BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

MODELACIÓN DEL FENÓMENO DE MOIRÉ DE SOMBRA

TESIS

que para obtener el título de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA

Claudia Mariana de la Rosa Pérez

DIRECTORES DE TESIS

Dr. W. Fermín Guerrero Sánchez

Dra. Blanca Bermudez Juárez

PUEBLA, PUE. JULIO 2016

Dedicatoria

A mis padres, hermanos y novio.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por haberme dejado lograr el término de un sueño, a mis padres porque son los que me han dado la vida, me han permitido estudiar y me han apoyado en todo, a mi madre por que ha escuchado mis frustraciones, y me ha acompañado y presumido a lo largo de mi carrera, a mi padre porque gracias a él me han llamado la atención las matemáticas y él me ha dado palabras de aliento cuando más me he sentido derrotada, a mi hermano Rubén porque siempre ha estado ahí, ofreciéndome su ayuda, su actitud es la que ha cambiado la mía, al más pequeño de mis hermanos el Ponchis, que me ha estado acompañando en todo momento, desde simples cosas como desvelarse a hacer tarea conmigo hasta estar a mi lado en proyectos escolares. Agradezco también a mi familia en general, tíos, abuelos y primos que me han dado palabras para seguir adelante, y decirme que esperan mucho de mí, a mis amigos que me han acompañado en momentos importantes de mi vida Mitzy, Fabián, Iza, Omar. Agradezco a mis compañeros de la carrera porque fueron para mí un gran apoyo, Belén, Anahí, Germain, Karla, Hugo, Memo, Antonio Gil, Flor, Tomás y Tepoz que el tiempo hizo que pudiéramos ser cómplices y amigos, también agradezco a mis profesores porque me enseñaron mucho, tanto de la vida como de las matemáticas, siempre estuvieron ahí para escuchar mis dudas, Banfi, Carlos, Villa, Lidia que fueron profesores con los que entablé una amistad, sin embargo los profesores de probabilidad y estadísca, los de cálculo, álgebra, análisis en $\mathbb{R}^n$ entre otras áreas les agradezco porque me ayudaron mucho, y en especial a mi asesor de tesis porque vió en mi algo que ningún otro profesor había visto, puesto que con él he trabajado la mitad de mi carrera y me ha apoyado en todos los sentidos, ha sabido guiarme y escucharme a pesar de las diferencias que hemos tenido, gracias profesor Willi. Doy gracias a mi novio que siempre estuvo al pie de cañón en toda mi carrera, que me dio ánimos cada que salía de un examen, o que simplemente me acompañaba mientras me preparaba para algún proyecto, exposición o tarea, porque siempre estuvo a mi lado.

Por último agradezco a las personas que me aportaron de su conocimiento y tiempo

para la realización de este trabajo el Dr. Rigoberto Juárez Salazar, el Dr. Julio Erasto Poisot Macás y la Dra. Blanca Bermúdez Juárez; al Dr. W. Fermín Guererro Sánchez que es uno asesores por el invaluable apoyo que me ofreció durante estos últimos años de mi formación en la licenciatura; al Dr. Carlos Robledo Sánchez que estuvo al pendiente de mi trabajo y me dió su orientación en el área de física; al Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna que me dio su apoyo y tiempo para orientar mis estudios, así mismo agradezco a la institución que me permitió estudiar la licenciatura en Matemáticas Aplicadas.

Resumen

En los últimos años se han desarrollado diferentes métodos y técnicas ópticas, más o menos complejas, para observar simetría en objetos, medida de formas, cambios geométricos, deformaciones y/o reconstrucción de objetos. Algunos de estos métodos se encuentran disponibles en productos ya comerciales, por ejemplo, en sistemas estereoscópicos, escáner 3D, videogrametría, etc. Las técnicas de moiré ayudan a resolver problemas de esta índole, es por ello que tienen muchas aplicaciones y son de bajo costo, pero poco conocidos y por ello poco utilizados.

Uno de los motivos principales es contribuir en el área de la medicina, en especial en enfermedades que presentan alguna deformación del cuerpo humano, como la escoliosis, que una anomalía en la columna vertebral, está enfermedad es estudiada por medio de rayos x, sin embargo esta técnica afecta al paciente en su salud si éste recibe dosis elevadas de rayos X de alta energía en sus tratamientos. Por ello buscamos una alternativa que sea de bajo costo, así hacemos referencia a las técnicas de reconstrucción en 3D cuyos desarrollos principales se centran en la construcción, caracterización y manejo de la superficie a estudiar.

En esta tesis se presenta el análisis del fenómeno de moiré y cómo está enfocado en la técnica de moiré de sombra la cual nos proporciona un mapa topográfico de la superficie, por lo tanto ésta nos brinda información para el estudio de este tipo de enfermedades. La técnica de moiré de sombra es simple, con una gran eficiencia y de bajo costo, además de que tiene diferentes y útiles aplicaciones.

El objetivo de esta tesis es mostrar, explicar y formalizar el *modelo matemático* tanto del efecto de moiré como de la técnica de sombra, puesto que es base para usar algún método de reconstrucción de objetos en 3D, para nuestro caso utilizaremos desenvolvimiento de fase. Se realizaron programas en matemática para comprobar dicho análisis.

Índice general

1. Introducción **1**

2. Técnicas para la obtención de objetos 3D **5**

2.1. Métodos ópticos de adquisición 6

2.1.1. Interferometría 9

2.2. Técnicas de moiré 11

2.3. Moiré interferométrico 13

2.4. Moiré geométrico 14

2.5. Moiré de reflexión 16

2.6. Moiré de Sombra 17

2.6.1. Técnica de moiré de sombra 18

2.6.2. Aplicaciones 19

2.7. Moiré de Proyección 19

2.7.1. Introducción 19

2.7.2. Técnica de moiré por proyección 20

2.7.3. Comparación entre moiré de sombra y moiré de proyección . . . 22

3. Modelación matemática del efecto moiré **25**

3.1. Reseña Histórica 26

3.2. Funciones periódicas 27

3.3. Modelo para el efecto de moiré 29

3.3.1. Análisis de casos para observar el efecto moiré 34

3.4. Modelación de la Rejilla 43

4. Modelación de la técnica de moiré de sombra **45**

5. Conclusiones y trabajos futuros **57**

5.1. Conclusiones 57

5.2. Trabajos futuros 58

A. Programas en Mathematica **59**

A.1. Modelo de la rejilla sinusoidal a partir de la función coseno 59

A.2. Rejilla sinusoidal: Representación binaria 60

A.3. Rejilla sinusoidal: Series de Fourier 61

A.4. Comprobación de la superposición de las dos rejillas 63

A.5. Ejemplos de efectos de moiré 65

B. Metodología para la reconstrucción de Objetos **69**

B.1. Método de desplazamiento de fase 70

B.1.1. Phase-stepping de cuatro pasos 71

B.2. Desenvolvimiento de fase 73

B.3. Algoritmo para la reconstrucción de objetos 75

C. Aplicación interesante **77**

C.1. Descripción del problema 77

C.2. Descripción del experimento 78

C.3. Materiales para el experimento en las técnicas de moiré 80
C.3.1. Descripción de los materiales del experimento 80
C.4. Calibración del experimento 81
C.5. Solución del problema 82
C.5.1. Interpretación de las imágenes con patrón de moiré 83
C.6. Resultados del experimento 87

Índice alfabético **95**

Índice de figuras

2.1. Tipos de adquisición 3D de objetos 6
2.2. Esquema de interferometría de moiré 14
2.3. Esquema de moiré geométrico: para desplazamiento en una sola dirección. 15
2.4. Esquema de moiré de reflexión 16
2.5. Geometría de la técnica de moiré de sombra 17
2.6. Imágenes donde se explica el paralaje. 18
2.7. Luz para moiré de sombra. 18
2.8. Esquema de la técnica de moiré por proyección 20
2.9. Geometría de la técnica de moiré por proyección 21

3.1. Ejemplos en donde aparece el efecto moiré 25
3.2. Patrón geométrico de líneas 30
3.3. Patrón de moiré generado por rejillas de líneas paralelas 31
3.4. Patrón de moiré: $\lambda_2 = \lambda_1$ 35
3.5. Patrón de moiré: $\lambda_2 \neq \lambda_1$ y $\alpha = 0$ 36

3.6. Patrón de moiré: $\lambda_2 \neq \lambda_1$ y $\alpha \neq 0$ 37

3.7. Geometría del efecto moiré 37

3.8. Gráfica de p(x) 43

3.9. Gráfica de p(x): Patrón de franjas 44

4.1. Técnica de sombra sobre una media esfera 46

4.2. Técnica de moiré 47

4.3. Modelo de moiré de sombra 48

4.4. Esquema para la técnica de sombra 48

4.5. Modelo de moiré de sombra 53

4.6. Arreglo preferente de moiré de sombra 55

B.1. Patrón de franjas con un corrimiento de cuatro pasos. a) 0, b) $\frac{\pi}{2}$, c) π d) $\frac{3}{2\pi}$ 73

B.2. Algoritmo para la reconstrucción de objetos 3D 75

B.3. Estaciones de procesamiento típicas incluidas un bloque de análisis de franjas para extracción de la fase codificada. 75

C.1. Espalda con escoliosis toracolumbar 85

C.2. Espalda con escoliosis toráxica 85

C.3. Espalda con escoliosis. Curvas convexas 86

C.4. Líneas de contorno sobre una espalda 86

C.5. Espalda simétrica 87

Índice de tablas

2.1. Clasificación de los métodos ópticos comúnmente usados 7

2.2. Cuadro comparativo entre la técnica de moiré y la técnica de proyección 22

3.1. Características de la función Seno 28

3.2. Características de la función Coseno 28

C.1. Resultados de trabajos basados en la topografía de moiré 89

C.2. Estudio comparativo de distintos métodos de screening de la escoliosis. 90

CAPÍTULO

1 Introducción

Las técnicas de moiré son un conjunto de técnicas ópticas que permiten la cuantificación de la topografía de macrosuperficies así como de microsuperficies. La obtención de la topografía de un objeto tiene muchas aplicaciones en varias áreas tales como: en medicina para la fabricación de prótesis, para diagnosticar enfermedades; en arqueología para la preservación digital de piezas de esta área y/o reconstrucción de piezas arqueológicas; en la industria mecánica en control de calidad de piezas e ingeniería inversa, en comercio electrónico para la representación tridimensional de objetos a través de la red; también se utiliza en aplicaciones ergonómicas, en personalización de ropa, trajes, equipos que dependan de la variabilidad del cuerpo humano, etc. En particular, el campo de la medicina, por ejemplo, la simetría proporciona mayor información acerca de las características específicas de un paciente. Dicha información puede ser utilizada para obtener el diagnóstico del paciente, en especial cuando hay deformaciones en huesos; además la topografía puede utilizarse para conocer el cuerpo humano, observar la forma de los órganos para su posterior reconstrucción en 3D, o bien, para la fabricación de prótesis e implantes a la medida del paciente.

Una de las desventajas de las técnicas de moiré se hace presente en superficies con pendientes pronunciadas o con discontinuidades en su topografía, ya que esto causa

que se pierda la continuación de los patrones reflejados en los objetos. Dicho problema hace difícil la obtención de la fase de las franjas proyectadas. Sin embargo, para un estudio general las técnicas de moiré pueden ser de gran ayuda, ya que son de bajo costo, son simples y los materiales que se requieren son sencillos de obtener.

Puesto que existen diferentes métodos de moiré, en este trabajo se propone utilizar la técnica de moiré por sombreado. La manera en que el efecto moiré se crea cuando la luz golpea nuestros patrones de franjas permite a los sistemas de visión calcular la profundidad e información de la superficie de los objetos en la escena. Para obtener la topografía del objeto se utilizará un algoritmo de corrimiento de fase de 4 pasos, ya que su implementación es relativamente rápida y proporciona resultados bastante satisfactorios, aunque este tema no es desarrollado en esta tésis, sin embargo es mencionado en los apéndices, ya que es trabajo contemplado para realizarse posteriormente.

El objetivo central de esta investigación es fundamentar las técnica de moiré de sombra ya que es de fácil uso, bajo costo y de gran utilidad, se pretende dar a conocer la información que esta técnica presenta, ya que para la reconstrucción de objetos esta información es muy importante, y su error es muy pequeño, de ahí su gran utilidad.

En el *capítulo 1* se presenta la introducción para conducir al lector al *capítulo 2* que contiene una descripción de las técnicas para la obtención de objetos 3D, haciendo una revisión en técnicas ópticas y después en los métodos de moiré, para así conocer las técnicas de moiré como moiré por sombreado, moiré por proyección, moiré geométrico, entre otras.

En el *capítulo 3* se hace una revisión histórica del efecto de moiré, y la construcción de dicho efecto, en esta sección se explica la construcción del patrón geométrico para crear el efecto, y se describe el caso particular que nosotros ocuparemos para la técnica de moiré de sombra, así como del modelo matemático que describe dicho efecto.

En el *capítulo 4* se analiza con profundidad la descripción de la técnica de moiré por sombra, en donde se explica el modelo matemático del arreglo para esta técnica, y como se obtiene información de la superficie a analizar, esta información es muy importante para poder hacer una reconstrucción en 3D.

En el *capítulo 5* se presentan las conclusiones y el trabajo a futuro por realizarse.

CAPÍTULO

2 Técnicas para la obtención de objetos 3D

Existen diferentes técnicas para obtener la simetría y/o topografía de un objeto, una clasificación común consiste en dispositivos de contacto y de no contacto. Los dispositivos de contacto normalmente son caros, lentos y además requieren de una calibración periódica, es decir, son muy sensibles. Por ejemplo en la medicina se ocupan rayos X para obtener información sobre algún objeto, sin embargo, este método es relativamente caro. En cuanto a los dispositivos de medición libres de contacto están la técnica de proyección de franjas, interferometría Talbot, interferometría de moteado, interferometría de moiré, entre otros. Las técnicas ópticas presentan mayores ventajas con respecto a los dispositivos de contacto, puesto que son técnicas no invasivas, no destructivas y además de campo completo [29].

En el diagrama a bloques 2.1 se muestra el algoritmo para hacer la adquisición de datos en 3D.

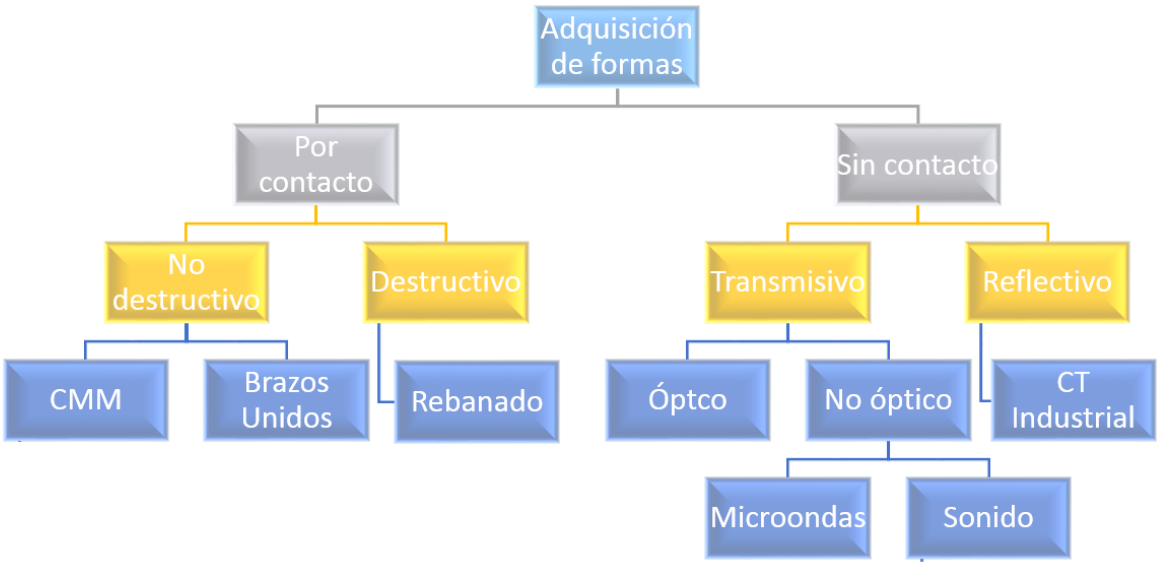


Figura 2.1: Tipos de adquisición 3D de objetos

Nos enfocaremos a los métodos ópticos, ya que las técnicas de moiré pertenecen a este grupo.

2.1. Métodos ópticos de adquisición

Los sistemas activos de adquisición 3D se basan en la extracción de información de la geometría y la textura de las superficies visibles en una escena sin importar la cantidad de información que esta pueda contener; en contraste, la visión bidimensional solo se centra en interpretar un ambiente 3D bajo una iluminación específica usando una proyección o varias. Aunque la visión bidimensional es usada ampliamente en aplicaciones industriales de inspección, solo da información limitada acerca de la forma de un objeto en cierta escena. Los sistemas activos de visión 3D ofrecen en sí la información completa de la geometría del objeto y no solo la forma específica para cierta escena.

Los métodos ópticos pueden clasificarse de diferentes maneras, se puede agrupar en función del sistema de iluminación como métodos pasivos y activos. En lo métodos pasivos no es necesario controlar la fuente de iluminación, pero el tratamiento digital

para obtener información topográfica requiere un alto esfuerzo computacional. En los métodos activos el uso de un patrón de radiación simplifica el problema de la medida de la topografía[23]. La tabla 2.1 muestra una clasificación de los métodos ópticos comúnmente usados.

Clasificación		**Método**	**Principio de Codificación**	
ACTIVOS	Luz estructurada	Láser	El patrón puede ser un punto, una línea, múltiples líneas o un patrón definido	Se basa en triangulación, la altura para cada punto se codifica en el corrimiento del patrón con respecto a una referencia debido a la topografía del cuerpo.
		Binaria	Se utilizan patrones binarios bidimensionales que codifican la información en uno ó en dos ejes	
		Nivel de gris	Usa un patrón de iluminación en niveles de gris.	
		Cromática	El patrón de iluminación está asociado a una matriz de color	
	Métodos a medida de fase	Proyección de franjas	La altura del objeto se codifica en la deformación local del paso y orientación de las franjas proyectadas que están contenidas en un término de fase, que se debe recuperar.	
		Moiré	La altura del objeto se codifica en curvas de nivel, obtenidas por efecto moiré debido a la proyección de sistemas de franjas de paso similar.	
		Interferometría	Consiste en variar el camino óptico y obtener información de fase de las franjas de interferencia. Puede ser a incidencia normal, oblicua o Interferometría a luz blanca	
	Tiempo de Vuelo		Para calcular la distancia absoluta de un punto del objeto se envía un pulso de luz (usualmente láser), y se mide el retardo de tiempo del haz reflejado,	
	Microscopía Confocal		El cuerpo se ubica en un sistema de desplazamiento axial y la altura se determina identificando la posición donde se encuentra el máximo de intensidad del sistema confocal.	
PASIVOS	Visión estéreo		A partir de dos imágenes tomadas en diferentes ángulos, se busca la correspondencia entre características y se halla la profundidad, esto es semejante al modelo binocular humano.	
	Shape from Shading		La información 3D se encuentra a través del manejo de sombras	

Tabla 2.1: Clasificación de los métodos ópticos comúnmente usados

En general, la elección de una técnica óptica de reconstrucción 3D depende de varias

condiciones que impone el objeto en estudio. Se destacan principalmente:

- Medición absoluta de la topografía con respecto a un sistema de referencia, o bien, medición relativa con respecto a la posición relativa en el sistema de adquisición y el objeto.
- Medición para estudio estático, sin movimiento en el intervalo de adquisición, o bien, dinámicos con objetos en movimiento o deformación superficial
- Características del cuerpo como grado de absorción luminosa, discontinuidades en la topografía, sombras, etc.

De igual manera, la elección de un método óptico de reconstrucción 3D depende de las condiciones metrológicas exigidas en la reconstrucción. Un sistema de proyección estructurado es adecuado para campos de observación grandes en el rango de milímetros a metros, con resolución del orden de decenas de milímetros. Para resolución del orden de varias decenas de nanómetros a micras, las técnicas interferométricas son adecuadas; aunque el campo de observación es limitado en algunas décimas de milímetros a milímetros.

Las técnicas ópticas de reconstrucción 3D han tenido una gran aceptación, ya que es una tecnología no invasiva, no requiere altos costos de implementación, y es útil en labores de inspección o supervisión, siendo cuantitativamente más objetiva, fiable y consistente que la inspección humana. Pueden alcanzar excelentes resoluciones, son de fácil automatización, evitando trabajos visuales fatigosos y altamente repetitivos. Actualmente se aplican en diversos procesos científicos y militares, extendiéndose su uso a un amplio rango de sectores industriales para la automatización de tareas anteriormente reservadas a la inspección visual humana.

El uso de técnicas ópticas de reconstrucción 3D se está extendiendo cada día más entre los diferentes sectores industriales, tanto en procesos de control de productos, como en control de procesos de producción. La utilización de esta tecnología, y los beneficios que conlleva, se centran principalmente en todas aquellas áreas en las que es

importante determinada información metrológica, como por ejemplo, en los sectores industriales del metal (automatización, aluminio, acero etc.), alimentación (especialmente en envasados), medicina, computación y electrónica, en el sector textil para la medición del ancho de los tejidos, medición de parámetros en ensayos de control de calidad, así como la medición del número de fibras que componen un hilo a partir de imágenes extraídas del microscopio, y en el sector de vigilancia para la capacidad de poder detectar personas, huellas dactilares, matriculas, etc.

Entre las aplicaciones modernas de las técnicas ópticas, el área de metrología óptica ha experimentado un gran desarrollo debido a sus evidentes beneficios tales como evaluaciones rápidas, no invasivas, de alta exactitud, y alta resolución. Más aún, las técnicas ópticas nos permiten medir una gran variedad de cantidades físicas, por ejemplo, gradientes de temperatura, índices de refracción, perfiles de superficies (topografía), campos de esfuerzo, campos magnéticos, deformación, entre otros.

2.1.1. Interferometría

En física, la interferencia es un fenómeno en el que dos o más ondas se superponen para formar una onda resultante de mayor o menor longitud de onda. La interferencia puede ser mecánica, eléctrica, etc. El efecto de interferencia puede ser observado en cualquier tipo de ondas, como luz, radio, sonido, ondas en la superficie del agua, entre otros efectos físicos.

La interferometría óptica es una técnica basada en la naturaleza ondulatoria originada por la superposición de haces de luz. Este tipo de técnica permite realizar medidas precisas de las formas o de las distancias, ya que proporciona una resolución extraordinaria y no requiere una invasión física directa con la superficie sometida a estudio.

Este patrón de interferencia puede ser constructivo o destructivo y la imagen que se

obtiene se llama interferograma [22].

El interferómetro es un instrumento que emplea la interferencia de las ondas de luz para medir con gran precisión longitudes de onda de la luz misma [22]. Existen diversos tipos de interferómetros, éstos se clasifican por:

1. Interferómetros de División de Frente de Onda, entre los cuales se encuentra:
    - Experimento de Young
    - Espejo doble y el prisma doble de Fresnel
    - Espejo de Lloyd
2. Interferómetros de División de Amplitud, entre los cuales destacan:
    - Tipo Mach-Zehnder
    - Michelson
    - Fabry-Perot
    - Sagnac
    - Pohl
3. División de amplitud por transmisión-reflexión, mencionamos:
    - Interferómetro tipo Twyman-Green
    - Interferómetro tipo Mach-Zehnder
    - Interferómetro tipo Fizeau
    - Interferómetro cíclico tipo Sagnac
    - Patrones de interferencia de frentes aberrados observados en Twyman-Green
    - División por birrefringencia
4. Interferómetros de trayecto común como:
    - Interferencia por esparcimiento (scattering)

- Interferómetro con esparcimiento
- Interferómetro de trayectoria común con difracción.

5. Interferómetros holográficos

Sin embargo, todos ellos tienen en común el patrón de interferencia óptica; es decir, a grandes rasgos, el principio de un interferómetro consiste en un par de haces luminosos, los cuales toman dos rutas distintas en su recorrido, estas trayectorias son determinadas por un arreglo de espejos, los cuales desembocan en un patrón de interferencia [22].

2.2. Técnicas de moiré

El efecto moiré se produce cuando percibimos la interferencia de dos rejillas que están relacionadas con un ángulos o presentan tamaños diferentes. Dicho en otras palabras, se produce cuando dos patrones o formas distintas se superponen uno sobre otro formando un efecto visual.

Las técnicas de moiré se remontan a muchos años atrás y actualmente se utilizaban debido a sus múltiples aplicaciones, ya que se pueden resolver problemas en óptica, movimiento de ondas, análisis de esfuerzos, criptografía, matemáticas y psicología de percepción, entre otras. Trollenar en 1945 [6], menciona que al estar estudiando este fenómeno descubrió que las franjas de moiré son en verdad amplificadoras de desplazamientos, y que podrían dar una alta sensibilidad a mediciones de movimientos relativos. Hu afirmó que las técnicas de moiré son las técnicas perfilométricas que tienen gran utilidad debido principalmente, por su simplicidad y rapidez de medición, y por esto ha sido centro de frecuentes estudios [20].

Existen diversas técnicas que utilizan el fenómeno de moiré, en función de si se pretende estudiar movimientos en el plano o fuera de éste, o dependiendo del tipo de elemento a estudiar.

La técnica de moiré consiste en la proyección o incorporación de unas franjas a un

elemento y comparar la imagen en estado de reposo o en estado de deformación. Al realizar esto, aparece un patrón de moiré, en donde se observan franjas que dan información del estado de deformación en el sólido, pudiéndose utilizar también para el modelado en tres dimensiones del elemento , incluso, poder ver la simetría de objetos.

La base para la técnica de moiré es la superposición de dos rejillas de franjas paralelas que son iluminadas por un haz coherente. El estado de deformación se estudia a través de una rejilla, la cual es llamada "*Rejilla modelo*" y actúa como el elemento de referencia de los cambios de la superficie. La otra rejilla es llamada "*Rejilla maestro*" que es la que nos ayudará a hacer el efecto moiré.

Para obtener la información ya sea de los desplazamientos o de las deformaciones en la superficie es necesario conocer la relación entre:

- La rejilla modelo
- La rejilla maestro
- El sistema de observación
- La superficie en estudio

De acuerdo con la técnica que se esté utilizando, la rejilla modelo puede ser grabada en la superficie o puede ser externa. Los cambios en dicha rejilla proporcionan la información necesaria para determinar los desplazamientos, las tensiones y/o deformaciones de las superficies. En consecuencia, la relación entre la rejilla modelo y la rejilla maestro depende del método particular utilizado. Existen 3 métodos en los que las técnicas de moiré se pueden clasificar:

Método moiré intrínseco: Es el método que proporciona desplazamientos de puntos de una superficie con respecto a la posición inicial. En este método, la rejilla se fija directamente a la superficie estudiada. Las deformaciones de la rejilla modelo

proporcionan información relativa de los desplazamientos y deformaciones de la superficie.

Método proyección moiré: Este método proporciona información de desplazamiento o deformaciones de puntos de la superficie utilizando una rejilla de referencia, que sería la rejilla modelo. Dicha rejilla es independiente del objeto o superficie a analizar.

Método de moiré de reflexión: Da información de las pendientes de la superficie con respecto a un estado de referencia.

La relación entre la rejilla modelo y la rejilla maestro en el plano de observación dependen sólo de sus geometrías relativas. Como ya se mencionó, las técnicas moiré son un conjunto de procedimientos basados en el fenómeno físico del efecto moiré, dichas técnicas son estereométricas de análisis tridimensional de un objeto a partir de una imagen bidimensional. Las técnicas de moiré han sido desarrolladas, mejoradas y aplicadas en diversos ámbitos de la ciencia. Así, existe el moiré geométrico, moiré interferométrico, moiré por reflexión, moiré por sombra y moiré por proyección. Los últimos dos nos ayudarán a la reconstrucción de objetos en 3D.

2.3. Moiré interferométrico

La interferometría de moiré se utiliza cuando se requiere medir desplazamientos en el plano, en superficies, componentes, etc. En esta técnica se tiene la superposición de una rejilla espécimen, es decir, grabada en el objeto de interés y una rejilla virtual como se observa en la figura 2.2.

Entre las características de la interferometría de moiré destacan las siguientes:

- Se pueden medir desplazamientos en plano hasta con una sensibilidad máxima de 4 franjas$/\mu m$.
- Es una técnica en tiempo real y de campo completo.

- Tiene alta razón de señal a ruido: los patrones de franjas tienen alto contraste y excelente visibilidad.
- Rango dinámico grande: el método es compatible con un gran rango de desplazamientos, esfuerzos y gradientes

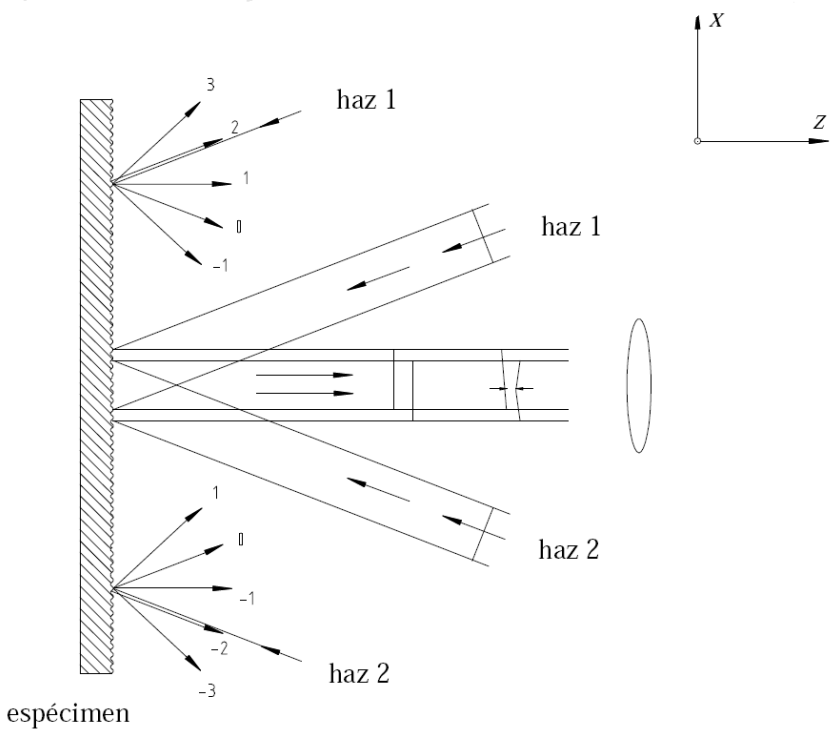


Figura 2.2: Esquema de interferometría de moiré

2.4. Moiré geométrico

Si lo que se desea es información sobre los desplazamientos ocurridos en el plano, se debe de comparar un patrón de referencia con un patrón de franjas unido a la superficie. Esta técnica es conocida como moiré geométrico.

En la figura 2.3 se observa cómo la luz atraviesa una primera rejilla de referencia y, en seguida, una rejilla adherida a la superficie, la cual al deformarse creará unas interferencias constructivas y/o destructivas, generando franjas de moiré.

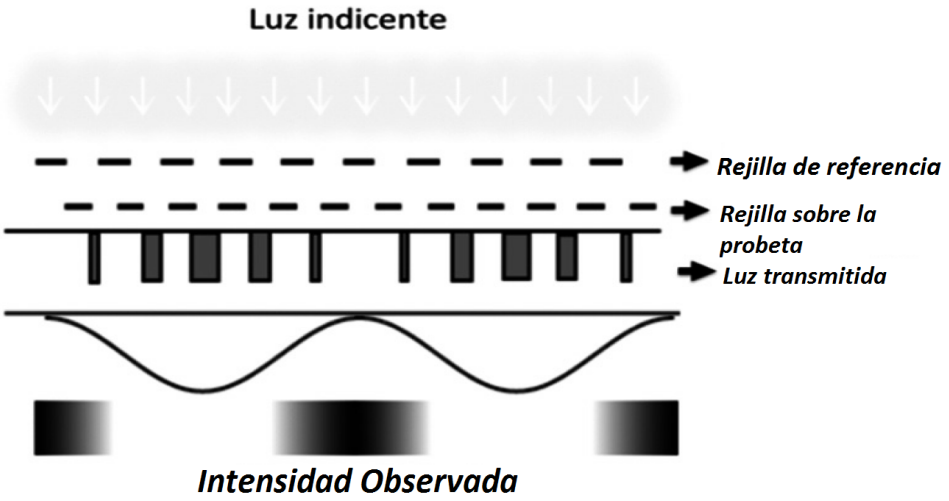


Figura 2.3: Esquema de moiré geométrico: para desplazamiento en una sola dirección.

Denotando a U como el desplazamiento en el plano medido, a N como el orden de franja de moiré y a p como el periodo de la rejilla, podemos relacionarlas de la siguiente manera:

$$U = Np \tag{2.1}$$

Podemos definir la deformación unitaria como la variación del desplazamiento de un punto con respecto a la posición inicial. Así tenemos que:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \tag{2.2}$$

donde ε_x es la deformación unitaria, U es la longitud final y x la longitud inicial.

Conociendo la relación entre el orden de franja (N) y el desplazamiento (Np), la deformación unitaria queda de la siguiente manera:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (Np)}{\partial x} = p\frac{\partial N}{\partial x} \tag{2.3}$$

Este resultado permite calcular la deformación unitaria y, a partir de ésta, la tensión a lo largo del eje perpendicular a las líneas de la rejilla.

Si lo que se desea es conocer los desplazamientos fuera de plano, la rejilla que se compara con la de referencia no está unida a la superficie, sino que ésta es proyectada. En este grupo, se enmarcan técnicas como moiré por sombra, o proyección de franjas [2].

2.5. Moiré de reflexión

El método de moiré de reflexión utiliza la superposición de dos imágenes de rejillas formados por un haz reflejado desde la superficie bajo prueba. La suavidad de la superficie S hace posible la imagen de la rejilla sobre la imagen del espejo, la rejilla G por medio de la lente L, como se muestra en la Figura 2.4. La primera imagen corresponde a la superficie en su estado de referencia. La segunda imagen da la variación de la superficie desde el estado de referencia.

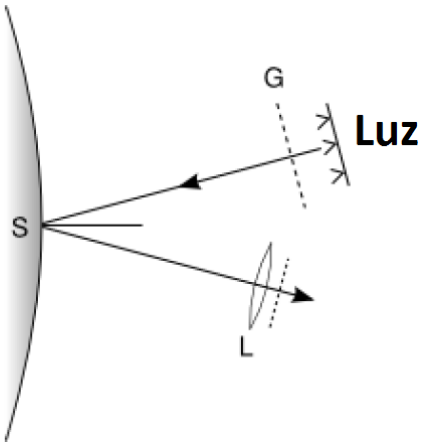


Figura 2.4: Esquema de moiré de reflexión

El resultado de las rejillas y curvaturas en todos los puntos de la superficie se verá reflejado en los desplazamientos fuera del plano. Este método puede ser aplicado en superficies reflejantes como espejos.

2.6. Moiré de Sombra

La técnica de moiré de sombra se aplicó con Weller y Shepherd, quienes fueron los primeros en utilizar moiré de sombra: colocaron una rejilla delante de un objeto cuya superficie no fuera plana, esto para determinar la forma del mismo, observaron que sobre él se veían las franjas de moiré. Moiré de sombra también se ha utilizado para comparar un objeto con otro deformado. La técnica de moiré de sombra ha sido recomendada en el área de salud para la detección de escoliosis en la población, usándose con este fin en Japón, Canadá y Singapore; así como para disminuir el número de exploraciones radiológicas en los controles periódicos de las escoliosis [27].

La técnica de moiré por sombra utiliza una sola rejilla, la cual es iluminada frente al objeto y produce una sombra sobre el mismo, al observar a éste a través de la rejilla se forman las franjas moiré por la superposición de la rejilla y su sombra sobre el objeto. Este patrón de franjas representa la elevación fuera del plano de la superficie y es esencialmente un mapa de contornos del objeto estudiado.

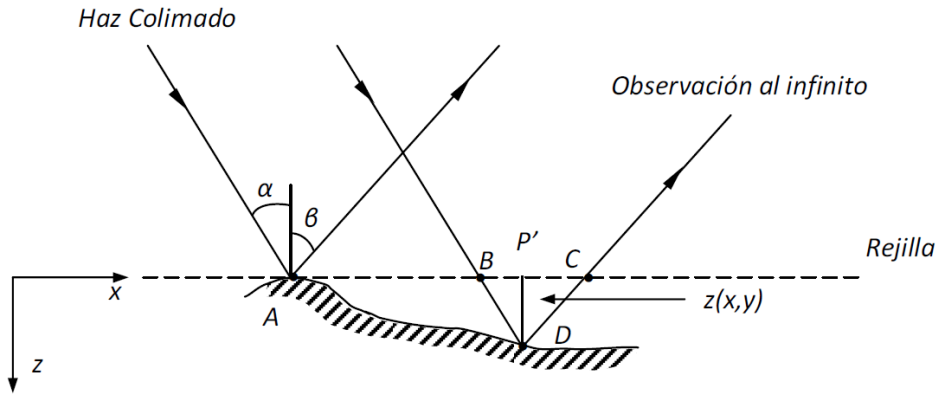
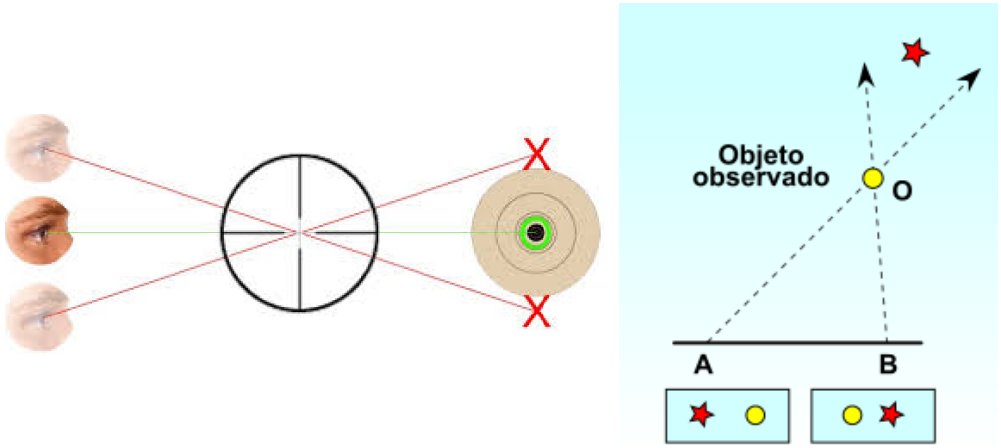


Figura 2.5: Geometría de la técnica de moiré de sombra

La técnica de moiré de sombra se basa en la noción de la medición del paralaje, éste es el efecto por el cual la posición o la dirección de un objeto parece diferir cuando se observa desde diferentes posiciones, por ejemplo, a través de una lente de una cámara. El paralaje es el principio fundamental en el que se basa la visión humana,

y es por ello que tenemos dos ojos. También se conoce como triangulación dado que la información de profundidad resulta de ecuaciones básicas de trigonometría. En las siguientes imágenes se muestra gráficamente a lo que nos referimos con paralaje.

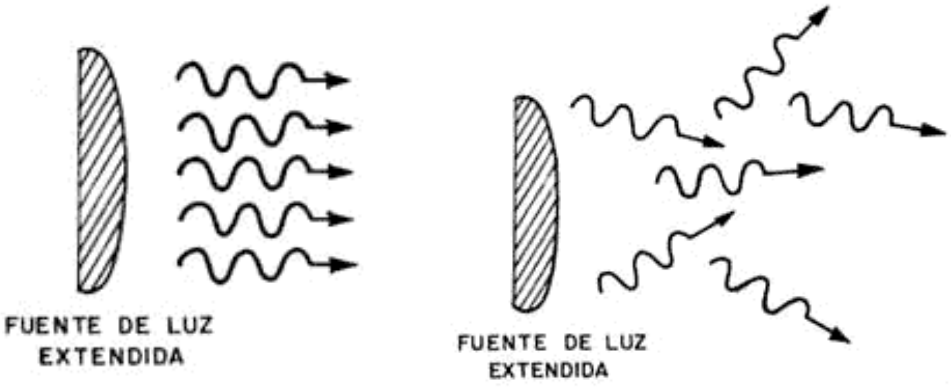


(a) Principio en que se basa la vista humana (b) Paralaje

Figura 2.6: Imágenes donde se explica el paralaje.

2.6.1. Técnica de moiré de sombra

En moiré de sombra se puede utilizar luz incoherente o coherente.



(a) Emisión coherente (b) Emisión incoherente

Figura 2.7: Luz para moiré de sombra.

En las imágenes anteriores se muestra como son dirigidos los rayos de luz en cada

tipo de emisión de éstos.

2.6.2. Aplicaciones

Moiré de sombra aplicado en el diagnóstico clínico

El método moiré de sombra tiene las ventajas de ser un método no invasivo que no produce radiación, como ocurre en los exámenes de rayos X. Otras áreas del cuerpo humano también se han estudiado mediante el uso de moiré de sombra, tales como el plantar arco, miembros inferiores y la región escapular. En los últimos años, la técnica de moiré ha aparecido con mayor frecuencia en la literatura científica, especialmente en relación a las evaluaciones posturales. Esto se explica principalmente por la evolución de la corriente tecnológica en el área de procesamiento de imágenes, que también permite el uso de la técnica de moiré por sombra en áreas topográficas más delicadas y complejas del cuerpo humano, como algunos huesos, utilizando métodos de moiré [28].

El uso de moiré de sombra en el análisis topográfico del cuerpo humano es posible porque es capaz de identificar indirectamente lugares con deformidades estructurales bajo la piel a través de la forma del área de superficie [28]. Moiré de sombra tiene, por lo tanto, muchas aplicaciones posibles y usos para los profesionales de la salud en la evaluación clínica de los pacientes y para los investigadores y profesores en sus actividades académicas con los estudiantes.

2.7. Moiré de Proyección

2.7.1. Introducción

El primer uso de moiré de proyección para la determinación de la topografía de superficies fue presentado por Rowe y Welford en 1967. Es una técnica conveniente para contornear objetos que son demasiado gruesos como para ser medidos por medio de la interferometría estándar. Las técnicas de moiré por proyección se introdujeron por

Brooks y Helfinger en 1969 para medición óptica y medición de la deformación. Hasta 1970, los avances en moiré por proyección fueron técnicas principalmente usadas en el análisis de tensión sobre objetos [21].

2.7.2. Técnica de moiré por proyección

La técnica de moiré de proyección también puede ser implementada proyectando franjas de interferencia o una rejilla sobre un objeto y luego observando a través de una segunda rejilla ubicada en frente del observador. Como se muestra en la figura 2.8.

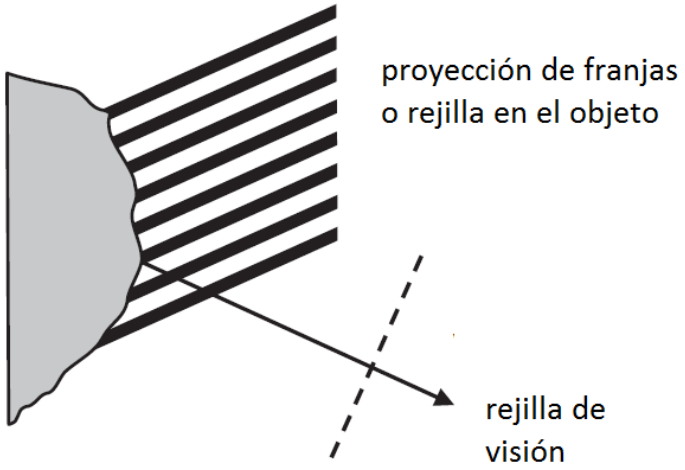


Figura 2.8: Esquema de la técnica de moiré por proyección

En la topografía por proyección moiré se utilizan generalmente dos tipos de arreglo físico, el de ejes ópticos cruzados y el de ejes ópticos paralelos, ambos tienen sus ventajas y desventajas, pero proporcionan flexibilidad al momento de implementarlos.

En el caso del arreglo de ejes ópticos cruzados, el eje óptico del proyector y el de la cámara inciden en el mismo plano e intersecan algún punto cerca del centro del objeto. Este arreglo es fácil de construir, ya que tanto el patrón de rejilla como el sensor óptico pueden ser colocados sobre el eje de la cámara y del proyector respectivamente, pero solo da contornos planos en el caso de utilizar óptica tele-céntrica.

Para el arreglo de ejes ópticos paralelos se tiene que los ejes ópticos del proyector y de la cámara inciden en el mismo plano y son paralelos entre si; en este caso, al igual

que el anterior, el eje de la cámara tiene que ser completamente perpendicular al plano de referencia. La geometría de ejes ópticos paralelos ofrece contornos planos, pero suele ser algo rara ya que el patrón de deformación tiene que ser colocado sobre el eje de proyección, pero suficientemente alejado del plano de referencia para asegurar que dicho patrón sea proyectado dentro del área de visión de la cámara.

La orientación del plano de referencia puede ser cambiada arbitrariamente usando diferentes periodos de rejilla para observar el objeto.

Se examinan dos casos:

- Los ejes ópticos de la proyección y de la observación son paralelos.
- Los ejes ópticos están inclinados uno con respecto al otro.

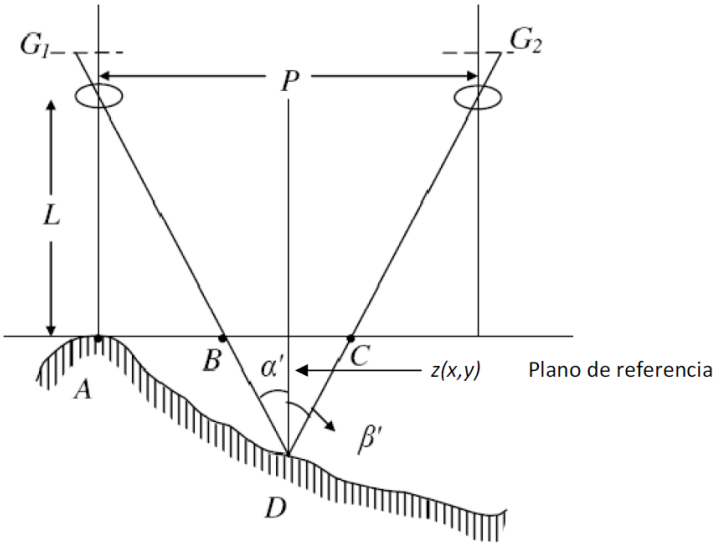


Figura 2.9: Geometría de la técnica de moiré por proyección

De la figura 2.9 se forma la imagen de la rejilla G_1 de periodo a en el plano de referencia donde su periodo es Ma, siendo M la amplificación del sistema de proyección. Si la superficie del objeto fuera plana y localizada en este plano de referencia, la rejilla proyectada debería tener un periodo constante. Al final se forma la imagen de esta rejilla en la rejilla de referencia G_2

Si los sistemas de proyección y de formación de imágenes son idénticos el periodo de la rejilla imagen será igual al de G_2 y los elementos de las rejillas estarán paralelos

entre sí dada la alineación inicial. Entonces no se forma un patrón de moiré. Sin embargo, si la superficie es curva, el periodo de la rejilla proyectada en la superficie varía y se formará un patrón de moiré.

El intervalo de contorno está dado por la ecuación

$$c = \frac{p}{\tan\alpha + \tan\beta} \tag{2.4}$$

sustituyendo a p por $d = \frac{p}{\cos a}$ donde a es el ángulo de iluminación. Cuando la rejilla cuyo espaciado es p es perpendicular a la dirección de iluminación, tenemos que el periodo es $d = \frac{p}{\cos a}$ en el plano.

2.7.3. Comparación entre moiré de sombra y moiré de proyección

Moiré de sombra	Moiré de proyección
1 rejilla	2 rejillas
Es mas simple	Su arreglo es más complicado
Dificultad para conseguir una sombra nítida	Dificultad para plasmar una de las rejillas sobre el objeto para lograr el efecto moiré
Imposibilidad para distinguir la altura absoluta en dos curvas de nivel si éstas no son contínuas	Se tiene un mejor control sobre las rejillas por que ambas son creadas
Se usa mucho para estudios sobre personas	Su mayor uso es sobre objetos
El posicionamiento del paciente puede ser una fuente de error	Una fuente de error es que no se genere adecuadamente el patrón de moiré

Tabla 2.2: Cuadro comparativo entre la técnica de moiré y la técnica de proyección

Como ya se mencionó, las técnicas de moiré presentan ventajas con respecto a los dispositivos de contacto puesto que son técnicas ópticas no invasivas y no destructivas, además de que son multidisciplinarias, es decir, pueden ser utilizadas en diferentes áreas.

Las desventajas de las técnicas de moiré se presentan en superficies con pendientes pronunciadas o con discontinuidades en su topografía, ya que esto causa que se pier-

da la continuidad de las rejillas reflejadas en los objetos. Dicho problema hace difícil la obtención de la fase de las franjas proyectadas. Sin embargo, para un estudio general, las técnicas de moiré pueden ser de gran ayuda, ya que son de un bajo costo, simples y los materiales que requerimos para realizarlas son muy sencillos de obtener.

La técnica de moiré de sombra permite hacer una valoración visual de la asimetría de la superficie de una forma más precisa que la valoración visual. Es un método que mide las asimetrías de la superficie, en el caso de las deformidades en la espalda muestra las anomalías de las costillas y los músculos; consiguiendo identificar el $95{,}7\,\%$ de las curvas [27]. Este sistema tiene las siguientes ventajas: muestra una imagen o contornografía muy útil para revisiones longitudinales y los datos obtenidos se pueden almacenar para futuros análisis. Aunque para estudios topográficos en el área de la salud depende mucho de la complexión de la persona puesto que las técnicas contornean la superficie, así pues, nos darán información equivocada, ya que medirá la superficie de la persona, mas no la postura, o huesos. Esto sucede con personas con sobrepeso o demasiado delgadas.

CAPÍTULO

3 Modelación matemática del efecto moiré

El patrón o efecto moiré, pronunciado muaré en castellano o moiré en francés, es una interferencia que se genera cuando se superponen dos rejillas de líneas o patrones geométricos, ya sea con un determinado ángulo de inclinación o cuando éstas tienen un tamaño distinto. El nombre proviene de un tejido de seda francés llamado moiré porque, al estar formado por patrones de líneas, daba la sensación de que se formaban olas de mar. Este efecto lo podemos observar en las barras que se observan en la televisión, al tomar una foto sobre algún tejido, en enrejados de protección, etc.

(a) Reja de protección (b) Tela (c) Puertas

Figura 3.1: Ejemplos en donde aparece el efecto moiré

El uso de moiré para las pruebas de sensibilidad fue introducida por Lord Rayleigh en 1874, quien observó el efecto moiré entre dos rejillas idénticas [6]. Podemos observar

que hay un cambio del patrón de moiré cuando cambiamos de posición las rejillas superpuestas. Una conclusión lógica es que el patrón de moiré es una especie de “lupa movil” que pudiera utilizarse para dar una medida de alta sensibilidad de movimiento relativo. Esta idea fue descrita por D. Trollenar en 1945, y fue empleado inmediatamente en el estudio de la deformación, el movimiento y la tensión por varios investigadores como Weller y Shepard en 1948 y Dantu en 1954 [5].

Con el tiempo el estudio del efecto de moiré ha ido mejorando, actualmente se tienen diferentes técnicas que ayudan a la determinación precisa de los movimientos traslacional, rotacional y fuera del plano, las cuales se utilizan mucho en aplicaciones de visión artificial para tareas de medición especializadas en ingeniería. Algunos ejemplos de las aplicaciones son la medición de la forma de un avión, determinar si los componentes son los adecuados en una placa de circuito; también sirve para estudiar modos de vibración de álabes de una turbina, para el control de la alineación de los segmentos en un gran telescopio segmentado, para hacer réplicas de esculturas históricas, además de la creación de películas animadas o juegos, el estudio de la simetría en el cuerpo humano entre otras aplicaciones más.

3.1. Reseña Histórica

Lord Rayleigh fue un físico y profesor universitario británico galardonado con el Premio Nobel de Física en 1904, él notó por primera vez el fenómeno de las franjas de moiré. Righi fue un físico italiano que en 1887 se dio cuenta del desplazamiento relativo al utilizar dos rejillas, así pudo determinar dicho desplazamiento mediante la observación del movimiento de las franjas que se generan en los objetos por el efecto de dichas rejillas superpuestas. El siguiente avance significativo en el uso del patrón moiré fue presentado por Weller y Shepherd que en 1948 usaron el efecto de moiré para medir la deformación de un objeto bajo tensión aplicada, consultando las diferencias en un patrón de rejilla antes y después de la tensión aplicada. No hubo una teoría rigurosa de las franjas de moiré hasta mediados de los años cincuenta cuando Ligtenberg en

1955 y Guild entre 1956 y 1960 explican dicho efecto para el análisis de esfuerzos por los contornos que se dibujan en alguna de las rejillas, es decir, existe un mapeo de la superficie y puede ser medida por medio del desplazamiento de un punto sobre la superficie. El patrón de moiré ha sido observado durante muchos años atrás. Libros sobre este tema se han escrito por Gremio (1956, 1960), Theocaris (1969), y Durelli y Parques (1970) [21], etc.

3.2. Funciones periódicas

Una función $f(x)$ se dice que es periódica con periodo $T \neq 0$ cuando $f(x) = f(x+T)$, $\forall x$. Si se conoce $f(x)$ en el intervalo $[0, T]$ (su ciclo), se le conoce en toda la recta real. Al valor mínimo, mayor que cero, de la constante T que cumple lo anterior se le llama el periodo fundamental (o simplemente periodo) de la función.[31]

A veces, se prefiere trabajar en el intervalo $[0, 2\pi]$. Para ello hay que realizar un cambio de escala tal que $t = \frac{2\pi x}{T}$. Con este cambio, todas las funciones periódicas pueden tener un periodo 2π.

Las funciones trigonométricas son ejemplos sencillos de una función periódica, las cuales son funciones cuyos valores son extensiones del concepto de razón trigonométrica en un triángulo rectángulo trazado en una circunferencia unitaria (de radio unidad). La base para las funciones trigonométricas son las funciones periódicas seno y coseno.

Para definir los valores de estas funciones para valores comprendidos entre 0 y 2π, se utilizará entonces una circunferencia unitaria, centrada en el origen de coordenadas del plano cartesiano. Se definirán las funciones trigonométricas seno y coseno como la abscisa y la ordenada, respectivamente, de un punto P perteneciente a la circunferencia, siendo α el ángulo, medido en radianes, entre el semieje positivo x y el segmento que une el origen con P [34].

Función Seno: La función seno asocia a cada número real x, el valor del seno del ángulo cuya medida en radianes es x

Dominio	$\mathbb{R}$
Recorrido	$(-1,1)$
Periodo	2π
Continuidad	$\forall x \epsilon \mathbb{R}$
Creciente	$\ldots \bigcup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \bigcup (\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}) \bigcup \ldots$
Decreciente	$\ldots \bigcup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \bigcup (\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}) \bigcup \ldots$
Máximos	$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \epsilon \mathbb{Z}$
Mínimos	$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \epsilon \mathbb{Z}$
Tipo	Función par: sen(-x)=-sen(x)
Cortes en el eje x	$x = \{0 + k\pi\}$ con $k \epsilon \mathbb{Z}$

Tabla 3.1: Características de la función Seno

Función Coseno La función coseno asocia a cada número real, x, el valor del coseno del ángulo cuya medida en radianes es x.

Dominio	$\mathbb{R}$
Recorrido	$(-1,1)$
Periodo	2π
Continuidad	$\forall x \epsilon \mathbb{R}$
Creciente	$\ldots \bigcup (-\pi, 0) \bigcup (\pi, 2\pi) \bigcup \ldots$
Decreciente	$\ldots \bigcup (0, \pi) \bigcup (2\pi, 3\pi) \bigcup \ldots$
Máximos	$2k\pi$ con $k \epsilon \mathbb{Z}$
Mínimos	$pi \cdot (2k+1)$ con $k \epsilon \mathbb{Z}$
Tipo	Función par: cos(-x)=cos(x)
Cortes en el eje x	$x = \{\frac{\pi}{2} + k\}$ con $k \epsilon \mathbb{Z}$

Tabla 3.2: Características de la función Coseno

La curva de la función coseno es la misma curva de la de la función seno, solo que desplazada $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda, dando lugar a la siguiente expresión:

$$\cos \alpha = \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)$$

Estas funciones son periódicas, como ya lo habíamos mencionado, así que las familias de dichas funciones también son periódicas y tienen la forma $A \sin(Bx)$ o $A \cos(Bx)$, donde A y B son constantes que describen la amplitud de la onda y su periodo. Las características de estas funciones son:

Amplitud (A): Es el valor máximo de un movimiento o señal. Se trata de la distancia que hay desde el punto de equilibrio (cero) hasta uno de los extremos del

movimiento, puede considerarse el punto positivo o el negativo.

Periodo (T): El tiempo que tarda en reproducirse una oscilación o ciclo; la unidad de medida.

Frecuencia (f): El número de ciclos realizados por unidad de tiempo. La frecuencia se puede calcular como la inversa del periodo.

$$f = \frac{1}{T}$$

3.3. Modelo para el efecto de moiré

Para crear un efecto moiré se requiere construir un patrón geométrico, dicho patrón es obtenido por medio del siguiente modelo matemático:

$$f(x,y) = a + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\phi(x,y)) \tag{3.1}$$

donde $\phi(x,y)$ es la función que tiene la información que describe la forma básica de las líneas de rejilla. Los coeficientes b determinan el perfil de las líneas de rejilla como onda cuadrada, triangular, sinusoidal, etc., y a solo desplazará nuestra función en el eje 'z'. A la función (3.1) se le conoce como **función de transmisión de intensidad** [21].

El análisis se hará para patrones geométricos arbitrarios. Para construir un efecto de moiré, necesitamos dos patrones geométricos:

$$f_1(x,y) = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{1n} \cos(n\phi_1(x,y)) \tag{3.2}$$

$$f_2(x,y) = a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \cos(n\phi_2(x,y)) \tag{3.3}$$

que al superponerlos de forma mecánica, podemos observar el patrón de moiré. Veamos que si construimos el efecto moiré con nuestros patrones geométricos, por ejemplo dos rejillas idénticas de franjas paralelas, cada una de un estilo como el mostrado

en la figura (3.2), y giramos alguna de ellas por un pequeño ángulo respecto a la otra rejilla, observamos que se crean dos tipos de franjas, una obscura y otra iluminada o clara, la franja obscura se produce cuando las líneas obscuras están desfasadas por un medio del periodo, y la franja brillante se produce cuando segmentos de líneas oscuras de la primera rejilla comienzan en donde terminan los segmentos de las líneas obscuras de la segunda rejilla. Si se aumenta el ángulo entre las dos rejillas, la separación entre las franjas brillantes y oscuras disminuye [20]. Dicho efecto lo podemos observar en la figura (3.3).

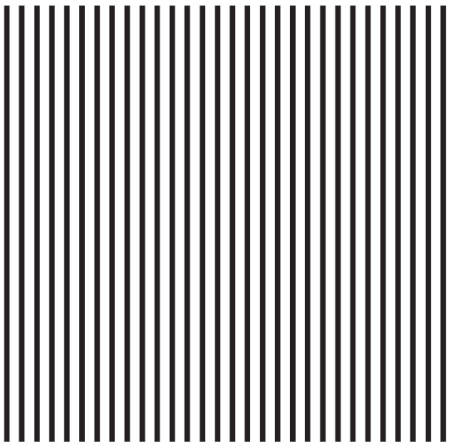


Figura 3.2: Patrón geométrico de líneas

En las regiones en que las dos ondas están en fase, ocurre una interferencia constructiva dando origen a franjas claras, y donde ellas están fuera de fase, se generan franjas oscuras, debido a la interferencia destructiva. Esta aproximación es derivada de la interferencia entre los patrones de franjas a través del uso de relaciones usualmente conocidas como modelos de transición inicial. Si las rejillas no son idénticas y el patrón geométrico no son líneas rectas, el patrón de moiré no generará franjas equidistantes rectas y será más complicado su manejo.

Las franjas de moiré de excelente visibilidad surgen cuando están presentes las siguientes condiciones:

- El ancho de las barras y los espacios en la mallas son iguales.
- La malla es bien definida a través de los contornos de las barras.

- El ángulo de intersección entre la fuente de luz y la vista del observador es pequeño.

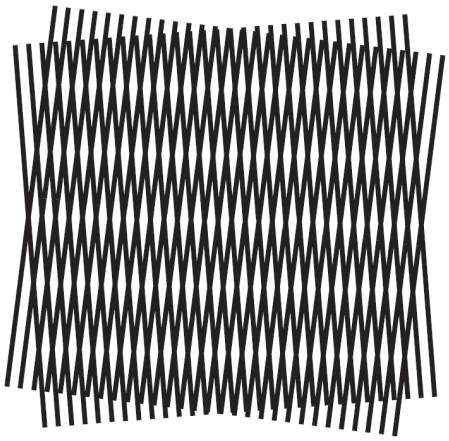


Figura 3.3: Patrón de moiré generado por rejillas de líneas paralelas

La función de transmisión de intensidad resultante de los dos patrones geométricos, para la construcción del efecto de moiré, está dada por el producto.

$$f(x,y) = f_1(x,y)f_2(x,y) = a_1a_2 + a_1\sum_{m=1}^{\infty} b_{2m}\cos(m\phi_2(x,y)) + a_2\sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}\cos(n\phi_1(x,y)) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}\cos(n\phi_1(x,y))b_{2m}\cos(m\phi_2(x,y)) \quad (3.4)$$

El término a_1a_2 tiene frecuencia uno, $a_1\sum_{m=1}^{\infty} b_{2m}\cos(m\phi_2(x,y))$ y $a_2\sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}$ $\cos(n\phi_1(x,y))$ representan dos conjuntos de patrones con la misma frecuencia que las rejillas originales y el último término $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}\cos(n\phi_1(x,y))b_{2m}\cos(m\phi_2(x,y))$ proporciona información sobre el nuevo patrón generado, que corresponde al efecto de moiré.

Proposición 1 *Probar que* $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[b_{1n}\cos(n\phi_1(x,y))b_{2m}\cos(m\phi_2(x,y))]$ *puede ser reescrito como:*

$$\frac{1}{2}b_{11}b_{21}(\cos(\phi_1(x,y)-\phi_2(x,y)) + \frac{1}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} b_{1n}b_{2m}(\cos(n\phi_1(x,y)-m\phi_2(x,y))) \quad \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}b_{2m}(\cos(n\phi_1(x,y)+m\phi_2(x,y))) \quad (3.5)$$

Demostración.

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[b_{1n}\cos(n\phi_1(x,y))b_{2m}\cos(m\phi_2(x,y))] \tag{3.6a}$$

multiplicando por el neutro multiplicativo

$$\begin{aligned}&= \frac{2}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[b_{1n}b_{2m}\cos(n\phi_1(x,y))\cos(m\phi_2(x,y))]\\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[b_{1n}b_{2m}2\cos(n\phi_1(x,y))\cos(m\phi_2(x,y))]\end{aligned} \tag{3.6b}$$

Agregando el neutro aditivo $\sin(n\phi_1(x,y))\sin(m\phi_2(x,y)) - \sin(n\phi_1(x,y))\sin(m\phi_2(x,y))$ tenemos:

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[b_{1n}b_{2m}2\cos(n\phi_1(x,y))\cos(m\phi_2(x,y)) - \sin(n\phi_1(x,y))\sin(m\phi_2(x,y))\\ &+ \sin(n\phi_1(x,y))\sin(m\phi_2(x,y))]\\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[b_{1n}b_{2m}\cos(n\phi_1(x,y))\cos(m\phi_2(x,y)) + \cos(n\phi_1(x,y))\cos(m\phi_2(x,y))\\ &- \sin(n\phi_1(x,y))\sin(m\phi_2(x,y)) + \sin(n\phi_1(x,y))\sin(m\phi_2(x,y))]\end{aligned} \tag{3.6c}$$

Asociando

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[b_{1n}b_{2m}\langle\{(\cos(n\phi_1(x,y))\cos(m\phi_2(x,y)) - \sin(n\phi_1(x,y))\sin(m\phi_2(x,y)))\}\\ &+ \{(\cos(n\phi_1(x,y))\cos(m\phi_2(x,y)) + \sin(n\phi_1(x,y))\sin(m\phi_2(x,y)))\}\rangle]\\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}b_{1n}b_{2m}(\cos(n\phi_1(x,y))\cos(m\phi_2(x,y)) - \sin(n\phi_1(x,y))\sin(m\phi_2(x,y)))\\ &+ \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[b_{1n}b_{2m}(\cos(n\phi_1(x,y))\cos(m\phi_2(x,y)) + \sin(n\phi_1(x,y))\sin(m\phi_2(x,y)))]\end{aligned} \tag{3.6d}$$

Usando propiedades trigonométricas

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}b_{2m}(\cos(n\phi_1(x,y)+m\phi_2(x,y))) + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}b_{2m}(\cos(n\phi_1(x,y)-m\phi_2(x,y))) \\
&= \mathbf{\frac{1}{2}b_{11}b_{21}(\cos(\phi_1(x,y)-\phi_2(x,y))) + \frac{1}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} b_{1n}b_{2m}(\cos(n\phi_1(x,y)-m\phi_2(x,y)))} \\
&+\mathbf{\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}b_{2m}(\cos(n\phi_1(x,y)+m\phi_2(x,y)))} \square
\end{aligned}
\tag{3.6e}
$$

En el primer término $\frac{1}{2}b_{11}b_{21}(\cos(\phi_1(x,y)-\phi_2(x,y))$ el argumento muestra la diferencia entre las componentes de las 2 rejillas y representa la componente fundamental del patrón de moiré y los términos $\frac{1}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} b_{1n}b_{2m} \quad (\cos(n\phi_1(x,y)-m\phi_2(x,y)))$ y $\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}b_{2m}(\cos(n\phi_1(x,y)\ +m\phi_2(x,y)))$ tienen componentes de alta frecuencia que corresponden a perfiles no-sinusoidales. La ecuación (3.6e) puede ser usada para predecir el patrón de moiré.

Suponiendo que dos rejillas están orientadas con un ángulo 2α entre ellas y con el eje 'y' bisectando este ángulo, las dos funciones de rejilla $\phi_1(x,y)$ y $\phi_2(x,y)$ puede escribirse como

$$\phi_1(x,y) = \frac{2\pi}{\lambda_1}(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$$

y

$$\phi_2(x,y) = \frac{2\pi}{\lambda_2}(x\cos\alpha - y\sin\alpha)$$

en donde λ_1 y λ_2 es la separación de línea en cada rejilla respectivamente, puesto que nos interesa saber la diferencia entre ambos patrones.

De la ecuación (3.6e), se tiene que el patrón de moiré puede ser escrito como:

$$I = A + B\cos(\phi_1 - \phi_2) \tag{3.7}$$

Proposición 2 *Mostrar que* $\phi_1(x,y) - \phi_2(x,y) = \frac{2\pi}{\lambda_{beat}}x\cos\alpha + \frac{4\pi}{\bar{\lambda}}y\sin\alpha$ *donde* $\lambda_{beat} = \frac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}$ *y* $\bar{\lambda} = \frac{2\lambda_2\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_1}$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\phi_1(x,y) - \phi_2(x,y) &= \frac{2\pi}{\lambda_1}(x\cos\alpha + y\sin\alpha) - \frac{2\pi}{\lambda_2}(x\cos\alpha + y\sin\alpha) \\
&= \frac{2\pi(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}{\lambda_1} - \frac{2\pi(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}{\lambda_2} \\
&= \frac{\lambda_2(2\pi x\cos\alpha + 2\pi y\sin\alpha) - \lambda_1(2\pi x\cos\alpha - 2\pi y\sin\alpha)}{\lambda_1\lambda_2} \\
&= \frac{\lambda_2 2\pi x\cos\alpha + \lambda_2 2\pi y\sin\alpha - \lambda_1 2\pi x\cos\alpha + \lambda_1 2\pi y\sin\alpha)}{\lambda_1\lambda_2} \\
&= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2\lambda_1} 2\pi x\cos\alpha + \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2\lambda_1} 2\pi y\sin\alpha \\
&= \frac{2\pi}{\lambda_{beat}} x\cos\alpha + \frac{4\pi}{\bar{\lambda}} y\sin\alpha
\end{aligned} \tag{3.8}$$

en donde $\lambda_{beat} = \frac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$ es 'beat' de longitud de onda entre las dos rejillas y $\bar{\lambda} = \frac{2\lambda_2\lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}$ es la distancia promedio entre líneas.

□

Entonces para tener franjas brillantes en el efecto de moiré se debe satisfacer la siguiente condición:

$$\phi_1(x,y) - \phi_2(x,y) = 2\pi\left(\frac{1}{\lambda_{beat}} x\cos\alpha + \frac{1}{\bar{\lambda}} y\sin\alpha\right) = 2\pi M \tag{3.9}$$

donde M representa el orden de franja.

3.3.1. Análisis de casos para observar el efecto moiré

Podemos considerar tres casos diferentes para observar el efecto de moiré.

Caso 1: Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ de la ecuación (3.9) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2\lambda_1}x\cos\alpha+\frac{\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_2\lambda_1}y\sin\alpha &= \frac{\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_2\lambda_1}y\sin\alpha \\ &= \frac{2\lambda}{\lambda^2}y\sin\alpha = M,\end{aligned} \tag{3.10}$$

es decir, el centro de las franjas esta dado por:

$$M\lambda = 2y\sin\alpha, \tag{3.11}$$

así

$$y = \frac{M\lambda}{2\sin\alpha}, \tag{3.12}$$

es la ecuación de rectas horizontales con periodo $\frac{\lambda}{2\sin\alpha}$, como se muestra en nuestra figura 3.4.

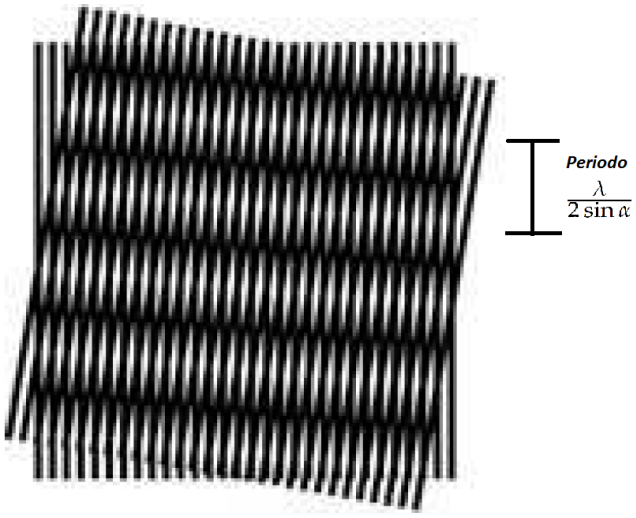


Figura 3.4: Patrón de moiré: $\lambda_2 = \lambda_1$

Caso 2: Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y las rejillas son paralelas entre sí, es decir con $\alpha = 0$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2\lambda_1}x\cos\alpha+\frac{\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_2\lambda_1}y\sin\alpha &= \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2\lambda_1}x\cos 0+0\\ &= \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2\lambda_1}x\\ &= \frac{x}{\lambda_{beat}}=M\end{aligned} \tag{3.13}$$

es decir,

$$x = M\lambda_{beat} \tag{3.14}$$

La ecuación (3.14) describe las líneas verticales equidistantes de nuestro patrón de moiré como se ve la figura (3.5). Dichas franjas son paralelas a las líneas de nuestras rejillas.

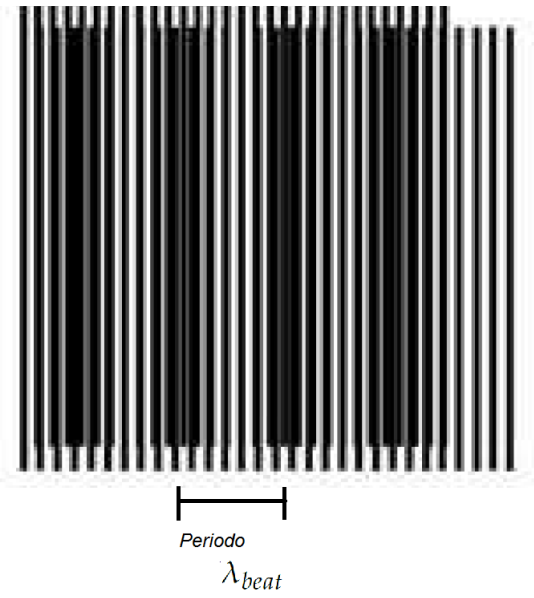


Figura 3.5: Patrón de moiré: $\lambda_2 \neq \lambda_1$ y $\alpha = 0$

Caso 3: Caso general, tenemos que las dos rejillas no tienen igual espaciado y tienen un ángulo de inclinación, es decir, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $\alpha \neq 0$, la ecuación (3.8) se puede escribir como:

$$\frac{\bar{\lambda}}{\lambda_{beat}}x\cos\alpha+2y\sin\alpha = M\bar{\lambda} \tag{3.15}$$

Las franjas de moiré son líneas rectas paralelas, la frecuencia y la orientación depende de la diferencia entre las frecuencias de las rejillas y el ángulo de orientación entre ellas.

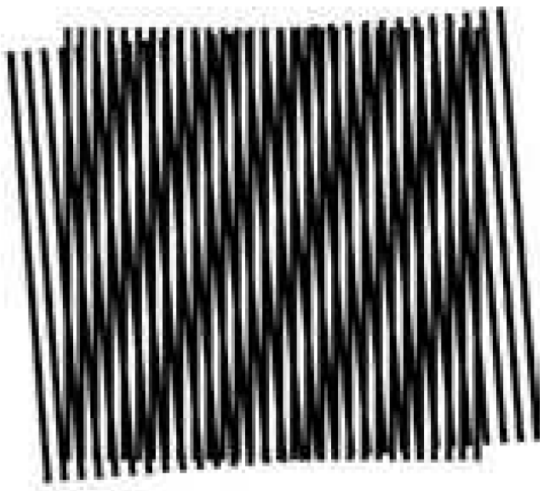


Figura 3.6: Patrón de moiré: $\lambda_2 \neq \lambda_1$ y $\alpha \neq 0$

La orientación y el espaciamiento de las franjas moiré, para el caso general, pueden determinarse a partir de la geometría mostrada en la figura (3.7).

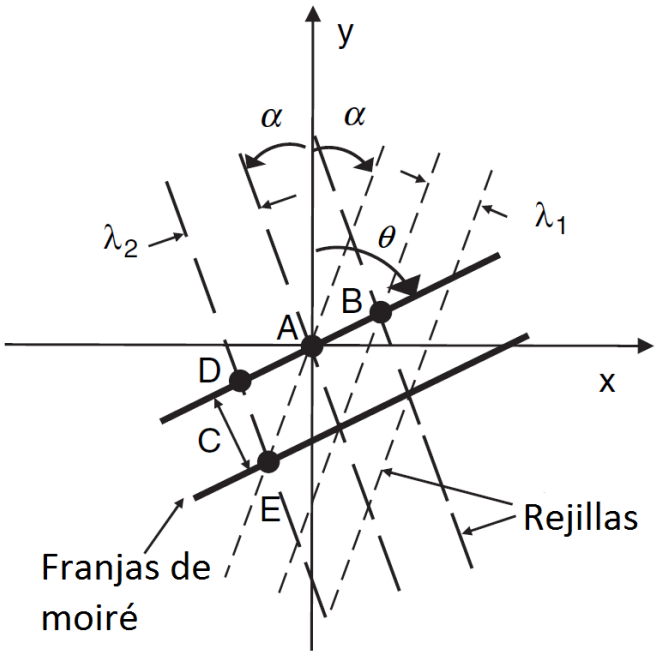


Figura 3.7: Geometría del efecto moiré

La distancia $\overline{AB}$ puede escribirse en términos de las dos distancias de rejilla, esto es

$$\overline{AB} = \frac{\lambda_1}{\sin(\theta - \alpha)} = \frac{\lambda_2}{\sin(\theta + \alpha)} \tag{3.16}$$

donde θ es el ángulo formado por las franjas de moiré con el eje y. Si reordenamos con respecto a θ la ecuación (3.16), se tiene:

$$0 = \frac{\lambda_1}{\sin(\theta - \alpha)} - \frac{\lambda_2}{\sin(\theta + \alpha)} = \frac{\lambda_1}{\sin\theta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta} - \frac{\lambda_2}{\sin\theta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\theta}$$

$$= \frac{\lambda_2 \sin\theta\cos\alpha - \lambda_2 \sin\alpha\cos\theta - (\lambda_1 \sin\theta\cos\alpha + \lambda_1 \sin\alpha\cos\theta)}{(\sin\theta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta)(\sin\theta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\theta)} \tag{3.17a}$$

que es igual a cero si el numerador es igual a cero, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_2 \sin\theta\cos\alpha - \lambda_2 \sin\alpha\cos\theta - \lambda_1 \sin\theta\cos\alpha - \lambda_1 \sin\alpha\cos\theta) \\ &= \sin\theta\cos\alpha(\lambda_2 - \lambda_1) - \sin\alpha\cos\theta(\lambda_2 + \lambda_1) \\ &\Rightarrow \sin\theta\cos\alpha(\lambda_2 - \lambda_1) = \sin\alpha\cos\theta(\lambda_2 + \lambda_1) \\ &\Rightarrow \sin\theta\cos\alpha = \sin\alpha\cos\theta\frac{(\lambda_2 + \lambda_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \\ &\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\alpha = \sin\alpha\frac{(\lambda_2 + \lambda_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \end{aligned} \tag{3.17b}$$

asi el ángulo de orientación de la franja está dado por

$$\tan(\theta) = \tan(\alpha)\frac{(\lambda_2 + \lambda_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \tag{3.18a}$$

$$\theta = \tan^{-1}[\tan(\alpha)\frac{(\lambda_2 + \lambda_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)}] \tag{3.18b}$$

Análisis de los siguientes casos:

Caso 1: $\alpha = 0$ *y* $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Sucede cuando no existe un ángulo de inclinación entre ambas rejillas con respecto al eje 'y', y el espaciado de las rejillas es diferente, partiendo de la ecuación (3.18a)

tenemos que $\tan\theta = 0$, esto es que $\theta = 0$; con ésto explicamos que, con estas condiciones, las franjas que se generan en el efecto de moiré tampoco tienen inclinación.

Caso 2: $\alpha \neq 0$ *y* $\lambda_1 = \lambda_2$

Cuando el espaciado de las líneas en cada una de las rejillas es igual y tenemos una inclinación entonces de las ecuación (3.18a) y (3.17a) seguimos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\alpha\frac{(\lambda_2+\lambda_1)}{(\lambda_2-\lambda_1)} &\Rightarrow \lambda_2-\lambda_1 = \tan\alpha(\lambda_2+\lambda_1)\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ \text{Si} \quad \lambda_2 = \lambda_1 & \\ &\Rightarrow \tan\alpha(2\lambda_1)\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0 \\ &\Rightarrow \tan\alpha(2\lambda_1)\cos\theta = 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Como λ_1 es distinto de cero y $\alpha \neq 0$

$$\Rightarrow \cos\theta = 0$$

entonces $\theta = 90^\circ$.

Requerimos ahora conocer el espaciado que hay entre cada franja moiré, a esta distancia la llamaremos C. Observemos la figura (3.7), la distancia que hay entre el punto D y el punto E esta dado por

$$\overline{DE} = \frac{\lambda_1}{\sin(2\alpha)} = \frac{C}{\sin(\theta+\alpha)} \tag{3.20}$$

despejando C de la ecuación (3.20) obtenemos

$$C = \lambda_1\left[\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin(2\alpha)}\right] \tag{3.21}$$

notemos que nuestro espaciado depende de la inclinación de las franjas de moiré θ, por ello requerimos describir esta distancia a partir de la inclinación de las rejillas y el espaciado de lineas entre cada una de las rejillas.

Proposición 3 *Demostrar que*

$$C = \lambda_1 \left[\frac{\sin(\alpha + \theta)}{\sin(2\alpha)} \right] \tag{3.22}$$

se puede escribir como:

$$C = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2 sin^2(2\alpha) + (\lambda_2 cos(2\alpha) - \lambda_1)^2}} \tag{3.23}$$

Demostración: Podemos observar en la figura (3.7) un triángulo cuyos lados son $\overline{AB}\sin(2\alpha)$, λ_1 y λ_2 y el ángulo entre estos dos últimos lados es 2α, por lo que podemos usar la ley de cosenos:

$$\overline{AB}^2 \sin^2(2\alpha) = \left[\frac{\lambda_2 \sin(2\alpha)}{\sin(\theta + \alpha)} \right]^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 \cos(2\alpha) \tag{3.24a}$$

Despejando $\sin(\theta + \alpha)$ de la ecuación (3.24):

$$\sin(\theta + \alpha) = \sqrt{\frac{\lambda_2^2 \sin^2(2\alpha)}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 \cos(2\alpha)}} \tag{3.24b}$$

sustituyendo en:

$$C = \lambda_1 \left[\frac{\sin(\alpha + \theta)}{\sin(2\alpha)} \right] \tag{3.24c}$$

tenemos:

$$\begin{aligned} C &= \lambda_1 \left[\frac{\sqrt{\frac{\lambda_2^2 \sin^2(2\alpha)}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 \cos(2\alpha)}}}{\sin(2\alpha)} \right] \\ &= \lambda_1 \left[\frac{\frac{\lambda_2 \sin(2\alpha)}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 \cos(2\alpha)}}}{\sin(2\alpha)} \right] \\ &= \frac{\sin(2\alpha)\lambda_1 \lambda_2}{\sin(2\alpha)\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 \cos(2\alpha)}} \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 (1) - 2\lambda_1 \lambda_2 \cos(2\alpha)}} \end{aligned} \tag{3.24d}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2[\sin^2(2\alpha) + \cos^2(2\alpha)] - 2\lambda_1\lambda_2\cos(2\alpha)}} \\
&= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2\sin^2(2\alpha) + \lambda_2^2\cos^2(2\alpha) - 2\lambda_1\lambda_2\cos(2\alpha)}} \\
&= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2 sin^2(2\alpha) + (\lambda_2 cos(2\alpha) - \lambda_1)^2}}
\end{aligned}
\tag{3.24e}
$$

así:

$$
C = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2 sin^2(2\alpha) + (\lambda_2 cos(2\alpha) - \lambda_1)^2}} \tag{3.24f}
$$

□

Proposición 4 *Si $\alpha = 0$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces el espaciado de las franjas de moiré es igual a λ_{beat}, y si $\alpha \neq 0$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, entonces el espaciado de dichas franjas es igual a $\frac{\lambda}{2\sin\alpha}$*

Demostración:

Caso 1: $\alpha = 0$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Partimos de

$$
C = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2 sin^2(2\alpha) + (\lambda_2 cos(2\alpha) - \lambda_1)^2}} \tag{3.25a}
$$

Como $\alpha = 0$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2 sin^2(0) + (\lambda_2 cos(0) - \lambda_1)^2}} \\
&= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_2(1) - \lambda_1)^2}} \\
&= \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_)}
\end{aligned}
\tag{3.25b}
$$

Caso 2: $\alpha \neq 0$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Partimos de

$$C = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2 sin^2(2\alpha) + (\lambda_2 cos(2\alpha) - \lambda_1)^2}} \tag{3.26a}$$

puesto que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ entonces la ecuación 3.26a es:

$$\begin{aligned} C &= \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 sin^2(2\alpha) + (\lambda \cos(2\alpha) - \lambda)^2}} \\ &= \frac{\lambda^2}{\lambda\sqrt{\sin^2(2\alpha) + (\cos(2\alpha) - 1)^2}} \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{\sin^2(2\alpha) + \cos^2(2\alpha) - 2\cos(2\alpha) + 1}} \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{1 - 2\cos(2\alpha) + 1}} \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{-2\cos(2\alpha) + 2}} \end{aligned} \tag{3.26b}$$

utilizando que $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ tenemos que:

$$\begin{aligned} C &= \frac{\lambda}{\sqrt{-2\cos(2\alpha) + 2}} \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{-2(2\cos^2\alpha - 1) + 2}} \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{-4\cos^2\alpha + 4}} \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{4(1 - \cos^2\alpha)}} \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{4\sin^2\alpha}} \\ &= \frac{\lambda}{2\sin\alpha} \end{aligned} \tag{3.26c}$$

3.4. Modelación de la Rejilla

Para el diseño del patrón de franjas, o también llamada rejilla de Ronchi, usaremos una función unidimensional de la forma

$$u(x) = A\cos(2\pi f x), \tag{3.27}$$

donde A representa la amplitud y f la frecuencia espacial de la oscilación.

El patrón de barras que se va a construir podemos considerarlo como una representación binaria de $u(x)$, este patrón se puede obtener si usamos la función:

$$p(x) = \frac{1 + Signo[u(x)]}{2},$$

en donde $u(x) = A\cos(2\pi\nu x)$ y la función signo se define como:

$$Signo[f(x)] = \begin{cases} 1 \; si \; f(x) > 0 \\ -1 \; si \; f(x) < 0 \end{cases}$$

La gráfica de $p(x)$ es de la forma:

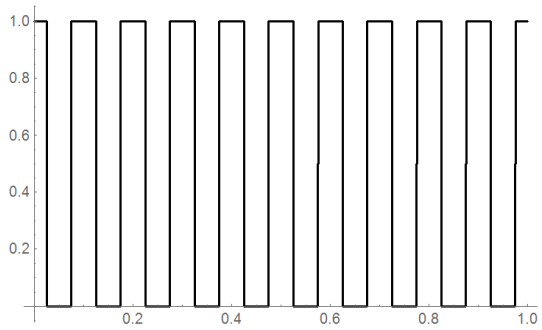


Figura 3.8: Gráfica de p(x)

Si le asignamos el cero en intensidad de pixeles a todos los pixeles que están por abajo de las rectas horizontales y uno en intensidad de pixeles a los pixeles que están por arriba de la recta $Y = 0$, o de otra forma, le asignamos cero en intensidad de pixeles a todos los puntos que tienen coordenadas $(x_i, 1)$ con $i = 0, 1, \ldots, n$ y uno en

intensidad de pixeles a todos los puntos que tienen coordenadas $(x_i, 0)$.

Usando el comando *Filling* en Mathematica a la gráfica de la función $p(x)$ se obtiene:

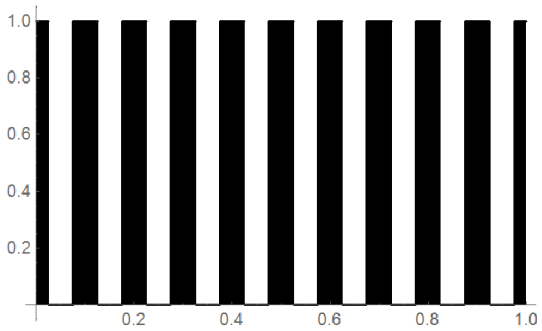


Figura 3.9: Gráfica de p(x): Patrón de franjas

CAPÍTULO

4 Modelación de la técnica de moiré de sombra

En este capítulo se presenta el modelo matemático que explica el fenómeno de moiré de sombra. Moiré de sombra pertenece al grupo geométrico y se basa en la noción de la medida del paralaje. Un aspecto importante de esta técnica es que puede usar iluminación no coherente o coherente y tiene muchas aplicaciones industriales y en la medicina. La importancia de la técnica de moiré de sombra es que se puede usar para la determinación de contornos de un objeto. El principio físico de la técnica de moiré de sombra consiste en una fuente de luz colocada en un punto, que ilumina en un ángulo oblicuo una rejilla maestro que se coloca frente al objeto a estudiar, esta rejilla produce una sombra sobre la superficie del objeto. Un observador se coloca en la posición o una cámara delante de la rejilla, las sombras formadas en la superficie (el objeto) son o bien vistos por el observador o capturados por una cámara. El resultado es un mapa topográfico, que resulta de la interferencia de la rejilla maestro y la sombra de la rejilla como se observa en la figura (4.1).

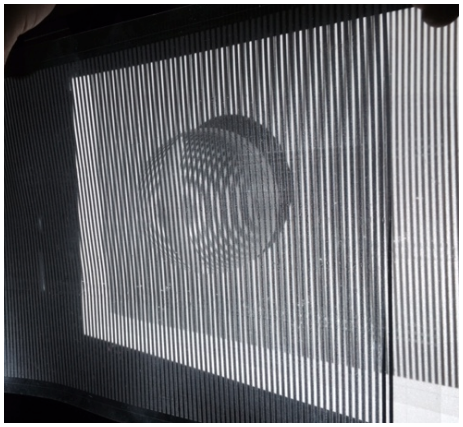


Figura 4.1: Técnica de sombra sobre una media esfera

Para explicar el fenómeno de sombra de moiré, consideremos el siguiente arreglo que se muestra en la figura (4.2) la cual corresponde a un perfil del objeto y la fuente el cual se obtiene al hacer un corte transversal del objeto, teniendo a la fuente en el mismo plano, considere una fuente de luz coherente cuyos rayos forman un ángulo α, la iluminación crea una sombra de la rejilla sobre la superficie del objeto, la sombra de la rejilla se representa por un segmento de recta el cual se alarga al incidir sobre la superficie, la elongación depende de la inclinación que se tenga la superficie del objeto, del ángulo de incidencia α y de la distancia de la rejilla al objeto. El alargamiento estimado de la sombra esta dado por $\delta = \omega \tan \alpha$.

En la figura (4.2) se hace una representación cualitativa de la intensidad de luz que se refleja a través de la rejilla que deja pasar la luz, si registramos la información con una cámara como se muestra en la figura se observan 2 rejillas una de ellas corresponde a la rejilla patrón y la otra generada por la sombra la cual se encuentra desfasada con respecto a la rejilla patrón.

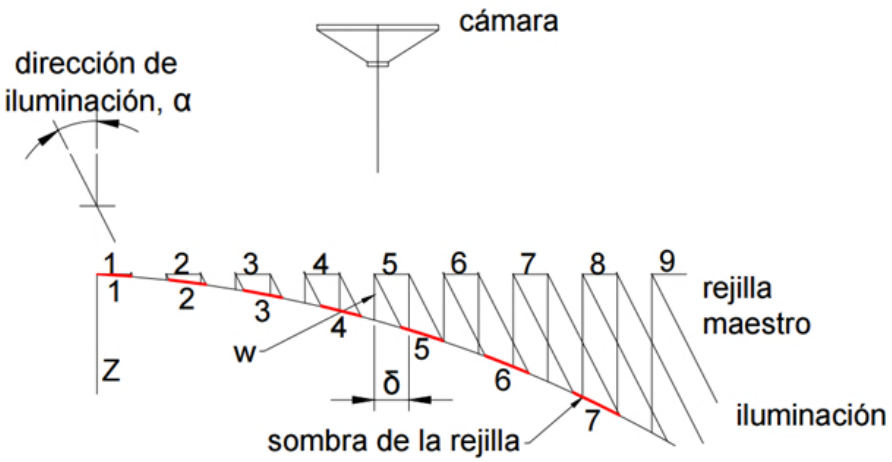


Figura 4.2: Técnica de moiré

En la figura (4.3) se ilustra el mismo fenómeno de moiré de sombra y se ilustra usando luz no coherente, ahora el observador forma un ángulo ψ con respecto a la vertical.

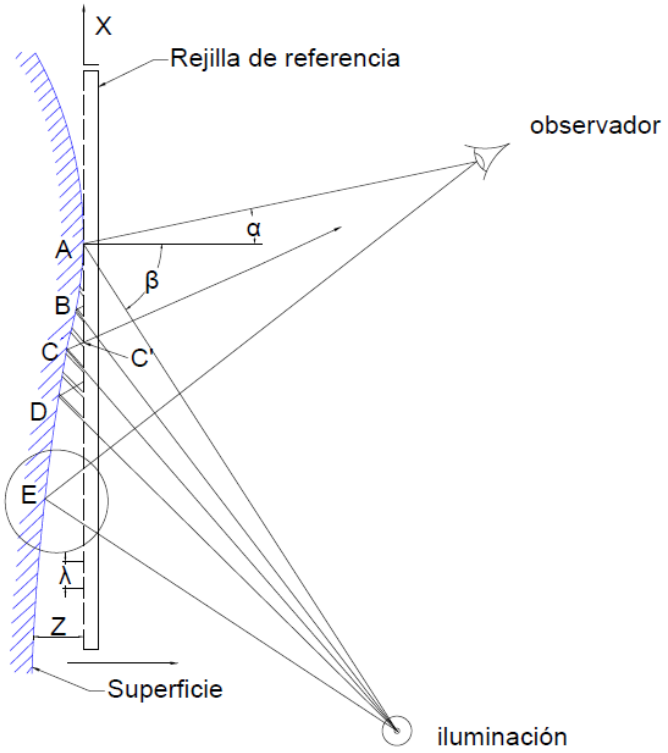


Figura 4.3: Modelo de moiré de sombra

Para construir el modelo matemático usaremos el siguiente arreglo como se muestra en la figura (4.4)

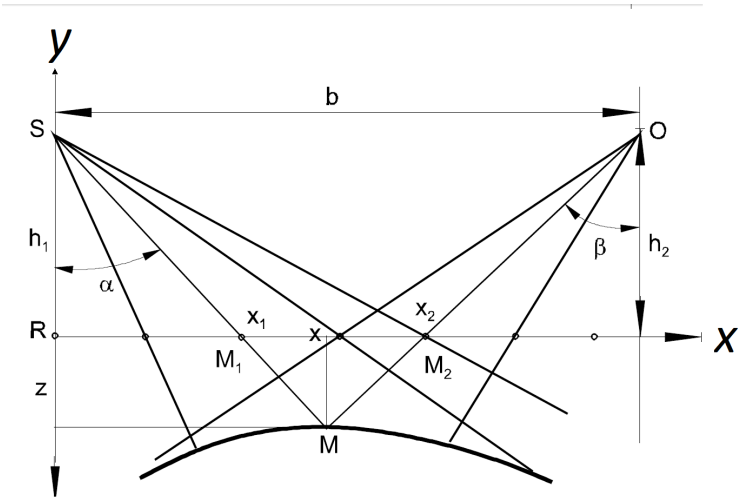


Figura 4.4: Esquema para la técnica de sombra

Sea S el punto donde se emite la luz, R la rejilla principal, también llamada rejilla maes-

tro, λ el periodo de franjas de las rejillas, O el punto de observación, z la distancia que hay de la rejilla a la superficie, h_1 la menor distancia del punto de incidencia a la rejilla maestro y h_2 la menor distancia del punto de observación a la rejilla maestro, es decir, en la figura h_1 corresponde a la recta que va del punto S y es perpendicular a la rejilla, análogamente h_2 corresponde a la recta que va del punto O y es perpendicular a la rejilla maestro; así podemos definir al ángulo de incidencia α formado por el rayo de incidencia de luz y h_1, y al ángulo de observación β que es el comprendido entre el rayo de luz reflejado y la recta h_2.

Para modelar moiré de sombra primero se modela la rejilla, su binarización se muestra en el capítulo anterior.

La rejilla se describe por una función de transmitancia sinusoidal de la forma:

$$T(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin\frac{2\pi x}{\lambda}) \tag{4.1}$$

En la figura (4.4) M_1, corresponde a un punto que se encuentra sobre la rejilla maestro situada a una distancia x_1 desde R, su sombra se proyecta en el punto M a una distancia horizontal x. El observador se coloca de tal manera que el punto M es visto en superposición con M_2 a una distancia x_2 con respecto al punto R. La intensidad de la luz en el punto O se obtiene como el producto de la transmitancia correspondiente a la rejilla maestro y a la transmitancia de la rejilla que se forma por la sombra y dada por la expresión:

$$I(O) = H(M)(1 + \sin\frac{2\pi x_1}{\lambda})(1 + \sin\frac{2\pi x_2}{\lambda}) \tag{4.2}$$

El fenómeno de moiré se explica al desarrollar el producto de las intensidades

$$\begin{aligned} I(O) &= H(M)(1 + \sin\frac{2\pi x_1}{\lambda})(1 + \sin\frac{2\pi x_2}{\lambda}) \\ &= H(M)(1 + \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 + \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_2 + \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_2). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Los tres primeros términos de la ecuación anterior proporcionan las características que pueden ser observadas en cada rejilla separadamente, el cuarto término es el portador de la información que nos interesa modelar y lo podemos escribir como la siguiente proposición.

Proposición 5 *Mostrar que*

$$\sin\frac{2\pi}{p}x_1 \sin\frac{2\pi}{p}x_2 = \frac{1}{2}\cos[\frac{2\pi}{p}(x_2 - x_1)] + cos[\frac{2\pi}{p}(x_2 + x_1)]$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_2 &= \frac{2}{2}\sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_2 = \\
&= \frac{1}{2}(\sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_2 + \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_2) \\
&= \frac{1}{2}(\sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_2 + \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_2 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \cos\frac{2\pi}{\lambda}x_2 - \cos\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \cos\frac{2\pi}{\lambda}x_2) \\
&= \frac{1}{2}((\sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_2 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \cos\frac{2\pi}{\lambda}x_2) + (\sin\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \sin\frac{2\pi}{\lambda}x_2 - \cos\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \cos\frac{2\pi}{\lambda}x_2)) \\
&= \frac{1}{2}\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)] + cos[\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 + x_1)]
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Este término corresponde a la trasmitancia, involucra términos de alta y baja frecuencia, como la información en alta frecuencia no la puede observar el ojo humano ignoraremos estos términos, podemos escribir la transmitancia correspondiente al fenómeno moiré como:

$$Trans = H(M)(1 + \frac{1}{2}\cos(\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1))) = H(M)(1 + \frac{1}{2}\cos(\phi_2 - \phi_1)) \tag{4.5}$$

En las regiones en que las dos ondas están en fase, ocurre una interferencia constructiva, entonces se debe cumplir que:

$$\phi = \phi_2 - \phi_1 = 2\pi k = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) \tag{4.6}$$

donde $k \in \mathbb{Z}$ y corresponde al orden de la franja.

Analizando la figura (4.4)se obtiene que:

$$x_1 = x - z\tan\alpha \tag{4.7a}$$

$$x_2 = x + z\tan\beta \tag{4.7b}$$

de la figura (4.4) se obtiene que:

$$\tan\alpha = \frac{x}{h_1 + z}, \tag{4.8a}$$

y

$$\tan\beta = \frac{b - x}{h_2 + z}. \tag{4.8b}$$

sustituyendo en la ecuación (4.6) se obtiene:

$$\phi = \frac{2\pi z}{\lambda}\left(\frac{x}{h_1 + z} + \frac{b - x}{h_2 + z}\right) \tag{4.9}$$

Normalmente la fuente de luz y el punto de observación se colocan en el mismo plano, paralelo al plano de la rejilla maestra, si suponemos que $h_1 = h_2 = h$ la ecuación (4.9) se simplifica y se obtiene

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{bz}{h + z} \tag{4.10}$$

Si la distancia z entre el objeto y la rejilla maestro es mucho menor que la distancia h, que es la distancia entre la luz y la rejilla $(z << h)$ el valor de z puede ser despreciable, así tenemos que la fase de fase queda como:

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{bz}{h} \tag{4.11}$$

Despejando z y sustituyendo en la condición de interferencia constructiva $\phi = 2\pi k$ se obtiene:

$$z = \frac{\phi}{2\pi}\frac{\lambda h}{b} = \frac{2\pi k\lambda h}{2\pi b} = \frac{k\lambda h}{b} \tag{4.12}$$

Esta última ecuación describe las curvas de nivel o (líneas de contorno) y se observa que z es proporcional al orden de la franja. Usando la condición $\phi = 2k\pi$ donde k corresponde al orden de la franja. La variación de nivel entre dos curvas de nivel sucesivas se calcula tomando $k = 1$

$$\Delta z = \frac{\lambda h}{b} \tag{4.13}$$

Donde Δz es llamado coeficiente de sensibilidad, puede ser fácilmente determinando conociendo el paso de la rejilla, la distancia de la fuente de luz a la rejilla maestra h y la distancia entre fuente y observador b, si sustituimos Δz en la ecuación () resulta que la diferencia de fase se puede escribir como:

$$\phi = 2\pi \frac{z}{\Delta z} \tag{4.14}$$

Esta ecuación permite determinar la sensibilidad moviendo la rejilla a una distancia $z = d$ y colocándonos en un orden n de la franja, remplazando

$$\phi = 2k\pi, \;\; k = n \;\; z = d$$

Resultando una expresión general para la sensibilidad

$$\Delta z = \frac{d}{n} \tag{4.15}$$

Para determinar la distancia de la rejilla a la superficie del objeto usaremos el siguiente modelo

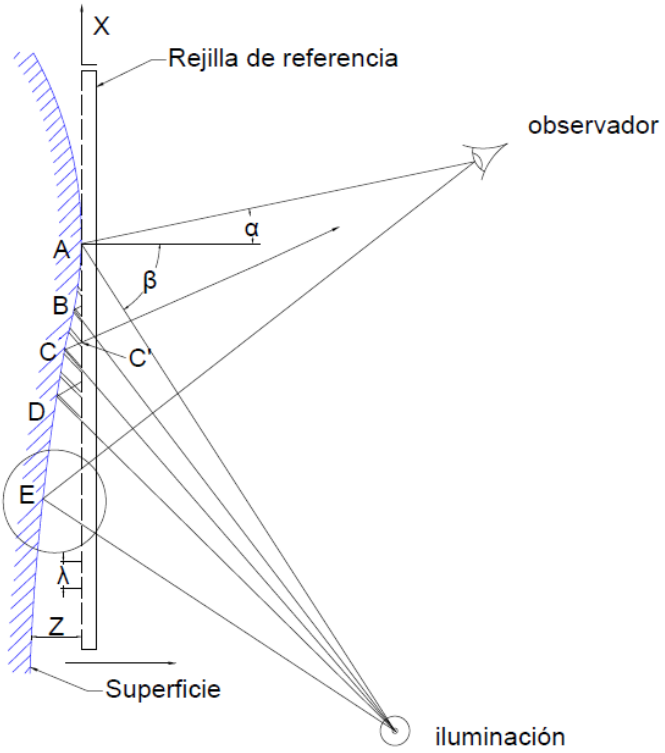


Figura 4.5: Modelo de moiré de sombra

Cuando la distancia w es pequeña y se tiene una sombra bien definida de la rejilla de referencia proyectada sobre la superficie de la muestra, que consiste en barras oscuras y barras brillantes, es en sí misma una rejilla. El observador ve la sombra rejilla y la rejilla referencia superpuesta, al interactúar forma un patrón de moiré.

En la vista de la sección transversal como se muestra en la figura (4.5), la luz que incide sobre los puntos A, C y E pasa a través de los espacios claros en la rejilla de referencia para llegar al observador. La luz que incide sobre los puntos B y D se obstruye por la rejilla patrón. Por lo tanto, las franjas brillantes de moiré se forman en las regiones cerca de A, C, y E, mientras que las franjas negras se forman cerca de B y D. Es claro que , aparecen muchos más barras entre A y B en el sistema real, por lo que la transición entre franjas brillante y oscuras de moiré es gradual. Con iluminación oblicua, las posiciones de la sombra en la muestra dependen de la distancia z, y por lo tanto el patrón de moiré es una función de z.

Tomemos el orden de la franja en A como $N_z = 0$ cuando la rejilla de referencia está en contacto y $z = 0$. Desde el punto de vista del observador, el número de líneas de la rejilla de sombra entre A y C se compara con el número de líneas de la rejilla de referencia entre A y C'. El número de líneas de la rejilla de sombra es mayor en uno, y por lo tanto el orden de franja en C es $N_z = 1$. De forma similar a E, el número de líneas de la rejilla de sombra es más grande por dos y el orden de la franja de moiré es $N_z = 2$.

La relación entre el orden de franja y el espacio W se deriva de la siguiente expresión que se otiene de la figura (4.5).

$$w = \frac{\lambda}{\tan\alpha + \tan\beta} N_z \tag{4.16}$$

Se observa que los ángulos α y β son variables que cambian con la coordenada x. Por lo tanto, la sensibilidad de la medición no es constante, es decir, los desplazamientos no son directamente proporcionales a las órdenes marginales del patrón de moiré. Sin embargo, si la fuente de luz y el observador están a la misma distancia D de la muestra y si L es la distancia entre la fuente de luz y el observador, las variables se reducen a:

$$\tan\alpha + \tan\beta = D/L = k \tag{4.17}$$

donde K es una constante y por lo tanto

$$z = \frac{\lambda}{k} N_z \tag{4.18}$$

Por lo tanto, z es directamente proporcional al orden de la franja de moiré.

Para ser consistente con esto, la configuración de la figura (4.6) muestra la disposición habitual de elección. Sumando a esto la constante de sensibilidad a través del campo, tiene la ventaja de que el espécimen se ve en incidencia normal, evitando así las

distorsiones geométricas. Cuando $D = L$, el intervalo de las curvas de la figura de franjas de moiré (es decir, el desplazamiento w por orden de franja) es proporcional al paso de la rejilla de referencia.

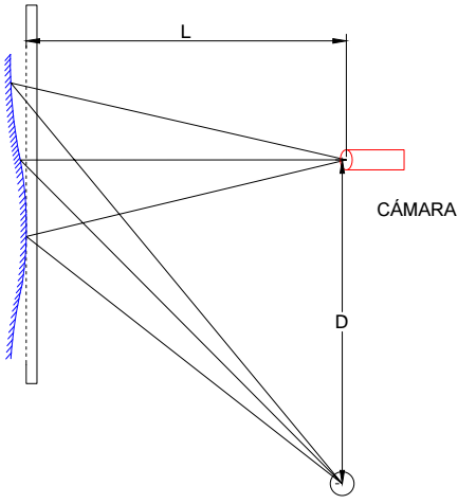


Figura 4.6: Arreglo preferente de moiré de sombra

CAPÍTULO

5

Conclusiones y trabajos futuros

5.1. Conclusiones

- Las técnicas ópticas de reconstrucción 3D son una tecnología no invasiva realmente útiles.
- La técnica de moiré de sombra se puede instrumentar con equipos sencillos y de bajo costo para medir profundidades en la superficie del cuerpo humano.
- El diseño y uso de programas de computación en lenguaje Mathematica permite caracterizar, evaluar y simular los patrones de moiré, topogramas y superficies en estudio en estos experimentos.
- La técnica de moiré por sombreado proporciona una imagen de las curvas de nivel del objeto analizado.
- El efecto de moiré producido por la técnica de sombra representa la elevación fuera del plano de la superficie y es esencialmente un mapa de contornos del objeto estudiado. Este mapa de contornos puede ser reconstruido por la técnica de corrimientos de fase.
- Moiré de sombra es una técnica no invasiva, lo cual representa muchas venta-

jas en relación a sistemas invasivos: menor desgaste, mayor robustez, el objeto analizado no sufre ninguna modificación por acción del sistema.

5.2. Trabajos futuros

El estudio de la metrología dentro de la óptica es un sector en constante avance, por lo que frecuentemente se presentan nuevas áreas de oportunidad que sin duda permiten mejorar sistemas existentes, como el desarrollado en este trabajo de tesis. Entre los trabajos futuros que se realizarán en un trabajo de maestría y doctorado estan:

- La optimización de los algoritmos de modo que resulten más rápidos, robustos y eficaces.
- Tener el control total sobre todos los componentes del sistema desde una sola PC, esto para permitir la medición de áreas específicas de manera dinámica, y ofrecer mayores herramientas y libertad al usuario.
- Desarrollo de una estructura mecánica, que permita ahorrar energía y utilizar un sistema de movimiento menos costoso.
- El uso de herramientas de modelado tridimensional que permitan completar los huecos de información de la superficie obtenida.

APÉNDICE

A

Programas en Mathematica

A.1. Modelo de la rejilla sinusoidal a partir de la función coseno

En el siguiente programa estamos tomando a la frecuencia $f = 3$ y la función coseno que fue sugerida con $a = \frac{1}{2}$

$f = 3;$

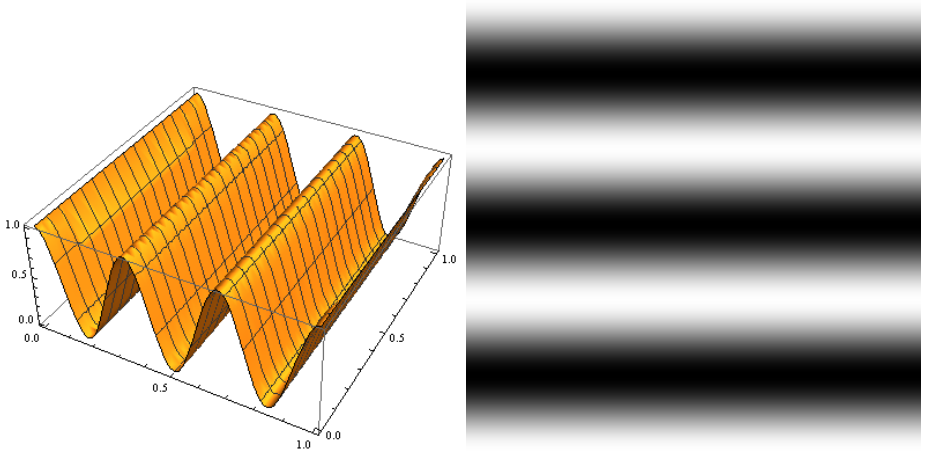
$\text{II}[x_, y_] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{Cos}[2\pi f x];$

$\text{pat} = \text{Table}[\text{II}[x, y], \{x, 0, 1, 0{,}005\}, \{y, 0, 1, 0{,}005\}];$

$\{\text{Plot3D}[\text{II}[x, y], \{x, 0, 1\}, \{y, 0, 1\}],$

$\text{Image}[\text{pat}, \text{ColorSpace} \rightarrow \text{“Graylevel”}]\}$

$\{,\}$



A.2. Rejilla sinusoidal: Representación binaria

ν = Input["Frecuencia Espacial de Onda"]

A = Input["Amplitud de onda"]

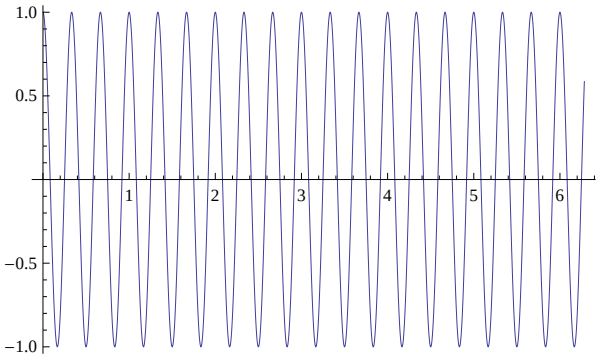
3

1

u[x_] = ACos[$2\pi\nu x$]

Cos$[6\pi x]$

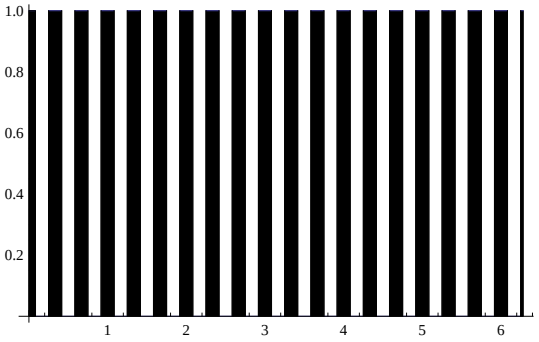
Plot[$u[x]$, {x, 0, 2π}]



p[x_] = $\frac{(1+\text{Sign}[\text{Cos}[2\pi\nu x]])}{2}$

$\frac{1}{2}(1 + \text{Sign}[\text{Cos}[6\pi x]])$

Plot$[p[x], \{x, 0, 2\pi\}$, Filling $\rightarrow \{1 \rightarrow \{0,$ Black$\}\}]$



A.3. Rejilla sinusoidal: Series de Fourier

(*Escriba la funcion que desa aproximar*)

f[x_] = If $\left[\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, 1, 0\right]$

(*Escriba la mitad del periodo*)

L = Pi;

(*m=10*)

Plot$[f[x], \{x, -L, L\}$, AxesLabel $\rightarrow \{$x, y$\}]$

a0 = Simplify $\left[\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f[x]\, dx\right]$;

an = Simplify $\left[\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f[x]$Cos $\left[\frac{n\pi}{L}x\right] dx\right]$ /.{Sin$[n\pi] \rightarrow 0$, Cos$[n\pi] \rightarrow (-1)$^$n\}$;

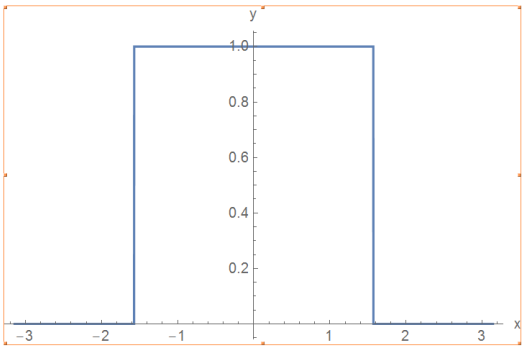
bn = Simplify $\left[\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f[x]$Sin $\left[\frac{n\pi}{L}x\right] dx\right]$ /.{Sin$[n\pi] \rightarrow 0$, Cos$[n\pi] \rightarrow (-1)$^$n\}$;

Print[“a0=”, a0]

Print[“an=”, an]

Print[“bn=”, bn]

If $\left[-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, 1, 0\right]$



a0=1

an=$\frac{2\text{Sin}\left[\frac{n\pi}{2}\right]}{n\pi}$

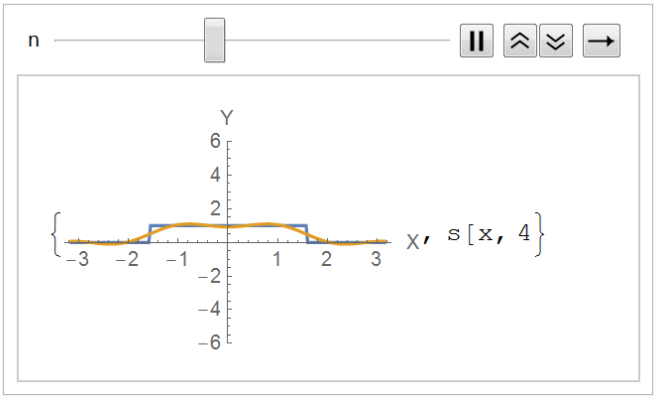
bn=0

$s[x_,m_]:=\frac{a0}{2}+\sum_{n=1}^{m}\left(\text{anCos}\left[\frac{n\pi}{L}x\right]+\text{bnSin}\left[\frac{n\pi}{L}x\right]\right);$

DynamicModule[{$n=0$},{Slider[Dynamic[n],{0,10,1}],"n="Dynamic[n],

Dynamic[$s[x,n]$]}]graficas[n_]:=Plot[{$f[x]$,$s[x,n]$},{$x,-L,L$},PlotRange $\to$ 6,

AxesLabel $\to$ {X,Y}];Animate[{graficas[n],"s[x,"Dynamic[n]},{n,0,10,1}]



1/2(1+Cos[x])

$\frac{1}{2}(1+\text{Cos}[x])$

NMinimize $\left[\frac{1}{2}(1+\text{Cos}[x]),\{x\}\right]$

$\{0.,\{x\to 3{,}14159\}\}$

NMaximize $\left[\frac{1}{2}(1+\text{Cos}[x]),\{x\}\right]$

$\{1., \{x \to 0\}\}$

A.4. Comprobación de la superposición de las dos rejillas

$\mathbf{T1[x_, y_] = a1 + a1Cos\left[\frac{2\pi}{p1} x\right]}$

$\mathbf{T2[x_, y_] = a2 + a2Cos\left[\frac{2\pi}{p2} x\right]}$

$a1 + a1Cos\left[\frac{2\pi x}{p1}\right]$

$a2 + a2Cos\left[\frac{2\pi x}{p2}\right]$

$\mathbf{T[x_, y_] = T1[x, y] * T2[x, y]}$

$\left(a1 + a1Cos\left[\frac{2\pi x}{p1}\right]\right)\left(a2 + a2Cos\left[\frac{2\pi x}{p2}\right]\right)$

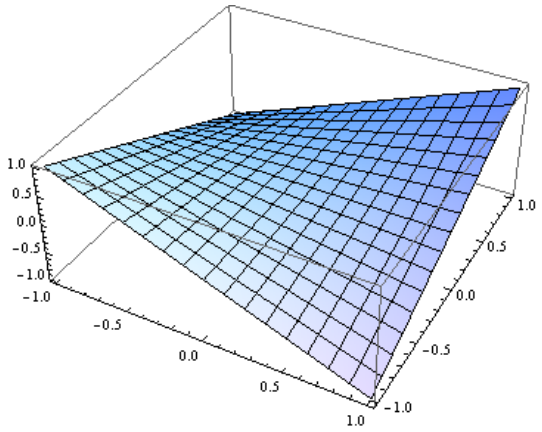
$\mathbf{Expand\left[\left(a1 + a1Cos\left[\frac{2\pi x}{p1}\right]\right)\left(a2 + a2Cos\left[\frac{2\pi x}{p2}\right]\right)\right]}$

$a1a2 + a1a2Cos\left[\frac{2\pi x}{p1}\right] + a1a2Cos\left[\frac{2\pi x}{p2}\right] + a1a2Cos\left[\frac{2\pi x}{p1}\right] Cos\left[\frac{2\pi x}{p2}\right]$

a1a2

a1a2

Plot3D[a1a2, {a1, −1., 1.}, {a2, −1., 1.}]



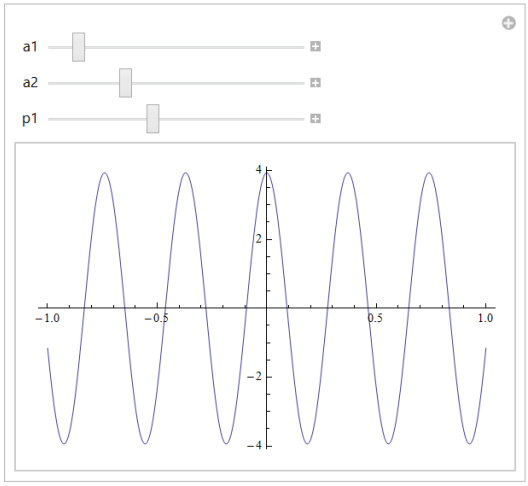
$\mathbf{a1a2Cos\left[\frac{2\pi x}{p1}\right]}$

a1a2Cos $\left[\frac{2\pi x}{\text{p1}}\right]$

Manipulate $\left[\textbf{Plot}\left[\textbf{a1a2Cos}\left[\frac{2\pi x}{\textbf{p1}}\right], \{x, -1., 1.\}\right], \{\textbf{a1}, -6., 6.\}, \{\textbf{a2}, -2, 2\}, \{\textbf{p1}, -2, 2\}\right]$

a1a2Cos $\left[\frac{2\pi x}{\textbf{p2}}\right]$

a1a2Cos $\left[\frac{2\pi x}{\text{p2}}\right]$

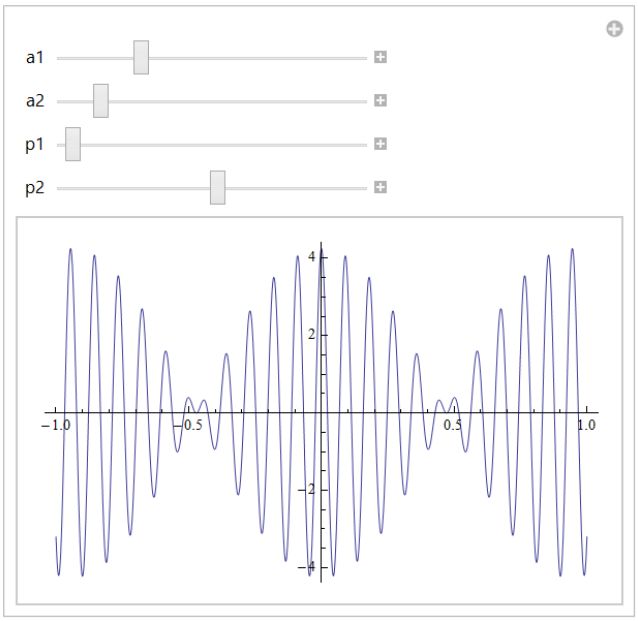


Manipulate $\left[\textbf{Plot}\left[\textbf{a1a2Cos}\left[\frac{2\pi x}{\textbf{p2}}\right], \{x, -1., 1.\}\right], \{\textbf{a1}, -6., 6.\}, \{\textbf{a2}, -2, 2\}, \{\textbf{p2}, -2, 2\}\right]$

a1a2Cos $\left[\frac{2\pi x}{\textbf{p1}}\right]$ **Cos** $\left[\frac{2\pi x}{\textbf{p2}}\right]$

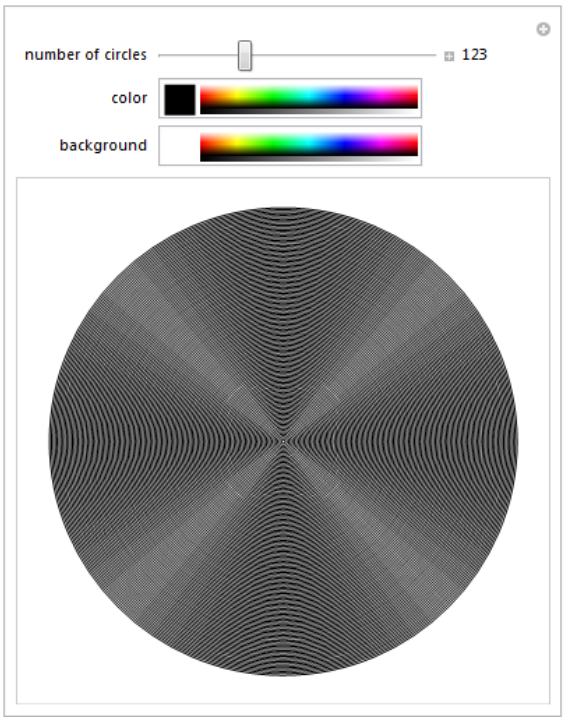
a1a2Cos $\left[\frac{2\pi x}{\text{p1}}\right]$ Cos $\left[\frac{2\pi x}{\text{p2}}\right]$

Manipulate $\left[\textbf{Plot}\left[\textbf{a1a2Cos}\left[\frac{2\pi x}{\textbf{p1}}\right]\textbf{ Cos }\left[\frac{2\pi x}{\textbf{p2}}\right], \{x, -1., 1.\}\right], \{\textbf{a1}, -6., 6.\}, \{\textbf{a2}, -2, 2\},\right.$
$\left.\{\textbf{p1}, -2, 2\}, \{\textbf{p2}, -2, 2\}\right]$

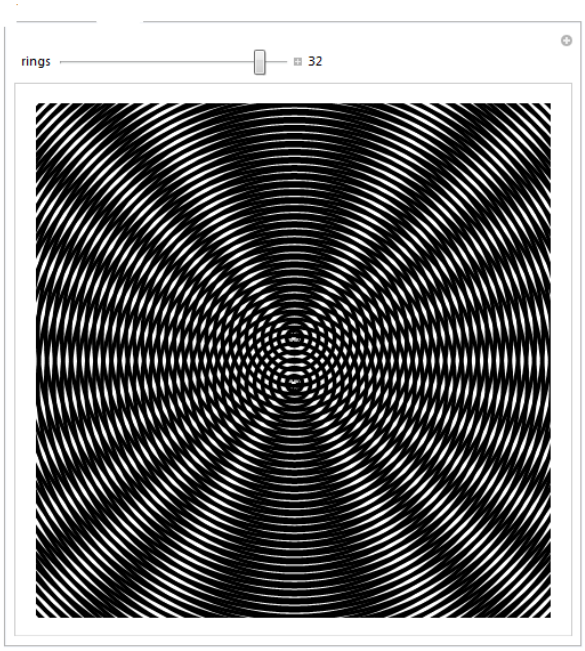


A.5. Ejemplos de efectos de moiré

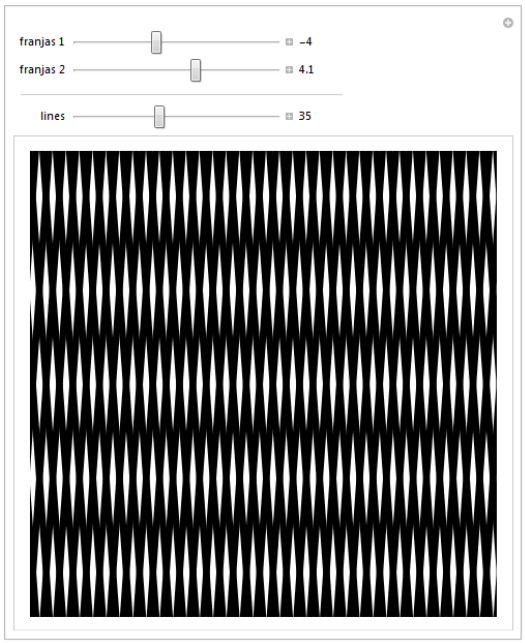
```
Manipulate[Graphics[Join[{color, Background → background},
Table[Circle[{0, 0}, i], {i, 1, n}]], ImageSize → 350],
{{n, 1, "number of circles"}, 1, 400, 1, Appearance → "Labeled"},
{color, Black}, {background, White}, AutorunSequencing → 1]
```




```
Manipulate[With[{u = Table[{Circle[pt1, m/rings], Circle[pt2, m/rings]}, {m, 0, 1.5rings}]},
Graphics[{Thickness[.25/rings], u}, PlotRange → 1, ImageSize → {450, 450}]],
{{rings, 17, "rings"}, 5, 35, 1, Appearance → "Labeled"}, {{pt1, {0, 1.5/17}},
{-1, -1}, {1, 1}, Locator}, {{pt2, {0, -1.5/17}}, {-1, -1}, {1, 1}, Locator}]
```



```
Manipulate[With[{u = Line[Table[{{i, -n/1.5}, {i, n/1.5}}, {i, -n/1.5, n/1.5}]]},
Graphics[{Thickness[.5/n], Rotate[u, a Degree],
Rotate[u, b Degree]}, PlotRange → n/2, ImageSize → {450, 450}]],
{{a, -4, "franjas 1"}, -20, 20, Appearance → "Labeled"},
{{b, 4, "franjas 2"}, -20, 20, Appearance → "Labeled"},
Delimiter,
{{n, 30, "lines"}, 10, 70, 1, Appearance → "Labeled"}]
```



APÉNDICE

B Metodología para la reconstrucción de Objetos

Para reconstruir un objeto requerimos de un patrón de moiré, y hacer un desenvolvimiento de fase. Heterodino fue el primero en utilizar por primera vez las franjas de moiré para reconstrucción de objetos, sin embargo las técnicas de medición de fase a partir de un patrón de moiré fueron desarrolladas Perrin y Thomas en 1979, Shagam en 1980, y Reid 1984.

Los sistemas de medición ópticos son ampliamente usados debido a sus buenas características tales como no-contacto, alta resolución, y evaluaciones rápidas. En tales sistemas de codificación en fase, la variable física de interés (por ejemplo: topografía, deformación, índice de refracción, distribuciones de temperatura, esfuerzo mecánico, aberraciones ópticas, campos magnéticos, y muchos otros) es generalmente medido mediante la adquisición de mapas de intensidad, conocidos como patrones de franjas. Por esta razón, es necesario desarrollar eficientes algoritmos de análisis de franjas para extracción de fase y así decodificar la variable física de interés[24]. Como se mencionó arriba, los sistemas de medición óptica codifican la variable física de interés como una distribucióon de fase. Ya que la fase del frente de onda en el rango visible no se puede medir directamente, la fase se debe recuperar desde uno o más mapas de intensidad (patrones de franjas) que pueden ser modelados como

$$I_k(p) = a_k(p) + b_k(p)\cos\phi_k(p) \tag{B.1}$$

donde p (una variable bidimensional) indica un punto en el plano de observación, $I_k(p)$ $(k = 0, 1, 2\ldots)$ es el k-ésimo patrón de franjas, $a_k(p)$ es la luz de fondo (también conocido como offset, bias, e intensidad promedio), $b_k(p)$ es la luz de modulación (también conocido como amplitud de franjas), y $\phi(p)$ es la distribución de fase codificada[24]. En algunas aplicaciones es más conveniente describir los patrones de franjas B.1 en la forma

$$I_k(p) = a_k(p) = a_k(p)[1 + v_k(p)\cos\phi_k(p)] \tag{B.2}$$

donde

$$v_k(p) = \frac{b_k(p)}{a_k(p)} \tag{B.3}$$

es la visibilidad de las franjas (también conocida como contraste). De ahora en adelante, como todas las funciones dependen de la variable espacial, la dependencia de p es omitida por brevedad.

Los patrones de franjas de la forma B.1 pueden ser generados mediante técnicas interferométricas así como mediante técnicas no-interferométricas. En ambos arreglos ópticos, la variable física de interés (la topografía de la superficie, en este caso) es codificada como una distribución de fase.[24]

Para nuestro caso utilizaremos la función mencionada en el capítulo anterior.

B.1. Método de desplazamiento de fase

La integración de las computadoras en los sistemas de medición ha tenido grandes efectos en los últimos años. En interferometría se ha desarrollado la interferometría de desplazamiento de fase (PSI por sus siglas en inglés, Phase Shifting Interferometry).

En interferómetros de desplazamiento de fase, el frente de onda de referencia es movido a lo largo de la dirección de propagación con respecto al frente de onda que está

siendo analizado, cambiando así la diferencia de fases. Midiendo los cambios de intensidad para varios desplazamientos de fase, es posible determinar la fase de una onda relativa a la onda de referencia para cada punto medido de ese frente de onda. La intensidad $I(x,y)$ en el punto (x,y) cambia con la fase y está dado por:

$$I(x,y) = a(x,y) + b(x,y)\cos[\phi(x,y) + \Delta\phi] \tag{B.4}$$

donde $a(x,y)$ describe las variaciones de la intensidad de fondo en el patrón de franjas, $b(x,y)$ describe la amplitud de las franjas, $\phi(x,y)$ es la información de la fase buscada y $\delta\phi$ es un desplazamiento de fase introducido.

La ecuación B.4 contiene tres incógnitas, a, b y ϕ, por lo que se requieren como mínimo tres mediciones de intensidad para determinar la fase. Las mediciones pueden tener cualquier fase, mientras éstas sean conocidas. Se asume entonces que la primera medición es en la fase $\Delta\phi_1$, la segunda en $\Delta\phi_2$, la tercera en $\Delta\phi_3$ y así sucesivamente. La posición cero de estas fases $(\Delta\phi_n)$ será considerada el origen de las coordenadas.

La fase puede ser desplazada de diferentes maneras, entre ellas: moviendo un espejo con un transductor lineal, rotando una placa de vidrio, moviendo una rejilla de difracción, cambiando la frecuencia de una fuente de luz láser, o cambiándolas desde una computadora.

La ventaja de esta técnica es que se obtiene mayor exactitud en la medición, es insensible a las variaciones espaciales de intensidad, detectores de sensibilidad y al ruido en patrones fijos.

B.1.1. Phase-stepping de cuatro pasos

Un algoritmo de detección de fase de muestreo está definido por el número de puntos de muestreo, sus posiciones de fase y sus pesos de muestreo asociados. Aunque tres pasos son suficientes para determinar las tres constantes desconocidas; sin embargo, pequeños errores de medición pueden tener un gran efecto en los resultados. En este caso, el método de cuatro pasos puede obtener mejores resultados.

Los valores de intensidad son medidos utilizando cuatro diferentes valores de fase: $\Delta\phi_1 = 0°$, $\Delta\phi_2 = 90°$, $\Delta\phi_3 = 180°$, y $\Delta\phi_4 = 270°$.

$$\begin{aligned} I_1 &= a + b\cos(\phi) \\ I_2 &= a + b\cos(\phi + 90°) \\ I_3 &= a + b\cos(\phi + 180°) \\ I_4 &= a + b\cos(\phi + 270°) \end{aligned} \tag{B.5}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones B.5 como sigue:

1. Restamos I_2 menos I_4

$$\begin{aligned} I_2 - I_4 &= a + b\cos(\phi + 90°) - a + b\cos(\phi + 270°) \\ &= b[\cos(\phi + 90°) - \cos(\phi + 270°)] \\ &= b[(\cos\phi\cos 90° - \sin\phi\sin 90°) - (\cos\phi\cos 270° - \sin\phi\sin 270°)] \\ &= b[-\sin\phi\sin 90° + \sin\phi\sin 270°] \\ &= b[-\sin\phi - \sin\phi] \\ &= -2b\sin\phi \end{aligned} \tag{B.6}$$

2. Restamos I_2 menos I_4

$$\begin{aligned} I_1 - I_3 &= a + b\cos(\phi) - a + b\cos(\phi + 180°) \\ &= b[\cos(\phi) - \cos(\phi + 180°)] \\ &= b[(\cos\phi) - (\cos\phi\cos 180° - \sin\phi\sin 180°)] \\ &= b[\cos\phi - \cos\phi(-1)] \\ &= 2b\cos\phi \end{aligned} \tag{B.7}$$

3. Dividimos ambas restas B.6 y B.7 para poder omitir b

$$\frac{-2b\sin\phi}{2b\cos\phi} = -\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{I_2 - I_4}{I_1 - I_3} \tag{B.8}$$

se encuentra que la fase ϕ está dada por:

$$\tan\phi = -\frac{I_2 - I_4}{I_1 - I_3} \tag{B.9}$$

En la figura B.1 se muestra un patrón de franjas con un desplazamiento de cuatro pasos.

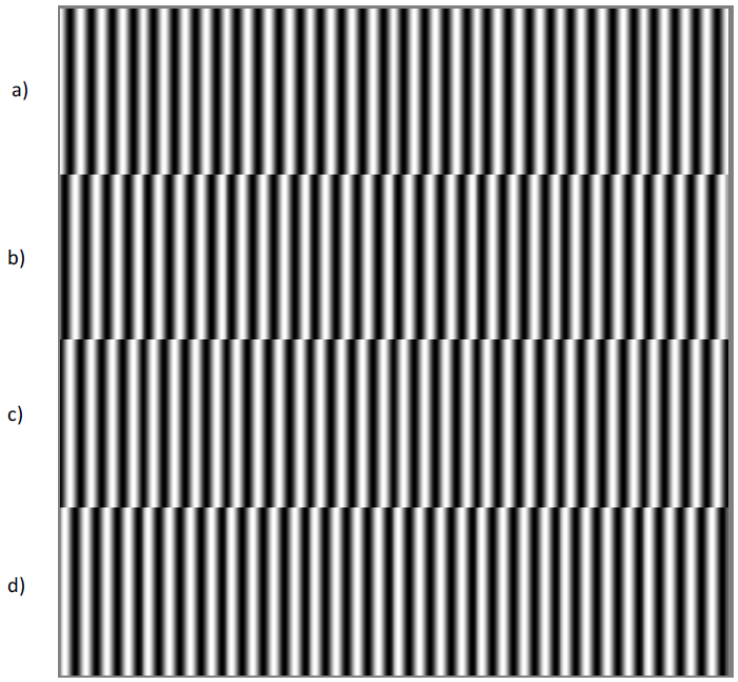


Figura B.1: Patrón de franjas con un corrimiento de cuatro pasos. a) 0, b) $\frac{\pi}{2}$, c) π d) $\frac{3}{2\pi}$

B.2. Desenvolvimiento de fase

Para hallar la fase envuelta utilizan la función arco tangente para obtener la fase, los resultados estarán dados en un rango de $[-\pi, \pi]$. Es necesario entonces utilizar un método de desenvolvimiento de fase (Phase-Unwrapping) para eliminar esos saltos y así poder obtener la topografía del objeto bajo prueba.

El principio básico del desenvolvimiento de fase es “integrar” la fase envuelta ϕ (ob-

tenida en unidades de 2π) a lo largo de un camino de datos, en este caso, a lo largo de las filas y columnas de la matriz de fase envuelta. En cada pixel, el gradiente de la fase se calcula por diferenciación:

$$\Delta\phi = \phi_n - \phi_{n-1} \tag{B.10}$$

En donde n es el número de pixel. Si $|\Delta\phi|$ excede cierto umbral, en este caso de ϕ, entonces hubo un cambio brusco de fase, es decir, el borde de la fase de esa franja tiene una discontinuidad de 2π. Este salto de fase se corrige sumando o restando 2π dependiendo del signo de $\Delta\phi$. Si $\Delta\phi$ es positivo, entonces se le suma 2π, de lo contrario, se le restará 2π.

En caso de que la diferencia entre los dos puntos no exceda el umbral, se suma la diferencia actual más el punto anterior de la fase desenvuelta.

El principio más común usado para corregir los saltos de fase de 2π, está basado en el hecho de que la diferencia de fase entre dos puntos cualesquiera medidos integrando la fase a lo largo de un camino entre los dos puntos, es independiente de la ruta escogida mientras la ruta no pase a través de una discontinuidad de fase.

Este método es solamente adecuado para imágenes en las que se considera que el patrón de franjas está libre de ruidos, ya que de lo contrario, el algoritmo detectará cambios bruscos de fase o discontinuidad que probablemente sean solo ruido.

Para patrones de franjas que presentan mayor ruido, existen otros métodos que se enfocan en resolver los problemas de inconsistencia de la fase.

B.3. Algoritmo para la reconstrucción de objetos

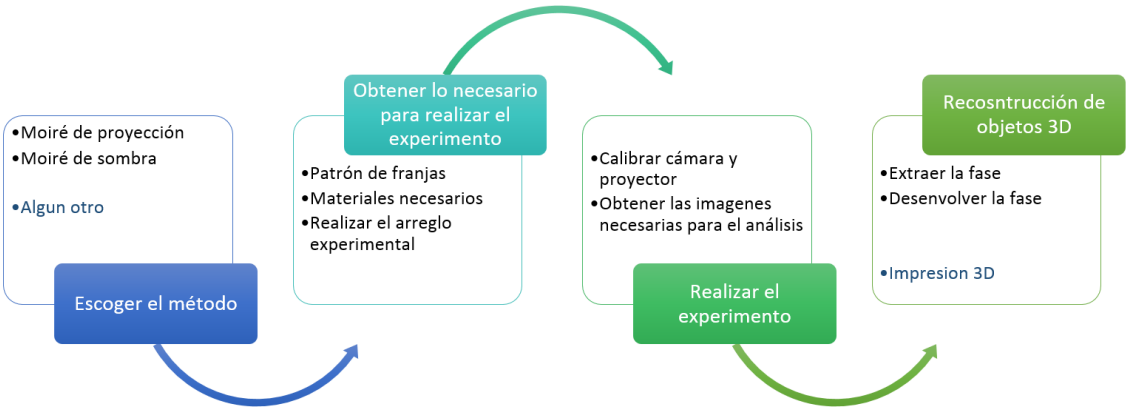


Figura B.2: Algoritmo para la reconstrucción de objetos 3D

La figura B.3 muestra las componentes usuales en esta importante estación de procesamiento.

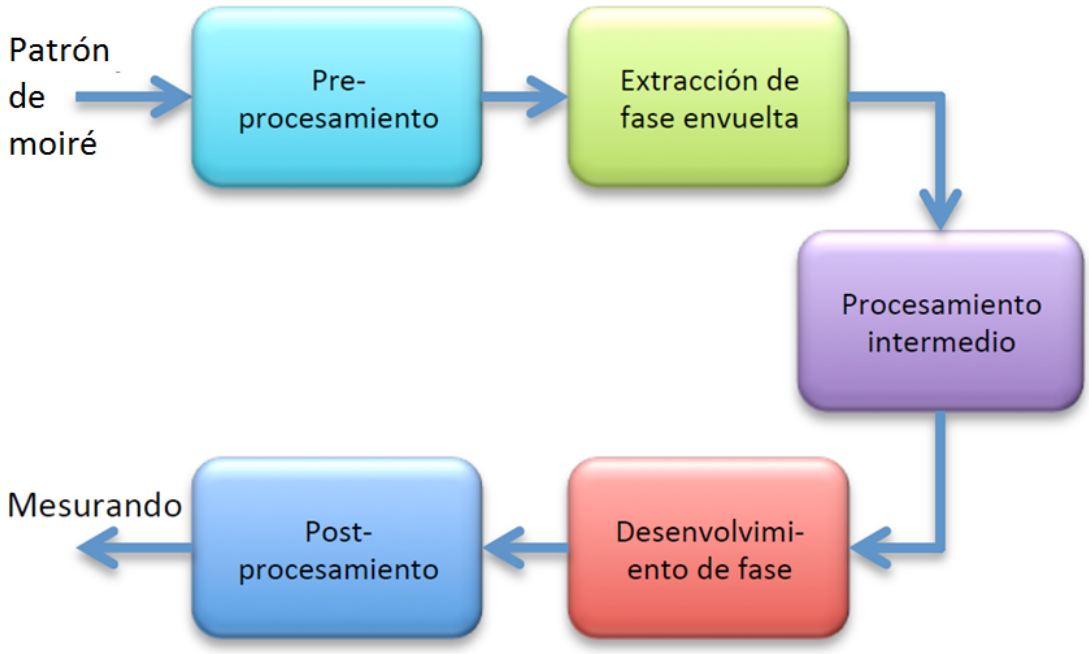


Figura B.3: Estaciones de procesamiento típicas incluidas un bloque de análisis de franjas para extracción de la fase codificada.

En la literatura, a la estación de análisis de franjas también se le conoce como demo-

dulación de fase. Sin embargo, los métodos de demodulación de fase son usualmente divididos en dos partes: la extracción de fase envuelta, y el desenvolvimiento de fase. Por ésta razón, es más conveniente usar el término análisis de franjas para referirse a cualquier estación involucrada en el proceso de demodulación de fase (por ejemplo, filtraje de ruido, normalización de patrones de franjas, etc.).

En la figura B.3 se muestran las estaciones de procesamiento de imágenes, éstas son las etapas que se realizan en la última parte del algoritmo, indicado en la figura B.2.

APÉNDICE

C

Aplicación interesante

Desde 1970, el fenómeno moiré ha sido empleado como un método de diagnóstico clínico en el análisis topográfico del cuerpo humano. Desde entonces, se ha producido una auténtica evolución en el método de la topografía de moiré, que refleja el esfuerzo por mejorar su precisión, así como facilitar la interpretación de los topogramas utilizando un software específico. Japón es el país más avanzado en términos de aplicación de esta técnica. La escuela japonesa introdujo la técnica moiré en el área de la salud, específicamente en el cálculo de contornos, ya que esta técnica permite detectar formas y cambios en espacios y dimensiones en centímetros y milímetros. La técnica de moiré puede implementarse con un montaje sencillo, básicamente una cámara, un proyector, un tripoide y un soporte para la pieza a ensayar, y dependiendo el objetivo puede emplearse un software libre, o incluso crear programas para la reconstrucción de objetos, según el perfil que se tenga.

C.1. Descripción del problema

La detección de enfermedades en la columna vertebral se realiza por lo general con estudios médicos muy costosos, puesto que la investigación de la columna vertebral se basa enteramente de observaciones clínicas, los diagnósticos se basan en de las

deformaciones más grandes y las deformidades mas pequeñas fácilmente pueden ser pasado por alto, especialmente por un investigador inexperto. Una debilidad de la investigación clínica es que la condición de la deformación en la espalda no se puede comparar entre dos exámenes, sin un estudio de rayos X no es posible para ver si hay una deformidad de la columna vertebral. Es aquí donde radica el problema que tiene la sociedad médica, puesto que los estudios para tratar enfermedades que presentan deformidades en el cuerpo humano son de alto costo y poco accesible para muchos médicos. Así introducimos la topografía de moiré, un método poco conocido y también poco utilizado con el cual podemos documentar el estado de la columna vertebral. Este método, es capaz de diagnosticar incluso muy pequeñas asimetrías de la columna vertebral.

A lo largo de estos años han surgido diversos estudios que apoyan la utilización clínica de esta técnica. Así, en 1979, Wilner encuentra una correlación significativa entre la asimetría de moiré y los hallazgos radiográficos. Según este estudio el método de moiré cumple los criterios para un método de cribado:

- Diagnóstico incluso en curvas menores.
- Pequeño riesgo de falsos negativos.
- Simple de manejar.
- Permite documentar la espalda de muchos personas en poco tiempo.

C.2. Descripción del experimento

El aporte consiste en proveer una herramienta que permita la interpretación de la topografía del cuerpo humano, en especial la espalda y el cálculo de sus dimensiones. Se propone el cálculo de éstas basándonos en una técnica que utiliza una rejilla simple, y la visualización en 3D de las imágenes obtenidas con técnicas moiré. Estas técnicas son elegidas por dos aspectos fundamentales:

- El bajo costo que ofrece el trabajo con luz blanca

- La no invasión directa al paciente.

Los resultados capturados a través de estas técnicas se representarán en un mapa topográfico de la espalda, que muestra las medidas de las dimensiones pertinentes y permite comprender, cuantificar y podemos diagnosticar alguna deformación con gran precisión. Por ende, el objetivo principal del presente estudio es el levantamiento de la topografía en la espalda y las medidas de la misma para establecer dimensiones adecuadas en pacientes que asisten a la consulta con fisioterapeutas o doctores generales.

Para comprobar el experimento se realizaron tres fases:

La primera fase consiste en elegir una técnica de moiré adecuada, ajustándonos a los materiales que se tenían en el laboratorio y los que podíamos conseguir. En esta etapa se eligió moiré de sombra, por lo que se programó en Mathematica las rejillas que se requerían y se imprimieron las rejillas para las primeras pruebas en acetatos. Se obtuvieron los materiales necesarios para realizar el experimento, la cámara, el proyector, una superficie opaca, una computadora para poder recabar la información.

La segunda fase se experimentó con objetos pequeños, nuestra medida de la rejilla fue de 21cm de alto y 27cm de ancho, por lo que nuestros objetos no excedían dichas medidas. Las primeras pruebas se hicieron con objetos simétricos como bolas de unicel, conos y posteriormente se fue haciendo mas complejo el objeto a analizar, por lo que se comenzó a experimentar con partes del cuerpo humano, como son caras, manos y verificar que se obtuvieran las curvas de nivel.

En la tercera fase se realizó el experimento en espaldas de estudiantes de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, sólo para corroborar que los materiales que se tienen, funcionan para mediciones médicas de la espalda.

C.3. Materiales para el experimento en las técnicas de moiré

Para la parte experimental tendremos que saber que técnica de moiré es la que se va a utilizar.

Moiré de sombra Necesitamos lo siguiente:

- Una rejilla
- Una cámara
- Superficie lisa con la que se va a trabajar
- Objeto a analizar
- Computadora en donde se va a recabar la información
- Luz que se proyectará sobre la rejilla

Moiré de Proyección Para este método requerimos:

- Dos rejillas
- Una cámara
- Superficie lisa con la que se va a trabajar
- Objeto a analizar
- Computadora en donde se va a recabar la información
- Proyector

C.3.1. Descripción de los materiales del experimento

El aparato consta de los siguientes componentes. El marco moiré (con una abertura de 75 x 60 cm) está hecho de acrílico transparente en donde las franjas fueron realizadas con vinil, la rejilla tiene un marco del mismo material; las franjas miden 5mm de ancho y 55cm de largo, su espaciado es de la misma medida. Dicho marco está fijado a un marco de aluminio que se puede subir o bajar con el fin de facilitar la investigación de los pacientes de varias alturas. La fuente de luz es emitida por un proyector.

C.4. Calibración del experimento

El procedimiento de calibración de la técnica se refiere al análisis de la superficie de un objeto con una geometría conocida con el fin de evitar marcas directos en la superficie bajo evaluación desde se están realizando. Además, es posible reconstruir la geometría de un objeto conocido a partir de las franjas generadas y para calcular el error estándar del instrumento, que le dará la precisión de los equipos utilizados durante la realización de la técnica [28].

El proceso para calibrar es el siguiente:

1. El proyector alumbra la superficie
2. Se alinea perpendicularmente la cámara con el proyector y la superficie
3. Hacer un cono de dimensiones conocidas y colocarlo sobre la superficie
4. Tomar la imagen con el efecto moiré sobre el cono
5. Reconstrucción de fase

El posicionamiento de la cámara y la fuente de luz puede variar. Por ejemplo, la fuente de luz puede estar por encima de la cámara y ambos alineados exactamente en el mismo plano. Además, la fuente de luz puede estar situado un poco por delante de la cámara y más cerca de la rejilla. Otras metodologías alternativas para la aplicación de moiré topografía son:

- Posicionamiento de la fuente de luz y el lado de la cámara al lado del otro y, al mismo nivel, pero se mantiene la incidencia oblicua de la luz en la rejilla.
- Utilizar una fuente de luz móvil
- Reemplazar la cámara con una cámara de vídeo. [28].

La rejilla móvil puede moverse horizontalmente en delante del objeto en estudio. En relación con la cámara, la apertura del equipo debe ser suficiente para incluir en el campo de visión tanto de la rejilla y su sombra.

C.5. Solución del problema

Mediante la revisión de la literatura científica, es evidente que algunas de las técnicas de moiré son más utilizadas que otras, para el análisis de la superficie, en cambio moiré de sombra parece ser el mejor para la evaluación de las desviaciones de la columna vertebral y/o del tronco.

La utilización del moiré de sombra muestra una solución al problema de caracterizar superficies del cuerpo humano en reposo ya que permite obtener información cuantitativa y cualitativamente superior a la obtenida por las técnicas convencionales.

El objetivo central de esta investigación es la instrumentación del moiré de sombra para la medición de la topografía de la espalda y miembros inferiores en seres humanos, que permita la caracterización de deformaciones y su vinculación con enfermedades del sistema óseomuscular del cuerpo humano, tales como: las enfermedades de la columna vertebral.

Para realizar el estudio de la topografía de partes del cuerpo humano en reposo se utiliza un sistema experimental acorde a la configuración requerida por el moiré de sombra. Este sistema experimental está formado fundamentalmente por: sistema de obtención del patrón moiré, sistema de registro de la información y sistema de procesamiento de la información.

El sistema de formación del patrón moiré está formado por: una placa con un patrón de franjas, un proyector, soporte para la la pantalla con el patrón de franjas que permita el desplazamiento vertical de la misma y soporte para el proyector que permita el movimiento angular y altura. Todo lo anterior se dispuso en un sistema experimental como muestra la figura

Con este método las asimetrías entre las dos mitades de una espalda puede ser estudiado y registrado mediante la comparación de los patrones de moiré. Si la columna está erguida y sin rotación estos patrones de franjas será simétrica. Si, por otro lado, existe una escoliosis estructural diferentes características poseen las curvas de nivel que generan los patrones de franjas, los cuales provocan el efecto moiŕe que se utiliza en moiré de sombra.

Para realizar el estudio del caso mediante moiré de sombra se sigue la siguiente metodología:

- Disponer los elementos del sistema experimental.
- Colocar al paciente en posición parado detrás del patrón de franjas.
- Iluminar con el proyector y fotografiar el patrón moiré obtenido en su espalda.
- Evaluar los patrones moiré registrados.
- Hacer un diagnóstico de acuerdo a los resultados obtenidos por moiré de sombra.

C.5.1. Interpretación de las imágenes con patrón de moiré

El análisis médico de las imágenes moiré se basa en la simetría de los márgenes de ambos lados en diferentes regiones del cuerpo. Por lo tanto, se clasifica principalmente como un análisis cualitativo. Por mucho que los parámetros cuantitativos son importantes en el diagnóstico de asimetrías corporales, no se puede negar que la inspección visual de las imágenes proporciona información absolutamente relevante para el evaluador y útil en el proceso de toma de decisiones que sigue. Sabemos que una superficie tiene deformaciones si existen cambios en las curvas de nivel que son creadas por el patrón de moiré, es decir, lo pasos para interpretar una imagen son:

1. Observar si la superficie es simétrica.
2. Si las franjas de moiré tienen mayor periodo la superficie muestra una concavidad.
3. Si el periodo de las franjas de moiré es disminuido esta indicando una convexidad.

Puesto que la asimetría en el patrón de moiré indica concavidades y convexidades, podemos deducir las siguientes proposiciones:

- Podemos diagnosticar escoliosis toráxica y toracolumbar si la asimetría de la espalda se observa que las franjas de moiré se inclinan hacia la columna vertebral y hay asimetría en las nalgas.

- Como los omóplatos son superficies convexas, si existe una diferencia entre las curvas de nivel de cada omóplato, podemos decir que el paciente presenta una escoliosis superior. En cambio, si la escoliosis se encuentra en la mitad inferior de la columna toráxica y la columna lumbar entonces podemos decir que el paciente solo presenta probelas en alguna escápula.

- Si las curvas de nivel muestran alguna deformación, pero éstas nos son tan pronunciadas decimos que existen “contracturas” en los músculos paravertebrales. Es decir, a la mitad de la espalda sobre la columna se producen curvas deformadas suaves pero evidentes.

- Cuando existe escoliosis en la columna toráxica media la simetría del patrón de moiré es visible a los lados de los omóplatos, hacia abajo de los hombros

- Si notamos una curva convexa en la parte superior media entonces lo que observamos es una joroba por mal posicionamiento.

Cabe mencionar que la técnica de moiré es muy sencible, por lo que se puede diagnósticar alguna deformación para “columnas normales”.

Ejemplos:

- La siguiente fotografía es una espalda con escoliosis toracolumbar, observamos que las franjas de moiré se inclinan hacia la columna vertebral y hay asimetría en las nalgas.

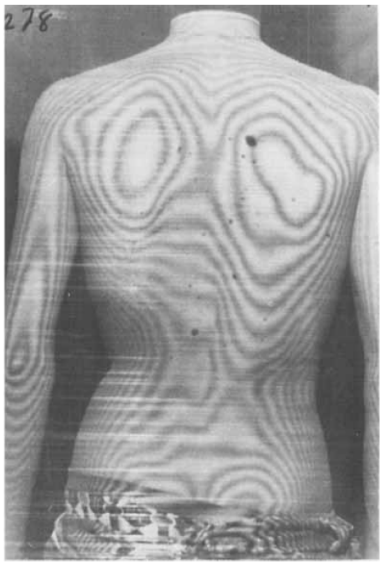


Figura C.1: Espalda con escoliosis toracolumbar

- Podemos observar la espalda de una niña de 10 años de edad, con un área convexa derecha, ella tiene escoliosis toráxica. La desviación de las franjas de moiré se ve entre los dos puntos simétricos A_1 y A_2, lo que indica dicha convexidad. Se observa tambien una desviación en el área escapular, el periodo de las franjas de moiré aumenta en el omóplato izquierdo.

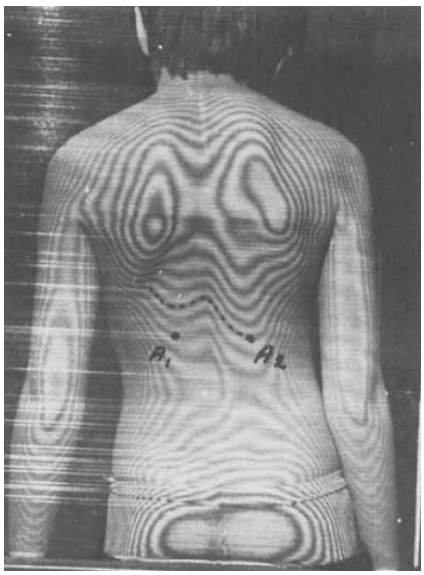


Figura C.2: Espalda con escoliosis toráxica

- La figura C.3 muestra la espalda de una niña de 16 años de edad, con una curva

convexa toráxica y una curva toracolumbar convexa izquierda. Los puntos A_1 y A_2 que deberian ser simétricos, no lo son, ya que se encuentran en diferentes líneas de contorno. Lo mismo sucede con los B_1 y B_2.

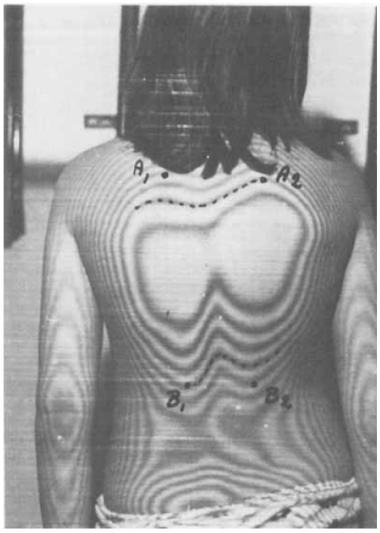


Figura C.3: Espalda con escoliosis. Curvas convexas

- En la figura C.4 podemos observar como en su mayoría las curvas de nivel son simétricas,sin embargo éste jóven tiene contracturas en la espalda baja, solo por un mal posicionamiento.

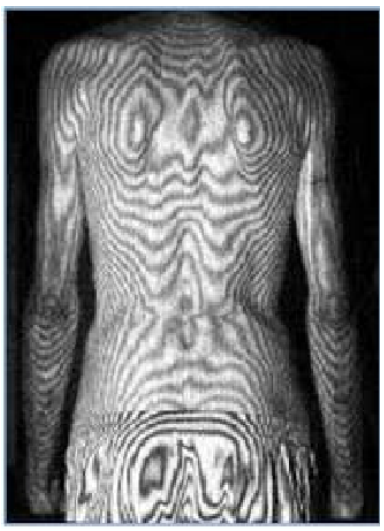


Figura C.4: Líneas de contorno sobre una espalda

Al evaluar la superficie del cuerpo humano ciertos patrones de franjas se perciben en función en el área estudiada. En este sentido, de acuerdo con Cline, Lorensen y Holik [28], las franjas convergen al centro de la imagen cuando la superficie es muy inclinada. Esta se produce, por ejemplo, en individuos muy delgados o aquellos que se presentan con cifosis torácica. Sin embargo, cuando las superficies son muy estrechas, las pausas entre los píxeles impiden automática construcción de la imagen. Las superficies no uniformes con baja reflectancia podrían no generar patrones de franjas limpias. Otros patrones moiré complejas que hacen que el análisis de topogramas difícil ocurren cuando los individuos para la evaluación son obesos, según Ruggerone y Austin [28].

C.6. Resultados del experimento

Las franjas de “moiré” muestran muy bien diferencias en la simetría de la espalda del sujeto. En la espalda normal, el patrón de la sombra de moiré es igual en ambas mitades de la espalda. En una escoliosis, el patrón de moiré difiere más con el aumento de la deformidad. Estos patrones de sombras consisten en líneas de contorno que pueden ser comparadas con un mapa de relieve, por ejemplo la figura C.4 que es casi simétrica debe ser comparada con la figura C.5.

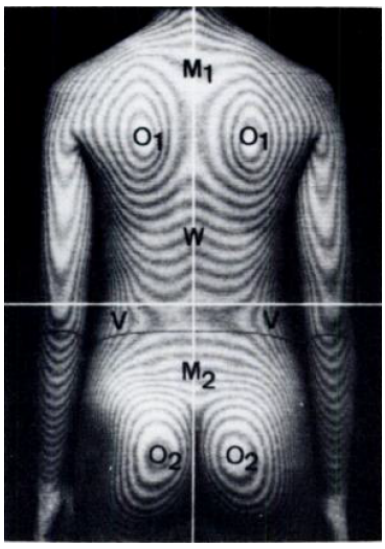


Figura C.5: Espalda simétrica

Cabe destacar que por ser éste un estudio piloto es recomendable el ajuste de algunos factores al momento de tomar la fotografía: fijar la distancia camara-paciente, usar un fondo negro para evitar los efectos de brillo en la fotografía, evitar el uso del zoom digital y objetos brillantes y limpiar los rostros sudorosos previa fotografía para obtener de este modo aún mejor nitidez en la imagen.

La tabla C.1 muestra algunos resultados que se han obtenido a lo largo de la historia, estos autores han logrado avances con utilizar las técnicas de moiré, en especial moiré de sombra.

Existen resultados que el lector puede revisar en [25] en donde se ven re flejados los resultados de sensibilidad y especificidad que se obtuvo en la comparación con diferentes técnicas entre ellas moiré por sombra, la siguiente tabla C.2 muestra éstos resultados

Autor	Resultados
Willner 1979 [12]	Correlación estadísticamente significativa entre las observaciones clínicas, la radiografía y la asimetría de moiré, por lo que éste Ã°ltimo es útil para el cribado.
Frontino 1980 [13]	La topografía de moiré es simple, inocua, capaz de detectar y documentar incluso pequeñas deformidades, posibilitando la comparación con sus exámenes subsecuentes
Shinoto 1981 [14]	Los parámetros estimaron bien la condición vertebral. La mejoría de las deformidades mediante tratamiento, no siempre se correlaciona con un cambio de la columna a nivel radiográfico.
Sehlstrand 1986 [15]	No correlación entre asimetría de moiré y ángulo de Cobb, pero tiene un valor clínico, complementando el examen físico en el cribado y en la observación longitudinal de la escoliosis.
Denton 1992 [16]	Es útil para determinar el grado de porogresión
Ono 1995 [17]	Diferencias estadísticamente significativas entre Hump Sum y el ángulo de Cobb: La escoliosis y la deformidad costal son independientes el uno del otro y deben ser evaluados por separado.
Pruijs 1er estudio 1995 [18]	Reducción significativa (37 %) de pacientes referidos al especialista: Las tres técnicas (altura giba costal, ATR y topografía de moiré) valiosas en el cribado escolar, sin diferencias significativas entre ellas.
Pruijs 2do estudio 1995 [19]	La variabilidad intra e interobservador para la topografía de moiré fue demasiado grande: Sólo acepta como válido en el seguimiento, el ángulo de Cobb y ATR.

Tabla C.1: Resultados de trabajos basados en la topografía de moiré

	Test de Adams	Topografía de moiré	Medida giba	Escoliómetro
Sencibilidad	84.37 %	100 %	93.75 %	90.62 %
Especificidad	93.44 %	83.5 %	78.11 %	79.76 %

Tabla C.2: Estudio comparativo de distintos métodos de screening de la escoliosis.

Bibliografía

[1] Sesé Felipe, Lopez-Alba E., Diaz A. , *Sistema de bajo coste para la medida de formas en tres dimensiones* , Departamento de Ingenieria Mecánica y Minera,España (2013)

[2] Lopez Alba Elías, Felipe Sesé Luis, Vasco-Olmo Jose Manuel, Díaz Garrido Francisco Alberto, *Aplicaciones industriales de técnicas Opticas de campo completo para la medida de Tensiones y Deformaciones de Máquinas* ,España, (2013).

[3] Ludovico Beraldo Antonio, albiero Daniel, da Silva Maciel Antonio José, dal Fabro Maria Inacio, Rodrigues Silvestre *Técnica de Moiré aplicada al análisis de esfuerzos de compresión en el bambú Guadua.*, Brasil ,(2006).

[4] Ojeda Jorge, Eliezer Jara, Ibarra Jorge, *Franjas de Moiré*,.

[5] Cloud, Gary *Optical Methods of Enginering Analysis*Cambridge University Press 1998.

[6] Malacara Daniel. Optical Shop Testing, Second Edition. ISBN $0-471-52232-5$©1992, John Wiley and Sons, inc.

[7] Theocaris P. Moire Fringes in Strain Analysis 2a ed. Oxford: Pergamon Press; 1969

[8] Durelli A, Parks V. Moiré Analysis of Strain. 4ed. Prentice Hall, Inc: New Jersey; 1970.

[9] Chiang F, Shadow A. moiré method. Exp. Mech 1975.

[10] Creath K, Wyant C. Moiré an Frinje Projection Techniques Optical Shop testing. 2nd. ed. Jhon Wiley and Sons; 1992.

[11] Martínez A, Rayas J, Flores J, Rodriguez R, Donato D. Técnicas ópticas para el Contorneo de Superficies Tridimencionales. Rev Mex Física 2005.

[12] Willner S. Moiré topography: A method for school screening scoliosis. Arch Orthop Trauma Surg 1979; 95:181-5.

[13] Frontino G, Negri V, Rinaldi E. [Photographic moiré method for preliminary diagnosis of spine deformity (author's transl)]. Ateneo Parmense Acta Biomed 1980; 51:33-8.

[14] Shinoto A. Quantitative analysis of scoliotic deformity by Moiré method. Nihon Seikeigeka Gakkai Zasshi 1981; 55:1703-18

[15] Sehlstrand T. The clinical value of Moiré topography in the management of scoliosis. Spine (Phila Pa 1976) 1986; 11:409-17.

[16] Denton TE, Randall FM, Deinlein DA. The use of instant moiré photographs to reduce exposure from scoliosis radiographs. Spine (Phila Pa 1976) 1992; 17:509-12.

[17] Ono T. Trunk deformity in scoliosis studied by surface measurement. Nippon Seikeigeka 1995; 69:915-26.

[18] Pruijs JE, Keessen W, van der Meer R, van Wieringen JC. School screening for scoliosis: the value of quantitative measurement. Eur Spine J 1995; 4:226-30.

[19] Pruijs JE, Stengs C, Keessen W. Parameter variation in stable scoliosis. Eur Spine J 1995; 4:176-9.

[20] Malacara, D., ed., Optical Shop Testing, Wiley, 1988.

[21] Malacara, D., M. Servín, Z. Malacara, Interferogram Analysis for Optical Testing, 1998.

[22] Rodriguez Zurita Gustavo. Interferometría Óptica Contemporanea, Ideas Fundamentales, BUAP, FCFM

[23] Milena P. Zaira, Romero P. Lenny A. Meneses F. Jaime E. Sistema óptico de reconstrucción tridimensional para la detección de ampollas en recubrimientos. Universidad Industrial de Santander. 2004

[24] Juárez Salazar,Rigoberto Extraccion de fase para aplicaciones automáticas en tiempo real, 2014.

[25] Pino Almero, M. F. Miguezrey, R.M. Cibrian Revisión y actualización de la eficacia de screening o cribado en la escoliósis idiópatica del adolescente. Revista Española de Cirugía Osteoarticular. No. 260 Vol. 49, 2014.

[26] Moreno Yeras A. Estudio de enfermedades del sistema óseo muscular mediante la topografía de moiré. Sociedad Cubana de Biogeniería,(2005), Art T106 ISBN 954 212 158 3

[27] Daruwalla, J.S.; Balasubramanian, P. Moiré Topography in scoliosis. British Bone and Joint Surgery. Vol 67, nQ 2, marzo 1985

[28] Flavia Porto, Jonas L. Gorgel, Thaís Ressomano, Paulo T. V. Farinatti. REcent Advances in Scoliosis, Theodoros Grivas Moiré Topography: From Takasaki Till Present Day. Mayo (2012) ISBN 978 953 51 0595 4

[29] Lopez Domiguez Yolanda Y. Martinez García A. Topometria y asociación de color real de los objetos. CIO (2010)

[30] Anastasi Robert F. An introduction to moiŕe methods with applications in composte materials. (1992)

[31]

[32]

[33]

[34]

[35]

[36]

Índice alfabético

Efecto moiré, 25, 29
    Franjas de moiré, 30
    Rejilla, 29
    Rejilla binaria, 60

Función de transmisión de intensidad, 29

Funciones Periódicas, 27
    Coseno, 28
    Seno, 27

Interferómetro, 10
Interferencia, 9
Interferometría, 9

Métodos Ópticos, 6

Paralaje, 17

Series de Fourier, 61

Técnicas de moiré, 11
    Geométrico, 14
    Interferométrico, 13
    Métodos, 12
    Proyección, 19
    Reflexión, 16
    Sombra, 17