



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

**Ecuación de Korteweg-de Vries y
Ondas iónico-acústicas**

Tesis Presentada a la

**Facultad de Ciencias
Físico-Matemáticas**

como requisito para la obtención del grado de

Licenciado en Física Aplicada

por

Oliver Isac Ruiz Hernández

asesorado por

**M.C. Pedro Tolentino Eslava
Dra. Areli Montes Pérez**

Puebla, Pue.

Junio 2017

Ecuación de Korteweg-de Vries y Ondas iónico-acústicas

Tesis

Oliver Isac Ruiz Hernández

M.C. Pedro Tolentino Eslava

Dra. Areli Montes Pérez



Título: Ecuación de Korteweg-de Vries y Ondas
iónico-acústicas.

Estudiante: Oliver Isac Ruiz Hernández

COMITÉ

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero
Presidente

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez
Secretario

Dr. Wiyebaldo Fermín Guerrero Sánchez
Vocal

M.C. Pedro Tolentino Eslava
Asesor

Dra. Areli Montes Pérez
Asesor

Gracias

A mis padres por todo lo que hicieron por mi, a mis hermanos por sus enseñanzas, apoyo y particular forma de motivación, a mis amigos por haberme acompañado en el trayecto que recorri y por haberme brindado su apoyo. A todos mis maestros sin excepción, pues su interés o falta de interés en enseñar, me permitieron aprender a ser autodidacta y adquirir diversos conocimientos.

A mi asesor de tesis el M.C. Pedro Tolentino Eslava, por despertar mi particular interés en la Física de Plasmas. A la Dra. Areli Montes Pérez mi coasesora, por su amistad y todo el apoyo que me a brindado. Al Dr. Fernando Rojas Rodríguez por su asesoramiento en el lenguaje Python para la elaboración del programa utilizado en este trabajo.

A la Vicerrectoria de Investigación y Estudios de Posgrado por el apoyo proporcionado mediante los proyectos MOPA-EXC16-I y MOPA-EXC17-G.

Índice general

1. Introducción	1
2. Soluciones analíticas de la ecuación de Korteweg-de Vries	7
2.1. Solución en forma de onda viajera	7
2.2. Problema de Eigenvalores Asociados	10
2.3. Problema de Dispersión Inversa	12
2.4. Método de la Función Exponencial	14
2.5. Ecuación KdV generalizada	18
2.5.1. Casos Especiales	23
3. Ondas iónico-acústicas en el Plasma	27
3.1. Ondas acústicas en un fluido	27
3.2. Ondas iónico-acústicas	29
3.3. Ondas solitarias iónico-acústicas	33
4. Solución numérica de la ecuación de Korteweg-de Vries	37
4.0.1. Método de diferencias finitas	37
4.0.2. Discretización de la ecuación KdV	40

5. Resultados y discusión	43
6. Conclusiones	49
A. Código en lenguaje Python para resolver la ecuación KdV	51

Resumen

En el presente trabajo se estudia la teoría encargada de modelar a los fenómenos físicos conocidos como solitones u ondas solitarias, los cuales tienen lugar en diversas áreas de la Física. Se presenta la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV), la cual permite describir la naturaleza de dichos fenómenos y posteriormente se analizan diferentes métodos para resolver dicha ecuación de forma analítica. Se da un enfoque hacia el área de la Física de Plasmas y se aborda la teoría general de las ondas iónico-acústicas, las cuales presentan un comportamiento de onda solitaria. Se propone un método para resolver la ecuación KdV de forma numérica basándose en un esquema de diferencias finitas y se analizan los resultados obtenidos para intervalos pequeños de tiempo. Finalmente se concluye sobre la importancia de los elementos que conforman la ecuación KdV, los cuales están estrechamente relacionados con la naturaleza de los fenómenos físicos descritos por tal ecuación.

Palabras clave: Ecuación de Korteweg-de Vries; Solitones iónico-acústicos; Aproximación del Plasma; Diferencias finitas progresivas.

Capítulo 1

Introducción

En 1834 el arquitecto naval Escocés John Scott Russell siguió a caballo un remolcador, tirado por un par de caballos a lo largo del canal de la unión que conecta Edinburgo y Glasgow. Sin embargo, el bote detuvo repentinamente su velocidad, pero no la masa de agua que continuó en movimiento. Russell observó el fenómeno de una gran protuberancia de agua que no cambiaba de forma, viajando a lo largo del canal de agua con una velocidad de unas ocho millas por hora, unos treinta pies de largo y uno o dos pies de altura. Siguió a la ola en su caballo y después de una o dos millas, la perdió entre las curvas del canal [11,14]. La habilidad de ésta onda de agua para conservar su forma durante un periodo tan largo de tiempo, fue bastante notable y llevó a Russell a estudiar ésta perturbación mediante la realización de numerosos y detallados experimentos, basados en la recreación de grandes ondas en cuencas poco profundas, llenas de una capa de agua. Estudió la forma de las ondas, su velocidad de propagación y estabilidad, lo cual resultó bastante perceptible en el progreso de las ondas positivas, pero no en las ondas negativas progresivas. Posteriormente le llamó a éste fenómeno una onda de traslación. El trabajo de Russell en las ondas de traslación es considerado el estudio inicial de lo que ahora es llamado ondas solitarias o solitones.

Russell desafió a la sociedad matemática para probar teóricamente la existencia de su onda solitaria, deseaba mostrar la existencia de una onda solitaria estable propagandose sin cambio de forma. Usualmente las nuevas ideas y descubrimientos, encuentran resistencia

con las convicciones ya establecidas, éste fue justamente el caso de Russell. En una cita del artículo de Lord Rayleigh titulado “On Waves” de la Revista Filosófica, Airy una autoridad en el tema, escribió en su tratado titulado “Tides and Waves” lo siguiente: “No estamos dispuestos a reconocer ésta onda (descubierta por Scott Russell) como merecedora de los epítetos “grande” o “primaria”, y concebimos que desde que se sabía que la teoría de las ondas superficiales de gran longitud estaba contenida en la ecuación $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$ la teoría de la onda solitaria a sido perfectamente conocida”.

M. Boussinesq realizó contribuciones significativas en hidrodinámica y en las teorías de elasticidad, luz y calor. Escribió varios artículos relacionados con ondas dispersivas no lineales y una voluminosa “mémoire”, titulada “Essai sur la théorie des eaux courantes”, presentada a la Académie des Sciences en 1877, Vol. XXIII. En un artículo publicado en 1872 en la revista de Mathématiques Pures et Appliquées, titulado “Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d’un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide continu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond”, resume breves informes relacionados con las ondas solitarias.

En su trabajo, Boussinesq consideró grandes ondas en un canal bajo con sección transversal rectangular; el fluido es supuesto incompresible y libre de rotación, además la fricción en las fronteras es despreciable. Introdujo también una variable de tiempo, lo cual era esencial para una descripción dinámica del fenómeno, así las coordenadas de una partícula del fluido en el tiempo t , son denotadas por $(x, y) = (x(t), y(t))$, la altura de fluido en equilibrio es denotada por H y la superficie de la onda por la función $y = H + h(x, t)$ (ver Fig. 1.1). Se supone una longitud de onda grande, que la amplitud h de la onda es pequeña en comparación con H y que se desvanece cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

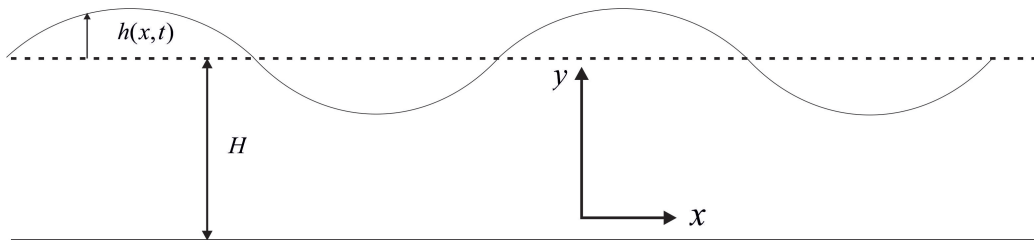


Figura 1.1: Flujo en un canal con sección transversal rectangular

En su desarrollo, para obtener una expresión explícita de la velocidad de la onda $\omega(x, t)$, propuso sin una clara motivación la función

$$\Psi(x, t) = h(x, t)[\omega(x, t) - \sqrt{gH}] - \frac{\sqrt{gH}}{2} \left[\frac{3}{2} \frac{h(x, t)^2}{H} + \frac{H^2}{3} \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} \right], \quad (1.1)$$

con lo cual, llegó al importante resultado

$$\omega(x, t) = \sqrt{gH} + \sqrt{gH} \left(\frac{3h(x, t)}{4H} + \frac{H^2}{6h(x, t)} \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} \right). \quad (1.2)$$

Es claro de (1.2) que la velocidad de la onda difiere de un punto a otro sobre la superficie de la onda, lo cual implicaría que la onda debería cambiar su forma en su recorrido, lo cual resultaba una de las principales inconsistencias con los experimentos de Russell. Sin embargo, la onda solo sería estacionaria si $\omega(x, t)$ fuera constante.

En 1876 Lord Rayleigh realizó un trabajo en el cual modificó la velocidad de la onda de la ecuación para ondas superficiales de gran longitud, que Airy aseguraba podía modelar todos los casos posibles. Rayleigh enfatizó en su trabajo que la condición de superficie libre (equilibrio de presión), lo cual conduce a que la velocidad de la onda sea \sqrt{gh} , es un resultado válido sólo como aproximación de primer orden, si la razón entre la altura h de la onda sobre la superficie y la altura H de la profundidad del canal es una cantidad despreciable (Fig. 1.1), es decir h/H es despreciable, pero si éste no es el caso, entonces es imposible obtener una onda en agua estancada con velocidad \sqrt{gh} y al mismo tiempo propagarse sin cambio de forma. Para resolver ésta discrepancia con los resultados experimentales de Russell, propuso buscar una aproximación más acertada para la velocidad de la onda.

Rayleigh asumió la existencia de una onda estacionaria que se desvanecía en el infinito, y al agregar al fluido una velocidad básica constante, aún desconocida, igual y opuesta a la velocidad de la onda, pudo omitir la dependencia del tiempo. Sus cálculos le llevaron a la obtención de una forma para la velocidad

$$u_0 \approx \sqrt{gH} + \frac{1}{2} h_0 \sqrt{\frac{g}{H}}, \quad (1.3)$$

y una forma de la onda

$$h(x) = h_0 \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{3h_0}{4H^3}} x \right), \quad (1.4)$$

donde h_0 representa la cresta de la onda. La fórmula (1.4), representa el “montón de agua” (la “Gran Onda”) con velocidad hacia la derecha (1.3), tal como lo había observado experimentalmente Scott Russell, con lo que finalmente fue justificado después de cerca de cuarenta años de discusión sobre el tema. Rayleigh terminó su artículo con la siguiente observación: “*Recientemente vi una memoria por M. Boussinesq, Comptes Rendus Vol. LXXII, en el cual se encuentra una teoría sobre ondas solitarias muy similar a lo que he desarrollado en éste artículo. Más allá de nuestros resultados en común, el crédito de prioridad le pertenece por supuesto a M. Boussinesq*”.

En 1895 Diedrik J. Korteweg y Gustav deVries realizaron un trabajo [10], en el cual retomaban las ideas de Rayleigh, pero consideraron un término extra en la condición de superficie libre correspondiente a la tensión superficial, con esto obtuvieron una ecuación diferencial parcial para modelar la altura de la superficie de aguas poco profundas en la presencia de grandes ondas gravitacionales

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{H}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} h^2 + \frac{2}{3} \alpha h + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \right) = 0, \quad (1.5)$$

donde $\xi = x - (\sqrt{gH} - \sqrt{\frac{g}{H}} \alpha) t$ y $\tau = t$

En estas ondas, la longitud de la onda es grande comparada con la profundidad del agua, como en el caso de las ondas de traslación de Russell.

En sus artículos, R. Pego y O. Darrigol, descubrieron en un pie de nota de la página 300 del “*Essai sur la théorie des eaux courantes*”, que Boussinesq había hallado la ecuación KdV en 1876 [3], utilizando la ecuación

$$\Psi_1(x, t) = \frac{\partial h}{\partial t} + \sqrt{gH} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2} \sqrt{gH} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3h^2}{2H} + \frac{H^2}{3} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (1.6)$$

y usando que $\Psi \equiv 0$, obtuvo la ecuación

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sqrt{\frac{g}{H}} \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{3} H h + \frac{1}{2} h^2 + \frac{H^3}{9} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (1.7)$$

En forma simplificada, la ecuación de Korteweg-de Vries o KdV tiene la siguiente forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (1.8)$$

donde x y t denotan la posición y el tiempo respectivamente, y $u = u(x, t)$ es la forma de la onda.

Con motivo de mantener intacta la notación original de los trabajos aquí citados, se utilizaron diferentes variables para denotar velocidades, alturas o formas de onda. En el desarrollo posterior se uniformizará la notación empleada para evitar confusiones, exceptuando los casos en que sea necesario utilizar otro tipo de notación.

Capítulo 2

Soluciones analíticas de la ecuación de Korteweg-de Vries

En el presente capítulo se analizan tres métodos diferentes para resolver la ecuación KdV de forma analítica; el primer método se basa en una solución de onda viajera; el segundo es referente al llamado método de dispersión inversa [1,12], el cual se relaciona con resolver un problema de eigenvalores [4]; el tercer método muestra una solución por series de potencias exponenciales[5]. Posteriormente se plantea una forma de resolver la ecuación KdV con la forma más general posible [8].

2.1. Solución en forma de onda viajera

Consideremos la ecuación KdV simplificada (1.8) y supongamos una solución de onda viajera $u(x, t) = f(x - ct) = f(z)$ en forma de pulso, donde $c > 0$ y $f(z)$, $f'(z)$ y $f''(z)$ tienden a cero cuando $z \rightarrow \pm\infty$ ($f'(z) = \frac{df}{dz}$). Así al sustituir en (1.8) tenemos que

$$\begin{aligned}
 & -cf' + ff' + f''' = 0 \\
 \Rightarrow & -c \int f' dz + \int ff' dz + \int f''' dz = a \\
 \Rightarrow & -cf + \frac{1}{2}f^2 + f'' = a, \tag{2.1}
 \end{aligned}$$

donde a es una constante de integración y dado que $f(z)$ y $f''(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \pm\infty$, entonces $a = 0$.

Ahora, si multiplicamos la expresión (2,1) por f' , tenemos que

$$\begin{aligned}
 & -cff' + \frac{1}{2}f^2f' + f''f' = 0 \\
 \Rightarrow & -c \int ff' dz + \frac{1}{2} \int f^2f' dz + \int f''f' dz = b \\
 \Rightarrow & -\frac{1}{2}cf^2 + \frac{1}{6}f^3 + \frac{1}{2}(f')^2 = b, \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

luego, $f(z), f'(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \pm\infty$, entonces $b = 0$. De modo que la ecuación (2,2) toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}cf^2 + \frac{1}{6}f^3 + \frac{1}{2}(f')^2 = 0 \\
 \Rightarrow & -cf^2 + \frac{1}{3}f^3 + (f')^2 = 0 \\
 \Rightarrow & 3(f')^2 = (3c - f)f^2 \\
 \Rightarrow & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3c - f}}f' = 1, \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

ahora, sea $g^2 = 3c - f \Rightarrow f = 3c - g^2$ y $f' = -2gg'$

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3c - g^2} g' = -1 \\
 & \Rightarrow 2\sqrt{3} \int \frac{dg}{3c - g^2} = - \int dz \\
 & \Rightarrow 2\sqrt{3} \int \frac{dg}{(\sqrt{3c} + g)(\sqrt{3c} - g)} = - \int dz \\
 & \Rightarrow 2\sqrt{3} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{c}} \int \frac{dg}{\sqrt{3c} + g} + \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{c}} \int \frac{dg}{\sqrt{3c} - g} \right\} = - \int dz \\
 & \Rightarrow \ln(\sqrt{3c} + g) - \ln(\sqrt{3c} - g) = -\sqrt{cz} + a \\
 & \Rightarrow \ln \left(\frac{\sqrt{3c} + g}{\sqrt{3c} - g} \right) = -\sqrt{cz} + a \\
 & \Rightarrow \sqrt{3c} + g = [\exp(-\sqrt{cz} + a)](\sqrt{3c} - g) \\
 & \Rightarrow g + g[\exp(-\sqrt{cz} + a)] = \sqrt{3c}[\exp(-\sqrt{cz} + a) - 1] \\
 & \Rightarrow g = \sqrt{3c} \left[\frac{\exp(-\sqrt{cz} + a) - 1}{\exp(-\sqrt{cz} + a) + 1} \right] = -\sqrt{3c} \tanh\left[\frac{1}{2}(\sqrt{cz} - a)\right] \\
 & \Rightarrow g^2 = 3c \tanh^2\left[\frac{1}{2}(\sqrt{cz} - a)\right] \\
 & \Rightarrow 3c - f = 3c \tanh^2\left[\frac{1}{2}(\sqrt{cz} - a)\right] \\
 & \Rightarrow f = 3c \left\{ 1 - \tanh^2\left[\frac{1}{2}(\sqrt{cz} - a)\right] \right\} \\
 & \Rightarrow f = 3c \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}(\sqrt{cz} - a)\right], \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

ahora, dado que la constante a sólo cambia la forma, es posible obtener una idea de la forma de la solución con $a = 0$, esto es

$$\begin{aligned}
 f(z) &= 3c \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}(\sqrt{cz})\right] \\
 \Rightarrow u(x, t) &= 3c \operatorname{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct)\right]. \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

El perfil de la onda obtenido por esta solución es llamado onda solitaria o solitón, resulta importante mencionar que la amplitud de la onda es tres veces la velocidad de la misma, algo que concuerda con lo que observó Russell en sus experimentos, pues para ondas con gran altura, estas se movían a gran velocidad.

2.2. Problema de Eigenvalores Asociados

Consideremos la ecuación (1.8) y sustituyamos u por $-6u$, de modo que nuestra ecuación toma la siguiente forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (2.6)$$

Se tratará un problema con condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$, donde se supone que $u_0(x)$ es una función con fronteras y que es tres veces continuamente diferenciable. Se considera el caso de intervalo infinito, $-\infty < x < \infty$, con $u(x, t)$ que desaparece o se hace cero rápidamente cuando $|x| \rightarrow \pm\infty$.

Es posible modificar el término no lineal de (2.6) sin tener cambios trascendentales en la forma de la solución, así se puede obtener la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t} - 6v^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0, \quad (2.7)$$

de modo que si v satisface (2.7), entonces u definida de la siguiente forma

$$u = v^2 + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.8)$$

satisface a (2.6). La forma de la ecuación (2.7) aparece en el estudio de redes anarmónicas y describe el mismo fenómeno físico que (2.6).

Si vemos a (2.8) como una ecuación de Riccati para v , es posible realizar el siguiente cambio de variables, para linealizar el problema

$$v = \frac{\psi_x}{\psi} \quad (2.9)$$

$$\Rightarrow u = \frac{\psi_{xx}}{\psi}, \quad (2.10)$$

donde $\psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}$. Ahora, aprovechando la invariancia Galileana de (1.8), se puede reemplazar u por $u - \lambda$ y así obtener la siguiente ecuación

$$\psi_{xx} - (u - \lambda)\psi = 0, \quad (2.11)$$

la cual resulta ser una ecuación de Sturm-Liouville para ψ y eigenvalor λ .

Por otro lado, consideremos una función $u(x, 0) = u_0(x)$ la cual es periódica en x , y sea λ_0 uno de los simples eigenvalores de (2.11), con función eigenperiódica ψ_0 . Definamos

$$\bar{u}_0 = u_0 - \lambda_0, \quad (2.12)$$

de modo que

$$\psi_{0xx} - \bar{u}_0\psi_0 = 0. \quad (2.13)$$

Así, \bar{u}_0 tiene eigenvalor cero. En general, una función \bar{u} que se desarrolla de acuerdo con la ecuación KdV, con condición inicial $\bar{u} = \bar{u}_0$, (2.13), sin los subíndices, continúa teniendo una solución periódica y por tanto el cero sigue siendo un eigenvalor de \bar{u} , esto debido a la constancia de los eigenvalores de la condición inicial original $u_0(x)$. Si u y \bar{u} definida como en (2.8) son soluciones de la ecuación KdV y difieren por una constante λ_0 inicialmente, entonces están relacionados por

$$\bar{u}(x, t) = u(x - 6\lambda_0 t, t) - \lambda_0, \quad (2.14)$$

de acuerdo a la transformación Galileana. Así, al sustituir (2.14) en (2.13), λ_0 es un eigenvalor de u .

A menos que λ_0 sea el eigenvalor más pequeño, entonces $\psi_0 = 0$ en todos lados y v es singular ahí, por lo tanto se requiere un tratamiento especial en la evolución de v . Algo de lo más sencillo para casos de este tipo, es hacer cerca de tal punto singular $\xi(t)$, $v = (x - \xi)^{-1} + \omega$, con ω regular y analizar la evolución de ξ y ω .

2.3. Problema de Dispersión Inversa

El problema central de la teoría de dispersión es resolver la ecuación (2.11) para ψ , con condiciones apropiadas de frontera para un potencial u dado. Usualmente todo lo que se puede observar es el medio asintótico de ψ para $|x|$ grande, el cual es tomado para todo el espectro comprendido de los datos dispersados para u . El objetivo del problema de dispersión inversa consiste en hallar u en base a los datos de su dispersión. Este problema a sido estudiado por muchos investigadores, entre los más notables se encuentran Gel'fand y Levitan, Kay y Moses, y Levinson. Estos autores han mostrado que el problema de la dispersión inversa se resuelve por

$$u = -2 \frac{d}{dx} K(x, x), \quad (2.15)$$

donde K satisface la ecuación integral de Gel'fand-Levitan

$$K(x, y) + B(x + y) + \int_x^\infty B(y + z)K(x, z)dz = 0, \quad (2.16)$$

el kernel B está dado por

$$B(\xi) = \sum_{m=1}^N C_m^2 \exp[-\kappa_m \xi] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty b(k) \exp[ik\xi] dk, \quad (2.17)$$

donde la suma consiste en las contribuciones del espectro discreto y la integral es sobre el espectro continuo,

$$\begin{aligned} \lambda_m &= -\kappa_m^2, & m &= 1, 2, \dots, N, \\ \lambda &= k^2, \end{aligned} \quad (2.18)$$

cada eigenvalor discreto κ_m , $\kappa_m > 0$ tiene una eigenfunción ψ_m asociada, la cual es una solución que se desvanece en infinito y es cuadrado integrable. Si se normaliza cada

eigenfunción

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^2 dx = 1, \quad \psi_m > 0 \quad \text{para} \quad x \gg 1, \quad (2.19)$$

entonces $C_m (> 0)$ está definido por

$$C_m = \lim_{x \rightarrow \infty} \psi_m \exp[\kappa_m x], \quad (2.20)$$

para el espectro continuo, mientras que $u \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$, la función de onda puede ser escrita asintóticamente como una combinación lineal de las dos ondas planas $\exp[\pm ikx]$ y de forma similar para $x \rightarrow -\infty$. El coeficiente de reflexión $b(k)$ junto con el coeficiente de transmisión $a(k)$, caracterizan la forma asintótica dispersada de radiación plana proveniente desde $+\infty$. Así pues, para cada valor de k , los números complejos a y b son determinados por la condición de que (2.11) sea resuelta con las condiciones de frontera

$$\psi \cong \exp(-ikx) + b(k) \exp(ikx), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (2.21)$$

$$\psi \cong a(k) \exp(-ikx), \quad x \rightarrow -\infty. \quad (2.22)$$

(la conservación de la energía se expresa por $|a|^2 + |b|^2 = 1$).

Para resolver el problema de dispersión inversa y así poder determinar u , es necesario conocer κ_m , C_m y $b(k)$. Sin embargo, estas cantidades dependen por si mismas de u , lo cual dificulta la forma de resolver el problema, por lo que analizar las propiedades de evolución temporal provenientes de la ecuación KdV nos permiten visualizar de diferente forma ésta dependencia.

Notemos que u depende paramétricamente de t , lo cual implica que ψ y λ también dependan de t . Resolviendo (2.11) para u y multiplicando por ψ^2 , tenemos que

$$\lambda_t \psi^2 + (\psi R_x - \psi_x R)_x = 0, \quad (2.23)$$

donde

$$R = \psi_t + \psi_{xxx} - 3(u + \lambda)\psi_x. \quad (2.24)$$

Con ésta idea en mente, es posible enunciar los siguientes resultados:

Resultado 1

Si $u(x, t)$ se desarrolla de acuerdo con la ecuación KdV y se desvanece (rápidamente) como $|x| \rightarrow \infty$, entonces cada eigenvalor discreto λ_m de (2.11) es constante.

Resultado 2

Bajo las condiciones del Resultado 1, se cumple que

$$C_m(t) = C_m(0) \exp[4\kappa_m^3 t], \quad (2.25)$$

$$b(k, t) = b(k, 0) \exp[8ik^3 t], \quad (2.26)$$

$$a(k, t) = a(k, 0), \quad (2.27)$$

donde $C_m(0)$, $b(k, 0)$ y $a(k, 0)$ están determinados por los valores iniciales de la ecuación KdV, $u(x, 0) = u_0(x)$.

2.4. Método de la Función Exponencial

Consideremos la ecuación KdV de la siguiente forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (2.28)$$

Utilizando las transformaciones

$$u = v(\xi), \quad \xi = \mu x + \lambda t, \quad (2.29)$$

donde λ y μ son constantes, la ecuación (2.28) toma la forma

$$v'''(\xi)\mu^3 + v(\xi)v'(\xi)\mu + \lambda v'(\xi) = 0. \quad (2.30)$$

Supongamos que la solución de la ecuación (2.30) puede ser expresada como

$$v(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n \exp(n\xi)}{\sum_{m=-p}^q b_m \exp(m\xi)} = \frac{a_{-c} \exp(-c\xi) + \cdots + a_d \exp(d\xi)}{b_{-p} \exp(-p\xi) + \cdots + b_q \exp(q\xi)}, \quad (2.31)$$

donde c , d , p y q son enteros positivos desconocidos a determinar, a_n y b_m son constantes desconocidas.

Para hallar los valores de c y p , se equilibra el término lineal de mayor orden de la ecuación (2.31) con el término no lineal de orden más alto, y el término lineal de orden más bajo en la ecuación (2.31) con el término no lineal de orden más bajo, respectivamente. De modo que tenemos

$$v'''(\xi) = \frac{k_1 \exp[(7p + c)\xi] + \cdots}{k_2 \exp[8p\xi] + \cdots}, \quad (2.32)$$

$$v(\xi)v'(\xi) = \frac{k_3 \exp[(p + 2c)\xi] + \cdots}{k_4 \exp[3p\xi] + \cdots} = \frac{k_3 \exp[2(3p + c)\xi] + \cdots}{k_4 \exp[8p\xi] + \cdots}, \quad (2.33)$$

donde las k_i son constantes. Balanceando los órdenes mayores de las funciones exponenciales en (2.32) y (2.33), obtenemos que $7p + c = 2(3p + c)$, de modo que $c = p$. De manera análoga, para obtener los valores de d y q , balanceamos el término lineal de menor

orden en la ecuación (2.31)

$$v'''(\xi) = \frac{\cdots + k'_1 \exp[-(7q + d)\xi]}{\cdots + k'_2 \exp[-8q\xi]}, \quad (2.34)$$

$$v(\xi)v'(\xi) = \frac{\cdots + k'_3 \exp[-(d + 2q)\xi]}{\cdots + k'_4 \exp[-3q\xi]} = \frac{\cdots + k'_3 \exp[-2(3q + d)\xi]}{\cdots + k'_4 \exp[-8q\xi]}, \quad (2.35)$$

donde las k_i son constantes. Balanceando funciones exponenciales de orden más bajo en (2.34) y (2.35), tenemos que $7q + d = 2(3q + d)$, entonces $d = q$.

Tomando en cuenta las anteriores consideraciones, podemos reescribir la ecuación (2.31) como sigue

$$v(\xi) = \frac{a_{-p} \exp(-c\xi) + \cdots + a_q \exp(d\xi)}{b_{-p} \exp(-p\xi) + \cdots + b_q \exp(q\xi)}, \quad (2.36)$$

ahora, consideraremos dos casos, en ambos se usa $b_q = 1$, es decir, la ecuación (2.36) toma la forma

$$v(\xi) = \frac{a_{-p} \exp(-c\xi) + \cdots + a_q \exp(d\xi)}{b_{-p} \exp(-p\xi) + \cdots + \exp(q\xi)}. \quad (2.37)$$

Caso 1

En este caso, consideramos $p = c = 1$ y $d = q = 1$, entonces (2.37) es como sigue

$$v(\xi) = \frac{a_{-1} \exp(-\xi) + a_0 + a_1 \exp(\xi)}{b_{-1} \exp(-\xi) + b_0 + \exp(\xi)}, \quad (2.38)$$

substituyendo (2.38) en (2.30) e igualando a cero los coeficientes de las potencias de $\exp(\xi)$ se obtiene un conjunto de ecuaciones algebraicas. Es posible resolver este conjunto de ecuaciones con ayuda de un software y así obtener

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a_1, & b_0 &= b_0, & a_{-1} &= \frac{1}{4}a_1b_0^2, \\
 a_0 &= a_1b_0 + \mu^2b_0, & b_{-1} &= \frac{b_0^2}{4}, & \lambda &= -\mu^3 - 6\mu a_1, & \mu &= \mu.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Las soluciones en forma de solitones correspondientes a estos valores son

$$u(x, t) = a_1 + \frac{4\mu^2b_0 \exp[\mu(x + (\mu^2 + 6a_1)t)]}{\{2 \exp(\mu x) + b_0 \exp[\mu(\mu^2 + 6a_1)t]\}^2}. \tag{2.40}$$

Para $b_0 = \pm 2$ y μ real

$$u_+(x, t) = a_1 + \frac{\mu^2}{1 + \cosh \{\mu[x - (\mu^2 + 6a_1)t]\}}, \tag{2.41}$$

$$u_-(x, t) = a_1 + \frac{\mu^2}{1 - \cosh \{\mu[x - (\mu^2 + 6a_1)t]\}}. \tag{2.42}$$

Para $b_0 = \pm 2$ y $\mu = i\omega$, es decir, μ imaginario, se obtienen soluciones periódicas de la siguiente forma

$$u_+(x, t) = a_1 - \frac{\omega^2}{1 + \cos \{\omega[x + (\omega^2 - 6a_1)t]\}}, \tag{2.43}$$

$$u_-(x, t) = a_1 - \frac{\omega^2}{1 - \cos \{\omega[x + (\omega^2 - 6a_1)t]\}}. \tag{2.44}$$

Caso 2

Se considera $p = c = 2$ y $d = q = 2$, de modo que (2.37) toma la forma

$$v(\xi) = \frac{a_{-2} \exp(-2\xi) + a_{-1} \exp(-\xi) + a_0 + a_1 \exp(\xi) + a_2 \exp(2\xi)}{b_{-2} \exp(-2\xi) + b_{-1} \exp(-\xi) + b_0 + b_1 \exp(\xi) + \exp(2\xi)}, \tag{2.45}$$

posteriormente, se substituye (2.45) en (2.30) y análogamente al Caso 1 se obtiene un

sistema de ecuaciones algebraicas que puede ser resuelto para obtener diversas soluciones, aquí solo se considerará la siguiente solución

$$\begin{aligned} a_2 &= a_2, & b_0 &= b_0, & a_1 &= 0, & b_1 &= 0, \\ a_{-2} &= \frac{a_2 b_0^2}{4}, & a_{-1} &= 0, & a_0 &= a_2 b_0 + 4\mu^2 b_0, \\ b_{-1} &= 0, & b_{-2} &= \frac{b_0^2}{4}, & \lambda &= -6\mu a_2 - 4\mu^3. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Así las soluciones en forma de solitones serán

$$u(x, t) = a_2 + \frac{16\mu^2 b_0 \exp[-2\mu(x - 2(2\mu^2 + 3a_2)t)]}{\{2 + b_0 \exp[-2\mu(x - 2(2\mu^2 + 3a_2)t)]\}^2}. \quad (2.47)$$

Para $b_0 = \pm 2$ y μ real

$$u_+(x, t) = a_2 + 2\mu^2 \sec^2 \{ \mu[x - 2(2\mu^2 + 3a_2)t] \}, \quad (2.48)$$

$$u_-(x, t) = a_2 - 2\mu^2 \csc^2 \{ \mu[x - 2(2\mu^2 + 3a_2)t] \}. \quad (2.49)$$

Para $b_0 = \pm 2$ y $\mu = i\omega$, es decir, μ imaginario, las soluciones periódicas son

$$u_+(x, t) = a_2 - \omega^2 \sec^2 \{ \omega[x + 2(2\omega^2 - 3a_2)t] \}, \quad (2.50)$$

$$u_-(x, t) = a_2 - \omega^2 \csc^2 \{ \omega[x + 2(2\omega^2 - 3a_2)t] \}. \quad (2.51)$$

2.5. Ecuación KdV generalizada

Considérese la ecuación KdV generalizada

$$u_t + (a + bu^c)u^c u_x + du_{xxx} = 0, \quad (2.52)$$

donde a, b, c y d son constantes reales. Esta ecuación tiene varios casos interesantes, para $c = 1$ es una ecuación combinada KdV-mKdV, la cual se simplifica en la ecuación KdV usual si $b = 0$. Si $b = 0$ entonces (2.52) es la ecuación mKdV.

La ecuación (2.52) con $c = n$ (n un entero positivo) y $b = 0$ (o $a = 0$), es frecuentemente referida como la ecuación gKdV. Ésta ecuación describe una red anarmónica con una fuerza de interacción a vecinos cercanos $F \sim \Delta^{n+1}$, donde Δ es la extensión o compresión del resorte entre dos masas vecinas.

Las soluciones de onda viajera de (2.52) son de la forma $u(x, t) = \phi(\xi)$, donde $\xi = x - vt$. Entonces (2.52) toma la siguiente forma

$$-v\phi_\xi + (a + b\phi^c)\phi^c\phi_\xi + d\phi_{\xi\xi\xi} = 0, \quad (2.53)$$

la cual puede ser integrada una vez y así obtener

$$-v\phi + \left(\frac{a}{c+1} + \frac{b}{2c+1}\phi^c \right) \phi^{c+1} + d\phi_{\xi\xi} = C_1, \quad (2.54)$$

donde C_1 es una constante arbitraria. Usando a ϕ_ξ como un factor integrante, se tiene que

$$-\frac{v}{2}\phi^2 + \left(\frac{a}{(c+1)(c+2)} + \frac{b}{(2c+1)(2c+2)}\phi^c \right) \phi^{c+2} + \frac{d}{2}\phi_\xi^2 = C_1\phi + C_2, \quad (2.55)$$

con C_2 una constante arbitraria.

Por simplicidad, se hará $C_1 = C_2 = 0$, lo cual es equivalente a imponer las condiciones de frontera $\phi, \phi', \phi'' \rightarrow 0$ cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$.

Para investigar el grado de singularidad de ϕ , substituímos $\phi \sim \xi^{-p}$ en (2.52) y se balancean los términos más singulares, lo cual implica que

$$p = \frac{2}{c} \quad a \neq 0, b = 0, \quad (2.56)$$

$$p = \frac{1}{c} \quad b \neq 0, \quad (2.57)$$

lo cual sugiere la transformación

$$\phi = \hat{\phi}_0^{1/c}, \quad (2.58)$$

así que (2.55) puede reescribirse como

$$-\frac{v}{2}\hat{\phi}^{2/c} + \left(\frac{a}{(c+1)(c+2)} + \frac{b}{(2c+1)(2c+2)}\hat{\phi} \right) \hat{\phi}^{1+(2/c)} + \frac{d}{2c^2}\hat{\phi}^{(2/c)-2}\hat{\phi}_\xi^2 = 0, \quad (2.59)$$

finalmente multiplicando por $\hat{\phi}^{2-(2/c)}$, se tiene que

$$-\frac{v}{2}\hat{\phi}^2 + \left(\frac{a}{(c+1)(c+2)} + \frac{b}{(2c+1)(2c+2)}\hat{\phi} \right) \hat{\phi}^3 + \frac{d}{2c^2}\hat{\phi}_\xi^2 = 0, \quad (2.60)$$

la cual es polinomial en $\hat{\phi}$ y sus derivadas.

Para tener una idea de la naturaleza de las soluciones racionales de (2.60), se realiza un breve análisis de singularidades. Substituyendo $\hat{\phi} \sim \xi^{-q}$ en (2.60) y balanceando los términos más singulares, se llega a

$$\hat{\phi} \sim \xi^{-2} \quad a \neq 0, b = 0, \quad (2.61)$$

$$\hat{\phi} \sim \xi^{-1} \quad b \neq 0. \quad (2.62)$$

Ahora, se substituye la expansión

$$\hat{\phi} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g^n, \quad (2.63)$$

con $g = \exp[-K(v)\xi]$ en (2.60). Esto nos lleva a una ecuación en serie de potencias de g , la relación de recursion (con $n \geq 0$)

$$\begin{aligned} -v \sum_{l=1}^{n-1} a_{n-l} a_l + \frac{2a}{(c+1)(c+2)} \sum_{l=2}^{n-1} \sum_{m=1}^{l-1} a_{n-l} a_{l-m} a_m \\ + \frac{b}{(2c+1)(c+1)} \sum_{l=3}^{n-1} \sum_{m=2}^{l-1} \sum_{j=1}^{m-1} a_{n-l} a_{l-m} a_{m-j} a_j \\ + \frac{dK^2}{c^2} \sum_{l=1}^{n-1} (n-l) l a_{n-l} a_l = 0. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Aquí $K(v)$ aún es indeterminada. Sin embargo, es posible obtener $K(v)^2 = \frac{c^2 v}{d}$ al substituir $\hat{\phi} = g = \exp[-K(v)\xi]$ en (2.60), manteniendo solo los términos de menor grado. Alternativamente es posible obtener $K(v)$ de (2.64) si se requiere que a_1 sea arbitrario.

Para $a \neq 0$ y $b = 0$, se tiene (2.61), de modo que a_n será un polinomio de grado $\delta = 1$ en n . Para $b \neq 0$, (2.62) indica que $\delta = 0$, entonces a_n será constante. Abarcando ambos casos, se toma $a_n = A_1 n + A_0$, al substituir a_n en (2.64) y al utilizar la siguiente formula

$$(k+1)S_k = (n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{i=1}^k \binom{k+1}{i-1} S_{i-1}, \quad (2.65)$$

con $S_0 = n$, para $k = 1, \dots, 5$. Ésto lleva a un polinomio de grado 6 en n , en el cual se colocan los diferentes coeficientes iguales a cero. Es necesario resolver el conjunto de siete ecuaciones algebraicas no lineales acopladas para las variables desconocidas A_0 , A_1 , v y $K(v)$. Es posible resolver estas ecuaciones a mano o con un software, de modo que se obtiene lo siguiente:

Caso 1

Se considera $a \neq 0, b = 0$

$$A_1 = -\frac{2v(c+2)(c+1)}{a} \quad A_0 = 0 \quad K^2 = \frac{c^2v}{d}, \quad (2.66)$$

con v arbitrario.

Caso 2

Se considera $b \neq 0$

$$v = -\frac{a^2(2c+1)}{b(c+1)(c+2)^2}, \quad A_1 = 0, \quad A_0 = \frac{a(2c+1)}{b(c+2)}, \quad K^2 = \frac{c^2v}{d} = -\frac{a^2c^2(2c+1)}{bd(c+1)(c+2)^2}. \quad (2.67)$$

Tratando ambos casos simultaneamente se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_1 n + A_0) a_0 g^n \\ &= [A_1 F_1(a_0 g) + A_0 F_0(a_0 g)] \\ &= \left[A_1 \frac{a_0 g}{(1 - a_0 g)^2} + A_0 \frac{a_0 g}{(1 - a_0 g)} \right] \\ &= - \left[A_1 \frac{\exp[-K\xi - \Delta]}{(1 + \exp[-K\xi - \Delta])^2} + A_0 \frac{\exp[-K\xi - \Delta]}{(1 + \exp[-K\xi - \Delta])} \right] \\ &= - \left[\frac{A_1}{4} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{K\xi + \Delta}{2} \right) + \frac{A_0}{2} \left[1 - \tanh \left(\frac{K\xi + \Delta}{2} \right) \right] \right], \end{aligned} \quad (2.68)$$

donde $a_0 = -\exp(-\Delta)$ y se utilizó

$$F_j(g) = \sum_{n=1}^{\infty} n^j g^n \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.69)$$

La constante de fase Δ puede ser obtenida si las condiciones iniciales están especificadas.

Regresando a las variables originales se obtiene lo siguiente:

Caso 1

Considerando $a \neq 0, b = 0$

$$u(x, t) = \phi(x - vt) = \left[\frac{v(c+2)(c+1)}{2a} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{c}{2} \sqrt{\frac{v}{d}} (x - vt) + \frac{\Delta}{2} \right) \right]^{1/c}, \quad (2.70)$$

con velocidad arbitraria v .

Caso 2

Considerando $b \neq 0$

$$u(x, t) = \phi(x - vt) = \left\{ \frac{-a(2c+1)}{2b(c+2)} \left[1 - \tanh \left(\frac{c}{2} \sqrt{\frac{v}{d}} (x - vt) + \frac{\Delta}{2} \right) \right] \right\}^{1/c}, \quad (2.71)$$

con $v = -a^2(2c+1)/[b(c+1)(c+2)^2]$

2.5.1. Casos Especiales

Ecuación KdV más conocida

Es posible obtener la solución más conocida de la ecuación KdV para un sólo solitón, al poner $a = 6, b = 0, c = d = 1$, y utilizando (2.70), podemos obtener la solución

$$u(x, t) = 2k^2 \operatorname{sech}^2 \left(k(x - 4k^2t) + \frac{\Delta}{2} \right), \quad (2.72)$$

con $k^2 = \frac{v}{2}$ y Δ constantes arbitrarias.

Ecuación KdV-mKdV

Para $c = 1$ (2.52) toma la forma de la ecuación combinada KdV-mKdV, la cual a sido muy utilizada para modelar fenómenos no lineales en Física de Plasmas y Física de Estado solido, y también a sido utilizada en teoría cuántica de campos. Utilizando (2.71) se tiene que

$$u(x, t) = \left(\frac{-a}{2b}\right) \left\{ 1 - \tanh \left[\frac{a}{12} \sqrt{\frac{-6}{bd}} \left(x + \frac{a^2}{6b} t \right) + \frac{\Delta}{2} \right] \right\}. \quad (2.73)$$

Ondas iónico-acústicas

En 1988 Verheest obtuvo una ecuación gKdV para la propagación de ondas iónico-acústicas a densidades críticas en un plasma multi-componente con diferentes cargas y temperaturas iónicas de la siguiente forma

$$u_t + au^3u_x + du_{xxx} = 0. \quad (2.74)$$

Al integrar directamente, descubrió la solución de onda solitaria siguiente

$$u(x, t) = \left(\frac{10v}{a}\right)^{2/3} \operatorname{sech}^{2/3} \left[\frac{3}{2} \sqrt{\frac{v}{d}} (x - vt) + \frac{\Delta}{2} \right], \quad (2.75)$$

con v arbitraria. La cuál puede ser obtenida al considerar $b = 0$ y $c = 3$ en (2.70).

También en el contexto de la Física de Plasmas, en 1973 Schamel obtuvo la siguiente ecuación

$$u_t + u^{1/2}u_x + du_{xxx} = 0, \quad (2.76)$$

la cual describe ondas iónico-acústicas en un plasma iónico-frío, pero donde los electrones no tienen comportamiento isotérmico durante su paso de la onda. Una simple solución

de onda solitaria obtenida por Schamel fue

$$u(x, t) = \frac{225v^2}{64} \operatorname{sech}^4 \left[\frac{1}{4} \sqrt{\frac{v}{d}} (x - vt) + \frac{\Delta}{2} \right]. \quad (2.77)$$

De (2.70) es posible obtener la misma solución. La ecuación (2.76) aparenta tener una no linealidad más fuerte que la ecuación KdV usual, esto correspondiente a la pequeña anchura y gran velocidad de la onda.

Otro caso interesante es la solución de la ecuación debida a Tagare y Chakrabarti en 1974, donde la ecuación KdV tiene la forma

$$u_t + (a + bu^{1/2})u^{1/2}u_x + du_{xxx} = 0, \quad (2.78)$$

donde u se refiere nuevamente a la perturbación de la densidad de iones en un plasma con electrones no isotérmicos, pero donde se utilizó un diferente tipo de escalamiento que el de Schamel. Por integración directa Tagare y Chakrabarti obtuvieron

$$u(x, t) = \left\{ \frac{4a}{15v} + \frac{\sqrt{75bv + 16a^2}}{15v} \cosh \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{v}{d}} (x - vt) + \frac{\Delta}{2} \right] \right\}^{-2}, \quad (2.79)$$

ésta solución es válida para todo v , pero

$$v = -\frac{16a^2}{75b}, \quad (2.80)$$

de modo que (2.79) se convertiría en una constante. Así pues, es posible obtener una solución de onda solitaria para la velocidad crítica (2.80), ya que $c = 1/2$, de (2.71) se tiene que

$$u(x, t) = \frac{4a^2}{25b^2} \left\{ 1 - \tanh \left[\frac{a}{15} \sqrt{\frac{-3}{bd}} \left(x + \frac{16a^2}{75b} t \right) + \frac{\Delta}{2} \right] \right\}^2. \quad (2.81)$$

Capítulo 3

Ondas iónico-acústicas en el Plasma

En el presente capítulo se provee de una visión general de las ondas iónico-acústicas presentes en el área de la Física de Plasmas y posteriormente se muestra la relación entre dichas ondas y la ecuación KdV.

3.1. Ondas acústicas en un fluido

Un fluido no viscoso puede ser descrito por las ecuaciones de momentum

$$mn \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p = -\frac{\gamma p}{\rho} \nabla \rho,$$

y de continuidad

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{v}) = 0,$$

donde m es la porción de masa del fluido, n la cantidad de partículas presentes, p la presión, γ el coeficiente adiabático, ρ la densidad y \vec{v} el campo de velocidades. Si

perturbamos y linealizamos al rededor de un punto estacionario dichas ecuaciones, para un plasma libre de campo ($\vec{E} = 0, \vec{B} = 0$), es decir, consideramos lo siguiente

$$\begin{aligned} n &= n_0 + n_1, \\ v &= v_0 + v_1, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde n_0 y n_1 representan la cantidad de partículas no perturbadas y perturbadas respectivamente, v_0 y v_1 el campo de velocidades no perturbado y perturbado respectivamente. Entonces las ecuaciones de momentum y continuidad toman la forma

$$mn_0 \left[\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_1 \right] = -\nabla p, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \cdot \nabla n_0 = 0. \tag{3.3}$$

Despreciando los términos $(\vec{v}_1 \cdot \nabla)$ y (∇n_0) , y despues considerando que \vec{v}_1 y n_1 tiene una dependencia ondulatoria

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= v_1 \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t] \hat{r}, \\ n_1 &= n_1 \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t] \hat{r}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Las ecuaciones de momentum y continuidad linealizadas toman la forma

$$-i\omega \rho_0 \vec{v}_1 = -i\vec{k} \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \rho_1, \tag{3.5}$$

$$-i\omega \rho_1 + i\vec{k} \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = 0, \tag{3.6}$$

donde \vec{v}_1 representa el campo de velocidades del plasma, ρ_0 y ρ_1 la densidad no per-

turbada y perturbada respectivamente. Multiplicando escalarmente la ecuación (3.5) por \vec{k} y sustituyendo en la ecuación (3.6) obtenemos

$$-\omega\rho_1 + \rho_0 \frac{k^2}{\omega\rho_0} \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \rho_1 = 0,$$

y la relación de dispersión es

$$\omega^2 = k^2 \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = k^2 C_s^2.$$

Así, las ondas viajan con una velocidad de fase igual a su velocidad de grupo, esto es, $v_\phi = v_g = C_s$.

Estas ondas dependen de las colisiones en el fluido para proporcionar la fuerza restauradora.

3.2. Ondas iónico-acústicas

Aún si las colisiones son insignificantes, las ondas acústicas, que son ondas longitudinales generan fluctuaciones de densidad, las cuales a su vez generan campos eléctricos que pueden suministrar la fuerza restauradora necesaria. Cuando el movimiento iónico es involucrado, sabemos que las ondas deben ser de baja frecuencia, así podemos utilizar la aproximación del plasma $n_e \approx n_i \approx n_0$ [13]. Aún estamos suponiendo que no hay campo magnético (\vec{B}_0).

La ecuación de momento para los iones es:

$$Mn_0 \left[\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_1 \right] = en_0 \vec{E} - \nabla(p_i + p_{i,1}), \quad (3.7)$$

donde M representa la masa de un ion, p_i y $p_{i,1}$ la presión no perturbada y perturbada de los iones respectivamente. Para para los electrones la ecuación de momento es:

$$mn_0 \left[\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_1 \right] = -en_0 \vec{E} - \nabla(p_e + p_{e,1}), \quad (3.8)$$

donde m es la masa del electrón, p_e y $p_{e,1}$ la presión no perturbada y perturbada de los electrones respectivamente. Luego la ecuación de continuidad es

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \cdot \nabla n_0 = 0, \quad (3.9)$$

y linealizando tenemos

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -n_0 \nabla \cdot \vec{v}_1. \quad (3.10)$$

Así,

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_e - n_i) = -n_0 \nabla \cdot (\vec{v}_{e1} - \vec{v}_{i1}). \quad (3.11)$$

Por lo que, si las velocidades iónica y electrónica difieren, las densidades se volverán diferentes también. De esta manera, la aproximación del plasma también requiere $\vec{v}_{e1} = \vec{v}_{i1}$ al menos a primer orden.

Utilizando estos resultados, sumamos las dos ecuaciones de momento linealizadas, de modo que los términos de campo eléctrico se cancelan dando:

$$(m + M)n_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla(p_{i,1} + p_{e,1}),$$

$$-i\omega(m + M)n_0 \vec{v}_1 = -i\vec{k}n_1(\gamma_i k_B T_i + \gamma_e k_B T_e).$$

Multiplicando escalarmente por \vec{k} y combinando con la ecuación

$$n_1 = n_0 \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}_1}{\omega},$$

obtenemos

$$-i\omega(m+M)n_0\omega\frac{n_1}{n_0} = -ik^2n_1(\gamma_ik_B T_i + \gamma_ek_B T_e),$$

de donde

$$\omega^2 = k^2 \left(\frac{\gamma_ik_B T_i + \gamma_ek_B T_e}{m+M} \right). \quad (3.12)$$

Sobre este resultado es necesario notar que:

1. Esencialmente es idéntico al resultado para ondas sonoras del fluido, aún cuando en un nivel microscópico hay profundas diferencias. El acoplamiento es electrostático, no colisional.
2. Los electrones se mueven muy rápidamente y la distribución se puede suponer isotérmica, $\gamma_e = 1$.
3. La masa electrónica m es despreciable comparada con la masa iónica M en el denominador. La onda está fuertemente amortiguada, a no ser que $T_e \gg T_i$. Por lo tanto, la rapidez iónica acústica está determinada por la temperatura electrónica y la masa iónica.

$$v_{is} = \sqrt{\frac{k_B T_e}{M}}. \quad (3.13)$$

Ahora podemos considerar el campo eléctrico necesario para efectuar el acoplamiento.

La ley de Gauss da

$$i\vec{k} \cdot \vec{E} = k^2 \phi = \frac{e}{\epsilon_0}(n_i - n_e).$$

Consideremos las pequeñas diferencias entre las densidades iónica y electrónica. La densidad iónica está dada por la ecuación de continuidad.

$$n_i = n_0 + \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{\omega} n_0,$$

mientras que los electrones responden rápidamente al campo eléctrico y así, obedecen la relación de Boltzmann

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right) \approx n_0 \left(1 + \frac{e\phi}{k_B T}\right).$$

Entonces,

$$k^2 \phi = \frac{en_0}{\epsilon} \left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{\omega} - \frac{e\phi}{k_B T_e} \right).$$

Rearreglando, obtenemos

$$\phi \left(k^2 + \frac{en_0}{\epsilon_0} \frac{e}{k_B T} \right) = \frac{en_0}{\epsilon_0} \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{\omega}.$$

Reconocemos el segundo sumando entre paréntesis como $1/\lambda_D^2$. Reescribamos la ecuación de momento para los iones, sustituyendo esta expresión para ϕ en el término del campo eléctrico ($\vec{E} = -\nabla\phi = -i\vec{k}\phi$).

$$-i\omega M n_0 \vec{v}_1 = -en_0 i \vec{k} \phi - i \vec{k} n_1 \gamma_i k_B T_i,$$

$$-\omega M n_0 \vec{k} \cdot \vec{v}_1 = -en_0 \frac{en_0}{\epsilon_0} \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}_1}{\omega} \frac{1}{1 + 1/k^2 \lambda_D^2} - k^2 n_1 \gamma_i k_B T_i,$$

$$\omega M n_0 \omega \frac{n_1}{n_0} = en_0 \frac{en_0}{\epsilon_0} \frac{n_1}{n_0} \frac{1}{1 + 1/k^2 \lambda_D^2} + k^2 n_1 \gamma_i k_B T_i,$$

$$\omega^2 = k^2 \left(\frac{\gamma_i k_B T_i}{M} + \frac{\lambda_D^2 \omega_p^2}{1 + k^2 \lambda_D^2} \right),$$

donde ω_p es la frecuencia iónica del plasma.

El numerador en el segundo término es:

$$\lambda_D^2 \omega_p^2 = \frac{\epsilon_0}{en_0} \frac{k_B T_e}{e} e^2 \frac{n_0}{M \epsilon_0} = \frac{k_B T_e}{M},$$

$$\omega^2 = k^2 \left\{ \frac{\gamma_i k_B T_i}{M} + \frac{1}{1 + k^2 \lambda_D^2} \frac{k_B T_e}{M} \right\}. \quad (3.14)$$

De esta manera, el nuevo resultado es idéntico al previo excepto por el denominador $1 + k^2 \lambda_D^2$. Por tanto, la corrección es necesaria sólo cuando $k \lambda_D$ no es pequeña, esto es, cuando la longitud de onda es menor o igual a la longitud de Debye. Cuando $k \lambda_D \gg 1$ encontramos

$$\omega \simeq \omega_p,$$

y tenemos oscilaciones a la frecuencia iónica del plasma. La onda se reduce a oscilaciones del plasma de los iones.

3.3. Ondas solitarias iónico-acústicas

Considérese un plasma como un fluido, es decir, visto desde la teoría de MHD, y que éste tiene un desplazamiento sólo en la dirección x , así las ecuaciones que rigen a un plasma iónico-acústico son las siguientes

$$\begin{aligned} n_t + (nv)_x &= 0, \\ v_t + \left(\frac{v^2}{2} + \phi \right)_x &= 0, \\ \phi_{xx} - e^\phi + n &= 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde n , ϕ y v son la densidad de los iones, el potencial eléctrico y la velocidad de los

iones respectivamente.

En particular, para un sistema de referencia de laboratorio, la relación de dispersión lineal para ondas de sonido de iones relacionadas a la frecuencia ω y el número de onda k , está dada por $\omega^2 = \omega_{pi}^2 [1 + (1/k^2 \lambda_D)^2]^{-1}$; [2], donde $\omega_{pi} = (4\pi n_0 e^2 / m_i)^{1/2}$ es la frecuencia del plasma para los iones, $\lambda_D = (k_B T_e / 4\pi n_0 e^2)^{1/2}$ la longitud de Debye para los electrones, m_i la masa del ion, T_e la temperatura electrónica, n_0 la densidad iónica del ambiente y k_B es la constante de Boltzmann. Para obtener ésta relación de dispersión se suponen electrones fríos y que no haya una deriva relativa a los electrones, con $T_i \ll T_e$.

Para $k^2 \lambda_D^2 \ll 1$ se obtiene que

$$\omega = \pm k c_s [1 - (k^2 \lambda_D^2 / 2) + \dots], \quad (3.16)$$

donde $c_s = (k_B T_e / m_i)^{1/2}$ es la velocidad del sonido de los iones. Si se toma el signo más de la ecuación (3.16), entonces en un movimiento en referencia con $+c_s$, la oscilación de frecuencia es ω' , esto es

$$\omega' = \omega - k c_s \simeq -(c_s \lambda_D^2 / 2) k^3. \quad (3.17)$$

El escalamiento natural asociado con ésta aproximación de onda larga es $x' = \epsilon x$ y $t' = \epsilon^3 t$; [6], al sustituir esto en (3.15) y dividir por ϵ , se tiene que

$$\begin{aligned} \epsilon^2 n_{t'} + (n v)_{x'} &= 0, \\ \epsilon^2 v_{t'} + \left(\frac{v^2}{2} + \phi \right)_{x'} &= 0, \\ \epsilon^2 \phi_{x' x'} + e^\phi &= n. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Este esquema de perturbación es singular, puesto que el carácter de la ecuación cambia cuando $\epsilon = 0$. Debido a que ϵ^2 solo aparece en estas ecuaciones, expandimos todas las cantidades en potencias de ϵ^2 alrededor de $n = 1$, $v = -1$, $\phi = 0$. Posteriormente se sustituye lo obtenido en (3.18) y al reacomodar términos, es posible hallar que a primer

orden $n_1 = v_1 = \phi_1$.

Al siguiente orden se tiene que

$$\begin{aligned}n_{1,t'} + (n_1 v_1)_{x'} + (v_2 - n_2)_{x'} &= 0, \\v_{1,t'} + \left(\frac{v_1^2}{2} - v_2 + \phi_2\right)_{x'} &= 0, \\-\phi_{1,x'x'} + \phi_2 + \frac{1}{2}\phi_1^2 &= n_2.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Las cantidades de segundo orden n_2 , v_2 y ϕ_2 pueden ser eliminadas de éste sistema y al quitar las primas de la notación, es posible obtener la ecuación KdV para v_1 :

$$v_{1,t} + v_1 v_{1,x} + \frac{1}{2} v_{1,xxx} = 0.\tag{3.20}$$

Capítulo 4

Solución numérica de la ecuación de Korteweg-de Vries

En este capítulo se plantea como resolver la ecuación KdV por medio del método de diferencias finitas [15], en el cual se emplea un esquema con condiciones de frontera periódicas como el utilizado por Kruskal y Zabusky [7,9]. Se propone una forma alternativa de estudiar la evolución temporal de la ecuación, por medio de la matriz asociada al sistema de ecuaciones obtenidas.

4.0.1. Método de diferencias finitas

La idea principal del método de diferencias finitas consiste en considerar que las variables continuas x y t para el espacio y tiempo respectivamente, pueden ser discretizadas como conjuntos $\{x_i\}_{i=0}^n$ y $\{t_j\}_{j=1}^m$. Dichos conjuntos de valores x_i y t_j se escogen según el problema de interés. Una notación comunmente utilizada para la discretización de una función de x y t es $u(x, t) = u(ih, jk) = u_{i,j}$ ó $u(x, t) = u_i^j$.

La discretización del espacio y tiempo consiste en utilizar la conocida serie de Taylor alrededor de un punto x_i

$$f(x) = f(x_i) + \frac{(x - x_i)}{1!} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_i} + \cdots + \frac{(x - x_i)^n}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{\eta}, \quad (4.1)$$

donde $\eta = x_i + \theta(x - x_i)$ y $0 < \theta < 1$.

Aproximación de primera derivada

El primer caso es el llamado de diferencias progresivas. Consideremos la ecuación (4.1) con $n = 2$ y $x = x_i + h$, entonces se tiene que

$$f(x_i + h) = f(x_i) + h \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{\eta_p}, \quad (4.2)$$

y despejando para la primera derivada

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{\eta_p}, \quad (4.3)$$

aquí el término de la segunda derivada corresponde al error de truncamiento $O_p(h)$ definido de la siguiente forma

$$O_p(h) = -\frac{h}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{\eta_p}. \quad (4.4)$$

El segundo caso es llamado de diferencias regresivas, consiste en utilizar $n = 2$ y $x = x_i - h$ en (4.1), así se tiene que

$$f(x_i - h) = f(x_i) - h \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{\eta_r}, \quad (4.5)$$

por lo cual

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} + O_r(h), \quad (4.6)$$

donde $O_r(h)$ es el error local de truncamiento definido por

$$O_r(h) = \frac{h}{2!} \left. \frac{df}{dx} \right|_{\eta_r}. \quad (4.7)$$

Como tercer caso, es llamado de diferencias centradas, consiste en tomar $n = 3$ en la ecuación (4.1) y considerar los casos anteriores, es decir $x = x_i + h$ y $x = x_i - h$, de modo que al dividir por dos en ambos casos y sumarlos, se puede llegar a

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} + O_c(h), \quad (4.8)$$

con un error de truncamiento local $O_c(h^2)$ dado por

$$O_c(h) = \frac{h^2}{3!} \left[\left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{\eta_p} + \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{\eta_r} \right]. \quad (4.9)$$

Aproximación de segunda derivada

Partiendo de la ecuación (4.1) para cuarto orden ($n = 4$), tenemos que

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\eta_p), \quad (4.10)$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\eta_r), \quad (4.11)$$

que al sumarse y despejar el término de la segunda derivada se obtiene que

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)}{h^2} - O_c(h^2), \quad (4.12)$$

con $O_c(h^2)$ el error de truncamiento local

$$O_c(h^2) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\eta_c). \quad (4.13)$$

En general es posible hallar aproximaciones para las derivadas de cualquier orden con mayor exactitud, sin embargo, no se entrara en detalle a discutir estos otros casos, cabe mencionar que para obtener dichas aproximaciones solo es necesario tomar valores cada vez más grandes de n en (4.1) y así obtener diferentes combinaciones.

4.0.2. Discretización de la ecuación KdV

Para discretizar la ecuación KdV, se considero a la ecuación de la siguiente forma

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (4.14)$$

Se utilizó un método de diferencias progresivas y haciendo uso de la notación mencionada al inicio de la sección anterior ($u(ih, jk) = u_i^j$), el término correspondiente a la parte temporal tomó la siguiente forma

$$u_t \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k}, \quad (4.15)$$

la parte espacial que corresponde a la derivada de primer orden, quedó como sigue

$$u_x \approx \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h}, \quad (4.16)$$

por último, la parte espacial correspondiente a la derivada de tercer orden fue aproximada realizando un análisis basado en discretizar primero la segunda derivada como en (4.12) y posteriormente se le aplicó la regla anterior de derivada de primer orden, de modo que

$$\begin{aligned} u_{xx} &\approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} \\ \Rightarrow u_{xxx} &\approx \frac{u_{xx}(x_{i+1}, t_j) - u_{xx}(x_i, t_j)}{h} \\ \Rightarrow u_{xxx} &\approx \frac{u_{i+2}^j + 3u_i^j - 3u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{h^3}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ahora, al sustituir las expresiones anteriores en la ecuación (4.14), se tiene que

$$\begin{aligned}
& \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} + u_i^j \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h} + \frac{u_{i+2}^j + 3u_i^j - 3u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{h^3} = 0 \\
& \Rightarrow u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{k}{h}(u_{i+1}^j - u_i^j) - \frac{k}{h^3}(u_{i+2}^j + 3u_i^j - 3u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) \\
& \Rightarrow u_i^{j+1} = \left(1 + \frac{k}{h}u_i^j - \frac{3k}{h^3}\right)u_i^j + \left(\frac{3k}{h^3} - \frac{k}{h}u_i^j\right)u_{i+1}^j + \frac{k}{h^3}u_{i-1}^j - \frac{k}{h^3}u_{i+2}^j. \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Posteriormente se hizo uso del esquema utilizado por Zabusky y Kruskal [5], el cual consiste en un problema periódico en el espacio con periodo 2, es decir, $u_i^j = u_{i+2N}^j$, lo cual permite describir el problema en el intervalo $0 < x < 2$, aquí $i = 0, 1, 2, \dots, 2N - 1$ y el avance de los pasos en el espacio es $h = 1/N$. Con esto en mente es posible desarrollar la ecuación (4.18) para los valores espaciales i desde 0 hasta $2N - 1$, lo cual nos permite obtener la siguiente matriz asociada a los vectores del tiempo actual y posterior

$$\begin{pmatrix} a_0 & c_0 & -b & 0 & \cdots & b & 0 \\ b & a_1 & c_1 & -b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots & \\ -b & 0 & \cdots & 0 & b & a_{2N-2} & c_{2N-2} \\ c_{2N-1} & -b & \cdots & 0 & 0 & b & a_{2N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^j \\ u_1^j \\ u_2^j \\ \vdots \\ u_{2N-2}^j \\ u_{2N-1}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0^{j+1} \\ u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ \vdots \\ u_{2N-2}^{j+1} \\ u_{2N-1}^{j+1} \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{k}{3h}, & \beta &= \frac{3k}{h^3}, & b &= \frac{\beta}{3}, \\
a_0 &= \alpha u_0^j + 1 - \beta, \dots, a_{2N-1} = \alpha u_{2N-1}^j + 1 - \beta, \\
c_0 &= \beta - \alpha u_0^j, \dots, c_{2N-1} = \beta - \alpha u_{2N-1}^j.
\end{aligned}$$

Así pues, para hallar la evolución temporal de nuestra función $u(x, t)$, se estableció una condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ y se elaboró un programa en lenguaje Python, que generó el primer vector de posiciones al tiempo $t = 0$, y que al retroalimentarse con el nuevo

vector al tiempo $t + 1$ generó una nueva matriz asociada para la evolución temporal, de modo que por medio de un proceso de iteración en el tiempo fue posible hallar el perfil de solución para la función desconocida $u(x, t)$.

Capítulo 5

Resultados y discusión

La solución numérica de la ecuación KdV se realizó mediante el uso del lenguaje de programación Python, con el cual se generó la matriz asociada (4.19) correspondiente al sistema de ecuaciones discretizadas presentado en el capítulo anterior, para mayor detalle del código creado véase el apéndice A.

La condición inicial utilizada fue la siguiente

$$u(x, 0) = \frac{225}{64}v_1^2 \operatorname{sech}^2[v_1(x - x_1)] + \frac{225}{64}v_2^2 \operatorname{sech}^2[v_2(x - x_2)], \quad (5.1)$$

donde v_1 y v_2 representan las velocidades de dos solitones y x_1 y x_2 sus posiciones iniciales. Para el estudio de la evolución de un solitón se utilizó $v_1 = 10$, $v_2 = 0$ y $x_1 = 0,8$, nótese que en este caso no es necesario especificar el valor de x_2 pues la amplitud de la segunda onda se hace cero. En la interacción de la colisión entre dos solitones con diferente amplitud, para una representación gráfica en dos dimensiones se hizo uso de $v_1 = 10$, $v_2 = -5$, $x_1 = 0,5$ y $x_2 = 1,2$, para una representación en tres dimensiones se utilizó $v_1 = 10$, $v_2 = -5$, $x_1 = 0,5$ y $x_2 = 0,8$. Por último se simuló la interacción de dos solitones con la misma amplitud, por lo cual se utilizaron los siguientes valores, $v_1 = 10$, $v_2 = -10$, $x_1 = 0,6$ y $x_2 = 0,8$.

Para cuestiones de cálculo numérico se dividió el intervalo $0 < x < 2$ en una malla de

62 puntos, el incremento en el espacio utilizado fue $h = 1/30$ y el incremento temporal $k = 10^{-6}$. Para la simulación de un solitón se realizó un ciclo de $N = 1000$ pasos en el tiempo, para su representación gráfica en 3D se usó un valor de $N = 2000$. En la colisión de dos solitones con diferente amplitud se utilizó una cantidad de pasos en el tiempo $N = 10000$ y $N = 2000$ para su representación en dos y tres dimensiones respectivamente. Finalmente, para la colisión de dos solitones con la misma amplitud se utilizó un valor de $N = 1000$ para la cantidad de pasos en el tiempo tanto para la representación 2D como para la 3D.

De la simulación realizada para un solitón se puede observar en la Fig. 5.1 que la amplitud se mantiene aproximadamente constante, es claro que la separación entre tiempos es pequeña, sin embargo, en el gráfico 3D (Fig. 5.2) puede apreciarse como la forma se propaga en el tiempo y espacio sin deformarse considerablemente, pues como era de esperarse el término no lineal y dispersivo de la naturaleza del fenómeno se equilibran para mantener la forma de la onda.

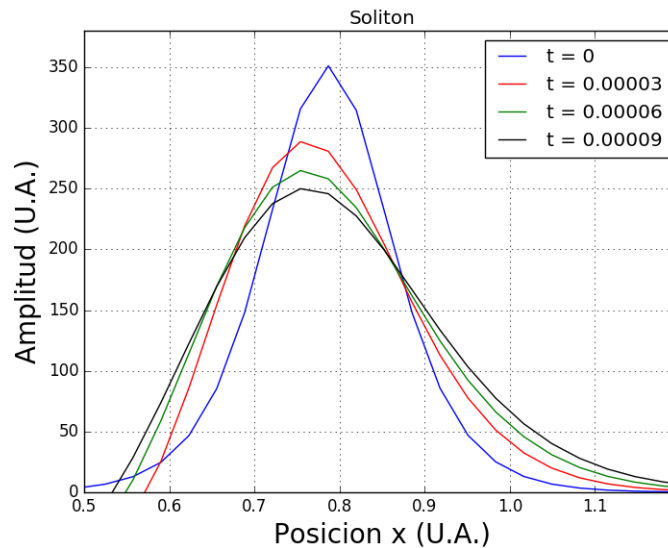


Figura 5.1: Amplitud de un solitón a diferentes tiempos

En la Fig. 5.3, se puede notar la interacción de dos solitones con diferente amplitud colisionando en pequeños intervalos de tiempo. Se destaca de dicha gráfica que la interacción es un proceso entre su no linealidad y dispersión de cada solitón, pese a que posterior a su interacción los solitones deben mantener su forma, estos resultan con un cambio de

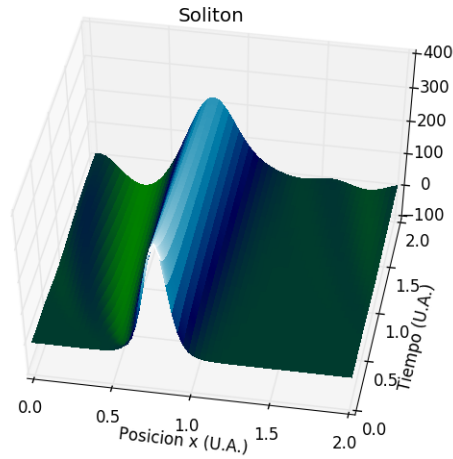


Figura 5.2: Evolución espacial y temporal de un solitón

fase, así pues la colisión entre ellos para pequeños tiempos resulta interesante ya que se puede observar la interacción que está relacionada a dicho cambio de fase de los solitones. En el gráfico 3D (Fig. 5.4) se nota como al acercarse cada vez más el solitón más pequeño al otro, éste pierde su “identidad” para modificar la fase de cada solitón.

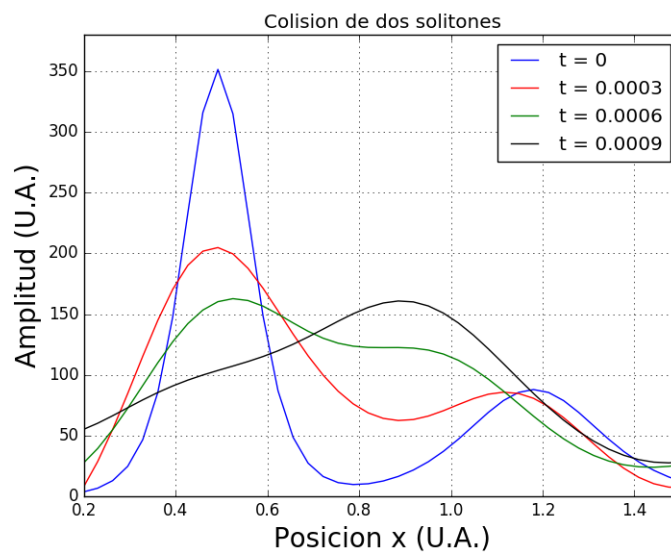


Figura 5.3: Amplitud de la colisión de dos solitones con diferente amplitud a diferentes tiempos

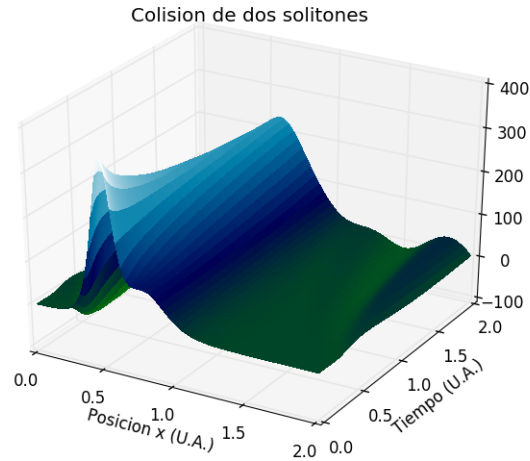


Figura 5.4: Evolución espacial y temporal de la colisión de dos solitones con diferente amplitud

Por último en la Fig. 5.5 se muestra la colisión de dos solitones con igual amplitud para intervalos de tiempo pequeños, es notable que también la interacción debida a la no linealidad y dispersión de cada solitón modifica ligeramente la forma de estos para unirse y formar un solo solitón de igual amplitud (Fig. 5.6). Es de esperarse que posterior a su interacción los solitones mantengan su forma y sigan su camino.

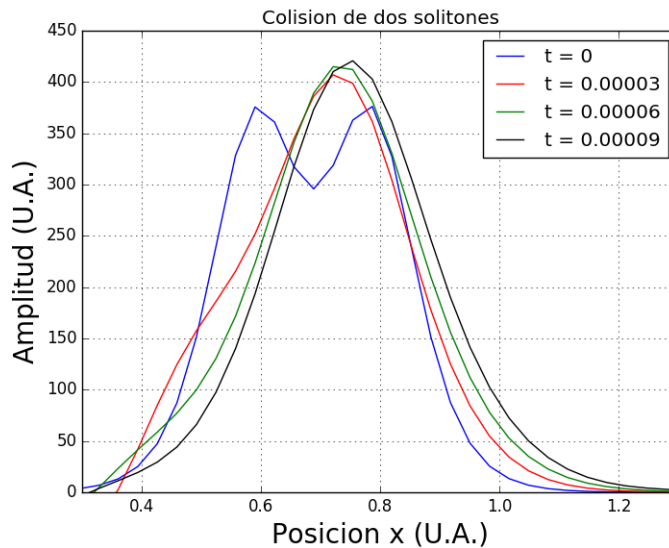


Figura 5.5: Amplitud de la colisión de dos solitones con igual amplitud a diferentes tiempos

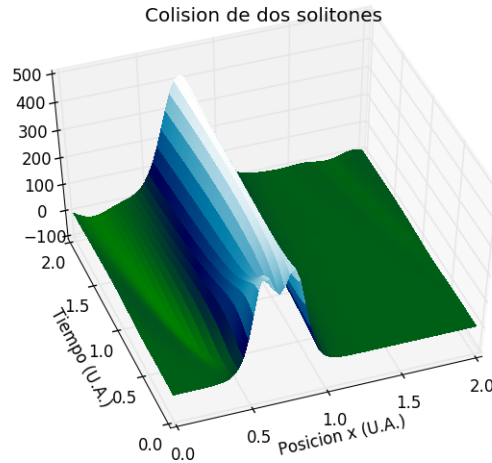


Figura 5.6: Evolución espacial y temporal de la colisión de dos solitones con igual amplitud

Los resultados aquí mostrados presentan un comportamiento como el esperado para pequeños intervalos de tiempo, es relevante mencionar que para que se obtenga una buena aproximación y así evitar la divergencia de soluciones, se debe tener en consideración que el valor de los pasos temporales k deben ser aproximadamente de al menos tres ordenes de magnitud más pequeños que el del paso espacial h [16]. Debe notarse también que el incrementar la cantidad de pasos en el tiempo y espacio permite obtener una mayor precisión en los problemas, pero ello implica un mayor poder computacional.

Como se mencionó previamente, el método utilizado solo sirve para analizar pequeños intervalos de tiempo, pues cuando se desea analizar el comportamiento de onda solitaria para la solución a la ecuación planteada en tiempos grandes, los resultados divergen y empieza a presentarse un desequilibrio entre el término dispersivo y el no lineal de la ecuación, esto posiblemente se debe a que como antes se mencionó, el tener más precisión y una buena convergencia está relacionada con la capacidad de la maquina utilizada para resolver la ecuación de forma numérica, además es importante resaltar nuevamente que el método utilizado para la discretización fue de diferencias progresivas, quizá con una discretización de diferencias centrales y al discretizar el término no lineal de la ecuación de modo que se reduzca el error, se obtendrían resultados en intervalos de tiempo más amplios pero ello representaría también modificar sustancialmente el esquema de la solución

aquí planteada e incrementar el tiempo de cálculo. Cabe mencionar que el método aquí empleado es poco convencional para resolver éste tipo de problemas, pues normalmente se utilizan métodos de diagonalización de matrices asociadas a los sistemas de ecuaciones obtenidos mediante la discretización de la ecuación, sin embargo, el problema sustancial de tratar de diagonalizar o modificar la matriz asociada (4.19) es que internamente hay valores que también varían con el tiempo y no son siempre fijos, esto como resultado de la no linealidad de la ecuación, y la mayoría de métodos conocidos para diagonalizar o de reducción de matrices a una forma mas manejable, se basan en sistemas de ecuaciones lineales. Pese al reducido rango de estudio logrado con este método, éste resulta muy útil para analizar los procesos que se generan durante la interacción de dos solitones, lo cuál hace bastante bueno al método aquí propuesto.

Capítulo 6

Conclusiones

Mediante éste trabajo se pudo dar un panorama general de como surgió y en que consiste la teoría enfocada al estudio de los llamados solitones u ondas solitarias, además se mostró a grandes rasgos diferentes métodos de resolver la ecuación que modela éste tipo de fenómenos que se dan en diversas áreas de la naturaleza, dicho estudio permitió entender la naturaleza de los fenómenos que presentan este tipo de comportamientos, pues como se mencionó a lo largo del presente trabajo, la ecuación KdV que es la que modela éste tipo de fenómenos, presenta un equilibrio entre su término dispersivo y el no lineal.

En particular, se abordó parte de la teoría de las ondas iónico acústicas y la existencia de fenómenos descritos por la ecuación KdV en el área de la Física de Plasmas, cuya manifestación está relacionada principalmente con la ausencia de campos eléctrico y magnético, así como la suposición de velocidades iónicas iguales a las velocidades electrónicas, al menos para primer orden. Se presentó la relación de dispersión correspondiente a éste tipo de fenómeno y que al mostrar como se conecta esto con la ecuación KdV, resulta un tanto más natural el hecho de hablar de un término dispersivo.

El método empleado para resolver la ecuación KdV de forma numérica se basó en las diferencias finitas, posteriormente la forma propuesta y utilizada para resolver la ecuación planteada en este trabajo es poco convencional para la solución de problemas bajo el esquema de las diferencias finitas, pues lo usual es modificar mediante operaciones algebraicas la matriz asociada al sistema de ecuaciones, sin embargo, para el caso particular de

la ecuación KdV el tratar de diagonalizar o transformar la matriz asociada, resulta algo complicado debido a la no linealidad del problema que se ve reflejado en la propia matriz que también depende del tiempo, justamente esa naturaleza permite ver a la matriz como la encargada de la evolución temporal del problema y que se retroalimenta con los valores obtenidos al interactuar con la solución para un tiempo dado y así poder generar la evolución del problema. El método aquí propuesto resulta ser una buena aproximación para el estudio de la interacción de solitones en pequeños intervalos de tiempo y para describir la evolución en pequeños intervalos temporales, así como el estudio de un solitón que se propaga por el medio sin deformarse considerablemente.

Los resultados obtenidos para las simulaciones realizadas son consistentes con lo esperado de la teoría, los esquemas utilizados para resolver la ecuación numérica permitieron visualizar lo reportado en diversos artículos, además es importante mencionar que algunos análisis y estudios reportados en la literatura son para pequeños intervalos de tiempo, lo cual permite confirmar que el modelo propuesto es bastante bueno y útil para los propósitos de este trabajo.

El objetivo de este trabajo fue estudiar la teoría de solitones para comprender las ondas solitarias iónico-acústicas, que aparecen en Física de Plasmas, mediante la solución numérica de la ecuación de Korteweg-de Vries, ecuación que modela diversos fenómenos no lineales. Se puede concluir que el propósito de este trabajo se alcanzó satisfactoriamente porque se mostró el papel que juega el equilibrio entre el término dispersivo y el no lineal de la ecuación KdV en la formación de los solitones iónico-acústicos.

Apéndice A

Código en lenguaje Python para resolver la ecuación KdV

En éste apéndice se muestra el código en lenguaje Python utilizado para la solución numérica de la ecuación KdV, el esquema se basa principalmente en la construcción de una matriz de evolución temporal que se retroalimenta del valor obtenido al multiplicar dicha matriz por un vector a cierto tiempo, se menciona una retroalimentación tanto para el vector y para la matriz, pues también la matriz contiene elementos que cambian con el tiempo. Algunas palabras presentes en el código quizá se vean modificadas, esto debido al procesador de textos con el cual se realizo el presente trabajo, sin embargo, para un conocedor del lenguaje resultará bastante directo el percibir los cambios y recrear el programa.

Soliton

```
import numpy as np  
import matplotlib.pyplot as plt  
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D  
from matplotlib import cm  
from math import *
```

parametros

```
B1 = 10
A1 = (225.0/64)*(B1**2)
B2 = -10
A2 = (225.0/64)*(B2**2)
x1 = 0.6
x2 = 0.8
```

Variables

```
nx = 31 numero de puntos en la malla
nt = 1000000 numero de fin de paso temporal
N = 1000 pasos en el tiempo
h = 1.0/(nx-1) avance espacial
k = 1.0/nt avance temporal
```

```
x = np.linspace(0,2,2*nx)
t = np.linspace(0,2,N)
C = np.ones((2*nx,2*nx))
G = np.ones((2*nx,2*nx))
H = np.ones((2*nx,2*nx))
L = np.ones((2*nx,2*nx))
M = np.ones((2*nx,2*nx))
O = np.ones((2*nx,2*nx))
I = np.identity(2*nx)
```

```
u = np.ones(2*nx)
u0 = []
un = []
an = []
bn = []
```

```

def sech(y):
return 1.0/cosh(y)

condicioninicial
for i in range(2*nx):
u = A1*sech(B1*(i*h-x1))**2 + A2*sech(B2*(i*h-x2))**2
un.append(u)

def matriz0(u):
global h,k

Elementosenladiagonal
D = (k/(3*h))*I*u + I - I*(3*k/(h**3))

elementosarribadeladiagonal
for i in range(2*nx):
for j in range(2*nx):
if j == i+1:
C[i,j] = 1
else:
C[i,j] = 0

F = (3*k/(h**3))*C - (k/(3*h))*C*u

matrizconmenosarribadeC
for i in range(2*nx):
for j in range(2*nx):
if j == i+2:
G[i,j] = -k/(h**3)
else:
G[i,j] = 0

```

matriz con unos debajo de la diagonal

```
for i in range(2*nx):
for j in range(2*nx):
if i == j+1:
H[i,j] = 1
else:
H[i,j] = 0
```

$E = (k/(h**3))*H$

Elementos restantes en la matriz

```
for i in range(2*nx):
for j in range(2*nx):
if i == j+2*nx-1:
L[i,j] = 1
else:
L[i,j] = 0
```

```
for i in range(2*nx):
for j in range(2*nx):
if i == j+2*nx-2:
M[i,j] = -k/(h**3)
else:
M[i,j] = 0
```

```
for i in range(2*nx):
for j in range(2*nx):
if j == i+2*nx-2:
O[i,j] = 1
else:
O[i,j] = 0
if i == 1:
```

$O[i,j] = 0$

$K = (3*k/(h**3))*L - (k/(3*h))*L*u$

$P = k/(h**3)*O$

$N = K + M + P$

matrizasociada

$A0 = D + F + E + G + N$

return A0

vectorat + 1

for i in range(N):

un = np.dot(matriz0(un),un)

u0.append(un)

graficar

plt.plot(x, u0[0], 'b', label = 't = 0')

plt.plot(x, u0[300], 'r', label = 't = 0.0003')

plt.plot(x, u0[600], 'g', label = 't = 0.0006')

plt.plot(x, u0[900], 'k', label = 't = 0.0009')

plt.legend(loc = 'upper right')

plt.xlabel('Posicion x', fontsize = 20)

plt.ylabel('Amplitud', fontsize = 20)

plt.title('Colision de dos solitones')

plt.title('Soliton')

plt.axis([0.3,1.3,0,450])

plt.grid(True)

plt.show()

```
graficar 3D
fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')
X,T = np.meshgrid(x,t)
surf = ax.plotsurface(X,T,u0,rstride = 1,cstride = 1,cmap = cm.ocean, linewidth =
0,antialiased = False)
ax.view_init(50, -110)
plt.title('Colision de dos solitones')
plt.title('Soliton')
plt.xlabel('Posicion x')
plt.ylabel('Tiempo')
plt.show()
```

Bibliografía

- [1] G. Rowlands, Non-linear phenomena in science and engineering, first edition, Chichester, England, 1990.
- [2] Davidson, R. C., Methods in Non Linear Plasma Theory, Academic Press, New York, 2012.
- [3] E. M. de Jager, On the Origin of the Korteweg-de Vries Equation, Forum der Berliner Mathematischen Gesellschaft, Band 19, Dezember 2011, pp. 171-195
- [4] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, Korteweg-de Vries Equation and Generalizations . VI Methods for Exact Solution, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXVII, 97-133 (1974).
- [5] A. H. Salas S., New Solutions for the KdV Equation by the Exp-Function Method, Visión Electrónica, ISSN: 2248-4728, Vol. 3, Num. 1 (2009).
- [6] Yi Li and D. H. Sattinger, Soliton Colisions in the Ion Acoustic Plasma Equations, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 1 (1999) 117-130
- [7] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal, Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States, Physical Review Letters, Vol. 15, Num. 6 (1965).
- [8] W. Hereman, M. Takaoka, Solitary wave solutions of nonlinear evolution and wave equations using a direct method and MACSYMA, J. Phys. A: Math. Gen. 23 4805-4822 (1990).
- [9] T. R. Taha, M. J. Ablowitz, Analytical and Numerical Aspects of Certain Nonlinear Evolution Equations. III. Numerical, Korteweg-de Vries Equation, Journal of Computational Physics 55, 231-253 (1984).

- [10] D. J. Korteweg, G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Phil. Mag.* (5) 39 (1895), 422-443.
- [11] J. Billingham, A. C. King, *Wave Motion*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, First published 2000.
- [12] P. S. Landa, *Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems*, Mathematics and its Applications, 1996.
- [13] Francis F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, Springer International Publishing Switzerland, Third Edition, 2012.
- [14] López Aguayo et al., Ondas solitarias no lineales: una introducción a los solitones ópticos espaciales, *Rev. Mex. Fis.* 60 (2014) 39-50.
- [15] G. D. Smith, *Numerical solution of partial differential equations*, Finite Difference Methods, Clarendon Press Oxford, Second Edition, 1978.
- [16] Anna Baecklund, Daniel Weston, *Analytical and Numerical Study of Soliton Collisions*, SA104X Degree Project in Engineering Physics, First Level, Department of Theoretical Physics Royal Institute of Technology (KTH), Primavera 2010.