BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Formas matriciales de inversas generalizadas para operadores lineales acotados

TESIS

Que para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta:

Lic. Ana Luisa Nieto Méndez

Director de Tesis:

Dr. Gabriel Kantún Montiel

Puebla, Pue., Agosto 2017

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Formas matriciales de inversas generalizadas para operadores lineales acotados

TESIS

Que para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

por

Lic. Ana Luisa Nieto Méndez

Director de Tesis:

Dr. Gabriel Kantún Montiel

Puebla Pue.
Agosto 2017

Título: Formas matriciales de inversas generalizadas para operadores lineales acotados
Estudiante: Lic. Ana Luisa Nieto Méndez

COMITÉ

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres
Presidente

Dr. Slavisa Djordjevic
Secretario

Dr. Jacobo Oliveros Oliveros
Vocal

Victor Manuel Salinas Méndez
Vocal

Dr. Gabriel Kantún Montiel
Asesor

BUAP

Dra. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el(la) C.

ANA LUISA NIETO MÉNDEZ

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 10 de agosto de 2017, con la tesis titulada:

Formas Matriciales de Inversas Generalizadas para Operadores Lineales Acotados

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 14 de agosto de 2017

Dr. FERNANDO MACÍAS ROMERO
COORDINADOR DEL POSTGRADO
EN MATEMÁTICAS.

Archivo
LAHR/zav

80 AÑOS DE UNIVERSIDAD

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Av. San Claudio y 18 sur, edif. 111 A, Ciudad Universitaria, Col. San Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Dedicatoria.

Agradecimientos

- Gracias a

Prólogo

En esta tesis se tratan tópicos del análisis funcional, y particularmente se enfoca en problemas del espectro de los operadores lineales acotados. Es muy probable que el concepto de una inversa generalizada haya sido mencionado por primera vez en un trabajo de Fredholm (1903)[11]. Allí se estudia este tema en el contexto de ecuaciones integrales, en lo que se llamó pseudo-inversa. En últimas décadas ha habido un renovado interés en el tema de las inversas generalizadas, en gran parte por las aplicaciones que se han hallado en la estadística, ingeniería electrónica, programación lineal y teoría de juegos entre otros. En este campo, existen varias monografías como Ben-Israel y Greville (2003) [3], Schechter(2002) [29], Campbell y Meyer (1979) [6], Horn y Johnson (1985) [13]. La teoría de inversas generalizadas para matrices reales y complejas se encuentra bastante desarrollada. Sin embargo, todavía quedan cuestiones por estudiar en el caso de los operadores lineales acotados. En particular, no existe una teoría exhaustiva de las propiedades espectrales de las inversas generalizadas. En esta tesis se investigarán formas matriciales que permitan estudiar las propiedades espectrales de las inversas generalizadas. Además se considerán las relaciones de la inversa a lo largo de un operador, aparecida recientemente, con otras inversas generalizadas que podemos considerar clásicas.

Antecedentes

Dentro del análisis funcional, el análisis espectral de los operadores lineales es un campo que resulta particularmente atractivo. Esto se debe en parte a que el desarrollo del análisis espectral está bastante relacionado con ciertos resultados logrados en varias áreas de las matemáticas como son: ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales, problemas con valores en la frontera, sistemas infinitos de ecuaciones algebraicas y otros más en física y mecánica cuántica. En ésta tesis nos vamos a enfocar en problemas del espectro de los operadores lineales acotados haciendo énfasis en nociones generalizadas de la invertibilidad. Fredholm, al estudiar ciertos problemas de ecuaciones integrales, definió una pseudo-inversa. La clase de todas estas pseudo-inversas fue caracterizada en Hurwitz (1912) [14], en donde se usó la dimensión finita del núcleo de los operadores de Fredholm para dar una construcción algebraica simple. Ya en el artículo Calkin (1941)([5]), la teoría de Fredholm aparece en forma más general. En últimas décadas tenemos un aumento de la bibliografía en esta área y mucha de ella ahora la podemos considerar como clásicos en el tema: Kato (1966) [18], Schechter (2002) [29], Caradus, Pfaffenberger y Yood (1974) [7], Douglas (1998) [10], Taylor (1961) [30], Harte (1988) [12], Riesz y Sz-Nagy (1955) [27]. Las inversas generalizadas de operadores diferenciales, han sido estudiados por numerosos autores (véase [3]). Las inversas generalizadas diferenciales y los operadores esenciales procedieron de las inversas generalizadas de las matrices, cuya existencia fue notada por E. H. Moore, quien definió una inversa única para cada matriz finita cuadrada o rectangular (véase [24]). Su primera publicación sobre el tema, es un extracto de una charla dada en una reunión de la sociedad matemática estadounidense, aparecida en 1920. Las inversas generalizadas fueron dadas para matrices en Siegel (1937) [28], y para operadores por Tseng (1936) [31], Murray y von Neumann(1936) [25], Atkinson(1952) [2] y otros. Alrededor de 1950 hubo un resurgimiento del interés en el tema, entre otras cosas por las propiedades de ciertos inversas generalizadas en el problema de mínimos cuadrados. Estas propiedades fueron reconocidas en 1951 por Bjerhammar, quien redescubrió los resultados de Moore y también indicó la relación de inversas generalizadas con las soluciones de sistemas lineales ([4]). Penrose ([26]) extendió los resultados de Bjerhammar sobre sistemas lineales, y mostró que dada una matriz A existe una única matriz X que satisface las siguientes cuatro ecuaciones.

1) $AXA = A$,
2) $XAX = X$,
3) $(AX)^* = AX$,
4) $(XA)^* = XA$,

donde A^* denota la conjugada transpuesta de A. Este último descubrimiento ha sido importante y productivo. Esta inversa (que resulta ser única) es ahora llamada la inversa de Moore-Penrose. Esta inversa es reflexiva en el sentido de que si A es inversa generalizada para X, entonces X es inversa generalizada para A. La inversa externa: si existe un operador C distinto de cero tal que $C = CAC$, decimos que C es una inversa externa para A y que A es externamente invertible. Resulta que la inversa externa no es única. Además, todo operador distinto de cero en un espacio de Banach es externamente invertible. En 2011, X. Mary (véase [23]) definió la inversa a lo largo de un elemento, la cual resulta particularmente apropiada para estudiar problemas del espectro de operadores. Dados dos operadores A y T, decimos que A es invertible a lo largo de T si existe una inversa externa C de A tal que $R(C) = R(T)$ y $N(C) = N(T)$. Un enfoque particularmente fructífero en años recientes en el estudio de las inversas generalizadas, ha sido las formas matriciales de los operadores. Estas formas permiten una mejor comprensión del fenómeno, además que simplifican las demostraciones. De entre los últimos resultados, podemos destacar,

- Cho, M., y Kantún-Montiel, G. (2013), Commuting Outer Inverses. Advances in Linear Algebra and Matrix Theory, 3 (4), 69-72.

- Kantún-Montiel, G. (2014), Outer generalized inverses with prescribed ideals, Lin. Mult. Algebra, 62 (9), 1187-1196.

- Kantún-Montiel, G. (2014), Matrix Representations of inner and outer inverses. RIMS Kokyuroku, 1893, 13-19.

- Kantún-Montiel and Djordjević Slavisa V. (2017), Invertibility along an operator, Operators and Matrices, Volume 11, Number 2, 347-354.

Como ya se mencionó, la teoría de inversas generalizadas para matrices reales y complejas se encuentra bastante desarrollada. En el caso de los operadores lineales acotados, aunque el concepto de regularidad es conocido desde hace tiempo, todavía quedan cuestiones por estudiar, en particular sobre inversas externas con rango y núcleo prescritos.

Planteamiento del problema

Las formas matriciales de los operadores lineales son útiles en el estudio de las propiedades de las inversas generalizadas. En años recientes han aparecido nuevas clases de inversas generalizadas, tales como la inversa a lo largo de un elemento. Las representaciones en forma matricial de estas clases se encuentran dispersas en la literatura, por lo que existe la necesidad de una investigación sistemática y concentrada de éstas.

Objetivos

Objetivos generales
Desarrollar una teoría espectral para inversas generalizadas usando el enfoque de representación matricial de los operadores lineales acotados.
Objetivos específicos

a) Estudiar las inversas internas en la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

b) Distinguir formas matriciales para las inversas externas.

c) Caracterizar la inversa a lo largo de un elemento en álgebras de operadores.

d) Estudiar la inversa Moore-Penrose para matrices.

(e) Construir la forma matricial para la inversa generalizada Drazin para operadores lineales acotados.

Resultados

- En esta tesis se expandieron demostraciones que no estaban suficientemente detalladas en los articulos.
- Se mostraron las formas matriciales para la inversa a lo largo de un operador.
- En particular, se exponen los teoremas y proposiciones en relación con los operadores polares, cuasipolares, esto estaba hecho en el caso más general de anillos con identidad.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Preliminares

En este capítulo se revisarán algunos resultados básicos de la teoría de operadores de las inversas generalizadas. Se presentará especial atención a las definiciones de Moore y Penrose, además de la teoría de mínimos cuadrados. Para comenzar se presentan los temas de la suma directa y proyecciones en espacios de Hilbert y posteriormente en espacios de Banach.
En este trabajo $\mathcal{H}$ denotará un espacio de Hilbert complejo, esto es $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial (sobre el campo $\mathbb{C}$), con un producto interno, una norma proveniente de este producto interno y que además es completo con la topología inducida por esta norma. En otras palabras, un espacio de Hilbert es una clase especial de espacio de Banach, cuya norma es inducida por un producto interno. Usualmente consideramos que $\mathcal{H}$ es de dimensión infinita.

Ejemplo 1.1.1. *El espacio de sucesiones cuadrado sumables*

$$l^2 := \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} : a_n \in \mathbb{C}\ , \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$$

con producto interior dado por

$$\langle \{a_n\}, \{b_n\} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

Con norma definida como

$$\|\{a_n\}\| := (\langle\{a_n\},\{a_n\}\rangle)^{1/2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{a_n}\right)^{1/2}.$$

Es espacio de Hilbert.

Ejemplo 1.1.2. *El espacio de Hardy-Hilbert*
Consideremos $\mathbf{H}^2$ el espacio de funciones analíticas en el disco unitario $\mathbb{D}$, definido por

$$\mathbf{H}^2 = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \ : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}.$$

En este caso, si las funciones analíticas f y g tienen series de Taylor dadas por $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ respectivamente, entonces su producto interno está dado por

$$\langle f, g\rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{b_n}.$$

Así, observamos que los espacios l^2 y $\mathbf{H}^2$ son, en algún sentido, el "mismo espacio", pero visto desde perspectivas diferentes. La función $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es la aplicación natural entre l^2 y $\mathbf{H}^2$ como espacios de Hilbert.

1.2. El espectro

Ahora se expondrán algunos temas relacionados con el espectro de los operadores lineales. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ denota el conjunto de los operadores lineales acotados de $\mathcal{H}$ a $\mathcal{H}$.

Definición 1.2.1. Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

- El **conjunto resolvente** de T es definido como

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \ : T - \lambda I \text{ es biyectivo}\}.$$

- Para $\lambda \in \rho(T)$, el operador $(T - \lambda I)^{-1}$ es llamado el **operador resolvente** de T en λ.

- El **espectro** de T es el conjunto

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

Un elemento de $\sigma(T)$ se llama un **valor espectral** de T.

- El **radio espectral** de T se define por

$$r(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Note que si $\mathcal{H}$ es de dimensión finita, entonces $\sigma(T)$ consiste de los eigenvalores de T.

Ejemplo 1.2.2. *Espectro de un operador en el espacio* $C([a,b])$
Sea $E = C([a,b])$ el espacio de funciones continuas sobre el intervalo $[a,b]$. Para $u \in C([a,b])$, una función fija, considere el operador definido por

$$(Ax)(t) = u(t)x(t).$$

Como

$$(A - \lambda I)^{-1}x(t) = \frac{x(t)}{u(t) - \lambda},$$

el espectro de A consiste de todos los λ tales que $\lambda - u(t) = 0$ para algún $t \in [a,b]$. Esto nos indica que el espectro de A es exactamente el rango de u. Si $u(t) = c$ es una función constante, entonces $\lambda = c$ es un valor propio de A. De otra manera, si u es una función estrictamente creciente, entonces A no tiene valores propios. El espectro de A en tal caso es el intervalo $\sigma(A) = [u(a), u(b)]$.

Definición 1.2.3. Sea $F \subset \mathcal{H}$, y $z \in \mathcal{H}$, se define la **distancia** de z al conjunto F como:

$$dist(z, F) := inf\{|z - z_0| : z_0 \in F\}.$$

Propiedades del operador resolvente

Proposición 1.2.4. ([1], Proposición 1.10)
Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(a) Si $\lambda \in \rho(T)$, entonces $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(b) Para $\lambda \in \rho(T)$ y $\lambda_0 \in \mathbb{C}$,

$$\lambda_0 \in \rho((T - \lambda I)^{-1}) \text{ si y sólo si } \lambda_0 = 0 \text{ ó } \lambda + \frac{1}{\lambda_0} \in \rho(T).$$

(c) Para $\lambda \in \rho(T)$,

$$r((T-\lambda I)^{-1}) = \frac{1}{dist(\lambda, \sigma(T))}.$$

(d) **Primera identidad del resolvente.** Para $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(T)$,

$$(T-\lambda_1 I)^{-1} - (T-\lambda_2 I)^{-1} = (\lambda_1 - \lambda_2)(T-\lambda_1 I)^{-1}(T-\lambda_2 I)^{-1}.$$

(e) $\lambda \in \rho(T)$,

$$T(T-\lambda I)^{-1} = I + \lambda(T-\lambda I)^{-1}.$$

(f) Para $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(T)$, los operadores T, $(T-\lambda_1 I)^{-1}$, y $(T-\lambda_2 I)^{-1}$ conmutan entre ellos.

Demostración. (a) Si $\lambda \in \rho(T)$, entonces por definición $(T-\lambda I)$ es biyectivo, en particular es sobreyectivo y además $(T-\lambda I) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Luego existe $(T-\lambda I)^{-1}$ y pertencece a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ como consecuencia del Teorema del mapeo abierto.

(b) Sea $\lambda \in \rho(T)$. Como $(T-\lambda I)^{-1}$ es invertible, $\lambda_0 = 0$ pertenece a $\rho((T-\lambda I)^{-1})$. Si $\lambda_0 \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}(T-\lambda I)^{-1} - \lambda_0 I &= (T-\lambda I)^{-1}\left[I - \lambda_0(T-\lambda I)\right] \\ &= -\lambda_0 (T-\lambda I)^{-1}\left[T - \left(\lambda + \frac{1}{\lambda_0}\right) I\right],\end{aligned}$$

se tiene que

$$\lambda_0 \in \rho((T-\lambda I)^{-1}) \text{ si y sólo si } \lambda + \frac{1}{\lambda_0} \in \rho(T).$$

(c) Por (b), para $z \in \rho(T)$,

$$\lambda \in \sigma(T) \text{ si y sólo si } \lambda \neq z \text{ y } \frac{1}{\lambda - z} \in \sigma((T-zI)^{-1}).$$

Por lo tanto

$$r((T-zI)^{-1}) = \sup\left\{\frac{1}{|\lambda - z|} : \lambda \in \sigma(T)\right\} = \frac{1}{dist(z, \sigma(T))}.$$

(d) Si λ_1 y λ_2 pertenecen a $\rho(T)$, entonces

$$\begin{aligned}
&(T-\lambda_1 I)^{-1}-(T-\lambda_2 I)^{-1}= \\
&\quad=(T-\lambda_1 I)^{-1}\left[I-(T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I)^{-1}\right] \\
&\quad=(T-\lambda_1 I)^{-1}\left[T-\lambda_2 I-(T-\lambda_1 I)\right](T-\lambda_2 I)^{-1} \\
&\quad=(\lambda_1-\lambda_2)(T-\lambda_1 I)^{-1}(T-\lambda_2 I)^{-1}.
\end{aligned}$$

(e) Para $\lambda \in \rho(T)$,

$$I=(T-\lambda I)(T-\lambda I)^{-1}=T(T-\lambda I)^{-1}-\lambda(T-\lambda I)^{-1}.$$

(f) Sean λ_1 y λ_2 elementos de $\rho(T)$. Como

$$T(T-\lambda_1 I)=(T-\lambda_1 I)T,$$

multiplicando ambos lados por $(T-\lambda_1 I)^{-1}$ obtenemos

$$(T-\lambda_1 I)^{-1}T=T(T-\lambda_1 I)^{-1}.$$

De la conmutatividad de $(T-\lambda_1 I)^{-1}$ y $(T-\lambda_2 I)^{-1}$, obtenemos (f). □

Teorema 1.2.5. ([1], Teorema 1.13)
Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(a) El conjunto $\rho(T)$ es abierto en $\mathbb{C}$.

(b) La función $(T-\cdot I)^{-1}:\rho(T)\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es analítica en $\rho(T)$.

(c) **Primera Expansión de Neumann**: Para $z_0 \in \rho(T)$ y $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z-z_0|<dist(z_0,\sigma(T))$, se tiene que $z\in\rho(T)$ y $(T-zI)^{-1}$ tiene la expansión de Taylor

$$(T-zI)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[(T-z_0 I)^{-1}\right]^{k+1}(z-z_0)^k.$$

(d) Para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z|>r(T)$, tenemos que $z\in\rho(T)$ y $(T-zI)^{-1}$ tiene la expansión de Laurent

$$(T-zI)^{-1}=-\sum_{k=0}^{\infty}T^k z^{-k-1}.$$

Si en particular $|z| > \|T\|$, entonces

$$\|(T - zI)^{-1}\| \leq \frac{1}{|z| - \|T\|}.$$

Demostración. (a) Sea $z_0 \in \rho(T)$. El radio de convergencia de una serie de potencias en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ con $k-$ésimo coeficiente $(T - z_0 I)^{k+1}$ es

$$\begin{aligned} q(z_0) := & \frac{1}{\text{lím sup}_{k\to\infty} \| \left[(T - z_0 I)^{-1}\right]^{k+1} \|^{1/k}} \\ = & \frac{1}{\text{lím sup}_{k\to\infty} \| \left[(T - z_0 I)^{-1}\right]^{k} \|^{1/k}} \\ \geq & \frac{1}{\|(T - z_0 I)^{-1}\|} > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \left[(T - z_0 I)^{-1}\right]^{k+1} (z - z_0)^k$ converge en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para todo $z \in \mathbb{C}$ que satisface $|z - z_0| < q(z_0)$.
Sea $A_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \left[(T - z_0 I)^{-1}\right]^{k+1} (z - z_0)^k$, se tiene que

$$\begin{aligned} A_n(z)(T - zI) &= (T - zI)A_n(z) \\ &= \left[(T - z_0 I) - (z - z_0)I\right] A_n(z) \\ &= I - \left[(T - z_0 I)^{-1}\right]^{n+1} (z - z_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

lo cual tiende a I cuando n tiende a infinito, dado que

$$|z - z_0| < q(z_0),$$

y entonces la suma de la serie es el operador $(T - zI)^{-1}$. Por lo tanto para cada $z_0 \in \rho(T)$, el conjunto $\rho(T)$ es un conjunto abierto.
(b) Sea $z_0 \in \rho(T)$. Como en la parte (a),

$$(T - zI)^{-1} =$$

$$(T - z_0 I)^{-1} - \left[(T - z_0 I)^{-1}\right]^2 (z - z_0) + \left[(T - z_0 I)^{-1}\right]^3 (z - z_0)^2 + \cdots$$

si $|z - z_0| < q(z_0)$. Por lo tanto si $0 < |z - z_0| < 1/\|(T - z_0 I)^{-1}\|$, entonces

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{(T-zI)^{-1}-(T-z_0I)^{-1}}{z-z_0} - \left[(T-z_0I)^{-1}\right]^2 \right\| \\
&\quad = \left\| \left[(T-z_0I)^{-1}\right]^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[(T-z_0I)^{-1}\right]^k (z-z_0)^k \right\| \\
&\quad \leq \frac{\|(T-z_0I)^{-1}\|^3|z-z_0|}{1-\|(T-z_0I)^{-1}\||z-z_0|}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{(T-zI)^{-1}-(T-z_0I)^{-1}}{z-z_0} = \left[(T-z_0I)^{-1}\right]^2.$$

Esto demuestra que la función $(T-\cdot I)^{-1}$ es analítica en $\rho(T)$ y su derivada es $\left[(T-\cdot I)^{-1}\right]^2$.

(c) Sea $z_0 \in \rho(T)$. Como $\rho(T)$ es abierto, $\sigma(T)$ es cerrado y se tiene que $dist(z_0, \sigma(T)) > 0$. Ahora la bola abierta centrada en z_0 y con radio $dist(z_0, \sigma(T))$ está contenida en $\rho(T)$ y la función $(T-\cdot I)^{-1}$ es analítica sobre ésta. Por lo tanto por el Teorema de Taylor, la expansión

$$(T-zI)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(T-z_0I)^{-1}\right]^{k+1} (z-z_0)^k,$$

obtenida en (a) es válida para todo z tal que

$$|z-z_0| < dist(z_0, \sigma(T)).$$

(d) Sea $t := \limsup_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k}$. Entonces $t \leq \|T\|$. Para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > t$, se sigue que la serie de potencias $\sum_{k=0}^{n} T^k z^{-k-1}$ converge en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Sea

$$B_n(z) := \sum_{k=0}^{n} T^k z^{-k-1},$$

tenemos que

$$B_n(z)(T-zI) = (T-zI)B_n(z) = I - \left(\frac{T}{z}\right)^{n+1},$$

lo cual tiende a I cuando $n \to \infty$ dado que $|z| > t$, y entonces la suma de la serie es el operador $(T - zI)^{-1}$. Si $|z| > r(T)$, entonces $z \notin \sigma(T)$. Por lo tanto $\{z \in \mathbb{C} \ : |z| > r(T)\}$ está contenido en $\rho(T)$ y la función $(T - \cdot I)^{-1}$ es analítica en este conjunto. Por lo tanto la expansión de Laurent

$$(T - zI)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k z^{-k-1}$$

es válida para todo z tal que $|z| > \rho(T)$.
Para $|z| > \|T\|$, se tiene que

$$\|(T - zI)^{-1}\| = \left\| - \sum_{k=0}^{\infty} T^k z^{-k-1} \right\| \leq \frac{1}{|z|} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\|T\|}{|z|} \right)^k \leq \frac{1}{|z| - \|T\|}.$$

$\square$

1.3. Representación matricial de operadores

1.3.1. Ortogonalidad y suma directa

Recordemos que en los números reales dos vectores son ortogonales o perpendiculares si su producto punto es igual a cero. En espacios producto interior y de Hilbert se generaliza este importante concepto.

Definición 1.3.1. Dos vectores x e y en cualquier espacio producto interior (real o complejo) $(\mathcal{H}, \langle ; \rangle)$ son **ortogonales** ($x \perp y$) si $\langle x; y \rangle = 0$. Un vector x en $\mathcal{H}$ es ortogonal a un subconjunto A de $\mathcal{H}$ ($x \perp A$), si este es ortogonal a cada vector en A. Dos subconjuntos A y B son ortogonales ($A \perp B$) si cada vector en A es ortogonal a cada vector en B.

Observación 1.3.2. $A \perp B$ implica $A \cap B = \{0\}$.
Note que si existe un vector x distinto de cero en $A \cap B$, entonces $\langle x; x \rangle = \|x\|^2 \neq 0$, y por lo tanto $A \not\perp B$. Como $A \cap B$ es subespacio de $\mathcal{H}$, $0 \in A \cap B$.

Definición 1.3.3. Sean Y y Z subespacios cerrados de $\mathcal{H}$. Se dice que (Y, Z) es una **descomposición** de $\mathcal{H}$, o descompone $\mathcal{H}$ si $\mathcal{H} = Y \oplus Z$, esto es, cada $x \in \mathcal{H}$ tiene una única descomposición

$$x = x_Y + x_Z$$

con $x_Y \in Y$ y $x_Z \in Z$.
Sea (Y, Z) una descomposición de $\mathcal{H}$. Considere $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Se dice que (Y, Z) es una **descomposición** de T (o descompone T) si ambos Y y Z son invariantes bajo T, es decir:

$$T(Y) \subset Y \text{ y } T(Z) \subset Z.$$

Definición 1.3.4. Si A es un subespacio de un espacio producto interior $\mathcal{H}$, entonces el **complemento ortogonal** de A es el conjunto

$$A^{\perp} = \{x \in \mathcal{X} : x \perp A\} = \{x \in \mathcal{H} : \langle x; y \rangle = 0 \text{ para cada } y \in A\}$$

que consiste de todos los vectores en $\mathcal{H}$ que son ortogonales a cada vector en A.

Observación 1.3.5. $x \perp \{0\}$ para cada $x \in \mathcal{H}$, y $x \perp \mathcal{H}$ si y sólo si $x = 0$. Por lo tanto $\{0\}^{\perp} = \mathcal{H}$ y $\mathcal{H}^{\perp} = \{0\}$.

Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathcal{X}$. Como consecuencia de la definición de complemento ortogonal, se tiene que $A \perp A^{\perp}$, $A \cap A^{\perp} \subseteq \{0\}$, y $A \cap A^{\perp} = \{0\}$ donde $0 \in A$. $A \perp B$ si y sólo si $A \subseteq B^{\perp}$. Además $A \perp B$ implica $A \cap B \subseteq \{0\}$.

En adelante $(span\{x\})$ denota el subespacio generado por x y $\overline{A}$ la cerradura de A.

Proposición 1.3.6. ([20], Proposición 5.12)
El complemento ortogonal $A^{\perp}$ de cada subconjunto A de cualquier espacio producto interior $\mathcal{H}$ es un subespacio de $\mathcal{H}$. Más aún, $A^{\perp} = \overline{(A^{\perp})} = (\overline{A})^{\perp} = (span\ A)^{\perp}$. El complemento ortogonal de cada subconjunto denso de $\mathcal{H}$ es el espacio cero: $A^{\perp} = \{0\}$ donde $\overline{A} = \mathcal{H}$.

Demostración. Supóngase que $A = \emptyset$ (en caso contrario el resultado se cumple). Como el producto interior es lineal en el primer argumento, se sigue que $A^{\perp}$ es un subespacio del espacio

lineal $\mathcal{H}$. Si $x \perp A$, entonces $x \perp \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$ para cada entero $n \geq 1$ donde $y_i \in A$ y $\alpha_i \in \mathbb{F}$ para cada $i = 1, \cdots, n$, y por lo tanto $A \subseteq (span\ A)^{\perp}$. Por otro lado, $A \subseteq (span\ A)$ así que $(span\ A)^{\perp} \subseteq A^{\perp}$. Entonces $A^{\perp} = (span\ A)^{\perp}$.
Como consecuencia de la continuidad del producto interior, $A^{\perp}$ es cerrado en $\mathcal{H}$. Esto es, si $\{x_n\}$ es una sucesión con valores en $A^{\perp}$ que converge a $x \in \mathcal{H}$, entonces

$$\langle x, y \rangle = \langle \text{lím}\, x_n, y \rangle = \text{lím} \langle x_n, y \rangle = 0$$

para cada $y \in A$, lo cual implica que $x \in A^{\perp}$. Por lo tanto, $A^{\perp}$ es cerrado en $\mathcal{H}$, esto es $A^{\perp} = \overline{A^{\perp}}$ y así $A^{\perp}$ es un subespacio de $\mathcal{H}$.
Ahora tomando un valor arbitrario x en $A^{\perp}$ y un y en $\overline{A}$. Existe una sucesión $\{y_n\}$ en A, que converge a y en $\mathcal{H}$. Usando nuevamente la continuidad del producto interior, obtenemos $\langle y, x \rangle = \langle \text{lím}\, y_n, x \rangle = \text{lím} \langle y_n, x \rangle = 0$. Por lo tanto $A^{\perp} \perp \overline{A}$ así que $A^{\perp} \subseteq (\overline{A})^{\perp}$. Como $A \subseteq \overline{A}$ entonces $(\overline{A})^{\perp} \subseteq A^{\perp}$. En consecuencia $A^{\perp} = (\overline{A})^{\perp}$.
Donde $A^{\perp} = (span\ A)^{\perp}$ y $A^{\perp} = (\overline{A})^{\perp}$ para cada subconjunto A de $\mathcal{H}$,

$$A^{\perp} = (span\ A)^{\perp} = [\overline{(span\ A)}]^{\perp}.$$

Finalmente, si $\overline{A} = \mathcal{H}$, entonces $A^{\perp} = (\overline{A})^{\perp} = \mathcal{H}^{\perp} = \{0\}$. $\square$

Teorema 1.3.7. ([20], Teorema 5.13)
Sea x un vector arbitrario en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

(a) Si M es un subconjunto cerrado convexo no vacío de $\mathcal{H}$, entonces existe un único vector u_x en M tal que $\|x - u_x\| = d(x, M)$.

(b) Además, si $\mathcal{M}$ es un subespacio de $\mathcal{H}$, entonces existe un único vector en $\mathcal{M}$ para el cual $\|x - u_x\| = d(x, \mathcal{M})$ tal que la diferencia $x - u_x$ es ortogonal a $\mathcal{M}$, esto es, tal que $x - u_x \in M^{\perp}$.

Demostración. (a) Sea x un vector arbitrario en $\mathcal{H}$ y sea M un subconjunto no vacío de $\mathcal{H}$, luego $d(x, M) = \text{ínf}_{u \in M} \|x - u\|$ existe en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, para cada entero $n \geq 1$ existe $u_n \in M$ tal que

$$d(x, M) \leq \|x - u_n\| < d(x, M) + \frac{1}{n}.$$

considere una sucesión $\{u_n\}$ en M. $\mathcal{H}$ es un espacio producto interior, y así por la ley del paralelogramo se tiene que

$$\|2x - u_m - u_n\|^2 + \|u_n - u_m\|^2 = 2(\|x - u_m\|^2 + \|x - u_n\|^2)$$

para cada $m, n \geq 1$. Como M es convexo, se sigue que

$$\frac{1}{2}(u_m + u_n) \in M,$$

y por tanto $2d(x, M) \leq 2\|\frac{1}{2}(u_m + u_n) - x\| = \|2x - u_m - u_n\|$ luego

$$0 \leq \|u_m - u_n\|^2 \leq 2(\|x - u_m\|^2 + \|x - u_n\|^2 - 2d(x, M)^2)$$

para cada $m, n \geq 1$. Ésta desigualdad y el hecho que

$$\|x - u_n\| \to d(x, M)$$

cuando $n \to \infty$ es suficiente para asegurar que $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}$, y por lo tanto converge en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ a, digamos $u_x \in \mathcal{H}$. Pero la norma es una función continua así

$$\|x - u_x\| = \|x - \lim u_n\| = \lim \|x - u_n\| = d(x, M).$$

Además, como M es cerrado en $\mathcal{H}$ y $\{u_n\}$es una sucesión en M que converge a u_x en $\mathcal{H}$, se sigue que $u_x \in M$. En conclusión, existe u_x en M tal que $\|x - u_x\| = d(x, M)$.
Para probar la unicidad, sea u en M arbitrario tal que

$$\|x - u\| = d(x, M).$$

Observe que $\frac{1}{2}(u_x + u)$ pertenece a M, porque M es convexo, y por lo tanto $d(x, M) \leq \|\frac{1}{2}(u_x + u) - x\|$.
Entonces $4d(x, M) \leq \|u_x + u - 2x\|^2$. Ésta desigualdad y la ley del paralelogramo implican que

$$4d(x, M)^2 + \|u_x - u\|^2 \leq \|u_x + u - 2x\|^2 + \|u_x - u\|^2$$

$$= 2(\|u_x - x\|^2 + \|u - x\|^2) = 4d(x, M)^2.$$

En conclusión $\|u_x - u\|^2 = 0$; esto es, $u = u_x$.
(b) Ahora sea x un vector arbitrario en $\mathcal{H}$ y suponga que $\mathcal{M}$ es

un subespacio de $\mathcal{H}$, lo cual implica que $\mathcal{M}$ es un subconjunto no vacío cerrado convexo de $\mathcal{H}$. De acuerdo a (a) existe un único $u_x \in \mathcal{M}$ tal que $\|x - u_x\| = d(x, \mathcal{M})$. Sea un $u \in \mathcal{M}$ arbitrario distinto de cero. Como $(u_x + \alpha u) \in \mathcal{M}$ para cada escalar α, se sigue que

$$d(x, \mathcal{M}) \leq \|x - u_x - \alpha u\|^2 = \|x - u_x\|^2 + |\alpha|^2 \|u\|^2 - 2Re(\overline{\alpha}\langle x - u_x; u\rangle).$$

Sea $\alpha = \|u\|^2 \langle x - u_x; u\rangle$ en la desigualdad anterior y recordando que $\|x - u_x\|^2 = d(x, \mathcal{M})^2$. Entonces

$$2|\langle x - u_x; u\rangle|^2 \leq |\langle x - u_x; u\rangle|^2,$$

y por tanto

$$|\langle x - u_x; u\rangle| = 0.$$

En conclusión $x - u_x \perp u$ para cada u en $\mathcal{M}$ distinto de cero, lo cual implica que

$$x - u_x \perp \mathcal{M}.$$

Además, este u_x es el único vector en $\mathcal{M}$ con la propiedad anterior. En efecto, si v es un vector en $\mathcal{M}$ tal que $x - v \perp \mathcal{M}$, entonces $\langle x - v; v - u\rangle = \langle x - v; v\rangle - \langle x - v; u\rangle = 0$ donde $u \in \mathcal{M}$ así $x - v \perp v - u$ para cada $u \in \mathcal{M}$. Por el Teorema de Pitágoras,

$$\|x - v\|^2 \leq \|x - v\|^2 + \|v - u\|^2 = \|x - v + v - u\|^2 = \|x - u\|^2$$

para todo $u \in \mathcal{M}$. En particular, para $u = u_x$,

$$d(x, \mathcal{M}) \leq \|x - v\| \leq \|x - u_x\| = d(x, \mathcal{M})$$

luego $d(x, \mathcal{M}) = \|x - v\|$, y por lo tanto $v = u_x$ por que u_x es el único vector en $\mathcal{M}$ para el cual $d(x, \mathcal{M}) = \|x - u_x\|$. $\square$

Dos espacios $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ de un espacio producto interior $\mathcal{H}$ son *complementarios* en $\mathcal{H}$ si ellos son complementos algebraicos uno del otro (es decir $\mathcal{M} + \mathcal{N} = \mathcal{H}$ y $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{0\}$).

Proposición 1.3.8. ([20], Proposición 5.19)
Los subespacios complementarios ortogonales en un espacio producto interior son complementos ortogonales uno del otro.

Demostración. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ subespacios complementarios ortogonales en un espacio producto interior $\mathcal{H}$. Tomamos un x arbitrario en $\mathcal{M}^{\perp} \subseteq \mathcal{H}$. Como $\mathcal{M}+\mathcal{N}=\mathcal{H}$, se sigue que $x=u+v$ con u en $\mathcal{M}$ y v en $\mathcal{N}$, y así $\langle x;u\rangle = \langle u;u\rangle + \langle v;u\rangle$.
Pero $\langle x;u\rangle = \langle v;u\rangle = 0$ (porque $\mathcal{M} \perp \mathcal{M}^{\perp}$ y $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$). Por lo tanto $\|u\|^2 = 0$, lo cual implica que $u = 0$. Por consiguiente $x = v \in \mathcal{N}$. Así $\mathcal{M}^{\perp} \subseteq \mathcal{N}$, pero $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}^{\perp}$ por que $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$. En conclusión $\mathcal{M}^{\perp} = \mathcal{N}$. $\square$

Proposición 1.3.9. ([20], Proposición 5.24)
Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ subespacios ortogonales complementarios en un espacio producto interior $\mathcal{H}$. La aplicación natural

$$\Phi : \mathcal{M} \oplus \mathcal{N} \to \mathcal{M} + \mathcal{N}$$

es una transformación unitaria (isomorfismo dada por una isometría), así $\mathcal{M}\oplus\mathcal{N}$ y $\mathcal{H} = \mathcal{M}+\mathcal{N}$ son unitariamente equivalentes, es decir, $\mathcal{H} \cong \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$.

Demostración. Como $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son subespacios lineales complementarios en $\mathcal{H}$, se tiene que (véase [20], Proposición 2.14), Φ es un isomorfismo de $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ sobre $\mathcal{M} + \mathcal{N} = \mathcal{H}$. Si $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$, entonces

$$\langle \Phi((u_1, v_1)); \Phi((u_2, v_2))\rangle = \langle u_1 + v_1; u_2 + v_2\rangle$$

$$= \langle u_1; u_2\rangle + \langle v_1, v_2\rangle$$

$$\langle (u_1, v_1); (u_2; v_2)\rangle$$

para cada (u_1, v_1) y (u_2, v_2) en $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$. Por lo tanto la aplicación natural Φ es un isomorfismo que preserva el producto interior; esto es, Φ es una tranformación unitaria. $\square$

Teorema 1.3.10. ([20], Teorema 5.10)

(a) Si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son subespacios ortogonales completos de un espacio producto interior $\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{M}+\mathcal{N}$ es un subespacio completo de $\mathcal{H}$.

(b) Si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son subespacios cerrados ortogonales de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces la suma $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$.

Demostración. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ subespacios cerrados ortogonales de un espacio producto interior $\mathcal{H}$. Tomando una sucesión arbitraria de Cauchy $\{x_n\}$ en $\mathcal{M}+\mathcal{N}$, se tiene que $x_n = u_n + v_n$ con u_n en $\mathcal{M}$ y v_n en $\mathcal{N}$ para cada n. Donde $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son subespacios cerrados de $\mathcal{H}$, se sigue que $u_m - u_n$ pertenece a $\mathcal{M}$ y $v_m - v_n$ pertenece a $\mathcal{N}$, y por lo tanto $u_m - u_n \perp v_m - v_n$, para cada par de enteros m y n (donde $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$). Escribiendo $x_m - x_n = (u_m - u_n) + (v_m - v_n)$ el Teorema de Pitágoras asegura que

$$\|x_m - x_n\|^2 = \|u_m - u_n\|^2 + \|v_m - v_n\|^2$$

para cada m y n. Esto implica que $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ son sucesiones de Cauchy en $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ respectivamente.
(a) Si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son completos, entonces $\{u_n\}$ converge en $\mathcal{M}$ y $\{v_n\}$ converge en $\mathcal{N}$. Recordando que la suma es una operación continua se obtiene que $\{x_n\}$ converge en $\mathcal{M}+\mathcal{N}$. En conclusión $\mathcal{M}+\mathcal{N}$ es completo y en consecuencia cerrado.
(b) Si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son subespacios cerrados de un espacio producto interior completo $\mathcal{H}$, entonces son completos, y el subespacio $\mathcal{M}+\mathcal{N}$ de $\mathcal{H}$ es completo, por lo tanto cerrado y en consecuencia es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$. $\square$

Teorema 1.3.11. (**Teorema de proyección**)([20], Teorema 5.25) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ un subespacio cerrado, entonces $\mathcal{H}$ tiene la descomposición ortogonal

$$\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}.$$

Demostración. Sea $\mathcal{M}$ subespacio cerrado arbitrario de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Como $\mathcal{M}^{\perp}$ es un subespacio de $\mathcal{H}$, el cual es ortogonal a $\mathcal{M}$ (por definición), se sigue del teorema 1.3.10 que $\mathcal{M}+\mathcal{M}^{\perp}$ es un subespacio de $\mathcal{H}$. Además, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}+\mathcal{M}^{\perp}$ y $\mathcal{M}^{\perp} \subseteq \mathcal{M}+\mathcal{M}^{\perp}$. Por lo tanto $(\mathcal{M}+\mathcal{M}^{\perp})^{\perp} \subseteq \mathcal{M}^{\perp}\cap\mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M}^{\perp}\cap\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}^{\perp}\cap\mathcal{M} = 0$, y así $\mathcal{M}+\mathcal{M}^{\perp} = \overline{(\mathcal{M}+\mathcal{M}^{\perp})} = \mathcal{H}$. Ahora de la proposición anterior 1.3.9, $\Phi(\mathcal{M}\oplus\mathcal{N}) = \mathcal{M}+\mathcal{M}^{\perp} = \mathcal{H}$, podemos escribir $\mathcal{M}\oplus\mathcal{N} = \mathcal{H}$. $\square$

Observación 1.3.12. En el Teorema anterior, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^{\perp}$ son en sí mismos espacios de Hilbert.

Recordemos que un operador T se dice idempotente si $T^2 = T$. Una **proyección** es una transformación lineal idempotente de un espacio lineal en sí mismo. Una **proyección ortogonal** sobre un espacio producto interior $\mathcal{H}$ es una proyección $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$.

Proposición 1.3.13. ([20], Proposición 5.51)
Una proyección ortogonal $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ sobre un espacio producto interior $\mathcal{H}$ tiene las siguientes propiedades básicas:

a) $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\|P\| = 1$ donde $P \neq O$.

b) $\mathcal{N}(P)$ y $\mathcal{R}(P)$ son subespacios de $\mathcal{H}$.

c) $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(P)^\perp$ y $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(P)^\perp$.

d) $\mathcal{R}(P)$ y $\mathcal{N}(P)$ son subespacios complementarios ortogonales en $\mathcal{H}$. Esto es, son subespacios ortogonales de $\mathcal{H}$, $\mathcal{R}(P)$ y $\mathcal{N}(P)$ son tales que $\mathcal{H} = \mathcal{R}(P) + \mathcal{N}(P)$. Por lo tanto $\mathcal{H}$ puede ser descompuesto como una suma directa ortogonal $\mathcal{H} = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$.

Demostración. Sea P una proyección ortogonal sobre un espacio producto interior $\mathcal{H}$.
(a) Sea $x \in \mathcal{H}$ arbitrario. Como $\mathcal{R}(P)$ y $\mathcal{N}(P)$ son complementos algebraicos uno del otro, podemos escribir $x = u+v$ con $u \in \mathcal{R}(P)$ y $v \in \mathcal{N}(P)$. Además, $u \perp v$ por que $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$. Entonces por el Teorema de Pitágoras $\|x\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. Recordar que $\mathcal{R}(P) = \{u \in \mathcal{H} : Pu = u\}$, obtenemos $Px = Pu + Pv = u$ así que $\|Px\|^2 = \|u\|^2 \leq \|x\|^2$. Por lo tanto $\|P\| \leq 1$. Esto es, P es una contracción. Si $P \neq O$, entonces $\mathcal{R}(P) \neq \{0\}$, y así $\|Pu\| = \|u\| \neq 0$ para todo u distinto de cero en $\mathcal{R}(P)$. Por lo tanto $\|P\| \geq 1$. En conclusión $\|P\| = 1$.
(b) De acuerdo a (a), $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Como $\mathcal{N}(P)$ es un subespacio de $\mathcal{H}$ y $Q = I - P$ es una proyección ortogonal sobre $\mathcal{H}$, se sigue que $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(Q)$ es un subespacio de $\mathcal{H}$.

(c) Recordar de la definición de complemento ortogonal que si A y B son subconjuntos de $\mathcal{H}$ tales que $A \perp B$, entonces $A \subseteq B^\perp$. Por lo tanto, como $\mathcal{N}(P) \perp \mathcal{R}(P)$, obtenemos $\mathcal{N}(P) \subseteq \mathcal{R}(P)^\perp$. Ahora tomando un $x \in \mathcal{R}(P)^\perp$ arbitrario se tiene que $x \perp \mathcal{R}(P)$.

Sabemos que $x = u + v$ con $u \in \mathcal{R}(P)$ y $v \in \mathcal{N}(P)$. Por lo tanto $0 = \langle x; u \rangle = \langle u; u \rangle + \langle v; u \rangle = \|u\|^2$ y así $u = 0$, lo cual implica que $x = v \in \mathcal{N}(P)$. Por lo tanto $\mathcal{R}(P)^\perp \subseteq \mathcal{N}(P)$. Por consiguiente $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(P)^\perp$. Sea la proyección ortogonal complementaria $Q = I - P$, concluimos que $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(Q) = \mathcal{R}(Q)^\perp = \mathcal{N}(P)^\perp$.

(d) Como $\mathcal{N}(P)$ y $\mathcal{R}(P)$ son complementos algebraicos uno del otro, se tiene que $\mathcal{H} = \mathcal{R}(P) + \mathcal{N}(P)$. Dado que $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$, se sigue de la proposición 1.3.9 que $\mathcal{H} \cong \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$. Es usual que la suma directa ortogonal $\mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$ se identifique con su imagen unitaria equivalente $\mathcal{R}(P) + \mathcal{N}(P) = \mathcal{H}$, y se escribe $\mathcal{H} = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$. $\square$

Una manera de representar matricialmente un operador es debida a la descomposición en suma directa del espacio sobre el cual está definido tal operador, la siguiente proposición tomada de [20] (Proposición 2.22) nos muestra tal representación matricial.

Proposición 1.3.14. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y considere su descomposición como suma directa de los subespacios disjuntos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ de $\mathcal{H}$, $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$. Sea $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ la proyección sobre $\mathcal{M}$ a lo largo de $\mathcal{N}$, y sea $Q = I - P$ la proyección sobre $\mathcal{N}$ a lo largo de $\mathcal{M}$. Cada operador $\mathcal{L} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ puede ser escrito como una matriz 2×2 con operadores como entradas

$$L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

donde $A = PL|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $B = PL|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$,
$C = QL|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, y $D = QL|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$.

Demostración. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ subespacios cerrados de $\mathcal{H}$. Supóngase que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son complementos algebraicos uno del otro, y considere la descomposición $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$. Sea L un operador sobre $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ luego $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Sea $x \in \mathcal{H}$ arbitrario y considere su única descomposición $x = u \oplus v$ en $\mathcal{H}$, con $u \in \mathcal{M}$ y $v \in \mathcal{N}$. Escribimos $x = (u, v)$ entonces $Lx = L(u, v) = L((u, 0) \oplus (0, v)) = L(u, 0) \oplus L(0, v) = L|_{\mathcal{M}\oplus\{0\}} \oplus L|_{\{0\}\oplus\mathcal{N}}(0, v)$. Identificando $\mathcal{M} \oplus \{0\}$ y $\{0\} \oplus \mathcal{N}$ con $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, respectivamente, se sigue que

$$Lx = L|_{\mathcal{M}} u \oplus L|_{\mathcal{N}} v,$$

donde $L|_{\mathcal{M}}u$ y $L|_{\mathcal{N}}v$ están en $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$. Por la proposición 1.3.13 podemos escribir

$$L|_{\mathcal{M}}u = PL|_{\mathcal{M}}u \oplus QL|_{\mathcal{M}}u,$$

$$L|_{\mathcal{N}}v = PL|_{\mathcal{N}}v \oplus QL|_{\mathcal{N}}v,$$

donde P es la única proyección sobre $\mathcal{M}$ a lo largo de $\mathcal{N}$ y $Q = I - P$. Por lo tanto,

$$Lx = (PL|_{\mathcal{M}}u + PL|_{\mathcal{N}}v) \oplus (QL|_{\mathcal{M}}u + QL|_{\mathcal{N}}v,)$$

donde $PL|_{\mathcal{M}}u+PL|_{\mathcal{N}}v$ está en $\mathcal{M}$ y $QL|_{\mathcal{M}}u+QL|_{\mathcal{N}}v$ está en $\mathcal{N}$. Como los rangos de $PL|_{\mathcal{M}}$ y $PL|_{\mathcal{N}}$ están incluidos en $\mathcal{R}(P) = \mathcal{M}$, se puede pensar en ellos como operadores en $\mathcal{M}$. Similarmente, $QL|_{\mathcal{M}}$ y $QL|_{\mathcal{N}}$ pueden pensarse como operadores en $\mathcal{N}$. Entonces los conjuntos $A = PL|_{\mathcal{M}}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{M})$, $B = PL|_{\mathcal{N}}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$, $C = QL|_{\mathcal{M}}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, y $D = QL|_{\mathcal{N}}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{N})$ así

$$Lx = (Ax + Bv, Cu + Dv) \in \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$$

para cada $x = (u, v) \in \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$. En términos de la notación estándar para matrices, el vector $Lx = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ puede ser visto como una matriz 2×1 con la primera entrada en $\mathcal{M}$ y la otra en $\mathcal{N}$, denotada como $\begin{pmatrix} Au + Bv \\ Cu + Dv \end{pmatrix}$. Esta es precisamente la acción de la matriz 2×2 con entradas los operadores $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, sobre la matriz 2×1 con entradas en $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ representando x, que se denota como $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. En conclusión $Lx = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, y así, podemos escribir $L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. $\square$

Teorema 1.3.15. ([20], Ejemplo 2.O)
Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y considere su descomposición como suma directa de los subespacios disjuntos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$. Sea $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ la proyección sobre $\mathcal{M}$ a lo largo de $\mathcal{N}$, y sea $Q = I - P$ la proyección sobre $\mathcal{N}$ a lo largo de $\mathcal{M}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) $LP = PLP$.

(b) $\mathcal{M}$ es $L-$invariante.

(c) $L = \begin{pmatrix} L|_{\mathcal{M}} & B \\ O & D \end{pmatrix}$.

Demostración. Observe que la proyección sobre $\mathcal{M}$ a lo largo de $\mathcal{N}$ puede escribirse como

$$P = \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

con respecto a la descomposición $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$, donde I denota la identidad sobre $\mathcal{M}$. Por lo tanto $LP = \begin{pmatrix} A & O \\ C & O \end{pmatrix}$ y $PLP = \begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix}$, así $LP = PLP$ si y sólo si $C = O$. Note que $\mathcal{M}$ es $L-$invariante (i.e. $L(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$) si y sólo si $PL|_{\mathcal{M}} = L|_{\mathcal{M}}$. Por lo tanto

$$L(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M} \Leftrightarrow A = L|_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow C = O \Leftrightarrow LP = PLP.$$

□

Teorema 1.3.16. ([20], Ejemplo 2.O)
Bajo las mismas hipótesis que en el teorema anterior, los siguientes enunciados son equivalentes

(a) $LQ = QLQ$.

(b) $\mathcal{N}$ es $L-$invariante.

(c) $L = \begin{pmatrix} A & O \\ C & L|_{\mathcal{N}} \end{pmatrix}$.

Demostración. Note que la proyección de $\mathcal{N}$ a lo largo de $\mathcal{M}$ se puede escribir como

$$Q = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix}$$

con respecto a la descomposición $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$, donde I denota la identidad sobre $\mathcal{N}$. Por lo tanto $LQ = \begin{pmatrix} O & B \\ O & D \end{pmatrix}$ y $QLQ = \begin{pmatrix} O & O \\ O & D \end{pmatrix}$, así $QL = QLQ$ si y sólo si $B = O$. Note que $\mathcal{N}$ es

$L-$invariante (i.e. $L(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$) si y sólo si $LQ|_{\mathcal{N}} = L|_{\mathcal{N}}$. Por lo tanto

$$L(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N} \Leftrightarrow D = L|_{\mathcal{N}} \Leftrightarrow B = O \Leftrightarrow LQ = QLQ.$$

□

Sean $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ espacios de Banach. $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ denotará el conjunto de todos los operadores lineales acotados de $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$. Además, $\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{X})$. Considere $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ un álgebra de Banach. Como en espacios de Banach no se tiene el concepto de ortogonalidad, el siguiente lema nos proporciona una descomposición de un espacio sin utilizar tal concepto.

Lema 1.3.17. ([7], Lema 2.5.1)
Sea E un subespacio cerrado en el espacio de Banach $\mathcal{X}$. Entonces existe un subespacio cerrado F tal que $\mathcal{X} = E \oplus F$, si y sólo si existe una proyección P de $\mathcal{X}$ sobre $\mathcal{X}$.

Demostración. Si existe la proyección P, entonces $I - P$ es una proyección con rango cerrado. Dada la descomposición $x = P(x) + (I-P)(x)$ observamos que $\mathcal{X} = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{R}(I-P)$.
Recíprocamente, suponiendo $\mathcal{X} = E \oplus F$ donde F es un subespacio cerrado. Cada $x \in \mathcal{X}$ tiene una única representación $x = y + z$, $y \in E,\ z \in F$. Sea $Q(x) = y$ como $Q^2 = Q$ y $\mathcal{R}(Q) = E$. Resta demostrar que Q es continua. Sea $\{x_n\}$ una sucesión que converge a x en $\mathcal{X}$ y $\{Q(x_n)\}$ una sucesión en E que converge a w en $\mathcal{X}$. Como E es cerrado $w \in E$. Ahora $x_n - Q(x_n) \in F$ y $x_n - Q(x_n)$ converge a $x - w$. Por lo tanto, como F es cerrado, $x - w \in F$. En consecuencia vemos que $w = Q(x)$. Luego Q es una aplicación lineal cerrada, la cual por el Teorema de la Gráfica Cerrada es continua. □

1.3.2. Descomposición Espectral

En la siguiente proposición, (véase [1] Proposición 1.15) la parte (a) es el Teorema de Gelfand-Mazur.

Proposición 1.3.18. Sea $\mathcal{X} \neq \{0\}$ y $T \in B(\mathcal{X})$.

(a) El subconjunto $\sigma(T)$ de $\mathbb{C}$ es no vacío y compacto.

(b) Fórmula del radio espectral:

$$r(T) = \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k} = \inf_{k=1,2,\cdots} \|T^k\|^{1/k}$$

Demostración. Por el Teorema 1.2.5, $\sigma(T)$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$ y $|\lambda| \leq \|T\|$ para todo $\lambda \in \sigma(T)$. Por lo tanto $\sigma(T)$ es compacto. Si éste fuera vacío, entonces $(T - \cdot I)^{-1}$ sería analítica en el plano complejo; y, nuevamente por el Teorema 1.2.5, se sigue que $\|(T - \lambda I)^{-1}\| \to 0$ cuando $|\lambda|$ tiende a infinito. Por lo tanto $(T - \cdot I)^{-1}$ es una función acotada entera. Por el Teorema de Liouville debe ser una función constante, y de hecho esta constante deber ser igual a 0, pero esto es imposible porque $\mathcal{X} \neq \{0\}$.
(b) En la prueba del Teorema 1.2.5 se demuestra que

$$r(T) \leq \limsup_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k} = t.$$

De hecho, $r(T) = t$ dado que la Expansión de Laurent converge para $|\lambda| > r(T)$ y diverge para $|\lambda| < t$. La identidad

$$T^k - \lambda^k I = (T - \lambda I) \sum_{j=0}^{k-1} T^{k-1-j} \lambda^j,$$

se cumple para cada entero positivo k, demostrando que $\lambda \in \rho(T)$ donde λ^k pertenece a $\rho(T^k)$. Por lo tanto $\lambda^k \in \sigma(T^k)$ con $\lambda \in \sigma(T)$, así $|\lambda| \leq \|T^k\|^{1/k}$. Por lo tanto

$$r(T) \leq \inf_{k=1,2,\cdots} \|T^k\|^{1/k} \leq \liminf_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k} \leq \liminf_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k} = r(T),$$

lo cual completa la prueba. $\square$

Proposición 1.3.19. ([1], Proposición 1.18)
Si (Y, Z) descomponen T, entonces

$$\sigma(T) = \sigma(T|_Y) \cup \sigma(T|_Z).$$

Demostración. Sea $\lambda \in \rho(T)$. Note que si $x \in Y$, entonces $y := Tx - z \in Y$. También si $y \in Y$, $Tx - zx = y$ para $x \in \mathcal{X}$ y $x = x_Y + x_Z$ para $x_Y \in Y$ y $x_Z \in Z$, entonces

$$y = Tx - zx = T(x_Y + x_Z) - z(x_Y + x_Z) =$$

$$Tx_Y + Tx_Z - zx_Y - zx_Z = Tx_Y - zx_Y + Tx_Z - zx_Z$$

así

$$Tx_Z - zx_Z = 0$$

luego

$$x_Z = 0.$$

Por lo tanto

$$x = x_Y \in Y.$$

Por lo tanto $T - \lambda I$ es una biyección de Y sobre si mismo. Similarmente para Z: Si $x \in Z$, entonces $z := Tx - y \in Z$. También si $z \in Z$, $Tx - yx = z$ para $x \in \mathcal{X}$ y $x = x_Y + x_Z$ para $x_Y \in Y$ y $x_Z \in Z$, entonces

$$z = Tx - yx = T(x_Y + x_Z) - y(x_Y + x_Z)$$

$$= Tx_Y + Tx_Z - yx_Y - yx_Z = Tx_Y - yx_Y + Tx_Z - yx_Z$$

así

$$Tx_Y - yx_Y = 0$$

luego

$$x_Y = 0.$$

Por lo tanto

$$x = x_Z \in Z.$$

Por lo tanto $T - \lambda I$ es también una biyección de Z sobre si mismo. Esto demuestra que $\rho(T) \subset \rho(T|_Y) \cap \rho(T|_Z)$. Como Y y Z son invariantes bajo $(T - \lambda I)^{-1}$, se tiene que

$$(T - \lambda I)|_Y^{-1} = (T|_Y - \lambda I)^{-1}$$

y

$$(T - \lambda I)|_Z^{-1} = (T|_Z - \lambda I)^{-1}.$$

Recíprocamente, sea P la proyección sobre Y a lo largo de Z. Para $\lambda \in \rho(T|_Y) \cup \rho(T|_Z)$ y $x \in X$, esto puede ser visto como

$$(T - \lambda I)[(T|_Y - \lambda I)^{-1}P + (T|_Z - \lambda I)^{-1}(I - P)]x = x$$

y

$$[(T|_Y - \lambda I)^{-1}P + (T|_Z - \lambda I)^{-1}(I - P)](T - \lambda I)x = x,$$

así que
$$\lambda \in \rho(T)$$
y
$$(T - \lambda I)^{-1} = (T|_Y - \lambda I)^{-1} P + (T|_Z - \lambda I)^{-1}(I - P).$$
Por lo tanto
$$\rho(T) = \rho(T|_Y) \cup \rho(T|_Z).$$
□

Ejemplo 1.3.20. *Una descomposición sencilla.*
Sea X un espacio complejo de dos dimensiones y un operador T sobre X representado por la matriz
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$
con respecto a la base ordenada $\{v_1, v_2\}$. Sea $Y := span\{v_1\}$ y $Z := span\{v_2\}$. El par (Y, Z) es una descomposición T. Además, $T|_Y$ y $T|_Z$ tienen espectro disjunto si y sólo si $\lambda \neq \mu$.

Definición 1.3.21. Un subconjunto Λ de $\sigma(T)$ para el cual, tanto Λ como $\sigma(T) \setminus \Lambda$ son cerrados en $\mathbb{C}$ es llamado un **conjunto espectral** para T.

Observación 1.3.22. Como $\sigma(T)$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{C}$, se sigue que un subconjunto Λ de $\sigma(T)$ es un conjunto espectral para T si y sólo si Λ es cerrado y abierto en $\sigma(T)$.

Observación 1.3.23. Un singulete $\{x\}$ es un conjunto espectral para T si y sólo si $\{x\}$ es un punto aislado de $\sigma(T)$.

Definición 1.3.24. Si Λ es un conjunto espectral para T, y Γ es una curva de Jordan en $\rho(T)$ que satisface $\sigma(T) \cap int(\Gamma) = \Lambda$, entonces se dice que la curva de Jordan Γ **separa** Λ de $\sigma(T) \setminus \Lambda$.

Ejemplo 1.3.25. *Una curva simple de Jordan no es suficiente para separar un conjunto espectral Λ para T de $\sigma(T) \setminus \Lambda$.*
Sea $X := l^2$ y sea $\{e_k\}$ la base canónica para X. Sea $\{\theta_1, \theta_2, \cdots\} := [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Definimos $T \in B(X)$ por
$$Tx := 2x_2 e_2 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{2\pi i \theta_k} x_{k+2} e_{k+2}$$

para $x := \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in X$.
Se tiene que $0, 2$ y $e^{2\pi i\theta_j}$ para cada entero positivo j son eigenvalores de T.
En efecto, note que el operador

$$Tx = (0, 2x_2, e^{2\pi_i\theta_1}x_3, e^{2\pi_i\theta_2}x_4, \cdots)$$

no es inyectivo, pues para distintos valores de θ_i, con $x_3 \neq 0$, se tiene que $e^{2\pi_i\theta_1}x_3 = 0$, y por lo tanto $N(T) \neq \{0\}$.

Veamos ahora para $\lambda = 2$,

$$T - \lambda I = T - 2I = (-2, 2x_2 - 2, e^{2\pi_i\theta_1}x_3 - 2, \cdots)$$

similar al caso anterior se cumple que $N(T - 2I) \neq \{0\}$ y por lo tanto 2 es un valor propio de T.
Por definición λ es un valor propio de T si y sólo si $(T - \lambda I)$ no es inyectivo, luego para $\lambda = 0$ tenemos que

$$T - \lambda I = T - 0I = T$$

no es inyectivo. Por lo tanto 0 es un valor propio de T.
Finalmente veamos que $e^{2\pi_i\theta_j}, j \in \mathbb{N}$ son valores propios de T.
En efecto,

$$T - e^{2\pi_i\theta_j}I = (-e^{2\pi_i\theta_j}, 2x_2 - e^{2\pi_i\theta_j}, e^{2\pi_i\theta_1}x_3 - e^{2\pi_i\theta_j}, \cdots)I$$

y como en los casos anteriores para distintos valores de π_i, $-e^{2\pi_i\theta_j} = 0$, y por tanto $T - e^{2\pi_i\theta_j}I$ no es inyectivo, es decir, $e^{2\pi_i\theta_j}$ son valores propios de T.

Como $\{\theta_1, \theta_2, \cdots\}$ es denso en $[0, 1]$, obtenemos $\sigma(T) = \{0, 2\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \ : |\lambda| = 1\}$. Si $\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{C} \ : |\lambda| = 1\}$, al menos dos curvas de Jordan son necesarias para separar Λ de $\sigma(T) \setminus \Lambda$. Lo mismo se cumple si $\Lambda := \{0, 2\}$.

Definición 1.3.26. Un **dominio elemental de Cauchy** es un subconjunto abierto acotado conexo de $\mathbb{C}$, cuya frontera es la unión de un número finito de curvas de Jordan que no se intersectan. Una unión finita de dominios elementales de Cauchy con clausuras disjuntas es llamado un **dominio de Cauchy**.

Teorema 1.3.27. ([1], Teorema 1.21)
Si E es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ contenido en un subconjunto abierto Ω, entonces existe un dominio de Cauchy D tal que E es un subconjunto de D y la clausura de D es un subconjunto de Ω.

Demostración. Sea $F := \mathbb{C} \setminus \Omega$ y $\delta := dist(E, F)$. Entonces $\delta > 0$. Para todos los enteros i, j, sea $z_{i,j} := \frac{(i+ij)\delta}{3}$ y

$$B_{i,j} := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_{i,j}| < \frac{\delta\sqrt{3}}{6}\}.$$

Entonces $\mathbb{C} \subset \bigcup_{i,j} B_{i,j}$. Como E es compacto, este puede ser cubierto con un número finito de tales discos abiertos que tienen intersección no vacía con E, digamos $E \subset D := \bigcup_{k=1}^{n} B_{i_k,j_k}$. Sea z en la clausura de D. Encontramos $w \in D$ tal que $|z - w| < \delta/3$. Entonces existe $k \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $w \in B_{i_k,j_k}$ y

$$|z - z_{i_k,j_k}| \leqslant |z - w| + |w - z_{i_k,j_k}| < \delta + 2\sqrt{3}\delta/6 < \delta.$$

Esto implica que $z \notin F$ y por tanto $z \in \Omega$. La frontera de D está contenida en la unión de las fronteras de los discos $B_{i_k,j_k}, k = 1, \cdots, n$. Más aún, la parte de la frontera de D dentro de cada cuadrado de la malla definida por los centros $z_{i_k,j_k}, k = 1, \cdots, n$, está formada de un arco de círculo, o de dos arcos de círculo que tienen en común un punto final, o de un par de tales arcos disjuntos. Por lo tanto la frontera de cada componente conexa de D es una unión de un número finito de curvas de Jordan.
Por lo tanto cada componente conexa de D es un dominio elemental de Cauchy. Como consecuencia, D es un dominio de Cauchy. $\square$

Definición 1.3.28. El **interior** de un contorno de Cauchy C determinado por un dominio de Cauchy D, está definido por $int(C) := D$. El **exterior** de un contorno de Cauchy C determinado por un dominio de Cauchy D, está definido por $ext(C) := \mathbb{C} \setminus (D \cup C)$.

Sea C un contorno de Cauchy. Si E y F son subconjuntos de $\mathbb{C}$ tal que $E \subset int(C)$ y $F \subset ext(C)$, entonces se dice que C **separa** E de F.

Corolario 1.3.29. ([1], Corolario 1.22) Sea E un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y F un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$. Si $E \cap F = \emptyset$, entonces existe un contorno de Cauchy C que separa E de F. Además, existe un contorno de Cauchy que separa $E \cup C$ de F, y existe un contorno de Cauchy que separa E de $F \cup C$.

Demostración. Sea $\Omega := \mathbb{C} \setminus F$ por el teorema 1.3.27, existe un dominio de Cauchy D tal que E es un subconjuto de D y la clausura de D no intersecta F. Ahora sea C la frontera orientada de D. Entonces $E \subset int(C)$ y $F \subset \mathbb{C} \setminus (D \cup C) = ext(C)$, esto es, el contorno de Cauchy C separa E de F.

Ahora, como $E \cup C$ es compacto y $(E \cap C) \cap F = \emptyset$, reemplazando E por $E \cup C$ se obtiene un contorno de Cauchy que separa $E \cup C$ de F. Similarmente, como $E \cup C$ es cerrado y $E \cap (F \cup C) = \emptyset$, reemplazando F por $F \cup C$ se obtiene un contorno de Cauchy que separa E de $F \cup C$. $\square$

Observación 1.3.30. Usando el corolario anterior, para cada conjunto espectral Λ para T, existe un contorno de Cauchy C que separa Λ de $\sigma(T) \setminus \Lambda$.

Si Λ es un conjunto espectral de T, el conjunto de todos los contornos de Cauchy que separan Λ de $\sigma(T) \setminus \Lambda$ se denota por $\mathcal{C}(T, \Lambda)$.

Definición 1.3.31. Para un conjunto espectral Λ para T y $C \in \mathcal{C}(T, \Lambda)$, se define como

$$\mathbf{P}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\Lambda}) := -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\pi\mathbf{i}} \int_{\mathbf{C}} (\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I})^{-\mathbf{1}} \mathbf{d}\lambda,$$

la cual es la integral de contorno a lo largo de C, de funciones con valores en $B(X)$, $\lambda \to (T - \lambda I)^{-1}$ de la variable compleja λ.

Proposición 1.3.32. ([1], Proposición 1.23)
Sea Λ un conjunto espectral para T y $P := P(T, \Lambda)$. Entonces P es una proyección y ésta conmuta con T. Más aún, si $Q \in B(X)$ es cualquier proyección tal que Q conmuta con T y $\mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(P)$, entonces $Q = P$.

Demostración. Sea $C \in \mathcal{C}(T, \Lambda)$. Por el corolario 1.3.29, existe un contorno de Cauchy C_1 que separa $\Lambda \cup C$ de $\sigma(T) \setminus \Lambda$. Entonces $C_1 \in \mathcal{C}(T, \Lambda)$ y por consiguiente

$$P^2 = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_C \left[\int_{C_1} (T - \lambda I)^{-1} (T - \kappa I)^{-1} d\kappa\right] d\lambda.$$

Por la primera identidad del resolvente 1.2.4, se tiene que

$$(T - \lambda I)^{-1} - (T - \kappa I)^{-1} = (\lambda - \kappa)(T - \lambda I)^{-1}(T - \kappa I)^{-1}$$

para

$$\lambda \in C, \ \kappa \in C_1.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} P^2 &= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_C \left[\int_{C_1} \left[(T - \lambda I)^{-1} - (T - \kappa I)^{-1}\right] \frac{d\kappa}{\lambda - \kappa}\right] d\lambda \\ &= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_C \left[(T - \lambda I)^{-1} \int_{C_1} \frac{d\kappa}{\lambda - \kappa}\right] d\lambda \\ &- \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{C_1} \left[(T - \kappa I)^{-1} \int_C \frac{d\kappa}{\lambda - \kappa}\right] d\kappa \end{aligned}$$

como $(T - \lambda I)^{-1}$ es un operador continuo podemos intercambiar los ordenes de integración. Dado que C pertenece a $int(C_1)$, se sigue que para cada $\lambda \in C$ y cada $\kappa \in C_1$, se tiene que por el teorema de Cauchy,

$$\int_{C_1} \frac{d\kappa}{\lambda - \kappa} = -2\pi i$$

y

$$\int_C \frac{d\lambda}{\lambda - \kappa} = 0.$$

Esto prueba que $P^2 = P$. También, $P \in B(X)$ por que P es la integral de contorno de una función de valores en $B(X)$. Como T conmuta con $(T - \lambda I)^{-1}$ para cada $\lambda \in C$ se tiene que

$$TP = T\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_C (T - \lambda I)^{-1} d\lambda\right] = -\frac{1}{2\pi i}\int_C T(T - \lambda I)^{-1} d\lambda$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_C (T-\lambda I)^{-1}Td\lambda = \left[-\frac{1}{2\pi i}\int_C (T-\lambda I)^{-1}d\lambda\right]T = PT,$$

Por lo tanto los operadores P y T conmutan.
Sea ahora $Q \in B(X)$ tal que $Q^2 = Q$, $QT = TQ$ y $\mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(P)$. Entonces $Q(T-\lambda I)^{-1} = (T-\lambda I)^{-1}Q$ para cada λ sobre $C \in \mathcal{C}(T,\Lambda)$, así que $QP = PQ$. Sea $x \in X$. Como $Qx \in \mathcal{R}(P)$ y $Px \in \mathcal{R}(Q)$, obtenemos

$$Qx = PQx = QPx = Px.$$

Por lo tanto $Q = P$. $\square$

Observación 1.3.33. El hecho de que P y T conmuten implica que $M := \mathcal{R}(P)$ y $N := \mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(I-P)$ son invariantes bajo T. En efecto, sea $x \in T(M)$, existe $y \in M$ tal que $Ty = x$, luego $TPy = x$, como P y T conmutan $PT = x$, así $Ty \in \mathcal{R}(P) = M$ es decir $x \in M$.
Ahora sea $x \in T(N)$, existe $y \in N$ tal que $Ty = x$, como $Px = 0$ se tiene que $x = Ty - TPy = Ty - PTy = (I-P)Ty \in \mathcal{R}(I-P)$. Por lo tanto $x \in N$ esto es $T(N) \subset N$. Por consiguiente M y N son subespacios invariantes bajo T.
Recíprocamente, supóngase que $T(M) \subset M$ y $T(N) \subset N$. Sea $x \in X$, si $x \in M$ se tiene que

$$PTx = Tx = TPx$$

entonces

$$PT = TP.$$

Ahora si $x \in N$, $Tx \in N$ luego

$$PTx = P0 = 0 = Px = TPx$$

por lo tanto $PT = TP$. En conclusión para todo $x \in \mathcal{X}$, $PT = TP$. Por lo tanto este par de subespacios invariantes descomponen T.

Definición 1.3.34. Sea $C \in \mathcal{C}(T,\lambda)$ y para $\lambda_0 \in \sigma(T)$ se define

$$\mathbf{S(T,\Lambda,\lambda_0) := -\frac{1}{2\pi i}\int_C (T-\lambda I)^{-1}\frac{d\lambda}{\lambda_0-\lambda}}.$$

Observación 1.3.35. $S(T,\Lambda,\lambda_0)$ es un operador lineal acotado en X, y no depende de $C \in \mathcal{C}(T,\Lambda)$.

Proposición 1.3.36. ([1], Proposición 1.24)
Sea Λ un conjunto espectral para T, $C \in \mathcal{C}(T,\Lambda)$, $P := P(T,\Lambda)$, $M := \mathcal{R}(P)$, $N := \mathcal{N}(P)$, $\lambda_0 \in \sigma(T)$ y $S := S(T,\Lambda,\lambda_0)$. Entonces

(a) S conmuta con T y con P.

(b) Si $\lambda_0 \in \Lambda$, entonces

$$S(T-\lambda_0 I) = I - P \ \text{ y } \ SP = O,$$

así que

$$\lambda_0 \in \rho(T|_N),$$

$$(T|_N - \lambda I)^{-1} = S|_N \ \text{ y } \ S|_M = O|_M.$$

(c) Si $\lambda_0 \in \sigma(T) \setminus \Lambda$, entonces

$$S(T-\lambda_0 I) = -P \ \text{ y } \ SP = S$$

así que $\lambda_0 \in \rho(T|_M)$,

$$(T|_M - \lambda_0 I)^{-1} = -S|_M \ \text{ y } \ S|_N = O|_N.$$

Demostración. (a) Como T es continua y conmuta con P, para cada λ se tiene que

$$\begin{aligned}
TS &= T\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_C (T-\lambda I)^{-1}\frac{d\lambda}{\lambda_0-\lambda}\right] \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_C T(T-\lambda I)^{-1}\frac{d\lambda}{\lambda_0-\lambda} \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_C (T-\lambda I)^{-1}T\frac{d\lambda}{\lambda_0-\lambda} \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_C (T-\lambda I)^{-1}\frac{d\lambda}{\lambda_0-\lambda}T = ST.
\end{aligned}$$

Por tanto S conmuta con T.
Similarmente, como P es continua y conmuta con $(T-\lambda I)^{-1}$,

entonces P conmuta con S pues para $\lambda \in C$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
PS &= P\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_C (T-\lambda I)^{-1}\frac{d\lambda}{\lambda_0-\lambda}\right] \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_C P(T-\lambda I)^{-1}\frac{d\lambda}{\lambda_0-\lambda} \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_C (T-\lambda I)^{-1}P\frac{d\lambda}{\lambda_0-\lambda} \\
&= \left[-\frac{1}{2\pi i}\int_C (T-\lambda I)^{-1}\frac{d\lambda}{\lambda_0-\lambda}\right]P = SP,
\end{aligned}
$$

por lo tanto S conmuta con P.

(b) Sea $\lambda_0 \in \Lambda$ y $C \in \mathcal{C}(T,\Lambda)$, entonces

$$
\begin{aligned}
S(T-\lambda_0 I) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_C (T-\lambda I)^{-1}(T-\lambda_0 I)\frac{d\lambda}{\lambda_0-\lambda} \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_C (T-\lambda I)^{-1}(T-\lambda I+\lambda I-\lambda_0 I)\frac{d\lambda}{\lambda_0-\lambda} \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\lambda}{\lambda_0-\lambda}I + -\frac{1}{2\pi i}\int_C (T-\lambda I)^{-1}d\lambda \\
&= I-P,
\end{aligned}
$$

como $\lambda_0 \in int(C)$ y $\int_C \frac{d\lambda}{\lambda_0-\lambda} = -2\pi i$.
Ahora, por el corolario 1.3.29, existe un contorno de Cauchy C_1 que separa $\Lambda \cup C$ de $\sigma(T)\backslash\Lambda$. Usando C en la definición de la integral de S y C_1 en la definición de la integral de P, y utilizando la Primera

Identidad del Resolvente (proposición 1.2.4, (d)), obtenemos

$$\begin{aligned}
SP &= \left[-\frac{1}{2\pi i}\int_C (T-\lambda I)^{-1}\frac{d\lambda}{\lambda_0-\lambda}\right]P \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_C (T-\lambda I)^{-1}P\frac{d\lambda}{\lambda_0-\lambda} \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_C (T-\lambda I)^{-1}\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}(T-\kappa I)^{-1}d\kappa\right]\frac{d\lambda}{\lambda_0-\lambda} \\
&= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_C\int_{C_1}\left[(T-\lambda I)^{-1}-(T-\kappa I)^{-1}\right]\frac{d\kappa}{(\lambda_0-\lambda)(\lambda-\kappa)}d\lambda \\
&= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_C\left[\frac{(T-\lambda I)^{-1}}{\lambda_0-\lambda}\int_{C_1}\frac{d\kappa}{\lambda-\kappa}\right]d\lambda \\
&\quad -\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{C_1}\left[(T-\kappa I)^{-1}\int_C\frac{d\lambda}{(\lambda_0-\lambda)(\lambda-\kappa)}\right]d\kappa = O,
\end{aligned}$$

porque $C \subset int(C_1)$, así $\int_{C_1}\frac{d\kappa}{\lambda-\kappa} = -2\pi i$ para cada $\lambda \in C$, $\int_C \frac{d\lambda}{\lambda-\kappa} = 0$ para cada $\kappa \in C_1$ y

$$\int_C \frac{d\lambda}{(\lambda_0-\lambda)(\lambda-\kappa)} = \frac{1}{\lambda_0-\kappa}\int_C\frac{d\lambda}{\lambda-\kappa} + \frac{1}{\lambda_0-\kappa}\int_c\frac{d\lambda}{\lambda_0-\lambda}$$

$$= -\frac{2\pi i}{\lambda_0-\kappa}$$

para cada $\kappa \in C_1$.
Ahora, S aplica M en M, y aplica N en N, pues S y P conmutan.
Por lo tanto $S|_M = O|_M$ y $S|_N(T-\lambda_0 I)|_N = I|_N$.
En particular, $\lambda_0 \in \rho(T|_N)$ y $(T|_N - \lambda I)^{-1} = S|_N$.

(c) Sea $\lambda_0 \in \sigma(T)\setminus\Lambda$. Como en (b) se tiene que,

$$S(T-\lambda_0 I) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{d\lambda}{\lambda_0-\lambda}I + \frac{1}{2\pi i}\int_C (T-\lambda I)^{-1}d\lambda.$$

Pero ahora $\lambda_0 \in ext(C)$, así $\int_C \frac{d\lambda}{\lambda_0-\lambda} = 0$ y por lo tanto
$S(T-\lambda_0 I) = -P$.
Por el corolario 1.3.29, existe un contorno de Cauchy C_1 que separa $\Lambda\cup C$ de $\sigma(T)\setminus\Lambda$. Usando C en la definición de S y C_1 en la

definición de P, y nuevamente usando la Primera Identidad del Resolvente 1.2.5 (d), obtenemos

$$SP = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_C \left[\frac{(T-\lambda I)^{-1}}{\lambda_0 - \lambda} \int_{C_1} \frac{d\kappa}{\lambda - \kappa}\right] d\lambda$$
$$-\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{C_1} \left[(T-\kappa I)^{-1} \int_C \frac{d\lambda}{(\lambda_0 - \lambda)(\lambda - \kappa)}\right] d\kappa.$$

Como $\lambda_0 \in \sigma(T) \setminus \Lambda \subset ext(C)$, $\int_C \frac{d\lambda}{(\lambda_0-\lambda)(\lambda-\kappa)} = 0$ y $\int_{C_1} \frac{d\kappa}{\lambda-\kappa} = -2\pi i$, por lo tanto $SP = S$. Se cumple,

$$S|_M (T - \lambda_0 I)|_M = -I|_M \ \text{ y } \ S|_N = O|_N.$$

En particular,

$$\lambda_0 \in \rho(T|_M) \ \text{ y } \ (T - \lambda_0 I)^{-1} = -S|_M.$$

□

Teorema 1.3.37. Teorema de descomposición espectral([1], Teorema 1.26)
Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, Λ un conjunto espectral para T, $P := P(T, \Lambda)$ la proyección espectral, $M := \mathcal{R}(P)$ y $N := \mathcal{N}(P)$. Entonces T es descompuesto por (M, N), y T tiene la forma matricial siguiente

$$T = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$$

donde $A := T|_M$ y $B := T|_N$. Además

$$\sigma(A) = \Lambda \ \text{ y } \ \sigma(B) = \sigma(T) \setminus \Lambda.$$

En particular, $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$.

Demostración. Como T y P conmutan, el par (M, N) descompone a T. Por la proposición 1.3.19, obtenemos

$$\sigma(T) = \sigma(T|_M) \cup \sigma(T|_N) = \sigma(A) \cup \sigma(B).$$

Por la proposición 1.3.36, obtenemos

$$\Lambda \subset \rho(B) \ \text{ y } \ \sigma(T) \setminus \Lambda \subset \rho(A).$$

Considerando los complementos de los conjuntos anteriores respecto de $\mathbb{C}$ se obtiene

$$\sigma(B) = \mathbb{C} \setminus \rho(B) = (\rho(B))^C \subset \Lambda^C = \sigma(T) \setminus \Lambda$$

y

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A) = (\rho(A))^C \subset (\sigma(T) \setminus \Lambda)^C = \Lambda.$$

Ahora, considerando nuevamente los complementos de los conjuntos anteriores en $\sigma(T)$, obtenemos

$$\Lambda \subset \sigma(T) \setminus \sigma(B) \text{ y } \sigma(T) \setminus \Lambda \subset \sigma(T) \setminus \sigma(A)$$

$$\Rightarrow \Lambda \subset \sigma(A) \text{ y } \sigma(T) \setminus \Lambda \subset \sigma(B).$$

□

Si P es una proyección en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, entonces $P\mathcal{B}(\mathcal{X})P$ es un subálgebra cerrada de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ con unidad P. Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, si $TP = PT$ entonces

$$\sigma_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P}(TP) \cup \{0\} = \sigma(TP), \quad (P \neq I). \tag{1.2}$$

Para la proyección complementaria de P ($Q := I - P$) es conocido que

$$\sigma(T) = \sigma_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P}(TP) \cup \sigma_{Q\mathcal{B}(\mathcal{X})Q}(TQ). \tag{1.3}$$

Teorema 1.3.38. ([19], Teorema 1.2) Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Un conjunto $\Lambda \subset \mathbb{C}$ es un conjunto espectral de T si y sólo si existe una proyección $P \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ que conmuta con T tal que

$$\sigma_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P}(TP) \cap \sigma_{Q\mathcal{B}(\mathcal{X})Q}(TQ) = \emptyset \text{ y } \sigma_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P}(TP) = \Lambda, \tag{1.4}$$

donde $Q = I - P$.
En este caso P es la proyección espectral de T correspondiente a Λ, y Q es proyección espectral correspondiente a $\tau = \sigma(T) \setminus \Lambda$.

Demostración. Sea Λ un conjunto espectral para T con proyección espectral P y conjunto espectral complementario τ. Veamos que $\sigma_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P}(TP) \subset \Lambda$. En efecto, sea $\alpha \in \Lambda$. Elegimos conjuntos abiertos disjuntos Δ y Ω tales que $\Lambda \subset \Delta$, $\alpha \notin \Delta$ y $\tau \subset \Omega$. Definiendo la función h sobre $\Delta \cup \Omega$ dado por

$$h(\lambda) = \begin{cases} (\alpha - \lambda)^{-1} & \text{si } \lambda \in \Delta \\ 0 & \text{si } \lambda \in \Omega. \end{cases}$$

Sea f la función característica de Δ en $\Delta \cup \Omega$ y $P := f(T)$. Por el cálculo holomorfo, se cumple que

$$(\alpha P - TP)h(T) = f(T) = P.$$

Note que $h(T) \in P\mathcal{B}(\mathcal{X})P$ pues $h(T)P = h(T)$. Como cada operador conmuta entonces $\alpha P - TP$ es invertible en $P\mathcal{B}(\mathcal{X})P$. Por lo tanto $\alpha \notin \sigma_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P}(T)$ esto es $\sigma_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P}(T) \subset \Lambda$.
Como $Q := I - P$ es la proyección espectral para τ, usando un argumento similar al anterior se tiene que $\sigma_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P}(TQ) \subset \tau$. De $\sigma(T) = \sigma_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P}(TP) \cup \sigma_{Q\mathcal{B}(\mathcal{X})Q}(TQ)$ y $\Lambda \cap \tau = \emptyset$, se tiene que $\Lambda = \sigma(T) \cap \Lambda = \sigma_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P}(TP) \cap \Lambda = \sigma_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P}(TP)$. Similarmente, $\tau = \sigma_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P}(TQ)$ esto prueba 1.4.
Recíprocamente supóngase que P es una proyección que cumple 1.4. Entonces $\sigma_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P}(TP) = \Lambda$ y $\tau = \sigma_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P}(TQ)$ son conjuntos compactos disjuntos que satisfacen $\sigma(T) = \Lambda \cup \tau$. Por lo tanto Λ, τ son conjuntos espectrales de T. Para probar que P es la proyección espectral de T en Λ, elegimos conjuntos abiertos Δ y Ω tales que $\Lambda \subset \Delta$ y $\tau \subset \Omega$. Si f es la función característica de Δ en $\Delta \cup \Omega$, de

$$(\lambda - T)^{-1} = (\lambda - TP)^{-1}_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P} + (\lambda - TQ)^{-1}_{Q\mathcal{B}(\mathcal{X})Q}$$

se tiene que

$$f(T) = f_P(TP) + (f_Q(TQ) = f_P(TQ) = I_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P} = P,$$

donde f_P y f_Q denotan las aplicaciones de f en $P\mathcal{B}(\mathcal{X})P$ y $Q\mathcal{B}(\mathcal{X})Q$ respectivamente. Por lo tanto Λ es un conjunto espectral de T. $\square$

1.4. Inversas generalizadas para matrices

Sabemos que una matriz es invertible si es no singular, o de otra manera si su determinante es distinto de cero. Sin embargo, es frecuente encontrar en diversas áreas de matemáticas la necesidad de utilizar matrices singulares e incluso rectángulares, para ello es posible apoyarse en la teoría de operadores generalizados inversos, la cual se puede utilizar en matrices como veremos a continuación.

Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, A^* denota la transpuesta conjugada.
Dados $u, v \in \mathbb{C}^n$, $< u, v >$ denota el producto interno entre u y v.
Sea $I \subset \mathbb{C}^n$, $I^\perp := \{u \in \mathbb{C}^n| < u, v >= 0 \quad \forall u \in I\}$, es el complemento ortogonal de I.

Definición 1.4.1. (Definición funcional de inversa generalizada) Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y definamos $A^\dagger : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ mediante

$$A^\dagger x = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in R(A)^\perp \\ (A|_{R(A^*)})^{-1} x \text{ si } x \in R(A). \end{cases}$$

La matriz $A^\dagger$ es única y se llama la inversa generalizada de A.

Observación 1.4.2. 1.- Sea $x \in \mathbb{C}^m$, $\mathbb{C}^m = R(A) \oplus R(A)^\perp$, luego $x = u + v$ con $u \in R(A)$, $v \in R(A)^\perp$
$AA^\dagger x = AA^\dagger(u + v) = AA^\dagger u + AA^\dagger v = u + 0 = u$.

Así $(AA^\dagger)^2 x = AA^\dagger(AA^\dagger x) = AA^\dagger u = u = AA^\dagger x$.
Por tanto $AA^\dagger$ es idempotente.

2.- Como $R(AA^\dagger) = R(A)$ y $N(AA^\dagger) = R(A)^\perp$
se concluye que $AA^\dagger$ es proyección sobre $R(A)$ a lo largo de $R(A)^\perp$.

Definición 1.4.3. (Definición de Moore de la inversa generalizada.) Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, entonces la inversa generalizada de A se define como la única matriz $A^\dagger$ tal que

a) $AA^\dagger = P_{R(A)}$,

b) $A^\dagger A = P_{R(A^*)}$.

Definición 1.4.4. (Definición de Penrose de la inversa generalizada.) Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, entonces $A^\dagger$ es la única matriz en $\mathbb{C}^{n\times m}$ tal que

1. $AA^\dagger A = A$,
2. $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$,
3. $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger$,

4. $(A^\dagger A)^* = A^\dagger A$.

Teorema 1.4.5. ([6], Teorema 1.1.1)
Las definiciones de Moore y Penrose de la inversa generalizada son equivalentes.

Demostración. Note que de (1) y (2), se tiene que $AA^\dagger$ es idempotente y además es proyección, es decir, $AA^\dagger = P_{R(A)}$. Similarmente se puede ver que $A^\dagger A$ es idempotente y también que $AA^\dagger = P_{(A^*)}$.

Por lo tanto $A^\dagger$ satisface (a) y (b) de la definición de Moore.

Afirmación 1.- Si $A^\dagger$ satisface (a) y (b) de la definición de Moore, entonces $A^\dagger$ satisface (3) de la definición de Penrose.
En efecto. Veamos que $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger$

$$((AA^\dagger)^*)^2 x = (AA^\dagger)^*(AA^\dagger)^* x$$

$$= (AA^\dagger AA^\dagger)^* x = ((AA^\dagger)^2)^* x = (AA^\dagger)^* x,$$

entonces

$$((AA^\dagger)^*)^2 = (AA^\dagger)^*.$$

De manera análoga:

$$\begin{aligned} &((A^\dagger)^* A)^2 x \\ &\qquad = (A^\dagger A)^*(A^\dagger A)^* x \\ &\qquad = (A^\dagger AA^\dagger A)^* x \\ &\qquad = ((A^\dagger A)^2)^* x = (A^\dagger A)^* x. \end{aligned}$$

Por lo tanto $((A^\dagger A)^*)^2 = (A^\dagger A)^*$.
Se tiene que (1) se sigue de (a) observando que $AA^\dagger A = P_{R(A)} A = A$ y similarmente $A^\dagger AA^\dagger = P_{R(A^*)} A^\dagger = A^\dagger$.

La existencia de $A^\dagger$ en las definiciones de Moore y Penrose se sigue de la construcción de $A^\dagger$.
Afirmación 2 .- Una solución de las ecuaciones (1)-(4) de la definición de Penrose, es una solución de (a) y (b).

Supóngase que $A^\dagger$ es una matriz que satisface (1)-(4). Multiplicando (2) por la izquierda por A se tiene

$$AA^\dagger AA^\dagger = (AA^\dagger)^2 = (AA^\dagger)^2 = AA^\dagger$$

esto y (2) demuestran que $AA^\dagger$ es una proyección ortogonal.

Veamos que $R(AA^\dagger) = R(A)$.
En efecto, usando (1) y el hecho de que $R(BC) \subset R(B)$ para cualesquiera operadores B y C, obtenemos
$R(A) = R(AA^\dagger A) \subset R(AA^\dagger) \subset R(A)$, así $R(A) = R(AA^\dagger)$.
Por lo tanto $AA^\dagger = P_{R(A)}$.

Ahora veamos que $A^\dagger A = P_{R(A^*)}$.
Multiplicando (1) por $A^\dagger$ por la izquierda se tiene que $A^\dagger AA^\dagger A = (A^\dagger A)^2 = A^\dagger A$, esto y (4) demuestran que $A^\dagger A$ es una proyección ortogonal.

Finalmente veamos que $R(A^\dagger A) = R(A^\dagger)$.
En efecto, usando (2) y nuevamente el hecho $R(BC) \subset R(B)$, se tiene que $R(A^\dagger) = R(A^\dagger AA^\dagger) \subset R(A^\dagger A) \subset R(A^\dagger)$ y por lo tanto $R(A^\dagger) = R(A^\dagger A)$. Por consiguiente $A^\dagger A = P_{R(A)}$.

Afirmación 3.- La solución de (a) y (b) o (1)-(4) es única.
Demostración
Para probar la unicidad, se demostrará que si $A^\dagger$ es una matriz que satisface (1)-(4) o (a) y (b) entonces satisface la definición de $A^\dagger$.
Supóngase que $A^\dagger$ satisface (1)-(4), (a) y (b). Si $x \in R(A)^\perp$, entonces por (a)

$$AA^\dagger x = 0.$$

Se sigue de (2) que $A^\dagger x = A^\dagger AA^\dagger x = A^\dagger 0 = 0$.

Si $x \in R(A)$, entonces existe $y \in R(A^*)$ tal que $Ay = x$. Ahora tomando el adjunto de ambos lados de (1) en la definición 1.4.4 obtenemos

$$A^* = (AA^\dagger A)^* = (A^\dagger A)^* A^* = A^\dagger AA^* = P_{R(A^\dagger)} A^*$$

y por tanto $P_{R(A^\dagger)}A^* = A^*$ y así $R(A^*) \subset R(A^\dagger)$.
Luego $A^\dagger x = A^\dagger A y = y$.
Como $y = (A|_{R(A^*)})^{-1}x$, $A^\dagger$ satisface la definición 1.
□

Ejemplo 1.4.6. *Veamos* $(A^\dagger)^2 \neq (A^2)^\dagger$.
Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Probemos que

$$A^\dagger = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es la inversa generalizada de A.
En efecto
1.-

$$AA^\dagger A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

2.-

$$\begin{aligned} A^\dagger A A^\dagger &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= A^\dagger. \end{aligned}$$

3.-

$$\begin{aligned} (AA^\dagger)^* &= \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)^* \\ &= \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= AA^\dagger. \end{aligned}$$

4.-

$$\begin{aligned}(A^{\dagger}A)^{*} &= \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^{*} \\ &= \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)^{*} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= A^{\dagger}A.\end{aligned}$$

$\therefore A^{\dagger}$ es la inversa generalizada de A.
Ahora observamos que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

y además

$$A^{\dagger 2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A^{\dagger}.$$

Por lo tanto

$$A^{\dagger 2}A^2 = \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A^{\dagger}A$$

la cual no es una proyección.

Ejemplo 1.4.7. *Este ejemplo muestra que aunque A es similar a J, $A^{\dagger}$ no es similar a $J^{\dagger}$.*
Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} BJB^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= A. \end{aligned}$$

El polinomio caraterístico de A es

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)((-\lambda)(1-\lambda)+2) - (2(1-\lambda)-2) - (2-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 2) - (2 - 2\lambda - 2) - 2 + \lambda \\ &= \lambda^2 - \lambda + 2 - \lambda^3 - 2\lambda + 2\lambda - 2 + \lambda \\ &= -\lambda^3 - 2\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 2) \end{aligned}$$

así los divisores de A son λ^2 y $\lambda - 2$.
Note que

$$J^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

y

$$A^\dagger = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & -6 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego el polinomio característico de $J^\dagger$ es $\lambda^2(\lambda - 1/2)$ con divisores elementales λ^2 y $(\lambda - 1/2)$.
Mientras que el polinomio característico de $A^\dagger$ es $\lambda(\lambda - (1 + \sqrt{13}/12))(\lambda - (1 - \sqrt{13}/12))$ y por tanto tiene una forma de Jordan, mientras que $J^\dagger$ no.

1.4.1. Algunas propiedades básicas de la inversa Moore-Penrose

Teorema 1.4.8. ([6], Teorema 1.2.1) Supóngase que $A \in \mathbb{C}^{\,m\times n}$. Entonces

1. $(A^\dagger)^\dagger = A$.
2. $(A^\dagger)^* = (A^*)^\dagger$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda A)^\dagger = \lambda^\dagger A^\dagger$ donde $\lambda^\dagger = \frac{1}{\lambda}$ si $\lambda \neq 0$
 y $\lambda^\dagger = 0$ si $\lambda = 0$.
4. $A^* = A^*AA^\dagger = A^\dagger AA^*$.
5. $(A^*A)^\dagger = A^\dagger A^{*\dagger}$.
6. $A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^* = A^*(AA^*)^\dagger$.
7. $(UAV)^\dagger = V^*A^\dagger U^*$ donde U, V son matrices unitarias.

Demostración. 1.− Se sigue de la definición de Moore.
2.− Usando 1, y la definición de Moore se tiene que

$$(A^\dagger)^*A^* = (AA^\dagger)^* = AA^\dagger = P_{R(A)} = P_{(A^\dagger)^\dagger} = P_{R(A^\dagger)^*}$$

y

$$(A^*A^\dagger)^* = (A^\dagger A)^* = A^\dagger A = P_{R(A^*)}$$

$$\therefore (A^*)^\dagger = (A^\dagger)^*.$$

3.-Veamos que $\lambda^\dagger A^\dagger$, cumple la definición de Moore.

$$(\lambda^\dagger A^\dagger)(\lambda A) = \frac{1}{\lambda}A^\dagger\lambda A = \frac{\lambda}{\lambda}A^\dagger A = P_{R(A^\dagger)} = P_{R(\lambda^\dagger A^\dagger)}$$

y

$$(\lambda A)\lambda^\dagger A^\dagger = \lambda A\frac{1}{\lambda}A^\dagger = \frac{\lambda}{\lambda}AA^\dagger = P_{R(A)} = P_{R(\lambda)A}$$

4.- Tomando el adjunto en $A = (AA^\dagger)A$ y $A = A(A^\dagger A)$ obtenemos

$$A^* = ((AA^\dagger)A)^* = A^*(AA^\dagger)^* = A^*AA^\dagger$$
$$A^* = (A^\dagger A)^* A^* = A^\dagger AA^*.$$

5.-Veamos que $(A^*A)^\dagger$ es la inversa generalizada de $A^\dagger(A^*)^\dagger$, el cual satisface la definición de Moore.
$a)$

$$A^\dagger A^{*\dagger} A^* A = A^\dagger (A^{*\dagger} A^*) A = A^\dagger (AA^\dagger)^* A = A^\dagger AA^\dagger A = A^\dagger A$$

$$= P_{R(A^\dagger)} = P_{R(A^\dagger A)}.$$

$b)$ También,

$$A^* AA^\dagger A^{*\dagger} = A^*(AA^\dagger)A^{*\dagger} = A^*(AA^\dagger)A^{*\dagger} = A^*A^{*\dagger}A^*A^{*\dagger}$$

$$= (A^*A^{*\dagger})(A^*A^{*\dagger}) = A * A^{*\dagger} = P_{R(A^*)} = P_{R(A^*A)} = P_{R((A^*A)^*)}.$$

Por lo tanto $(A^*A)^\dagger = A^\dagger A^{*\dagger}$ por la definición de Moore.

6.-Usando la definición de Penrose se tiene que:

$$A^\dagger = A^\dagger(AA^\dagger) = A^\dagger(AA^\dagger)^* = A^\dagger A^{\dagger^*} A^* = A^\dagger A^{*\dagger} A^* = (A^*A)^\dagger A^*$$

y

$$A^\dagger = (A^\dagger A)A^\dagger = (A^\dagger A)^* A^\dagger = A^* A^{*\dagger} A^\dagger = A^*(AA^*)^\dagger.$$

7.-Veamos que $V^*A^\dagger U^*$ satisface las ecuaciones de Penrose, en efecto:
(1)

$$UAV(V^*A^\dagger U^*)UAV = UA(VV^*)A^\dagger(U^*U)AV$$
$$= UAIA^\dagger IAV = UAV.$$

(2)

$$V^*A^\dagger U^*(UAV)V^*A^\dagger U^* = V^*A^\dagger IAA^\dagger U^* = V^*A^\dagger U^*.$$

(3)

$$((UAV)(V^*A^\dagger U^*))^* = (U^*A^\dagger U^*)^*(UAV)^*$$
$$= UA^{\dagger^*}VV^*A^*U^* = UA^{\dagger^*}A^*U^*$$

$$= U(AA^{\dagger})^*U^* = UAA^{\dagger}U^* = (UAV)(V^*A^{\dagger}U^*).$$

(4)

$$((V^*A^{\dagger}U^*)(UAV))^* = (UAV)^*(U^*A^{\dagger}U^*)^*$$
$$= UA^*VV^*A^{\dagger *}U^* = UA^*A^{\dagger *}U^*$$
$$= U(A^{\dagger}A)^*U^* = UA^{\dagger}AU^* = (V^*A^{\dagger}U^*)(UAV).$$

□

Como la prueba del Teorema 1.4.5 ilustra, es frecuente utilizar el rango y el espacio nulo en varias expresiones relacionadas con $A^{\dagger}$.

Teorema 1.4.9. ([6], Teorema 1.2.2)
Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, entonces

8. $R(A) = R(AA^{\dagger}) = R(AA^*)$.
9. $R(A^{\dagger}) = R(A^*) = R(A^{\dagger}A) = R(A^*A)$.
10. $R(I - AA^{\dagger}) = N(AA^{\dagger}) = N(A^*) = N(A^{\dagger}) = R(A)^{\perp}$.
11. $R(I - A^{\dagger}A) = N(A^{\dagger}A) = N(A) = R(A^*)^{\perp}$.

Demostración. 8.- Como $R(BC) \subset R(B)$, para cualesquiera operadores B, C, se tiene que

$$R(AA^{\dagger}) \subset R(A) = R(AA^{\dagger}A) \subset R(AA^{\dagger}).$$

Por lo tanto

$$R(A) = R(AA^{\dagger}).$$

Como $R(A) \subset R(AA^{\dagger})$ y $R(A) = R(AA^{\dagger}A) = R(A(A^{\dagger}A)^*) = R(AA^*A^{\dagger *}) \subset R(AA^*)$ entonces $R(A) = R(AA^{\dagger})$.

9.-$R(A^*) = R(A^*AA^{\dagger}) \subset R(A^*A) \subset R(A^*)$, luego $R(A^*) = R(A^*A)$.
$R(A^*) = R(A^{\dagger}AA^*) \subset R(A^{\dagger}A) \subset R(A^{\dagger}) = R(A^{\dagger}AA^{\dagger}) \subset R(A^{\dagger}A)$, entonces $R(A^{\dagger}A) = R(A^{\dagger})$ y además $R(A^{\dagger}A) = R((A^{\dagger}A)^*) = R(A^*A^{\dagger})^* \subset R(A^*)$ por lo tanto $R(A^*) = R(A^{\dagger}A)$.

10.-Sabemos que para operadores B y C tenemos que $N(C) \subset N(BC)$, entonces $N(A^{\dagger}) \subset N(AA^{\dagger})$ y como

$N(AA^\dagger) \subset N(A^\dagger AA^\dagger) = N(A^\dagger)$, se tiene que $N(A^\dagger) = N(AA^\dagger)$. Note que

$$N(A^*) \subset N(A^\dagger(A^\dagger)^* A^*) = N(A^\dagger(AA^\dagger)^*)$$

$$= N(A^\dagger AA^\dagger) = N(A^\dagger)$$

y

$$N(A^\dagger) \subset N(A^* AA^\dagger) = N(A^*),$$

en conclusión $N(A^\dagger) = N(A^*)$.

11.-De manera similar al inciso anterior se cumple que $R(I - A^\dagger A) = N(A^\dagger A)$, y también $R(A^*)^\perp = N(A)$. Ahora sabemos que $N(A) \subset N(A^\dagger A)$ y como $N(A^\dagger A) \subset N(AA^\dagger A) = N(A)$ entonces $N(A) = N(A^\dagger A)$. $\square$

Ejemplo 1.4.10. *Una forma de calcular $A^\dagger$, usando (2) de la definición de Moore esto es $A^\dagger A = P_{R(A^*)}$.*
Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $R(A^*)$ está generado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Un subconjunto que forma una base de $R(A^*)$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

pues

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es decir $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es combinación lineal

de los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Como

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$A^{\dagger} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^{\dagger} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos una base para $R(A)^{\perp} = N(A^*)$. Resolvemos el sistema $A^*x = 0$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^*$. Observe que aplicando el método de eliminación Gauss-Jordan se tiene que

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$0 = A^*x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$x_1 + x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

de donde

$$x = \begin{pmatrix} -x_3 - x_4 \\ \frac{x_3+x_4}{2} \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
Entonces

$$A^{\dagger} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es decir

$$A^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} .$$

1.4.2. Solución por Mínimos Cuadrados

Dada $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{C}^{m}$, el sistema lineal

$$Ax = b \tag{1.5}$$

es consistente, es decir tiene una solución para x, si y sólo si $b \in \mathcal{R}(A)$. De otra forma, el vector residual

$$r = b - Ax \tag{1.6}$$

es distinto de cero para todo $x \in \mathbb{C}^{n}$, y es deseable encontrar una solución aproximada de 1.5, para la cual un vector x hará que el vector residual más cercano a cero en algún sentido, es decir, minimizando la norma de 1.6. Una solución aproximada que es frecuentemente usada, especialmente en aplicaciones estadísticas, es la solución por mínimos cuadrados de 1.5 [3].

Notación. Si $w = [w_1, \cdots, w_p]^* \in \mathbb{C}^p$, entonces $\|w\| = (\sum_{i=1}^{p} \|w_i\|^2)^{1/2} = (w * w)^{1/2}$.

Lema 1.4.11. ([6], Lema 2.1.1)
Si $u, v \in \mathbb{C}^p$ y $(u, v) = 0$, entonces

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2. \tag{1.7}$$

Demostración. Supóngase que $u, v \in \mathbb{C}^p$ y $(u, v) = 0$. Entonces

$$\|u+v\|^2 = (u+v, u+v) = (u, u)+(v, u)+(u, v)+(v, v) = \|u\|^2+\|v\|^2. \tag{1.8}$$

□

Definición 1.4.12. Supóngase que $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{C}^m$. Entonces un vector $u \in C^n$ es llamado una solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$ de norma mínima si $\|Au - b\| \leqslant \|Av - b\|$ para todo $v \in \mathbb{C}^n$. Un vector u es llamado la solución de mínimos cuadrados con norma mínima para $Ax = b$ si u es una solución de mínimos cuadrados para $Ax = b$ y $\|u\| < \|w\|$ para cualquier w solución de mínimos cuadrados.

Teorema 1.4.13. ([6], Teorema 2.1.1)
Suponga que $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{C}^m$. Entonces $A^\dagger b$ es la mínima de las soluciones por mínimos cuadrados para $Ax = b$.

Demostración. Notar que

$$\begin{aligned}\|Ax - b\|^2 &= \|(Ax - AA^\dagger b) \oplus -(I - AA^\dagger)b\|^2 \\ &= \|Ax - AA^\dagger b\|^2 + \|I - AA^\dagger b\|^2\end{aligned}$$

pues

$$(Ax - AA^\dagger b)(I - AA^\dagger)b = 0.$$

Por lo tanto x será una solución de mínimos cuadrados si y sólo si x es una solución del sistema consistente $AX = AA^\dagger b$. Pero las soluciones de $Ax = AA^\dagger b$ son de la forma

$$x = A^\dagger(AA^\dagger b) \oplus (I - AA^\dagger)b = A^\dagger b \oplus (I - AA^\dagger)b,$$

donde $\|x\|^2 = \|A^\dagger b\|^2$. □

Corolario 1.4.14. ([6], Corolario 2.1.2) Supóngase que M es un subespacio de $\mathbb{C}^n$ y P_M es la proyección ortogonal de $\mathbb{C}^n$ sobre M. Si $b \in \mathbb{C}^n$, entonces $P_M b$ es el vector más cercano en M a b con respecto a la norma Euclideana.

Teorema 1.4.15. ([6], Teorema 2.1.2)
Suponga que $A \in \mathbb{C}^n$ y $b \in \mathbb{C}^m$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. u es una solución por mínimos cuadrados de $Ax = b$.
2. u es una solución de $Ax = AA^{\dagger}b$.
3. u es una solución de $A^*Ax = A^*b$.
4. u es de la forma $A^{\dagger}b + h$ donde $h \in N(A)$.

Demostración. De la prueba del Teorema 1.4.11 que 1, 2 y 4 son equivalentes. Si 1 se cumple, entonces multiplicando $Au = b$ por la izquierda por A^* obtenemos 3. De otra manera, multiplicando $A^*Au = A^*b$ por la izquierda por $A^{*\dagger}$ obtenemos $Au = AA^{\dagger}b$. Por lo tanto 3 implica 2. □

1.5. Inversas generalizadas internas y externas de operadores en espacios de Banach

Definición 1.5.1. 1. Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Si existe algún $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, tal que $TT'T = T$, entonces T' es una **inversa generalizada interna** de T, y el operador T es interno regular.

2. Si $T''TT'' = T''$ para algún $T'' \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, $T'' \neq O$, entonces T'' es una **inversa generalizada externa** de T. En este caso T es externo regular.

3. Un operador $S \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ es una **inversa generalizada reflexiva** de T, si S es inversa interna e inversa externa de T.

Lema 1.5.2. ([9], Lema 1.1.2)
Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Entonces

a) Si T es invertible, entonces T^{-1} es la única inversa generalizada interna de T.

b) Si $T', T'' \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ son inversas generalizadas internas de T, entonces $T'TT''$ es una inversa generalizada reflexiva de T.

c) Si $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ es inversa generalizada interna o externa de T, entonces TT' es una proyección en $\mathcal{B}(\mathcal{Y})$, y $T'T$ es una proyección en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Demostración. *a*) Supongamos que T' es otra inversa generalizada interna de T, tal que $T' \neq T^{-1}$. Por definición tenemos que $TT'T = T$ y también $TT^{-1}T = T$, luego $TT'T = TT^{-1}T$. Como T es invertible $TT^{-1} = T^{-1}T = I$, multiplicando por T^{-1} por la izquierda y por la derecha en ambos lados de la igualdad anterior, obtenemos $T'T = T^{-1}T$ luego $T' = T^{-1}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto T^{-1} es la única inversa generalizada interna de T.

b) Por definición de inversa generalizada interna se cumple que

$$TT'T = T \text{ y } TT''T = T.$$

Veamos que $T'TT''$ es una inversa generalizada interna de T. En efecto

$$T(T'TT'')T = (TT'T)T''T = TT''T = T.$$

Ahora veamos que $T'TT''$ es una inversa generalizada externa de T.

$$(T'TT'')T(T'TT'') = T'(TT''T)(T'TT'')$$
$$= T'T(T'TT'') = T'(TT'T)T'' = T'TT''.$$

Luego $T'TT''$ es inversa generalizada interna y externa de T y por lo tanto, es una inversa generalizada reflexiva de T.

c) Supóngase que T' es una inversa generalizada interna de T. Como

$$(TT')^2 = (TT')(TT') = (TT'T)T' = TT'$$

es decir, TT' es un operador idempotente y TT' es un operador de $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{Y}$, luego TT' es una proyección en $\mathcal{B}(\mathcal{Y})$. Análogamente

$T'T$ es una proyección en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, pues $(T'T)^2 = (T'T)(T'T) = T'(TT'T) = T'T$.
Ahora si T' es una inversa generalizada externa de T. Se cumple que

$$(TT')^2 = (TT')(TT') = T(T'TT') = TT'$$

$$\text{y también } (T'T)^2 = (T'T)(T'T) = (T'TT')T = T'T,$$

esto tanto TT' como $T'T$ son operadores idempotentes, por lo tanto son proyecciones en $\mathcal{B}(\mathcal{Y})$ y $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ respectivamente. $\square$

Observación 1.5.3. Del lema 1.5.2 se sigue que T tiene inversa generalizada reflexiva si y sólo si T es interno regular.

Los siguientes Teoremas fueron tomados de [9], Teoremas 1.1.3 y 1.1.4 respectivamente.

Teorema 1.5.4. Si $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ es una inversa generalizada interna de $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, entonces TT' es una proyección de $\mathcal{Y}$ sobre $\mathcal{R}(T)$, y $I - T'T$ es una proyección de $\mathcal{X}$ sobre $\mathcal{N}(T)$. En consecuencia, $\mathcal{R}(T)$ y $\mathcal{N}(T)$ son subespacios complementarios de $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{X}$ repectivamente.

Demostración. Sabemos que $\mathcal{R}(TT') \subset \mathcal{R}(T)$. Ahora supóngase que $x \in \mathcal{R}(T)$. Entonces existe algún $y \in \mathcal{X}$, tal que $x = Ty = TT'Ty = TT'x$. En consecuencia, $x \in \mathcal{R}(TT')$.
Si $x \in \mathcal{N}(T)$, entonces $(I - T'T)x = x$. Por lo tanto, $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{R}(I - T'T)$. De otra manera, sea $x \in \mathcal{R}(I - T'T)$. Como $I - T'T$ es una proyección, se sigue que $x = (I - T'T)x$, implica que $T'Tx = 0$. Por lo tanto, $Tx = TT'Tx = 0$ y $x \in \mathcal{N}(T)$. $\square$

Teorema 1.5.5. Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Si $\mathcal{R}(T)$ y $\mathcal{N}(T)$ son subespacios complementarios y cerrados de $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{X}$ respectivamente, entonces T es interno regular.

Demostración. Supóngase que existen subconjuntos cerrados M de $\mathcal{X}$ y N de $\mathcal{Y}$, tales que $\mathcal{X} = M \oplus \mathcal{N}(A)$ y $\mathcal{Y} = \mathcal{R}(T) \oplus N$. En general, el operador T tiene la siguiente forma matricial con respecto a la descomposición de estos espacios:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_3 \\ T_4 & T_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(T) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T) \\ N \end{bmatrix}. \tag{1.9}$$

Note que T_3 representa la restricción de T de $\mathcal{N}(T)$ a $\mathcal{R}(T)$, y T_2 es la restricción de T de $\mathcal{N}(T)$ a N, así se sigue que $T_3 = O$ y $T_2 = O$. Además, T_4 es la restricción de T de M a N, y N es un subespacio complementario de $\mathcal{R}(T)$. Por lo tanto, $T_4 = O$. En consecuencia, T tiene la siguiente forma

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(T) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T) \\ N \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

Como $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T_1) \oplus \mathcal{N}(T)$, se sigue que $\mathcal{N}(T_1) = \{0\}$. La igualdad $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(T_1)$ es clara. Por lo tanto, T_1 es un operador invertible de M a $\mathcal{R}(T)$. Sea $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ arbitrario. Entonces T' tiene la siguiente forma:

$$T' = \begin{bmatrix} T_1' & T_3' \\ T_4' & T_2' \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(T) \end{bmatrix}. \tag{1.11}$$

Una multiplicación directa de matrices demuestra que T' es una inversa generalizada interna de T si y sólo si $T_1' = T_1^{-1}$, donde T_1 es invertible. Por lo tanto, existen inversas generalizadas internas de T y todas ellas tienen la siguiente forma:

$$T' = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & T_3' \\ T_4' & T_2' \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(T) \end{bmatrix}. \tag{1.12}$$

donde T_3' T_4', T_2' son operadores lineales arbitrarios sobre los correspondientes subespacios. $\square$

El siguiente corolario es una caracterización de operadores internos regulares.

Corolario 1.5.6. ([9], Corolario 1.1.5) Un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es interno regular, si y sólo si $\mathcal{N}(T)$ y $\mathcal{R}(T)$, son respectivamente subespacios complementarios cerrados de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$.

También es de interés tratar el caso de, dado T' una inversa generalizada interna de T, encontrar las formas matriciales de T y T' con respecto a las descomposiciones $\mathcal{X} = \mathcal{R}(T'T) \oplus \mathcal{N}(T)$ y $\mathcal{Y} = \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{N}(TT')$. Para esto se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.5.7. ([9], Teorema 1.1.6)
Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ interno regular, y sean M y N subespacios cerrados de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ respectivamente, tal que $\mathcal{X} = M \oplus \mathcal{N}(T)$ y $\mathcal{Y} = \mathcal{R}(T) \oplus N$. Entonces T tiene la siguiente forma matricial:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(T) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T) \\ N \end{bmatrix}, \tag{1.13}$$

donde T_1 es invertible.

Además, si T' es una inversa generalizada interna de T tal que $\mathcal{R}(T'T) = M$ y $\mathcal{N}(TT') = N$, entonces T' tiene la siguiente forma:

$$T' = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & O \\ O & W \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} N \\ \mathcal{N}(T) \end{bmatrix}, \tag{1.14}$$

donde $W \in \mathcal{B}(N, \mathcal{N}(T))$ es arbitrario.

Demostración. Para verificar que T tiene esa forma, vemos la expresión 1.10. De acuerdo a la expresión en 1.12 sabemos que T' tiene la forma

$$T' = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & U \\ V & W \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(T) \end{bmatrix}. \tag{1.15}$$

Si $\mathcal{R}(T'T) = M$, se sigue que $T'T$ es la proyección de $\mathcal{X}$ sobre M a lo largo de $\mathcal{N}(T)$. Así, $T'T = \begin{bmatrix} I & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(T) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(T) \end{bmatrix}$. De otra manera, $T'T = \begin{bmatrix} I & O \\ VT_1 & O \end{bmatrix}$ con respecto a la misma descomposición del espacio. Por lo tanto, $V = O$. Por la misma razón TT' es la proyección de $\mathcal{Y}$ sobre $\mathcal{R}(T)$ a lo largo de N. Finalmente, obtenemos $U = O$. $\square$

Del teorema 1.5.7, observamos que la inversa generalizada interna es única si se fija el rango y el espacio nulo de un operador.

Teorema 1.5.8. ([9], Toerema 1.1.7)
Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Entonces existe una inversa generalizada externa $T'' \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ de T ($T'' \neq O$) si y sólo si $T \neq O$.

Demostración. Si $T''TT'' = T''$ y $T'' \neq O$, entonces es claro que $T \neq O$. De otra manera, si $T \neq O$, entonces existe algún $x_0 \in \mathcal{X}$

tal que $Tx_0 = y_0 \neq 0$. Considere las descomposiciones de los espacios $\mathcal{X} = span\{x_0\} \oplus M$ y $\mathcal{Y} = span\{y_0\} \oplus N$ para subespacios cerrados $M,\ N$ de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ respectivamente. Entonces T tiene la forma matricial $T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ O & T_{22} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} span\{x_0\} \\ M \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} span\{y_0\} \\ N \end{bmatrix}$.
Aquí $T_{11}x_0 = Tx_0 = y_0$ y T_{11} es invertible. Considere el operador $T'' = \begin{bmatrix} T_{11}^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} span\{y_0\} \\ N \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} span\{x_0\} \\ M \end{bmatrix}$. Es claro que $T'' \neq O$ y además $T''TT'' = T''$. $\square$

$T^{(2)}$ denotará el conjunto de las inversas generalizadas externas de T. Notar que si T'' es una inversa generalizada externa de T, entonces T es inversa generalizada interna de T''.
Ahora veamos la forma matricial para las inversas generalizadas externas.

Teorema 1.5.9. ([9], Teorema 1.1.10)
Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un operador distinto de cero, y sean M y N subespacios de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ respectivamente, los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) Existe un operador distinto de cero $T'' \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ tal que $T''TT'' = T''$. $\mathcal{R}(T'') = M$ y $\mathcal{N}(T'') = N$.

(b) M y N son subespacios cerrados complementarios de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ respectivamente. $T(M)$ es cerrado, $T(M) \oplus N = \mathcal{Y}$, y la restricción $T|_M : M \rightarrow T(M)$ es invertible.
Si (a) o (b) se satisfacen, entonces el operador T'' en la parte (a) es único.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$: Sea $T''TT'' = T'' \neq O$, $\mathcal{R}(T'') = M$ y $\mathcal{N}(T'') = N$. Dado que T es una inversa generalizada interna de T'', se sigue que $T''T$ es una proyección de $\mathcal{X}$ sobre $M = \mathcal{R}(T'')$, y $I - TT''$ es una proyección de $\mathcal{X}$ sobre $N = \mathcal{N}(T'')$. Luego $T(M) = \mathcal{R}(TT'')$ es un subespacio cerrado complementario de N en $\mathcal{Y}$. Ahora, la restricción $T|_M : M \rightarrow T(M)$ es sobreyectivo. Supóngase que existe algún $y \in \mathcal{Y}$ tal que $T''y = x$. Por lo tanto, obtenemos $0 = T''Tx = T''TT''y = T''y$, esto implica que $x = 0$. Se sigue que $T|_M$ es inyectivo sobre M. Finalmente, $T|_M : M \rightarrow T(M)$ es invertible.
$(b) \Rightarrow (a)$: Existe un subespacio cerrado M_1 de $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{X} =$

$M \oplus M_1$. También, se satisface $\mathcal{Y} = T(M) \oplus N$. Considere la forma matricial de T con respecto a éstas descomposiciones de los espacios:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ M_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} T(M) \\ N \end{bmatrix}. \tag{1.16}$$

Como T aplica M a $T(M)$, obtenemos $T_4 = O$. Dado que la restricción $T_1 = T|_M : M \to T(M)$ es invertible, el operador

$$T'' = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} T(M) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ M_1 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

satisface (a).
Ahora, suponga que (a) o (b) se cumple. Considere un operador arbitrario $T'' \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, satisface (a). Entonces T'' tiene la forma

$$T'' = \begin{bmatrix} L & U \\ V & W \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} T(M) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ M_1 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

para algunos operadores lineales acotados L, U, V, W. La hipótesis $\mathcal{R}(T'') = M$ implica que $V = O$ y $W = O$. Si $\mathcal{N}(T'') = N$, entonces $U = O$, y L es invertible. Ahora la condición $T''TT'' = T''$ implica $LT_1L = L$. Como L es invertible, obtenemos $L = T_1^{-1}$. Por lo tanto, $T'' = T_1''$. Por construcción T'' es única. $\square$

Si las condiciones 1.16 y 1.17 se cumplen, entonces existe la única inversa generalizada externa T'' de T con rango M y espacio nulo N prescritos. $T^{(2)}_{M,N}$ denotará éste T''. El siguiente corolario muestra la forma matricial de T y su inversa generalizada exterior $T^{(2)}_{M,N}$.

Corolario 1.5.10. ([9], Corolario 1.1.11) Bajo las condiciones 1.16 y 1.17 del teorema 1.5.9, sea $T'' = T^{(2)}_{M,N}$ la correspondiente inversa generalizada externa de T. Entonces T tiene la siguiente forma matricial:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & O \\ O & T_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(T''T) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} T(M) \\ N \end{bmatrix}, \tag{1.19}$$

donde T_1 es invertible. Además, $T^{(2)}_{M,N}$ tiene la siguiente forma

$$T^{(2)}_{M,N} = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} T(M) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(T''T) \end{bmatrix}. \tag{1.20}$$

Demostración. Tomando $M_1 = \mathcal{N}(T''T)$ en la prueba del Teorema 1.5.9, y considere la forma de T dada en 1.16, con $T_4 = O$. También, $T'' = T_1''$ tiene la forma 1.17. Ahora, $T''T = \begin{bmatrix} I & T_1^{-1}T_3 \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(T''T) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(T''T) \end{bmatrix}$. Como $T''T$ es la proyección sobre $\mathcal{R}(T''T) = \mathcal{R}(T'') = M$ paralelo a $\mathcal{N}(T''T)$, se sigue que $T_3 = O$. El resto se sigue de la prueba del Teorema 1.5.9. $\square$

Capítulo 2

Inversas Espectrales

En este capítulo se estudiarán los conceptos de operador simple polar, polar, cuasipolar y la inversa $\Lambda-$Drazin, algunas caracterizaciones de tales operadores, así como su representación en forma matricial. Todos estos operadores tienen inversas espectrales, recordar que una inversa espectral de un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es una inversa generalizada $S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que sus puntos en el espectro distintos de cero, son los recíprocos de los puntos del espectro de T.

2.1. Preliminares

Definición 2.1.1. Sea $\mathcal{X}$ espacio de Banach. Recordemos que $\mathcal{B}(\mathcal{X}) := \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ es un álgebra de Banach.
Sea $K \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Se definen los conjuntos $K\mathcal{B}(\mathcal{X})$ y $\mathcal{B}(\mathcal{X})K$ como

$$K\mathcal{B}(\mathcal{X}) := \{LT : L \in K \text{ y } T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\}.$$

$$\mathcal{B}(\mathcal{X})K := \{TL : T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \text{ y } L \in K\}.$$

Decimos que $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ conmutan si $TS = ST$.
El **conmutador** de T se define como el conjunto

$$com(T) := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) : ST = TS \ \text{ para cada } \ S \in K\}.$$

El **doble conmutador** de T es el conjunto

$$com^2(T) = com(com(T)).$$

Denotemos por $\mathcal{B}(\mathcal{X})_2$ el conjunto de todos los operadores idempotentes, esto es $\mathcal{B}(\mathcal{X})_2 := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) : T^2 = T\}$.
Sea $\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{X})$ el conjunto de todos los operadores invertibles.

Definición 2.1.2. $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ se llama **descomponible regular,** si existe $S \in \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{X})$ tal que $T = TST$.

Teorema 2.1.3. ([12], Teorema 7.3.4) Se cumple que

$$\{T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) : T \text{ es descomponible regular}\} = \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{X})\mathcal{B}(\mathcal{X})_2.$$

Demostración. Sea

$$D := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) : T \text{ es descomponible regular}\}.$$

Supóngase que $T = TST$ con S invertible. Consideremos ST resulta que $(ST)^2 = (ST)(ST) = STST = ST$, luego $ST \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_2$. Entonces $T = S^{-1}ST$ es decir $T \in \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{X})\mathcal{B}(\mathcal{X})_2$. En consecuencia $D \subset \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{X})\mathcal{B}(\mathcal{X})_2$.
Ahora, si $T = CP$ con $C \in \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{X})$ y $P \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_2$, entonces $C^{-1}T = C^{-1}TC^{-1}T$ y por lo tanto $T = TC^{-1}T$. Así $\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{X})\mathcal{B}(\mathcal{X})_2 \subset D$, en conclusión $D = \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{X})\mathcal{B}(\mathcal{X})_2$. $\square$

Definición 2.1.4. Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$,

(a) T se llama **nilpotente** si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n = O$.

(b) T se llama **cuasinilpotente** si $\|T^n\|^{1/n} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ejemplo 2.1.5. Ejemplo de un operador cuasinilpotente pero no nilpotente [32].
Sea

$$T : \ell^2 \to \ell^2$$

el operador dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_2, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...).$$

Se verifica que $\|T^n\|^{1/n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, sin embargo no existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^n = O$.

Teorema 2.1.6. ([12], Teorema 7.4.3) Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ y si $S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es cuasinilpotente y conmuta con T, se cumple que

(a) Si S es nilpotente entonces TS es nilpotente.

(b) TS es cuasinilpotente.

(c) Si T y S son nilpotentes entonces $T+S$ es nilpotente.

(d) Si T es cuasinilpotente entonces $T+S$ es cuasinilpotente.

(e) $I-TS$ es invertible.

(f) Si T es invertible entonces $T-S$ es invertible.

Demostración. Para (a) supóngase que S es nilpotente. Por definición existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $S^m = O$ y como por hipótesis S conmuta con T se cumple que

$$(TS)^m = T^m S^m = O, \tag{2.1}$$

así TS también es nilpotente.
Más generalmente, para (b) si $\|S^m\|^{1/m} \leq \epsilon$ entonces

$$\|(TS)^m\|^{1/m} = \|T^m S^m\|^{1/m} \leq \|T^m\|^{1/m}\|S^m\|^{1/m} \leq \|T\|\epsilon \tag{2.2}$$

y por lo tanto TS es cuasinilpotente.
Para (c), si T y S son nilpotentes, por definición $T^m = S^m = O$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$(T+S)^{2m} = \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} T^j S^{2m-j} \tag{2.3}$$

$$= S^m \sum_{j=0}^{m} \binom{2m}{j} T^j S^{m-j} + T^m \sum_{j=m+1}^{2m} \binom{2m}{j} T^{j-1} S^{2m-1} = O \tag{2.4}$$

esto es $T+S$ es nilpotente.
(d) Más generalmente, si $0 < \epsilon < \text{mín}(\|T\|, \|S\|)$ y $n \geq N$, entonces $\|T^n\| \geq \epsilon^n$ y $\|S^n\| \geq \epsilon^n$ esto implica para $n \geq 2N$ que

$$\|(T+S)^n\| \leq \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \|T^j\|\|S^{n-j}\| \tag{2.5}$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{N} + \sum_{j=N+1}^{2N-1} + \sum_{2N}^{n} \right) \binom{n}{j} \|T^j\|\|S^{n-j}\| \tag{2.6}$$

$$\leq (\epsilon+\epsilon)^n \operatorname{máx}\left(\frac{\|T\|}{\epsilon}, \frac{\|S\|}{\epsilon}\right)^N. \tag{2.7}$$

Por lo tanto $T+S$ es cuasinilpotente.
Para (e), supóngase que T es un operador nilpotente, entonces $T^{m+1}=O$ para algún $m \in \mathbb{N}$, luego

$$(I-T)(I+T+\cdots+T^m) = I = (I+T+\cdots+T^m)(I-T). \tag{2.8}$$

Por lo tanto

$$I-T \in \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{X}) \tag{2.9}$$

esto es $I-T$ es invertible. Entonces de esto y de (a) se sigue que $I-TS$ es invertible.
Por último para (f) si T es invertible entonces por (e), $T+S = T(I-T^{-1}S)$ es invertible. $\square$

2.2. Operadores simples polares

La primera clase de operadores que consideramos es la siguiente:

Definición 2.2.1. $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ se llama **simple polar** si existe $P \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_2$ tal que

a) $TP = PT$,

b) $P \in (\mathcal{B}(\mathcal{X})T) \cap (T\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ y

c) $T(I-P) = O$.

Proposición 2.2.2. ([12]) Los operadores simples polares son descomponibles regular.

Demostración. En efecto, sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ y $S \in com(T)$ si $T = TST$ con $ST = TS = P$, definimos $S' = S + (I-P)$ entonces

$$TS'T = T(S+(I-P))T = TST + T(I-P)T \tag{2.10}$$

$$= T + TT - TPT = T + TT - T(ST)S \tag{2.11}$$

$$= T + TT - TT = T \tag{2.12}$$

y además $(S')^{-1} = T + (I - P)$ pues

$$S'(S')^{-1} = (S + (I - P))(T + (I - P)) \tag{2.13}$$

$$= S(T + (I - P)) + (I - P)(T + (I - P)) \tag{2.14}$$

$$= ST + S(I - P) + (I - P)T + (I - P)^2 \tag{2.15}$$

$$= ST + T - TP + T - PT + I - 2P + P^2 \tag{2.16}$$

$$= ST + I - 2TS + TS = I. \tag{2.17}$$

Por lo tanto T es descomponible regular. $\square$

Teorema 2.2.3. *$T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es un operador simple polar si y sólo si existe $S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que:*

a) $TS = ST$.

b) $T = TST$.

c) $T(I - ST) = O$.

En este caso, en la definición de simple polar P es único.

Demostración. (a) Por definición $P \in \mathcal{B}(\mathcal{X})T \cap T\mathcal{B}(\mathcal{X})$ entonces existen operadores $C, D \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tales que $P = CT = TD$. Sea $S := CTD$, como $T(I - P) = O$ implica que $T = TP$ luego

$$TST = TCTDT = TPDT$$

$$= PTDT = PPT = PT = TP = T$$

es decir T es interno regular.
Para (b), S cumple que

$$TS = TCTD = TPD = PTD = P$$

y

$$CTD = PDT = PTD = P.$$

Finalmente para (c) se tiene que

$$T(I - ST) = T(I - CTDT) = T - TCTDT = T - T = O.$$

Recíprocamente, si suponemos que existe S que cumple las condiciones $(a), (b)$ y (c). Tomemos $P := ST$, se cumple que

(a) $TP = TST = STT = PT$.
(b) Como $P = ST = TS$, entonces $P \in \mathcal{B}(\mathcal{X})T \cap T\mathcal{B}(\mathcal{X})$.
(c) $T(I-P) = T(I-ST) = O$, luego P cumple con la definición de simple polar. Finalmente veamos la unicidad de P, sea $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que $Q^2 = Q$, $TQ = QT$, $P = C'T = TD'$ y $T(I-Q) = O$. Note que

$$P - PQ = P(I-Q) = CT(I-Q) = O$$

y

$$Q - PQ = (I-P)Q = (I-P)TD' = O.$$

Por lo tanto $P = PQ = Q$. $\square$

Si T es simple polar el único S que cumple (a), (b) y (c) del teorema anterior, se llama la grupo inversa de T. Esta S se denotará por $S := T_G$.
Podemos caracterizar los elementos simples polares en términos del rango y el espacio nulo. Primero veremos algunos conceptos relacionados con operadores definidos a partir del espacio cociente de un operador con su rango.

Definición 2.2.4. Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$.

a) El núcleo de T se define como el operador natural inyectivo

$$ker(T) : \mathcal{N}(T) \to \mathcal{X}.$$

b) El conúcleo de T se define como

$$coker(T) : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}/\mathcal{R}(T).$$

Teorema 2.2.5. ([12], Teorema 2.3.1) Sean $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $S \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ los siguientes enunciados son equivalentes

a) $ST = O \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$.

b) $\mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{N}(S) \subseteq \mathcal{Y}$.

c) $T = (kerS)U$ para algún $U \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{N}(S))$.

d) $S = V(cokerT)$ para algún $V \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}/\mathcal{R}(T), \mathcal{Z})$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Supóngase que $TS = O$. Sea $x \in R(T)$, existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $Ty = X$ luego $O = STy = Sx$ esto es $x \in \mathcal{N}(S)$ y $x \in \mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{Y}$. Por lo tanto $\mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{N}(S) \subset \mathcal{Y}$.
$(b) \Rightarrow (a)$ Supóngase que $\mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{N}(S) \subset \mathcal{Y}$. Sea $x \in \mathcal{R}(T)$ existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $Ty = x$ y $x \in \mathcal{N}(S)$, entonces $O = Sx = STy$, luego $ST = O$.
Ahora supóngamos que se cumple (c). Sea $U : \mathcal{X} \to N(S)$ definido por $Ux := Tx$ para cada $x \in \mathcal{X}$. Es claro que U cumple (b).
Para (d), sea $V : \mathcal{Y}/\mathcal{R}(T) \to \mathcal{Z}$ definido por $V(y + R(T)) = Sy$ para cada $y \in \mathcal{Y}$. V es lineal y cumple que $V coker T = S$. Para ver que V es acotado usamos el Lema de Riesz, se tiene que $\|V\| \leq \|S\|/t$ con $0 < t < 1$, y por lo tanto $\|V\| \leq \|S\|$. □

El siguiente Teorema también es conocido como la factorización canónica de T.

Teorema 2.2.6. Sea $T \in \mathcal{B}(X, \mathcal{Y})$, existe un operador lineal acotado

$$core(T) : \mathcal{X}/\mathcal{N}(T) \to \mathcal{R}(T) \tag{2.18}$$

para el cual

$$T = ker(coker(T)) \circ core(T) \circ core(ker T).$$

Demostración. Usando el Teorema anterior y dado que $T ker(T) = O$, entonces existe $V : \mathcal{X}/\mathcal{N}(T) \to \mathcal{Y}$ para el cual $T = V \circ coker(ker(T))$ luego $coker(T)T = O$ y se sigue que $coker(T)V = O$, obtenemos $V = ker(coker(T))U$ para algún $U : \mathcal{X}/\mathcal{N}(T) \to \mathcal{R}(T)$. Por último tomando $core(T) = U$ se obtiene el resultado. □

Definición 2.2.7. $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ se llama **propio** si $core(T)$ es invertible.

Teorema 2.2.8. ([12], Teorema 3.8.2)
Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. T es interno regular entonces T es propio y $\mathcal{N}(T)$, $\mathcal{R}(T)$ son subespacios complementados.

Demostración. Como T es interno regular existe $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que $T = TT'T$; note que

$$P := T'T = (T'T)^2$$

y

$$Q := TT' = (TT')^2$$

son proyecciones sobre $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$, respectivamente, con $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(P)$ y $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(Q)$.
Por lo tanto, $\mathcal{N}(T)$ y $\mathcal{R}(T)$ son complementados,y también son cerrados. Además la aplicación

$$T^* : \mathcal{R}(P) \to \mathcal{R}(Q)$$

inducida por T es invertible, con inversa

$$T^{*-1} : \mathcal{R}(Q) \to \mathcal{R}(P) \tag{2.19}$$

inducido por T', finalmente existe el isomorfismo

$$T^* \simeq core(T)$$

inducido por el producto $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$, note que este producto implica que $\mathcal{X}/(\mathcal{Y} \times \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$ y $\mathcal{X}/(\{0\} \times \mathbb{Z}\ ) \simeq \mathcal{Y}$. Por lo tanto $\mathcal{X}/\mathcal{N}(T) = \mathcal{X}/\mathcal{N}(P) \simeq \mathcal{R}(P)$.
De esto se sigue que $core(T)$ es invertible, y por lo tanto T es propio.
□

Las propiedades de operador propio se usarán en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.9. ([12], Teorema 7.3.6) Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es simple polar, entonces

$$T \text{ es interno regular, } \mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(T^2) \text{ y } \mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^2). \tag{2.20}$$

Recíprocamente, si 2.20 se cumple, entonces T es simple polar y además $\mathcal{X} = \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{N}(T)$.

Demostración. Si T es simple polar entonces éste es interno regular, y si $T' \in com(T)$ cumple $T = TT'T$ entonces

$$\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(TT'T) = \mathcal{R}(T^2T') \subseteq \mathcal{R}(T^2) \subset \mathcal{R}(T), \tag{2.21}$$

esto es $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(T^2)$. Similarmente

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(TT'T) = \mathcal{N}(T'T^2) \tag{2.22}$$

$$= \mathcal{N}(T^2T') \supseteq \mathcal{N}(T^2) \supseteq \mathcal{N}(T) \tag{2.23}$$

es decir $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^2)$.
Recíprocamente, supóngase que se cumple 2.20. Sea $x \in \mathcal{X}$, note que $x = Ty + x - Ty$ y $Ty \in \mathcal{R}(T)$. Sea $z := x - Ty$. Como $Tx \in \mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(T^2)$ existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $Tx = T^2y$, entonces

$$Tz = Tx - T^2y = Tx - Tx = 0.$$

Por lo tanto $z \in \mathcal{N}(T)$. En conclusión $\mathcal{X} = \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{N}(T)$.

Por lo tanto existe una proyección $P : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ para la cual

$$\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(T) \text{ y } \mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(T). \tag{2.24}$$

Explícitamente

$$\text{si } x \in \mathcal{X} \text{ entonces } Px = Tx \text{ donde } Tx = T^2y \text{ e } y \in \mathcal{X}. \tag{2.25}$$

Como T es regular, del teorema 2.2.8 T es propio y P es continua entonces existe $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ para el cual

$$T'T = TT' = P \tag{2.26}$$

con lo cual el operador T es simple polar. $\square$

Ahora podemos dar una forma matricial para los operadores polares.

Teorema 2.2.10. Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ operador simple polar. T es interno regular y tiene la siguiente forma matricial:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T) \\ \mathcal{N}(T) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T^2) \\ \mathcal{N}(T^2) \end{bmatrix}$$

con T_1 invertible, y si T' es la grupo inversa de T entonces tiene la forma matricial:

$$T' = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T^2) \\ \mathcal{N}(T^2) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T) \\ \mathcal{N}(T) \end{bmatrix}$$

Demostración. Del teorema anterior se tiene que $\mathcal{X} = \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^2) \oplus \mathcal{N}(T^2)$, como $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ usando el Teorema 1.5.7 T tiene la siguiente forma matricial:

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T) \\ \mathcal{N}(T) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T^2) \\ \mathcal{N}(T^2) \end{bmatrix}$$

de esto se tiene que $A : \mathcal{R}(T) \to \mathcal{R}(T^2)$ definido por $Ax := Tx$, cumple que

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(T|_{\mathcal{R}(T)}) = \{0\}$$

y

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(T)$$

esto implica que A es inyectivo y sobreyectivo, por lo tanto A es invertible.
Considere $B : \mathcal{N}(T) \to \mathcal{R}(T^2)$ dado por

$$Bx := Tx$$

Resulta que $Bx = 0$ por que $x \in \mathcal{N}(T)$. Por lo tanto $B = O$.
Ahora considere $C : \mathcal{R}(T) \to \mathcal{N}(T^2)$ dado por $Cx := Tx$, como $Tx \in \mathcal{R}(T)$ y $Cx \in \mathcal{N}(T^2)$, entonces $Cx \in \mathcal{R}(T) \cap \mathcal{N}(T^2) = \{0\}$ se concluye que $C = O$.
Finalmente considere $D : \mathcal{N}(T) \to \mathcal{N}(T^2)$, dado por $Dx := Tx$, tenemos que $Tx = 0$ pues $x \in \mathcal{N}(T)$. Por lo tanto $D = O$. Así

$$T = \begin{bmatrix} A & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T) \\ \mathcal{N}(T) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T^2) \\ \mathcal{N}(T^2) \end{bmatrix}$$

con A invertible.
Ahora supongamos que T' es inversa interna de T que cumple $\mathcal{R}(TT') = \mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(T^2)$ y también $\mathcal{N}(TT') = \mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^2)$ usando el Teorema 1.5.7 se sigue que T' tiene la forma matricial:

$$T' = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & W \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T^2) \\ \mathcal{N}(T^2) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T) \\ \mathcal{N}(T) \end{bmatrix}$$

Ahora considere $W : \mathcal{R}(T^2) \to \mathcal{R}(T)$ con $Wx := Tx = 0$ pues $x \in \mathcal{N}(T^2) = \mathcal{N}(T)$. Por lo tanto $W = O$. Se tiene que

$$T' = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T^2) \\ \mathcal{N}(T^2) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T) \\ \mathcal{N}(T) \end{bmatrix}.$$

$\square$

2.3. Operadores polares

Dados los resultados obtenidos de las formas matriciales para operadores simples polares, generalizamos un poco a nuestra siguiente clase.

Definición 2.3.1. Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, T se llama **polar** si existe $P \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_2$ tal que

a) $TP = PT$.

b) $P \in (\mathcal{B}(\mathcal{X})T) \cap (T\mathcal{B}(\mathcal{X}))$.

c) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(I - P) = O$.

Teorema 2.3.2. Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, T es polar si y sólo si existe $S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que

a) $ST = TS$.

b) $S = STS$.

c) $T^n(I - ST) = O$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

En este caso, P de la definición 2.3.1 es único.

Demostración. ($\Rightarrow$) De la condición $P \in (\mathcal{B}(\mathcal{X})T) \cap (T\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ existen $C, D \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tales que $P = CT = TD$. Además $PT = TP$ sustituyendo P se tiene que $TCT = TDT$. Definimos $S := CTD$, veamos que S es externo regular. En efecto

$$(CTD)T(CTD) = CTDTPD = CPTPD = CTP^2D = CTPD$$

$$= PPD = P^2D = PD = CTD.$$

Por lo tanto $S = STS$.
Ahora veamos que $T^n(I - ST) = O$.

$$T^n(I - (CTD)T) = T^n(I - CTDT) = T^n(I - PDT)$$

$$= T^n - T^nPDT = T^n - T^{n-1}PTDT = T^n - T^{n-1}PT$$

$$= T^n - T^nP = T^n(I - P) = O.$$

Finalmente veamos que S conmuta con T.

$$ST = (CTD)T = CTDT = CTCT = PP = P$$

y

$$TS = T(CTD) = TCTD = TDTD = PP = P.$$

Por lo tanto $ST = TS$. En conclusión T es polar.
$(\Leftarrow)$ Si $P = ST$, se cumple que
(a) $TP = TST = TTS = TP$.
(b) Note que $P = ST \in \mathcal{B}(\mathcal{X})T$ y $P = ST = TS \in T\mathcal{B}(\mathcal{X})$ luego $P \in \mathcal{B}(\mathcal{X})T \cap T\mathcal{B}(\mathcal{X})$.
(c) $T^n(I - P) = T^n(I - ST) = O$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
Por lo tanto T es un operador polar. $\square$

Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es polar entonces el elemento $S := T_D$ es conocida como la inversa Drazin de T.

Teorema 2.3.3. Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. T es polar si y sólo si T es externo regular y existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{R}(T^k) = \mathcal{R}(T^{k+1})$ y $\mathcal{N}(T^k) = \mathcal{N}(T^{k+1})$. Aún más, resulta $\mathcal{X} = \mathcal{R}(T^k) \oplus \mathcal{N}(T^k)$.

Demostración. Supóngase que T es polar. Del Teorema 2.3.2 existe $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que $T' = T'TT'$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(I - T'T) = O$.
Observe que

$$\mathcal{R}(T^n) = \mathcal{R}(T^nT'T) = \mathcal{R}(T^{n+1}) \subset \mathcal{R}(T^{n+1}) \subset \mathcal{R}(T^n)$$

y

$$\mathcal{N}(T^n) \subset \mathcal{N}(T^{n+1}) \subset \mathcal{N}(T'T^{n+1}) = \mathcal{N}(T^nT'T) = \mathcal{N}(T^n),$$

por lo tanto $\mathcal{R}(T^n) = \mathcal{R}(T^{n+1})$ Y $\mathcal{N}(T^n) = \mathcal{N}(T^{n+1})$.
Veamos que $\mathcal{X} = \mathcal{R}(T^n) \oplus \mathcal{N}(T^n)$.
Sea $x \in \mathcal{R}(T^n) \cap \mathcal{N}(T^n)$ entonces $T^nx = 0$ y existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $x = T^ny$, esto implica que $0 = T^nx = T^{n+1}y$ luego $y \in \mathcal{N}(T^{n+1}) = \mathcal{N}(T^n)$. Así $T^ny = 0$. Por lo tanto $\mathcal{R}(T^n) \cap \mathcal{N}(T^n) = \{0\}$.
Ahora sea $x \in \mathcal{X}$, note que $x = T^ky + x - T^ky$ para algún $k \geq n$. Sea $z = x - T^ky$. Observe que $T^kx \in \mathcal{R}(T^n) = \mathcal{R}(T^{n+1}) = \mathcal{R}(T^{n+k})$ luego existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $T^nx = T^{n+k}y$. Entonces $T^nz = T^nx - T^{n+k}y = T^nx - T^nx = 0$, es decir $z \in \mathcal{N}(T^n)$. Por

lo tanto $x = T^k y + z$ con $T^k y \in \mathcal{R}(T^k) = \mathcal{R}(T^n)$ si $k \geq n$, y $z \in \mathcal{N}(T^n)$. En conclusión $\mathcal{X} = \mathcal{R}(T^n) \oplus \mathcal{N}(T^n)$.
Recíprocamente si el operador T es externo regular y cumple que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{R}(T^k) = \mathcal{R}(T^{k+1})$ y $\mathcal{N}(T^k) = \mathcal{N}(T^{k+1})$ entonces $T^k(I - T'T) \to O$, con T' una inversa externa para T. $\square$

Dado el Teorema anterior, tenemos condiciones para dar la forma matricial de un operador polar.

Teorema 2.3.4. Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es un operador polar, entonces T tiene la siguiente forma matricial

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & O \\ O & T_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T^k) \\ \mathcal{N}(T^k) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T^{k+1}) \\ \mathcal{N}(T^{k+1}) \end{bmatrix}$$

con T_1 invertible y T_2 nilpotente. Ahora si T' es la inversa Drazin para T, entonces

$$T' = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T^{k+1}) \\ \mathcal{N}(T^{k+1}) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T^k) \\ \mathcal{N}(T^k) \end{bmatrix}.$$

Demostración. Como $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ y $X = \mathcal{R}(T^k) \oplus \mathcal{N}(T^k) = \mathcal{R}(T^{k+1} \oplus \mathcal{N}(T^{k+1})$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces el operador T tiene la siguiente forma respecto a esta descomposición del espacio

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T^k) \\ \mathcal{N}(T^k) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T^{k+1}) \\ \mathcal{N}(T^{k+1}) \end{bmatrix}.$$

De aquí podemos considerar, $A : \mathcal{R}(T^k) \to \mathcal{R}(T^{k+1})$ definido por $Ax := Tx$. Note que $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(T^{k+1}|_{\mathcal{R}(T^{k+1})})$.
Sea $x \in \mathcal{N}(T^{k+1}|_{\mathcal{R}(T^{k+1})})$, entonces $Tx = Ax = 0$ con $x \in \mathcal{R}(T^{k+1})$.
Se tiene que, existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $x = T^k y$ luego

$$0 = Tx = TT^k y = T^{k+1} y = x,$$

esto es $x = 0$. Por lo tanto $\mathcal{N}(A) = \{0\}$. Además $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(T^k) = \mathcal{R}(T^{k+1})$, luego A es un operador inyectivo y sobreyectivo, por lo tanto A es invertible.

Ahora consideremos $B : \mathcal{N}(T^k) \to \mathcal{R}(T^{k+1})$ definido por

$Bx := Tx$. Note que $x \in \mathcal{N}(T^k)$ luego $T^k x = 0$ y además $Bx = Tx \in \mathcal{R}(T^{k+1})$ luego existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $Tx = T^{k+1}y$. Se tiene que

$$T^k x = T^{k-1}Tx = T^{k-1}T^{k+1}y = T^{2k}y = 0$$

entonces $y \in \mathcal{N}(T^{2k}) = \mathcal{N}(T^{k+1})$ y por lo tanto $Bx = Tx = T^{k+1}y = 0$. Concluimos que $B = O$.
Ahora considere $C : \mathcal{R}(T^k) \to \mathcal{N}(T^{k+1})$ definido por $Cx := Tx$. Observe que $x \in \mathcal{R}(T^{k+1})$ entonces existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $T^{k+1}y = x$ y además $Cx \in \mathcal{N}(T^{k+1})$ entonces $T^k Cx = T^k Tx = T^{k+1}x = 0$. Se tiene que $0 = T^{k+1}x = T^{k+1}T^{k+1}y = T^{2k+2}y$ esto implica que $y \in \mathcal{N}(T^{2k+2}) = \mathcal{N}(T^{k+2})$ así $T^{k+2}y = 0$. Entonces $Cx = CT^{k+1}y = T^{k+2}y = 0$, por lo tanto $C = O$.
Finalmente para $D : \mathcal{N}(T^k) \to \mathcal{N}(T^{k+1})$ dado por $Dx := Tx$. Note que $D^n = T^n|_{\mathcal{N}(T^n)} = O$, por lo tanto D es nilpotente. Entonces

$$T = \begin{bmatrix} A & O \\ O & D \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T^k) \\ \mathcal{N}(T^k) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{N}(T^{k+1}) \\ \mathcal{R}(T^{k+1}) \end{bmatrix}$$

con A invertible y D nilpotente.
Para T' la inversa externa de T se cumple que $\mathcal{X} = R(T^k) \oplus N(T^k) = R(T^{k+1}) \oplus \mathcal{N}(T^{k+1})$, note que $\mathcal{R}(T^k)$ y $\mathcal{N}(T^k)$ son subespacios cerrados y complemetarios de $\mathcal{X}$. Usando el corolario 1.5.10 del capítulo anterior se tiene que

$$T' = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T^{k+1}) \\ \mathcal{N}(T^{k+1}) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T^k) \\ \mathcal{N}(T^k) \end{bmatrix}.$$

□

2.4. Operadores cuasipolares

Definición 2.4.1. Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, T se llama **cuasipolar** si existe $P \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_2$ tal que:

a) $TP = PT$,

b) $P \in (\mathcal{B}(\mathcal{X})T) \cap (T\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ y

c) $\|T^n(I-P)\|^{1/n} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

$T_P := P$ se llama el **soporte** de T.

Teorema 2.4.2. ([12], Teorema 7.5.3) Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ cuasipolar, P en la definición 2.4.1 es único, pertenece a $com^2(T)$, y existe $S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que $TS = ST = P$ y $S = SP = PS$. Este $S := T_{DG}$ cumple que es único y pertenece a $com^2(T)$.

Demostración. Veamos que existe S que cumple tales condiciones. En efecto, por definición $P \in (\mathcal{B}(\mathcal{X})T) \cap (T\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ existen $C, D \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tales que $P = CT = TD$, luego

$$(PCP)(PTP) = PCPPTP = PCP^2TP$$

$$= PCPTP = PCTP^2 = PPP = PP^2 = P$$

y

$$(PTP)(PDP) = PTP^2DP = PTPDP$$

$$= P^2TDP = PPP = P^2P = PP = P$$

por lo tanto $PCP = PDP$. Definimos $S := PCP$.
Ahora sea $Q = Q^2$ que satisface las mismas condiciones que P, entonces $TC = CT = Q$ y $C = CQ = QC$, entonces

$$P - PQ = P^n(I - Q) = S^nT^n(I - Q) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

y también

$$Q - PQ = (I - P)Q^n = (I - P)T^nC^n \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Por lo tanto $P = PQ = Q$ es único. Además si $W \in com^2(T)$ entonces

$$WP - PWP = (I - P)WP = (I - P)WP^n$$

$$= (I - P)WT^nS^n = (I - P)T^nWS^n \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

en consecuencia $WP = PWP$. Similarmente

$$PW - PWP = PW(I - P) = P^nW(I - P)$$

$$= S^nT^nW(I - P) = S^nWT^n(I - P) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

así $PW = WP$. Por lo tanto $P \in com^2(T)$.
Ahora veamos la unicidad de S, supóngase que existe $R \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que

$$TR = RT = P \text{ y } R = RP = PR$$

luego

$$S = SP = STC = STRP = PRP = RP = R.$$

Finalmente, si $W \in com^2(T)$ entonces, usando el hecho de que $PW = WP$ se tiene que

$$WS = WPS = PWS = STWS = SWTS = SWP = SPW = SW.$$

Por lo tanto $S \in com^2(T)$. $\square$

Teorema 2.4.3. Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ cuasipolar, considere $P = T'T$ del teorema anterior. Entonces $X = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(T'T) \oplus \mathcal{N}(T'T)$.

Demostración. Sea $x \in \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(P)$, entonces existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $x = Py = T'Ty$ y también $Px = T'Tx = 0$. Se tiene que

$$0 = T'Tx = T'TT'Ty = T'Ty = x.$$

Por lo tanto $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\}$.
Ahora sea $x \in \mathcal{X}$, note que $x = Py + x - Py$. Sea $z := x - Py$. Como $Px \in \mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(T'T)$ existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $Px = Py$. Se tiene que

$$Pz = Px - PPy = Px - Py = 0$$

esto es $z \in \mathcal{N}(P)$ y además $Py \in \mathcal{R}(P)$. Luego $\mathcal{X} = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$. $\square$

Teorema 2.4.4. Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ un operador cuasipolar y sea T_{DG} la inversa de T, entonces T tiene la siguiente forma matricial:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & O \\ O & T_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(ST) \\ \mathcal{N}(ST) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(ST) \\ \mathcal{N}(ST) \end{bmatrix}$$

con T_1 invertible y T_2 cuasinilpotente. Además T_{DG} tiene la siguiente forma matricial:

$$T_{DG} = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(ST) \\ \mathcal{N}(ST) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(ST) \\ \mathcal{N}(ST) \end{bmatrix}.$$

Demostración. Dado que $\mathcal{X} = \mathcal{R}(ST) \oplus \mathcal{N}(ST)$, entonces T tiene la siguiente forma:

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(ST) \\ \mathcal{N}(ST) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(ST) \\ \mathcal{N}(ST) \end{bmatrix}.$$

De aquí consideramos $A : \mathcal{R}(ST) \to \mathcal{R}(ST)$ dado por $Ax := Tx$. Note que $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(T|_{\mathcal{R}(ST)})$. Sea $x \in \mathcal{N}(T|_{\mathcal{R}(ST)})$, entonces $Tx = 0$ para $x \in \mathcal{R}(ST)$. Luego existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $x = STy$, sustituyendo x se sigue que $0 = Tx = TSTy = STTy$ entonces $Ty \in \mathcal{N}(ST) \subset \mathcal{N}(SST)$ esto implica que $0 = SSTTy = STSTy = STy = x$. Por lo tanto $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(T|_{\mathcal{R}(ST)}) = \{0\}$. Además $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(ST)$. En conclusión A es inyectivo y sobreyectivo, por lo tanto A es invertible.
Considere $B : \mathcal{N}(ST) \to \mathcal{R}(ST)$ dado por $Bx := Tx$. Como $x \in \mathcal{N}(ST)$ entonces $STx = 0$. Además se tiene que $Bx \in \mathcal{R}(ST)$ luego existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $Bx = STy$. Obtenemos que

$$0 = STx = SSTy = STSy = Sy$$

es decir $y \in \mathcal{N}(S) \subset \mathcal{N}(TS)$, entonces $Bx = STy = TSy = 0$ con $x \in \mathcal{N}(ST)$. Por lo tanto $B = O$.
Ahora considere $C : \mathcal{R}(ST) \to \mathcal{N}(ST)$ definido por $Cx := Tx$. Se tiene que $x \in \mathcal{R}(ST)$ y $Cx \in \mathcal{N}(ST)$, entonces existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $x = STy$ y $STCx = STTx = 0$. Se sigue que

$$0 = STCx = STTx = TSTSTy = TSTy = CSTy = Cx.$$

Por lo tanto $C = O$.
Finalmente para $D : \mathcal{N}(ST) \to N(ST)$ definido por $Dx := Tx$. Note que $D = T|_{\mathcal{N}(ST)=\mathcal{N}(P)}$, luego

$$\|D^n\|^{1/n} \leq \|T|^n_{\mathcal{N}(ST)=\mathcal{N}(P)}\|^{1/n} \leq \|(T^n - T^nP)|_{\mathcal{N}(ST)=\mathcal{N}(P)}\|^{1/n}$$

$$\leq \|T^n(I-P)\|^{1/n} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Se sigue que D es cuasinilpotente. Por lo tanto el operador T tiene la forma matricial:

$$T = \begin{bmatrix} A & O \\ O & D \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(ST) \\ \mathcal{N}(ST) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(ST) \\ \mathcal{N}(ST) \end{bmatrix}$$

con A invertible y D cuasinilpotente.
Por último del Teorema 2.4.2 podemos concluir que $S = T_{DG}$ es una inversa generalizada externa de T y por lo tanto del Corolario 1.5.10 se sigue que la forma matricial de T_{DG} es:

$$T_{DG} = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(ST) \\ \mathcal{N}(ST) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(ST) \\ \mathcal{N}(ST) \end{bmatrix}.$$

□

Teorema 2.4.5. ([12], Teorema 7.5.4) Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es cuasipolar y $S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ conmuta con T entonces

a) Si S es cuasipolar entonces TS es cuasipolar.

b) Si S es nilpotente entonces $T + S$ es cuasipolar.

Si, en particular, T es polar entonces

c) Si S es polar entonces TS es polar.

d) Si S es nilpotente entonces $T + S$ es polar.

e) Si S y $I + T_D S$ son invertibles entonces $T + S$ es invertible.

Demostración. Si T y S son operadores cuasipolares y conmutan, entonces del doble conmutador del Teorema 2.4.2, el conjunto

$$\{T, S, T_P, S_P, T_D, S_D\} \text{ es conmutativo.} \tag{2.27}$$

En particular, T_P y S_P conmutan, y por lo tanto

$$T_P S_P \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \text{ es idempotente.} \tag{2.28}$$

Para probar (a) afirmamos que $T_P S_P$ es el soporte para TS. De 2.27 se tiene que $T_P S_P$ conmuta con TS. Ahora como $T_D T = PCPT = PPCT = PP = P = T_P$ para algún $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, luego $T_D S_D TS = T_D T B_D S = T_P S_P$. Similarmente $TST_D S_D = T_P S_P$, por lo tanto $T_P S_P \in (\mathcal{B}(\mathcal{X})TS) \cap (TS\mathcal{B}(\mathcal{X}))$. Finalmente la condición $\|(TS)^n(I - T_P S_P)\|^{1/n} \to 0$ cuando $n \to \infty$ viene de la observación:

$$TT_P(S(I - S_P)) + (SS_P)(T(I - T_P)) + (T(I - T_P))(S(I - S_P))$$

$$
\begin{aligned}
&= TT_P(S - SS_P) + SS_P(T - SS_P) + (T - TT_P)(S - SS_P) \\
&= TT_PS - T_PSS_P + SS_PT - SS_PTT_P \\
&\quad +TS - TSS_P - TT_PS + TT_PSS_P \\
&= TS - TST_PS = TS(I - T_PS_P)
\end{aligned}
$$

además TS es cuasinilpotente y la suma de cuasinilpotentes también lo es. Si, en particular, T, S son polares entonces $TS(I - T_PS_P)$ es nilpotente pues es suma y producto de operadores nilpotentes y por lo tanto TS es polar.
Para probar (b) note que $(T + S)T_P$ es invertible en $T_P\mathcal{B}(\mathcal{X})T_P$ por el Teorema 2.1.6 (d), y que $(T + S)(I - T_P)$ es cuasinilpotente por el mismo Teorema parte (b).
Si, en particular, T es polar y S es nilpotente entonces $(T + S)T_P$ es invertible en $T_P\mathcal{B}(\mathcal{X})T_P$ por 2.9 y $(T + S)(I - T)$ es nilpotente por 2.4, obtenemos (d).
Para probar (c) se tiene que

$$(I + T_DS)T_P = T_D(T + S)T_P \tag{2.29}$$

así que $(T + S)T_P$ es invertible en $T_P\mathcal{B}(\mathcal{X})T_P$ (véase [12], Teorema 3.7.3), mientras que $(T + S)(I - T_P)$ es invertible en $(I - T_P)\mathcal{B}(\mathcal{X})(I - T_P)$ por Teorema 2.1.6 (d), y por lo tanto $T + S$ es invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.
Si, en particular T, S y $I + T_DS$ son invertibles entonces se cumple 2.9 y obtenemos (e). $\square$

2.5. Inversas Λ-Drazin

Ahora se estudiará la inversa $\Lambda-$Drazin, una generalización de la inversa Drazin respecto del espectro del operador, esta inversa también es conocida como inversa σg-Drazin.

Definición 2.5.1. Un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ se llama $\Lambda-$**Drazin invertible** para algún conjunto espectral Λ (con T_Λ, se denotará esta inversa) si existe $P \in com(T)$ con $P = P^2$ tal que existe $S \in (I - P)\mathcal{B}(\mathcal{X})(I - P)$ invertible tal que

$$T(I - P) = S \text{ y } \sigma(TP) \cap \sigma(T(I - P)) = \{0\}.$$

En este caso $T_\Lambda = (T(I - P) + P)^{-1}(I - P)$ y $\Lambda = \sigma_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P}(TP)$.

Teorema 2.5.2. ([19], Teorema 2.4) Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. T es $\Lambda-$Drazin invertible para algún conjunto espectral Λ si y sólo si existe $S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que

$$TS = ST, \;\; STS = S, \;\; \sigma(T - TST) \cap \sigma(TST) = \{0\}. \qquad (2.30)$$

En este caso $S = T_\Lambda$ con $\Lambda = \sigma_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P}(TP)$, donde $P = I - TS$.

Demostración. Supóngase que existe un operador S que satisface 2.30. Sea $P = I - TS$ y $Q = TS$. Usando la primera de las ecuaciones de 2.30, se tiene que

$$PT = (I - TS)T = T - TST = T - TST = T(I - TS) = TP,$$

$$PS = (I - TS)S = S - TSS = S - STS = S(I - TS),$$
$$QT = TST = TTTS = TQ,$$

y
$$QS = TSS = TST = SQ,$$

además

$$P^2 = PP = (I - TS)(I - TS) = (I - TS - TS + TSTS$$

$$= I - 2TS + TS = I - TS = P$$

y
$$Q^2 = QQ = TSTS = TS = Q$$

por lo tanto P y Q son operadores idempotentes que conmutan con T y S. Ahora como

$$\sigma(TP) \cap \sigma(TQ) = \sigma(T(I - TS)) \cap \sigma(TTS) = \sigma(T - TTS) \cap \sigma(TST)$$

$$= \sigma(T - TST) \cap \sigma(TST) = \{0\}.$$

Se tiene que $\sigma(T - TST) \cap \sigma(TST) = \{0\}$ es equivalente a $\sigma(TP) \cap \sigma(TQ) = \{0\}$. Observe que $(TQ)B = (TTS)S = T(STS) = TS = Q$, luego $TQSQ = (TTS)B(TS) = TTSSTS = TTSS = TSTS = TS = Q$ esto es TQ es invertible en $Q\mathcal{B}(\mathcal{X})Q$ con inversa $S = SQ = STS$. Entonces $0 \notin \sigma_{Q\mathcal{B}(\mathcal{X})Q}(TP)$ y

$$(\sigma_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P}(TP) \cup \{0\}) \cap (\sigma_{Q\mathcal{B}(\mathcal{X})Q}(TQ) \cup \{0\})$$

$$= \sigma(TP) \cap \sigma(TQ) = \{0\},$$

esto es $\sigma_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P}(TP) \cap \sigma_{Q\mathcal{B}(\mathcal{X})Q}(TQ) = \{0\}$.
Sea $\Lambda := \sigma_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P}(TP)$. Por el teorema 1.3.38, Λ es un conjunto espectral de T con proyección espectral P. Por definición, $T_\Lambda = S$, la inversa de TQ en $Q\mathcal{B}(\mathcal{X})Q$. Note que si $0 \notin \Lambda$, entonces $0 \notin \sigma(T) = \Lambda \cup \sigma_{Q\mathcal{B}(\mathcal{X})Q}(TQ)$; por lo tanto $0 \in \rho(T) \cup \Lambda$.
Recíprocamente, si Λ es un conjunto espectral para T con proyección espectral P tal que $0 \in \rho(T) \cup \Lambda$, entonces $S = T_\Lambda$ satisface 2.30: $TS = Q = ST$ (pues $S = SQ$ es la inversa de TQ en $Q\mathcal{B}(\mathcal{X})Q$). De esto obtenemos $TS = ST$ y $STS = S$. Además $\sigma_{P\mathcal{B}(\mathcal{X})P}(TP) \cap \sigma_{Q\mathcal{B}(\mathcal{X})Q}(TQ) = \emptyset$, lo cual junto con 1.2 implica que

$$\sigma(T - TST) \cap \sigma(TST) = \sigma(TP) \cap \sigma(TQ) = \{0\}.$$

□

Teorema 2.5.3. Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es $\Lambda-$Drazin con inversa T_Λ, entonces $\mathcal{X} = \mathcal{R}(TT_\Lambda) \oplus \mathcal{N}(TT_\Lambda)$.

Demostración. Sea $x \in \mathcal{X}$, como $x = TT_\Lambda x + x - TT_\Lambda x$ definimos $z := x - TT_\Lambda x$. Observe que

$$x - TT_\Lambda x = (I - TT_\Lambda)x \in \mathcal{R}(I - TT_\Lambda) = \mathcal{N}(TT_\Lambda).$$

Por lo tanto $x = TT_\Lambda x + z$ con $TT_\Lambda x \in \mathcal{R}(TT_\Lambda)$ y $z \in \mathcal{N}(TT_\Lambda)$.
Ahora sea $x \in \mathcal{R}(TT_\Lambda) \cap \mathcal{N}(TT_\Lambda)$. Se cumple que $TT_\Lambda x = 0$ y existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $TT_\Lambda y = x$. Luego

$$0 = TT_\Lambda x = TT_\Lambda(TT_\Lambda y) = (TT_\Lambda)^2 y = TT_\Lambda y$$

es decir $TT_\Lambda y = 0$ con $TT_\Lambda y = x$, así x=0. Por lo tanto $\mathcal{X} = \mathcal{R}(TT_\Lambda) \oplus \mathcal{N}(TT_\Lambda)$. □

Teorema 2.5.4. Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ $\Lambda-$Drazin con inversa T_Λ, T y T_Λ tienen las siguientes formas matriciales.

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TT_\Lambda) \\ \mathcal{N}(TT_\Lambda) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TT_\Lambda) \\ \mathcal{N}(TT_\Lambda) \end{bmatrix}$$

con T_1 invertible y

$$T_\Lambda = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TT_\Lambda) \\ \mathcal{N}(TT_\Lambda) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TT_\Lambda) \\ \mathcal{N}(TT_\Lambda) \end{bmatrix}$$

.

Demostración. Como $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ y del Teorema anterior $\mathcal{X} = \mathcal{R}(TT_\Lambda) \oplus \mathcal{N}(TT_\Lambda)$ se tiene que

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TT_\Lambda) \\ \mathcal{N}(TT_\Lambda) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TT_\Lambda) \\ \mathcal{N}(TT_\Lambda) \end{bmatrix}.$$

Luego vemos que $A : \mathcal{R}(TT_\Lambda) \to \mathcal{R}(TT_\Lambda)$ definido por $Ax := Tx$. Note que $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(TT_\Lambda|_{\mathcal{R}(TT_\Lambda)})$. Sea $x \in \mathcal{N}(TT_\Lambda|_{\mathcal{R}(TT_\Lambda)})$, entonces $Tx = 0$ con $x \in \mathcal{R}(TT_\Lambda)$ esto implica que existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $x = TT_\Lambda y$. Tenemos que

$$0 = Tx = TTT_\Lambda y$$

esto es $TT_\Lambda y \in \mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T_\Lambda T)$, entonces $0 = TT_\Lambda TT_\Lambda y = TT_\Lambda y = x$. Por lo tanto $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(TT_\Lambda|_{\mathcal{R}(TT_\Lambda)}) = \{0\}$. Además $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(TT_\Lambda) = \mathcal{R}(T)$. En conclusión A es inyectivo y sobreyectivo y por lo tanto invertible.

También considerando $B : \mathcal{N}(TT_\Lambda) \to \mathcal{R}(TT_\Lambda)$ dado por $Bx := TT_\Lambda x = 0$, pues $x \in \mathcal{N}(TT_\Lambda)$ y por tanto $B = O$.
Observamos que $C : \mathcal{R}(TT_\Lambda) \to \mathcal{N}(TT_\Lambda)$ dado por $Cx := TT_\Lambda x$ note que $Cx \in R(TT_\Lambda)$ y $Cx \in \mathcal{N}(TT_\Lambda)$ esto es $Cx \in R(TT_\Lambda) \cap \mathcal{N}(TT_\Lambda) = \{0\}$. Por lo tanto $C = O$.
Por último para $D : N(TT_\Lambda) \to N(TT_\Lambda)$ dado por $Dx := TT_\Lambda x = 0$ pues $x \in \mathcal{N}(TT_\Lambda)$. Luego $D = O$. Por lo tanto la forma matricial para T es

$$T = \begin{bmatrix} A & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TT_\Lambda) \\ \mathcal{N}(TT_\Lambda) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TT_\Lambda) \\ \mathcal{N}(TT_\Lambda) \end{bmatrix}$$

con A invertible.
Sea $S = T_\Lambda$ del Teorema 2.5.2 S es inversa externa de T, luego del corolario 1.5.10 se tiene que

$$S = T_\Lambda = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TT_\Lambda) \\ \mathcal{N}(TT_\Lambda) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TT_\Lambda) \\ \mathcal{N}(TT_\Lambda) \end{bmatrix}.$$

□

Teorema 2.5.5. ([19], Teorema 5.1) Un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es $\Lambda-$Drazin para algún conjunto Λ si y sólo si

a) $T = T_1 + T_2$,

b) $\sigma(T_1) \cap \sigma(T_2) = \emptyset$,

c) T_2 es invertible.

En este caso $\sigma(T_1) = \Lambda$ y $T_\Lambda = O + T_2^{-1}$.

Demostración. Por el teorema 1.3.38, T es $\Lambda-$Drazin en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ si y sólo si existe una proyección $P \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ que conmuta con T tal que $T(I-P)$ es invertible en el álgebra $Q\mathcal{B}(\mathcal{X})Q$ con $Q = I - P$, y los espectros de TP y TQ en las álgebras $P\mathcal{B}(\mathcal{X})P$ y $Q\mathcal{B}(\mathcal{X})Q$ respectivamente, son disjuntos.

Sean $\mathcal{X}_1 = \mathcal{R}(P)$ y $\mathcal{X}_2 = \mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(Q)$. Entonces $\mathcal{X}$ es la suma directa topológica $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, y T se descompone como $T = T_1 + T_2$.

Es conocido que $\sigma(T_1)$ es el espectro de TP en el álgebra $P\mathcal{B}(\mathcal{X})P$ y $\sigma(T_2)$ es el espectro de TQ en el álgebra $Q\mathcal{B}(\mathcal{X})Q$. Por lo tanto TQ es invertible en $Q\mathcal{B}(\mathcal{X})Q$ si y sólo si T_2 es invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{X}_2)$. Por la definición de la inversa $\Lambda-$Drazin, T_Λ es el inversa de TQ en el álgebra $Q\mathcal{B}(\mathcal{X})Q$. Observe que $P = I + O$ y $Q = O + I$. Sea $T_\Lambda = O + T_2^{-1}$. Entonces $T_\Lambda = T_\Lambda Q$, esto es $T_\Lambda \in Q\mathcal{B}(\mathcal{X})Q$, y

$$(TQ)T_\Lambda = (T_1 + T_2)(O + I)(O + T_2^{-1})$$

$$= (O + T_2)(O + T_2^{-1}) = O + I = Q$$

Esto completa la prueba. $\square$

Capítulo 3

Inversa a lo largo de un operador

El presente capítulo es la principal aportación de ésta tesis, todo lo aquí escrito es conocido sobre todo en artículos, sin embargo en varios casos los teoremas se establecen para anillos con identidad, y nosotros los estudiamos en el caso de los operadores lineales acotados.
Cabe mencionar que el estudio de la forma matricial de la inversa a lo largo de un operador, es un tema de investigación actual como puede verse en .

3.1. Preliminares

En este capítulo presentamos la definición de inversa a lo largo de un operador, el cual es un caso particular de inversa externa, fijando el rango y el espacio nulo. Esta clase fué estudiada por X. Mary en 2011 en el caso de anillos con identidad [23].

Definición 3.1.1. Sean $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ operadores distintos de cero. Si existe una inversa exterior T' para T tal que $\mathcal{R}(T') = \mathcal{R}(S)$ y $\mathcal{N}(T') = \mathcal{N}(S)$, entonces decimos que T es invertible a lo largo de S y se escribe $T' = T^{-S}$.

Ejemplo 3.1.2. La inversa usual.
(a) Si $T \in \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{X})$ entonces $\mathcal{R}(T^{-1}) = \mathcal{R}(I)$ y $\mathcal{N}(T^{-1}) = \{0\} =$

$\mathcal{N}(I)$. Así,

$$T^{-1} = T^{-I}.$$

(*b*) Supóngase que $S \in \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{X})$ entonces T es invertible a lo largo de S si y sólo si T es invertible. Aún más, $T^{-1} = T^{-S}$.

Demostración. En efecto, si T es invertible a lo largo de S, por definición se tiene que existe $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ inversa externa tal que $\mathcal{R}(T') = \mathcal{R}(S)$ y $\mathcal{N}(T') = \mathcal{N}(S)$, pero como $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(I)$ y $\mathcal{N}(S) = \mathcal{N}(I)$ se sigue que $\mathcal{R}(T') = \mathcal{R}(I)$ y $\mathcal{N}(T') = \mathcal{N}(I)$. Por lo tanto T es invertible.
Recíprocamente, si suponemos que T es invertible, entonces $\mathcal{R}(T^{-1}) = \mathcal{R}(I)$, $\mathcal{N}(T^{-1}) = \mathcal{N}(I)$ y $TT^{-1} = I$, de esta última igualdad se cumple que $T^{-1}TT^{-1} = T^{-1}I = T^{-1}$. Sea $S := T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, entonces $\mathcal{R}(T^{-1}) = \mathcal{R}(S)$, $\mathcal{N}(T^{-1}) = \mathcal{N}(S)$ y $STS = S$. Por lo tanto T es invertible a lo largo de S y además $T^{-1} = T^{-S}$. $\square$

Observación 3.1.3. La inversa a lo largo de un operador es única.

Teorema 3.1.4. (Teorma 1, [15])
Sean $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ operadores distintos de cero. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) T' es la inversa de T a lo largo de S.

b) Existe $T' \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que $T' = T'TT'$ y $T' = LS$, $S = VT'$, $T' = SU$, $S = T'W$, para algunos $L, U, V, W, \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$. Supóngase que T' es una inversa exterior para T y S es tal que $\mathcal{R}(T') = \mathcal{R}(S)$ y $\mathcal{N}(T') = \mathcal{N}(S)$. Como T' es interno regular, existen subespacios cerrados $M, N \subset \mathcal{X}$ tales que $\mathcal{X} = N \oplus \mathcal{N}(T')$ y $\mathcal{X} = \mathcal{R}(T') \oplus M$, y obtenemos la siguiente forma matricial para T':

$$B = \begin{bmatrix} T_1' & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} N \\ \mathcal{N}(T') \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T') \\ M \end{bmatrix}$$

con T_1' invertible. También, como $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T')$ y $\mathcal{N}(T') = \mathcal{N}(S)$, se obtiene que $\mathcal{N}(S)$ y $\mathcal{R}(S)$ son subespacios cerrados y complementados. Por lo tanto, S es inverno regular y tenemos la siguiente forma matricial con respecto a la mismo descomposición de los espacios:

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} N \\ \mathcal{N}(T') \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T') \\ M \end{bmatrix}$$

con S_1 invertible. Ahora, sean los operadores $L, V \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(T') \oplus M)$ y $U, W \in \mathcal{B}(N \oplus \mathcal{N}(T'))$ definidos por

$$L = \begin{bmatrix} TT'_q S_1^{-1} & O \\ O & L_2 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} S_1^{-1} T'_1 & O \\ O & U_2 \end{bmatrix},\ V = \begin{bmatrix} S_1 T_1'^{-1} & O \\ O & V_2 \end{bmatrix}$$

y

$$W = \begin{bmatrix} T'^{-1} S_1 & O \\ O & W_2 \end{bmatrix},$$

donde $L_2, V_2 \in \mathcal{B}(M)$ y $U_2, W_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{N}(S))$ son operadore arbitrarios. Observe que

$$LS = \begin{bmatrix} T'_1 S_1^{-1} & O \\ O & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_1 S_1^{-1} S_1 & O \\ O & O \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} T'_1 & O \\ O & O \end{bmatrix} = T'.$$

Análogamente se cumple que

$$SU = T',\ VT' = S \text{ y } T'W = S.$$

Esto completa la prueba. $\square$

Observación 3.1.5. Los operadores L, U, V, W en la prueba del teorema previo no son necesariamente únicos.

Teorema 3.1.6. ([16], Teorema 4.3)
Sean $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Si T es invertible a lo largo de S, entonces T, S y T^{-S} tienen las siguientes formas matriciales con respecto a la descomposición $\mathcal{X} = \mathcal{R}(S) \oplus \mathcal{N}(ST) = \mathcal{R}(TS) \oplus \mathcal{N}(S)$.

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & O \\ O & T_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(S) \\ \mathcal{N}(ST) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TS) \\ N(S) \end{bmatrix}$$

donde T_1 es invertible, y T_2 es arbitrario.

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TS) \\ N(S) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(S) \\ \mathcal{N}(ST) \end{bmatrix}$$

con S_1 invertible y finalmente

$$T^{-S} = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TS) \\ N(S) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(S) \\ \mathcal{N}(ST) \end{bmatrix}$$

Demostración. Si T es invertible a lo largo de S con $T' = T^{-S}$ entonces T es externo regular y del corolario 1.5.10 T tiene la siguiente forma matricial:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & O \\ O & T_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(S) \\ \mathcal{N}(ST) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TS) \\ N(S) \end{bmatrix}$$

con T_1 invertible.
Como T' es interno regular se tiene que $\mathcal{R}(S)$ y $\mathcal{N}(S)$ son subespacios cerrados y complementados, S es interno regular y del teorema 1.5.7 se tiene que

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TS) \\ N(S) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(S) \\ \mathcal{N}(ST) \end{bmatrix}$$

con S_1 invertible.
Ahora, note que

$$ST = \begin{bmatrix} S_1T_1 & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(S) \\ \mathcal{N}(T'T) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(S) \\ \mathcal{N}(T'T) \end{bmatrix},$$

$$TS = \begin{bmatrix} T_1S_1 & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TT') \\ \mathcal{N}(S) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TT') \\ \mathcal{N}(S) \end{bmatrix},$$

donde T_1 y A_1 son invertibles, se sigue que $\mathcal{N}(ST) = \mathcal{N}(T'T)$ y $\mathcal{R}(TS) = \mathcal{R}(TT')$. Por lo tanto T^{-S} tiene la forma matricial requerida. $\square$

Teorema 3.1.7. ([16], Teorema 4.2)
Sean $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ operadores distintos de cero. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) T es invertible a lo largo de S.

b) $\mathcal{R}(S)$ es subespacio cerrado y complementado de T, $T(\mathcal{R}(S)) = \mathcal{R}(TS)$ es un subespacio cerrado tal que $\mathcal{R}(TS) \oplus \mathcal{N}(S) = \mathcal{X}$ y la restricción $T|_{\mathcal{R}(S)} : \mathcal{R}(S) \to \mathcal{R}(TS)$ es invertible.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Supóngase que T es invertible a lo largo de S con $T' = T^{-s} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Entonces T' es una inversa externa para T, luego $\mathcal{R}(T')$ y $\mathcal{N}(T')$ son subespacios cerrados complementados de $\mathcal{X}$ y por lo tanto también $R(S)$ y $\mathcal{N}(S)$.
Además, $I - TT'$ es una proyección de $\mathcal{X}$ sobre $\mathcal{N}(T') = \mathcal{N}(S)$, luego $\mathcal{X} = \mathcal{R}(TT') \oplus \mathcal{N}(S)$, y como $\mathcal{R}(TT') = T(\mathcal{R}(T')) = T(\mathcal{R}(T)) = \mathcal{R}(TS)$ se tiene que $\mathcal{R}(TS)$ es cerrado y $\mathcal{X} = \mathcal{R}(TS) \oplus \mathcal{N}(S)$. Ahora, para la invertibilidad de $T|_{R(S)}$ note que $T|_{R(S)} : \mathcal{R}(S) \to \mathcal{R}(TS)$ es sobreyectivo. Veamos que $T|_{R(S)}$ es inyectivo sobre $\mathcal{R}(S)$. Supóngase que existe $x \in \mathcal{R}(S)$ tal que $Tx = 0$. Como $x \in \mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T')$, existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $T'y = x$. Entonces $0 = Tx$ implica que $0 = T'Tx = T'TT'y = T'y$ y por lo tanto $x = 0$. En conclusión, $T|_{R(S)}$ es inyectivo, sobreyectivo y por tanto invertible.

$b) \Rightarrow a)$ Recíprocamente, supóngase que $\mathcal{R}(S)$ y $\mathcal{N}(S)$ son subespacios cerrados y complementados de $\mathcal{X}$, con $\mathcal{X} = \mathcal{R}(TS) \oplus \mathcal{N}(S)$ y la restricción $T|_{R(S)} : \mathcal{R}(S) \to \mathcal{R}(TS)$ es invertible. Sea $\mathcal{M}$ complemento de $\mathcal{R}(S)$, esto es $\mathcal{X} = \mathcal{R}(S) \oplus \mathcal{M}$. Entonces T tiene la siguiente forma matricial con respecto a esta descomposición del espacio:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_3 \\ T_4 & T_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(S) \\ \mathcal{M} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TS) \\ \mathcal{N}(S) \end{bmatrix}.$$

Como T aplica $\mathcal{R}(S)$ sobre $\mathcal{R}(TS)$ se sigue que $T_4 = O$.
Ahora, sea T' el operador definido por

$$T' := \begin{bmatrix} T_1^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TS) \\ \mathcal{N}(S) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(S) \\ \mathcal{M} \end{bmatrix}.$$

Es claro que $\mathcal{N}(T') = \mathcal{N}(S)$ y $\mathcal{R}(T') = \mathcal{R}(S)$. Note que

$$\begin{aligned} T'TT' &= \begin{pmatrix} T_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & T_3 \\ T_4 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_1^{-1}T_1 & T_1^{-1}T_3 \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & T_1^{-1}T_3 \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} T_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} = T'.$$

Por lo tanto, T' es la inversa de T a lo largo de S. En conclusión, T es invertible a lo largo de S. $\square$

Teorema 3.1.8. ([15], Teorema 2)
Sean $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

a) El operador T es invertible a lo largo de S;

b) $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(ST)$ y TS es grupo invertible;

c) $\mathcal{N}(S) = \mathcal{N}(TS)$ y TS es grupo invertible.

Más aún, se tiene que $T^{-S} = S(TS)_G = (ST)_G T$.

Demostración. Veamos que $a)$ es equivalente a $b)$ y $c)$.
$a) \Rightarrow b)$. Como T es invertible a lo largo de S, existen $L, V \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tales que $B = LS$ y $S = VB$. De $STBB = VBTB = VB = S$ obtenemos $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{R}(ST)$, y como siempre se cumple que $\mathcal{R}(ST) \subset \mathcal{R}(S)$, obtenemos $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(ST)$. De $T = VB$ y $B = LS$ se tiene que $\mathcal{N}(ST) = \mathcal{N}(VBT) \supseteq \mathcal{N}(BT)$ y $\mathcal{N}(BT) = \mathcal{N}(LST) \supseteq \mathcal{N}(ST)$, así $\mathcal{N}(BT) = \mathcal{N}(ST)$. Finalmente, como $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(BT)$ y $\mathcal{X} = \mathcal{R}(BT) \oplus \mathcal{N}(BT)$, obtenemos $\mathcal{X} = \mathcal{R}(ST) \oplus \mathcal{N}(ST)$, lo cual implica que ST es grupo invertible.
$b) \Rightarrow a)$. Sea $B = (ST)_G S$. Se cumple que $B = BTB$. Usando el Teorema 3.1.4, probaremos que $\mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(S)$ y $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(S)$.
Se tiene que $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(BT) = \mathcal{R}((ST)_G ST) = \mathcal{R}(ST) = \mathcal{R}(S)$.
Como $(ST)_G ST$ es una proyección sobre $\mathcal{R}(ST) = \mathcal{R}(S)$ se tiene que

$$S = (ST)_G (ST).$$

Entonces, $\mathcal{N}(B) = \mathcal{N}((ST)_G T) \supseteq \mathcal{N}(S)$ y $\mathcal{N}(S) = \mathcal{N}(ST(ST)_G S) \supseteq \mathcal{N}((ST)_G S) = \mathcal{N}(B)$ esto implica que $\mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(S)$.
$a) \Rightarrow c)$. Como T es invertible a lo largo de S, existen $U, W \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tales que $B = SU$ y $S = BW$. De $BTS = BTBW = BW = S$ se tiene que $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(BTS) \supseteq \mathcal{N}(TS)$, y como $\mathcal{N}(TS) \supseteq \mathcal{N}(S)$, obtenemos $\mathcal{N}(TS) = \mathcal{N}(S)$. De $B = SU$ y $S = BW$, se tiene que $\mathcal{R}(TS) = \mathcal{R}(TSU) \subseteq \mathcal{R}(TS)$ y $\mathcal{R}(TS) = \mathcal{R}(TBW) \subseteq \mathcal{R}(TB)$, por lo tanto $\mathcal{R}(TS) = \mathcal{R}(TB)$. Finalmente, como $\mathcal{N}(S) = \mathcal{N}(B) =$

$\mathcal{N}(TB)$ y $\mathcal{X} = \mathcal{R}(TB) \oplus \mathcal{N}(TB)$, obtenemos $\mathcal{X} = \mathcal{R}(TS) \oplus \mathcal{N}(TS)$, lo cual implica que TS es grupo invertible.
c) $\Rightarrow$ *a*). Sea $B = S(TS)_G$. Se cumple que $B = BTB$. Por el Teorema 3.1.4 probaremos que $\mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(S)$ y $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(T)$. De $\mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(TB) = \mathcal{N}(TS(TS)_G) = \mathcal{N}(TS)$ vemos que $\mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(S)$. Como TS es grupo invertible y $\mathcal{N}(TS) = \mathcal{N}(S)$, se tiene que $\mathcal{X} = \mathcal{R}(TS) \oplus \mathcal{N}(S)$. Ahora, como $(TS)_G(TS)$ es una proyección sobre $\mathcal{R}(TS)$ a lo largo de $\mathcal{N}(TS)$ obtenemos

$$S = S(TS)_G(TS).$$

Entonces, $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(S(TS)_G) \subseteq \mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(S(TS)_G TS) \subseteq \mathcal{R}(S(TS)_G T) = \mathcal{R}(B)$. Por lo tanto, $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(B)$. $\square$

3.1.1. Invertibilidad a lo largo de un operador que conmuta

Proposición 3.1.9. ([8], Proposición 4)
Sea T un operador invertible a lo largo de S. Si $TS = ST$, entonces $TT^{-S} = T^{-S}T$.

Demostración. De la proposición 3.1.8 se tiene que

$$TT^{-S} = TS(TS)^G = (TS)^G TS = (ST)^G ST = T^{-S}T.$$

$\square$

El siguiente ejemplo nos muestra que no se cumple el recíproco de la proposición 3.1.9.

Ejemplo 3.1.10. Sea $\mathcal{X} = \mathfrak{l}_2$ el espacio de las sucesiones cuadrado sumables. Sea $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ definidos por

$$Tx = (x_1, 2x_1, 0, 0, \cdots),$$

$$Sx = (x_2, x_3, 0, 0, \cdots).$$

Se verifica que T^{-S} es el operador dado por

$$T^{-S}x = (\frac{1}{2}x_2, x_1, 0, 0, \cdots).$$

Se tiene que $TT^{-S} = T^{-S}T$, pero

$$TSx = (x_1, 2x_2, 0, 0, \cdots) \neq (2x_1, x_2, 0, 0, \cdots) = STx.$$

Teorema 3.1.11. ([8], Teorema 5)
Sea T un operador invertible a lo largo de S y $TS = ST$. Entonces existe un operador invertible T_1 sobre $\mathcal{R}(T)$ y un operador T_2 sobre $\mathcal{N}(T)$, tales que si T es invertible a lo largo de S, entonces T tiene la siguiente forma matricial del teorema 3.1.6:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & O \\ O & T_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(S) \\ \mathcal{N}(S) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(S) \\ N(S) \end{bmatrix}$$

y

$$T^{-S} = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(S) \\ \mathcal{N}(S) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(S) \\ \mathcal{N}(S) \end{bmatrix}.$$

Demostración. Supóngase que T es invertible a lo largo de S y $TS = ST$. Entonces por la proposición 3.1.9 $TT^{-S} = T^{-S}T$. Además, $TT^{-S} = T^{-S}T$ es una proyección, y se tiene que $\mathcal{X} = \mathcal{R}(T^{-S}) \oplus \mathcal{N}(TT^{-S})$. Como

$$\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T^{-S}) = \mathcal{R}(T^{-S}T),$$

$$\mathcal{N}(S) = \mathcal{N}(T^{-S}) = \mathcal{N}(T^{-S}T)$$

y además $\mathcal{X} = \mathcal{R}(S) \oplus \mathcal{N}(S)$, podemos considerar la siguiente descomposición matricial de T:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_3 \\ T_4 & T_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(S) \\ \mathcal{N}(S) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(S) \\ N(S) \end{bmatrix}.$$

Veamos que $T_1 : \mathcal{R}(S) \to \mathcal{R}(S)$, definido por $T_1 x := Tx$, es invertible. Como

$$\mathcal{R}(TS) = \mathcal{R}(ST) \subset \mathcal{R}(S)$$

y

$$\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(TT^{-S}) = \mathcal{R}(TS(TS)^G) \subseteq \mathcal{R}(TS),$$

se tiene que $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(TS)$ y por lo tanto

$$\mathcal{R}(T_1) = \mathcal{R}(TS) = \mathcal{R}(S).$$

Veamos que es inyectiva, sea $x \in \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{R}(S)$. Como $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T^{-S})$, existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $x = T^{-S}$. Entonces, $0 = T^{-S}Tx = T^{-S}TT^{-S}y = T^{-S}y = x$.

Ahora, como $TS = ST$, los subespacios $\mathcal{R}(S)$ y $\mathcal{N}(S)$ son invariantes bajo T y T aplica $\mathcal{R}(S)$ sobre $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(TS)$, obtenemos $T_3 = T_4 = O$. Por lo tanto

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & O \\ O & T_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(S) \\ \mathcal{N}(S) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(S) \\ N(S) \end{bmatrix},$$

Se verifica que

$$T^{-S} = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

es la inversa a lo largo de S. $\square$

Proposición 3.1.12. ([8], Proposición 7)
Sean $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Si T es invertible a lo largo de S y $TS = ST$, entonces existe una proyección $P \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que T es invertible a lo largo de P.

Demostración. Del teorema 3.1.11 se tiene que si T es invertible a lo largo de S y $TS = ST$, entonces $\mathcal{X} = \mathcal{R}(S) \oplus \mathcal{N}(S)$.
Por lo tanto existe una proyección $P \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(S)$ y $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(S)$. En conclusión, T es invertible a lo largo de P. $\square$

Teorema 3.1.13. ([8], Teorema 9).
Sea $P \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ una proyección y supóngase que $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es invertible a lo largo de P. Si $\mathcal{R}(TP) \subset \mathcal{R}(P)$, entonces $TP = PT$.

Demostración. Como $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es invertible a lo largo de P, T tiene la siguiente forma matricial:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & O \\ O & T_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(P) \\ \mathcal{M} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TP) \\ \mathcal{N}(P) \end{bmatrix}$$

donde T_1 es invertible y $\mathcal{M}$ es el complemento de $\mathcal{R}(P)$, esto es, $\mathcal{X} = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{M}$.
Como $\mathcal{N}(P)$ es un complemento para $\mathcal{R}(P)$, tomamos $\mathcal{M} = \mathcal{N}(P)$.
Entonces se tiene que

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & O \\ O & T_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(P) \\ \mathcal{N}(P) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(TP) \\ \mathcal{N}(P) \end{bmatrix}.$$

Ahora, supóngase que $\mathcal{R}(TP) \subset \mathcal{R}(P)$. Del teorema 3.1.7 sabemos que $T_1 = T|_{\mathcal{R}(P)} : \mathcal{R}(P) \to \mathcal{R}(TP)$ es invertible, lo cual implica $\mathcal{R}(TP) = \mathcal{R}(P)$. Por lo tanto,

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & O \\ O & T_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(P) \\ \mathcal{M} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(P) \\ \mathcal{N}(P) \end{bmatrix}$$

De esto se sigue que $TP = PT$. $\square$

Proposición 3.1.14. ([8], Proposición 10)
Sea $P \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ una proyección y suponga que T es invertible a lo largo de P. Entonces $T^{-S}P = PT^{-S}$.

Demostración. Usando la proposición 3.1.9, se tiene que

$$T^{-S}P = (PT)^G PP = (PT)^G P$$

$$= P(TP)^G = PP(TP)^G = PT^{-S}.$$

$\square$

Ejemplo 3.1.15. Un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ y una proyección $P \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que $TP = PT$ pero T no es invertible a lo largo de P.
Sea $\mathcal{X} = \ell_2$ y sean $T, P \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ definidos por

$$Ax = (0, x_2, x_3, \cdots),$$

$$Px = (x_1, x_2, 0, 0, \cdots).$$

Entonces

$$TPx = (0, x_2, 0, 0, \cdots),$$

$$PTx = (0, x_2, 0, 0, \cdots).$$

Sin embargo, la restricción $T|_{\mathcal{R}(P)} : \mathcal{R}(P) \to \mathcal{R}(TP)$ no puede ser invertible, y por el teorema 3.1.7 T no es invertible a lo largo de P.

Teorema 3.1.16. ([8], Teorema 12)
Sea $P \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ una proyección y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que $TP = PT$. Entonces, T es invertible a lo largo de P si y sólo si $R(P) \subset \mathcal{R}(T)$ y $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(P)$.

Demostración. Supóngase que T es invertible a lo largo de P. Como $\mathcal{R}(T^{-S}) = \mathcal{R}(T^{-S}TT^{-S}) \subset R(T^{-S}T) \subset R(T^{-S})$ y de la proposición 3.1.9 y la definición de T^{-S} se tiene que

$$\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(T^{-S}) = \mathcal{R}(T^{-S}T) = \mathcal{R}(TT^{-S}) \subset \mathcal{R}(T).$$

Similarmente, de

$$\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(T^{-S}) = \mathcal{N}(TT^{-S}) = \mathcal{N}(T^{-s}T) \supset \mathcal{N}(T).$$

Recíprocamente, supóngase que $\mathcal{R}(P) \subset \mathcal{R}(T)$ y $\mathcal{N}(P) \supset \mathcal{N}(T)$. Usando el Teorema 3.1.7, la restricción $T|_{\mathcal{R}(P)} : \mathcal{R}(P) \to \mathcal{R}(TP)$ es sobreyectivo. De $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(P)$ y $\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{R}(P) = \{0\}$ obtenemos que $T|_{\mathcal{R}(P)}$ es inyectivo.
Veamos que $R(TP)$ es cerrado y $\mathcal{X} = R(TP) \oplus \mathcal{N}(P)$, para esto veamos que $\mathcal{R}(TP) = \mathcal{R}(P)$. Note que $\mathcal{R}(TP) = \mathcal{R}(PT) \subset \mathcal{R}(P)$. Ahora para la otra contención sea $x \in \mathcal{R}(P)$. Como $\mathcal{R}(P) \subset \mathcal{R}(T)$, existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $x = Ty$. Entonces, de $x = Px = PTy = TPy$ se sigue que $x \in \mathcal{R}(TP)$. Por lo tanto, $\mathcal{R}(P) \subset \mathcal{R}(TP)$. Finalmente, $\mathcal{R}(P)$ es cerrado y complementado, por lo tanto T es invertible a lo largo de P. $\square$

3.2. La proyección espectral

Recordemos la definición del espectro de un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$:

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \ : T - \lambda I \text{ no es invertible}\}.$$

Supóngase que T es invertible a lo largo de S y que $TS = ST$. Tenemos la siguiente forma matricial:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & O \\ O & T_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(S) \\ \mathcal{N}(S) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(T) \\ \mathcal{N}(T) \end{bmatrix}.$$

Dado que $\mathcal{R}(S)$ y $\mathcal{N}(S)$ son subespacios invariantes bajo T, se tiene que

$$\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2).$$

Sabemos que T_1 es invertible pero T no lo es, luego $0 \in \sigma(T_2)$. Note que de $\mathcal{X} = \mathcal{R}(S) \oplus \mathcal{N}(S)$ y de la forma matricial de T, existe una proyección P tal que $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(S)$, $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(S)$ y

$PT = TP$. Una clase importante de proyecciones que conmutan con T, la forman las proyecciones espectrales estudiadas en el capítulo 1. En el siguiente teorema veremos como se relacionan la inversa a lo largo de un operador y la proyección espectral.

Teorema 3.2.1. ([8], Teorema 13)
Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ y Λ un conjunto espectral para T. Si $0 \notin \Lambda$ entonces T es invertible a lo largo de $P_\Lambda(T)$.

Demostración. Sea $P := P_\Lambda(T)$. Entonces $\mathcal{R}(P)$ y $\mathcal{N}(P)$ son cerrados y $\mathcal{X} = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$. Ahora, como $\mathcal{R}(P)$ es invariante bajo T, $\sigma(T|_{\mathcal{R}(P)}) = \Lambda$ y $0 \notin \Lambda$ se tiene que $T|_{\mathcal{R}(P)}; \mathcal{R}(P) \to \mathcal{R}(P)$ es invertible. Entonces, $\mathcal{R}(TP) = \mathcal{R}(P)$ es cerrado, $\mathcal{R}(TP) \oplus \mathcal{R}(P) = \mathcal{X}$ y $T|_{\mathcal{R}(P)} : \mathcal{R}(P) \to \mathcal{R}(TP)$ es invertible. Por lo tanto, por el teorema 3.1.7, T es invertible a lo largo de P. $\square$

3.3. Inversas con rango y espacio nulo prescritos

Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, M, N subespacios de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ respectivamente. Recordamos del capítulo 1 que $T'' \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es llamada una $(2)-$inversa de T con rango M y espacio nulo N prescritos, denotada por $T^2_{M,N}$ si se cumplen las siguientes condiciones:

$$T''TT'' = T'', \ \ \mathcal{R}(T'') = M \ \ \mathcal{N}(T'') = N.$$

Es conocido que si $dimM = dimN^\perp \leq rank(T)$, entonces existe un único $T^{(2)}_{M,N}$ si y sólo si $T(M) \oplus N = \mathcal{X}$ [3].
Las inversas vistas en los capítulos anteriores, tales como la inversa Moore-Penrose, la inversa $\Lambda-$Drazin y la grupo invertible (T_G) son importantes tipos de $(2)-$inversas de un operador T, éstos son casos particulares de tal inversa con M y N específicos. Recordar que el índice de un operador Drazin invertible, se define como

$$ind(T) := \inf\{n \in \mathbb{N} |\ T^n(I-P) = O\}.$$

Teorema 3.3.1. ([33], Teorema 2.5) Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, entonces tenemos representaciones usando la $(2)-$inversa de T con rango y espacio nulo prescritos, para las siguientes inversas:

a) Inversa Moore-Penrose:

$$T^{\dagger} = T^{(2)}_{\mathcal{R}(T^*),\mathcal{N}(T^*)}.$$

b) Inversa Drazin (Operadores cuasipolares):

$$T_D = T^{(2)}_{\mathcal{R}(T^n),\mathcal{N}(T^n)}, \text{ donde } n = ind(T).$$

c) Grupo inversa (Operadores simples polares):

$$T^G = T^{(2)}_{\mathcal{R}(T),\mathcal{N}(T)}.$$

Demostración. (a) Por la definición de Penrose, $T^{\dagger}$ es inversa exterior de T, además del teorema 1.4.9 (9) y (10), se tiene que

$$\mathcal{R}(T^{\dagger}) = \mathcal{R}(T^*) \text{ y } \mathcal{N}(T^{\dagger}) = \mathcal{N}(T^*).$$

Entonces $T^{\dagger}$ cumple la definición de inversa a lo largo de un operador, esto es $T^{\dagger}$ es inversa de T a lo largo de T^*.
Además, como $TT^{\dagger}$ y $T^{\dagger}T$ son proyecciones idempotentes, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \mathcal{R}(TT^{\dagger}) \oplus \mathcal{N}(TT^{\dagger}) \\ &= T\mathcal{R}(T^{\dagger}) \oplus \mathcal{N}(TT^{\dagger}) = T\mathcal{R}(T^*) \oplus \mathcal{N}(T^*) \end{aligned}$$

y

$$\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{R}(T^*) = \mathcal{N}(T^{\dagger}T) \cap \mathcal{R}(T^{\dagger}T) = \{0\}.$$

Así, por el teorema 1.5.9, $T^{(2)}_{\mathcal{R}(T^*),\mathcal{N}(T^*)}$ existe y $T^{\dagger} = T^{(2)}_{\mathcal{R}(T^*),\mathcal{N}(T^*)}$.

(b) Veamos que $\mathcal{R}(T_D) = \mathcal{R}(TT_D) = \mathcal{R}(T^k)$ y $\mathcal{N}(T_D) = \mathcal{N}(TT_D) = \mathcal{N}(T^k)$ para cualquier entero positivo $k \geq n$.
Como $\mathcal{R}(T_D) = \mathcal{R}(TT_D^2) \subset \mathcal{R}(TT_D) = \mathcal{R}(T_DT) \subset \mathcal{R}(T_D)$, obtenemos $\mathcal{R}(T_D) = \mathcal{R}(TT_D)$ y así

$$\mathcal{R}(TT_D) = T\mathcal{R}(T_D) = T\mathcal{R}(TT_D) = T^2\mathcal{R}(T_D).$$

Por inducción se verifica que $\mathcal{R}(TT_D) = T^h\mathcal{R}(T_D)$ para cualquier entero positivo h. Se tiene que $\mathcal{R}(T_D) = \mathcal{R}(TT_D) = \mathcal{R}(T^k)$ para cualquier entero positivo $k \geq n$, tenemos que

$$\mathcal{N}(T_D) \subset \mathcal{N}(T^{k+1}T_D) = \mathcal{N}(T^k) \subset \mathcal{N}(T_D^kT^k) = \mathcal{N}(T_DT)$$

$$\subset \mathcal{N}(T_D^2 T) \subset \mathcal{N}(T_D),$$

así

$$\mathcal{N}(T_D) = \mathcal{N}(TT_D) = \mathcal{N}(T^k).$$

Como TT_D es una proyección idempotente, se tiene que

$$\mathcal{X} = \mathcal{R}(TT_D) \oplus \mathcal{N}(TT_D) = T\mathcal{R}(T^n) \oplus \mathcal{N}(T^n).$$

Además, $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{R}(T^n) \subset \mathcal{N}(T^n) \cap \mathcal{R}(T^{n+1}) = \{0\}$. Por el teorema 1.5.9 (b) tenemos que $T^{(2)}_{\mathcal{R}(T^n),\mathcal{N}(T^n)}$ existe y $T^{(2)}_{\mathcal{R}(T^n),\mathcal{N}(T^n)} = T_D$.
(c) Tomando $n = 1$ en el inciso (b) se obtiene el resultado. $\square$

Las $(2)-$inversas tienen muchas aplicaciones, por ejemplo, en métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales. El lector interesado puede encontrar más información en [21]

Conclusiones

En esta tesis se ha hecho una recopilación de las inversas generalizadas más conocidas, tales como las inversas internas, externas, la grupo inversa y la inversa Drazin.
De estas se ha establecido su forma matricial. Se han estudiado los operadores polares, cuasipolares y $\Lambda-$Drazin, de los cuales se han verificado algunas de sus caracterizaciones conocidas en anillos con identidad, así como también se han establecido sus formas matriciales.
Finalmente hemos estudiado la inversa a lo largo de un elemento, caso particular de la inversa con rango y espacio nulo prescritos, se presenta su definición para operadores, algunas de sus caracterizaciones así como su forma matricial. En el último teorema del capitulo 3 se presenta la relación de esta inversa, con la grupo inversa, la inversa Drazin y la inversa Moore-Penrose.
En futuras investigaciones se pueden establecer relaciones de las inversas estudiadas con nuevas inversas que están surgiendo, así como es posible utilizar la teoría expuesta como punto de partida para desarrollar aplicaciones, por ejemplo en estadśtica o programación lineal.

Bibliografía

[1] Ahues M., Largillier A. and Limaye B. V., Spectral Computations for Bounded Operators, Chapman & Hall, 2001.

[2] Atkinson, F.V., The normal solvability of linear equations in normed spaces (Russian), Mat. Sb. (N.S) 28 (70), 3-14, 1951.

[3] Ben-Israel, A and Greville, T.N.E., Generalized Inverses: Theory and Applications, (2nd Ed.) New York: Wiley-Interscience, 2003.

[4] Bjerhammar, A., Rectangular reciprocal matrices, with special reference to geodesic calculations, Bull.Geodesique,188-220, 1951.

[5] Calkin, J. W., Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert spaces, Ann. of Math. (2) 42, 839-873, 1941.

[6] Campbell, S.L. and Meyer, C.D., Generalized Inverses of Linear Transformations, New York: Pitman, 1979.

[7] Caradus, S.R., Pfaffenberger, W.E. and Yood, B., Calkin algebras and algebras of operators on Banach spaces, New York: M. Dekker, 1974.

[8] Cho, M. and Kantún-Montiel, G., Commuting outer inverses. Advances in Linear Algebra and Matrix Theory, Vol. 3, No. 4, 69-72, 2013.

[9] Djordjevic, D. S., y Rakocevic, V., Lectures on generalized inverses. Nis: University of Nis, 2008.

[10] Douglas, R.G., Banach algebra techniques in operator theory, (2nd Ed.), New York: Springer Verlag, 1998.

[11] Fredholm, I., Sur une classe d'equations fonctionnelles, Acta Math., 27, 365-390, 1903.

[12] Harte, R., Invertibility and Singularity for Bounded Linear Operators, New York: Marcel Dekker, 1988.

[13] Horn, R.A. and Johnson, C.R., Matrix Analysis, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.

[14] Hurwitz, W.A., On the pseudo-resolvent to the kernel of an integral equation, Trans.Amer.Math.Soc., 13, 405-418, 1912.

[15] Djordjević Slavisa V. and Kantún-Montiel, Invertibility along an operator, Operators and Matrices, Volume 11, Number 2, 347-354, 2017.

[16] Kantun-Montiel, G., Matrix Representations of inner and outer inverses. RIMS Kokyuroku, 1893, 13-19, 2014.

[17] Kantun-Montiel, G., Outer generalized inverses with prescribed ideals, Lin. Mult. Algebra, 62 (9), 1187-1196, 2014.

[18] Kato, T., Perturbation theory for linear operators, Berlin: Springer-Verlag, 1966.

[19] Koliha, J.J., The σg-Drazin Inverse and the Generalized Mbekhta Decomposition, Integral equations and operator theory 57, 309-326, 2007.

[20] Kubrusly, C. S. The elements of operator theory. Boston: Birkhauser, 2011.

[21] Li X. and Wei Y., A note compluting the generalized inverse $A^{(2)}_{T,S}$ of a matrix A, Hindawi Publishing Corp, 2002.

[22] Martínez-Avendaño, R. A., Operadores de Hankel en el espacio de Hilbert: un viaje rapido, Aportaciones Matemáticas, serie comunicaciones 35, 217-233, 2005.

[23] Mary, X. On generalized inverses and Green's relations. Linear Algebra and Applications, 434, 8, 1836-1844, 2011.

[24] Moore, E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix, Bull. Amer. Math. Soc. 26, 394-395, 1920.

[25] Murray, F.J. and Von Neumann, J. On rings of operators, Ann.of Math. 37, 116-229, 1936.

[26] Penrose, R. A generalized inverse for matrices, Proc.Cambridge Philos. Soc. 51, 406-413, 1955.

[27] Riesz, F., and Sz-Nagy, B. Functional Analysis, New York: Frederick Ungar, 1955.

[28] Siegel, C.L. Uber die analytische Theorie der quadratischen Formen III, Ann. of Math .38, 212-291, 1937.

[29] Schechter, M. Principles of Functional Analysis,(2nd Ed.), Providence: Amer. Math. Soc., 2002.

[30] Taylor, A.E. Introduction to Functional Analysis. New York: Wiley, 1961.

[31] Tseng,Y.Y. The Characteristic Value Problem of Hermitian Functional Operators in a Non-Hilbert Space, Ph.D.in mathematics, Chicago:University of Chicago Libraries, 1936.

[32] Woo Y. L., Lecture Notes on Operators theory, Seoul National University, 2010.

[33] Wang G., Yu Y., The generalized inverse $A^{(2)}_{T,S}$ of a matrix over an associative ring, J. Aust. Math. Soc 83, 423-437, 2007.