Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ESPACIOS COCIENTE Y ENCAJES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
ANTONIO DE JESÚS LIBREROS LÓPEZ

DIRECTORES DE TESIS
DR. DAVID HERRERA CARRASCO
DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO

PUEBLA, PUE. JUNIO DE 2016.

Dedicatoria

A mis padres.
Juan Antonio Libreros Flores
Martha López Rivera

A mis hermanos.
Juan Carlos Libreros López
Jose David Libreros López
Martha Arale Libreros López

Agradecimientos

Al finalizar un trabajo tan arduo y lleno de dificultades como lo es el desarrollo de una tesis es inevitable que te asalte un muy humano egocentrismo que lleva a concentrar la mayor parte del mérito en el aporte que has hecho. Sin embargo, el análisis objetivo muestra inmediatamente que la magnitud de ese aporte hubiese sido imposible sin la participación de personas que han facilitado las cosas para que este trabajo llegue a un buen término. Por ello, es para mí un verdadero placer utilizar este espacio para ser justo y consecuente con ellas, expresándoles mis agradecimientos.

Le doy gracias a Dios por darme la sabiduría e inteligencia para poder tomar buenas decisiones y superar todos los obstaculos que me ha puesta la vida, pudiendo así llegar hasta este momento. A mi mamá por siempre cuidar de mí, desearme éxito en todo lo que me propongo y por darme el cariño y apoyo que siempre necesito, a mi padre por ser un ejemplo a seguir, apoyarme en mis desiciones, darme consejos para seguir adelante y guiarme en la vida.

Agradezco a mis hermanos por siempre creer en mí para lograr todo lo que me propongo, estar a mi lado en los momentos más divertidos y, en ocasiones, frustantes, por compartir los mismos pasatiempos que nos llevan a relacionarnos mejor, y además de siempre contar con su apoyo en los proyectos que quiero llevar a cabo.

También agradezco a aquellos profesores de esta facultad como Tajonar, Fraguela, Carrasco, Jacome, Soriano y Bykov pues gracias a ellos pude tener una buena formación académica y una inspiración para seguir aprendiendo má cada dia. Un agradecimiento especial al Dr. David Herrera Carrasco por invitarme a trabajar con él en esta área de la matemática, la Topología, y al Dr. Fernando Macías Romero por su apoyo en la realización y trámite de esta tesis.

Introducción

La presente tesis está enfocada a dos conceptos muy usados en distintas ramas de la matemática, y que en el caso de la topología son conocidos como espacios cociente y encajes. La tesis está divida en tres capítulos y para la elaboración de este trabajo se recurrió a la bibliografía señalada.

En el primer capítulo iniciamos con conceptos preliminares para que el lector pueda comprender lo abordado en los siguientes capítulos de la tesis, también analizamos algunas equivalencias de las definiciones dadas, teoremas sobre imagenes continuas, propiedades topológicas, entre otras cosas, y así como algunos ejemplos simples que muestran lo presentado.

El capítulo dos, dividido en cuatro secciones, está dedicado a los espacios cociente, los cuales son construidos a partir de un espacio topológico X, y una partición G o una relación de equivalencia $\sim$. A este espacio cociente X/G (o bien $X/\sim$) se le dota de una topología, la topología cociente, mediante la función cociente $P : X \to X/G$. Además, en la primera sección se construye una función de especial interes $\Phi_f : X/G_f \to Y$ apartir de una función $f : X \to Y$ continua y suprayectiva, mostrando que Φ_f es biyectiva y continua pero no siempre un homeomorfismo, dando algunas condiciones para que Φ_f lo sea.
En la sección dos de este capítulo mencionamos dos espacios cociente, el cono y la suspensión, que son un caso particular de espacios cociente construidos mediante dos espacios X y Y ajenos y una función $f : A \to Y$ continua con A cerraddo en X no vacío, dando el efecto de que A es pegado con su imagen $f(A)$, a este espacio cociente $X \cup_f Y$ es llamado la adición de X y Y por f. Además, se prueba que $X \cup_f Y$ preserva algunas propiedades de X y Y.
En la tercera sección nos encargamos de introducir lo que es una función de identificación, dando una caracterización de estas y contribuyendo con

otra condición para que Φ_f sea un homeomorfismo. Finalmente, en la ultima sección hacemos una generalización de la topología cociente, la topología fuerte, con la cual establecemos una clase de espacios conocidos como k-espacios, probando una equivalencia de estos espacios y un teorema interesante para los espacios métricos.

En el último capítulo se abordan los encajes, particularmente de continuos que son espacios métricos no vacíos, compactos y conexos. Mostrando que cualquier continuo se puede encajar en el Cubo de Hilbert siendo así un continuo universal. Además, se ve que es una dendrita y que existe una dendrita universal en $\mathbb{R}$. Por último, revisamos que es una n-sombrilla y que no puede ser encajable en $\mathbb{R}^n$.

Índice

Espacios cociente y encajes

Antonio de Jesús Libreros López

5 de julio de 2016

Capítulo 1

Preliminares

La presente tesis requiere introducir la notación que se empleará a lo largo de está, además de presentar definiciones y resultados que seran de utilidad para la comprensión de los conceptos y la prueba de teoremas que se abordaran en los siguientes capítulos.

1.1 Espacios topológicos

Definición 1.1. *Sea X un conjunto. Una* ***topología*** *en X es una familia $\mathscr{T}$ de subconjuntos de X que satisface:*

(1) $\emptyset, X \in \mathscr{T}$.

(2) *La union de miembros de $\mathscr{T}$ es también un miembro de $\mathscr{T}$.*
(Si $\mathcal{U} \subset \mathscr{T}$, entonces $\bigcup \mathcal{U} \in \mathscr{T}$).

(3) *La intersección finita de miembros de $\mathscr{T}$ es un miembro de $\mathscr{T}$.*
(Si $\mathcal{V} \subset \mathscr{T}$ es subfamilia finita, entonces $\bigcap \mathcal{V} \in \mathscr{T}$).

A la pareja $(X, \mathscr{T})$ se le llama ***espacio topológico****.*

A los miembros de la topología se les llama ***conjuntos abiertos***, y cuando no sea necesario especificar la topología diremos simplemente que X es un espacio topológico.

Definición 1.2. *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Una familia $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ es llamada una* ***base*** *para $\mathscr{T}$ si cada conjunto abierto es la unión de miembros de $\mathscr{B}$.*

Definición 1.3. *Sea* $(X, \mathscr{T})$ *un espacio topológico y* $x \in X$*. Una familia* $\mathscr{B}_x \subset \mathscr{T}$ *es llamada una* ***base local*** *de* x *si* $\mathscr{B}_x$ *es base para* $\mathscr{T}$ *y cada miembros de* $\mathscr{B}_x$ *contiene a* x*.*

Definición 1.4. *Sea* X *un espacio topológico y* $F \subset X$*. Diremos que* F *es cerrado en* X *si y solo si* $X - F$ *es abierto en* X*.*

Definición 1.5. *Sea* X *un espacio topológico y* $A \subset X$*.*

(a) *El* ***interior*** *de* A *en* X*, denotado por* $int_X(A)$*, es* $int_X(A) = \bigcup\{U \subset X : U \subset A \text{ y } A \text{ es abierto en } X\}$.

(b) *La* ***cerradura*** *(o clausura) de* A *en* X*, denotado por* $cl_X(A)$*, es* $cl_X(A) = \bigcap\{F \subset X : A \subset F \text{ y } F \text{ es cerrado en } X\}$.

(c) *La* ***frontera*** *de* A *en* X*, denotado por* $fr_X(A)$*, es* $fr_X(A) = cl_X(A) \cap cl_X(X - A)$.

Definición 1.6. *Sea* X *un espacio topológico y* $D \subset X$*. Decimos que* D *es* ***denso*** *en* X *si* $cl_X(D) = X$*.*

Ejemplo 1.7. *Algunos ejemplos son:*

(i) *El conjunto de los numeros racionales* $\mathbb{Q}$ *es denso en* $\mathbb{R}$*.*

(ii) *El conjunto de los numeros iracionales* $\mathbb{I}$ *es denso en* $\mathbb{R}$*.*

Definición 1.8. *Sea* $(X, \mathscr{T})$ *un espacio topológico y* $Y \subset X$*. La* ***topología inducida*** $\mathscr{T}_Y$ *sobre* Y *es* $\{Y \cap U : U \in \mathscr{T}\}$*. Decimos que* $(Y, \mathscr{T}_Y)$ *es un* ***subespacio*** *de* $(X, \mathscr{T})$*.*

Teorema 1.9. *[3, Teorema 7.3] Sea* X *un espacio topológico y* Y *subespacio de* X*. Si* $A \subset Y$ *es cerrado (abierto) en* Y*, y* Y *es cerrado (abierto) en* X*, entonces* A *es cerrado (abierto) en* X*.*

Definición 1.10. *Sean* X *y* Y *espacios topológicos. Una función* $f : X \to Y$ *se dice que es* ***continua*** *si y solo si para cada abierto* U *en* Y*,* $f^{-1}(U)$ *es abierto en* X*.*

Teorema 1.11. *[3, Teorema 8.2] Sean* X*,* Y *y* Z *espacios topológicos.*

(a) *Si* $f : X \to Y$ *y* $g : Y \to Z$ *son continuas, entonces* $g \circ f : X \to Z$ *es continua.*

(b) *Si* $f : X \to Y$ *es continua y* $A \subset X$ *es subespacio de* X*, entonces* $f|_A : A \to Y$ *es continua.*

(c) *Si* $f : X \to Y$ *es continua y* $f(X) \subset Y$ *es subespacio de* Y*, entonces* $f : X \to f(X)$ *es continua.*

Teorema 1.12. *[3, Teorema 8.3] Sean* X *y* Y *espacios topológicos. Entonces* $f : X \to Y$ *es continua si y solo si para cada cerrado* F *en* Y*,* $f^{-1}(F)$ *es cerrado en* X*.*

Definición 1.13. *Sean* X *y* Y *espacios topológicos. Decimos que una función* $f : X \to Y$ *es* ***abierta*** *(**cerrada**) si y solo si para cada abierto (cerrado)* A *en* X*,* $f(A)$ *es abierto (cerrado) en* Y*.*

Definición 1.14. *Sean* X *y* Y *espacios topológicos. Una* ***homeomorfismo*** *(o biyección bicontinua) es una función* $h : X \to Y$ *continua y biyectiva tal que* $h^{-1} : Y \to X$ *es también continua. Decimos que* X *es* ***homeomorfo*** *a* Y *si existe un homeomorfismo de* X *sobre* Y*.*

Ejemplo 1.15. *La superficie de un cubo* C *es homeomorfo a la esfera unitaria* $\mathscr{S}^2$ *en* $\mathbb{R}^3$*. Supongamos que* C *está centrado en* $\mathbb{R}^3$*, entonces la función* $h : C \to \mathscr{S}^2$*, definida para cada* $p \in C$*, por* $f(p) = \frac{p}{||p||}$ *es un homeomorfismo.*

Definición 1.16. *Una propiedad* $\mathcal{P}$ *de un espacio topológico* X *es un* ***invariante topológico*** *(o* ***propiedad topológica****) si todo espacio topológico homeomorfo a* X *también tiene la propiedad* $\mathcal{P}$*.*

Teorema 1.17. *[3, Teorema 12.2] Sean* X *y* Y *espacios topológicos y* $f : X \to Y$ *biyectiva. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) f *es un homeomorifsmo.*

(2) f *es continua y abierta.*

(3) f *es continua y cerrada.*

Definición 1.18. *Sea* X *y* Y *espacios topológicos y* $f : X \to Y$ *una función. Entonces* f *es un* ***encajamiento*** *si* $f : X \to f(X)$ *es un homeomorfismo. Decimos que* X *es* ***encajable*** *en* Y *si existe un encajamiento de* X *a* Y*.*

Teorema 1.19. *Sean* X *y* Y *espacios topológicos. Si* $f : X \to Y$ *es continua, inyectiva y abierta (cerrada), entonces* $f : X \to Y$ *es un encajamiento.*

Demostración. Como $f : X \to Y$ es continua e inyectiva, por le Teorema 1.11(c), tenemos que $f : X \to f(X)$ es continua y biyectiva. Veamos que $f : X \to f(X)$ es abierta (cerrada). Sea A abierto (cerrado) en X, entonces $f(A)$ es abierto (cerrado) en Y. Desde que $f(A) \subset f(X)$, tenemos que $f(A)$ es abierto (cerrado) en $f(X)$. Así, $f : X \to f(X)$ es abierta (cerrada). Luego, por el Teorema 1.17, $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo. Por lo tanto, $f : X \to Y$ es un encajamiento. □

1.2 Axiomas de separación

Definición 1.20. *Sea X un espacio topológico. Decimos que:*

(a) *X es T_0 (o de **Kolmogórov**) si y solo si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existe un abierto U que contiene uno de los puntos y no contiene el otro punto.*

(b) *X es T_1 (o de **Fréchet**) si y solo si para cada par de puntos $x, y \in X$ existen abiertos U, V tales que $x \in U$ pero $y \notin U$, y además $y \in V$ pero $x \notin V$.*

(c) *X es T_2 (o de **Hausdorff**) si y solo si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existen abiertos U, V ajenos tales que $x \in U$, $y \in V$.*

(d) *X es T_3 (o **regular**) si y solo si para cada punto $x \in X$ y cualquier cerrado $F \subset X$ tal que $x \notin F$ existen abiertos U, V ajenos tales que $x \in U$ y $F \subset V$.*

(e) *X es T_4 (o **normal**) si y solo si para cada par de cerrados $F, G \subset X$ ajenos existen abiertos U, V ajenos tales que $F \subset U$ y $G \subset V$.*

El siguiente teorema muestra que ser T_0, T_1, T_2, T_3 y T_4 es una propiedad topológica.

Teorema 1.21. *Sean X y Y espacios topológicos, y $f : X \to Y$ un homeomorfismo.*

(a) *Si X es un espacio de Kolmogórov, entonces Y es de Kolmogórov.*

(b) *Si X es un espacio de Fréchet, entonces Y es de Fréchet.*

(c) *Si X es un espacio de Hausdorff, entonces Y es de Hausdorff.*

(*d*) *Si X es un espacio regular, entonces Y es regular.*

(*e*) *Si X es un espacio normal, entonces Y es normal.*

Demostración. (*a*) Sean $y_1, y_2 \in Y$, entonces existe $x_1, x_2 \in X$ tal que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Como X es de Kolmogórov, tenemos que existe U abierto en X tal que contiene solamente a x_1 ó solamente a x_2. Luego, $f(U)$ es abierto en Y tal que contiene solamente a y_1 ó solamente a y_2. Por lo tanto, Y es de Kolmogórov.

(*b*) Sean $y_1, y_2 \in Y$, entonces existe $x_1, x_2 \in X$ tal que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Como X es de Fréchet, tenemos que existen abiertos U, V en X tales que $x_1 \in U$ y $x_2 \in V$. Luego, $f(U)$, $f(V)$ son abiertos en Y tales que $y_1 \in f(U)$ y $y_2 \in f(V)$. Por lo tanto, Y es de Fréchet.

(*c*) Sean $y_1, y_2 \in Y$, entonces existe $x_1, x_2 \in X$ tal que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Como X es de Hausdorff, tenemos que existen abiertos U, V en X ajenos tales que $x_1 \in U$ y $x_2 \in V$. Luego, $f(U)$, $f(V)$ son abiertos en Y ajenos tales que $y_1 \in f(U)$ y $y_2 \in f(V)$. Por lo tanto, Y es de Hausdorff.

(*d*) Sean $y \in Y$ y $F \subset Y$ cerrado tal que $y \notin F$, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$ y $f^{-1}(F)$ es cerrado en X tal que $x \notin f^{-1}(F)$. Como X es regular, tenemos que existe abiertos U, V en X ajenos tales que $x \in U$ y $f^{-1}(F) \subset V$. Luego, $f(U)$, $f(V)$ son abiertos en Y ajenos tales que $y \in f(U)$ y $F \subset f(V)$. Por lo tanto, Y es regular.

(*e*) Sean $F_1, F_2 \subset Y$ cerrados en Y ajenos, entonces $f^{-1}(F_1), f^{-1}(F_2)$ son cerrados en X ajenos. Como X es normal, tenemos que existe abiertos U, V en X ajenos tales que $f^{-1}(F_1) \subset U$ y $f^{-1}(F_2) \subset V$. Luego, $f(U)$, $f(V)$ son abiertos en Y ajenos tales que $F_1 \subset f(U)$ y $F_2 \subset f(V)$. Por lo tanto, Y es normal. □

Teorema 1.22. *X es un espacio T_1 si y solo si para cada $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado en X.*

Demostración. Supongamos que X es T_1. Sea $x \in X$. Como X es T_1, tenemos que para cada punto $y \in X$ distinto de x existe abierto V_y tal que $y \in V_y$ pero $x \notin V_y$. Luego, $X - \{x\} = \bigcup V_y$ es abierto en X. Así, $\{x\}$ es cerrado en X. Ahora, supongamos que para cada $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado en X. Sean $x, y \in X$, entonces $X - \{x\}$ y $X - \{y\}$ son abiertos tales que $y \in X - \{x\}$ pero $x \notin X - \{x\}$ y $x \in X - \{y\}$ pero $y \notin X - \{y\}$. Por lo tanto, X es T_1. $\square$

Teorema 1.23. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$ un subespacio de X.*

(1) *Si X es de Hausdorff, entonces A es de Hausdorff.*

(2) *Si X es regular, entonces A es regular.*

Demostración. (1) Sean $x, y \in A$, entonces $x, y \in X$. Como X es de Hausdorff, tenemos que existen abiertos U, V en X ajenos tales que $x \in U$, $y \in V$. Luego, $U_1 = U \cap A$ y $V_1 = V \cap A$ son abiertos en A ajenos tales que $x \in U_1$, $y \in V_1$. Por lo tanto, A es de Hausdorff.

(2) Sean $x \in A$ y $F \subset A$ cerrado en A tal que $x \notin F$, entonces $x \in X$ y existe F_1 cerrado en X tal que $F = F_1 \cap A$ y $x \notin F_1$. Como X es regular, tenemos que existen U, V abiertos en X ajenos tales que $x \in U$ y $F_1 \subset V$. Luego, $U_1 = U \cap A$ y $V_1 = V \cap A$ son abiertos en A ajenos tales que $x \in U_1$ y $F \subset V_1$. Por lo tanto, A es regular. $\square$

Teorema 1.24. *X es un espacio regular si y solo si para cada U abierto en X y cualquier punto $x \in U$ existe V abierto en X tal que $x \in V \subset cl_X(V) \subset U$.*

Demostración. Supongamos que X es regular. Sea U abierto en X y $x \in U$, entonces $X - U$ es cerrado en X y $x \notin X - U$. Como X es regular, tenemos que existen V y W abiertos en X ajenos tales que $x \in V$ y $X - U \subset W$. Además, como $V \subset X - W$ y $X - W$ es cerrado, tenemos que $cl_X(V) \subset X - W$. Así, $x \in V \subset cl_X(V) \subset U$. Ahora bien, supongamos que para cada U abierto en X y cualquier punto $x \in U$ existe V abierto en X tal que $x \in V \subset cl_X(V) \subset U$. Sean F cerrado en X y $x \in X - F$, entonces $X - F$ es abierto en X y $x \in X - F$. Por hipotesis, tenemos que existe V abierto en X talque $x \in V \subset cl_X(V) \subset X - F$. Luego, $F \subset X - cl_X(V)$ y $x \in V$, donde V y $X - cl_X(V)$ son abiertos en X ajenos. Por lo tanto, X es regular. $\square$

Teorema 1.25. *X es un espacio normal si y solo si para cada par de cerrados $F, G \subset X$ ajenos existen abiertos U, V en X con cerraduras ajenas tales que $F \subset U$ y $G \subset V$.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio normal. Sean F, G cerrados en X ajenos, entonces existen abiertos U, W en X ajenos tales que $F \subset U$

y $G \subset W$. Además, $U \subset X - W$ por ser ajenos U y W. Luego, $cl_X(U) \subset X - W$. En consecuencia, $cl_X(U)$ y G son cerrados en X ajenos, entonces existen abiertos U',V en X ajenos tales que $cl_X(U) \subset U'$ y $G \subset V$. Como $V \subset X - V'$, tenemos que $cl_X(V) \subset X - U'$. Se sigue que, $cl_X(U)$, $cl_X(U)$ son ajenos. Por lo tanto, existen abiertos U, V en X con cerraduras ajenas tales que $F \subset U$ y $G \subset V$. El regreso es trivial. □

1.3 Conexidad y compacidad

Definición 1.26. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es* ***disconexo*** *si y solo si existen U, V abiertos de X no vacíos tales que $U \cup V = X$ y $U \cap V = \emptyset$. Si X no es disconexo, entonces decimos que X es* ***conexo****.*

Teorema 1.27. *[3, Teorema 1.4] Sean X y Y espacios topológicos, y $f : X \to Y$ continua. Si X es conexo, entonces $f(X)$ es conexo.*

Teorema 1.28. *Sean X y Y espacios topológicos, y $f : X \to Y$ continua. Si $A \subset X$ es conexo, entonces $f(A)$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que A es conexo. Como $f : X \to Y$ es continua, tenemos que $f|_A : A \to Y$ es continua. Luego, por el Teorema 1.28, $f(A)$ es conexo. □

Definición 1.29. *Sea X un espacio topológico y A un subespacio de X. Entonces A es una* ***componente*** *de X si y solo si*

(i) A es conexo.

(ii) Si B es un subespacio conexo de X tal que $A \subset B$, entonces $B = A$.

Definición 1.30. *Un espacio topológico X es* ***localmente conexo*** *si y solo si para cada punto $x \in X$ y cualquier abierto U que contiene a x, existe un abierto conexo V tal que $x \in V \subset U$.*

Teorema 1.31. *[2, Teorema 2.E.2] Un espacio X es localmente conexo si y solo si las componentes de cada subconjunto abierto de X son abiertas.*

Definición 1.32. *Sea X un conjunto y B un subconjunto de X. Una* ***cubierta*** *de B es una colección de subconjuntos de X, $\mathscr{C} = \{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, tal que su unión contiene a B. Si X es un espacio topológico y los conjuntos*

*C_α son abiertos en X, entonces se dice que $\mathscr{C}$ es una **cubierta abierta**. Si Λ es un conjunto finito, entonces la colección $\mathscr{C}$ es una **cubierta finita** de B. Una **subcubierta** de B es una subcolección de $\mathscr{C}$ que es también una cubierta para B.*

Definición 1.33. *Un espacio topológico X es **compacto** si y solo si cualquier cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.*

Ejemplo 1.34. *Si A es un subconjunto finito de un espacio topológico X, por ejemplo $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, entonces A es compacto, porque si $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta de A, tenemos que existen $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ tales que $a_1 \in C_1, \ldots, a_n \in C_n$. Luego, $A = \bigcup_{i=1}^n C_i$, es decir, $\mathcal{C}$ contine una subcubierta finita.*

Teorema 1.35. *Sea X un espacio compacto y $A \subset X$. Si A es cerrado en X, entonces A es compacto.*

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ cubierta abierta de A, entonces $\mathscr{C}' = \mathscr{C} \cup \{X - A\}$ es cubierta abierta de X. Como X es compacto, tenemos que existe $\mathscr{D}' \subset \mathscr{C}'$ subcubierta finita de X. Luego, $\mathscr{D} = \mathscr{D}' - \{X - A\}$ es subcubierta finita de A. Por lo tanto, A es compacto. □

Teorema 1.36. *Sea X un espacio de Hausdorff y $A \subset X$ compacto. Probar que A es cerrado en X.*

Demostración. Sea $x \in X - A$. Como X es de Hausdorff, tenemos que para cada $y \in A$ existen U_y, V_y abiertos en X ajenos tales que $x \in U_y$ y $y \in V_y$. Es fácil ver que, $\mathscr{C} = \{v_y : y \in A\}$ es cubierta abierta de A. Así, existen $y_1, y_2, ..., y_n$ en A tales que $\mathscr{D} = \{V_{y_1}, V_{y_2}, ..., V_{y_n}\}$ es subcubierta finita de A. Sean $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{y_i}$ y $V = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Notar que U, V son abiertos en X ajenos, además $A \subset V$. Luego, $x \in U \subset X - A$. De esto que, $X - A$ es abierto en X. Por lo tanto, A es cerrado en X. □

Teorema 1.37. *Sean X y Y espacios topológicos, $A \subset X$ y $f : X \to Y$ continua. Si A es compacto, entonces $f(A)$ es compacto.*

Demostración. Sea $\mathscr{C} = \{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ cubierta abierta de $f(A)$. Como f es continua, tenemos que $\mathscr{C}' = \{f^{-1}(C_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ es cubierta abierta de A. Luego, existe $\mathscr{D}' = \{f^{-1}(C_{\alpha_1}), f^{-1}(C_{\alpha_2}), ..., f^{-1}(C_{\alpha_n})\}$ subcubierta finita de A, ya que A es compacto. Así, $\mathscr{D} = \{C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, ..., C_{\alpha_n}\}$ es subcubierta finita de $f(A)$. Por lo tanto, $f(A)$ es compacto. □

Definición 1.38. *Un espacio topológico X es* ***localmente compacto*** *si y solo si para cada $x \in X$ y cualquier abierto U que contenga a x, existe un abierto V tal que $x \in V \subset cl_X(V) \subset U$ y $cl_X(V)$ es compacta.*

Definición 1.39. *Un espacio X es* ***primero numerable*** *si cada punto tiene una base local numerable.*

Definición 1.40. *Un espacio X es* ***segundo numerable*** *si tiene una base numerable.*

Definición 1.41. *Un espacio X se dice que es* ***separable*** *si existe un subconjunto denso de X numerable.*

Definición 1.42. *Un espacio X se dice que es de* ***Lindelöf*** *si cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable.*

1.4 Espacios métricos

Definición 1.43. *Una* ***métrica*** *d en un conjunto X es una función*

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}$$

que satisface:

(1) Para todo x, y de X, se cumple que $d(x, y) \geq 0$.

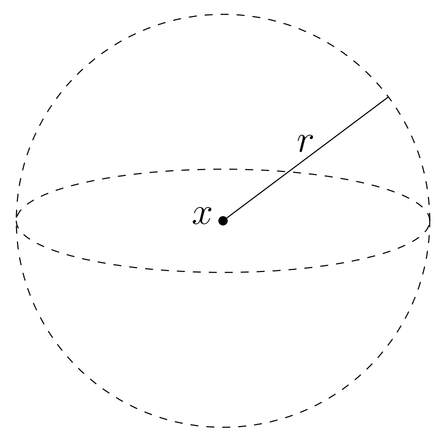
(2) Para todo par de puntos x y y de X, se cumple que $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

(3) Para todo par de puntos x y y de X, se cumple que $d(x, y) = d(y, x)$.

(4) Para toda x, y y z de X, se cumple que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Definición 1.44. *Un* ***espacio métrico*** *es la pareja ordenada (X, d), donde X es un conjunto y d una métrica en X.*

Definición 1.45. *Sea (X, d) un espacio métrico, una* ***bola abierta*** *de centro x y radio r, es el conjunto $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$.*



Definición 1.46. *Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo* $[0,1]$. *Si* $h : [0,1] \to A$ *es un homeomorfismo,* $h(0) = p$ *y* $h(1) = q$*, entonces los puntos* p *y* q *se conocen como los **puntos extremos** del arco* A.

Definición 1.47. *Consideramos* $[0,1]^n$ *con la topología producto. Una* n***-celda** es un espacio topológico homeomorfo a* $[0,1]^n$.

A continuación veamos qué es una n-variedad.

Definición 1.48. *Sea* $n \in \mathbb{N}$. *Una* n***-variedad** es un espacio métrico separable* M *tal que todo* $p \in M$ *tiene una vecindad* V *que es una* n*-celda. El **interior como variedad** de una* n*-variedad* M*, que denotamos por* $\operatorname{intv}_{(n)}(M)$*, es*

$$\operatorname{intv}_{(n)}(M) = \{p \in M \colon p \text{ tiene una vecindad homeomorfa a } \mathbb{R}^n\}.$$

*La **frontera como variedad** de* M*, que denotamos por* $\partial_n M$*, es*

$$\partial_n M = \{p \in M \colon p \notin \operatorname{intv}_{(n)}(M)\}.$$

Recordemos qué son las i-ésimas funciones proyección y un hecho importante sobre la continuidad de estas funciones.

Definición 1.49. *Sean* $n \in \mathbb{N}$ *y* $X_1, X_2, \ldots$ *espacios topológicos. Para cada* $i \in \{1, 2, \ldots\}$*, sea* $\pi_i : \prod_{j=1}^{\infty} X_j \to X_i$*, definida para cada* $(x_1, x_2, \ldots) \in \prod_{j=1}^{\infty} X_j$ *por* $\pi_i((x_1, x_2, \ldots)) = x_i$*. La función* π_i *se llama la* i***-ésima función proyección.***

Lema 1.50. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X_1, X_2, \ldots$ espacios topológicos. Si $\prod_{j=1}^{\infty} X_j$ tiene la topología producto, entonces para cada $i \in \{1, 2, \ldots\}$, tenemos que la i-ésima función proyección π_i es continua.*

Demostración. Supongamos que $\prod_{j=1}^{\infty} X_j$ tiene la topología producto. Sean $i \in \{1, 2, \ldots\}$ y U_i un abierto en X_i. Notemos que $\pi_i^{-1}(U_i) = X_1 \times X_2 \times \cdots \times U_i \times X_{i+1} \times \cdots$. Como $\pi_i^{-1}(U_i)$ es abierto en $\prod_{j=1}^{\infty} X_j$, concluimos que π_i es continua. $\square$

Teorema 1.51. *[2, (1.G.7), (2.A.15), (2.G.10)] Las propiedades de metrizabilidad, conexidad y compacidad son invariantes topológicos.*

Capítulo 2

Espacios cociente

En este capítulo se abordara distintas formas de construir espacios cociente mediante particiones, relaciones y funciones continuas, comenzando con la introducción de la topología cociente apartir de la función cociente. Además, se daran algunos ejemplos interesantes de espacios cociente, teoremas y la construccion de funciones especiales que nos diran como es el espacio cociente resultante.

2.1 Topología Cociente

Una partición de un conjunto X es una colección G de subconjuntos no vacíos de X ajenos dos a dos tal que la unión es X. Las particiones surgen de manera natural en matemáticas y son bastante importantes en la topología pues llevan a la creación de espacios complejos e interesantes.

Supongamos que G es una partición de un espacio topológico X. Definimos a X/G como el conjunto cuyos puntos son los miembros de la partición dada G. Entonces X/G es llamado *conjunto cociente* o de *descomposición*. La función $P : X \to X/G$ que manda un punto x a el único conjunto de G que contiene a x es llamada *función cociente*, denotaremos a $P(x)$ por $[x]$. Notemos que $[x] = [y]$ si y solo si x, y pertenecen al mismo miembro de la partición G, y que P es una función suprayectiva.

Definición 2.1. *Sea X un espacio topológico, G partición de X. Sea $\mathscr{U} = \{U \subset X/G \colon P^{-1}(U)$ es abierto en $X\}$, donde $P : X \to X/G$ es la función cociente.*

Teorema 2.2. *Sean X, G, P y $\mathscr{U}$ como en la definición 2.1, probar que:*

(i) *$\mathscr{U}$ es una topología para X/G, la **topología cociente**.*

(ii) *Si X/G tiene la topología cociente, entonces P es continua.*

(iii) *Si $\mathscr{V}$ es una topología para X/G tal que P es continua, entonces $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$.*

(iv) *Si X/G tiene la topología cociente, $A \subset X/G$, y $P^{-1}(A)$ es cerrado en X, entonces A es cerrado en X/G.*

Demostración. (i) Como $P^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ y $P^{-1}(X/G) = X$ son abiertos en X, tenemos que $\emptyset, X \in \mathscr{U}$.
Sea $\mathcal{U} \subset \mathscr{U}$. Luego para cada $U \in \mathcal{U}$, tenemos que $P^{-1}(U)$ es abierto en X. Como $P^{-1}(\bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U) = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} P^{-1}(U)$, tenemos que $P^{-1}(\bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U)$ es abierto en X. Así, $\bigcup \mathcal{U} \in \mathscr{U}$.
Ahora, sean $U_1, U_2 \in \mathscr{U}$. Así, $P^{-1}(U_1)$ y $P^{-1}(U_2)$ son abiertos en X. Como $P^{-1}(U_1 \cap U_2) = P^{-1}(U_1) \cap P^{-1}(U_2)$, tenemos que $P^{-1}(U_1 \cap U_2)$ es abierto en X. Luego, $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{U}$. Por lo tanto, $\mathscr{U}$ es una topología para X/G.

(ii) Sea U abierto en X/G, entonces $P^{-1}(U)$ es abierto en X, ya que X/G tiene la topología cociente. Así, para todo U abierto en X/G, tenemos que $P^{-1}(U)$ es abierto en X. Por lo tanto, P es continua.

(iii) Sea $U \in \mathscr{V}$, entonces $P^{-1}(U)$ es abierto en X, pues P es continua. Como $U \subset X/G$, tenemos que $U \in \mathscr{U}$. Por lo tanto, $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$.

(iv) Sea $A \subset X/G$ tal que $P^{-1}(A)$ es cerrado en X, entonces $X - P^{-1}(A)$ es abierto en X. Ya que $P^{-1}(X/G - A) = X - P^{-1}(A)$, tenemos que $P^{-1}(X/G - A)$ es abierto en X, luego $X/G - A$ es abierto en X/G por tener la topología cociente. Por lo tanto, A es cerrado en X/G. $\square$

Tenemos que $P : X \to X/G$ es una función suprayectiva y continua con la topología cociente, pero no siempre es abierta como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3. *Sean $X = [0, 2\pi]$ y $G = \{\{x\} \colon x \in (0, 2\pi)\} \cup \{\{0, 2\pi\}\}$. Como $[0, \pi)$ es abierto en X y $P([0, \pi)) = \{\{x\} \colon x \in (0, \pi)\} \cup \{\{0, 2\pi\}\}$, tenemos que $P([0, \pi))$ no es abierto X/G ya que $P^{-1}(P([0, \pi))) = [0, \pi) \cup \{2\pi\}$ no es abierto en X. Por lo tanto, P no es abierta.*

Sean $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva, y $G_f = \{f^{-1}(y) \colon y \in Y\}$. Veamos que G_f es partición de X.

(1) Dado que f es suprayectiva, entonces para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Luego, para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $x \in f^{-1}(y)$, y por lo tanto, para todo $y \in Y : f^{-1}(y) \neq \emptyset$.

(2) Sean $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in G_f$ tales que $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$, entonces $y_1 \neq y_2$. Supongamos que $f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) \neq \emptyset$. Luego, existe $x \in X$ tal que $x \in f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2)$, entonces $f(x) = y_1$ y $f(x) = y_2$. Así, $y_1 = y_2$ lo cual es una contradicción, en consecuencia $f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) = \emptyset$. Por lo tanto, G_f es una colección de conjuntos ajenos.

(3) Como para todo $y \in Y : f^{-1}(y) \subset X$, tenemos que $\bigcup G_f \subset X$. Además, para todo $x \in X : f(x) = y \in Y$. Luego, para todo $x \in X : x \in f^{-1}(y)$, entonces $x \in \bigcup G_f$, y por tanto $X \subset \bigcup G_f$. Así $X = \bigcup G_f$.

Por lo tanto, G_f es partición de X. Además, en la función $P : X \to X/G_f$ tenemos que para todo $x \in X : P(x) = [x] = f^{-1}(f(x))$.

Definición 2.4. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Sea $\Phi_f : X/G_f \to Y$ definida por $\Phi_f([x]) = f(x)$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "P"'] & & Y \\ & X/G_f \arrow[ur, "\Phi_f"'] & \end{tikzcd}$$

Veamos que Φ_f es una función biyectiva.
Sean $[x_1], [x_2] \in X/G_f$ tal que $[x_1] = [x_2]$, entonces $f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$. Luego, $f(x_1) = f(x_2)$ pues G_f es partición. Así, $\Phi_f([x_1]) = \Phi_f([x_2])$, y por lo tanto Φ_f esta bien definida.
Ahora bien, sean $[x_1], [x_2] \in X/G_f$ tal que $\Phi_f([x_1]) = \Phi_f([x_2])$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$. Luego, $f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$, y por lo que $[x_1] = [x_2]$. Por lo tanto, Φ_f es inyectiva.
Además, como f es suprayectiva, tenemos que para todo $y \in Y$ existe $x \in X$

tal que $f(x) = y$. Luego, para todo $y \in Y$ existe $[x] \in X/G_f$ tal que $\Phi_f([x]) = y$. Así, Φ_f es suprayectiva. Por lo tanto, Φ_f es una función biyectiva.

Observación 2.5. *Notemos que:*

(i) Para todo $A \subset Y : \Phi_f^{-1}(A) = P(f^{-1}(A))$.

Demostración. Sea $A \subset Y$, y $[x] \in \Phi_f^{-1}(A)$, entonces $\Phi_f([x]) \in A$. Luego, $f(x) \in A$, y por tanto $x \in f^{-1}(A)$, por lo que, $[x] = P(x) \in P(f^{-1}(A))$. Así, $\Phi_f^{-1}(A) \subset P(f^{-1}(A))$.
Ahora, tomando a $[x] \in P(f^{-1}(A))$, tenemos que existe $x' \in f^{-1}(A)$ tal que $P(x') = [x]$, entonces $f^{-1}(f(x')) = f^{-1}(f(x))$. Luego, $f(x') = f(x)$, pues G_f es partición, y por tanto $f(x) \in A$, por lo cual $\Phi_f([x]) \in A$, teniendo entonces que $[x] \in \Phi_f^{-1}(A)$. Así, $P(f^{-1}(A)) \subset \Phi_f^{-1}(A)$. Por lo tanto, $\Phi_f^{-1}(A) = P(f^{-1}(A))$. □

(ii) Para todo $B \subset X/G_f : \Phi_f(B) = f(P^{-1}(B))$.

Demostración. Sea $B \subset X/G$. Tenemos que $y \in \Phi_f(B)$ si y solo si existe $[x] \in B$ tal que $\Phi_f([x]) = y$ si y solo si existe $x \in P^{-1}(B)$ tal que $f(x) = y$ si y solo si $y \in f(P^{-1}(B))$. De esto que, $\Phi_f(B) = f(P^{-1}(B))$. □

Teorema 2.6. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva y X/G_f con la topología cociente. Entonces la función $\Phi_f : X/G_f \to Y$ es continua.*

Demostración. Sea U abierto en Y, entonces $f^{-1}(U)$ es abierto en X, ya que f es continua. Y como $\Phi_f^{-1}(U) = P(f^{-1}(U))$, tenemos que $P^{-1}(\Phi_f^{-1}(U)) = P^{-1}(P(f^{-1}(U))) = f^{-1}(U)$. Luego, $P^{-1}(\Phi_f^{-1}(U))$ es abierto en X, y dado que X/G_f tiene la topología cociente, entonces $\Phi_f^{-1}(U)$ es abierto en X/G_f. Por lo tanto, Φ_f es continua. □

Hasta ahora hemos visto que Φ_f es continua y biyectiva, y aunque en muchos casos puede llegar a ser un homeomorfismo el siguiente ejemplo muestra que no necesariamente lo es.

Ejemplo 2.7. *Sea* $X = [0, 2\pi)$*, y* $f : X \to \mathscr{S}^1$ *dada por* $f(x) = (cosx, senx)$*. Entonces tenemos que* f *es una función biyectiva y continua, además como* $G_f = \{\{x\} \subset [0, 2\pi) \mid x \in [0, 2\pi)\}$ *es esencialmente* X*, de lo que se sigue que* X/G_f *es homeomorfo a* X*. Sin embargo,* X *no es homeomorfo a* $\mathscr{S}^1$*, ya que* $\mathscr{S}^1$ *es compacto y* X *no. Por lo tanto,* Φ_f *no es un homeomorfismo.*

Ahora veamos, con los siguientes teoremas, condiciones para que Φ_f sea un homeomorfismo.

Teorema 2.8. *Supongamos que* $f : X \to Y$ *es una función continua y suprayectiva, y que* f *es abierta o cerrada. Entonces* $\Phi_f : X/G_f \to Y$ *es un homeomorfismo.*

Demostración. Bastará probar que Φ_f es abierta o cerrada.
$Caso$[1] Supongamos f es abierta, y sea U abierto en X/G_f, entonces $P^{-1}(U)$ es abierto en X, y como $\Phi_f(U) = f(P^{-1}(U))$, tenemos que $\Phi_f(U)$ es abierto en Y. Por lo cual, Φ_f es abierta.
$Caso$[2] Supongamos f es cerrada, y sea A cerrado en X/G_f, entonces $P^{-1}(A)$ es cerrado en X, y como $\Phi_f(A) = f(P^{-1}(A))$, tenemos que $\Phi_f(A)$ es cerrado en Y. Por lo cual, Φ_f es cerrada. Por lo tanto, Φ_f es un homeomorfismo. □

Corolario 2.9. *Si* X *es compacto,* Y *es* T_2*, y* $f : X \to Y$ *una función continua y suprayectiva, entonces* Φ_f *es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea F cerrado en X, entonces F es compacto en X, ya que X es compacto, luego $f(F)$ es compacto en Y, pues f es continua, y dado que Y es T_2, tenemos que $f(F)$ es cerrado en Y. Por lo que, f es cerrada. Por lo tanto, Φ_f es un homeomorfismo. □

2.2 Identificaciones

Las particiones de un espacio X son formadas más comodamente por "identificaciones" de ciertos puntos en X con otros, lo cual se puede lograr mediante una relación de equivalencia $\sim$ sobre X, donde los miembros de la partición son las clases de equivalencia bajo $\sim$. En este caso, denotaremos al espacio cociente por $X/\sim$.

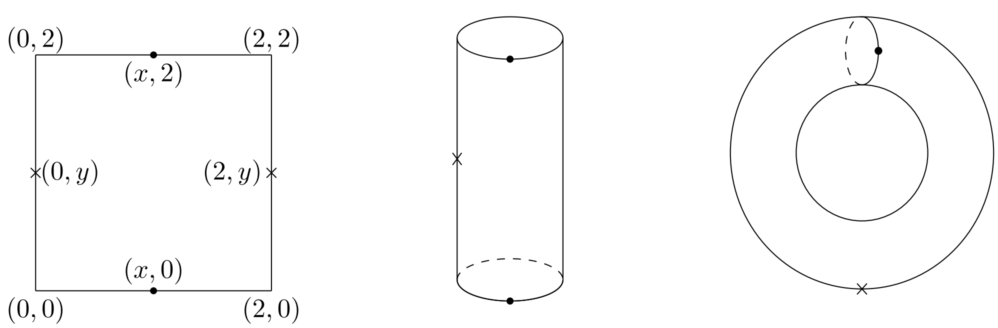
Ejemplo 2.10. *Si* $X = [0, 2\pi]$ *y definimos a la relación* $\sim$ *sobre* X *por* $0 \sim 2\pi$*, y* $x \sim y$ *si y solo si* $x = y$*, las clases de equivalencia son los puntos* *singulares en el intervalo* $(0, 2\pi)$ *y el conjunto* $\{0, 2\pi\}$. *Con esto esencialmente los puntos finales del intervalo han sido "pegados", e intuitivamente el espacio resultante deberia ser un circulo; y podemos comprobarlo con el siguiente diagrama, donde* $f(x) = (cosx, senx)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "P"'] & & \mathscr{S}^1 \\ & X/G_f = X/\sim \arrow[ur, "\Phi_f"'] & \end{tikzcd}$$

Como $[0, 2\pi]$ *es compacto y* $\mathscr{S}^1$ *es* T_2, *por el Corolario 2.9, tenemos que* Φ_f *es un homeomorfismo, y por lo cual el espacio cociente* $X/\sim$ *es topologicamente un circulo.*

Muchos espacios topologicos interesantes pueden llegar a ser construidos de manera similar como se muestra en los siguientes ejemplos.

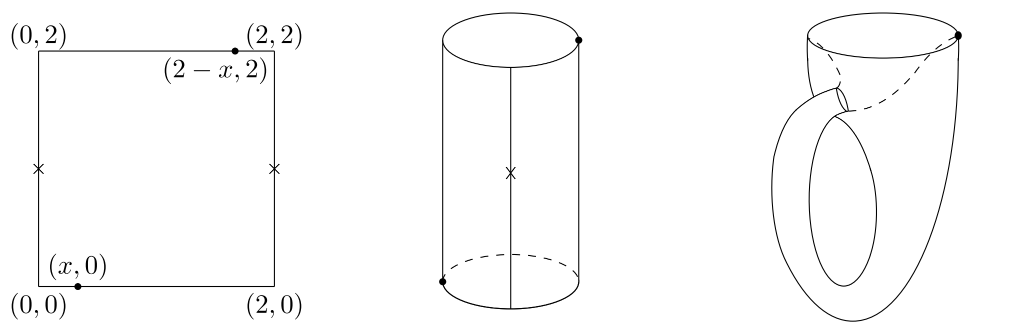
Ejemplo 2.11. *El toro es usualmente definido por* $\mathscr{S}^1 \times \mathscr{S}^1$, *una descripción alternativa es obtenida de espacios cociente como sigue. Sea* $X = [0, 2] \times [0, 2]$ *el cuadrado en* $\mathscr{E}^2$, *identificando los puntos en* X *de la forma* $(0, y)$ *con los correspondientes puntos* $(2, y)$ *teniendo así intuitivamente el efecto de enrollar el cuadrado formando un tubo. Pegando los extremos del tubo mediante la identificación de los puntos de la forma* $(x, 0)$ *con* $(x, 2)$ *formando así un espacio cociente homeomorfo a el toro* $\mathscr{S}^1 \times \mathscr{S}^1$, *como se muestra a continuación.*



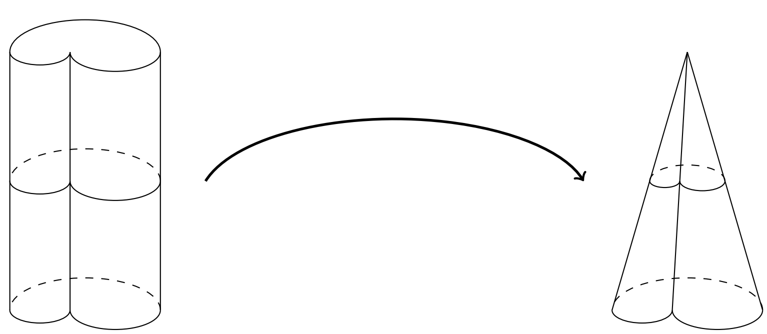
Esto se puede comprobar con el siguiente diagrama, donde $f(x) = ((cos\pi x, sen\pi x), (cos\pi y, sen\pi y))$. *Y que además,* X/G_f *coincide con el espacio cociente construido por las identificaciones anteriores.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "P"'] & & \mathscr{S}^1 \times \mathscr{S}^1 \\ & X/G_f \arrow[ur, "\Phi_f"'] & \end{tikzcd}$$

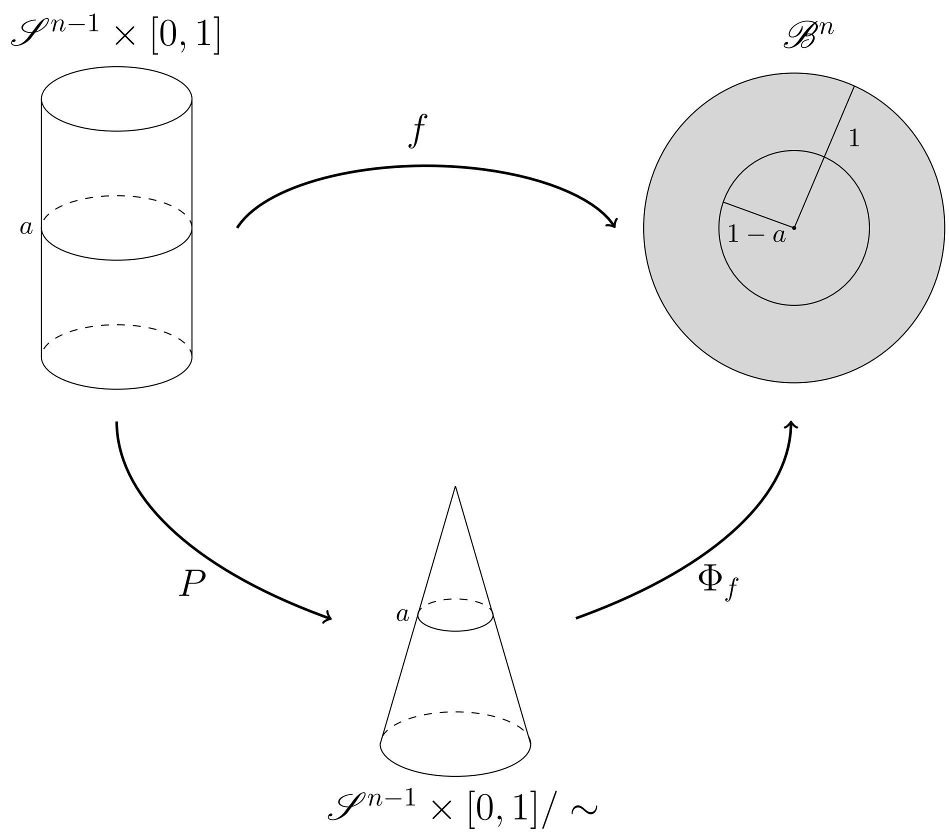
Ejemplo 2.12. *Un espacio más exótico que puede ser construido es la botella de Klein, que es obtenida como espacio cociente de* $X = [0,2] \times [0,2]$ *el cuadrado en* $\mathscr{E}^2$*, realizando la misma identificación que en el ejemplo 2.11 para obtener el tubo y luego identificando los puntos de la forma* $(x, 0)$ *con* $(2 - x, 2)$*. Esto tiene el efecto intuitivo de retorcer el tubo antes de pegarlo, como se muestra a continuación.*



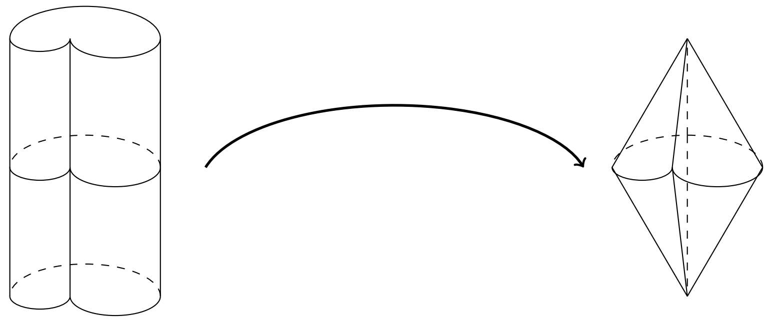
Definición 2.13. *Supongamos que* X *es un espacio topológico. Sea* $\sim$ *la relación de equivalencia sobre* $X \times [0, 1]$ *determinado por:* $(x, t) \sim (y, s)$ *si y solo si* $(x, t) = (y, s)$ *o* $t = s = 1$*. El* ***cono superior*** *de* X *es el espacio cociente* $(X \times [0, 1])/\sim$ *.*



Ejemplo 2.14. *Sean* $\mathscr{S}^{n-1} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathscr{E}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ *y* $\mathscr{B}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathscr{E}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$. *Veamos que el cono superior de* $\mathscr{S}^{n-1}$ *es homeomorfo a* $\mathscr{B}^n$. *Notemos que la función* $f : \mathscr{S}^{n-1} \times [0, 1] \to \mathscr{B}^n$ *dada por* $f(x_1, x_2, ..., x_n, a) = (1-a)(x_1, x_2, ..., x_n)$ *es continua y suprayectiva. Luego,* $\Phi_f : \mathscr{S}^{n-1} \times [0, 1]/G_f \to \mathscr{B}^n$ *es una función continua y biyectiva. Además,* $\mathscr{S}^{n-1} \times [0, 1]/G_f$ *coincide con el cono superior de* $\mathscr{S}^{n-1}$. *Como* $\mathscr{S}^{n-1}$ *y* $[0, 1]$ *son compactos, tenemos que* $\mathscr{S}^{n-1} \times [0, 1]$ *es compacto. Además,* $\mathscr{B}^n$ *es un espacio de Hausdorff, pues es métrico. Así, por el Corolario 2.9 tenemos que* Φ_f *es un homeomorfismo y por lo tanto el cono superior de* $\mathscr{S}^{n-1}$ *es homeomorfo a* $\mathscr{B}^n$.



Definición 2.15. *Sea* X *un espacio topológico. La* ***suspensión*** *de* X *es el espacio cociente* $(X \times [-1, 1])/\sim$, *donde* $\sim$ *es la relacion de equivalencia sobre* $X \times [-1, 1]$ *dada por:* $(x, t) \sim (y, s)$ *si y solo si* $(x, t) = (y, s)$ *o* $t = s = 1$ *o* $t = s = -1$.



Los conos y suspensiones de espacios topológicos son casos particulares de una importante tecnica que involucra los espacios costura junto con la ayuda de una función continua dada y una apropiada relación de equivalencia.

Definición 2.16. *Si X y Y son espacios ajenos, entonces la **unión libre** de Xy Y es el espacio topológico $Z = X \cup Y$, donde un conjunto $W \subset Z$ es abierto si y solo si $W \cap X$ y $W \cap Y$ son abiertos en X y Y, respectivamente.*

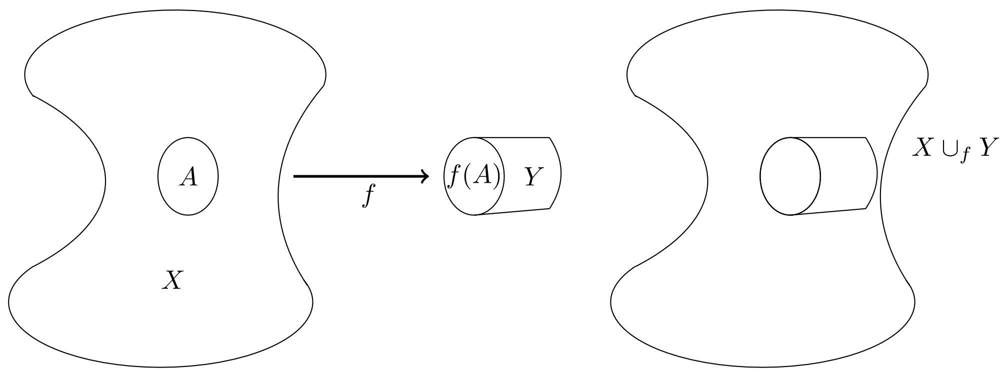
Supongamos que X y Y sean espacios ajenos y que A es un subconjunto cerrado de X no vacío. Sea $f : A \to Y$ una funcion continua, y en $X \cup Y$ definimos una relación de equivalencia para identificar cada punto $x \in f^{-1}(y)$ con y. Denotamos al espacio cociente resultante por $X \cup_f Y$. Por lo tanto, A ha sido "pegado" a su imagen $f(A)$, y en el proceso, X y Y han sido cosidos juntos. El espacio $X \cup_f Y$ es llamado la *adición de X y Y por f*.

Observación 2.17. *Notemos que las clases de equivalencia inducidas por la relación antes mensionada son las siguientes:*

(i) *Si $a \in X - A$, entonces $[a] = \{a\}$.*

(ii) *Si $a \in Y$, entonces $[a] = f^{-1}(a) \cup \{a\}$.*

(iii) *Si $a \in A$, entonces $[a] = f^{-1}(f(a)) \cup \{f(a)\} = [f(a)]$.*



Con esto podemos obtener al cono superior de un espacio X como sigue. Sea p un punto que no este en X, $Z = X \times [0,1]$, $A = X \times \{1\}$ y $f : A \to \{p\}$. Entonces $Z \cup_f \{p\}$ es homeomorfo al cono superior de X.

Teorema 2.18. *Sean X y Y son espacios ajenos, A un subconjunto cerrado de X no vacío y $f : A \to Y$ es continua. Sea $P : X \cup Y \to X \cup_f Y$ la función cociente, probar que:*

(a) *$P|_{X-A}$ es un encajamiento.*

(b) *$P|_Y$ es un encajamiento.*

(c) *$P(X - A)$ es abierto en $X \cup_f Y$.*

(d) *$P(Y)$ es cerrado en $X \cup_f Y$.*

Demostración. (a) Como $X \cup_f Y$ tiene la topología cociente, tenemos que P es continua y por tanto $P|_{X-A}$ es continua. Ahora bien, sean $a, b \in X - A$, entonces $P|_{X-A}(a) = \{a\}$ y $P|_{X-A}(b) = \{b\}$. Así, si $P|_{X-A}(a) = P|_{X-A}(b)$ entonces $a = b$, por lo cual $P|_{X-A}$ es inyectiva. Ahora veamos que $P|_{X-A}$ es abierta. Sea $U \subset X - A$ abierto en $X - A$, entonces U es abierto en $X \cup Y$. Como $P^{-1}(P|_{X-A}(U)) = P|_{X-A}^{-1}(P|_{X-A}(U)) = U$, tenemos que $P|_{X-A}(U)$ es abierto en $X \cup_f Y$ y así $P|_{X-A}$ es abierta. Por lo tanto, $P|_{X-A}$ es un encajamiento.

(b) Como P es continua, tenemos que $P|_Y$ es continua. Ahora bien, sean $a, b \in Y$, entonces $P|_Y(a) = f^{-1}(a) \cup \{a\}$ y $P|_Y(b) = f^{-1}(b) \cup \{b\}$. Así, si $P|_Y(a) = P|_Y(b)$ entonces $a = b$, ya que $a, b \in Y$, por lo cual $P|_Y$ es inyectiva. Ahora veamos que $P|_Y$ es cerrada. Sea $F \subset Y$ cerrado en Y, entonces

F es cerrado en $X \cup Y$. Notemos que $P^{-1}(P|_Y(F)) = F \cup f^{-1}(F)$. Como f es continua, tenemos que $f^{-1}(F)$ es cerrado en A. Luego, $f^{-1}(F)$ es cerrado en $X \cup Y$, en consecuencia $P^{-1}(P|_Y(F))$ es cerrado en $X \cup Y$. Así, $P|_Y(F)$ es cerrado en $X \cup_f Y$ y por tal $P|_Y$ es cerrada. Por lo tanto, $P|_Y$ es un encajamiento.

(c) Veamos que $P^{-1}(P(X-A)) = X - A$. Para esto bastara probar que $P^{-1}(P(X-A)) \subset X-A$. Sea $a \in P^{-1}(P(X-A))$, entonces $P(a) \in P(X-A)$ luego existe $b \in X - A$ tal que $P(a) = P(b) = \{b\}$. Como $a \in P(a)$, tenemos que $a \in P(b)$ luego $a = b$ y así $a \in X - A$, y con lo cual tendriamos que $P^{-1}(P(X-A)) = X - A$. Por lo que $P^{-1}(P(X-A))$ es abierto en $X \cup Y$, ya que $X - A$ es abierto en $X \cup Y$, y por lo tanto $P(X-A)$ es abierto en $X \cup_f Y$.

(d) Veamos que $P^{-1}(P(Y)) = Y \cup A$. Para ello, sea $a \in P^{-1}(P(Y))$, entonces $P(a) \in P(Y)$, luego existe $b \in Y$ tal que $P(a) = P(b) = f^{-1}(b) \cup \{b\}$. Como $a \in P(a)$, tenemos que $a \in f^{-1}(b)$ o $a = b$, luego $a \in A$ o $a \in Y$, es decir, $a \in Y \cup A$. Por lo tanto, $P^{-1}(P(Y)) \subset Y \cup A$. Por otro lado, sea $c \in A$, luego $P(c) = f^{-1}(f(c)) \cup \{f(c)\} = P(f(c))$. Como $f(c) \in Y$, tenemos que $P(f(c)) \in P(Y)$, así $P(c) \in P(Y)$ y entonces $c \in P^{-1}(P(Y))$. Por lo cual, $A \subset P^{-1}(P(Y))$, y como $Y \subset P^{-1}(P(Y))$, tenemos que $Y \cup A \subset P^{-1}(P(Y))$. Por lo tanto, $P^{-1}(P(Y)) = Y \cup A$. Como $Y \cup A$ es cerrado en $X \cup Y$, tenemos que $P^{-1}(P(Y))$ es cerrado en $X \cup Y$. Por lo tanto, $P(Y)$ es cerrado en $X \cup_f Y$. $\square$

Observación 2.19. *De lo anterior podemos observar además que:*

(i) $P(X-A) \cup P(Y) = X \cup_f Y$.

(ii) $P(X-A) \cap P(Y) = \emptyset$.

Teorema 2.20. *Supongamos que X y Y son espacios T_1, A es un subcojunto cerrado de X no vacío y $f : X \to Y$ continua. Entonces $X \cup_f Y$ es T_1.*

Demostración. Sea $[a] \in X \cup_f Y$. Veamos que $\{[a]\}$ es cerrado en $X \cup_f Y$. Por la observación 2.19 tenemos los siguientes casos:
Caso[1]. Si $[a] \in P(X-A)$, entonces $a \in X - A$. Luego, $P^{-1}([a]) = \{a\}$ es cerrado en X. Por lo que, $\{[a]\}$ es cerrado en $X \cup_f Y$.
Caso[2]. Si $[a] \in P(Y)$, entonces podemos suponer que $a \in Y$. Luego, $P^{-1}([a]) = \{a\} \cup f^{-1}(a)$. Como Y es T_1, tenemos que $\{a\}$ es cerrado en Y, además, $f^{-1}(a)$ es cerrado en A por la continuidad de f. Como A es

cerrado en X, tenemos que $f^{-1}(a)$ es cerrado en X. Así, $P^{-1}([a])$ es cerrado en $X \cup Y$, y por tanto $[a]$ es cerrado en $X \cup_f Y$.
Por lo tanto, $X \cup_f Y$ es T_1. $\square$

Teorema 2.21. *Supongamos que X y Y son espacios de Hausdorff, A es un subcojunto cerrado de X no vacío y $f : X \to Y$ continua. Entonces $X \cup_f Y$ es de Hausdorff.*

Demostración. Como X es de Hausdorff, tenemos que $X - A$ es de Hausdorff. Luego, por el Teorema 2.18, $P(X - A)$ y $P(Y)$ son espacios de Hausdorff. Y por la observación 2.19, $P(X - A) \cup P(Y)$ es un espacio de Hausdorff. Por lo tanto, $X \cup_f Y$ es un espacio de Hausdorff. $\square$

Teorema 2.22. *Supongamos que X y Y son espacios regulares, A es un subcojunto cerrado de X no vacío y $f : X \to Y$ continua. Entonces $X \cup_f Y$ es regular.*

Demostración. Como X es regular, tenemos que $X - A$ es regular. Luego, por el Teorema 2.18, $P(X - A)$ y $P(Y)$ son espacios regulares. Y por la observación 2.19, $P(X - A) \cup P(Y)$ es un espacio regular. Por lo tanto, $X \cup_f Y$ es un espacio regular. $\square$

Teorema 2.23. *Supongamos que X y Y son normales, A es un subconjunto cerrado de X no vacío y $f : A \to Y$ es continua. Entonces $X \cup_f Y$ es normal.*

Demostración. Sean A_1 y A_2 subconjuntos cerrados en $X \cup_f Y$ ajenos. Entonces $A_1 \cap P(Y)$ y $A_2 \cap P(Y)$ son conjuntos cerrados en $P(Y)$ ajenos, y por el Teorema 2.18(b), $P(Y)$ es homeomorfo a Y. Así, $P(Y)$ es normal, y por tanto existen abiertos U_1 y U_2 en $P(Y)$ con cerraduras ajenas tal que $A_1 \cap P(Y) \subset U_1$ y $A_2 \cap P(Y) \subset U_2$. Luego, $B_1 = (P^{-1}(A_1 \cup cl_{P(Y)}(U_1))) \cap X$ y $B_2 = (P^{-1}(A_2 \cup cl_{P(Y)}(U_2))) \cap X$ son subconjuntos cerrados del espacio normal X ajenos, así existen abiertos V_1 y V_2 en X ajenos que contienen a B_1 y B_2 respectivamente. Sean $W_1 = P(V_1 - A) \cup U_1$ y $W_2 = P(V_2 - A) \cup U_2$, claramente, W_1 y W_2 son ajenos y $A_1 \subset W_1$ y $A_2 \subset W_2$. Veamos que W_1 y W_2 son abiertos en $X \cup_f Y$, es decir, que $P^{-1}(W_1)$ y $P^{-1}(W_2)$ son abiertos en $X \cup Y$. Como $P^{-1}(W_1) = P^{-1}(P(V_1 - A) \cup U_1) = P^{-1}(P(V_1 - A)) \cup P^{-1}(U_1)$ y $P^{-1}(P(V_1 - A)) = P|_{X-A}^{-1}(P|_{X-A}(V_1 - A)) = V_1 - A$, ya que $V_1 - A \subset X - A$, tenemos que $P^{-1}(W_1) = (V_1 - A) \cup P^{-1}(U_1)$. Ahora bien, probemos que $P^{-1}(U_1) = f^{-1}(P^{-1}(U_1) \cap Y) \cup (P^{-1}(U_1) \cap Y)$. Sea $a \in P^{-1}(U_1)$, dado que $U_1 \subset P(Y)$, tenemos que $P^{-1}(U_1) \subset P^{-1}(P(Y)) = Y \cup A$, y así $a \in Y \cup A$.

Si $a \in Y$, entonces $a \in P^{-1}(U_1) \cap Y$. Por otro lado, si $a \in A$, entonces $P(a) = P(f(a))$. Luego, $f(a) \in P^{-1}(U_1) \cap Y$ por lo que $a \in f^{-1}(P^{-1}(U_1) \cap Y)$. En ambos casos tenemos que $a \in f^{-1}(P^{-1}(U_1) \cap Y) \cup (P^{-1}(U_1) \cap Y)$. Así, $P^{-1}(U_1) \subset f^{-1}(P^{-1}(U_1) \cap Y) \cup (P^{-1}(U_1) \cap Y)$. Ahora bien, tomemos a $b \in f^{-1}(P^{-1}(U_1) \cap Y) \cup (P^{-1}(U_1) \cap Y)$. Supongamos que $b \in f^{-1}(P^{-1}(U_1) \cap Y)$, entonces $f(b) \in P^{-1}(U_1) \cap Y$. Luego, $P(f(b)) \in U_1$, y como $P(f(b)) = P(b)$, tenemos que $b \in P^{-1}(U_1)$. Por otro lado, si $b \in P^{-1}(U_1) \cap Y$, entonces $b \in P^{-1}(U_1)$. Así, $f^{-1}(P^{-1}(U_1) \cap Y) \cup (P^{-1}(U_1) \cap Y) \subset P^{-1}(U_1)$. Por lo tanto, $P^{-1}(U_1) = f^{-1}(P^{-1}(U_1) \cap Y) \cup (P^{-1}(U_1) \cap Y)$.
Luego, $P^{-1}(W_1) = (V_1 - A) \cup f^{-1}(P^{-1}(U_1) \cap Y) \cup (P^{-1}(U_1) \cap Y)$. Como $P^{-1}(U_1) \cap Y = P|_Y^{-1}(U_1)$ y U_1 es abierto en $P(Y)$, tenemos que $P^{-1}(U_1) \cap Y$ es abierto en Y. Además, dado que f es continua, entonces $f^{-1}(P^{-1}(U_1) \cap Y)$ es abierto en A. Ahora bien, como $P^{-1}(U_1) \subset P^{-1}(A_1 \cup cl_{P(Y)}(U_1))$, tenemos que $f^{-1}(P^{-1}(U_1) \cap Y) \subset (P^{-1}(A_1 \cup cl_{P(Y)}(U_1))) \cap X = B_1 \subset V_1$. Así que podemos ver a $f^{-1}(P^{-1}(U_1) \cap Y) = Z \cap A$ con Z abierto en X y $Z \subset V_1$. Con esto que $(V_1 - A) \cup f^{-1}(P^{-1}(U_1) \cap Y) = (V_1 - A) \cup (Z \cap A) = ((V_1 - A) \cup Z) \cap (V_1 \cup A)$. Entonces $(V_1 - A) \cup f^{-1}(P^{-1}(U_1) \cap Y) = (V_1 - A) \cup Z$, el cual es abierto en X. Luego, $P^{-1}(W_1) = (V_1 - A) \cup Z \cup (P^{-1}(U_1) \cap Y)$ es abierto en $X \cup Y$ y se sigue que W_1 es abierto en $X \cup_f Y$. De manera similar, se puede probar que W_2 es abierto en $X \cup_f Y$. Por lo tanto, $X \cup_f Y$ es normal. □

2.3 Funciones de Identificación

Definición 2.24. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces f es una **función de identificación** si y solo si la topología para Y coincide con $\mathscr{U} = \{U \subset Y : f^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$.*

Notemos que la función cociente $P : X \to X/G$ es una función de identificación, y además las funciones abiertas y cerradas son tambien funciones de identificación.

Teorema 2.25. *Supongase que X, Y y Z son espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función de identificación y $g : Y \to Z$. Entonces g es continua si y solo si $g \circ f$ es continua.*

Demostración. Claramente si g es continua, entonces $g \circ f$ es continua. Ahora, supongamos que $g \circ f$ es continua. Sea U abierto en Z, entonces $(g \circ f)^{-1}(U)$ es abierto en X. Como $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ y f es una función de identificación, tenemos que $g^{-1}(U)$ es abierto en Y. Por lo tanto, g es continua. $\square$

Teorema 2.26. *Supongase que X, Y y Z son espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función de identificación y $h : X \to Z$ continua. Si $h \circ f^{-1}$ es una función entonces $h \circ f^{-1}$ es continua.*

Demostración. Sea U abierto en Z, entonces $h^{-1}(U)$ es abierto en X. Como $f^{-1}((h \circ f^{-1})^{-1}(U)) = ((h \circ f^{-1}) \circ f)^{-1}(U) = h^{-1}(U)$ y f es una función de identificación, tenemos que $(h \circ f^{-1})^{-1}(U)$ es abierto en Y. Por lo tanto, $h \circ f^{-1}$ es continua. $\square$

El siguiente teorema generaliza ligeramente el Teorema 2.8.

Teorema 2.27. *Supongamos que $f : X \to Y$ una función de identificación. Entonces $\Phi_f : X/G_f \to Y$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Bastará probar que Φ_f es abierta. Sea U abierto en X/G_f, entonces $P^{-1}(U)$ es abierto en X. Como $f^{-1}(\Phi_f(U)) = P^{-1}(U)$ y f es una función de identificación, tenemos que $\Phi_f(U)$ es abierto en Y. Luego, Φ_f es abierta. Por lo tanto, Φ_f es un homeomorfismo. $\square$

Teorema 2.28. *Sea X un espacio localmente conexo y $f : X \to Y$ una función de identificación. Probar que Y es localmente conexo.*

Demostración. Por el Teorema 1.31, Bastará probar que las componentes de los conjuntos abiertos de Y son tambien abiertas. Sea U abierto en Y y C una componente de U. Supongamos que $x \in f^{-1}(C)$ y sea D_x la componente de $f^{-1}(U)$ que contiene a x. Y desde que $f^{-1}(U)$ es abierto y X es localmente conexo, por el Teorema 1.31, se sigue que D_x es abierto en X. Como f es continua y D_x es conexo, tenemos que $f(D_x)$ es conexo. Así, $f(D_x) \subset U$ conexo y $f(x) \in f(D_x)$. Como C es la componente de U que contiene a $f(x)$, tenemos que $f(D_x) \subset C$, y en consecuencia $D_x \subset f^{-1}(C)$. De esto que, $f^{-1}(C)$ es abierto en X. Luego, C es abierto en Y, pues f es una función de identificación. Por lo tanto, Y es localmente conexo. $\square$

2.4 Topología fuerte y k-espacios.

De manera similar a como la topología debil (o inicial) se introduce como una generalización de la topología producto medienate una familia de funciones, una topología puede ser definida para generalizar la noción de topología cociente.

Definición 2.29. *Sea $\mathscr{X} = \{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una familia de espacios topológicos, Y un conjunto y $\mathscr{F} = \{f_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una familia de funciones tal que para cada $\alpha \in \Lambda$ $f_\alpha : X_\alpha \to Y$. Diremos que $U \subset Y$ es abierto si y solo si para cada $\alpha \in \Lambda$ $f_\alpha^{-1}(U)$ es abierto en X_α. Esta colección de conjuntos de Y forma una topología la cual es llamada la* ***topología fuerte*** *asociada con la familia de funciones $\mathscr{F}$.*

Observación 2.30. *Notemos que si Y es un espacio con la topología fuerte asociada con la familia de funciones $\{f_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ tal que para cada $\alpha \in \Lambda$ $f_\alpha : X_\alpha \to Y$, entonces $F \subset Y$ es cerrado si y solo si para cada $\alpha \in \Lambda$ $f_\alpha^{-1}(F)$ es cerrado en X_α.*

Teorema 2.31. *Sea Y es un espacio con la topología fuerte asociada con la familia de funciones $\{f_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ tal que para cada $\alpha \in \Lambda$ $f_\alpha : X_\alpha \to Y$ y Z un espacio arbitrario. Probar que una función $f : Y \to Z$ es continua si y solo si para cada $\alpha \in \Lambda$ $f \circ f_\alpha : X_\alpha \to Z$ es continua.*

Demostración. Claramente si f es continua, entonces para cada $\alpha \in \Lambda$ $f \circ f_\alpha : X_\alpha \to Z$ es continua, ya que Y tiene la topología fuerte. Ahora, supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$ $f \circ f_\alpha : X_\alpha \to Z$ es continua. Sea U abierto en Z, entonces para cada $\alpha \in \Lambda$ $(f \circ f_\alpha)^{-1}(U)$ es abierto en X_α. Como para cada $\alpha \in \Lambda$ $(f \circ f_\alpha)^{-1}(U) = f_\alpha^{-1}(f^{-1}(U))$ y Y tiene la topología fuerte, tenemos que $f^{-1}(U)$ es abierto en Y. Por lo tanto, f es continua. $\square$

La topología fuerte es usada para establecer una clase de espacios conocidos como k-espacios.

Definición 2.32. *Supongamos que $(X, \mathscr{U})$ es un espacio topológico y $\mathscr{C} = \{C : C$ es un subconjunto compacto de $(X, \mathscr{U})\}$. Para cada $C \in \mathscr{C}$, sea $i_C : C \to X$ la función inclusión. Entonces X es un* ***k-espacio*** *si y solo si la topología fuerte $\mathscr{K}$ para X inducida por $\{i_C : C \in \mathscr{C}\}$ coincide con $\mathscr{U}$. La topología $\mathscr{K}$ es llamada la* ***k-topología*** *para X asociada con $\mathscr{U}$.*

Observación 2.33. *Es fácil ver que:*

(*i*) *Si $(X, \mathscr{U})$ es un espacio topológico, entonces $\mathscr{U}$ es siempre un subconjunto de la k-topología para X asociada con $\mathscr{U}$.*

(*ii*) *Si X es un k-espacio y Y es un espacio arbitrario, entonces una función $f : X \to Y$ es continua si y solo si $f|_C : C \to Y$ es continua para cada subconjunto compacto C de X.*

Teorema 2.34. *Supongamos que $(X, \mathscr{U})$ es un espacio topológico y $\mathscr{C} = \{C : C$ es un subconjunto compacto de $(X, \mathscr{U})\}$. Entonces $(X, \mathscr{U})$ es un k-espacio si y solo si un subconjunto A de $(X, \mathscr{U})$ es cerrado siempre que para cada $C \in \mathscr{C}$ $A \cap C$ es cerrado en C.*

Demostración. Supongamos que $(X, \mathscr{U})$ es un k-espacio y sea A un subconjunto de X tal que para cada $C \in \mathscr{C}$ $A \cap C$ es cerrado en C. Como $A \cap C = i_C^{-1}(A)$, tenemos que para cada $C \in \mathscr{C}$ $i_C^{-1}(A)$ es cerrado en C. Luego, A es cerrado en $(X, \mathscr{U})$ desde que $(X, \mathscr{U})$ es un k-espacio.
Ahora bien, supongamos que un subconjunto A de $(X, \mathscr{U})$ es cerrado siempre que para cada $C \in \mathscr{C}$ $A \cap C$ es cerrado en C. Sea $\mathscr{K}$ la k-topología para X asociada a $\mathscr{U}$. Por la observación 2.33(i), tenemos que $\mathscr{U} \subset \mathscr{K}$. Supongamos que A es un subconjunto cerrado de $(X, \mathscr{K})$, entonces para cada $C \in \mathscr{C}$ $i_C^{-1}(A)$ es cerrado en C. Como $i_C^{-1}(A) = A \cap C$, se sigue que $A \cap C$ es cerrado en C, y en consecuencia A es cerrado en $(X, \mathscr{U})$. De esto que, $\mathscr{K} \subset \mathscr{U}$. Por lo tanto, $(X, \mathscr{U})$ es un k-espacio. $\square$

Observación 2.35. *Del Teorema 2.34, podemos notar que $(X, \mathscr{U})$ es un k-espacio si y solo si un subconjunto A de $(X, \mathscr{U})$ es abierto siempre que para cada $C \in \mathscr{C}$ $A \cap C$ es abierto en C.*

Teorema 2.36. *Probar que:*

(a) *Los espacios localmente compactos son k-espacios.*

(b) *Los espacios primero numerables son k-espacios.*

Demostración. (a) Supongamos que X es localmente compacto. Sean $U \subset X$ tal que para cada C subconjunto compacto de X, $U \cap C$ es abierto en C, y $x \in U$. Como X es localmente compacto, tenemos que existe V subconjunto abierto de X que contiene a x y tiene cerradura compacta. Como $cl_X(V)$ es compacto, tenemos que $U \cap cl_X(V)$ es abierto en $cl_X(V)$. En consecuencia, $(U \cap cl_X(V)) \cap V = U \cap V$ es abierto en V. Así, $U \cap V$ es abierto en X, pues V es abierto en X, y contine a x. De esto que, U es abierto en X. Por lo tanto, X es un k-espacio.
(b) Supongamos que X es primero numerable y que $F \subset X$ es tal que para

cada C subconjunto compacto de X $F \cap C$ es cerrado en C. Sea $x \in cl_X(F)$ y $\{x_n\}$ una sucesión en F que converge a x, entonces $C = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto, y así $F \cap C$ es cerrado en C. Como $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset F \cap C$, tenemos que $x \in cl_C(F \cap C)$, se sigue que $x \in F \cap C$ ya que es cerrado en C. De esto que, $cl_X(F) \subset F$ y por tal F es cerrado en X. Por lo tanto, X es un k-espacio. $\square$

Capítulo 3

Encajes

En este capítulo vemos qué es un continuo y que existe un continuo universal. También vemos qué es una dendrita y que existe una dendrita universal en $\mathbb{R}^2$.

Comenzamos con la noción de continuo.

Definición 3.1. *Un* ***continuo*** *es un espacio métrico, no vacío, compacto y conexo.*

De acuerdo al Teorema 1.51, la propiedad de ser un continuo es una propiedad topológica.

Ejemplo 3.2. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y*

$$B^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon \parallel (x_1, x_2, \ldots, x_n) \parallel \leq 1\}.$$

A B^n se le conoce como la ***bola cerrada*** *en $\mathbb{R}^n$ de dimensión n y es un ejemplo de un continuo. De hecho una n-celda es homeomorfa a B^n, por lo que una n-celda es un continuo.*

Ahora, recordemos la definición de continuo universal en una clase de continuos.

Definición 3.3. *Sean $\mathfrak{C}$ una clase de continuos y $C \in \mathfrak{C}$. Decimos que C es* ***universal en la clase*** *$\mathfrak{C}$, si todo elemento de la clase $\mathfrak{C}$ es encajable en C.*

Con la intención de probar que existe un continuo universal veamos como se define el espacio conocido como Cubo de Hilbert, veamos que efectivamente es un continuo y que además todo continuo se puede encajar en él.

Definición 3.4. *Para todo $i \in \mathbb{N}$, sea $I_i = [0,1]$. Sea $[0,1]^\infty = \prod_{i=1}^{\infty} I_i$. Consideramos $[0,1]^\infty$ con la topología producto. El **Cubo de Hilbert** es un espacio topológico homeomorfo a $[0,1]^\infty$.*

Como el producto arbitrario de espacios conexos es conexo con la topología producto (vea [2, (6.A.12)]) y el producto arbitrario de espacios compactos también es compacto con la topología producto (vea [2, (6.A.11)]), tenemos que $[0,1]^\infty$, con la topología producto, es conexo y compacto.

Además, $D : \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$, definida para cada $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$, por

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup \left\{ \frac{\overline{d}(x_i, y_i)}{i} : i \in \mathbb{N} \right\},$$

donde $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\mathbf{y} = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\overline{d}(x_i, y_i) = \min\{|x_i - y_i|, 1\}$, es una métrica de $\mathbb{R}^\infty$ que induce la topología producto (vea [5, Teorema 20.5]). En consecuencia, $[0,1]^\infty$ es metrizable.

Así, $[0,1]^\infty$ es un continuo y de aquí, por el Teorema 1.51, el cubo de Hilbert es un continuo.

Ahora veamos que $[0,1]^\infty$ es un continuo universal, es decir, cualquier otro continuo es encajable en $[0,1]^\infty$. Para esto necesitamos lo siguiente.

Teorema 3.5. *[3, 5.6, pág. 187] Si X es un espacio métrico, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) X es segundo numerable.

(2) X es separable.

(3) X es de Lindelöf.

A continuación enunciamos un resultado muy importante en Topología General y que habitualmente se llama el Lema de Urysohn. Nos asegura la existencia de ciertas funciones continuas con valores reales en un espacio normal X. En nuestro trabajo, es la herramienta básica usada para probar el Lema 3.7, que nos será de ayuda para demostrar el Teorema 3.8, y éste último nos sirve para probar el Teorema 3.9, el cual es un resultado importante en Teoría de Continuos.

Teorema 3.6. *[5, Teorema 33.1]* ***Lema de Urysohn.*** *Sea X un espacio topológico normal. Si A y B son subconjuntos cerrados y ajenos en X y $[a,b]$ es un intervalo cerrado en la recta real, entonces existe una función continua $f : X \to [a,b]$ tal que para todo $x \in A : f(x) = a$ y para todo $x \in B : f(x) = b$.*

Lema 3.7. *Si X es un espacio topológico regular con base numerable, entonces existe una familia numerable $\mathcal{F}$ cuyos elementos son funciones continuas de X en $[0,1]$ tal que para todo $p \in X$ y para todo U abierto en X con $p \in U$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(p) > 0$ y para todo $x \in X - U : f(x) = 0$.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio topológico regular con una base numerable $\mathcal{B}$. Sea $\mathcal{A} = \{(U,V)\colon U,V \in \mathcal{B} \text{ y } \mathrm{cl}_X(U) \subset V\}$. La colección $\mathcal{A}$ es numerable. Para cada $(U,V) \in \mathcal{A}$, claramente $\mathrm{cl}_X(U)$ y $X - V$ son cerrados en X y ajenos, aplicamos el Lema de Urysohn para elegir una función continua $f_{U,V} : X \to [0,1]$ tal que para todo $x \in \mathrm{cl}_X(U) : f_{U,V}(x) = 1$ y para todo $x \in X - V : f_{U,V}(x) = 0$. Luego, la familia $\mathcal{F} = \{f_{U,V}\colon (U,V) \in \mathcal{A}\}$ es numerable.

Revisemos que la familia $\mathcal{F}$ satisface la condición deseada. Sean $p \in X$ y W un abierto en X tales que $p \in W$. Existe $B_m \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B_m \subset W$. Como X es regular y B_m es abierto en X, existe A abierto en X tal que $p \in A \subset \mathrm{cl}_X(A) \subset B_m$. Ahora, como A es abierto en X, existe $B_k \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B_k \subset A$. Luego, $\mathrm{cl}_X(B_k) \subset \mathrm{cl}_X(A) \subset B_m$. Así, $(B_k, B_m) \in \mathcal{A}$. Luego, existe $f_{B_k,B_m} \in \mathcal{F}$ tal que para todo $x \in \mathrm{cl}_X(B_k) : f_{B_k,B_m}(x) = 1$ y para todo $x \in X - B_m : f_{B_k,B_m}(x) = 0$. Como $p \in B_k \subset \mathrm{cl}_X(B_k)$, tenemos que $f_{B_k,B_m}(p) = 1$. Como $X - W \subset X - B_m$, tenemos que para todo $x \in X - W$: $f_{B_k,B_m}(x) = 0$. $\square$

Teorema 3.8. *Todo espacio topológico regular con base numerable es homeomorfo a un subespacio de $[0,1]^\infty$.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio topológico regular con base numerable. Por el Lema 3.7, existe una familia $\mathcal{F} = \{f_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ que satisface las hipótesis de dicho lema; consideramos $\mathbb{R}^\infty$ con la topología producto y definimos $F : X \to \mathbb{R}^\infty$, de la siguiente manera

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots).$$

Luego, F es continua porque $\mathbb{R}^\infty$ tiene la topología producto y cada f_n es continua.

También, F es inyectiva porque si $x, y \in X$ con $x \neq y$, tenemos que como X es de Hausdorff, existen U y V ajenos y abiertos en X tales que $x \in U$ y $y \in V$. Como $\mathcal{F}$ satisface lo que establece el Lema 3.7, para x y U existe $f_n \in \mathcal{F}$ tal que $f_n(x) > 0$ y para todo $t \in X - U : f_n(t) = 0$. Como $y \in X - U$, tenemos que $f_n(y) = 0$. Así, existe un índice n tal que $f_n(x) > 0$ y $f_n(y) = 0$. Luego, $F(x) \neq F(y)$.

Sea $Z = F(X)$. Notemos que para todo $x \in X$ y para todo $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $0 \leq f_i(x) \leq 1$. Luego, $Z \subset [0, 1]^\infty$.

Resta probar que X es homeomorfo a Z. Para esto, sea $G : X \to Z$ definida, para cada $x \in X$, por $G(x) = F(x)$. Por su definición G es una función biyectiva y continua de X en Z.

Veamos que G es una función abierta. Para esto, sea U abierto en X. Sea $z_0 \in G(U)$. Busquemos un conjunto W abierto en Z tal que $z_0 \in W \subset G(U)$.

Como $z_0 \in G(U)$, existe $x_0 \in U$ tal que $G(x_0) = z_0$. Por el Lema 3.7, existe $f_N \in \mathcal{F}$ tal que $f_N(x_0) > 0$ y para todo $t \in X - U : f_N(t) = 0$.

Tomemos el rayo abierto $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$ y sean $\pi_N : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ la proyección N-ésima y

$$V = \pi_N^{-1}((0, \infty)).$$

Como π_N es continua, tenemos que V es abierto en $\mathbb{R}^\infty$.

Sea $W = V \cap Z$. Claramente W es abierto en Z. Veamos que $z_0 \in W \subset G(U)$.

Como $\pi_N(z_0) = \pi_N(G(x_0)) = f_N(x_0) > 0$, tenemos que $z_0 \in V$. Además, como $z_0 \in Z$, tenemos que $z_0 \in W$.

Además, $W \subset G(U)$. Porque si $z \in W$, entonces $z \in V \cap Z$. Luego, existe $x \in X$ tal que $G(x) = z$. Como $z \in V$, tenemos que $\pi_N(z) \in (0, \infty)$ y de aquí, $\pi_N(z) > 0$.

Como $\pi_N(z) = \pi_N(G(x)) = f_N(x)$ y f_N es nula fuera de U, concluimos que $x \in U$, de otro modo tendríamos que $\pi_N(z) = 0$.

Luego, $G(x) \in G(U)$, es decir, $z \in G(U)$ y de aquí $G(U)$ es abierto en Z.

Con todo esto, $G : X \to Z$ es un homeomorfismo. Así, X es homeomorfo a un subespacio de $[0, 1]^\infty$. $\square$

Teorema 3.9. *Todo continuo es homeomorfo a un subespacio de* $[0,1]^\infty$ *(Cubo de Hilbert).*

Demostración. Supongamos que X es un continuo. En particular, X es un espacio métrico compacto. Luego, X es de Lindelöf. Por el Teorema 3.5, tenemos que X es segundo numerable, es decir, tiene una base numerable. Además, todo espacio métrico satisface el axioma de regularidad. Por el Teorema 3.8, concluimos que X es homeomorfo a un subespacio de $[0,1]^\infty$. □

A continuación veamos qué es una dendrita.

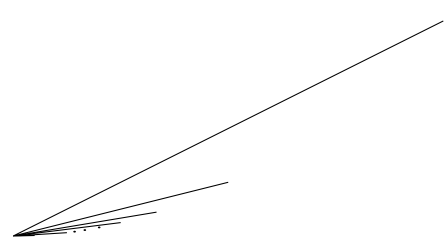
Definición 3.10. *Una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.*

Ejemplo 3.11. *Cada arco es localmente conexo y no contiene curvas cerradas simples. Así, cada arco es una dendrita.*

Ejemplo 3.12. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *sea* $\left[(0,0),\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)\right]$ *el segmento de recta en* $\mathbb{R}^2$ *que va de* $(0,0)$ *a* $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)$.

Sea

$$F_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[(0,0),\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)\right].$$



Este continuo es una dendrita y se conoce precisamente como F_ω.

Veamos que existe un dendrita universal en la clase de las dendritas. Para esto, primero veamos la noción de límite inverso y algunos resultados que nos serán de utilidad.

Definición 3.13. *Sea* $\{X_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ *una colección de espacios métricos. Para cada* $i \in \mathbb{N}$, *sea* $f_i : X_{i+1} \to X_i$ *una función continua. La sucesión* $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ *de espacios y funciones es llamada una **sucesión inversa,** a los espacios*

*X_i se les conoce como **espacios coordenados** y a las funciones f_i se les conoce como **funciones de ligadura.***

*Si $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa, entonces el **límite inverso** de $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$, denotado por $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$, es el subespacio del producto cartesiano $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ definido por*

$$\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i \colon f_i(x_{i+1}) = x_i\}.$$

Lema 3.14. *[6, Teorema 2.10] Sean X un espacio métrico con métrica d y $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que X_i es un subconjunto compacto, no vacío de X y f_i es una función suprayectiva. Para todo $j > i + 1$, sea*

$$f_{ij} = f_i \circ \cdots \circ f_{j-1} : X_j \to X_i \quad y \quad f_{ii+1} = f_i.$$

Supongamos que se cumplen las siguientes afirmaciones:

(a) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $p \in X_k$:

$$\text{diám}\left(\bigcup_{j>k} f_{kj}^{-1}(p)\right) < \varepsilon.$$

(b) Para todo $i \in \mathbb{N}$ y para todo $\delta > 0$ existe δ' tal que si $j > i$ y $p, q \in X_j$ son tales que $d(f_{ij}(p), f_{ij}(q)) > \delta$, entonces $d(p, q) > \delta'$.

Entonces $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es homeomorfo a $\bigcap_{i=1}^{\infty}(\mathrm{cl}_X(\bigcup_{m\geq i} X_m))$. En particular, si para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $X_i \subset X_{i+1}$, entonces $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es homeomorfo a $\mathrm{cl}_X(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i)$.

Definición 3.15. *Sean X_1 y X_2 espacios topológicos. Una función $f : X_1 \to X_2$ es **monótona** si f es continua y para cada $y \in X_2$, tenemos que $f^{-1}(y)$ es conexo.*

Lema 3.16. *[6, Teorema 10.36] Todo límite inverso de dendritas con funciones de ligadura monótonas es una dendrita.*

Veamos la siguiente noción que nos será de utilidad para construir una dendrita, que llamamos D_∞ y que más adelante veamos que es universal en la clase de las dendritas.

Definición 3.17. *Sea $c \in \mathbb{R}^2$. Una* ***estrella con centro en*** c ***y rayos*** B_j *es $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, donde para cada $j \in \mathbb{N}$, tenemos que B_j es un arco convexo en $\mathbb{R}^2$ tal que c es uno de sus puntos extremos,* $\text{diám}(B_j) \to 0$ *cuando $j \to \infty$ y $B_j \cap B_k = \{c\}$, si $j \neq k$.*

A continuación presentamos en cuatro pasos la construcción de la dendrita D_∞ y por qué D_∞ es una dendrita universal en la clase de las dendritas. Como esta dendrita D_∞ es encajable en $\mathbb{R}^2$ tenemos como consecuencia inmediata que toda dendrita es aplanable.

Lema 3.18. *Toda dendrita se puede encajar en $\mathbb{R}^2$.*

Demostración. Hacemos la prueba en cuatro pasos.

Paso 1. Construcción de D_∞. Sean $c_1 \in \mathbb{R}^2$ y D_1 una estrella con centro en c_1.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, sea m_j el punto medio de cada rayo B_j de D_1 y S_j una estrella con centro en m_j y tal que $S_j \cap B_j = \{m_j\}$, $\text{diám}(S_j) \to 0$ cuando $j \to \infty$ y $S_j \cap S_k = \emptyset$, si $j \neq k$.

Ahora sea $D_2 = D_1 \cup (\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j)$.

De manera similar, para cada $j \in \mathbb{N}$ ponemos una estrella con centro en cada punto medio del subarco de B_j que va de c a m_j y otra estrella con centro en cada punto medio del subarco de B_j que va de m_j al punto extremo de B_j que no es c. También para cada $j \in \mathbb{N}$, ponemos una estrella en el punto medio de cada rayo de cada estrella S_j, cuidando que las nuevas estrellas construidas sean disjuntas dos a dos, que intersecten a D_2 sólo en sus respectivos centros y que sus diámetros tiendan a cero cuando $j \to \infty$. Así, de manera similar, para cada $i \in \mathbb{N}$, continuamos construyendo D_i.

Notemos que para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que D_i es una dendrita y $D_i \subset D_{i+1}$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $f_i : D_{i+1} \to D_i$ una función definida para cada $x \in D_{i+1}$ por

$f_i(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \in D_i \\ m_j, & \text{si} \quad x \in S_j, \end{cases}$ donde para cada $j \in \mathbb{N}$ tenemos que S_j^i es una estrella agregada a D_i.

Notemos que para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que f_i es una función monótona.

Sea $D_\infty = \varprojlim \{D_i, f_i\}_{i=1}^\infty$.

Paso 2. D_∞ es una dendrita. El hecho de que D_∞ es una dendrita se desprende inmediatamente del Lema 3.16.

Paso 3. D_∞ es encajable en $\mathbb{R}^2$. Por la construcción de D_∞, tenemos que se cumplen (a) y (b) del Lema 3.14. Luego, $\varprojlim \{D_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ es homeomorfo a $\mathrm{cl}_X(\bigcup_{i=1}^\infty D_i)$. Notemos que

$$\mathrm{cl}_X(\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i) \subset \mathbb{R}^2.$$

Así, D_∞ es encajable en $\mathbb{R}^2$.

Paso 4. D_∞ es universal para la familia de las dendritas. La prueba de este hecho es un tanto más elaborada, por razones de espacio remitimos al lector a consultarla en [6, 10.37, Paso 4].

Así, toda dendrita se puede encajar en $\mathbb{R}^2$. □

Así, en esta sección hemos visto dos encajes importantes dentro de la Teoría de los Continuos. Todo continuo se puede encajar en el cubo de Hilbert y toda dendrita se puede encajar en D_∞.

3.1 Ninguna n-sombrilla es encajable en $\mathbb{R}^n$

En esta sección vemos qué es una n-sombrilla y revisamos el material necesario para probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, ninguna n-sombrilla es encajable en $\mathbb{R}^n$ (vea el Teorema 3.33).

Comenzamos esta sección recordando que un espacio topológico es perfecto si es cerrado y es igual al conjunto de sus puntos de acumulación.

Lema 3.19. *Si X es un espacio topológico, Y es un subespacio de X tal que Y es perfecto y $p \in Y$, entonces* $\mathrm{cl}_X(Y - \{p\}) = Y$.

Demostración. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X tal que Y es cerrado en X y $Y = Y'_X$. Sea $p \in Y$. Veamos que $\mathrm{cl}_X(Y - \{p\}) = Y$. Sea $y \in Y$. Supongamos que $y \neq p$. Luego, $y \in Y - \{p\}$. Como $Y - \{p\} \subset \mathrm{cl}_X(Y - \{p\})$, tenemos que $y \in \mathrm{cl}_X(Y - \{p\})$. Ahora, supongamos que $y = p$. Como $Y = Y'_X$, tenemos que $p \in Y'_X$. Luego, para todo abierto U en X con $p \in U$, tenemos que $U \cap (Y - \{p\}) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $y \in \mathrm{cl}_X(Y - \{p\})$. Así, $Y \subset \mathrm{cl}_X(Y - \{p\})$.

Por otro lado, como $Y - \{p\} \subset Y$, tenemos que $\mathrm{cl}_X(Y - \{p\}) \subset \mathrm{cl}_X(Y)$. Como Y es cerrado en X, tenemos que $\mathrm{cl}_X(Y) = Y$. Luego, $\mathrm{cl}_X(Y - \{p\}) \subset Y$. Así, $\mathrm{cl}_X(Y - \{p\}) = Y$. □

Lema 3.20. *Si X y Y son espacios topológicos y $p \in Y$, entonces $X \times \{p\}$ es homeomorfo a X.*

Demostración. Sean X y Y espacios topológicos, $p \in Y$ y $\pi_1 : X \times Y \to X$ la función primera proyección sobre X. Sea $g = \pi_1|_{X \times \{p\}} : X \times \{p\} \to X$. Por el Lema 1.50, tenemos que π_1 es continua, y de aquí g es continua. Claramente g es biyectiva y $g^{-1} : X \to X \times \{p\}$, definida por $g^{-1}(x) = (x, p)$, es continua. Así, $g : X \times \{p\} \to X$ es un homeomorfismo. □

Lema 3.21. *En $\mathbb{R}^n$ tenemos que $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Tenemos que $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]) = (0,1)$. Luego, $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n) = (0,1)^n$. Por otro lado, $(0,1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Así, $(0,1)^n$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. □

A continuación un lema en el cual verificamos que un homeomorfismo entre n-variedades preserva el interior como variedad y la frontera como variedad.

Lema 3.22. *Si M_1 y M_2 son n-variedades y $h : M_1 \to M_2$ es un homeomorfismo, entonces*

(1) $h(\mathrm{intv}_{(n)}(M_1)) = \mathrm{intv}_{(n)}(M_2)$.

(2) $h(\partial_n M_1) = \partial_n M_2$.

Demostración. Veamos que se cumple (1). Sea $z \in h(\mathrm{intv}_{(n)}(M_1))$. Tenemos que $z = h(p)$ para algún $p \in \mathrm{intv}_{(n)}(M_1)$. Existe una vecindad V de p en M_1 tal que V es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Como V es homeomorfo a $h(V)$, tenemos que $h(V)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Además, $h(V)$ es una vecindad de z en M_2. Luego, $z \in \mathrm{intv}_{(n)}(M_2)$. Así, $h(\mathrm{intv}_{(n)}(M_1)) \subset \mathrm{intv}_{(n)}(M_2)$.

Ahora, veamos que $\mathrm{intv}_{(n)}(M_2) \subset h(\mathrm{intv}_{(n)}(M_1))$. Como $h^{-1} : M_2 \to M_1$ es un homeomorfismo, de manera similar de como se demostró que $h(\mathrm{intv}_{(n)}(M_1)) \subset \mathrm{intv}_{(n)}(M_2)$, se obtiene que

$$h^{-1}(\mathrm{intv}_{(n)}(M_2)) \subset \mathrm{intv}_{(n)}(M_1).$$

Luego, $\mathrm{intv}_{(n)}(M_2) = h(h^{-1}(\mathrm{intv}_{(n)}(M_2))) \subset h(\mathrm{intv}_{(n)}(M_1))$.

Veamos que se cumple (2). Como h es biyectiva, tenemos que $h(\partial M_1) = h(M_1 - \mathrm{intv}_{(n)}(M_1)) = h(M_1) - h(\mathrm{intv}_{(n)}(M_1)) = M_2 - h(\mathrm{intv}_{(n)}(M_1))$. Luego, por (1), tenemos que $h(\partial_n M_1) = M_2 - \mathrm{intv}_{(n)}(M_2)$. Así, $h(\partial_n M_1) = \partial_n M_2$. □

Lema 3.23. *Si* $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n)$, *entonces*

$$(a_1, \ldots, a_n, 0) \in \mathrm{intv}_{(n)}([0,1]^n \times \{0\}).$$

Demostración. Sea $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n)$. Notemos que

$$(a_1, \ldots, a_n, 0) \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n) \times \{0\}.$$

Por el Lema 3.20, tenemos que $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n) \times \{0\}$ es homeomorfo a $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n)$. Además, por el Teorema 3.21, tenemos que $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Luego, $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n) \times \{0\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Así, $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n) \times \{0\}$ es una vecindad de $(a_1, \ldots, a_n, 0)$ homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $(a_1, \ldots, a_n, 0) \in \mathrm{intv}_{(n)}([0,1]^n \times \{0\})$. □

Lema 3.24. *Sean* $X \subset \mathbb{R}^n$ *y* $p \in X$. *Entonces* $p \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$ *si y solo si existe* $Z_p \subset X$ *tal que* Z_p *es compacto y* $p \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(Z_p)$.

Demostración. Supongamos que $p \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$. Como $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto, existe un abierto V en $\mathbb{R}^n$ tal que $p \in V \subset \mathrm{cl}_{\mathbb{R}^n}(V) \subset \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$ y $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^n}(V)$ es compacto. Notemos que $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^n}(V) \subset X$ y $p \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(V) \subset \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^n}(V))$.

Sea $Z_p = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}^n}(V)$. Tenemos que $Z_p \subset X$ y Z_p es compacto. Además, $p \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(Z_p)$. Así, Z_p satisface las propiedades deseadas.

Recíprocamente, supongamos que existe $Z_p \subset X$ tal que Z_p es compacto y $p \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(Z_p)$. Como $Z_p \subset X$, tenemos que $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(Z_p) \subset \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$. Luego, $p \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$. □

Lema 3.25. *Sean X y Y subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y $p \in X$. Si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo y para todo $\delta > 0$ existe U_δ abierto en X con $p \in U_\delta \subset B(p, \delta) \cap X$ tal que toda función $f : X - U_\delta \to S^{n-1}$ se puede extender a una función de X a S^{n-1}, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe W_ε abierto en Y con $h(p) \in W_\varepsilon \subset B(h(p), \varepsilon) \cap Y$ tal que toda función $\alpha : Y - W_\varepsilon \to S^{n-1}$ se puede extender a una función de Y a S^{n-1}.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $V_\varepsilon = B(h(p), \varepsilon) \cap Y$. Como $B(h(p), \varepsilon)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, tenemos que V_ε es abierto en Y. Luego, $h^{-1}(V_\varepsilon)$ es abierto en X. Existe $\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \cap X \subset h^{-1}(V_\varepsilon)$. Por hipótesis, existe un abierto U_δ en X tal que $p \in U_\delta \subset B(p, \delta) \cap X$ y toda función $f : X - U_\delta \to S^{n-1}$ se puede extender a una función de X a S^{n-1}. Luego,

$$h(p) \in h(U_\delta) \subset h(B(p, \delta) \cap X) \subset V_\varepsilon = B(h(p), \varepsilon) \cap Y.$$

Sea $W_\varepsilon = h(U_\delta)$. Tenemos que W_ε es abierto en Y y $h(p) \in W_\varepsilon \subset B(h(p), \varepsilon) \cap Y$. Veamos que toda función $\alpha : Y - h(U_\delta) \to S^{n-1}$ se puede extender a una función de Y a S^{n-1}. Sean $\alpha : Y - h(U_\delta) \to S^{n-1}$ y $g = \alpha \circ h|_{X - U_\delta}$. Notemos que g es una función de $X - U_\delta$ a S^{n-1}. Luego, existe $G : X \to S^{n-1}$ tal que para todo $x \in X - U_\delta$, tenemos que $G(x) = g(x)$.

Sea $y \in Y - h(U_\delta)$. Notemos que para todo $y \in Y - h(U_\delta)$, tenemos que $h^{-1}|_{Y - h(U_\delta)}(y) = h^{-1}(y)$. Luego,

$$G \circ h^{-1}(y) = G(h^{-1}(y)) = G(h^{-1}|_{Y - h(U_\delta)})(y).$$

Como $h^{-1}|_{Y - h(U_\delta)}(y) \in X - U_\delta$, tenemos que

$$G(h^{-1}|_{Y - h(U_\delta)}(y)) = g(h^{-1}|_{Y - h(U_\delta)}(y)).$$

Así,

$$G \circ h^{-1}(y) = g(h^{-1}|_{Y - h(U_\delta)}(y)) = g(h^{-1}(y)) = \alpha \circ h|_{X - U_\delta}(h^{-1}(y))$$

Notemos que para todo $x \in X - U_\delta$, tenemos que $h|_{X - U_\delta}(x) = h(x)$. Luego,

$$\alpha \circ h|_{X - U_\delta}(h^{-1}(y)) = \alpha(h(h^{-1}(y))) = \alpha(y).$$

Así, para todo $y \in Y - h(U_\delta)$, tenemos que $G \circ h^{-1}(y) = \alpha(y)$. Por lo tanto, $G \circ h^{-1}$ es una extensión de α. $\square$

Teorema 3.26. *[7, 19.1] Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ y $p \in X$. Si X es compacto, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) $p \in \mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(X)$.

(2) Para todo $\delta > 0$ existe U_δ abierto en X con $p \in U_\delta \subset B(p,\delta) \cap X$ tal que toda función $f : X - U_\delta \to S^{n-1}$ se puede extender a una función de X a S^{n-1}.

El Teorema de la Invariancia del Dominio de Brower nos es de utilidad en este trabajo, por lo que a continuación presentamos una versión de este teorema para conjuntos compactos, el cual nos ayuda a probar el mismo teorema para conjuntos en general.

Teorema 3.27. *Sean X y Y subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Si X es compacto, entonces $h(\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) = \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)$.*

Demostración. Supongamos que $X \subset \mathbb{R}^n$ es compacto. Veamos que

$$(*) \qquad h(\mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(X)) = \mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(Y).$$

Sea $z \in h(\mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(X))$. Existe $p \in \mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(X)$ tal que $h(p) = z$. Por el Teorema 3.26, para todo $\delta > 0$ existe U_δ abierto en X con $p \in U_\delta \subset B(p,\delta) \cap X$ tal que toda función $f : X - U_\delta \to S^{n-1}$ se puede extender a una función de X a S^{n-1}. Por el Lema 3.25, para todo $\varepsilon > 0$ existe W_ε abierto en Y con $h(p) \in W_\varepsilon \subset B(h(p),\varepsilon) \cap Y$ tal que toda función $\alpha : Y - W_\varepsilon \to S^{n-1}$ se puede extender a una función de Y a S^{n-1}. Por el Teorema 3.26, tenemos que $h(p) \in \mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(Y)$. Así, $h(\mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(X)) \subset \mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(Y)$.

Ahora, como $h^{-1} : Y \to X$ es un homeomorfismo, de manera similar de como se demostró que $h(\mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(X)) \subset \mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(Y)$, se obtiene que $h^{-1}(\mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(Y)) \subset \mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(X)$. Luego,

$$\mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(Y) = h(h^{-1}(\mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(Y))) \subset h(\mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(X)).$$

Así, $h(\mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(X)) = \mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(Y)$.

Ahora, como $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X) = X - \mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(X)$ y h es biyectiva, tenemos que $h(\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) = h(X) - h(\mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(X)) = Y - h(\mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(X))$. Por $(*)$, $h(\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) = Y - \mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(Y)$. Como $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(Y) = Y - \mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(Y)$, tenemos que $h(\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) = \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)$. □

Veamos como se prueba el Teorema de la Invariancia del Dominio de Brower.

Teorema 3.28. ***De la invariancia del dominio de Brouwer.*** *Si X y Y son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y $h : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $h(\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) = \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)$. En particular, si X es abierto en $\mathbb{R}^n$, entonces Y es abierto en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sean X y Y subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Veamos que $h(\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) \subset \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)$. Sea $y \in h(\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X))$. Existe $x \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$ tal que $y = h(x)$. Por el Lema 3.24, existe $Z \subset X$ tal que Z es compacto y $x \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(Z)$. Así, $y = h(x) \in h(\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(Z))$. Notemos que $h|_Z : Z \to h(Z)$ es un homeomorfismo. Por el Teorema 3.27, tenemos que $y \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(h(Z))$. Notemos que $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(h(Z)) \subset \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)$. Luego, $y \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)$. Así,

$$h(\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) \subset \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(Y).$$

Como $h^{-1} : Y \to X$ es un homeomorfismo, de manera similar de como se demostró que $h(\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) \subset \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)$, se obtiene que $h^{-1}(\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)) \subset \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$. Luego,

$$\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(Y) = h(h^{-1}(\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(Y))) \subset h(\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)).$$

Por lo tanto, $h(\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) = \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)$.

Ahora, veamos que si X es abierto en $\mathbb{R}^n$, entonces Y es abierto en $\mathbb{R}^n$. Como X es abierto en $\mathbb{R}^n$, tenemos que $X = \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$. Luego, $Y = h(X) = h(\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) = \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)$. Así, Y es abierto en $\mathbb{R}^n$. □

Teorema 3.29. *Sean X un espacio métrico, V una n-celda en X y U un abierto en X. Si $p \in U \cap \mathrm{int}_X(V)$, entonces existe una n-celda J en X tal que $p \in \mathrm{int}_X(J) \subset J \subset U \cap \mathrm{int}_X(V)$.*

Demostración. Sean $p \in U \cap \mathrm{int}_X(V)$ y $h : V \to [0,1]^n$ un homeomorfismo. Notemos que $U \cap \mathrm{int}_X(V) \subset U \cap V \subset V$. Luego, $U \cap \mathrm{int}_X(V) = (U \cap \mathrm{int}_X(V)) \cap V$. Como $U \cap \mathrm{int}_X(V)$ es abierto en X, tenemos que $U \cap \mathrm{int}_X(V)$ es abierto en V. Luego, $h(U \cap \mathrm{int}_X(V))$ es un abierto en $[0,1]^n$. Supongamos que $h(p) = (y_1, \ldots, y_n)$. Por lo tanto, existe un básico $B = \prod_{i=1}^n U_i$ tal que $h(p) \in B \subset h(U \cap \mathrm{int}_X(V))$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que

U_i es abierto en $[0,1]$. Luego, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe un intervalo $[\alpha_i, \beta_i] \subset U_i$ tal que $y_i \in (\alpha_i, \beta_i)$. Así,

$$(y_1, \dots, y_n) \in \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i) \subset \prod_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i] \subset$$

$$\prod_{i=1}^{n} U_i = B \subset h(U \cap \mathrm{int}_X(V)).$$

Luego,

$$p = h^{-1}(h(p)) \in h^{-1}(\prod_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i)) \subset h^{-1}(\prod_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i]) \subset h^{-1}(B)$$

$$\subset h^{-1}(h(U \cap \mathrm{int}_X(V))) = U \cap \mathrm{int}_X(V).$$

Sea $J = h^{-1}(\prod_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i])$. Notemos que J es una n-celda en X y $\mathrm{int}_X(J) = h^{-1}(\prod_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i))$. Así, hemos probado que existe una n-celda J en X tal que $p \in \mathrm{int}_X(J) \subset J \subset U \cap \mathrm{int}_X(V)$. □

A partir del Teorema de la Invariancia del Dominio de Brower se prueba que el interior de una n-celda en $\mathbb{R}^n$ y el interior como variedad de dicha n-celda son iguales. A continuación presentamos este hecho.

Teorema 3.30. *En* $\mathbb{R}^n$ *tenemos que* $\mathrm{intv}_{(n)}([0,1]^n) = \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n)$.

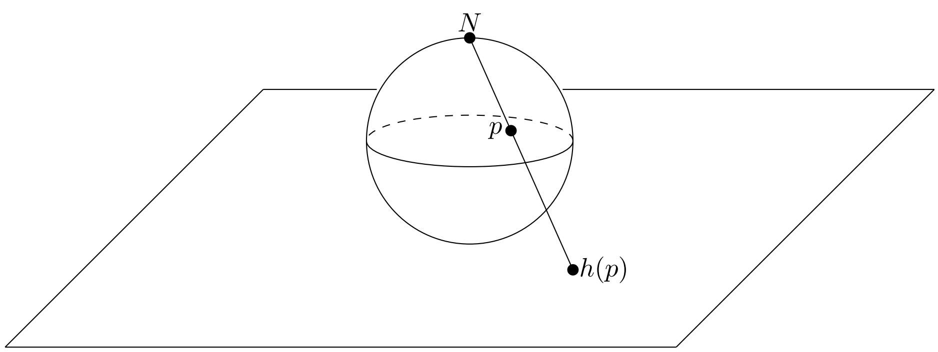
Demostración. Sea $p \in \mathrm{intv}_{(n)}([0,1]^n)$. Luego, existe una vecindad V de p contenida en $[0,1]^n$ tal que V es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Sea $h : \mathbb{R}^n \to V$ un homeomorfismo. Como $V \subset [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$, por el Teorema 3.28, tenemos que V es abierto en $\mathbb{R}^n$. Así, $V \subset \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n)$. Por lo tanto, $p \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n)$. Luego, $\mathrm{intv}_{(n)}([0,1]^n) \subset \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n)$.

Ahora, sea $p \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n)$. Como $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ y $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n) = \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n) \cap [0,1]^n$, por el Teorema 3.29, existe una n-celda J en $\mathbb{R}^n$ tal que $p \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(J) \subset J \subset \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n)$. Notemos que $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(J)$ es una vecindad de p contenida en $[0,1]^n$. Por el Lema 3.21, tenemos que $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(J)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Así, $p \in \mathrm{intv}_{(n)}([0,1]^n)$. Por lo tanto, $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n) \subset \mathrm{intv}_{(n)}([0,1]^n)$. □

Definición 3.31. *Una n-**sombrilla** es un espacio topológico homeomorfo a la unión de $[0,1]^n \times \{0\}$ y un arco J en $\mathbb{R}^{n+1}$ tales que $([0,1]^n \times \{0\}) \cap J = \{(a_1, \ldots, a_n, 0\ )\}$, donde $(a_1, \ldots, a_n) \in \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n)$ y $(a_1, \ldots, a_n, 0)$ es un punto extremo de J.*

Como toda n-sombrilla S es un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$, uno podría estar tentado a pensar que el hecho de que S no es encajable en $\mathbb{R}^n$ se da de manera inmediata. Sin embargo existen subespacios de $\mathbb{R}^{n+1}$ tales que si son encajables en $\mathbb{R}^n$. A continuación vemos un ejemplo y más adelante revisamos la prueba de que ninguna n-sombrilla es encajable en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 3.32. *Consideremos la esfera unitaria S^2 en $\mathbb{R}^3$. Sean $N = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ y $X = S^2 - \{N\}$. La función $h : X \to \mathbb{R}^2$ definida para cada $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ por $h((x,y,z)) = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z})$ es un homeomorfismo y se conoce como la **proyección estereográfica.***



Teorema 3.33. *Ninguna n-sombrilla es encajable en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y X una n-sombrilla. Tenemos que X es un espacio topológico homeomorfo a la unión de $[0,1]^n \times \{0\}$ y un arco J en $\mathbb{R}^{n+1}$ tales que $([0,1]^n \times \{0\}) \cap J = \{(a_1, \ldots, a_n, 0)\}$, donde $(a_1, \ldots, a_n) \in \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}([0,1]^n)$ y $(a_1, \ldots, a_n, 0)$ es un punto extremo de J.

Veamos que $([0,1]^n \times \{0\}) \cup J$ no es encajable en $\mathbb{R}^n$. Para esto supongamos lo contrario, es decir, supongamos que existe un encaje $h : ([0,1]^n \times \{0\}) \cup J \to \mathbb{R}^n$.

Luego, $h|_J : J \to \mathbb{R}^n$ es un encaje. Por el Lema 3.19, tenemos que

$$\operatorname{cl}_{\mathbb{R}^n}(h(J) - \{h((a_1, \ldots, a_n, 0))\}) = h(J).$$

Luego, existe una sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ en

$$h(J) - \{h((a_1, \ldots, a_n, 0))\}$$

tal que $r_n \to h((a_1, \ldots, a_n, 0))$.

Por el Lema 3.23, tenemos que $(a_1, \ldots, a_n, 0) \in \operatorname{intv}_{(n)}([0,1]^n \times \{0\})$. Luego, $h((a_1, \ldots, a_n, 0)) \in h(\operatorname{intv}_{(n)}([0,1]^n \times \{0\}))$. Por el Lema 3.22, tenemos que

$$h(\operatorname{intv}_{(n)}([0,1]^n \times \{0\})) = \operatorname{intv}_{(n)}(h([0,1]^n \times \{0\})).$$

Notemos que $[0,1]^n \times \{0\}$ es homeomorfo a $[0,1]^n$. Luego, $h([0,1]^n \times \{0\})$ es una n-celda en $\mathbb{R}^n$. Por el Lema 3.30, tenemos que

$$\operatorname{intv}_{(n)}(h([0,1]^n \times \{0\})) = \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(h([0,1]^n \times \{0\})).$$

Como $\operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(h([0,1]^n \times \{0\}))$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ y $r_n \to h((a_1, \ldots, a_n, 0))$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $r_n \in \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(h([0,1]^n \times \{0\}))$. Así, en particular $r_N \in \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(h([0,1]^n \times \{0\}))$. Luego,

$$r_N \in \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(h([0,1]^n \times \{0\})) \cap (h(J) - \{h((a_1, \ldots, a_n, 0))\}).$$

Como

$$\operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(h([0,1]^n \times \{0\})) \cap (h(J) - \{h((a_1, \ldots, a_n, 0))\})$$

$$\subset h([0,1]^n \times \{0\}) \cap h(J),$$

tenemos que $r_N \in h([0,1]^n \times \{0\}) \cap h(J)$. Notemos que $r_N \neq h((a_1, \ldots, a_n, 0))$. Luego, $h^{-1}(r_N) \in ([0,1]^n \times \{0\}) \cap J$ y $h^{-1}(r_N) \neq (a_1, \ldots, a_n, 0)$. Esto es una contradicción porque $([0,1]^n \times \{0\}) \cap J = \{(a_1, \ldots, a_n, 0)\}$.

Por lo tanto, $([0,1]^n \times \{0\}) \cup J$ no es encajable en $\mathbb{R}^n$. Como X es homeomorfo a $([0,1]^n \times \{0\}) \cup J$, tenemos que X no es encajable en $\mathbb{R}^n$. $\square$

Bibliografía

[1] E. Castañeda Alvarado, *Productos Simétricos,* Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias, UNAM, 2003.

[2] C. O. Christenson, W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, 2nd. ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[3] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, London, Sydney, Toronto, 1966.

[4] L. A. Guerrero Méndez, *Dendritas y Productos Simétricos,* Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 2012.

[5] J. R. Munkres, *Topología, Segunda Edición,* Prentice Hall. Madrid. España, 2002.

[6] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[7] S. B. Nadler, Jr., *Dimension Theory: An Introduction with exercises,* Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, no. 18, Sociedad Matemática Mexicana, 2002.

[8] S. Willard, *General Topology,* Dover Publications, 1998.

Índice alfabético