (1990) mencionado anteriormente, cual tomaremos como principal para el modelo de funciones para la demostración.

En la dimensión cognitiva, se rescata el trabajo de Ibañes y Ortega (2005) se encuentran cuatro fases de compresión de las demostraciones, *fase de interpretación* que incluye, entender el problema y la clase de solución que requiere (esquemas de prueba), comprender los términos matemáticos empleados, interpretar las proposiciones lógicas, las expresiones usuales, la notación utilizada, etc. La *fase de análisis*, identificar el proceso de una demostración, elementos como recordar resultados anteriores y relacionarlos con la proposición objeto de estudio, revisar la corrección del razonamiento; la *fase de síntesis*, donde hay que identificar ideas y líneas claves de la demostración, así como comprender globalmente el proceso. Finalmente, *la fase de profundización*, elementos como estudiar la necesidad de las hipótesis, reconocer el significado del teorema, identificar el tipo de enunciado y los métodos, estilos y modos empleados y valorar las funciones que cumplen la demostración estudiada.

En esta tesis, revisamos el trabajo de los autores Alfaro et al. (2020) que consideramos para el apartado de la demostración, pues es una investigación para el subdominio del Conocimiento de la Práctica Matemática referente a la demostración. Estos autores proponen elementos importantes del conocimiento matemático acerca de la demostración y que tienen cabida en el KPM: *el conocimiento sobre la naturaleza de la demostración en matemáticas* que se refiere al conocimiento acerca de la constitución de la demostración matemática, concepto de lo qué es y lo que significa, validez lógica, y la validez matemática (uso correcto de hipótesis, axiomas y definiciones usadas en la demostración).

Otro elemento es *el conocimiento sobre las funciones de la demostración en las matemáticas* que incluye las razones o motivos por los cuales los profesores de matemáticas encuentran un argumento convincente, un argumento para validar una afirmación (aunque no sea exclusivamente una demostración), el nivel de detalles, el nivel explicativo y la validez del argumento. Otro subcomponente es la validez lógica en la cual se consideran, el tipo de demostración, tipo de cuantificador, tipo de conectiva lógica, todas ellas involucran equivalencias e inferencias lógicas (Alfaro et al., 2020).

2.2.1.2 La práctica de definir

Las definiciones y los axiomas son necesarios en matemáticas, principalmente para evitar problemas de circularidad lógica y regresión infinita (De Villiers, 1995). Leikin y Zazkis (2010) consideran que las definiciones de conceptos matemáticos, el proceso de definir y las estructuras subyacentes de las definiciones deben ser componentes fundamentales del conocimiento de la materia de los profesores de matemáticas. Las definiciones no requieren justificación matemática ya que no realizan afirmaciones lógicas.

Definir conceptos en matemáticas es importante para el proceso de conceptualización, De Villiers (1994, 2009) destaca que existen dos procesos asociados: *descriptivos o a posteriori* (tienen como papel sistematizar el conocimiento existente) y *constructivos o a priori* (producen nuevo conocimiento). Las definiciones descriptivas se logran cuando el individuo tiene experiencia por determinado tiempo acerca de las propiedades del objeto, y empieza a determinar de las características algunas que a partir de las cuales las demás pueden ser deducidas. Mientras que las definiciones constructivas resultan del proceso de definir constructivamente, surgen de una definición dada, la cual es cambiada por algún proceso lógico (generalización, reemplazo, exclusión) para definir un nuevo concepto. En la definición descriptiva el concepto de imagen precede a la definición eventual del concepto (Vinner y Hershkowitz, 1983; Vinner, 1983), mientras que en la definición constructiva el concepto de imagen se desarrolla o explora después de la definición del concepto.

Establecer una definición matemática responde a ciertas necesidades de organización y crecimiento del conocimiento (Calvo, 2001), las definiciones no están predeterminadas, sino que presentan un carácter convencional. Algunas nociones pueden ser caracterizadas diferentes, equivalentes entre sí, y es el matemático, el autor de un texto o el profesor el que decide cuál de estas caracterizaciones toma como definición; es producto de una convención el definir los conceptos de manera más o menos restrictiva.

Calvo (2001) menciona que en ocasiones es difícil elegir alguna caracterización y que es habitual que esta elección sea resultado de un análisis que contempla ciertos factores, *estéticos* (argumentos elegantes, sencillos o relacionados a lo mesurado del enunciado de la definición); *operativos* (el establecimiento se explica por las conclusiones, por la potencia como instrumento organizador de una prueba o resolución de un problema); *didácticos* (las definiciones se presentan respecto a los conocimientos previos de los alumnos o los objetivos del curso).

Leikin y Winicki-Landman (2000a), presentan las características matemáticas de las definiciones matemáticas de manera resumida, la declaración utilizada como definición presenta el nombre del concepto, y este nombre o término aparece sólo una vez en esta declaración; una definición establece las condiciones necesarias y suficientes para el concepto; al definir el nuevo concepto, sólo se pueden utilizar conceptos definidos previamente o conceptos no definidos (conceptos básicos); el conjunto de condiciones debe ser mínimo y finalmente una definición es arbitraria (se elige de un conjunto de declaraciones equivalentes). La elección de una definición en Educación Matemática se basa en consideraciones pedagógicas y en las matemáticas (Leikin y Winicki-Landman, 2000b).

Consideraremos *definir* al proceso para llegar a establecer una definición, teniendo en cuenta que una definición prescribe el significado de una palabra o frase de forma muy específica en términos de una lista de características que tienen que ser todas verdaderas (Escudero et al., 2014). Estos autores recogen las características de la definición matemática de diversos autores, las cuales se identificaron como, *la precisión en la terminología-jerarquización* (uso de términos básicos o previamente definidos); *no circularidad* (no hacer referencia al concepto en la propia definición); *no ambigua* (caracterización de manera univoca de una clase de objetos); *no contradictoria o estructuralmente inequívoca* (las características empleadas deben ser consistentes); *invariante bajo cambio de representación* (un objeto pertenece a una clase de objetos, definible ahí, independientemente de su representación); *equivalencia* (se puede dar más de una formulación de un mismo concepto); *elegancia* (entre las definiciones equivalentes, la más elegante es la que utiliza conceptos generales más básicos); *minimalidad* (no redundancia de las características, ninguna de las características se deduce del resto), y *degeneración* (ejemplos del concepto que no se ajustan a la idea intuitiva del concepto).

Todos estos atributos además de darnos una caracterización de la definición matemática conllevan aspectos de su uso como práctica y de las implicaciones en sus posibles variedades.

2.2.2 Síntesis de las prácticas de demostrar y definir

La tabla 2.1 muestra la propuesta de categorías y subcategorías a partir de la práctica de demostrar y definir. Esta categorización es parcial y se robustecerá a partir del estudio de otras prácticas matemáticas. A diferencia de otros subdominios, bajo esta propuesta de categorización en el KPM las categorías tendrían un uso muy limitado, siendo las subcategorías y posibles descriptores los que sirvan como herramienta fundamental para el trabajo analítico. Los posibles conocimientos que colocamos en la tabla pueden servir como elementos para la sensibilidad teórica.

Para facilitar la lectura, renombramos a cada subcategoría con nomenclatura DEM para cada subcategoría de la práctica de demostrar y el número de subcategoría y DEF para la categoría de la práctica de definir con un número respectivamente para cada subcategoría. La Tabla 2.1, detalla las nomenclaturas que posteriormente serán utilizadas en el Capítulo 4 para las secciones 4.3 y 4.4.

Tabla 2.1

Sistema de categorías, subcategorías y posibles descriptores de conocimiento del KPM

Categoría	Subcategorías	Nomenclatura	Posibles descriptores de conocimiento	Nomenclatura
PRÁCTICA DE DEMOSTRAR				DEM. 1.1
	Tipo de demostración	DEM. 1	En relación a la implicación	
			En relación al cuantificador existencial	DEM. 1. 2
			En relación al cuantificador universal	DEM. 1. 3
			Silogismos	DEM. 2. 1
		DEM. 2	Reducción al absurdo	DEM. 2. 2
	Método para demostrar		Inducción completa	DEM. 2. 3
			Constructivo	DEM. 2. 4
			Analogía	DEM. 2.5
			Dualidad	DEM. 2.6
	Usos de los registros de representación en la demostración		Geométrico	DEM. 3. 1
			Algebraico	DEM. 3. 2
			De las coordenadas	DEM. 3. 3
			Probabilístico	DEM. 3. 4
			Topológico	DEM. 3. 5
	Modo de demostración	DEM. 4	Sintético o directo	DEM. 4.1
			Analítico o indirecto	DEM. 4. 2
				DEM. 5. 1
	Fases cognitivas de la demostración	DEM. 5	Fase de interpretación	
			Fase de análisis	DEM. 5. 2
			Fase de síntesis	DEM. 5. 3
			Fase de profundización	DEM. 5. 4
			Verificación	DEM. 6. 1
	Funciones de la demostración		Explicación	DEM. 6. 2
		DEM. 6	Sistematización	DEM. 6. 3
			Descubrimiento	DEM. 6. 4
			Comunicación	DEM. 6. 5
				DEM. 7. 1

	Tipos básicos de demostración	DEM. 7	Esquema de prueba experimental	
			E. de prueba inductivo de un caso	DEM. 7. 2
			E. de prueba inductivo de varios casos	DEM. 7. 3
			E. de prueba inductiva sistemático	DEM. 7. 4
			E. de prueba transformacional	DEM. 7. 5
			E. de prueba preformal	DEM. 7. 6
			E. de prueba axiomático	DEM. 7. 7
			E. de prueba gráfico	DEM. 7. 8
			E. de prueba numérico	DEM. 7. 9
			E. de prueba de inducción completa	DEM. 7. 10
PRÁCTICA DE DEFINIR	Proceso de conceptualización	DEF. 1	Constructivos o a priori.	DEF. 1. 1
			Descriptivos a posteriori	DEF. 1. 2
	Características de la definición	DEF. 2	Precisión en la terminología-jerarquización	DEF. 2. 1
			No circularidad	DEF. 2. 2
			No ambigua	DEF. 2. 3
			No contradictoria o estructuralmente inequívoca	DEF. 2. 4
			Invariante bajo cambio de representación	DEF. 2. 5
			Equivalencia	DEF. 2. 6
			Minimalidad	DEF. 2. 7
			Degeneración	DEF. 2. 8

Capítulo 3. Método

En este apartado describiremos los aspectos de los fundamentos que sustentan las decisiones en la manera de organizar e interpretar la información. Así como la descripción de los informantes, el instrumento para la recolección de datos y procesamiento de la información generada. Antes de iniciar con lo descrito anteriormente, destacaremos que los informantes que fueron los profesores de matemáticas de nivel Medio Superior nos ayudaron con las actividades y sus respuestas lograr probar el sistema de categorías. Mientras que, los investigadores en matemáticas de la FCFM, nos ayudaron a validar el sistema de categorías una vez hecha la propuesta (Tabla 2.1).

3.1 Tipo de investigación

Quecedo y Castaño (2003), mencionan que:

> Los estudios cualitativos intentan describir sistemáticamente las características de las variables y fenómenos (con el fin de generar y perfeccionar categorías conceptuales, descubrir y validar asociaciones entre fenómenos o comparar los constructos y postulados generados a partir de fenómenos observados en distintos contextos), así como el descubrimiento de relaciones causales, pero evita asumir constructos o relaciones a priori. (p. 12)

Por otro lado, Escudero (2015) detalla el paradigma de investigación como una forma particular de entender la realidad analizada, lo que crea un sentido al tipo de conocimiento que se pretender crear y a la comprensión del mundo que observa e interpreta:

> Un paradigma de investigación es una red de ideas coherentes sobre la naturaleza del mundo y de las funciones de los investigadores que,

> aceptadas por una comunidad de investigadores, condicionan las pautas de razonamiento y sustentan las acciones en la investigación. (Bassey, 2003, p. 42)

Cabe mencionar que los investigadores que utilizan métodos cualitativos asumen la existencia de múltiples realidades que, son resultado de la construcción humana, además, el conocimiento que supone la interpretación de los significados construidos en la interacción (Carillo y Muñoz-Catalán, 2011).

De esta manera, la presente investigación tendrá un enfoque cualitativo dentro de un paradigma interpretativo y descriptivo, puesto que intenta explorar el Conocimiento de la Práctica Matemática del profesor de matemáticas recabando datos de investigaciones especializadas para posteriormente utilizar estos datos para interpretarlos y organizarlos para desarrollar una caracterización que pueda colaborar acerca de las cualidades que presentan las prácticas matemáticas, demostrar y definir.

3.2 Análisis Documental

Primero realizamos una revisión extensa de la literatura de diversos autores acerca de las prácticas matemáticas, demostrar y definir para delimitar el marco teórico, el cual es desarrollado en el capítulo II. En esta primera parte al ser de corte teórico, utilizamos el método de análisis documental (Bardín, 1986), ya que este método se centra en el análisis de la información.

Se presenta una pequeña revisión de algunos trabajos que nos permiten indagar y sistematizar los elementos de la demostración. Por ejemplo, el trabajo de Ibañes (2001) y las publicaciones de Ibañes y Ortega (1997, 2005) nos ayudaron a comprender las técnicas de demostración en cuanto a los aspectos de tipo, método, estilo se usó el trabajo de Ibañes y Ortega (1997). Mientras que para las fases de comprensión de la demostración se consultó Ibañes y Ortega (2005). También, añadimos algunos trabajos de otros autores que tratan acerca de las funciones de la demostración (e.g. Villiers, 1990; Bell, 1976) y esquemas de pruebas (Carrillo, et al, 2016).

Mientras que, para definir consultamos autores como Leikin y Zazkis (2010) que consideran a las definiciones de conceptos matemáticos, el proceso de definir y las estructuras subyacentes de las definiciones deben ser componentes fundamentales del conocimiento de la materia de los profesores de matemáticas. Y otros trabajos como el de Escudero et al. (2014), que recogen las características de la definición matemática de diversos autores.

A partir de la revisión de literatura y las conclusiones obtenidas, seguido realizamos una clasificación de los elementos encontrados, los cuales reflejan las cualidades de las prácticas de demostrar y definir para conseguir la propuesta de caracterización que presentamos en el capítulo II, los cuales conllevan aspectos de su uso como práctica y de las implicaciones en sus posibles variedades.

El análisis documental nos accedió tener un primer acercamiento para nuestra investigación, el cual dio como resultado la propuesta de caracterización teórica mencionada anteriormente. Junto a lo expuesto, se procedió a elaborar un instrumento para la recolección de información que será descrito en la sección 3.4.

3.3 Estudio de caso

Stake (1994) menciona que este método puede ser efectivo para el estudio de personas, fenómenos, programas e interpretaciones. Se divide en estudio de caso intrínseco (estudiar el caso en sí mismo, comprender un caso en particular); estudio de caso instrumental (para someter a prueba una teoría) y estudio de caso colectivo (conjunto de casos para comprender las regularidades). Mientras Yin (1989) menciona que es una herramienta valiosa de investigación por la cual se mide y registra la conducta de las personas o fenómeno estudiado.

El estudio de caso es una metodología rigurosa que es adecuada para investigar fenómenos a los que se busca dar respuesta de la manera que ocurren o por qué ocurren (Chetty, 1996). Además, permite estudiar los fenómenos desde diversas perspectivas y explorar en forma más profunda para obtener un conocimiento más amplio.

Stake, menciona que este diseño de investigación hace referencia al estudio minucioso y profundo acerca de las características elocuentes del objeto de estudio. También, que puede corresponder a un solo elemento o varios que se encuentren dentro de la población nuestro objeto de estudio. Realizar el análisis de un caso particular sirve de apoyo para generar ideas que expliquen un fenómeno.

Por lo que consideramos adecuado para esta investigación adoptar este método de estudio de caso, ya que utilizamos un caso específico para alcanzar nuestros objetivos.

3.3.1 Estudio de caso instrumental

El estudio de caso instrumental según Stake (1995) son aquellos casos que tienen la intención de generalizar a partir de un conjunto de situaciones específicas. Es de utilidad cuando se intenta comprender un fenómeno, para proveer generalizaciones o refinar teorías.

Stake enfatiza que un estudio de caso instrumental puede desembocar en un estudio de caso colectivo, cuando nos parece pertinente utilizar varios casos como nuestro objeto de estudio, ya que en ocasiones en un solo caso pueden pasar cosas desapercibidas que en otro podríamos visualizar. Para este tipo de estudio se debe seleccionar una muestra de casos de una población que los represente dependiendo del objetivo de investigación.

De esta manera consideramos adecuado adoptar este diseño donde nuestro caso es el profesor de matemáticas de nivel medio superior, el cual será quien nos ayude a comprender lo que utiliza el profesor de matemáticas en el salón de clases acerca de las prácticas matemáticas. Así, recurrimos a una serie de actividades acerca de la demostración y la definición vistas como un objeto matemático, no tanto en la parte didáctica del salón de clase. Esto con la intención de obtener los elementos que el profesor utiliza en su práctica.

Para contrastar y profundizar la comprensión y conformación del modelo teórico se utilizó evidencia empírica, de manera que esto sirva para analizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

3.4 Diseño de actividades y del instrumento para la recolección de datos

Se realizaron una serie de preguntas acerca de la demostración y la definición para obtener información que pudiera confirmar, enriquecer o contrastar el análisis documental y la propuesta de categorías. La elaboración de las preguntas se basó en la tabla de categorías 2.1. También se envió un formato para validar la tabla de categorías con tres profesores de matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. A continuación, detallaremos el formato (Anexo 1) y posteriormente el instrumento elaborado para la obtención de información.

3.4.1 Formato de preguntas para validar la propuesta de categorías y subcategorías

Como anteriormente mencionamos, una vez caracterizadas las prácticas de demostrar y definir, se prosiguió a elaborar un formato con la intención de validar la Tabla 2.1 por medio del juicio de expertos. Con validez nos referimos al grado en que la investigación refleja el problema de investigación determinado.

El juicio de expertos se refiere a la opinión informada de personas con experiencia en un área determinada, que pueden dar información, juicios y valoraciones. Es importante que las personas elegidas que forman parte del juicio de expertos tengan características homogéneas, experiencia en el área estudiada, así como tener disponibilidad y motivación para participar (Cohen, 2007). Por lo anterior, nuestros expertos elegidos fueron tres doctores en Ciencias Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Estos expertos imparten clases en esta facultad y se dedican a la investigación científica con más de diez años de experiencia en diversas áreas de la matemática como son, Topología, Teoría de Modelos, Geometría, Lógica y Conjuntos. Cabe mencionar que estos tres profesores e investigadores son distintos de nuestros informantes.

Los comentarios de los expertos contrastaron la tabla de categorías 2.1. Dos de nuestros expertos confirmaron que no les parece que haya alguna categoría de más. También, que todas las características que se proponen para cada subcategoría son coherentes y que dan una idea de la manera en que se trabaja en Matemáticas.

Cohen menciona que, para demostrar esta forma de validez, el instrumento debe mostrar que cubre de manera completa y justa el dominio que pretende cubrir. Hay que notar que no siempre se puede abordar en su totalidad un tema por cuestiones de tiempo y la motivación de los expertos. Por lo anterior, se pueden seleccionar elementos del problema que se cubrirán en la investigación sean una representación justa del problema más amplio y que los elementos seleccionados sean abordados en profundidad. Por ello consideramos cuestionar acerca de la completitud y coherencia de la propuesta de categorías.

La primera parte (Anexo 1) se refiere a la completitud de la categorización, que hace referencia a si se están considerando todos los descriptores para las subcategorías, si hay subcategorías o descriptores que signifiquen lo mismo o si hay descriptores o subcategorías que deben ser consideradas en el sistema. Las preguntas que corresponden a esta descripción aparecen en el Cuadro 1.

Cuadro 1

Primer bloque de preguntas sobre coherencia

¿Se están considerando todas las dimensiones y características de cada una de las prácticas? ¿Alguna de las subcategorías o posibles descriptores podría dejarse fuera?

Uno de los expertos, realizó el siguiente comentario respecto a la primera subcategoría de la práctica de demostrar (Tipo de demostración):

> "*No [debemos] confundir la demostración de un hecho con la proposición que enuncia el hecho. Por ejemplo, si una función es derivable, entonces tal función es continua, es decir, estamos haciendo una proposición del tipo $p \Rightarrow q$".*

Coincidimos con el comentario del experto, es importante distinguir que conocer el tipo de relación lógica de un enunciado no implica conocer acerca de su demostración. También, consideramos el hecho de ser un prerrequisito para poder realizar la demostración permite al profesor de matemáticas tener un meta-análisis sobre los enunciados. Por ejemplo, diferenciar entre una demostración de existencia a una de universalidad, las cuales forman parte de la subcategoría Tipo de demostración.

La segunda parte se refiere a la coherencia, este bloque de preguntas (Cuadro 2.) se refiere a que si los descriptores tienen relación con las subcategorías y si son claros los nombres de los descriptores. Es decir, si los nombres propuestos son familiares para profesionales de la materia o si se presenta una idea general a lo que se refiere cada subcategoría.

Cuadro 2

Segundo bloque de preguntas sobre completitud

¿Son las características propuestas congruentes con la práctica que quieren describir? ¿Son adecuados y reconocidos los nombres utilizados en los posibles descriptores y subcategorías?

Referente a la coherencia, si son adecuados los nombres utilizados en las subcategorías y posibles descriptores, los expertos estuvieron de acuerdo en el uso que se les estaba dando. Un comentario fue el siguiente:

> *"Yo creo que sí, siento que este documento es una formalización de muchas cosas que uno hace en la práctica y que en ocasiones con algo de descuido".*

Destacamos que, la propuesta de caracterización fue presentada como en la Tabla 2.1 a los expertos. Por medio de una entrevista con las preguntas expuestas anteriormente se realizó una grabación de audio para rescatar información sobre sus respuestas. Finalmente, en esta segunda fase, obtuvimos respuestas favorables para la propuesta de caracterización presentada.

3.4.2 Construcción y diseño del instrumento para la recolección de datos

Una vez caracterizadas las prácticas matemáticas de demostrar y definir, se prosiguió a elaborar un instrumento para la aplicación durante las dos sesiones de trabajo. Cada pregunta del instrumento presenta una correspondencia con las subcategorías, asimismo, con cada posible descriptor de conocimiento de la Tabla 2.1. La correspondencia se relaciona con los elementos que esperábamos se hicieran notar con las respuestas de los profesores. También, cuidamos que fueran preguntas abiertas para la reflexión y discusión de cada una de estas.

A continuación, presentamos la estructura establecida de las preguntas que se abordaron en las dos sesiones. En el Anexo 2, se encuentra el formato de las preguntas acerca de la demostración. Mientras que en el Anexo 3, el formato de preguntas sobre la definición. En este apartado detallaremos la intención de cada pregunta, tanto que el contenido y estructura completa de cada pregunta puede ser consultado en el anexo.

3.4.2.1 Preguntas para explorar las subcategorías de la práctica de demostrar

El primer bloque corresponde a la pregunta 1, presentamos cincos demostraciones de distintas áreas de la matemática, esto con la intención de que los profesores mencionaran diferencias y similitudes. En esta parte de la sesión, nos interesaba obtener información acerca de la estructura lógica del enunciado (si es de condición necesaria y suficiente o, si sólo es necesaria o suficiente). También, acerca de los métodos para demostrar (por ejemplo, analogía, por casos, contraejemplos); si la demostración atiende a los procedimientos matemáticos (uso de recursos geométricos, demostraciones distintas para un mismo problema o enunciado; a los modos de demostración (procedimiento de exposición, si es de la presentación formalizada del producto o si es más didáctico). Finalmente, acerca de los esquemas de demostración.

Cuadro 3

Primer bloque de preguntas para la demostración

1.- Lee con atención las siguientes demostraciones, ¿puedes mencionar diferencias y similitudes entre estas demostraciones?

a) Demostrar que una función cuadrática dada en su forma general $y = ax^2 + bx + c$, puede ser transformada a la forma $y = a(x-h)^2 + k$, donde las coordenadas de su vértice son $V(h,k)$.

Demostración:

Esto se puede hacer completando un trinomio cuadrado perfecto de la siguiente manera

$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left[\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-b^2 - 4ac}{4a}\right) \\ &= a(x-h)^2 + k \end{aligned}$$

donde: $V\left(h = \frac{-b}{2a}, k = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$.

b) Demostrar que $\boldsymbol{tan^2\theta + 1 = sec^2\theta}$.

Demostración:

Si en el círculo unitario se definen $tan\theta = \frac{y}{x}$ y $sec\theta = \frac{1}{x}$ y, además, por el teorema de Pitágoras se sabe que $x^2 + y^2 = 1$, entonces

$$tan^2\theta + 1 = sec^2\theta$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y^2 + x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Lo que lleva a que $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$, que verifica la identidad.

c) Demostrar que $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0}$.

Demostración:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos^2 x)}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{sen^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{sen\, x}{x}$$
$$\cdot \lim_{x\to 0}\frac{sen\, x}{(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{sen\, x}{x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0} sen\, x}{\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)}$$

Como las funciones seno y coseno son continuas en $x = 0, entonces$:

$$\lim_{x\to 0} sen\, x = sen\, 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0}(1+\cos x) = (1+\cos 0) = (1+0) = 1$$

Y como $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen\, x}{x} = 1$, *se concluye que,*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{sen\, x}{x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0} sen\, x}{\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)} = (1)\left(\frac{0}{1}\right) = 0.$$

e) Demostrar que $(\boldsymbol{x-2})$ **es factor de** $\boldsymbol{p(x) = x^3 - 7x + 6}$.

Demostración:

Como $p(2) = (2)^3 - 7(2) + 6 = 0$, entonces $p(x)$ es divisible entre $(x-2)$, o $(x-2)$ es un factor de $p(x)$.

Es decir, $(x^3 - 7x + 6) \div (x-2)$ es exacta, y el residuo es cero. Esto significa que existe un polinomio de segundo grado $c(x)$ tal que: $p(x) = (x-2)\cdot c(x)$. En este caso también se dice que $x = 2$ es un cero de $p(x)$, pues $p(2) = 0$.

d) Demuestra que la suma de ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180°.

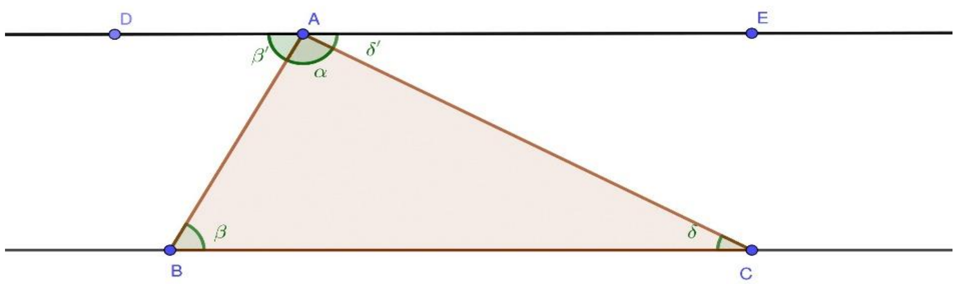
Demostración:

Prolongamos la base del triángulo BC y construimos una paralela que pase por A, como muestra la figura. Observa que los lados AB y AC son transversales para el sistema de paralelas DE y BC. De este modo, podemos afirmar que:

$\angle ABC$ es alterno interno de $\angle \boldsymbol{DAB}$ por lo que $\boldsymbol{m\angle DAB} = \boldsymbol{m\angle ABC}$; es decir, $\boldsymbol{\beta'} = \boldsymbol{\beta}$.

$\angle \boldsymbol{ACB}$ es alterno interno de $\angle \boldsymbol{EAC}$ por lo que $\boldsymbol{m\angle ACB} = \boldsymbol{m\angle EAC}$; es decir, $\boldsymbol{\delta'} = \boldsymbol{\delta}$.

*Los ángulos $\angle \boldsymbol{DAB}$, $\angle \boldsymbol{BAC}$ **y** $\angle \boldsymbol{EAC}$ son consecutivos y forman un ángulo llano; es decir, $\boldsymbol{\beta'} + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\delta'} = \mathbf{180°}$. Dado que $\boldsymbol{\beta'} = \boldsymbol{\beta}$ y que $\boldsymbol{\delta'} = \boldsymbol{\delta}$ tenemos que $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta} = \mathbf{180°}$; que es lo que se quería demostrar; es decir, que "la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180°".*



El segundo bloque, presenta una actividad de reflexión, discusión y argumentación. Se plantea un ejercicio donde el profesor debe justificar sus respuestas dependiendo lo que se requiere en cada caso. Se esperaba con esto, que los profesores hicieran uso de los distintos Métodos para demostrar, de los Modos de demostración y si está consciente que existen distintas etapas en una demostración (Fases Cognitivas de la demostración).

Cuadro 4

Segundo bloque de preguntas para la demostración

2.- Supongamos que Beto y Cris piensan en los números 3 y 11. Ambos notan que la suma 3 + 11 es PAR y el producto es IMPAR. Beto dice: Si la suma de dos números dados es par, su producto es impar. Cris dice: si el producto de dos números es impar, su suma es par. ▪ ¿Las afirmaciones de ambos dicen lo mismo? ¿Por qué? ▪ El producto de dos números es 1271. Suponga que Cris está en lo correcto. ¿Cuál de las siguientes opciones es correcta? a) Puedes asegurar que la suma de los dos números es par. b) Puedes asegurar que la suma de los dos números es impar. c) No estás seguro de que la suma es impar o par hasta que conoces los números dados. ▪ ¿Es la afirmación de Beto cierta? Justifique su respuesta. ▪ ¿Es la afirmación de Cris cierta? Justifique su respuesta.

Por último, el tercer bloque de preguntas corresponde a las subcategorías Funciones de la demostración. Se esperaba identificar los aspectos que el profesor conoce y utiliza en el salón de clase. Este apartado difiere en cuanto a lo directa que son las preguntas, pues se esperaba obtener respuestas más concretas y una discusión por parte de los informantes acerca de la manera en que definen una demostración y el uso que se la da a ésta en el salón de clase y en general en la matemática.

Cuadro 5

Tercer bloque de preguntas para la demostración

3.- ¿Cuáles son las funciones de la demostración matemática en matemáticas en general? 4.- ¿Cómo define usted la demostración matemática? 5.- ¿Qué utilidad podemos darle a la demostración en el salón de clase?

3.4.2.2 Preguntas para explorar las subcategorías de la práctica de definir

El primer bloque, se presentan seis definiciones de la línea recta. Con la lectura de las definiciones esperábamos que el profesor comparara y diera una manera de mostrar diferencias y similitudes acerca de las definiciones. Lo que se esperaba con esta serie de preguntas es que el profesor mostrara respuestas acerca de las características de la definición.

Cuadro 6

Primer bloque de preguntas para la definición

1.- Daremos un listado de las definiciones de la línea recta que profesores de matemáticas proponen en clase.

- ¿Es correcta la definición? Explica por qué.
- ¿En caso de que no, qué elementos no están correctos? ¿Es posible que quite elementos o agregue para que alguna definición sea correcta?
- ¿Podría mencionar similitudes y diferencias entre ellas?

El segundo bloque, se presenta dos preguntas, las cuales atendían a la necesidad y suficiencia como características de la definición. Con esta pregunta queremos identificar los aspectos que conoce el profesor acerca de características de la demostración.

Cuadro 7

Segundo bloque de preguntas para la definición

2.- ¿Qué características le exigirías a un enunciado para que sea la definición "ideal" de un objeto matemático?

3.- ¿De cuántas maneras distintas podría quedar "bien definido" dicho objeto?, ¿cuántas propiedades se requieren y de qué tipo son?

3.4.3 Aplicación del instrumento

Una vez validada la propuesta de categorías y realizado las actividades correspondientes. Se buscó apoyo de profesores de nivel medio superior para colaborar con las sesiones de trabajo y aplicar el instrumento. Las sesiones de trabajo fueron dos, se realizaron en distintos días y grabadas con audio y video. La duración de cada sesión fue alrededor de 60 minutos con los tres profesores en cada una de las sesiones.

La primera sesión fue realizada el 4 de noviembre de 2019. En esta sesión trabajamos la demostración matemática que corresponde a las preguntas que se encuentran en el apartado 3.4.2.1. Las instrucciones dadas a los profesores fueron:

a) Realizar lectura de cada una de las preguntas.
b) Se dio un lapso para que contestaran individualmente.
c) Discusión en conjunto acerca de cada respuesta.

La segunda sesión fue el 25 de noviembre del 2019, se prosiguió a realizar las mismas instrucciones, pero ahora con la definición matemática respectivamente con las preguntas del apartado 3.4.2.2.

3. 5 Informantes

Los informantes son tres profesores de matemáticas de nivel medio superior que pertenecen a preparatorias BUAP que imparten distintas materias de matemáticas. Se hicieron dos sesiones de trabajo con los tres profesores. Para hacer referencia a las aportaciones utilizamos un código de nombres para cada profesor, Juan, Iván y Frank. Para los comentarios o intervenciones que hicimos es la palabra Investigador.

El profesor Juan es licenciado en Matemáticas con maestría en Ciencias Matemáticas, actualmente imparte clases en la preparatoria Emiliano Zapata de la BUAP. Tiene 10 años de experiencia en nivel medio superior y anteriormente 5 años en superior.

El profesor Iván es licenciado en Matemáticas con doctorado en Ciencias Matemáticas, actualmente imparte materias de matemáticas en la preparatoria Enrique Cabrera Barroso de la BUAP.

El profesor Frank es licenciado en Matemáticas con maestría en Ciencias Matemáticas. Actualmente labora en la preparatoria Emiliano Zapata de San Martín Texmelucan.

De los vídeos de las dos sesiones de trabajo se extrajo información que sirvió para la detección de oportunidades de investigación con la que profundizamos en el entendimiento sobre el Conocimiento de la Práctica Matemática que pone en juego el profesor. A continuación, detallaremos dos acercamientos para la recogida de información con sus correspondientes protocolos de análisis de información.

3. 6 Protocolo de análisis

Dado que construimos unas categorías teóricas las cuales se encuentran en el apartado 2.2.2, el tipo de análisis en que organizamos la información se basará en las diferentes prácticas matemáticas que se detectaron en la literatura y que pudieron ser observadas en las sesiones. Una vez aplicadas las actividades y recolectado nuestros datos, se prosiguió a transcribir los datos, se hizo relectura de las transcripciones. Se utilizó el método de organización de la información es por medio de Top-Down (Grbich, 2013) que nos dio oportunidades de ampliar y contrastar las características presentadas en la Tabla 2.1. Por comodidad, la numeramos como Tabla 2.2. Colocamos el sistema de categorías que fue resultado del análisis documental realizado y presentado en el Capítulo 2.

Tabla 2.2

Sistema de categorías, subcategorías y posibles descriptores de conocimiento del KPM

Categoría	Subcategorías	Nomenclatura	Posibles descriptores de conocimiento	Nomenclatura
PRÁCTICA DE DEMOSTRAR	Tipo de demostración	DEM. 1	En relación a la implicación	DEM. 1.1
			En relación al cuantificador existencial	DEM. 1. 2
			En relación al cuantificador universal	DEM. 1. 3
	Método para demostrar	DEM. 2	Silogismos	DEM. 2. 1
			Reducción al absurdo	DEM. 2. 2
			Inducción completa	DEM. 2. 3
			Constructivo	DEM. 2. 4
			Analogía	DEM. 2.5
			Dualidad	DEM. 2.6
	Usos de los registros de representación en la demostración		Geométrico	DEM. 3. 1
			Algebraico	DEM. 3. 2
			De las coordenadas	DEM. 3. 3
			Probabilístico	DEM. 3. 4
			Topológico	DEM. 3. 5
	Modo de demostración	DEM. 4	Sintético o directo	DEM. 4.1
			Analítico o indirecto	DEM. 4. 2
	Fases cognitivas de la demostración	DEM. 5	Fase de interpretación	DEM. 5. 1
			Fase de análisis	DEM. 5. 2
			Fase de síntesis	DEM. 5. 3
			Fase de profundización	DEM. 5. 4
	Funciones de la demostración	DEM. 6	Verificación	DEM. 6. 1
			Explicación	DEM. 6. 2
			Sistematización	DEM. 6. 3
			Descubrimiento	DEM. 6. 4
			Comunicación	DEM. 6. 5
			Esquema de prueba experimental	DEM. 7. 1
			E. de prueba inductivo de un caso	DEM. 7. 2

	Tipos básicos de demostración	DEM. 7	E. de prueba inductivo de varios casos	DEM. 7. 3
			E. de prueba inductiva sistemático	DEM. 7. 4
			E. de prueba transformacional	DEM. 7. 5
			E. de prueba preformal	DEM. 7. 6
			E. de prueba axiomático	DEM. 7. 7
			E. de prueba gráfico	DEM. 7. 8
			E. de prueba numérico	DEM. 7. 9
			E. de prueba de inducción completa	DEM. 7. 10
PRÁCTICA DE DEFINIR	Proceso de conceptualización	DEF. 1	Constructivos o a priori	DEF. 1. 1
			Descriptivos a posteriori	DEF. 1. 2
	Características de la definición	DEF. 2	Precisión en la terminología-jerarquización	DEF. 2. 1
			No circularidad	DEF. 2. 2
			No ambigua	DEF. 2. 3
			No contradictoria o estructuralmente inequívoca	DEF. 2. 4
			Invariante bajo cambio de representación	DEF. 2. 5
			Equivalencia	DEF. 2. 6
			Minimalidad	DEF. 2. 7
			Degeneración	DEF. 2. 8

Capítulo 4. Análisis de la información

En esta sección detallamos el análisis de las respuestas de los profesores de las dos sesiones de trabajo. Analizamos algunos momentos que muestran evidencias o indicios de conocimientos acerca del KPM. Seguido de mostrar la clasificación de las respuestas conforme las categorías que construimos. Utilizamos la metodología Top-Down para complementar las categorías con la investigación documental y el análisis de las respuestas de los profesores.

4.2 Registros de los datos obtenidos

Las sesiones se realizaron de manera oral, fueron grabadas con audio y video. Para cada sesión se realizó la transcripción de las respuestas en su totalidad. Se realizó una tabla para ordenar y agrupar los datos obtenidos. La primera parte (Tabla 3.4) corresponde a los datos profesionales de los informantes, la cual puede dar información extra o más visible para el lector.

Tabla 3.4

Características de los informantes

Nombre	Sexo	Estudios	Área de estudio	Asignaturas que imparte	Años de experiencia
Iván	Masculino	Licenciatura en Matemáticas Maestría en Ciencias Matemáticas Doctorado en Ciencias Matemáticas	Topología General	Álgebra Geometría plana Trigonometría	14
Juan	Masculino	Licenciatura en Matemáticas Maestría en Ciencias Matemáticas	Teoría de continuos	Geometría plana Trigonometría Precálculo	15
Frank	Masculino	Licenciatura en Matemáticas Maestría en Ciencias Matemáticas	Lógica posibilista Análisis matemático	Cálculo Estadística Geometría Trigonometría	8

4. 2 Análisis de datos con la metodología Top-Down

La perspectiva metodológica usada para análisis de datos se corresponde a una aproximación Top Down (“de arriba abajo”). De esta manera tenemos la oportunidad de formular nuevos saberes plasmados en las categorías resultantes de los datos y analizarlas con la construcción teórica realizada anteriormente.

Este enfoque se usa como metodología en este estudio al considerar que proporciona doble acercamiento a los datos que aportará perspectivas diferentes sobre el análisis. Según Gribch (2013), esta metodología funciona en términos de la ciencia de la información y utilizada para análisis de datos de lo general a lo particular (Top-Down) y de lo particular a lo general (Bottom-Up). Además, al tratarse de un doble acercamiento tenemos libertad para general nuevas categorías en el cuerpo teórico de una caracterización (Escudero, 2015).

La teoría del esquema es el proceso que pasa una persona cuando lee un texto para darle sentido (Nestigen, 2002). Incluye las habilidades como el Top-Down, el Bottom-Up y los esquemas formales. Nestigen menciona que los esquemas formales son un tipo de conocimiento que se incorpora y utiliza en el Bottom-up del procesamiento de información, basado en los datos que proporciona un texto. Mientras los esquemas de contenido que incluyen todo lo que puede aportar el lector al texto sobre su contenido es primordial en el Top-Down, por ejemplo, las experiencias personales.

4. 3 Acercamiento Top-Down

Según Nestigen, en el Top-Down se busca información para obtener una idea general que pueda fungir como un esquema formal. En esta etapa de investigación la búsqueda de información provino de lectura especializada. Se utilizaron definiciones de las prácticas matemáticas definir y demostrar como objeto matemático referidos por la demostración y la definición en el apartado 2.3 y 2.4. De esta manera se generó un sistema de categorías que describiremos como parte de los instrumentos de análisis.

La construcción teórica del sistema de categorías nos ayuda a realizar un primer análisis del conocimiento profesional para observar los datos y nos informe acerca del conocimiento especializado para después poder contrastarlo con la evidencia empírica.

4. 3 Subcategorías de la práctica de demostrar

Para analizar las respuestas de los profesores acerca de las características de la demostración, consideramos las subcategorías de la Tabla 2.2. A la vez cada subcategoría presenta posibles descriptores de conocimiento. A continuación, detallamos los momentos en que los profesores manifestaron alguno de estos descriptores.

DEM. 1.

Se refiere a la estructura lógica del enunciado de una proposición, teorema, corolario. Los posibles descriptores de conocimiento están dados en cuanto a la implicación, o en relación al cuantificador existencial. Un ejemplo mostrado en la discusión de la sesión se muestra a continuación con *Relación al cuantificador universal*:

Investigador:	*Una pregunta adicional, ¿si hubiese venido un límite aquí, pero una demostración con épsilon y delta, la pondrías en un cajón distinto a los algebraicos?*
Iván	*Sí, por los cuantificadores. Se entiende el concepto de cuantificador de para todo…*
Frank	*Además, estás partiendo de la definición en esas pruebas, en esas pruebas no tienes más que la definición. Cosa que no la tienes aquí, porque en todas utilizas teoremas, o conceptos conocidos o auxiliares que no se ven muy directamente en la a), pero sé que sí. Porque hay cosas que a mí no me presentaron como teoremas.*

En este apartado de la sesión se discutía acerca de la demostración c) de la actividad 3.4.2.1, los profesores mencionaban que estaba incluida en una demostración algebraica. A lo que preguntamos qué pasaría si la demostración no hubiera utilizado recursos exclusivamente algebraicos sino haciendo uso de la definición de límite. El profesor Iván hace mención que se utiliza el cuantificador universal cuando la demostración se hace con la definición. Un descriptor de esta subcategoría es cuando una demostración se presenta en *relación al cuantificador universal*, que se refiere a cuando una proposición se limita a asegurar la existencia de un objeto matemático.

Por otro lado, otro descriptor de esta subcategoría es cuando la demostración es *En relación a la implicación*, se discute cuando un enunciado presenta una condición necesaria y suficiente. El profesor Juan es explícito cuando menciona que se encuentra un sí y sólo sí. Lo que nos dice que si el producto de dos números pares es impar es condición necesaria y suficiente para que se verifique que la suma de esos dos números será par. Finalmente, los tres profesores mostraron conocimiento acerca de cuándo dos expresiones son equivalentes en cuanto a la lógica proposicional.

Investigador:	*Si Beto hubiera dicho "la suma de dos números par es par sí y sólo sí su producto es impar" y Cris hubiera dicho "el producto de dos números es impar si y sólo si la suma es par". Independientemente de la veracidad, si los enunciados hubiesen estado en esos términos, ¿serían equivalente entre sí?*
Juan:	*Por el hecho de sí y sólo sí.*
Iván:	*No. ¿Me puedes repetir la pregunta?*
Investigador:	*Sí. Imaginemos Beto dice "la suma de dos números par es par si y sólo si su producto es impar" y Cris dice "el producto de dos números es impar si y sólo si la suma es par". Ambos utilizaron sí y sólo sí. La pregunta es si eso los hace equivalentes independientemente de la veracidad.*
Todos:	*Sí, lógicamente sí.*

Nuevamente, *En relación a la implicación,* el profesor Frank utiliza un "entonces", lo que nos dice que el profesor conoce acerca la naturaleza de la implicación.

Frank: *No entiendo la primera línea donde indica que la tangente cuadrada más uno es igual a la secante cuadrada.*

Juan e Iván *Es una identidad trigonométrica. Es teorema de Pitágoras.*

Frank *Pero aquí dice por el teorema de Pitágoras se sabe que x +y, entonces la tangente es igual a uno.*

DEM. 2.

Cuando se atiende a los procedimientos lógicos de la demostración. Los descriptores de conocimiento que se incluyen en esta subcategoría son, cadenas de silogismos, por casos, reducción al absurdo, por inducción, constructivo, por analogías, y dualidad.

Frank: *Sí, entonces lo mismo pasaría como con e, pareciera que ya terminaste porque ahí está el entonces. Como ya tengo esto, entonces aquello que es lo que quería probar. Pero dice demuestra* $tan^2(\theta)+1=sec^2(\theta)$ *, pero ya acabé en la línea tres, entonces esto. Lo ideal sería formarla a partir de las construcciones de x e y. Es decir, tengo el teorema de Pitágoras, seguido de dividir ambos términos entre x, por ejemplo. Dividiendo ambos términos entre x garantizando que es diferente de cero, y construyo la identidad que busco.*

Investigador: *Sí, de hecho, yo pienso que en esa no es exactamente lo mismo que en e. Porque no es que se esté diciendo "entonces que* $tan^2(\theta)+1=sec^2(\theta)$*" sino que esta igualdad me lleva a esta otra igualdad y está a otra, para al final llegar que uno entre* $x^2=\frac{1}{x}$.

Juan: *Lo que va es como el regreso.*

Iván: *Es que lo usa en la cuarta línea. Toma la igualdad, el teorema de Pitágoras en la cuarta línea donde dice "*$y+x^2=1$*" es otra manera de demostrarlo, nada más. Puede hacerse como dice Frank o de esta manera.*

Este apartado, se genera una discusión de la demostración a), finalmente el profesor Iván concluye que la demostración presentada es otra manera de demostrarla. Este fragmento es continuación de la discusión anteriormente mostrada cuando se trató *En relación a la implicación.* De esta manera, notamos que el profesor conoce que la demostración es por medio de cadenas de *Silogismos*.

Investigador: *La proposición "si el producto de dos números es impar, su suma es par". ¿No podríamos interpretarlo como "producto de dos números impares es impar"?*

Juan: *Yo me fui por el ejemplo que tomaron. Beto y Cris piensan en número… yo no pensé en los demás casos.*

Frank: *Aparte están pesando en primos. Hay que ver si pesan ese tipo de cosas.*

Investigador: *Por ejemplo, si yo doy un número impar, ¿proviene del producto de dos impares? Y en consecuencia la suma de esos dos números va a ser par*.

Juan: *Se tendría que demostrar.*

Frank: *Otra vez.*

Iván: *Sería por reducción al absurdo*.

En esta parte de la sesión de trabajo, los profesores discuten la actividad 2 para la sesión de la demostración: *"si un número impar proviene del producto de dos impares"* lo que da como consecuencia que "*la suma de esos dos números va a ser par".* Al final de la discusión el profesor Iván menciona que se tendría que volver a demostrar ese enunciado por medio de reducción al absurdo. Un descriptor de esta subcategoría es el *método por reducción al absurdo,* para este acaso exclusivamente, se realiza por contraposición. Es decir, si queremos demostrar que $H \Rightarrow T$, suponemos que $H \wedge \neg T$ y probamos el contrarrecíproco. De esta manera probaríamos que la suma de dos números $b + c$ no es par, entonces $a = bc$ el producto de los dos números es par. Lo que nos conduciría a una contradicción.

Por otro lado, en esta subcategoría se incluye el descriptor de conocimiento cuando la demostración es por *Inducción completa*, utilizada usualmente cuando aceptamos una propiedad P que es cierta para los números naturales y se verifican las propiedades del principio de inducción. El profesor Frank hizo uso de este conocimiento cuando pretende generalizar la afirmación de Cris, incluso escribe en notación general los números pares e impares.

Investigador *Frank, tú nos decías que la afirmación de Beto es la que es falsa.*

Frank: *Como el contraejemplo que puso Juan.* $2 + 6 = 8$ *y* $(2)(6) = 12$. *La suma de dos números que es par su producto es par.*

Juan: *¿Está tratando de buscar la generalización? Si la suma de dos números es par, el producto es impar.*

Frank: *Sí, yo estaba viendo las generalizaciones. Escribes un número par como* $2k$ *y los impares* $2k + 1$. *Sí queda que la de Cris es verdadera.*

Juan: *El producto de pares es par.*

Frank: *[…] tener dos pares y dos impares o uno y uno. Y nada más se da el caso en que ambos son impares. Si el producto es impar entonces a fuerza debe provenir de dos números impares.*

DEM. 3.

Se refiere a los procedimientos matemáticos, como son, geométrico, algebraico, de las coordenadas, análisis matemático, o por estilos alternativos.

Frank: *Yo creo que la c), se podría seguir de manera continua. Es decir, utiliza las propiedades de los límites, entonces al cociente podrías separarlo como los límites del cociente y afirmar que esta es la intención y ya llega sin tanto rollo. Hacerlo de manera meramente algebraica.*

En esta parte de la sesión de trabajo, los profesores discutían acerca de las demostraciones presentadas en la sesión. En particular, el profesor Frank menciona que la demostración c) (ver sección 3.4.2.1) podría demostrarse con propiedades que el profesor conoce acerca de los límites (que tiene que ver con el *conocimiento de los temas*) y que podría hacerse de manera más sencilla y utilizando recursos exclusivamente algebraicos.

Investigador: *No me quedó muy claro por qué es muy diferente la geométrica. La del inciso d).*

Iván: *Por la estructura, porque las otras son en "cierto sentido" algebraicas. Por ejemplo, la de polinomios es algebraicas, en la de límite es la parte algebraica ni siquiera es la concepción geométrica de limite o limite. Pero la de geometría es completamente geométrica, donde los alumnos no ven una igualdad sino una estructura geométrica; es otra construcción mental que hacen ellos.*

En este apartado preguntamos por qué la demostración d) es diferente a las otras demostraciones. El profesor Iván menciona que la demostración presentada es meramente *geométrica*, pues presenta recursos geométricos, así como el uso de un dibujo para visualizar el problema. Además, se puede ver como una construcción mental (que también podría caber en la *Fase de interpretación* de la subcategoría *Fases cognitivas de la demostración).* Esto último porque se comprenden los términos al inicio y la notación que se está utilizando.

DEM. 4.

Cuando atendemos al procedimiento de exposición de la demostración. Es decir, si es sintético (directo), o analítico (indirecto).

Investigador: *La primera se parece más a lo que comentabas Frank (de la cuadrática) de partir de esto y comenzar a desarrollar hasta llegar a la conclusión. En este caso parece que estamos tomando la conclusión.*

Juan: *Sí, se está trabajando con la conclusión para ver si no hay algún error.*

Frank: *Es como una demostración directa.*

Iván: *Todas son directas. Nada más que hay trucos algebraicos diferentes y se usan propiedades. La única que es completamente diferente es la de geometría y la del polinomio.*

Los profesores comentaban la demostración a), todos estuvieron de acuerdo en que es una demostración directa (cuando se presenta de manera formal el producto de la demostración). En esta parte el profesor Iván menciona que es una *demostración directa*, donde se cumple que toda función cuadrática en su forma general puede ser escrita a su forma estándar. Se está haciendo uso de que la función cuadrática es elemento del conjunto de todas las funciones cuadráticas, se garantiza que la propiedad de que pueden ser escritas a su forma estándar es verdadera.

DEM. 5.

Se refiere a que existen diversas fases cuando se elabora una demostración. Estas fases son cuatro, el extracto siguiente es acerca de la fase de profundización (estudiar la necesidad de las hipótesis, el significado del teorema, identificar el tipo de enunciado.).

Frank: *El alumno suele generalizar. Quizá lo que les pasó a Beto y Cris, tienen dos números y de ahí llevan a la generalización. Sí funciona en la matemática, pero necesitas un poco más de experiencia para generalizar porque debes ir acotando (obteniendo casos) esa información, quitando casos o cosa así.*

El profesor Frank, manifiesta que en ocasiones los estudiantes llegan a generalizar a partir de ejemplos concretos, pero que esto no asegura que la propiedad que funciona con casos particulares se cumpla en general. También menciona que se necesita más experiencia para entender lo que significa este proceso de generalizar en matemáticas. Así, este comentario lo clasificamos en la *Fase de profundización*, que es cuando se aplica el conocimiento acerca de los elementos necesarios como la hipótesis, el significado de teoremas y proposiciones, los métodos empleados.

A continuación, otro extracto acerca de la *Fase de análisis*. El profesor Frank recuerda que cuando se trabaja un teorema y se quitan propiedades o cualidades a este, se utiliza la demostración para explicarle al estudiante. Así, en este sentido, hay que recordar resultados anteriores y relacionarlos con la proposición y revisar la corrección del razonamiento.

Investigador: *Ustedes han enfrentado una situación en donde dicen, no se lo voy a explicar al estudiante, pero he utilizado mi conocimiento sobre demostración ante una pregunta inesperada de algún estudiante. ¿No les ha pasado? Que dicen qué bueno que tomé mi curso de noveno semestre porque pude demostrar tal y tal cosa para nuestra aula.*

Frank: *Yo sí recuerdo una premisa que dice, "si f(a)=f(b) entonces a=b". No necesariamente como cuando lo ves con la función cuadrática. El alumno me dijo "y qué pasa si lo pongo diferente, es decir, que si f(a)=f(b) entonces a es diferente de b. Ahí está dando el sentido de razonamiento. Como cuando nosotros estudiamos, quítale esto al teorema o qué le pondrías al teorema para que se cumpla. O esto ya sabes que es falso, pero cómo le haces para que sea verdadero. En ese tipo de preguntas si necesitas hacer uso de la demostración para decirle al alumno que está pasando esto.*

DEM. 6

Se refiere al uso que se le da a la demostración. Los posibles descriptores para esta subcategoría son, validación o justificación (acerca de la verdad de una afirmación), explicación (por qué es verdad y qué significados envuelven a la afirmación), sistematización (organización de resultados en un sistema axiomático), descubrimiento (la posibilidad de que surjan nuevos resultados), y comunicación (comunicar los resultados y por qué son o no ciertos).

Investigador: *Si queremos ponerlo nuevamente en términos de lógica proposicional. ¿cómo sabemos o qué tenemos que hacer para que la afirmación de Cris es cierta o no? ¿Qué tenemos que hacer para decir que la afirmación de Beto es cierta o no? También lo pregunto en términos de qué le aceptaríamos a un estudiante. Si un estudiante nos dice "sí, la afirmación de Cris es cierta", ¿qué tendría que decirnos para que estemos totalmente convencidos de que la respuesta sí o no es correcta?*

Frank: *Para aceptar lo de Cris, Cris tendría que probarlo. Y lo otro es un contraejemplo. Ni mil ejemplos nos basta para probar una teoría, pero sí basta un ejemplo para probar la falsedad. Entonces se da un contraejemplo para Beto para probar que la proposición es falsa. Con Cris tendrías que* *suponer (dice que el producto de dos números es impar) los casos, escribirlos. Porque sólo dice que dos números, tendrías que tomar dos números. Cuáles son las combinaciones, que los dos sean impares, dos pares, uno y uno. Y ves que si esos casos implican lo mismo (que la suma sea par).*

Investigador: *¿Cuáles son las funciones de la demostración matemática en general? Es decir, no sólo en el salón de clase sino en general.*

Frank: *Para refutar afirmaciones.*

Esta pregunta fue una con las cuales se cerró la sesión acerca de la demostración, se preguntó acerca de las *Funciones de la demostración,* la cual enmarcamos como una subcategoría del KPM. El profesor Frank menciona que, para refutar afirmaciones, es decir, aceptar o rechazar la validez de una afirmación. De esta manera podemos considerar que se hace el uso de la función *Validación* que se utiliza para convencer por medio de la argumentación.

A continuación, presentamos otro extracto de la respuesta de los otros profesores.

Investigador: *¿Cuáles son las funciones de la demostración matemática en general? Podemos traducirla como, ¿para qué sirven las demostraciones matemáticas?*

Juan: *Ayudan a desarrollar.*

Frank: *Yo recuerdo que me dijeron "todo lo que digas a partir de ahora, si es verdadero tienes que probarlo".*

Investigador: *Podemos decir que para refutar, verificar.*

Frank: *Sí; eso me refiero, a la validez de lo que me estás diciendo.*

Iván: *Pues al demostrar, las afirmaciones son verdaderas.*

Frank: *No porque también demuestras que las afirmaciones son falsas. Por medio del contraejemplo.*

Frank: *Por eso es la refutación de afirmaciones; verdadero o falso, te mando para acá o por acá.*

Juan: *Yo estoy afirmando esto, ah pues lo demuestro.*

Notamos que el profesor Frank, nuevamente menciona que existen afirmaciones falsas, por lo que está haciendo uso de que una demostración sirve para *validar* si una proposición es verdadera o falsa. El profesor Juan está de acuerdo en que si afirmas algo debes demostrarlo para verificar si esa afirmación es válida.

DEM. 7.

En esta subcategoría hacemos mención y destacamos partes de las sesiones con los profesores que nos permitieron obtener información acerca del conocimiento que presentan del KPM. De esta manera pudimos clasificar sus respuestas en algunos de los descriptores para esta subcategoría.

Con el siguiente extracto mostramos que se hace uso de un descriptor de conocimiento que es denominado *Esquema de prueba inductivo de un caso***:**

Investigador:	*¿Tuviste necesidad de ver las otras combinaciones como Frank? Cuando par por par…*
Juan:	*No, porque me fui más a partir del ejemplo. De la estructura que tiene Cris, 3x11 es impar entonces 3+11 es impar. Así dije que está jugando con el impar por el impar y la suma de impar más impar. Me fui más por la estructura, impar por impar es igual a impar, implica impar más impar igual a par. Ya no jugué con los otros casos sino con la veracidad de la implicación.*

Notamos que el profesor Juan establece la validez del enunciado "*el producto de dos números impares implica que la suma de esos dos números impares es par"*. Tomando exclusivamente el caso tal cual el enunciado, no tuvo necesidad de verificar con el caso de que dos números impares implican que la suma sea impar. Incluso argumenta que se fijó en demostrar la veracidad de la implicación. De esta manera él puede generalizar el enunciado.

Otro descriptor de conocimiento es el *Esquema de prueba axiomático,* que se refiere a las demostraciones matemáticas y a la validez de las proposiciones haciendo uso de un proceso deductivo mediante axiomas, enunciados y resultados que puede ser deducidos en las demostraciones.

Frank: *Otra cosa que noto, por ejemplo, en la de límite [demostración inciso c)], hace referencia a un límite que ya se probó anteriormente.*

Investigador: $\frac{sen(x)}{x}$*, ¿no?*

Frank: *Sí. La [demostración] d) también hace referencia a la definición de ángulos internos alternos. Cosa que no tiene la primera.*

Iván: *Es que todas hacen referencia a cierta estructura matemática y a teoremas. Así tendrías que demostrar todo de una u otra manera.*

El profesor Frank notó la característica en la demostración c), donde se hace referencia a propiedades de límites que él conoce y que siguen a la estructura matemática. También, nota que se utiliza una definición previa para poder realizar la demostración d), la de ángulos internos. Así el profesor Frank expone su conocimiento acerca del esquema de prueba axiomático.

Otra fracción acerca de este esquema se dio con el profesor Iván, que en la extracción anterior también muestra conocimiento acerca de él y comenta con el profesor Frank que todas las demostraciones presentadas hacen referencia a una estructura matemática. En este episodio el profesor Iván menciona que en la demostración e) se utiliza un teorema para concluir la demostración con una cadena de inferencias cortas gracias a dicho teorema.

Iván: *La del polinomio utiliza una propiedad del teorema de divisibilidad para demostrar. Por eso en la segunda línea acabó. Ese lema o teorema dice que si el residuo es cero entonces lo divide.*

Otro descriptor que encontramos con las respuestas de los profesores es el *Esquema de prueba gráfico*, se refiere a que basas sus conclusiones en consecuencia directa de representaciones gráficas.

Investigador: *¿Qué utilidad podemos darle a la demostración en el salón de clase?*

Iván: *[…] En geometría, demostraciones sencillas.*

Frank: *Teorema de Pitágoras.*

Iván: *Teorema de Pitágoras, pero una demostración fácil de congruencia o semejanza de triángulos.*

En este extracto se comentaba acerca de los usos que se le dan a la demostración, se realizaron una serie de comentarios acerca de utilizar la demostración en distintos niveles educativos y la pertinencia o no de ésta. Así, el profesor Iván comentó que el Teorema de Pitágoras puede presentar una demostración sencilla en el nivel medio superior mediante semejanza de triángulos o congruencias. De esta manera las conclusiones se basarían en la representación que se da para llegar a demostrar el teorema.

4. 4 Subcategorías de la práctica de definir

Recalcamos que, al iniciar la sesión se dieron indicaciones, además de mencionar que el interés está puesto en la definición como objeto matemático, pero la definición por sí misma sin ubicarla en un nivel educativo como tal. A continuación, presentamos los descriptores de conocimiento que presentaron los profesores para cada subcategoría.

DEF. 1.

Esta categoría se refiere cuando la definición tiene como papel sistematizar el conocimiento existente (descriptivo o a posteriori), o bien, cuando produce nuevo conocimiento (constructivo o a priori). Por ejemplo:

Investigador: *Creo que todos conocemos la definición de cuadrado.*

Frank: *Polígono regular de cuatro lados, pero antes ya definí polígono.*

Juan: *Los lados son congruentes y los ángulos congruentes.*

Frank: *Defino el cuadrado en función a lo que definí antes.*

Frank: *Tendría que, tener definido equiángulo y qué es un equilátero*

Este extracto viene referido acerca de la discusión de la definición de un cuadrado. El profesor Frank comentó que para poder definirlo hay que conocer y tener definido otros conceptos. Esto nos enmarca que el profesor Frank tiene experiencia con las propiedades que se necesitan para definir al cuadrado y de las cuales necesita para poder deducir e integrar la definición de un cuadrado. De esta manera comentamos que este descriptor de conocimiento denominado *Definición descriptiva o a posteriori*, fue expuesto por el profesor Frank que seleccionó ciertas propiedades para deducir las demás.

DEF. 2.

Esta categoría hace referencia a las cualidades propias de la definición. Haremos un listado de cada una de ellas, presentando respuestas de los profesores si es que las encontramos para cada característica que clasificamos en la tabla 2.3.1.

El descriptor de conocimiento para esta subcategoría, *Precisión en la terminología y jerarquización*, se remite al uso de los términos básicos o que son previamente definidos. Por ejemplo:

Investigador:	*Creo que todos conocemos la definición de cuadrado.*
Frank:	*Polígono regular de cuatro lados, pero antes ya definí polígono.*
Juan:	*Los lados son congruentes y los ángulos congruentes.*
Frank:	*Defino el cuadrado en función a lo que definí antes.*
Frank:	*Tendría que, tener definido equiángulo y qué es un equilátero*

Nuevamente, colocamos este extracto, pues nos da información acerca de este descriptor de conocimiento. Una característica para definir objetos matemáticos que se utilizan términos previamente definidos. En este caso equiángulo y triángulo equilátero. Lo enmarcamos como un proceso de particularización no de generalización pues hay que tener definido lo que es un polígono regular.

No circularidad, este descriptor de conocimiento hace referencia al concepto en la propia definición. Pero el hecho que se mencione en la definición tampoco tiene que ser que lo esté utilizando para definir. Por ejemplo:

Investigador:	*¿Esta correcta la definición? ¿Si o no? Si se puede arreglar. ¿La primera definición es correcta?*
Investigador:	*El inciso a) dice: Conjunto infinito de puntos unidos en una misma dirección y de una sola dimensión, que se compone de segmentos infinitos, que son las pequeñas líneas que unen dos puntos.*
Frank:	*¿Estás definiendo línea recta?*
Investigador:	*Sí, la definición de línea recta.*
Frank:	*Una de las características de la definición es que no puedes usar el término para definirse a sí mismo. Si yo estoy definiendo línea recta, debo decir pequeñas líneas que unen los puntos. […]*

Esta sección de preguntas fue de manera directa para obtener información de esta subcategoría. El profesor Frank menciona que *"no se puede usar el término para definirse a sí mismo",* esto nos conduce a una de las características de la definición que es *No circularidad.* El profesor se refiere a que no se debe hacer uso de lo que se está definiendo, pero que sí puede referirse a ese concepto utilizando otras alternativas de nombres.

Otro descriptor que encontramos en las respuestas de los profesores es, que la definición es *No ambigua*, se refiere a la caracterización de manera univoca de una clase de objetos. Por ejemplo:

Investigador:	*En el inciso d) Es la figura geométrica obtenida al unir dos puntos, tal que la distancia recorrida sobre esta figura es la más corta.*
Juan:	*Está hablando de un segmento de recta.*
Frank:	*Me suena más a segmento de recta.*
Iván:	*Nada más le faltaría decir que la genera a partir de la unión.*
Juan:	*Se genera a partir de unir esos puntos.*
Iván:	*"La figura obtenida al unir dos puntos", le falta hacerla más general.*
Frank:	*La recta es infinita.*

El profesor Iván menciona que a la definición de recta le hace falta hacerla más general. Esto con la discusión acerca de lo que está describiendo la definición, si es una línea recta o un segmento de recta. De esta manera, presenta conocimientos acerca de que la definición debe interpretarse de manera única para el objeto matemático que se está definiendo.

Otra característica es que sea *No contradictoria o estructuralmente inequívoca*, cuando las características empleadas deben presentarse y ser consistentes. Consideramos el siguiente extracto para este apartado:

Investigador: *Si tratamos de reorganizar [*el enunciado de la demostración e)…], *podríamos decir es el conjunto de puntos tales que dados cualesquiera dos, la pendiente es constante. Quitando la idea de línea recta.*

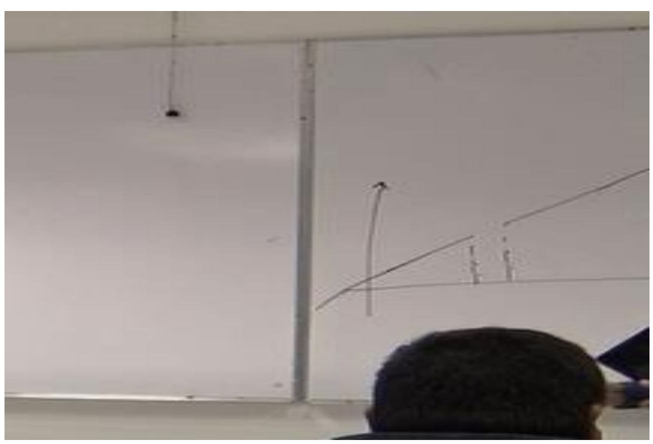
Iván: *Sí, como son geométricos los puntos.*

Iván: *O decir que la pendiente es constante.*

Investigador: *Pero qué pasa si yo tengo dos segmentos (Figura 2).*

Figura 2

Fotografía de la sesión de trabajo de la práctica de definir



Se discutía acerca de una de las definiciones presentadas. Se planteó que a la definición de línea recta se le quitaran términos y ver si seguía manteniendo la idea de definir a dicho objeto. En la sesión se dibujó en el pizarrón (Figura 2) para que los profesores visualizaran este cuestionamiento. Se prosiguió con la conversación.

Juan:	*Lo mismo de hace rato, que haya un hueco.*
Investigador	*Se cumple, ¿no?*
Juan:	*Sí, la pendiente es constante. Si tomas el extremo del semirayo, punto inicial.*
Frank:	*Pero dónde están esas rectas, ¿en un plano cartesiano? Pero entonces estaría diciendo que al plano cartesiano le faltan pedazos, ¿no?*
Investigador:	*Referente a la definición, tengo dos puntos cualesquiera de este lugar geométrico, lo que se va a cumplir es que la pendiente* $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *es constante.*
Juan:	*Incluso tomando los puntos iniciales de esas semirectas (Figura 2) se cumple que es constante.*
Iván:	*Pero faltan los dominios.*
Investigador:	*Pero lo que forman es parte del lugar geométrico.*
Frank:	*¿Por qué razón no se quitó? En qué dice que truena la definición.*

En este extracto, se pretendía quitar elementos de la definición e) para ver si no quedaba débil. Si no existe un lugar geométrico que cumpla con la misma condición de que dados dos puntos cualesquiera tiene una pendiente constante. Podríamos decir que el lugar geométrico del plano cartesiano y las semirectas se extienden. De esta manera podemos definir el lugar geométrico sin tomar en cuenta los intervalos donde hay huecos.

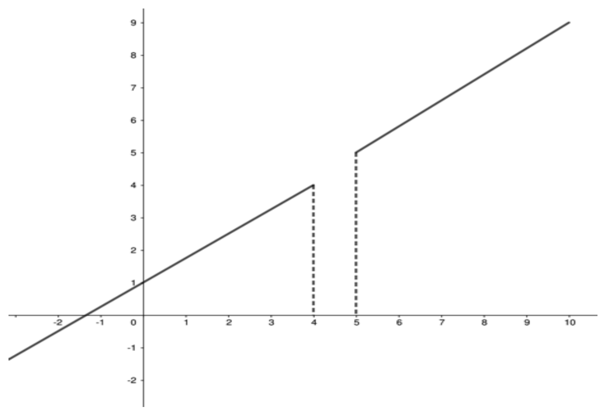
Finalmente, el profesor Iván menciona que incluso así, hace falta decir en dónde viven los puntos que estamos tomando. Mientras el profesor Frank que hacen falta los puntos del intervalo abierto. De esta manera, los dos profesores comprendieron lo que se pretendía cuando quitábamos términos de la definición y ver que esta definición no presentaba contradicción en el sistema de la geometría analítica.

Iván: *Es que le falta decir todos los puntos en el plano.*

Frank: *Vuelvo a lo mismo, faltarían puntos, esos puntitos que aún no consideras (dibujo pizarrón) sí los está considerando la definición.*

Figura 3

Ilustración de la Figura 2



Existen definiciones que presentan *Equivalencia*, que es otra característica de la definición matemática. Se refiere cuando la definición de un concepto se puede dar con más de una formulación.

Investigador *[…] ¿De cuántas maneras distintas podría quedar bien definido dicho objeto?*

Frank y Juan: *No es única, hay equivalencias.*

Las respuestas de los profesores Frank y Juan, fueron totalmente explicitas. Los profesores expusieron su conocimiento acerca de que existen varias maneras de definir un objeto o concepto matemático. Tal cual, como en la actividad que presentamos acerca de las diferentes definiciones para línea recta que son muy usuales en el salón de clase.

La *Minimalidad*, se refiere cuando la definición no presenta redundancia de las características, además, ninguna de las características se deduce de las otras. Por ejemplo, cuando en la discusión el profesor Juan concluye la discusión con su respuesta.

Investigador: *Pasamos con la definición f) que dice así, Es el conjunto de soluciones* (x, y) *a la ecuación* $Ax + By = C$, *donde A, B y C son constantes (con al menos una de las constantes A y B distinta de cero). ¿Qué opinan de esa definición?*

Iván: *Pues sí ¿no?*

Frank y Juan: *Es casi la forma general.*

Investigador: *¿Faltaría agregar algo del plano?*

Juan: *No porque ya está implícito con las soluciones* (x, y).

El profesor Juan manifiesta que ya no es necesario escribir que el conjunto (x, y) se encuentra en el plano cartesiano, pues menciona que esto está implícito cuando se menciona que son soluciones de la ecuación. De esta manera estamos asegurando que las características presentadas en la definición de línea recta no son repetitivas.

Otra manifestación fue cuando se discutía acerca de lo que uno como profesor acepta como definición por parte de los alumnos. Los profesores Iván y Frank contestaron que el punto medio es una consecuencia de que las diagonales se intersecan perpendicularmente. De esta manera clasificamos esta discusión en *Minimalidad.*

Investigador: *Voy a poner un ejemplo: el cuadrado es una figura de cuatro lados con cuatro ángulos y cuatro lados iguales, dos diagonales que se intersecan perpendicularmente en el punto medio. El estudiante les da esa definición, todas las características se cumplen para un cuadrado. ¿Lo asumen como una definición?*

Iván y Frank: *No, porque lo del punto medio es una consecuencia*

Frank: *Que no haya redundancia.*

Siguiendo esta parte de la discusión, el profesor Frank manifestó conocimiento acerca de que la definición de un cuadrado y en general debe caracterizar. Lo cual nos condujo a pensar que el profesor se refiere que cuando uno define una clase de objetos debe de ser de manera que se tenga la misma interpretación o significado. Así, colocamos el comentario en el descriptor de conocimiento *No ambigua*.

Investigador:	*[…] ¿Qué otros elementos le exigirían a un enunciado para decir que esto sí es una definición o qué elementos le exigirían no tener para no considerarla una no definición?*
Frank:	*Una caracterización, porque la definición caracteriza. No redunda. No necesariamente es única.*

La *Degeneración*, se refiere a los ejemplos del concepto que no se ajustan a la idea intuitiva del concepto.

Investigador:	*El estudiante llega con su libreta y el estudiante entendió bien lo que es un cuadrado y les dio un enunciado. Qué tendría que pasar con el enunciado para que ustedes digan que estoy consciente que aprendiste el concepto de un cuadrado, pero esto no es una definición de cuadrado. Denme algún ejemplo en caso de ser posible, construir alguno donde el enunciado es verdadero (donde ustedes noten sí sabe lo que es un cuadrado, pero no sabe definir).*
Iván:	*El problema es cuando hacen lo inclusivo y exclusivo. ¿El cuadrado es un rectángulo? En automático dicen no, pero sí lo es. Y es porque a la definición le hace falta algo.*
Investigador:	*¿A qué definición le faltaría?*
Iván:	*A la de cuadrado para diferenciar de un rectángulo.*
Juan:	*Incluso la misma figura geométrica del cuadrado, los mismos ángulos y lados.*
Frank:	*Yo creo que voy a esto, figura geométrica de cuatro lados. Tan sólo si giro el cuadrado y es un rombo, pero sigue siendo un cuadrado. Entonces puede llegar con lo de rombo, pero también se cumple lo de ángulos y lados.*
Juan:	*Un cuadrado es un rombo.*

El profesor Iván manifiesta que un cuadrado es un rectángulo. Notamos que hace uso de su conocimiento cuando el cuadrado puede tomar la noción de degeneración tal y como lo hace un punto que es un círculo con radio que tiende a cero. Mientras que los profesores Juan y

Frank concluyen en esta parte de la discusión diciendo que el cuadrado es un rombo. Podemos decir que un rombo cumple con las características para definir un cuadrado, pero agregando que está trasladado o rotado en un plano cartesiano.

4. 5 Elementos manifestados acerca de las prácticas definir y demostrar

En las secciones 4.3 y 4.4 mostramos la clasificación de las discusiones de los profesores de matemáticas. Lo que nos permitió contrastar con el sistema de categorías teórico proveniente de la literatura especializada. Colocamos dos tablas respectivamente para cada práctica matemática. La Tabla 4.4, presenta con distintos colores las subcategorías que presenciamos con el análisis de los datos para la práctica de definir. Mientras la Tabla 4.5 muestra con colores las subcategorías que se manifestaron con las respuestas de los profesores para la práctica de demostrar, así como cada color corresponde al descriptor con el cual clasificamos la respuesta.

Tabla 4.4

Descriptores de conocimiento manifestados de la práctica de definir

Subcategorías	Nomenclatura	Posibles descriptores de conocimiento	Nomenclatura
Proceso de conceptualización	DEF. 1	Constructivos o a priori	DEF. 1. 1
		Descriptivos o a posteriori	DEF. 1. 2
Características de la definición	DEF. 2	Precisión en la terminología-jerarquización	DEF. 2. 1
		No circularidad	DEF. 2. 2
		No ambigua	DEF. 2. 3
		No contradictoria o estructuralmente inequívoca	DEF. 2. 4
		Invariante bajo cambio de representación	DEF. 2. 5
		Equivalencia	DEF. 2. 6
		Minimalidad	DEF. 2. 7
		Degeneración	DEF. 2. 8

Tabla 5.4

Descriptores de conocimiento manifestados de la práctica de demostrar

Subcategorías	Nomenclatura	Posibles descriptores de conocimiento	Nomenclatura
Tipo de demostración	DEM. 1	En relación a la implicación	DEM. 1.1
		En relación al cuantificador existencial	DEM. 1. 2
		En relación al cuantificador universal	DEM. 1. 3
Método para demostrar	DEM. 2	Silogismos	DEM. 2. 1
		Reducción al absurdo	DEM. 2. 2
		Inducción completa	DEM. 2. 3
		Constructivo	DEM. 2. 4
		Analogía	DEM. 2.5
		Dualidad	DEM. 2.6
Usos de los registros de representación en la demostración	DEM. 3	Geométrico	DEM. 3. 1
		Algebraico	DEM. 3. 2
		De las coordenadas	DEM. 3. 3
		Probabilístico	DEM. 3. 4
		Topológico	DEM. 3. 5
Modo de demostración	DEM. 4	Sintético o directo	DEM. 4.1
		Analítico o indirecto	DEM. 4. 2
Fases cognitivas de la demostración	DEM. 5	Fase de interpretación	DEM. 5. 1
		Fase de análisis	DEM. 5. 2
		Fase de síntesis	DEM. 5. 3
		Fase de profundización	DEM. 5. 4
Funciones de la Demostración	DEM. 6	Verificación	DEM. 6. 1
		Explicación	DEM. 6. 2
		Sistematización	DEM. 6. 3
		Descubrimiento	DEM. 6. 4
		Comunicación	DEM. 6. 5

			DEM. 7. 1
		Esquema de prueba experimental	
Tipos básicos	DEM. 7	E. de prueba inductivo de un caso	DEM. 7. 2
de demostración		E. de prueba inductivo de varios casos	DEM. 7. 3
		E. de prueba inductiva sistemático	DEM. 7. 4
		E. de prueba transformacional	DEM. 7. 5
		E. de prueba preformal	DEM. 7. 6
		E. de prueba axiomático	DEM. 7. 7
		E. de prueba gráfico	DEM. 7. 8
		E. de prueba numérico	DEM. 7. 9
		E. de prueba de inducción completa	DEM. 7. 10

CONCLUSIONES

La propuesta de caracterización sobre las prácticas de demostrar y definir expuesta en la tabla 2.1, es lo suficientemente sólida, ya que nos permitió obtener un sistema de categorías e indicadores para explorar el conocimiento de profesores en activo y así respaldarla con evidencia empírica.

Con la validación de expertos confirmamos que no hubiese categorías que se solaparan o en su caso, intentamos disminuir la posibilidad de tener alguna. Esto nos habla de una caracterización útil para un análisis puntual de distintos tipos de conocimiento.

Esta investigación de corte cualitativo nos condujo a caracterizar el conocimiento acerca de las prácticas de definir y demostrar de los profesores de matemáticas. Con esto logramos interpretar lo que los profesores conocen y usan en su labor docente. El modelo MTSK nos permitió alcanzar este objetivo ya que el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) es un subdominio para éste.

Hemos propuesto considerar diversos autores para llegar a esta propuesta de categorías, para la práctica de demostrar revisamos literatura de Ibañes (2001), Ibañes y Ortega (1997, 2001, 2005), Villiers (1990). Mientras para la práctica de definir trabajos como, Villiers (1994, 2009), Leikin y Winicki-Landman (2000), Escudero et al. (2004). Al final del Capítulo 2, presentamos la categorización de estas dos prácticas (véase Tabla 2.1). De esta manera hemos alcanzado uno de nuestros objetivos de investigación que es, caracterizar las prácticas matemáticas de demostrar y definir.

Cabe destacar que esta categorización es parcial y se robustecerá a partir del estudio de otras prácticas matemáticas. A diferencia de otros subdominios del modelo MTSK, bajo esta propuesta presentada de categorías en el KPM. Las subcategorías junto a sus posibles descriptores de conocimiento son las herramientas fundamentales que servirán para el trabajo analítico de futuras investigaciones.

Otro de nuestros objetivos fue contrastar el sistema de categorías con la evidencia empírica acerca de los conocimientos presentados por el profesor de nivel medio superior. Este objetivo lo alcanzamos con las sesiones que se realizaron con nuestros informantes. Una vez recolectada la información, se prosiguió a clasificar con el sistema de categorías que presentamos y con la metodología Top-Down. Todo esto con la finalidad de probar si la categorización nos permite ver datos. Cabe mencionar que no aparezcan datos sobre una subcategoría, no nos dice que no sirva, sino que no aparecieron estos datos. Mientras que si tenemos datos que no pudieron ser clasificados, nos dice que la caracterización debe refinarse.

En nuestro caso, los indicadores de conocimiento del sistema de categorías nos permitieron clasificar en su mayoría las respuestas de los profesores de matemáticas de nivel medio superior en las dos sesiones de trabajo que se realizaron. Las Tablas 5.3 y 5.4 sintetizan las subcategorías que encontramos con las respuestas de los profesores en las sesiones de trabajo. Notamos que para la práctica de demostrar están coloreadas todas las subcategorías, se presentan los descriptores que exponen que los profesores conocen acerca de dicha subcategoría.

Los tres profesores mostraron conocimiento acerca de los tipos de demostración, de esta manera, sabemos que los tres profesores conocen la naturaleza de la implicación y de los cuantificadores que se utilizan en la matemática.

Respecto a los métodos para demostrar, los profesores conocen que muchas demostraciones son constructivas, así como el uso de demostraciones por reducción al absurdo. Podemos notar que esto se deba a sus características profesionales, ya que suelen ser demostraciones que frecuentemente se destacan en conocer la manera en que se realizan. También, incluimos el método de inducción matemática que suele utilizarse mucho en la licenciatura de matemáticas.

Respecto a la subcategoría usos de registros de representación en geometría, los profesores conoces que existen diversos recursos para realizar demostraciones. Que hay demostraciones que utilizan exclusivamente recursos algebraicos, otras que utilizan recursos geométricos.

Mientras para modo de demostración, los profesores conocen que muchas demostraciones se realizan de manera directa. Creemos que esto también tiene que ver con la parte matemática acerca de esta práctica. Ya que se conoce esa naturaleza que tiene la demostración.

Una subcategoría que en la elaboración de este trabajo que me parece muy importante destacar, son las fases cognitivas de la demostración. Las cuales tienen que ver desde entender el problema, la clase de solución que requiere hasta mirar los elementos que tiene la demostración. Los profesores conocen que al quitar o agregar propiedades a una proposición genera cambios. Estos cambios los conduce a volver a probar si la proposición sigue cumpliéndose o ya no. Esto es un proceso que ellos reconocen que se ha tomado por la experiencia que tienen de años de formación en la matemática.

En las funciones de la demostración, los profesores manifestaron que regularmente la demostración se utiliza para validar y verificar la verdad o falsedad de una afirmación. Incluso en la sesión que se trabajó la demostración, comentaron que no se habían preguntado antes acerca del uso que se la da a la demostración. Es decir, ¿para qué la utilizamos en el salón de clase o en general?

Finalmente, para la subcategoría de tipos básicos de demostración, presentamos varios esquemas de pruebas. De los diez esquemas vistos como descriptores, con el análisis de las respuestas de los profesores encontramos tres de estos esquemas. Pero esto no nos dice que los demás esquemas estén mal, sino que las actividades planteadas para esta sección reflejaron tan sólo tres de los diez.

Por otra parte, para la práctica de definir, no encontramos alguna respuesta que se clasificara en el proceso de conceptualización en cuanto a definición a priori. Pero a pesar de ello, creemos que para futuras investigaciones podría ser un buen comienzo para destacar que esta subcategoría puede tener otros descriptores de conocimiento que puedan conducir respuestas de profesores en ella.

Para las características de la definición, notamos que, de las ocho planteadas, siete pudieron ser encontradas con las respuestas realizado una vez el análisis. Así, notamos que los tres profesores tienen conocimiento de cómo es una definición y el proceso de definir objetos matemáticos.

En esta investigación aportamos la caracterización teórica de las dos prácticas trabajadas: demostrar y definir, que proviene de la literatura y que además contrastamos con las respuestas de los profesores para hacer notar que esta propuesta tiene cabida y mejora para futuras investigaciones. Esperamos que en futuras investigaciones se pueda explorar el Conocimiento de la Práctica Matemática en ambientes menos formales, por ejemplo, en una clase habitual de matemáticas y en distintos niveles educativos. Esto último podría requerir hacer adaptaciones a los posibles descriptores para la obtención de información.

Las investigaciones que consultamos acerca del KPM del modelo MTSK, abordan esta práctica y proponen distintas maneras de categorizarla. Sin embargo, nosotros seguimos la propuesta de Flores-Medrano (2015) que fue tomar a cada práctica matemática como una categoría y a partir de ella comenzar a trabajar las subcategorías. Por lo que consideramos haber contribuido a explorar un campo que ha sido explorado de distintas maneras y que aún no se ha conseguido categorizar del todo.

Esperamos que nuestro aporte dé para discusiones e investigaciones acerca del Conocimiento de la Práctica, pues consideramos es importante en la formación de los profesores conocer la naturaleza de cómo se desarrolla y construyen los objetos matemáticos.

Referencias

Alfaro, C., Flores, P. y Valverde, G. (2020). Conocimiento especializado de profesores de matemática en formación inicial sobre aspectos lógicos y sintácticos de la demostración. *PNA 14*(2), 85-117.

Ball, D.L., y McDiarmird, G. (1990). The subject matter preparation of teachers. En W.R. Houston (Ed.) *Handbook of Research on Teacher Education* (pp. 437-449). New York: Macmillan.

Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bassey, M. (2003). *Case study research in educational settings*. Maidenhead, Philadelphia: Open University Press.

Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in Mathematical Situations. *Educational Studies in Mathematics*, *7*(1-2), 23-40.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo diferencial e integral* (Tesis doctoral). Barcelona, España: Universidad Autónoma de Barcelona.

Cantoral, R., y Farfán, R.M. (2003). Mathematics education: a vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(3), 255-270.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for Mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., Montes, M.A., Escudero-Avila, D., y Flores-Medrano, E. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., … Y Ribeiro, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M.C. (2011). Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco, y M. Palarea (Eds.), Investigación en Educación Matemática. XV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 99-116). Ciudad Real, España: SEIEM.

Chetty S. (1996). The case study method for research in small- and médium – sized firms. *International small business journal*, *15* (1), 73-85.

Climent, N., Romero-Cortés, J.M., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M.C., y Contreras, L.C. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16*(1), 13-36.

Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. New York: Routledge.

Davis, P.J., y Hersh, R. (1986). *Descartes' dream.* New York: HBJ Publishers.

Donaldson, M.S. (1979). *Children's minds*. New York: W. W. Norton.

Escudero, D. I. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Huelva: Universidad de Huelva, España.

Escudero, D.I., Flores, E., y Carrillo, J. (2013). El conocimiento especializado del profesor de Matemáticas. *Actas de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 35-42. México, D. F.: Cinvestav.

Escudero, I.M., Gavilán, J.M., y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(1), 7-32.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *The learning of mathematics*. *3*(2), 8-24.

Flores, A. H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas. *Educación matemática, 19, 63-98.*

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)* (Tesis doctoral). Universidad de Huelva: Huelva, España.

Flores-Medrano, E., y Aguilar-González, A. (2017). Profundizando en el conocimiento de la práctica matemática. En J. Carrillo, L. C. (Eds.), Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. *Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 38-47). Huelva: CGSE.

Flores-Medrano, E., Escudero, D.I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Franke, M.L., Kazemi, E., y Battery, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. En F. Lester (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Godino, J.D., y Recio, A.M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19*(3), 405-414.

Grbich, C. (2013). *Qualitative data análisis: an introduction.* California: Sague publications.

Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the learning of mathematics, 9*(1), 20-25.

Hanna, G., y De Villiers, M. (2008). *Proof and proving in mathematics education. The international journal on mathematics education (ZDM). 40(2), 329-336.*

Ibañes, M. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato* (Tesis Doctoral). Universidad de Valladolid.

Ibañes, M., y Ortega, T. (1997). La demostración en Matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria. *Educación Matemática*, *9*(1), 65-104.

Ibañes, M., y Ortega, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. *UNO*, 28, 39-60.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2005). Dimensiones de la demostración matemática en bachillerato. *Numeros: Revista de didáctica de las matemáticas*, 61, p. 19-40.Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the learning of Mathematics*, *3*(2), 8-24.

Kitcher, P. (1983). *The nature of mathematical knowledge*. Oxford, Oxford University Press.

Kleine, I. (1991). Rigor and proof in Mathematics: A historical perspective. *The Mathematics Magazine, 64*(5), 291-314.

Learning Mathematics for Teaching Project (2011). Measuring the mathematical quality of instruction. Journal of Mathematics Teacher Education, 14(1), 25-47.

Leikin, R., y Zazkis, R. (2010). The content-dependence of prospective teachers' knowledge: A case of exemplifying definitions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 4, 451-466.

Leikin R., y Winicky-Landman, G. (2000a). On equivalent and nonequivalent definitions I. *For the Learning of Mathematics, 20*(1), 17–21.

Leikin R., y Winicky-Landman, G. (2000b). On equivalent and nonequivalent definitions II. *For the Learning of Mathematics, 20*(2), 24–29.

Lo, J., y McCrory, R. (2009). Proof and porvinf in a mathematics course for prospective Elementary teachers. En F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna y M. de Villiers (Eds.). *Procedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (pp. 41-46). Taipéi, Taiwán: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Llinares, S. (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas. En J.P. da Ponte y L. Serrazina (Eds.), *Educaçao matemática em Portugal, España e Italia* (pp. 109-132). Lisboa: SEM-SPCE.

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *41*(1), 47-68.

Nestigen, M. (2002). *Reading your way into culture: a materials development Project (*Tesis de maestría). School for International Training, Battleboro, Vermont.

Quecedo, R., Castaño, C. (2003). Introducción a la metodología de investigación cualitativa. Revista de Psicodidáctica, *15*, 5-40.

Radford, L. (1994). La enseñanza de la demostración: Aspectos teóricos y práticos. *Educación Matemática*, *6*(3), 21-35.

Robert, A., y Robinet, J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16*(2), 145-176.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. En A.H. Schonenfel (Ed.), *Mathematical thinking and problema solving*, 334-370.

Schön, D.A. (1983). *The reflective practitioner: how professionals think in action*. New York: Basic Books.

SEP (2017). *Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación para educación secundaria*. México: Secretaría de Educación Pública.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher, 15*(2), 4-14.

Stake, R. (1995). *The art of case study.* USA: SAGE.

Susuka, K., Sleep, L., Ball, D.L., Bass, H., Lewis, J., y Thames, M. (2009). Designing and using tasks to teach mathematical knowledge for teaching. En D.S. Mewborn, y H.S. Lee (Eds.). Scholarly Practices and Inquiry in the Preparation of Mathematics Teachers (pp. 7-24). San Diego, CA: Association of Mathematics Teacher Education.

Vicario, V., y Carrillo, J. (2005). Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y las funciones de la demostración. En A. Maz, B. Gómez, y M. Torralbo (Eds.). *Actas del 9º Simposio de la SEIEM* (pp. 145-152) España: SEIEM.

Villiers, M. de (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras*, 24, 7-24.

Villiers, M. de (1994). The role and function of a hierarchical classification of the quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 11-18.

Villiers, M. de (1995). Why proof in dynamic geometry? En C. Hoyles y L. Healy (Eds.). *Proceedings of the Justifying and Proving in School Mathematics Conference* (pp. 155-173). Virginia, Estados Unidos: Instructional Resource Center.

Villiers, M. de (2009). To teach definitions in Geometry or teach to define? En A. Olivier y K. Newstead (Eds). *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education*: Vol. 2. (pp. 248-255). Stellenbosch, Sudáfrica: University of Stellenbosch.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Jorunal of Mathematical Education*, *14*(3), 293-305.

Vinner, S., y Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblattfiir Didaktik der Mathematik*, *15*, 20-25.

Wilson, S., Shulman, L. y Richert, A. (1987). 150 different ways of knowing: Representations of knowledge in teaching. In J. Calderhead (Ed.). *Exploring teachers thinking*. (pp. 104 - 124). Londres: Cassel.

Anexo 1

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Respetado juez: a continuación, presentamos una propuesta de categorización de las prácticas de demostrar y de definir. Solicitamos su valioso apoyo para validar nuestra propuesta. Agradeceremos todos los comentarios respecto a:

1. La completitud de la categorización:
   a) ¿Se están considerando todas las dimensiones y características de cada una de las prácticas?
   b) ¿Alguna de las subcategorías o posibles descriptores podría dejarse fuera?

2. La coherencia:
   a) ¿Son las características propuestas congruentes con la práctica que quieren describir?
   b) ¿Son adecuados y reconocidos los nombres utilizados en los posibles descriptores y en las subcategorías?

Cualquier propuesta de cambio o de adecuación será valiosa para el desarrollo de nuestra investigación.

Anexo 2

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Maestría en Educación Matemática

Instrumento para la discusión de la demostración y la definición.

Elaborado por: Modemar Campos Cano, Eric Flores Medrano

---

1. Lee con atención las siguientes demostraciones, ¿podrías mencionar diferencias y similitudes entre estas demostraciones?

   a) Demostrar que dada una función cuadrática en su forma general $y = ax^2 + bx + c$, esta puede ser transformada en la forma $y = a(x-h)^2 + k$, donde las coordenadas de su vértice son $V(h,k)$.
   Demostración.

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left[\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left[\frac{c}{a} - \left(\frac{b^2}{4a^2}\right)\right] \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) \\
&= a\left(x - \frac{-b}{2a}\right) + \left(\frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right) \\
&= a(x-h)^2 + k
\end{aligned}
$$

   donde $V(h = \frac{-b}{2a}, k = \frac{-b^2+4ac}{4a})$. $\lhd$

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Maestría en Educación Matemática

Instrumento para la discusión de la demostración y la definición.
Elaborado por: Modemar Campos Cano, Eric Flores Medrano

b) Demostrar que $tan^2(\theta) + 1 = sec^2(\theta)$.
Demostración.
Si en el círculo unitario se definen $tan(\theta) = \frac{y}{x}$ y $sec(\theta) = \frac{1}{x}$ y, además, por el teorema de Pitágoras se sabe que $x^2 + y^2 = 1$,

$$\Rightarrow tan^2(\theta) + 1 = sec^2(\theta)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow \frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{1}{x^2}$$
$$\Rightarrow \frac{y^2 + x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Lo que verifica la identidad. ◁

c) Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x} = 0$
Demostración.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-cos(x))(1+cos(x))}{x(1+cos(x))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-cos^2(x)}{x(1+cos(x))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{sen^2(x)}{x(1+cos(x))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{(1+cos(x))}\end{aligned}$$

Como las funciones $sen(x)$ y $cos(x)$ son continuas en $x = 0$, entonces:

$$\lim_{x\to 0} sen(x) = sen(0) = 0$$
$$\lim_{x\to 0}(1+cos(x)) = (1+cos(0)) = 1(1+0) = 1$$

Además, como $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$ se concluye que,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} \cdot \frac{\lim_{x\to 0} sen(x)}{\lim_{x\to 0}(1+cos(x))} = (1)\left(\frac{0}{1}\right) = 0.$$

.

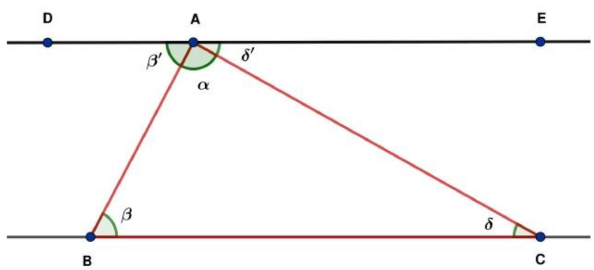
d) Demostrar que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180°.

Demostración.

Prolongamos la base del triángulo BC y construimos una paralela que pase por A, como muestra la figura. Observamos que los lados AB y AC son transversales para el sistema de paralelas DE y BC. De este modo, podemos afirmar que:

$\angle ABC$ es al alterno interno de $\angle DAB$ por lo que $m\angle DAB = m\angle ABC$; es decir, $\beta' = \beta$.

$\angle ACB$ es alterno interno de $\angle EAC$ por lo que $m\angle ACB = m\angle EAC$; es decir, $\delta' = \delta$



Los ángulos $\angle DAB$, $\angle BAC$ y $\angle EAC$ son consecutivos y forman un ángulo llano; es decir, $\beta' + \alpha + \delta' = 180°$. Dado que $\beta' = \beta$ y que $\delta' = \delta$ tenemos que $\alpha + \beta + \delta = 180°$; que es lo que se quería demostrar. ◁

e) Demostrar que $(x–2)$ es factor de $p(x) = x^3–7x + 6$.

Demostración.

Como $p(2) = (2)^3–7(2) + 6 = 0$, entonces $p(x)$ es divisible entre $(x–2)$, o $(x–2)$ es un factor de $p(x)$. Es decir, $(x^3–7x + 6) \div (x–2)$ es exacta, y el residuo es cero. Lo cual significa que existe un polinomio de segundo grado $c(x)$ tal que $p(x) = (x–2) \cdot c(x)$. En este caso también se dice que $x = 2$ es un cero de $p(x)$, pues $p(2) = 0$. ◁

2. Supongamos que Beto y Cris piensan en los números 3 y 11. Ambos notan que la suma $3 + 11$ es PAR y el producto es IMPAR. Beto dice: Si la suma de dos números dados es par, su producto es impar. Cris dice: si el producto de dos números es impar, su suma es par.

   - ¿Las afirmaciones de ambos dicen lo mismo? ¿Por qué?
   - El producto de dos números es 1271. Suponga que Cris está en lo correcto. ¿Cuál de las siguientes opciones es correcta?
     a) Puedes asegurar que la suma de los dos números es par.
     b) Puedes asegurar que la suma de los dos números es impar.
     c) No estás seguro de que la suma es impar o par hasta que conoces los números dados.
   - ¿Es la afirmación de Beto cierta? Justifique su respuesta.
   - ¿Es la afirmación de Cris cierta? Justifique su respuesta.

- ¿Cuáles son las funciones de la demostración matemática en matemáticas en general?
- ¿Cómo define usted la demostración matemática?
- ¿Qué utilidad podemos darles a la demostración en el salón de clase?

Anexo 3

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Maestría en Educación Matemática

Instrumento para la discusión de la demostración y la definición.
Elaborado por: Modemar Campos Cano, Eric Flores Medrano

---

3. Daremos un listado de las definiciones de la línea recta que profesores de matemáticas proponen en clase.

   - ¿Es correcta la definición? Explica por qué.
   - ¿En caso de que no, qué elementos no están correctos? ¿Es posible que quites elementos o agregues para que alguna definición sea correcta?
   - ¿Podría mencionar similitudes y diferencias entre ellas?

   a) Conjunto infinito de puntos unidos en una misma dirección y de una sola dimensión, que se compone de segmentos infinitos, que son las pequeñas líneas que unen dos puntos.

   b) Una línea recta es la figura geométrica en el plano formada por una sucesión de puntos que tienen la misma dirección. Dados dos puntos diferentes, sólo una recta pasa por esos dos puntos.

   c) Es la figura geométrica formada por un polinomio de primer grado$a_0 + a_1x$.

   d) Es la figura geométrica obtenida al unir dos puntos, tal que la distancia recorrida sobre esta figura, es la más corta.

   e) Lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, del lugar geométrico correspondiente a la línea recta, el valor de la pendiente m está dado por $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, $x_2 \neq x_1$, y es constante.

   f) Es el conjunto de soluciones (x, y) de la ecuación $Ax + By = C$, donde A, B y C son constantes (con al menos una de las constantes A y B distinta de cero).

- ¿Qué características le exigirías a un enunciado para que sea la definición "ideal" de un objeto matemático?
- ¿De cuántas maneras distintas podría quedar 'bien definido' dicho objeto?, ¿cuántas propiedades se requieren y de qué tipo son?