



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

**EJEMPLOS DE FRACTALES EN LOS CONJUNTOS DE JULIA
DE FUNCIONES MEROMORFAS**

**TESIS PROFESIONAL QUE PRESENTA
JOSÉ CRUZ RODRÍGUEZ
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS**

**DIRECTOR DE TESIS
DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO**

Puebla, Pue. Octubre 2017

Agradecimientos

A mis padres, por ser mis profesores de la carrera más difícil, la de la vida.

A mis profesores, por facilitar mi aprendizaje. En particular, a la Dra Patricia Domínguez Soto, por dirigir la presente tesis y a la Dra Ma. Elena Franco Carcedo, por su invaluable colaboración en la corrección de estilo de la tesis .

A mis amigos, por brindarme su confianza y mejores deseos.

A mis compañeros, por las correcciones recibidas en el desarrollo de la presente tesis; especialmente a Iván Hernández Orzuna, por su interés y dedicación a las nuevas generaciones.

A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, por abrirme las puertas de la máxima Casa de Estudios de mi Estado.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el financiamiento de esta tesis.

Resumen

Se enuncia el concepto de fractal definido por Benoit Mandelbrot, junto con ejemplos de fractales en el arte, en la ciencia, en la tecnología y en la naturaleza. También, se define el concepto de dimensión de Hausdorff, y se dan ejemplos de dimensión de Hausdorff de algunos fractales clásicos como: el triángulo de Sierpinski, el copo de Koch, el conjunto de Cantor y la curva de Hilbert. Posteriormente, se definen los conjuntos de Julia y Fatou para tres clases de funciones complejas meromorfas denotadas por \mathcal{R} , \mathcal{E} y \mathcal{M} . Se define el plano de parámetros y el plano dinámico, para las clases de funciones meromorfas antes mencionadas. Se dan ejemplos de conjuntos de Julia de algunas funciones meromorfas en \mathcal{R} y \mathcal{E} que son fractales. Finalmente, se describe el concepto de un corte del espacio de parámetros para una familia de funciones meromorfas en la clase \mathcal{M} y se dan ejemplos asignando valores a los parámetros de la familia para encontrar los conjuntos de Julia que son fractales.

Índice general

Resumen	I
1. Introducción	1
1.1. Un poco de historia	2
1.2. Objetivos y desarrollo	3
2. Preliminares	5
2.1. Iteración	6
2.2. Iteración a partir de reglas simples	11
2.3. Museo de arte matemático	14
2.4. Fractales en todas partes	18
2.5. Dimensión de Hausdorff	21
3. Variable compleja	26
3.1. Números complejos	26
3.2. Representación geométrica de los números complejos	29
3.3. Espacio métrico de los números complejos	34
3.4. Proyección estereográfica	36
3.5. Función de variable compleja	43

3.6. Límite y Continuidad	ÍNDICE GENERAL
<hr/>	
3.7. Funciones holomorfas	50
3.8. Funciones analíticas	51
3.9. Singularidades y su clasificación	53
4. Familias normales	55
4.1. Espacio de funciones continuas $C(U, X)$	55
4.2. Familia normal	56
4.3. Equicontinuidad	56
4.4. Teoremas de Arzelá-Ascoli y Montel	57
5. Clases de funciones meromorfas	58
5.1. Funciones racionales	58
5.2. Funciones trascendentes enteras	60
5.3. Funciones trascendentes meromorfas	60
5.4. Iteración y puntos fijos	61
6. Conjuntos de Julia y Fatou	65
6.1. Definiciones de los conjuntos de Julia y Fatou	65
6.2. Clasificación de las componentes de Fatou	67
7. Fractales de funciones meromorfas	69
7.1. Conjunto de Mandelbrot	70
7.2. Conjuntos de Julia para la familia f_c	72
7.3. Plano de parámetros de la familia trascendente entera $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$	74
7.3.1. Plano dinámico de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$	75

7.4. Plano de parámetros de la familia trascendente meromorfa $f(z) = \lambda \sin z + \frac{\mu}{z-k\pi}$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$	77
7.4.1. Plano dinámico de la familia $f(z) = \lambda \sin z + \frac{\mu}{z-k\pi}$, donde $\mu = 0,9$ y $k = 5$	78
8. Conclusiones	80
Bibliografía	81

Capítulo 1

Introducción

La curiosidad humana es lo que nos ha ayudado a desarrollar el mundo que hasta hoy conocemos. Y los fractales no son la excepción, de hecho, es la nueva forma de ver y entender las matemáticas. Las matemáticas son una idea griega, pero los fractales son una nueva forma de crear ideas; dejan claro que ésta es una nueva forma de percibir el mundo. Una forma interesante de mostrarlo es la del profesor Michael Barnsley, uno de los profesores con mayor experiencia en objetos fractales:

“Fractal geometry will make you see everything differently. There is danger in reading further. You risk the loss of you childhood vision of clouds, forests, galaxies, leaves, feather, flowers, rocks, mountains, torrents of water, carpests, bricks, and much else besides. Never again will your interpretation of these things be quite the same” [5].

Los fractales son objetos irregulares y fragmentados, estos objetos impresionantes han inundado el mundo científico en las últimas tres décadas. Se encuentran, como dijimos, en la naturaleza, el arte, la música, el cuerpo humano, la astronomía, la física, la química, la economía, la telefonía móvil, las matemáticas y, los de nuestro interés, los conjuntos de Julia.

La iteración a partir de reglas simples es un concepto que ha trascendido históricamente para la creación de objetos impensables. Por ejemplo, el tamiz de Apolonio, del matemático griego Apolonio de Perga del siglo III a.c.; las matemáticas, con el método de Newton; en la tecnología, los denominados monstruos matemáticos han resultado ser bastante útiles; en el arte, en obras donde se puede mirar el infinito a los ojos, como en *Ángeles y demonios* de M.C. Escher(1898-1972) o *La gran ola* del pintor japonés Katsushika Hokusai (1760-1849); en la naturaleza, ya que las montañas no son conos, las nubes no son esféricas, ni el rayo es rectilíneo, véase [26]. Basta con observar un poco el universo y nuestro mundo para darnos cuenta que los objetos fractales los describen de una forma adecuada.

1.1. Un poco de historia

La curiosidad para la creación y desarrollo de las matemáticas parte del interés del movimiento del universo, tema de estudio a lo largo de la historia de la humanidad. Desde Claudio Ptolomeo, el primer astrofísico, pasando por Galileo y Copérnico, con la mejora del telescopio y la teoría heliocéntrica; Tycho Brahe, con sus observaciones y anotaciones del movimiento de Marte, hasta las tres leyes de Johannes Kepler y las ecuaciones Newton, véase [35]. Posteriormente, surge la pregunta ¿es estable el sistema solar?, es decir, si en algún momento los planetas colisionarán entre sí o algunos de ellos escapan al infinito; en 1884, con motivo del cumpleaños del rey Óscar II de Suecia y Noruega, se retaba a demostrar de forma rigurosa la estabilidad del sistema solar de acuerdo a las ecuaciones de Newton, Poincaré ganó el concurso debido al interesante uso que dio a la iteración en sus estudios, véase [3]. Se extiende el método de Newton a la iteración de funciones analíticas complejas gracias a los trabajos del matemático alemán E. Schröder (1841-192) y del matemático británico Arthur Cayley (1821-1895). En 1915, la Academia Francesa de Ciencias informó que el *Grand Prix des Sciences Mathématiques* se otorgaría a los estudios de iteración.

En 1918, el matemático francés Gaston Julia (1893-1978) recibe el premio, su trabajo lo publicó en forma de memorias: *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles*, véase [25]. De manera casi simultánea, el prominente matemático Pierre Fatou (1878-1929) publica sus tres artículos: *Sur les équations fonctionnelles*, véase [20]. Gracias a un teorema desarrollado en la tesis doctoral del matemático francés Paul Montel (1876-1975) sobre familias normales, Fatou y Julia logran descomponer la esfera de Riemann en dos conjuntos, que ahora llevan sus nombres. El conjunto de Julia está formado por los puntos donde la familia de iteradas de la función no es normal, mientras que el conjunto de Fatou es su complemento. Sin embargo, estos trabajos fueron olvidados por un largo período, hasta que Mandelbrot los usa para continuar con sus estudios sobre los objetos fractales. El conjunto de Mandelbrot es, quizás, el objeto fractal más impresionante de la matemática moderna. Por esta razón, para entender los conjuntos de Julia, se utiliza este maravilloso objeto fractal, cuya observación detenida nos impele a pensar que el universo es algo pequeño.

1.2. Objetivos y desarrollo

El objetivo de la presente tesis es mostrar la construcción sencilla e intuitiva de objetos fractales y su relación con los conjuntos de Julia de tres clases de funciones complejas meromorfas. Estas familias de funciones son: familia de funciones racionales, familia de funciones trascendentes enteras y familia de funciones trascendentes meromorfas, denotadas por \mathcal{R} , \mathcal{E} y \mathcal{M} , respectivamente.

El tema se desarrolla con fines didácticos de la siguiente forma: En el capítulo dos, Preliminares, se describen las características de objeto fractal, se desarrollan ejemplos de fractales en diferentes áreas de la ciencia, el arte y la naturaleza. Además, se describe una definición intuitiva de dimensión fractal (conteo de cajas). En el capítulo tres se dan algunas definiciones y resultados importantes de la variable compleja. En el capítulo cuatro se enuncian las definiciones de equicontinuidad, familia normal y

1. Introducción

teoremas de Montel y Arzelá-Ascoli. El capítulo cinco trata sobre el concepto de iteración, clasificación de puntos fijos, la idea básica de la teoría. Posteriormente, en el capítulo seis, se definen los conjuntos de Julia y de Fatou; además, se enuncian algunas propiedades de estos conjuntos; también se definen las componentes de Fatou. La tesis culmina en el capítulo siete, con ejemplos de fractales de cada una de estas familias de funciones meromorfas.

Capítulo 2

Preliminares

Este capítulo está dedicado a mostrar de forma sencilla e intuitiva las características de un objeto fractal. La iteración es el elemento esencial para la construcción de nuestros objetos fractales. Iniciamos con el tamiz de Apolonio, resuelto por René Descartes con una hermosa relación entre las curvaturas de círculos tangentes entre sí. Después, con el método de Newton, quizás el método de iteración más antiguo e importante que se conoce. Posteriormente, se muestran otras formas importantes de la iteración, como las obras de M.C Escher y el método por sustitución.

Por medio de la aplicación de reglas simples, se muestra la construcción de objetos fractales y se abordan algunos ejemplos clásicos de los denominados “monstruos matemáticos”, que nos ayudarán a proponer una definición de objeto fractal. Después, se menciona la presencia de objetos fractales en diferentes áreas de la ciencia, el arte y la naturaleza.

Para finalizar, se define la dimensión fractal (conteo de cajas) y se dan ejemplos.

2.1. Iteración

Al buscar en cualquier diccionario la palabra *iteración*, se encuentra que es un vocablo que proviene del latín *iteratio*, que describe el acto y consecuencia de iterar, un verbo que tiene como sinónimos: reiterar o repetir. El término suele utilizarse para dar nombre al acto de reiterar varias veces determinados pasos.

A continuación, se muestran varios ejemplos de iteración que han trascendido a lo largo de la historia de las matemáticas.

Ejemplo 2.1 Tamiz de Apolonio. Apolonio de Perga (262-190 a.c.) es conocido como “*El gran Geométrico*”. El trabajo de Apolonio se perdió, pero se sabe de su existencia gracias a las referencias que hace Pappus en sus estudios, véase [34].

Se tiene que la curvatura de un círculo es igual al inverso de su radio, que es positiva cuando se trata de la curvatura exterior o negativa cuando se trata de la curvatura interior, como se muestra en la Figura 2.1. Nótese que cuanto más grande es el círculo, su curvatura externa será más pequeña y viceversa.

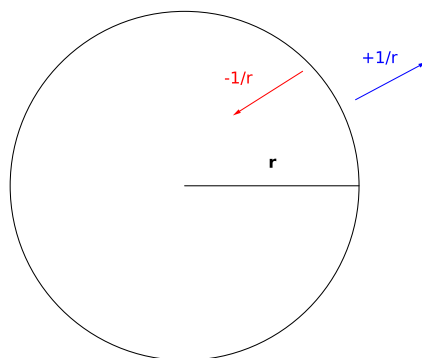


Figura 2.1: Curvatura de un círculo

Ahora bien, tómesese el círculo unitario, se trazan dos círculos tangentes interiores en el círculo inicial, por lo que estos círculos tendrán radio $\frac{1}{2}$. Obsérvese la Figura 2.2.

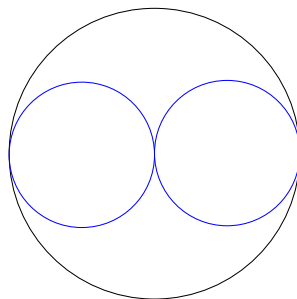


Figura 2.2: Círculos tangentes interiormente al círculo unitario

La construcción de este objeto se obtuvo en 1619, por el matemático y filósofo René Descartes; se obtiene una hermosa relación entre las curvaturas de cuatro círculos tangentes entre sí.

Teorema 2.1. Teorema de Descartes. Sean a, b, c y d las curvaturas de cuatro círculos tangentes entre sí. Entonces se cumple la relación:

$$(a + b + c + d)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2). \quad (2.1)$$

Despejando, se tiene $d = a + b + c \pm 2\sqrt{(ab) + (bc) + (ad)}$, es decir, dados tres círculos tangentes entre sí, se puede encontrar la curvatura del cuarto círculo, por lo que se obtiene el radio del siguiente círculo de la construcción. Por simplicidad, tómesese el círculo unitario, entonces su curvatura es $\frac{1}{r}$, pero al ser tangente internamente, de acuerdo al teorema de Descartes, su curvatura es $-\frac{1}{1} = -1$. Luego los dos círculos interiores poseen un radio de $\frac{1}{2}$, y éstos, al ser tangentes exteriormente, tienen una curvatura positiva, así, su curvatura es 2.

En efecto, sean $a = -1$, $b = 2$ y $c = 2$. Aplicando el teorema, se tiene que:

$$\begin{aligned} d &= a + b + c \pm 2\sqrt{(ab) + (bc) + (ad)} \\ d &= (-1) + 2 + 2 \pm 2\sqrt{(-1)(2) + (2)(2) + (-1)(2)} \\ d &= 3 \pm 2\sqrt{0}, \end{aligned}$$

por lo que $d = 3$. Así, $r = \frac{1}{3}$, que es el radio del siguiente círculo tangente. El siguiente será de $\frac{1}{6}$ (círculo azul), Obsérvese la Figura 2.3.

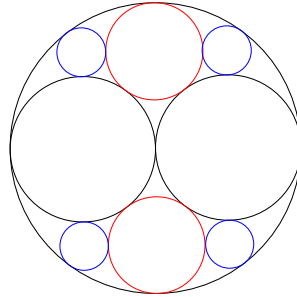


Figura 2.3: Ejemplo de tamiz de Apolonio

Aplicando el proceso infinitamente se obtienen los siguientes ejemplos de tamiz de Apolonio. Obsérvese la Figura 2.4.

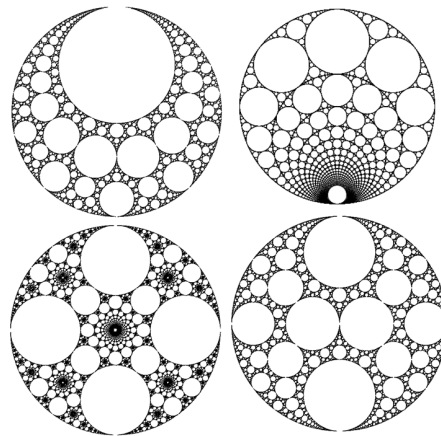


Figura 2.4: Ejemplos de tamiz de Apolonio

Ejemplo 2.2 Método de Newton. Isaac Newton (1643-1727) fue un físico, filósofo, teólogo, inventor, alquimista y matemático inglés. En 1669, trabajó en la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$, donde buscaba raíces reales por medio de aproximaciones, véase [11] . Empezó con la aproximación $x_0 = 2$ a una raíz real p , Newton escribió $x = 2 + p$, que le permitió obtener la ecuación polinómica:

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$$

2. Preliminares

así, $p = \frac{1}{10}$. Después introdujo el término $p = \frac{1}{10} + q$, y obtuvo la siguiente ecuación polinómica:

$$q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0.$$

Nuevamente, se obtiene el valor $q = -0,0054$, que es el siguiente valor próximo a la raíz. Obsérvese que la relación $10p - 1 = 0$ y $11,23q + 0,061 = 0$ dada anteriormente corresponde a lo siguiente:

$$p = x_1 - x_0 = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}$$

y también

$$q = x_2 - x_1 = \frac{-f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

En 1690, Joseph Raphson (1648-1715) culminó el cálculo de polinomios sucesivos, usando la derivada. Así, el proceso iterativo de Newton-Raphson es:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (2.2)$$

La representación geométrica de este método es la siguiente. Tómesese un valor inicial x_n ; se calcula la recta tangente en el punto $f(x_n)$, la cual interseca el eje real en un punto x_{n+1} , al prolongarse dicha recta. Se realiza el mismo procedimiento en el punto x_{n+1} . Obsérvese la Figura 2.5.

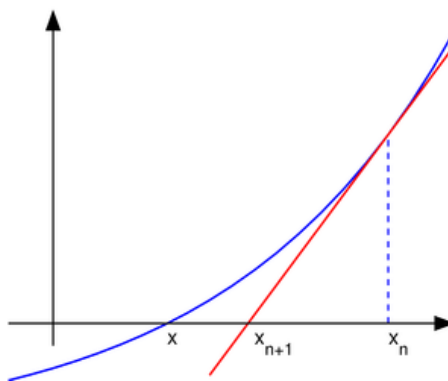


Figura 2.5: Método de Newton forma geométrica

Por el método de las secantes se tiene que, por un lado, θ_{n+1} es igual a $\frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$. Por otro lado, es igual a la derivada de f en x_n . Así, se obtiene la ecuación de una forma más sencilla.



Mano dibujando (1958)

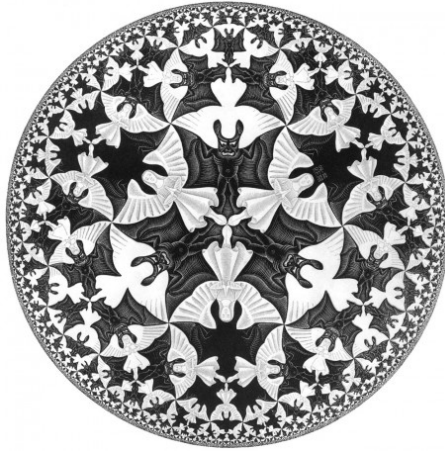


Reptiles (1943)

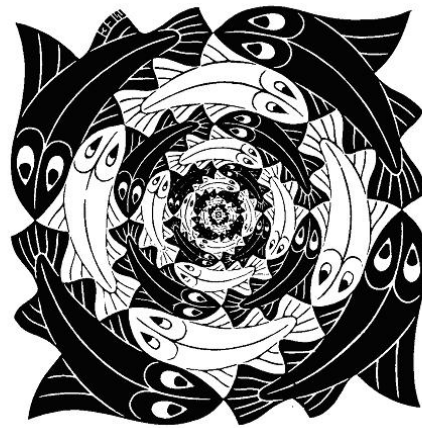
Figura 2.6: Obras de M.C Escher

Ejemplo 2.3 Obras de M.C. Escher. Maurits Cornelis Escher, mejor conocido como M.C Escher (1898-1972), es un ejemplo interesante, ya que él no era matemático sino un artista, de origen neerlandés. De hecho, es uno de los artistas más conocidos en el mundo, como se puede apreciar en los miles de sitios web. En su obra *Mano dibujando*, se observa la mano dibujándose a sí misma, y en *Reptiles*, se observa a los reptiles escapar del espacio bidimensional y moverse al espacio tridimensional, luego, dar vuelta y regresar al plano bidimensional. Obsérvese la Figura 2.6.

En su trabajo se puede apreciar el uso impresionante que da a la iteración, donde logra plasmar la idea de infinito, como en *Ángeles y demonios*, también denominado *Límite circular IV* y en *Viñeta de peces*, donde Escher logra plasmar la idea de infinito. Obsérvese la Figura 2.7.



Límite circular IV (1960)



Viñeta de peces (1956)

Figura 2.7: Obras de M.C Escher

Ejemplo 2.4 Por sustitución. Sea $f(x) = x + 5$ y se propone un valor inicial $x = 2$, ahora se procede a iterar la función de la siguiente forma:

1. $f(2) = 2 + 5 = 7$, a esto lo denominamos primera iteración. Después, se vuelve a evaluar la función en este valor.
 2. $f(7) = 7 + 5 = 12$ es la segunda iteración, después volvemos a evaluar en 12;
 3. $f(12) = 12 + 5 = 17$ es la tercera iteración
- ⋮

y así sucesivamente.

Las imágenes de las Figuras 2.6 y 2.7 fueron tomadas del sitio web:
<http://www.mcescher.com>.

2.2. Iteración a partir de reglas simples

En esta sección se muestran ejemplos de cómo construir objetos interesantes a partir de reglas de iteración.

Ejemplo 2.5 Iteración-árbol. Regla: tómesse una recta vertical, luego divida esta recta a la mitad y las rectas resultantes colóquelas en la parte superior, donde el ángulo entre estas dos rectas sea de 45 grados. Luego, aplique el proceso iterativo de esta regla. Obsérvese la Figura 2.8.

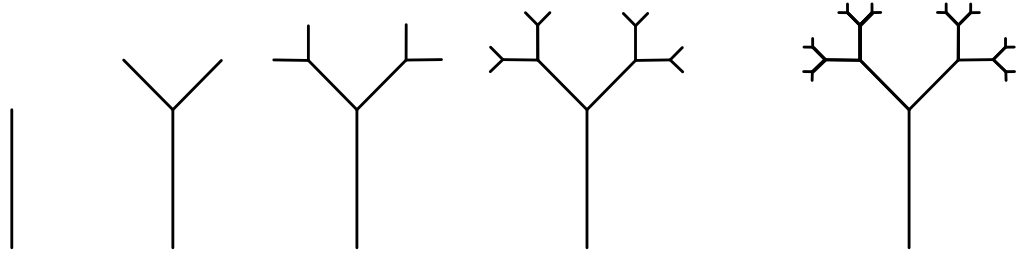


Figura 2.8: Iteración-árbol

Aplicando esta idea en una computadora, se obtienen objetos como en la Figura 2.9.

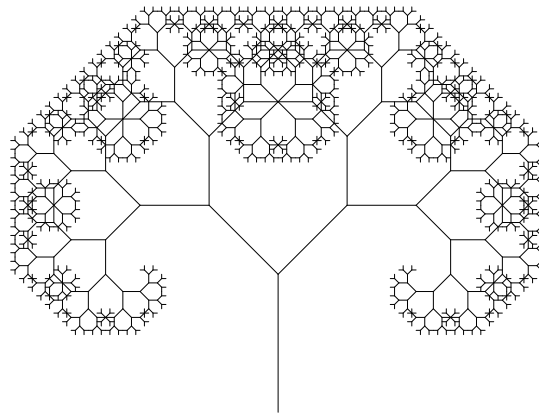


Figura 2.9: Iteración-árbol en la computadora

Ejemplo 2.6 Iteración-árbol de Pitágoras. Regla: tómesse un cuadrado y dibújese, sobre su lado superior un triángulo rectángulo; después, sobre cada uno de los catetos del triángulo, dibuje nuevamente un cuadrado. Aplique el proceso iterativo. Obsérvese la Figura 2.10.

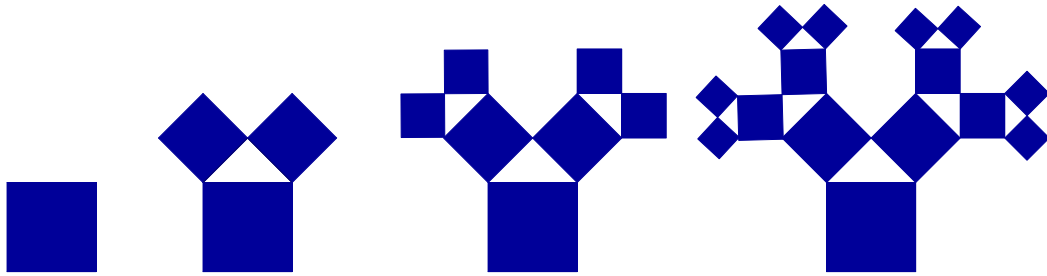


Figura 2.10: Iteración-árbol de Pitágoras

Nuevamente, variando un poco la regla y agregando colores, se obtiene el objeto de la Figura 2.11.

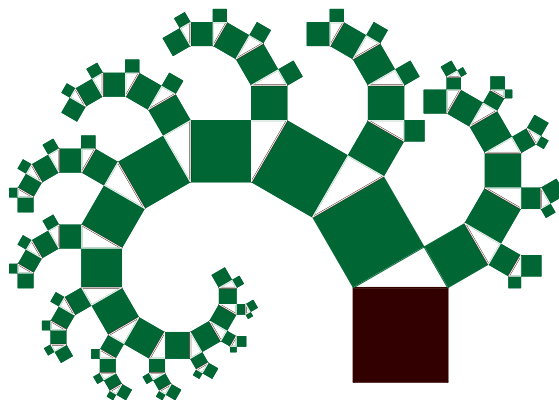


Figura 2.11: En la computadora

2.3. Museo de arte matemático

A continuación se muestran ejemplos clásicos de iteración en las matemáticas, también conocidos en su momento como “monstruos matemáticos”; sin embargo, se desarrollan por reglas sumamente simples. Para un mayor análisis de éstos, se puede consultar [13], [32] y [33].

Ejemplo 2.9 Curva de Koch. Sea un triángulo equilátero, cuyos lados tienen longitud 1. Divida cada lado en tres partes iguales y quite el segmento medio. Ahora, agregue dos segmentos del mismo tamaño formando un triángulo equilátero y quite la base como muestra la Figura 2.12. Ahora bien, esta nueva figura tiene 12 lados de longitud $\frac{1}{3}$, en la segunda iteración, se procede de la misma manera en cada lado de la figura. Si realiza este procedimiento a cada uno de los lados una infinidad de veces, obtiene la curva de Koch.

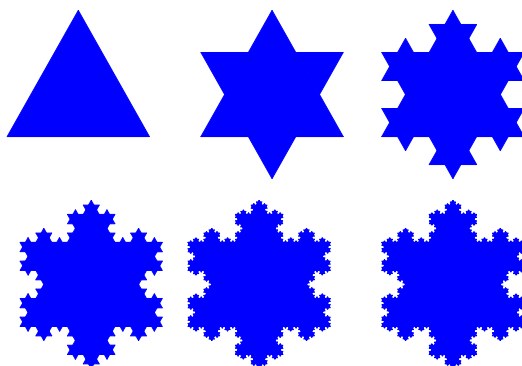


Figura 2.12: Conjunto de Niels Fabian Helge Von Koch

Observación 2.1 La curva de Koch tiene la propiedad de tener perímetro infinito, es decir, se obtiene una curva con longitud infinita contenida en un espacio finito; de hecho, el área de la curva de Koch, es 1,6 por ciento mayor que el triángulo original.

En efecto, sean N_0, N_1, N_2, \dots el número de lados, que se determinan de la siguiente

forma:

$$N_0 = 3$$

$$N_1 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$N_2 = 4 \cdot 12 = 4^2 \cdot 3 = 48$$

$$N_3 = 4 \cdot 48 = 4^3 \cdot 3 = 192$$

$$N_4 = 4 \cdot 192 = 4^4 \cdot 3 = 768$$

$$\vdots$$

$$N_k = 4 \cdot N_{k-1} = 4^k \cdot 3.$$

Los lados aumentan en cada iteración. Ahora bien, sea l_k la longitud de uno de los lados del perímetro del triángulo en la k -ésima iteración. Nótese que al iniciar, el triángulo tiene longitud 1; en la primera iteración tiene longitud $\frac{1}{3}$; después de la segunda iteración, se obtiene que cada lado tiene longitud $\frac{1}{3^2}$; en la tercera iteración, se tiene que cada lado tiene longitud $\frac{1}{3^3}$, etcétera. Así, en la k -ésima iteración se tiene que $l_k = \frac{1}{3^k}$.

Por último, sea p_k el perímetro de la figura en la k -ésima iteración. Se obtiene que

$$p_k = N_k \cdot l_k = (4^k \cdot 3) \cdot \frac{1}{3^k} = \left(\frac{4}{3}\right)^k \cdot 3.$$

Así, $p_k \rightarrow \infty$, cuando $k \rightarrow \infty$.

Ejemplo 2.10 Conjunto de Cantor. Sea el intervalo cerrado $[1, 0]$; divídalo en 3 subintervalos de igual longitud, $[0, 1/3]$, $(1/3, 2/3)$, $[2/3, 1]$ y quite el segmento de la mitad, es decir, quite el intervalo $(1/3, 2/3)$ (como en la curva de Koch). El conjunto queda determinado por los intervalos $[0, 1/3]$ y $[2/3, 1]$. Ahora bien, cada uno de estos intervalos divídalos nuevamente en tres partes iguales, y nuevamente quite la longitud de la mitad de cada intervalo. Si realiza este procedimiento una infinidad de veces, obtiene el conjunto de Cantor, como se muestra en la Figura 2.13.



Figura 2.13: Conjunto de Cantor

Ejemplo 2.11 Triángulo de Sierpinski. Sea un triángulo equilátero de lado unitario. Tome los puntos medios de cada lado y construya a partir de ellos un triángulo equilátero invertido de lado $\frac{1}{2}$ y quítelo. Ahora repeta el proceso con cada uno de los tres triángulos de lado $\frac{1}{2}$ que quedan. Así que quite nuevamente, pero ahora, tres triángulos invertidos de lado $\frac{1}{4}$. Si realiza este procedimiento una infinidad de veces, obtiene el triángulo de Sierpinski. Obsérvese la Figura 2.14.

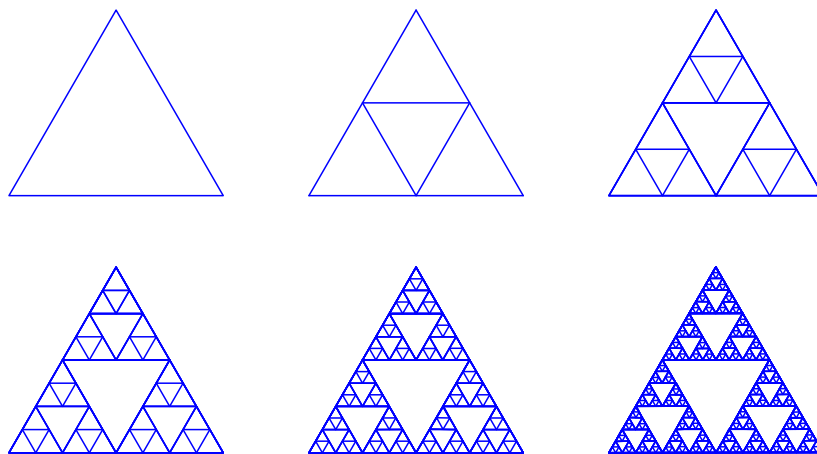


Figura 2.14: Triángulo de Sierpinski

Observación 2.2 El importante físico y radioastrónomo Nathan Cohen muestra cómo los objetos fractales han sido de gran ayuda en las comunicaciones inalámbricas

y cómo los objetos fractales han solucionado problemas electrónicos en los últimos 25 años, véase [22], donde se muestra que la única forma de obtener mayor señal es que la antena tenga la estructura de un objeto como el triángulo de Sierpinski. Obsérvese la Figura 2.15.

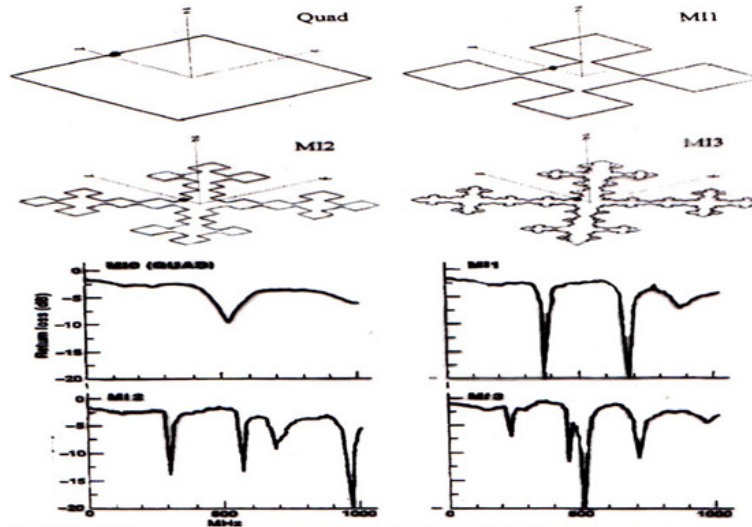


Figura 2.15: Antenas fractales

Ejemplo 2.12 Curva de Hilbert. Supóngase un cuadrado de lado unitario. Divídalo en cuatro partes iguales y una los centros de los cuatro cuadrados. Vuelva a dividir cada cuadrado en cuatro cuadrados idénticos, y una de nuevo los centros de todos los cuadrados mediante una sola curva, como se muestra en la Figura 2.16. Obsérvese como la curva serpentea comenzando en el cuadrado superior izquierdo y acabando en el cuadrado superior derecho. En la figura se alcanza hasta la tercera iteración. Si realiza este procedimiento una infinidad de veces, obtiene la curva de Hilbert.

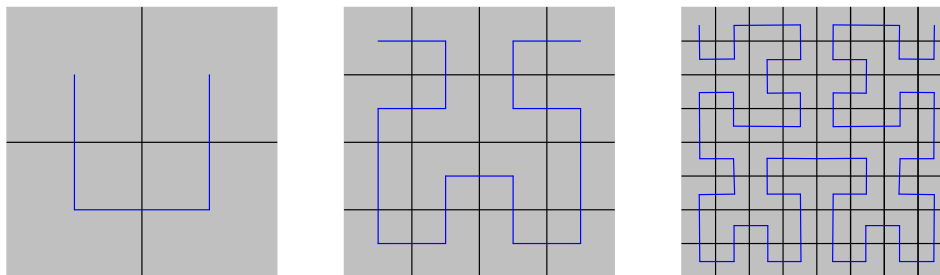


Figura 2.16: Curva de Hilbert

Observación 2.3 La curva de Hilbert tiene la propiedad de ser una curva continua que cubre todo el plano.

La imagen 2.15 fue tomada de [22].

2.4. Fractales en todas partes

Los objetos fractales fueron desarrollados e impulsados por el matemático polaco, nacionalizado francés y estadounidense, Benoit Mandelbrot, que en 1975 publicó su ensayo titulado: *Los objetos fractales: forma, azar y dimensión*. El concepto de fractal es un término acuñado por este matemático a partir del adjetivo en latín *fractus*. El verbo correspondiente es *frangere* que significa “romper en pedazos”. Además de “fragmentado”, *fractus* significa también “irregular”, coincidiendo ambos términos en “fragmentado”. El término es adecuado, ya que es favorable en la traducción a inglés o francés. Sin embargo, los matemáticos de aquella época no consideraban que esto fuera realmente matemáticas, sino sólo una imagen creada por una computadora. Así que, en respuesta, Mandelbrot (en 1977) publicó un segundo libro, llamado: *La geometría fractal de la naturaleza*, véase [26], donde definitivamente queda claro que los objetos

fractales son una nueva forma de describir el mundo que nos rodea.

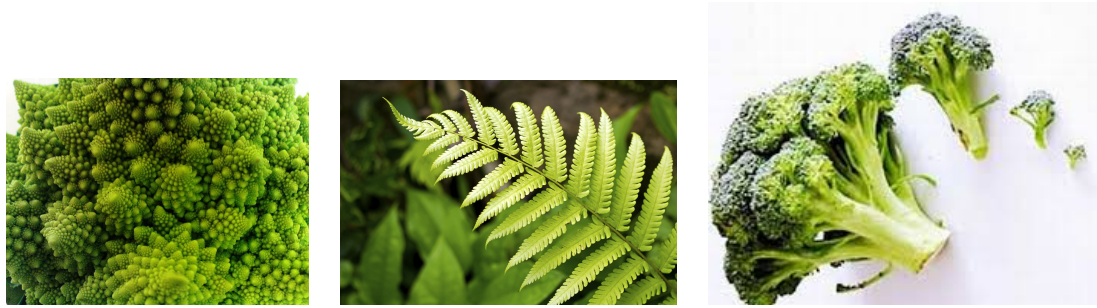
Como bien dice F. J. Dyson: “Fractal es una palabra acuñada por Mandelbrot para reunir bajo un solo nombre una gran familia de objetos que han tenido[...] un papel histórico[...] en el desarrollo de la matemática pura. Una gran revolución en las ideas separa la matemática clásica del siglo XIX de la matemática moderna del siglo XX. La matemática clásica está enraizada en las estructuras regulares de la geometría de Euclides y en la evolución continua de la dinámica de Newton” [26].

A pesar del uso de la palabra fractal, los objetos fractales carecen de una definición formal, ya que este tema es multidisciplinario, por lo que se define dependiendo del área en la que se esté trabajando. A continuación se propone la siguiente definición de objeto fractal:

Definición 2.1. *Un objeto se dice que es un objeto fractal si tiene, al menos, una de las siguientes propiedades.*

1. *Es autosimilar;*
2. *La geometría clásica no puede representarlo;*
3. *Es un objeto con longitud o complejidad infinita;*
4. *Tiene dimensión de Hausdorff-Besicovich (véase sección 6.1) mayor a su dimensión topológica.*

El problema de los objetos euclidianos se debe a que pierden su estructura al ser ampliados; un arco de circunferencia, al ampliar la figura, se va transformando en una recta; la superficie de una esfera, se va haciendo cada vez mas plana. Esto no sucede con los objetos fractales, es decir, no cambia su estructura sin importar qué tan lejos o cerca se esté observando. La totalidad del objeto fractal es igual a cualquiera de sus partes y éstas, a su vez, iguales a otras partes más pequeñas; es decir, el objeto fractal es autosimilar. Obsérvese la Figura 2.17.



(a) Romanesco

(b) Helecho

(c) Brócoli

Figura 2.17: Ejemplos de fractales autosimilares

Otros ejemplos de objetos fractales en la naturaleza, autosimilares, se observan en la Figura 2.18.



Figura 2.18: Fractales en la naturaleza

Como se puede observar en los ejemplos, la naturaleza tiene una estructura fractal. Muchas estructuras biológicas son tan irregulares que no se pueden modelar por los objetos Euclidianos. Esto es, el círculo, rectángulo, cuadrado, triángulo, etcétera, no son adecuados para respresentarlos. Esto se debe a la estructura ramificada de muchas partes dentro de la biología, como vasos sanguíneos, pulmones, corazón, sistema circulatorio, incluso, en los huesos.

Otro ejemplo importante es el del pintor japonés Katsushika Hokusai (1760-1849), donde se observan repeticiones en la espuma de la ola para crear esa perspectiva de la realidad. Obsérvese la Figura 2.19.



Figura 2.19: *La gran ola*

Las imágenes en las figuras 2.17, 2.18 y 2.19 fueron tomadas de los siguientes sitios web.

<http://pijamasurf.com/2010/09/top-11-patrones-fractales-en-la-naturaleza/>.

<http://pijamasurf.com/2010/09/top-11-patrones-fractales-en-la-naturaleza/>.

<https://commons.wikimedia.org>.

2.5. Dimensión de Hausdorff

Los objetos fractales poseen propiedades interesantes, además de la autosimilitud. De acuerdo a las observaciones anteriores, la curva de Koch tiene perímetro infinito, o la curva de Hilbert, que llena todo el plano, cumplen con la propiedad de ser autosimilares; sin embargo, estas propiedades hacen complicado clasificarlos. Por ello, el matemático Felix Hausdorff (1868-1942) mostró una forma de lograrlo, esto es, por medio de su *Dimensión Fractal*.

Por ejemplo, uno puede preguntarse: ¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña? Un artículo publicado por Benoit Mandelbrot nos muestra la idea siguiente, véase [28]. Al medir la costa, se realiza con una regla de cierta longitud; posteriormente, se

realiza la misma medición, pero con una regla de menor longitud; por último, se realiza nuevamente la medición con una regla aun más pequeña. Obsérvese la Figura 2.20.



Figura 2.20: Costa de gran Bretaña

Obsérvese que cuanto menor es la escala de medición, mayor es su longitud. Esto hace complicado medir con precisión la longitud de esta costa. Mandelbrot se dio cuenta que esta costa tiene características de un objeto fractal, por lo que midió algo más, su rugosidad. Para ello se debe replantear el concepto de dimensión.

En matemática se acostumbra a trabajar con las siguientes dimensiones:

1. Dimensión 1 \rightarrow La línea recta;
2. Dimensión 2 \rightarrow El plano;
3. Dimensión 3 \rightarrow El espacio.

Sea L una recta, se divide en 3 partes iguales de longitud l , por lo que, $\frac{L}{l} = 3$ y $N = 3$ que es el número de partes, así $(3)^{D_f} = 3$ y por tanto $D_f = 1$. Obsérvese la Figura 2.21.

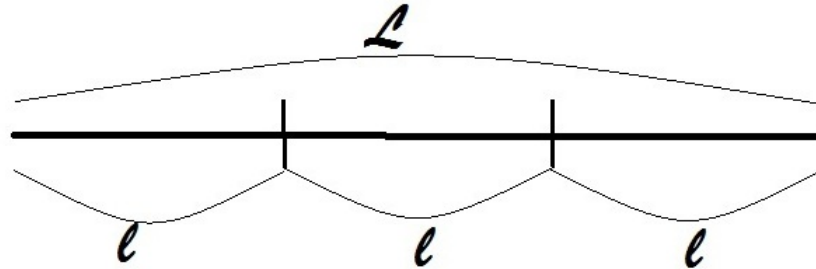


Figura 2.21: Segmento de recta

Ahora, tómesese un cuadrado dividido en 4 partes, por lo que uno de sus lados tiene longitud L y cada una de sus partes tiene longitud l , así $\frac{L}{l} = 2$, y $N = 4$, entonces $(2)^{D_f} = 4$ y por tanto $D_f = 2$. Obsérvese la Figura 2.22.

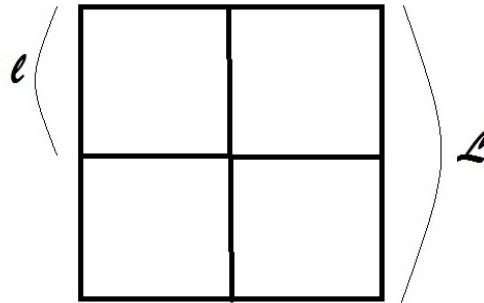


Figura 2.22: Cuadrado dividido

Ahora, se realiza el mismo procedimiento, pero con un cubo, así que este cubo estará dividido en 9 partes. Se sabe que la longitud de un lado es L y la longitud de cada una de sus partes es l , entonces $\frac{L}{l} = 3$ y $N = 27$, entonces $(3)^{D_f} = 27$ y por tanto $D_f = 3$. Obsérvese la Figura 2.23.

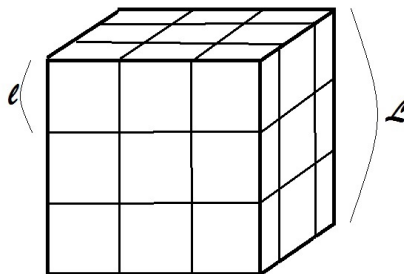


Figura 2.23: Cubo dividido

Por tanto, para los fractales se define la dimensión de Hausdorff-Besicovich como:

$$\left(\frac{L}{l}\right)^{D_f} = N, \quad (2.3)$$

despejando, nos queda que $D_f = \left(\frac{\ln(N)}{\ln(\frac{L}{l})}\right)$, que es la dimensión deseada, véase [26], [30], [21] y, principalmente, [38].

Así, podemos obtener la dimensión de los fractales mencionados en la sección anterior.

El conjunto de Cantor:

$$D_f = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} = 0,6309.$$

La curva de Koch:

$$D_f = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} = 1,26185.$$

El triángulo de Sierpinski:

$$D_f = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} = 1,58496.$$

La curva de Hilbert:

$$D_f = \frac{\ln(9)}{\ln(3)} = 2.$$

Obsérvese que la dimensión de Hausdorff en todos los ejemplos no es un número entero, excepto el cubo de Hilbert; esto sugiere que no todo objeto fractal tiene dimensión fraccional, pero si la mayoría de ellos.

La imagen en la Figura 2.20 fue tomada del sitio web: <http://pijamasurf.com/2010/09/top-11-patrones-fractales-en-la-naturaleza/>

Capítulo 3

Variable compleja

Este capítulo está dedicado a la presentación del conjunto de los números complejos, sus propiedades y su representación gráfica, además de su extensión, añadiendo el punto al infinito y su relación con la esfera de Riemann por medio de la *proyección estereográfica*. Posteriormente, se enuncia la definición de espacio métrico, el cual será la forma en la que se trabajará en los capítulos siguientes. Se enuncian las definiciones de funciones de variable compleja, funciones continuas, funciones analíticas, funciones holomorfas y la relación de estas dos últimas. Finalmente, se enuncia la definición de singularidad y su clasificación, que serán sumamente importantes para desarrollos posteriores. Véase [1], [8], y [9] como referencias a este capítulo.

Las gráficas presentadas en el capítulo se realizaron con el *software* libre de Geogebra.

3.1. Números complejos

Los números complejos nacen, realmente, a partir de la imposibilidad de solucionar una ecuación cúbica en el conjunto de los números reales, véase [29]. Pero ahora, como en la mayoría de los textos de números complejos, resulta más sencillo expresarlo como

3. Variable compleja

una ecuación cuadrática, es decir, $x^2 + 1 = 0$. Así, se “agranda” o se extiende el conjunto de los números reales, definiendo el conjunto de los números complejos de la siguiente forma.

Definición 3.1. *Sea \mathbb{C} un conjunto distinto del vacío. Este conjunto se llama Conjunto de los números complejos y se define como:*

$$\mathbb{C} := \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ donde } i^2 = -1\}.$$

En este conjunto se definen dos operaciones, suma y producto de la siguiente forma.

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, donde $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$, entonces

1. *Suma* $z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$

2. *Producto* $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$

Cada elemento de este conjunto se llama *número complejo* y es de la forma $a + ib$. La primera componente, a , se llama *parte real*; la segunda componente, b , se llama *parte imaginaria*. Se denotan por $\mathbf{Re}(z) = a$ y $\mathbf{Im}(z) = b$, respectivamente. Obsérvese que si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces el número complejo toma la forma ib y se denomina *número imaginario puro*. Si $a \neq 0$ y $b = 0$, entonces el número complejo toma la forma a , que es un número real, el cual es un caso particular de los números complejos; por lo que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Además, se realizan operaciones con i como cualquier otra literal, donde se reemplaza al final las potencias de i de la siguiente forma: $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$, etcétera. También, se dice que dos números complejos $a + ib$ y $c + id$ son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$. De esto se obtiene que $a + ib = 0$ si, y sólo si, $a = 0$ y $b = 0$.

Al igual que en los números reales, los números complejos son un campo; esto es, \mathbb{C} satisface las propiedades de campo.

Si z_1, z_2 y $z_3 \in \mathbb{C}$, entonces:

1. Ley de cerradura $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$ y $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$

3. Variable compleja

2. Ley conmutativa $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.
3. Ley asociativa $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.
4. Ley distributiva $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.
5. Existen $0 + i0$ y $1 + i0 \in \mathbb{C}$ tales que para cada número complejo z se tiene:
 $(0 + i0) + z = z$ y $(1 + i0) \cdot z = z$. ($(0 + i0)$ se llama *neutro aditivo* y $(1 + i0)$ se llama *neutro multiplicativo*).
6. Existen $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ tales que para cada número complejo z se tiene: $z + x_1 = 0 + i0$ y $z \cdot x_2 = 1 + i0$, con $z \neq 0$.

Observación 3.1 El cociente de dos números complejos es un número complejo.

En efecto, sea $x + iy = \frac{a+ib}{c+id}$, siempre que $c + id \neq 0$, $a + ib = (c + id) \cdot (x + iy)$.

Ahora bien, multiplicando y por lo que se mencionó de la igualdad de dos números complejos, se obtienen la siguientes ecuaciones:

$$a = cx - dy \quad y \quad b = dx + cy. \quad (3.1)$$

Por regla de Cramer se tiene que,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & -d \\ b & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \quad y \quad y = \frac{\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}} = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2},$$

por lo tanto:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Una manera más sencilla de obtener el resultado es, simplemente, multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, es decir,

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{a + ib}{c + id} \cdot \frac{c - id}{c - id} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}, \quad c + id \neq 0.$$

Ejemplo 3.1 Representar $\frac{3+4i}{1+3i}$ de la forma $x + iy$.

$$\frac{3+4i}{1+3i} = \frac{3+4i}{1+3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{(1+4i)(1-3i)}{1^2+3^2} = \frac{(1+12)+i(4-3)}{10} = \frac{13+i}{10} = \frac{13}{10} + i\frac{1}{10}.$$

Por tanto, $\frac{3+4i}{1+3i} = \frac{13}{10} + i\frac{1}{10}$.

Ahora, se enuncia la definicion de un número interesante en este conjunto, y que será de gran ayuda para operaciones algebraicas posteriores.

Definición 3.2. Sea $z \in \mathbb{C}$, con $z = a + ib$, se define el número conjugado de z como $\bar{z} = a - ib$.

Observación 3.2 $z \in \mathbb{C}$ es un número real si y sólo si $z = \bar{z}$.

En efecto, supóngase que z es un número real. Sea $z = a + ib$, entonces $b = 0$, es decir, $z = a + i0$. Además, $0 = -0$; así, $z = a - i0 = \bar{z}$, por lo tanto, $z = \bar{z}$.

Inversamente, sea $z = \bar{z}$, entonces $a + ib = a - ib$; así, $b = -b$, y el único número real con esta propiedad es el 0. Por lo tanto, $z = a + i0$, es decir, z es un número real.

Observación 3.3 Se satisface que $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |a + ib|^2$.

3.2. Representación geométrica de los números complejos

En la presente sección se muestra otra de las propiedades más importantes de los números complejos: la forma en la que se visualizará este conjunto de ahora en adelante. Sea $z \in \mathbb{C}$ un número complejo cualquiera y se escribe como $z = a + ib$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, a se ubica en el eje x llamado eje real, y b se ubica en el eje y , llamado eje imaginario. Por tanto, cada número complejo z se puede escribir como $(a, b) = a + ib$, es decir, como coordenadas en el plano complejo. Obsérvese la Figura 3.1.

3. Variable compleja

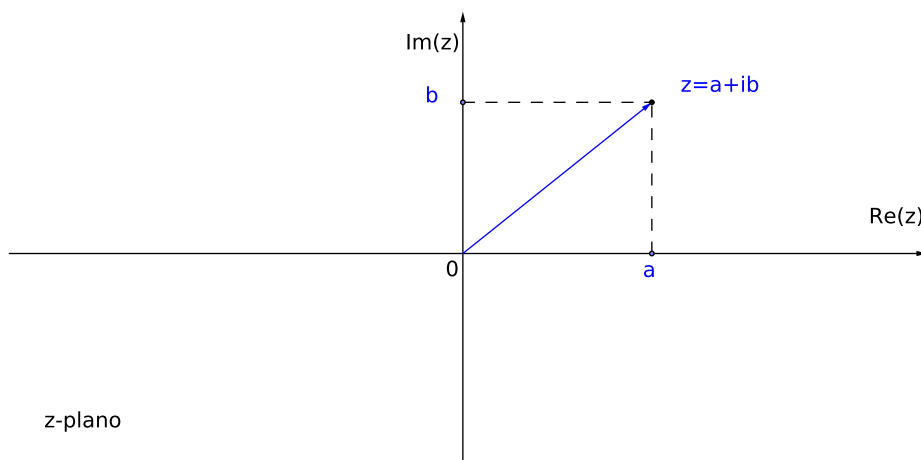


Figura 3.1: Plano complejo

Esta representación de los números complejos se llama: *Representación rectangular*. La suma de números complejos se realiza por la *ley del paralelogramo*, es decir, se traza el vector \overrightarrow{OA} , que corresponde al número complejo z ; se traza el vector \overrightarrow{OB} , que corresponde al número complejo w . La diagonal OC es la correspondiente suma de estos dos números complejos. Obsérvese la Figura 3.2.

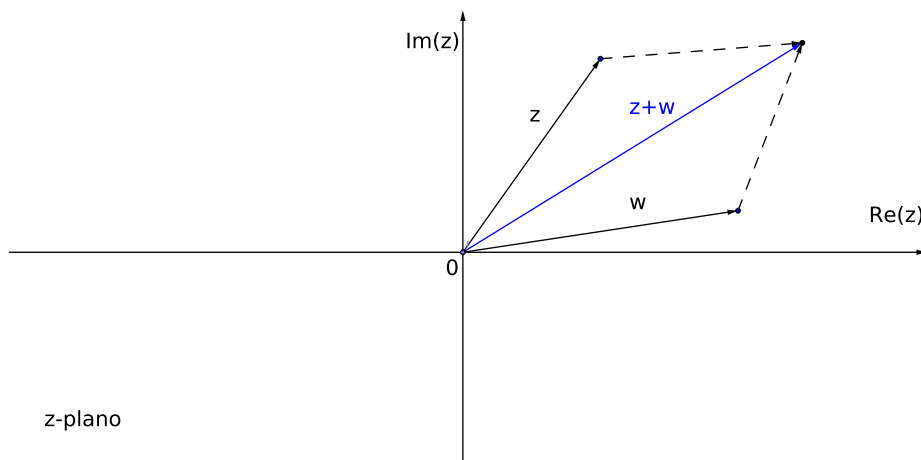


Figura 3.2: Suma de números complejos

Obsérvese que en el número conjugado sólo se cambia el signo de la parte imaginaria. En su representación gráfica, simplemente se coloca por debajo del eje real. Obsérvese la Figura 3.3.

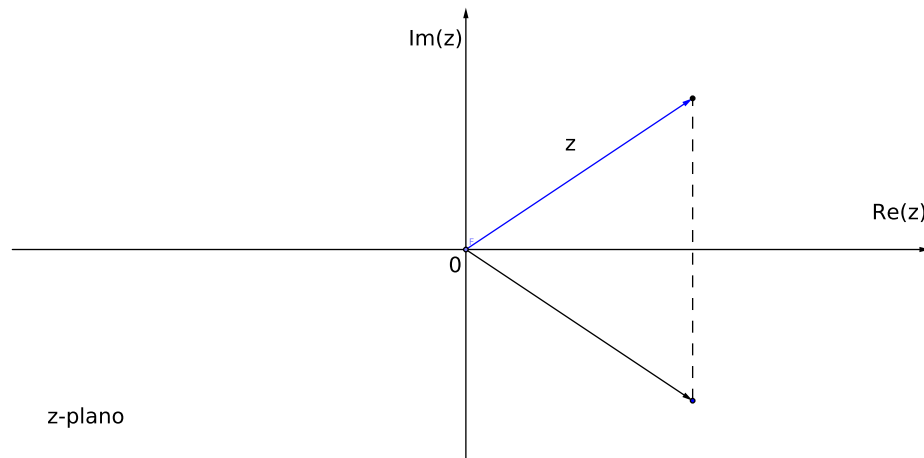


Figura 3.3: Representación gráfica de un número complejo conjugado

El producto y el cociente de dos números complejos puede realizarse en su representación rectangular por medio de construcciones geométricas especiales. Sin embargo, se puede realizar de una forma más sencilla, por ello, se propone la siguiente definición.

Definición 3.3. (*Representación polar*). Sea $z = (a, b) \neq (0, 0)$; se expresa a y b en su representación polar de la siguiente forma:

1. $a = r \cos \theta, \quad b = r \operatorname{sen} \theta.$

2. $r = \sqrt{a^2 + b^2}.$

3. $\tan \theta = \frac{b}{a}.$

La longitud r , que representa la distancia de (a, b) al origen, se llama *módulo* o *valor absoluto* del número complejo z , también se escribe como $r = |a + ib|$. Obsérvese la Figura 3.4

El ángulo θ es un argumento de $a + ib$, determinado salvo múltiplos de 2π . Se denota por $\operatorname{Arg}(z)$. Así, todo número complejo queda determinado en su forma polar como $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, con $0 < \theta < 2\pi$.

3. Variable compleja

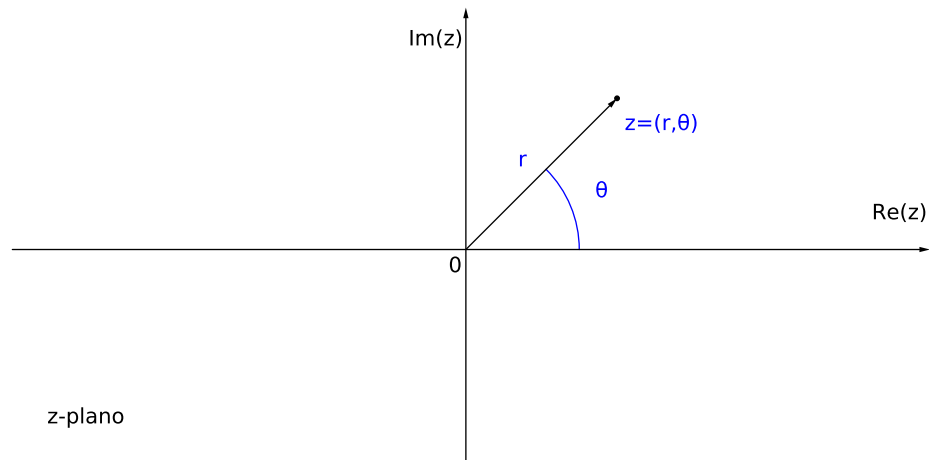


Figura 3.4: Representación polar

Ahora bien, el producto y el cociente de números complejos en su representación polar se hace de la siguiente forma:

Producto. $[r_1(\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1)][r_2(\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2)] = r_1r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2))$.

Cociente. $\frac{r_1(\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 - \theta_2))$.

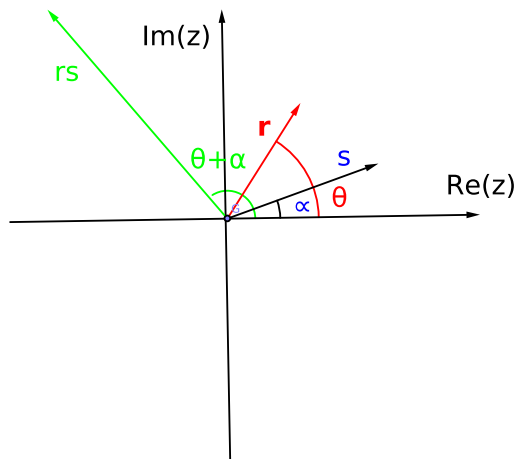


Figura 3.5: Representación gráfica de la multiplicación de dos números complejos

Observación 3.4 Los números complejos satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$ y $\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$.
2. $\overline{\frac{a}{b}} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$.
3. Las coordenadas cartesianas (a, b) de un punto del plano se expresan en términos de z y \bar{z} de la siguiente forma:

$$a = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{y} \quad b = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \quad (3.2)$$

4. $Re(z) < |z|$ y $Im(z) < |z|$.
5. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
6. $|z + w| \leq |z| + |w|$.
7. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

A continuación, se define el módulo de $|z - w|$, que representa la distancia entre dos números complejos en el plano. Además, esta definición se generalizará en la sección de espacio métrico de los números complejos. Obsérvese la Figura 3.6

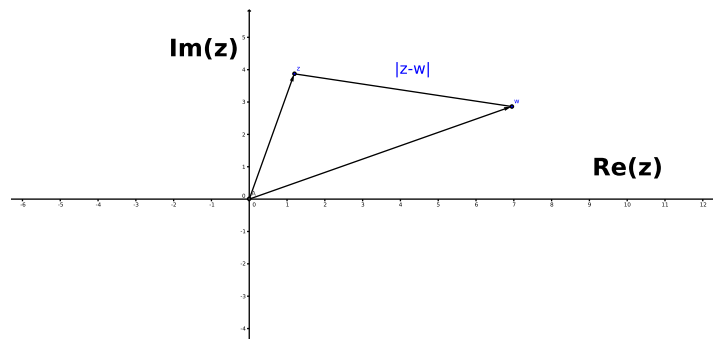


Figura 3.6: Distancia entre dos números complejos

Definición 3.4. El valor real $d(z - w) = |z - w|$, se llama distancia entre dos números complejos z y w .

3. Variable compleja

Para finalizar esta sección, se extiende la definición de la función exponencial, en el campo de los números complejos, de la siguiente forma:

$$e^{i\theta} = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta). \quad (3.3)$$

La ecuación 3.3 se conoce como *ecuación de Euler*.

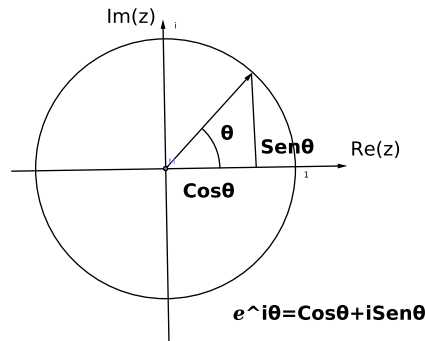


Figura 3.7: Fórmula de Euler

Combinando esta definición y la definición de un número complejo en su forma polar, se obtiene la siguiente definición.

Definición 3.5. *Todo número complejo se puede representar como:*

$$z = re^{i\theta}.$$

3.3. Espacio métrico de los números complejos

Ahora se definen las propiedades de cualquier colección de puntos en el plano complejo o la esfera de Riemann. Para un mayor análisis de estos conceptos se pueden consultar [17], [24] y [36].

Definición 3.6. *Un espacio métrico es un par (X, d) , donde X es un conjunto distinto del vacío y d es una función de $X \times X$ a \mathbb{R} , llamada métrica o función distancia en*

X , tal que satisfice las siguientes condiciones: para cada $x, y, z \in X$.

1. $d(x, y) \geq 0$.
2. $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Desigualdad del Triángulo).

Ahora bien, sean $z, w \in \mathbb{C}$. La distancia de z a w es $|z - w|$. Usando la notación de la sección anterior, tomando $z = a + ib$ y $w = c + id$, la distancia de z a w es:

$$|z - w| = |(a + ib) - (c + id)| = |(a - c) + i(b - d)| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

Obsérvese que si $X = \mathbb{C}$ y $d(z, w) = |z - w|$, se tiene que el par (\mathbb{C}, d) es un espacio métrico.

De lo anterior, si z es fijo y $\epsilon > 0$ se definen:

$$B_\epsilon(z) = \{w \in \mathbb{C} \mid d(z, w) < \epsilon\},$$

$$\overline{B_\epsilon(z)} = \{w \in \mathbb{C} \mid d(z, w) \leq \epsilon\},$$

donde $B_\epsilon(z)$ se llama *bola abierta* con centro en z y radio ϵ , y $\overline{B_\epsilon(z)}$ se llama *bola cerrada* con centro en z y radio ϵ .

Definición 3.7. Sea (\mathbb{C}, d) un espacio métrico y $U \subset \mathbb{C}$. Se dice que U es un conjunto abierto si para cada $z \in U$ existe $\epsilon > 0$, tal que $B_\epsilon(z) \subset U$. Se dice que U es un conjunto cerrado si su complemento es un conjunto abierto.

Las propiedades básicas de los conjuntos abiertos y cerrados son las siguientes:

Sea (\mathbb{C}, d) espacio métrico.

1. \emptyset, \mathbb{C} son conjuntos abiertos y cerrados.

2. La unión arbitraria de subconjuntos abiertos de \mathbb{C} es abierta.
3. La intersección finita de subconjuntos abiertos de \mathbb{C} es abierta.
4. La unión finita de subconjuntos cerrados de \mathbb{C} es cerrado.
5. La intersección arbitraria de subconjuntos cerrados de \mathbb{C} es cerrado.

Obsérvense las diferencias en las uniones arbitrarias o finitas de estos conjuntos, que se demuestran fácilmente, ya que uno es complemento del otro.

Definición 3.8. *Un espacio métrico (\mathbb{C}, d) se llama conexo si los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de \mathbb{C} son \emptyset y \mathbb{C} . Si $U \subset \mathbb{C}$, entonces U es un subconjunto conexo de X si el espacio métrico (U, d) es conexo.*

Definición 3.9. *Un conjunto que es abierto y conexo se llama región o dominio.*

3.4. Proyección estereográfica

En esta sección se presenta una de las ideas intuitivas más hermosas de las matemáticas, el concepto de *proyección estereográfica*, que es la correspondencia unívoca entre el *plano complejo extendido* y la *esfera de Riemann*. Así, como se ha extendido el conjunto de los números reales al conjunto de los números complejos, ahora, se desea extender este conjunto añadiendo un nuevo punto, el punto al infinito denotado por ∞ , por lo que el plano extendido se define como: $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y la esfera de Riemann como una superficie esférica $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ de radio arbitrario. Añadiendo el punto ∞ se realiza el siguiente convenio: Sean $a \in \mathbb{C}$ y $b \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.

1. $a + \infty = \infty + a = \infty \quad b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty$.
2. si $a \neq 0$, entonces $\frac{a}{0} = \infty$.
3. si $b \neq \infty$, entonces $\frac{b}{\infty} = 0$.

4. $|\infty| = +\infty$

No se pueden realizar las operaciones de $\infty + \infty$ y $\infty \cdot 0$ sin quebrantar las leyes de la aritmética, véase [1].

A continuación, se presenta la proyección estereográfica, donde la esfera de Riemann es la esfera unitaria, es decir, la esfera con centro en el origen y radio uno, véase [1] y [8]; además, se muestra un ejemplo de la esfera de Riemann tangente en el origen, centro en $(0, 0, \frac{1}{2})$ y radio $\frac{1}{2}$, véase [10] y [37].

Sea la esfera de Riemann Σ igual a la esfera unitaria, es decir,

$$\Sigma = \mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

y sea \mathbb{C} el plano complejo. El plano complejo corta la esfera de Riemann por el ecuador; el origen del plano es el centro de la esfera. Ahora bien, sea $N = (0, 0, 1)$, es decir, N es el polo norte de la esfera \mathbb{S}^2 . Se traza una recta desde el polo norte hacia un punto z en el plano complejo y ésta corta la esfera de Riemann en un único punto Z , distinto de N . Obsérvese la Figura 3.8.

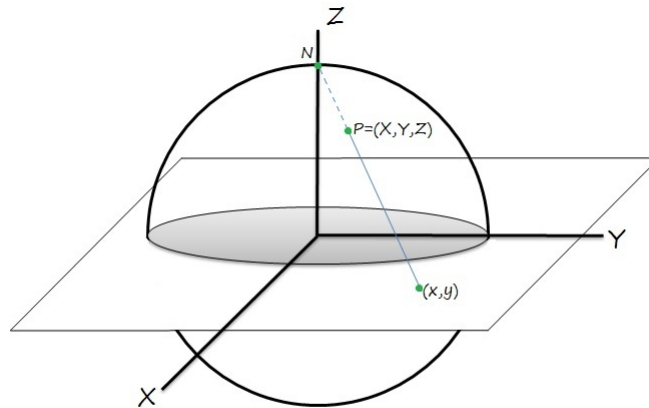


Figura 3.8: Proyección Estereográfica con centro en el origen

3. Variable compleja

Sea l la recta que pasa desde el polo norte hasta un punto z del plano complejo, esto es,

$$l(t) = \{N + t(z - N) : t \in \mathbb{R}\}. \quad (3.4)$$

La recta se desarrolla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &= \{tz + (1 - t)N : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{t(x, y, 0) + (1 - t)(0, 0, 1) : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{((1 - t)x, (1 - t)y, t) : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Se puede encontrar las coordenadas de Z , que es la intersección de la recta $l(t)$ y la esfera \mathbb{S}^2 . Si es valor t es el que se necesita, entonces debe cumplir lo siguiente:

$$(1 - t)^2 x^2 + (1 - t)^2 y^2 + t^2 = 1, \quad (3.5)$$

es decir, $(1 - t)^2 |z|^2 + t^2 = 1$

$$\begin{aligned} 1 - t^2 &= (1 - t)^2 |z|^2 \\ (1 - t)(1 + t) &= (1 - t)^2 |z|^2 \\ 1 + t &= (1 - t) |z|^2 = |z|^2 - t |z|^2 \\ t + t |z|^2 &= |z|^2 - 1 \\ t(1 + |z|^2) &= |z|^2 - 1 \\ t &= \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 - t)x = x \left(1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right) = x \left(\frac{|z|^2 + 1 - |z|^2 + 1}{|z|^2 + 1}\right) = \frac{z + \bar{z}}{2} \left(\frac{2}{|z|^2 + 1}\right) = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}; \\ x_2 &= (1 - t)y = y \left(1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right) = y \left(\frac{|z|^2 + 1 - |z|^2 + 1}{|z|^2 + 1}\right) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \left(\frac{2}{|z|^2 + 1}\right) = \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}; \\ x_3 &= \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}. \end{aligned}$$

La correspondencia $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ está definida por:

$$\pi(x, y, 0) = \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right). \quad (3.6)$$

3. Variable compleja

Por otro lado, si el punto Z es dado y estableciendo $t = x_3$; $l(t)$ es la ecuación de la recta que parte del polo norte hacia el punto Z , es decir,

$$l(t) = \{N + t(Z - N) : t \in \mathbb{R}\}, \quad (3.7)$$

la recta se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned} & \{tZ + (1 - t)N : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(tx_1, tx_2, tx_3) + (0, 0, (1 - t)) : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(tx_1, tx_2, tx_3 + (1 - t)) : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Si los puntos están en la esfera, se encuentra el valor de t , es decir,

$$\begin{aligned} tx_3 + (1 - t) &= 0 \\ 1 = t - tx_3 &= t(1 - x_3) \\ t &= \frac{1}{1 - x_3}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$x = tx_1 = \frac{x_1}{1 - x_3} \quad \text{y} \quad y = tx_2 = \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

La correspondencia $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ está definida por:

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0 \right). \quad (3.8)$$

Ahora se define la distancia entre puntos en el plano extendido de la siguiente forma: sean z_1 y z_2 puntos en el plano extendido, y sean Z y Z' los puntos correspondientes bajo la proyección estereográfica, éstos son $Z = (x_1, x_2, x_3)$ y $Z' = (y_1, y_2, y_3)$ en \mathbb{S}^2 , entonces la distancia euclidiana entre los puntos Z y Z' está dada por

$$d(Z, Z') = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Se denota $d(Z, Z')$ por $\chi_0(z_1, z_2)$, la distancia cordal entre los puntos z_1 y z_2 de la siguiente forma.

$$\chi_0(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} & \text{si } z_1, z_2 \in \mathbb{C}; \\ \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & \text{si } z_1 \in \mathbb{C}, z_2 = \infty; \\ 0 & \text{si } z_1 = z_2 = \infty. \end{cases}$$

Ejemplo 3.2 Moviendo la esfera, se obtiene la distancia cordal de una forma más simple. Sean $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$ la esfera de Riemann y \mathbb{C} el plano complejo.

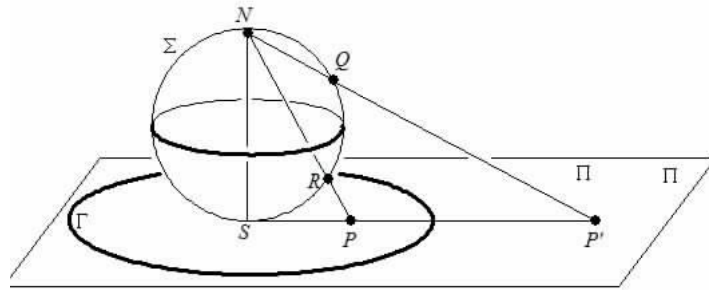


Figura 3.9: Proyección Estereográfica tangente en el origen

Sea

$$l(t) = \{z + t(N - z) : t \in \mathbb{R}\}, \quad (3.9)$$

esto es igual a

$$\begin{aligned} & \{tN + (1 - t)z : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{t(0, 0, 1) + (1 - t)(x, y, 0) : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x(1 - t), y(1 - t), t) : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Si estos puntos pertenecen a la esfera, entonces

$$(x(1 - t))^2 + (y(1 - t))^2 + (t - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}, \quad (3.10)$$

es decir,

$$\begin{aligned}
 x^2(1-t)^2 + y^2(1-t)^2 + t^2 - t + \frac{1}{4} &= \frac{1}{4} \\
 (1-t)^2|z|^2 &= -t^2 + t \\
 (1-t)^2|z|^2 &= t(1-t), \quad \text{con } t \neq 0 \\
 (1-t)|z|^2 &= t \\
 |z|^2 - |z|^2t &= t \\
 |z|^2 &= t + |z|^2t \\
 |z|^2t(1 + |z|^2) & \\
 t &= \frac{|z|^2}{1+|z|^2}.
 \end{aligned}$$

Substituyendo se tiene que

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x(1-t) = x\left(1 - \frac{|z|^2}{1+|z|^2}\right) = x\left(\frac{1+|z|^2-|z|^2}{1+|z|^2}\right) = x\left(\frac{1}{1+|z|^2}\right) = \frac{x}{1+|z|^2}; \\
 x_2 &= y(1-t) = y\left(1 - \frac{|z|^2}{1+|z|^2}\right) = y\left(\frac{1+|z|^2-|z|^2}{1+|z|^2} + |z|^2\right) = y\left(\frac{1}{1+|z|^2}\right) = \frac{y}{1+|z|^2}; \\
 x_3 &= t = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}.
 \end{aligned}$$

La correspondencia $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ está definida por:

$$\pi(x, y, 0) = \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right). \quad (3.11)$$

Por otro lado, si el punto Z es dado y distinto del polo norte, es decir, distinto de N ,

$$l(t) = \{N + t(Z - N) : t \in \mathbb{R}\}. \quad (3.12)$$

Esto es igual a

$$\begin{aligned}
 &\{tZ + (1-t)N : t \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{t(x_1, x_2, x_3) + (1-t)(0, 0, 1) : t \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{(tx_1, tx_2, tx_3 + (1-t)) : t \in \mathbb{R}\}.
 \end{aligned}$$

Para que $l(t)$ pertenezca a \mathbb{C} , debe ocurrir lo siguiente:

$$tx_3 + (1-t) = 0, \quad (3.13)$$

esto es, $1 = t - tx_3$, es decir,

3. Variable compleja

$$1 = t(1 - x_3)$$

$$t = \frac{1}{1-x_3},$$

por lo tanto,

$$x = tx_1 = \frac{1}{1-x_3}x_1 = \frac{x_1}{1-x_3}$$

$$y = tx_2 = \frac{1}{1-x_3}x_2 = \frac{x_2}{1-x_3}.$$

Así, la correspondencia $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$, está definida por:

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0 \right) = \frac{x_1 + ix_2}{1-x_3}. \quad (3.14)$$

La distancia entre dos puntos está definida por:

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - x_3)^2} \\ &= x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2 + x_3^2 - 2x_3y_3 + y_3^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1 + y_2 + y_3 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3). \end{aligned}$$

Obsérvese que $(x_3 - \frac{1}{2})^2 = x_3 - x_3 + \frac{1}{4}$.

$$\rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1 + y_2 + y_3 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + (x_3 - \frac{1}{4} - x_3 + \frac{1}{4}) + (y_3 - \frac{1}{4} - y_3 + \frac{1}{4})$$

$$\rightarrow x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \frac{1}{2})^2 + y_1 + y_2 + (y_3 - \frac{1}{2})^2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + (x_3 - \frac{1}{4} + y_3 - \frac{1}{4})$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + (x_3 - \frac{1}{4} + y_3 - \frac{1}{4}) - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$$

$$= x_3 + y_3 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$$

$$= \frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2} + \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2} - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$$

$$= \frac{|z_1|^2}{1+|z|^2} + \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2} - 2\left(\frac{z_1+\bar{z}_1}{2(1+|z_1|^2)} \cdot \frac{z_2+\bar{z}_2}{2(1+|z_2|^2)} + \frac{z_1+\bar{z}_1}{2i(1+|z_1|^2)} \cdot \frac{z_2+\bar{z}_2}{2i(1+|z_2|^2)} + \frac{|z_1|^2}{1+|z|^2} \cdot \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2}\right)$$

=

$$\frac{|z_1|^2+|z_1|^2|z_2|^2+|z_2|^2+|z_1|^2|z_1|^2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)} - \frac{-1}{2(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)} \left((z_1 + \bar{z}_1) - (z_1 + \bar{z}_1)(z_2 + \bar{z}_2) + 4|z_1|^2|z_2|^2 \right)$$

=

$$\frac{1}{2(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)} (2|z_1|^2 + 2|z_1|^2|z_2|^2 + 2|z_2|^2 + 2|z_1|^2|z_2|^2 - (z_1 + \bar{z}_1) + (z_1 + \bar{z}_1)(z_2 + \bar{z}_2) - 4|z_1|^2|z_2|^2)$$

$$= \frac{1}{2(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)} (2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 - z_1z_2 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 - \bar{z}_1\bar{z}_2 + z_1z_2 + z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + \bar{z}_1\bar{z}_2)$$

$$= \frac{1}{2(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)} (2|z_1 - z_2|^2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}.$$

La distancia entre puntos en el plano extendido está definida de la siguiente forma:

Sean z_1 y z_2 puntos en el plano extendido, y sean Z y Z' los puntos correspondientes bajo la proyección estereográfica, estos puntos son $Z = (x_1, x_2, x_3)$ y $Z' = (y_1, y_2, y_3)$ en \mathbb{S}^2 , entonces la distancia Euclidiana entre los puntos Z y Z' está dada por

$$d(z, z') = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Ahora bien, se denota $d(Z, Z')$ por $\chi(z_1, z_2)$, la distancia cordal de la siguiente forma.

$$\chi(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}} & \text{si } z_1, z_2 \in \mathbb{C}; \\ \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}} & \text{si } z_1 \in \mathbb{C}, z_2 = \infty; \\ 0 & \text{si } z_1 = z_2 = \infty. \end{cases}$$

Las imágenes de las Figuras 3.8 y 3.9 fueron tomadas de:

<https://varepsilon.files.wordpress.com/2013/02/ps1.jpg>.

https://unavistacircular.files.wordpress.com/2013/12/dwhenderson_stereographic.jpg.

3.5. Función de variable compleja

Las funciones en variable compleja están dadas por $U \subset \mathbb{C}$, donde U es un dominio, y para cada $z \in U$ se asigna un único número complejo $w = f(z)$. El conjunto imagen de U por f es el subconjunto de \mathbb{C} , $f(U) = \{w : w = f(z), z \in U\}$. La función f se escribe como $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, donde $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones en \mathbb{R}^2 con entradas $x, y \in \mathbb{R}$. La primera componente, $u(x, y)$, se llama parte real de la función $f(z)$; la segunda componente, $v(x, y)$, se llama parte imaginaria de la función $f(z)$. Se denotan por $\mathbf{Re}(f(z)) = u(x, y)$ y $\mathbf{Im}(f(z)) = v(x, y)$, respectivamente. Por lo que, cada punto del dominio de la función en el plano Z , es enviado a un único punto del plano W . A continuación, se estudian de forma analítica y geométrica, dos ejemplos

de funciones en variable compleja.

Ejemplo 3.3 Aplicación cuadrática. Sea $w = z^2$, donde $w = u + iv$ y $z = x + iy$. Sustituyendo z en la función tenemos: $w = (x + iy)^2 = (x + iy)(x + iy) = (x^2 - y^2) + 2ixy$, entonces

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= x^2 - y^2 \\ v(x, y) &= 2xy \end{aligned} \right\}$$

Es decir, $u(x, y) = x^2 - y^2$ es la parte real de la función, mientras que $v(x, y) = 2xy$ es la parte imaginaria de la función.

Ahora bien, tómesese la línea vertical $x = c$, veamos que sucede al aplicar la función a cada punto de esta línea.

$$\left. \begin{aligned} u(c, y) &= c^2 - y^2 \\ v(c, y) &= 2cy \end{aligned} \right\}$$

Despejando y de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera ecuación tenemos:

$$y = \frac{v}{2c} \Rightarrow u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2} \Rightarrow v^2 = 4c^2 - 4c^2u.$$

Así, $v^2 = 4c^2 - 4c^2u$ describe una parábola. Si $v = 0$, entonces

$$0 = 4c^2 - 4c^2u \Rightarrow u = c^2,$$

por lo tanto, la línea $x = c$ es enviada a la parábola con vértice $u = c^2$. En esta posición, la parábola abre hacia la izquierda. Obsérvese la Figura 3.10.

Ahora, tomemos la línea horizontal $y = k$ y veamos a donde es enviada bajo la función $w = z^2$. Así, la parte real e imaginaria son:

$$\left. \begin{aligned} u(x, k) &= x^2 - k^2 \\ v(x, k) &= 2xk \end{aligned} \right\}$$

3. Variable compleja

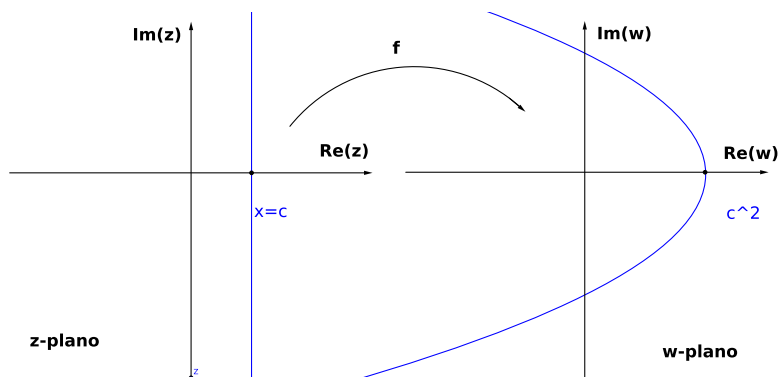


Figura 3.10: Aplicación de $f(z) = z^2$ sobre la línea vertical $x = c$

Despejando x en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera tenemos:

$$u = \frac{v^2}{4k^2} - k^2 \Rightarrow \frac{v^2}{4k^2} = u + k^2 \Rightarrow v^2 = 4k^4 + 4k^2u.$$

También, $v^2 = 4k^4 + 4k^2u$ describe una parábola. si $v = 0$, entonces

$$0 = 4k^4 + 4k^2u \Rightarrow u = -\frac{4k^4}{4k^2} = -k^2,$$

por lo tanto, la línea $y = k$ es enviada a la parábola con vértice en $-k^2$. En esta posición, la parábola abre hacia la derecha. Obsérvese la Figura 3.11

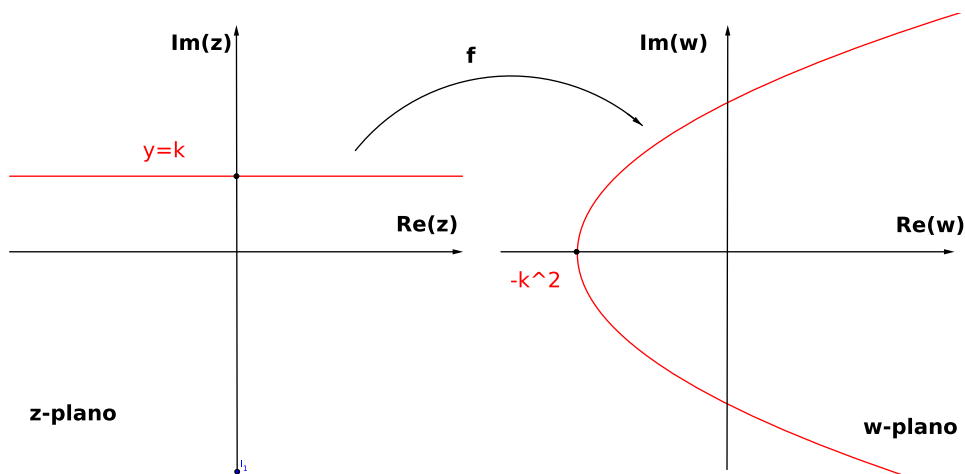


Figura 3.11: Aplicación de $f(z) = z^2$ sobre la línea horizontal $y = k$

3. Variable compleja

Ejemplo 3.4 Aplicacion exponencial. Sea $w = e^z$ donde $z = x + iy$ y $w = u + iv$. Sustituyendo en la función $z = x + iy$ tenemos: $e^z = e^{x+iy} = e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$. Así

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= e^x \cos y \\ v(x, y) &= e^x \operatorname{sen} y \end{aligned} \right\}$$

Es decir, $u(x, y) = e^x \cos y$ es la parte real de la función, mientras que $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ es la parte imaginaria de la función.

Tomemos la línea vertical $x = c$ y veamos a donde es enviada bajo $w = e^z$

$$\left. \begin{aligned} u(c, y) &= e^c \cos y \\ v(c, y) &= e^c \operatorname{sen} y \end{aligned} \right\}$$

Como u y v son funciones que representan un punto en el plano W , son ecuaciones paramétricas con parámetro y , por lo que se obtiene una circunferencia de radio e^c . En efecto, elevando al cuadrado cada elemento de las ecuaciones, despejando y sumándolas, se obtiene el resultado, es decir,

$$\left(\frac{u}{e^c}\right)^2 = \cos^2 y \quad \text{y} \quad \left(\frac{v}{e^c}\right)^2 = \operatorname{sen}^2 y \Rightarrow \frac{u^2}{e^{2c}} + \frac{v^2}{e^{2c}} = 1 \Rightarrow u^2 + v^2 = (e^c)^2.$$

por lo tanto, la línea $x = c$ es enviada a un círculo de radio e^c . Obsérvese la Figura 3.12.

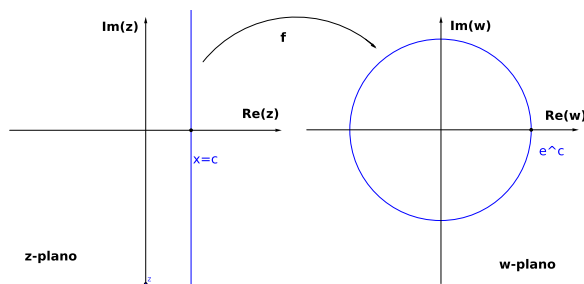


Figura 3.12: Aplicación de $g(z) = e^z$ sobre la línea vertical $x = c$

Ahora, tomemos la línea horizontal $y = k$. Veamos a donde es enviada bajo $w = e^z$.

$$\left. \begin{aligned} u(x, k) &= e^x \cos k \\ v(x, k) &= e^x \sen k \end{aligned} \right\}$$

Como u y v son funciones que representan un punto en el plano W , son ecuaciones paramétricas con parámetro x , por lo que se obtiene una recta que pasa por el origen y tiene pendiente $\tan(k)$. Obsérvese la Figura 3.13. En efecto, despejando se obtiene el resultado, es decir,

$$\frac{v}{u} = \frac{e^x \sen k}{e^x \cos k} \Rightarrow v = \tan(k) \cdot u.$$

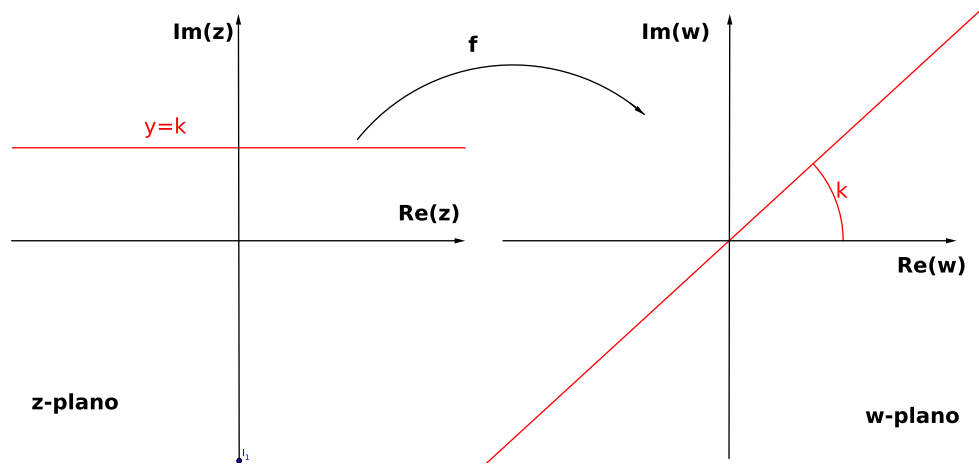
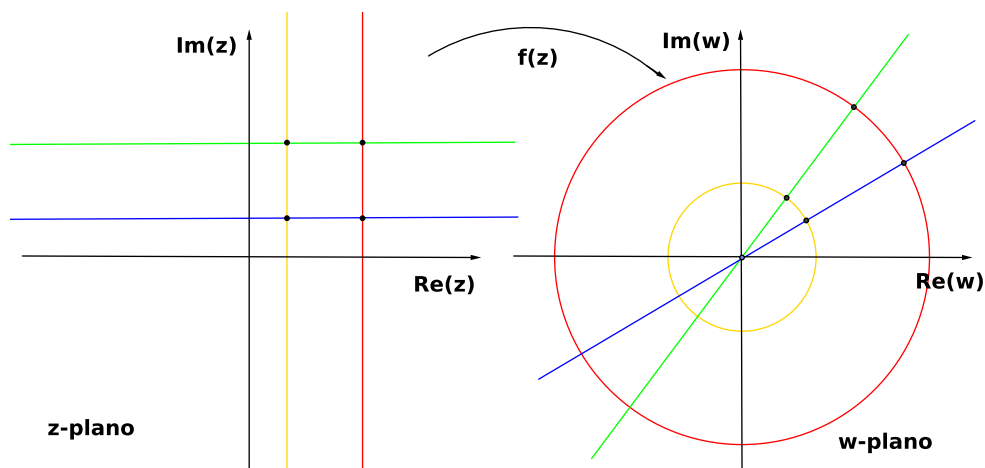


Figura 3.13: Aplicación de $g(z) = e^z$ sobre la línea horizontal $y = k$

Observación 3.5 Dibujando en el plano z un cuadrado de vértices (a, c) , (b, c) , (b, d) y (a, d) , como se muestra en la Figura 3.14, se obtiene la correspondencia; dos círculos de radio e^a y radio e^b ; dos rectas que pasan por el origen y tienen pendiente $\tan(c)$ y $\tan(d)$.

Definición 3.10. Un conjunto U se dice invariante hacia adelante bajo la función f si y sólo si $f(U) = U$. Un conjunto U se dice invariante hacia atrás bajo la función f si, y sólo si $f^{-1}(U) = U$. Un conjunto U es llamado completamente invariante si es invariante hacia adelante y hacia atrás.

Figura 3.14: Aplicación de e^z sobre una región

Ejemplo 3.5 Para $f(z) = z^2$, el conjunto $\{z \mid |z| \leq 0\}$ es un conjunto totalmente invariante. El conjunto $\{z \mid |z| > 0\}$ también es totalmente invariante.

3.6. Límite y Continuidad

El concepto de límite y continuidad para funciones de variable compleja es similar a la definición en \mathbb{R}^2 . Por lo que se acepta la siguiente definición.

Definición 3.11. Sea $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja y z_0 punto de acumulación de U . Se dice que f tiene un límite $L \in \mathbb{C}$ cuando $z \rightarrow z_0$, y se escribe como:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$$

si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ con la propiedad que

$$|f(z) - L| < \epsilon \quad \text{para todos los valores } z \text{ tal que } 0 < |z - z_0| < \delta \text{ y } z_0 \neq z.$$

También, se puede escribir como $f(z) \rightarrow L$ cuando $z \rightarrow z_0$ y se dice que $f(z)$ converge a L cuando z converge a z_0 .

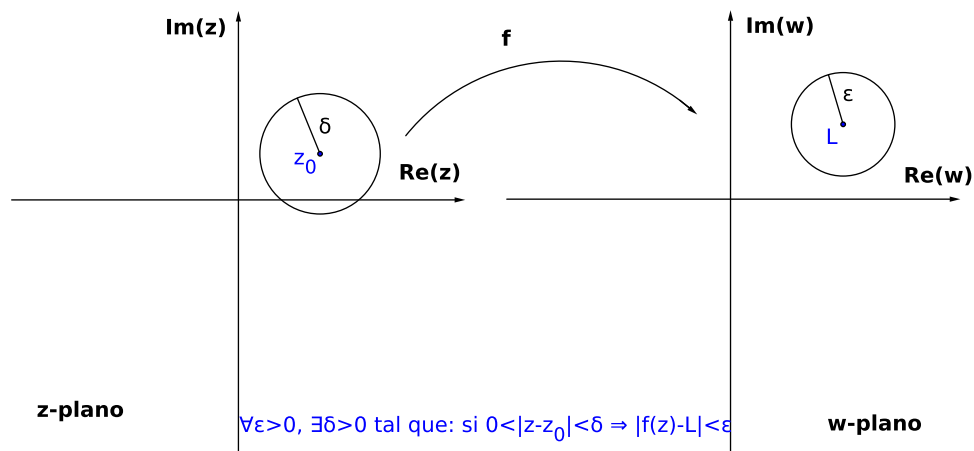


Figura 3.15: Representación de límite en el plano complejo

Los límites de variable compleja satisfacen las propiedades de valores en el plano \mathbb{R}^2 , es decir,

1. Si el límite existe, entonces éste es único.
2. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ si y sólo si $\lim_{z \rightarrow z_0} \mathbf{Re} f(z) = \mathbf{Re} L$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} \mathbf{Im} f(z) = \mathbf{Im} L$.

De igual manera que en los número reales, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.1. Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = M$, entonces

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = L + M$.
2. $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = L \cdot M$.
3. $\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) = \frac{L}{M}$. siempre que $M \neq 0$.

Definición 3.12. Sean $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja. Se dice que f es continua en $z_0 \in U$ si y sólo si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Si f es continua en cada punto $z_0 \in U$, se dice que f es continua en U .

3.7. Funciones holomorfas

Definición 3.13. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. La función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es diferenciable (en el sentido complejo) en $z_0 \in U$ si:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ existe.}$$

El límite se denota por $f'(z_0)$, en algunas ocasiones por $\frac{df}{dz}(z_0)$.

De igual manera que en \mathbb{R}^2 , se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si f es derivable en $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces f es continua en z_0 .
2. Si f y g son derivables en $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces
 - a) $f + g$ es diferenciable en z_0 y $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.
 - b) $f \cdot g$ es diferenciable en z_0 y $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.
 - c) si $f(z_0) \neq 0$, $\frac{1}{f(z_0)}$ es diferenciable en z_0 , entonces $\left(\frac{1}{f(z_0)}\right)' = -\left(\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2}\right)$.
3. Regla de la Cadena. Sean $f : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ y $g : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$, con $f(U_1) \subset U_2$. Si f es diferenciable en z_0 y g es diferenciable en $f(z_0)$, entonces $(g \circ f)$ es diferenciable en z_0 y $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$.

Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en un punto $z_0 \in U$, entonces f es continua en z_0 .

En efecto, tomemos el siguiente límite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = \left[\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] [\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)] = [f'(z_0)(0)] = 0.$$

Por tanto, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Definición 3.14. Una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que f es holomorfa en U si f es compleja-diferenciable para cada $z \in U$.

Teorema 3.2. *Sea U un conjunto abierto en \mathbb{C} y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces, si $f(z) = \operatorname{Re}(f(z)) + i\operatorname{Im}(f(z)) = u(x, y) + iv(x, y)$, se satisface que*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.15)$$

Las ecuaciones en 3.15 se denominan Ecuaciones de Cauchy Riemann.

La suficiencia se demuestra con el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *Sean U un conjunto abierto en \mathbb{C} y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. La función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa en U si las cuatro derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ existen, son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en cada punto de U .*

3.8. Funciones analíticas

Dada una sucesión de funciones

$\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots\}$ *definidas en un dominio común $U \subset \mathbb{C}$, la idea consiste en sumar todos los elementos de la sucesión de la siguiente forma:*

Primera suma $S_1 = f_1$,

Segunda suma $S_2 = S_1 + f_2 = f_1 + f_2$,

Tercera suma $S_3 = S_2 + f_3 = f_1 + f_2 + f_3$,

⋮

n -ésima suma $S_N = S_{n-1} + f_n = f_1 + f_2 + \dots + f_N$.

Este procedimiento continua sin terminar, por lo que se obtiene una nueva sucesión $\{S_N\}$, que representa la suma de los primeros N -términos de la sucesión $\{f_n\}$.

La sucesión S_1, S_2, \dots, S_N se denota como: $f_1 + f_2 + \dots + f_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, llamada Serie de funciones. Lo interesante es saber si esta sucesión converge o no, por lo que se presenta la siguiente definición.

3. Variable compleja

Definición 3.15. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definida en un dominio común $U \subset \mathbb{C}$. Si $\{S_N\}_{N=0}^{\infty}$ converge en un punto $z \in U$, entonces se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge en z y se denota como $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(z) = S(z)$, donde $S(z)$ es su suma. En caso contrario, se dice que la serie diverge. Además, si $\{S_N\}_{N=0}^{\infty}$ converge para cada $z \in U$, se dice que la serie converge en U .

Teorema 3.4. Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, se dice que converge absolutamente si $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ converge.

Definición 3.16. Una serie de la forma

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

se llama serie de potencias de $z - z_0$. Donde z , z_0 y a_n son números complejos fijos.

El siguiente teorema establece condiciones para que una serie de potencias converja.

Teorema 3.5. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ una serie de potencias. Existe un único número $R \geq 0$ posiblemente $+\infty$, llamado radio de convergencia, tal que si $|z - z_0| < R$, entonces la serie converge y si $|z - z_0| > R$, entonces la serie diverge. Además, la convergencia es uniforme y absoluta en cada disco cerrado $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$.

La demostración detallada de este teorema se puede consultar en [8].

Definición 3.17. Sean U una región abierta en \mathbb{C} y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja, definida en U . Se dice que f es analítica en U si para cada $z_0 \in U$ existe $r > 0$, tal que el disco $D_r(z_0) \subset U$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ (serie de potencias) converge en $D_r(z_0)$.

De aquí, se obtiene el siguiente teorema que relaciona las funciones holomorfas con las funciones analíticas.

Teorema 3.6. Una función f es holomorfa si y sólo si f es analítica.

La demostración se puede consultar en [31].

3.9. Singularidades y su clasificación

Las singularidades de una función f tienen un valor importante en la dinámica de las funciones que estudiaremos más adelante. Para un mayor análisis, el lector puede consultar cualquier libro de variable compleja.

Definición 3.18. Sean $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja. Un punto $z \in U$ donde la función f no es holomorfa se llama punto singular o singularidad de f .

Definición 3.19. Una función f tiene una singularidad aislada en $z_0 \in U$ si existe $r > 0$, tal que f está definida y es analítica en la bola $N_r(z_0) - \{z_0\}$, es decir, que la bola abierta $N_r(z_0)$ no encierre puntos singulares distintos de z_0 .

Las singularidades aisladas se clasifican de la siguiente forma: Sea z_0 una singularidad aislada de $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, donde U es un conjunto abierto en \mathbb{C} .

1. z_0 es una singularidad removible (o singularidad evitable) de f si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) = 0,$$

es decir, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.

2. z_0 es un polo de orden n de f si podemos encontrar $n \in \mathbb{Z}_+$, tal que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) \neq 0$. Si $n = 1$, entonces z_0 es llamado polo simple.
3. z_0 es una singularidad esencial de f si z_0 no es removible ni polo.

Ejemplo 3.6

1. $f_1(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$ tiene una singularidad removible en $z = 0$, porque

$$\lim_{z \rightarrow 0} f_1(z) = \lim_{z \rightarrow 0} (z - 0) \cdot \frac{1 - \cos z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z} = 0.$$
2. $f_2(z) = \frac{\sin z}{z}$ tiene una singularidad removible en $z = 0$, porque

$$\lim_{z \rightarrow 0} f_2(z) = \lim_{z \rightarrow 0} (z - 0) \cdot \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \sin z = 0.$$

3. $f_3(z) = \frac{1-\cos z}{(z-1)^2}$ tiene un polo de orden 2 en $z = 1$, porque

$$\lim_{z \rightarrow 1} f_3(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \cdot \frac{1-\cos z}{(z-1)^2} = 1 - \cos(1) \neq 0.$$

4. $f_4(z) = \frac{e^z}{z^2}$ tiene un polo doble en $z = 0$, porque

$$\lim_{z \rightarrow 0} f_4(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z^2 \cdot \frac{e^z}{z^2} = e^z \neq 0.$$

5. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$, porque no es removible ni polo.

A continuación, se enuncian las siguientes definiciones, de gran importancia para algunas clases de funciones complejas.

Definición 3.20. Una función f definida y holomorfa en todo el plano complejo \mathbb{C} se llama función entera.

Definición 3.21. Una función f definida y holomorfa en \mathbb{C} , excepto por polos, se llama función meromorfa.

Definición 3.22. Sea $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $z_0 \in U$. Se dice que es un valor omitido de f si $f(z) \neq z_0$ para cada $z \in U$.

Ejemplo 3.7

1. $f(z) = e^z$, donde 0 y ∞ son valores omitidos.

2. $f(z) = \cos z$, donde ∞ es valor omitido.

Capítulo 4

Familias normales

Este capítulo está dedicado al estudio de los conceptos más importantes de nuestra teoría, equicontinuidad y familias Normales. Posteriormente, se enuncian los teoremas más importantes de dinámica holomorfa: el teorema de Montel y el teorema de Arzelá-Ascoli. Estos resultados nos ayudarán a definir el conjunto de Julia y el conjunto de Fatou. Para un mayor análisis en este tema, véase [1], [6] y [8].

Sea $f_n : U \subset \mathbb{C} \rightarrow X$ una sucesión de funciones. Se dice que la sucesión converge uniformemente a f en U si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f(z) - f_n(z)| < \epsilon$, si $n \geq N$ para cada $z \in U$.

4.1. Espacio de funciones continuas $C(U, X)$

Iniciamos esta sección recordando la definición de continuidad: $f : U \subset X \rightarrow Y$ es continua en el punto $z_0 \in U$ si, y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que para cada $z_0 \in U$ con $|z - z_0| < \delta$, entonces $d(f(z), f(z_0)) < \epsilon$. Ahora bien, sea (X, d) un espacio métrico completo, es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente a un elemento de X , véase [19]. Aunque gran parte de lo que se mencionará aquí no se necesita la completitud del espacio métrico; sin embargo, muchos de los

resultados interesantes no son verdaderos si (X, d) no se asume que sea un espacio métrico completo. Véase [8]. Ahora bien, se enuncia la definición del conjunto donde se trabajará.

Definición 4.1. Si $U \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto y (X, d) es un espacio métrico completo, entonces denotamos por $C(U, X)$ al conjunto de todas las funciones continuas de U a X .

4.2. Familia normal

Definición 4.2. Una familia $\mathcal{F} \subset C(U, X)$ se dice que es normal (o familia normal), si cada sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ tiene una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{n_k=1}^{\infty}$ que converge a una función f en $C(U, X)$.

Obsérvese que en la definición no se requiere que el límite de la subsucesión pertenezca a la familia \mathcal{F} .

Teorema 4.1. sea $f_n : U \subset X \rightarrow X$ una sucesión de funciones analíticas. Si f_n converge uniformemente hacia f en cada subconjunto compacto de U , entonces f es analítica. En tal caso se dice que la sucesión converge uniformemente en compactos a f .

Montel estableció las condiciones necesarias y suficientes para que una familia de funciones analíticas sea una familia normal.

4.3. Equicontinuidad

Para un entendimiento de la equicontinuidad, recuérdese la definición de continuidad: $f : U \subset X \rightarrow Y$ es continua en el punto $z_0 \in U$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que para cada $z_0 \in U$ con $|z - z_0| < \delta$, entonces $d(f(z), f(z_0)) < \epsilon$

Obsérvese que δ depende de f , z_0 y ϵ . Ahora bien, si se puede encontrar un $\delta > 0$ que cumpla la proposición anterior para cada z , y para cada $f \in \mathcal{F}$ de funciones de X en Y , entonces se dice que \mathcal{F} es equicontinua; se define de la siguiente forma.

Definición 4.3. Un conjunto $\mathcal{F} \subset C(U, X)$ es equicontinua en el punto $z_0 \in U$ si, y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $|z - z_0| < \delta$, $d(f(z), f(z_0)) < \epsilon$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

la familia \mathcal{F} es equicontinua en $U \subset \mathbb{C}$ si es equicontinua en cada $z_0 \in U$.

4.4. Teoremas de Arzelá-Ascoli y Montel

Los siguientes teoremas se pueden consultar en [1], [9] y [37].

Teorema 4.2. (Teorema de Arzelá) Una familia $\mathcal{F} \subset C(U, \Omega)$ es normal si, y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. \mathcal{F} es equicontinua en cada punto de U .
2. Para cada $z \in U$, el conjunto $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ tiene clausura compacta en X .

Teorema 4.3. (Teorema de Montel) Una familia \mathcal{F} de funciones holomorfas sobre un abierto $U \subset \mathbb{C}$ es normal si, y solo si \mathcal{F} está uniformemente acotada en cada compacto de U .

Teorema 4.4. (Teorema de Montel) Sea \mathcal{F} una familia de funciones meromorfas definidas en un dominio $U \subset \mathbb{C}_\infty$, $a, b, c \in \mathbb{C}_\infty$ distintos a pares. Si $f \neq a, b, c$ para cada $z \in U$ y para cada $f \in \mathcal{F}$, entonces \mathcal{F} es normal en U .

Capítulo 5

Clases de funciones meromorfas

En este capítulo se presentan definiciones de tres clases de funciones meromorfas e iteración de éstas. Además, se definen los puntos fijos de funciones y su clasificación. Véase [7], [8] y [14] para consultar a fondo la teoría en este capítulo.

5.1. Funciones racionales

Sean $P(z) = a_0 + a_1(z) + a_2(z)^2 \cdots + a_n(z)^n$ y $Q(z) = b_0 + b_1(z) + b_2(z)^2 + \cdots + b_m(z)^m$ polinomios complejos coprimos, es decir, no tienen ceros comunes, con $a_n, b_m \neq 0$. Las funciones racionales de la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ en sí mismo. Pueden escribirse como un cociente de polinomios:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + a_1(z) + a_2(z)^2 \cdots + a_n(z)^n}{b_0 + b_1(z) + b_2(z)^2 + \cdots + b_m(z)^m}. \quad (5.1)$$

Se denotan por $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ todas las raíces distintas de la ecuación $P(z) = 0$ y por i_1, \dots, i_p sus órdenes de multiplicidad, de igual forma se denota por β_1, \dots, β_q todas las raíces distintas de la ecuación $Q(z) = 0$ y por j_1, j_2, \dots, j_q sus órdenes de multiplicidad. Por tanto, $f(z)$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n(z - \alpha_1)^{i_1} \cdots (z - \alpha_p)^{i_p}}{b_n(z - \beta_1)^{j_1} \cdots (z - \beta_q)^{j_q}}, \quad (5.2)$$

donde los puntos α_s son ceros y los puntos β_t son polos de la función racional $f(z)$, y los valores k_s y l_t son las multiplicidades. Por la ecuación (5.2) se deduce que los ceros de la función $f(z)$ son polos de la función $\frac{1}{f(z)}$ y los polos de $f(z)$ son ceros de $\frac{1}{f(z)}$, donde se conservan las multiplicidades.

Ahora bien, una función racional $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de grado $d > 1$ es un endomorfismo (función cuyo dominio e imagen son el mismo conjunto) de la esfera de Riemann.

Definición 5.1. El grado de $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, donde $P(z)$ y $Q(z)$ son coprimos, se define de la siguiente forma:

$$\text{grad}(f) := \max\{\text{grad}(P), \text{grad}(Q)\}.$$

Las funciones racionales están bien definidas en $\hat{\mathbb{C}}$, es decir,

(a) $f(\infty) = 0$ si $n < m$;

(b) $f(\infty) = \frac{a_n}{b_m}$ si $n = m$;

(c) $f(\infty) = \infty$ si $n > m$.

En (a) se dice que f tiene un cero en el punto del infinito, y en (c) se dice que f tiene un polo en el punto del infinito, por último, en (b) f tiene un polo en el punto del infinito

Se define al conjunto de las funciones racionales de la siguiente forma:

$$\mathcal{R} = \left\{ f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} : f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ donde } P(z) \text{ y } Q(z) \text{ son coprimos} \right\},$$

donde, coprimos, significa que $P(z)$ y $Q(z)$ no tienen factores comunes y por lo tanto carecen de ceros comunes.

5.2. Funciones trascendentes enteras

Las funciones trascendentes enteras están definidas de la siguiente forma:

Definición 5.2. *Las funciones trascendentes enteras son aquellas funciones analíticas que presentan una singularidad esencial en ∞ .*

Se denota el conjunto de funciones enteras trascendentes de la siguiente forma:

$$\mathcal{E} = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es trascendente entera}\}.$$

Algunos ejemplos de funciones trascendentes enteras son los siguientes:

Ejemplo 5.1

1. $f(z) = \lambda e^z, \quad \lambda \in \mathbb{C};$
2. $g(z) = \lambda e^z + z, \quad \lambda \in \mathbb{C};$
3. $h(z) = \lambda \operatorname{sen}(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$

5.3. Funciones trascendentes meromorfas

Definición 5.3. *A las funciones meromorfas en \mathbb{C} que tienen al menos un polo que no es valor omitido, donde ∞ es una singularidad esencial aislada, se les llama funciones trascendentes meromorfas. El conjunto de estas funciones se denota de la siguiente forma:*

$$\mathcal{M} = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} : f \text{ es trascendente meromorfa con al menos un polo } p \text{ no omitido}\}$$

Algunos ejemplos de funciones trascendentes meromorfas son los siguientes:

Ejemplo 5.2

1. $g(z) = \lambda e^z + \frac{\mu}{z}$, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$;
2. $f(z)_{\lambda, \mu} = \lambda \sin z + \frac{\mu}{z - k\pi}$, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R} - \{0\}$;
3. $f(z) = \lambda \tan(z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Observación 5.1 *Las funciones racionales y trascendentes enteras son meromorfas sobre dominios diferentes, es decir, si $f \in \mathcal{R}$, entonces $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Si $f \in \mathcal{E}$, entonces $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y si $f \in \mathcal{M}$, entonces $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Las tres clases de funciones, \mathcal{R} , \mathcal{E} y \mathcal{M} , tienen intersección vacía, es decir, $\mathcal{R} \cap \mathcal{E} = \emptyset$, $\mathcal{R} \cap \mathcal{M} = \emptyset$ y $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} = \emptyset$.*

Así, aunque se habla en los tres casos de funciones meromorfas, sus comportamientos en la dinámica compleja son diferentes.

5.4. Iteración y puntos fijos

Esta sección está dedicada a la presentación formal de iteración de funciones de las familias definidas en las secciones precedentes.

Ahora bien, sean X un dominio y $f : X \rightarrow X$ una función. Se define la n -ésima iterada de f como:

$$\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-veces}}.$$

Sea $f(z) = z^2$, se realiza la iteración de la siguiente forma: $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-veces}}(z) = z^{2^n}$.

Ahora bien, nos interesa cuando X es el conjunto de los números complejos o la esfera de Riemann, y f una función perteneciente a las clases \mathcal{R} , \mathcal{E} o \mathcal{M} , por lo que la definición de iteración de funciones meromorfas se enuncia de la siguiente forma.

Definición 5.4. *Sean $X = \mathbb{C}$ o $Y = \hat{\mathbb{C}}$ y $f \in \mathcal{R}$, \mathcal{E} o \mathcal{M} . Se define la n -ésima iterada de f , no constante, de la siguiente forma: $f^n = f \circ f^{n-1}$, cuando $n \geq 2$ con $n \in \mathbb{N}$, donde $f^1 = f$ y $f^0 = Id$.*

Definición 5.5. Sea $f \in \mathcal{R}, \mathcal{E}$ o \mathcal{M} . Si $z_0 \in X$ o Y , se dice que z_0 es un punto fijo de la función f , si satisface que $f(z_0) = z_0$.

Definición 5.6. Sean $f \in \mathcal{R}, \mathcal{E}$ o \mathcal{M} y n el menor natural que cumple que $f^n(z_0) = z_0$, se dice que z_0 es un punto fijo periódico de período n , de la función f .

Observación 5.1. La iterada de funciones en las clases \mathcal{R}, \mathcal{E} y \mathcal{M} satisfacen lo siguiente:

1. Si $f \in \mathcal{R}$, entonces $f^n \in \mathcal{R}$;
2. Si $f \in \mathcal{E}$, entonces $f^n \in \mathcal{E}$;
3. En general, si $f \in \mathcal{M}$, no se cumple que $f^n \in \mathcal{M}$, como ejemplo se tiene $f(z) = \tan z$

Definición 5.7. Sea $z_0 \in X$ o Y , se define la órbita hacia adelante de z_0 como el conjunto:

$$O^+(z_0) = \{z_n = f^n(z_0) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Si z_0 es un punto periódico de período n , entonces $O^+(z_0)$ es llamado ciclo.

Definición 5.8. La órbita hacia atrás de z_0 se define como el conjunto:

$$O^-(z_0) = \{z : f^n(z) = z_0, \quad n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(z_0).$$

La gran órbita de z_0 está definida por:

$$O(z_0) = O^-(z_0) \cap O^+(z_0).$$

Se dice que los puntos pertenecientes a $O^-(z_0)$ son predecesores de z_0 .

Definición 5.9. Un punto $z_0 \in U \subset X$ o Y se llama punto excepcional si la órbita $O^-(z_0)$ es finita. El conjunto de puntos excepcionales de f se denota por $E(f)$. Al número de elementos de $E(f)$ se denota por $|E(f)|$ y se llama la cardinalidad de $E(f)$.

Definición 5.10. Sea z_0 un punto periódico, de período n , de la función f ; se define $\lambda = (f^n)'(z_0)$ y se llama el multiplicador.

Ahora bien, con esta definición se hacen las siguientes observaciones:

1. Por la regla de la cadena,

$$(f^n)'(z_0) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(z_0)).$$

2. La definición anterior se puede ver confusa cuando $z = \infty$, ya que el multiplicador $\lambda \neq \lim_{z \rightarrow \infty} (f^n)'(z)$, es decir, que λ es igual al recíproco de este número. Por ejemplo, si $f(z) = 2z$, entonces ∞ es punto fijo con multiplicador $\lambda = \frac{1}{2}$.

Sin pérdida de generalidad, si z_0 es punto fijo de una función f de período 1, entonces el punto z_0 se clasifica de la siguiente forma:

1. z_0 es súper atractor si $\lambda = 0$;
2. z_0 es atractor si $0 < \lambda < 1$;
3. z_0 es repulsor si $|\lambda| > 1$;
4. z_0 es indiferente si $|\lambda| = 1$.

Los puntos fijos indiferentes se dividen en dos casos:

- Racional indiferente, si $\lambda^m = 1$, para algún $m \in \mathbb{N}$ e
- Irracional indiferente, si $\lambda = e^{2\pi i \theta}$ con $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Ejemplo 5.3 Iteración de $f(z) = z^2$.

Recuérdese que $f^n(z) = z^{2^n}$. Ahora bien, cada número complejo z_0 tiene tres posibilidades:

1. Si $|z_0| < 1$, entonces $f^n(z_0)$ se encuentra en el círculo unitario;
 2. Si $|z_0| > 1$, entonces $f^n(z_0)$ se encuentra en el exterior del círculo unitario;
-

5. Clases de funciones meromorfas

3. Si $|z_0| = 1$, entonces $f^n(z_0)$ se encuentra sobre la circunferencia del círculo unitario.

Esto es, los puntos fijos de f son 0 , el cual es punto fijo atractor; 1 es repulsor y ∞ es atractor. Véase [6]. Así, la dinámica ocurre en el círculo unitario $C = \{z : |z| = 1\}$. Obsérvense la Figura 5.1.

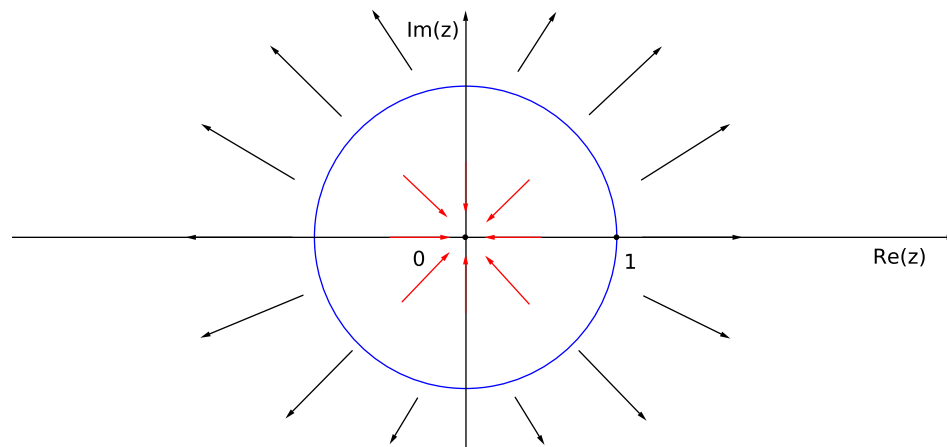


Figura 5.1: Iteración de $f(z) = z^2$

Capítulo 6

Conjuntos de Julia y Fatou

En el capítulo anterior se definieron las clases de funciones meromorfas \mathcal{R} , \mathcal{E} y \mathcal{M} . El objetivo principal de este capítulo es definir los conjuntos de Fatou y Julia, los de mayor incidencia en la teoría de dinámica holomorfa. Los matemáticos franceses Gaston Julia (1893-1978) Pierre Fatou (1878-1926) dan inicio al estudio de la iteración de funciones racionales sobre la esfera de Riemann. Véase [2], [6], y [14] para profundizar en esta teoría.

6.1. Definiciones de los conjuntos de Julia y Fatou

Los trabajos del matemático alemán E. Schröder (1841-192) y el matemático británico Arthur Cayley (1821-1895) fueron relevantes en el estudio de la dinámica desde un punto de vista local; sin embargo, Gaston Julia y Pierre Fatou lograron un estudio global gracias a la definiciones de familia normal y equicontinuidad (capítulo 4). Lograron dividir la esfera de Riemann en dos conjuntos disjuntos, que llevan sus nombres y se definen de la siguiente forma.

6. Conjuntos de Julia y Fatou

Definición 6.1. Sea $f \in \mathcal{R}$, \mathcal{E} y \mathcal{M} y $U = \mathbb{C}$ o $U = \hat{\mathbb{C}}$. Se define al conjunto de Fatou como:

$$\mathcal{F}(f) = \{z \in U \mid \{f^n\}_{n=1}^{\infty} \text{ está bien definida y es normal en alguna vecindad de } z\}$$

Se denota al conjunto de Julia como $\mathcal{J}(f)$; es el complemento del conjunto de Fatou, es decir,

$$\mathcal{J}(f) = U \setminus \mathcal{F}(f).$$

Observación 6.1 Cualquier punto de acumulación de puntos periódicos repulsivos debe pertenecer a $\mathcal{J}(f)$.

Teorema 6.1. Si $f \in \mathcal{R}$, \mathcal{E} y \mathcal{M} , el conjunto $\mathcal{J}(f)$ es igual a la clausura del conjunto de puntos periódicos repulsivos de f .

A continuación se enuncian propiedades notables de estos fascinantes conjuntos. Sea $f \in \mathcal{R}$, \mathcal{E} o \mathcal{M} . Los conjuntos de Julia y Fatou satisfacen lo siguiente:

1. $\mathcal{J}(f)$ es un conjunto cerrado y $\mathcal{F}(f)$ es un conjunto abierto, $\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$.
2. $\mathcal{J}(f)$ y $\mathcal{F}(f)$ son completamente invariantes, es decir, $z \in \mathcal{J}(f)$ si, y sólo si, $f(z) \in \mathcal{J}(f)$
3. $\mathcal{J}(f^n) = \mathcal{J}(f)$ y $\mathcal{F}(f^n) = \mathcal{F}(f)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
4. Si $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ y z_0 no es punto excepcional ($z_0 \notin E(f)$), entonces $\mathcal{J}(f) = \overline{O^-(z_0)}$.
5. $\mathcal{J}(f)$ es perfecto.

Fatou y Julia, en 1918, demostraron las propiedades anteriores para funciones racionales \mathcal{R} . Para funciones trascendentes enteras \mathcal{E} , fueron demostradas por Fatou en 1926 y por Baker en 1946. Véase [6], [14].

6.2. Clasificación de las componentes de Fatou

El conjunto de Fatou es un conjunto abierto, por lo que tiene componentes abiertas, que se clasifican de la siguiente forma.

Sean $f \in \mathcal{R}, \mathcal{E}$ o \mathcal{M} y U una componente conexa del conjunto de Fatou, se clasifican como:

1. *Si $f^n(U) \subset U$, para algún entero $n \geq 1$, se dice que U es componente periódica de $F(f)$. El mínimo n es el período de la componente, Si $n=1$, entonces se dice que U es componente invariante,*
2. *Si $f^n(U) \subset U$ es periódica, para algún entero $m \geq 0$, se dice que U es componente preperiódica de $F(f)$,*
3. *Si U no es componente periódica ni componente preperiódica, se dice que U es componente errante.*

Sea U una componente periódica de $F(f)$ de periodo n , entonces se puede clasificar de la siguiente forma:

1. *Si U contiene un punto período atractor z_0 de período k y f^{nk} converge a z_0 para cada $z \in U$ y n tiende a ∞ , se dice que U es componente atractora.*
2. *Si ∂U contiene un punto período z_0 de período k y f^{nk} converge a z_0 para cada $z \in U$ y n converge a ∞ , entonces $(f^k)'(z_0) = 1$. En este caso, U se llama componente parabólico o componente de Leau.*
3. *Si existe un homeomorfismo analítico $\psi : U \rightarrow D$, donde D es el disco unitario, tal que $\psi(f^k(\psi^{-1}(z))) = e^{2\pi i \alpha} z$ para algún $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, en este caso, U se llama disco de Siegel.*
4. *Si existe un homeomorfismo analítico $\psi : U \rightarrow A$, donde A es un anillo $A = \{z : 1 < |z| < r\}$, $1 < r$, tal que $\psi(f^k(\psi^{-1}(z))) = e^{2\pi i \alpha} z$ para algún*

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, U se llama anillo de Herman.

5. Si existe $z_0 \in \partial U$ tal que $f^{nk}(z)$ converge a z_0 , para cada $z \in U$ cuando n tiende a ∞ , pero $f^k(z_0)$ no está definido, en este caso, U se llama componente de Baker.

Observación 6.2

1. Las componentes errantes no existen para funciones en la clase \mathcal{R} , véase [6].
2. Los dominios de Baker no existen para las funciones en la clase \mathcal{R} , véase [6].
3. Los anillos de Herman no existen para la clase \mathcal{E} , véase [15].
4. Cualquier componente puede existir para la clase \mathcal{M} , véase [16].

Capítulo 7

Fractales de funciones meromorfas

En cualquier sistema dinámico, el plano de parámetros es el conjunto de todas las posibles combinaciones de valores de todos los diferentes parámetros contenidos en un modelo matemático. Un plano dinámico es muy similar a un plano de parámetros. En el caso del plano dinámico, el valor del parámetro es una constante. Así, el plano dinámico está asociado con un elemento en concreto de la familia de iteraciones. En este último capítulo se muestra, gracias a las definiciones anteriores, la relación existente entre los objetos fractales y los conjuntos de Julia de las familias meromorfas presentadas en el capítulo 5. Como se ha mencionado a lo largo de la presente tesis, la iteración es la idea fundamental que rige la obtención de objetos fractales, al igual que en la teoría de los sistemas dinámicos complejos. Para visualizar estos extraños, complejos, pero cautivadores objetos fractales, se usa el software Fractalstream, programa desarrollado por the Cornell Mathematics Department. Se inicia presentando el conjunto más estudiado e impresionante de la matemática moderna, el conjunto de Mandelbrot. Este conjunto es necesario para mostrar la existencia de objetos fractales en la dinámica holomorfa, los conjuntos de Julia. Posteriormente, se presenta una idea similar al conjunto de Mandelbrot aplicada a la familia $f_\lambda = \lambda \operatorname{sen}(z)$, estudiada por Domínguez y Sienna [15]. Finalmente, se muestra el corte de plano de parámetros sólo agregando

un polo a la familia anterior, es decir, $f_{\lambda,\mu} = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z-k\pi}$, donde λ y $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{R}[16]$, que también resultan ser objetos fractales.

Recuérdese que un objeto fractal cumple las siguientes propiedades:

1. Es autosimilar.
2. La geometría clásica no puede representarlo.
3. Es un objeto con longitud o complejidad infinita.
4. Tiene la dimensión de Hausdorff-Besicovich mayor que su dimensión topológica.

7.1. Conjunto de Mandelbrot

El objetivo de esta sección es presentar la idea básica de la existencia de objetos fractales en funciones meromorfas; para ello se propone el siguiente ejemplo clásico: la familia $f_c(z) = z^2 + c$, que tiene como parámetro $c \in \mathbb{C}$; además es el único punto crítico, es decir, $|\lambda| = 0$. Las órbitas; los puntos críticos; los puntos periódicos mencionados en el capítulo 5 desempeñan un papel sumamente importante en el estudio de la dinámica de f_c . La órbita de mayor interés de f_c , es la órbita del cero, llamada órbita crítica. Con estos datos, se realiza el estudio siguiendo la órbita del punto crítico bajo iteraciones de la familia f_c , por lo que se enuncia la siguiente definición.

Definición 7.1. El plano de parámetros de la función $f_c(z) = z^2 + c$ con parámetro $c \in \mathbb{C}$ se define como:

$$M = \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(0)| \text{ es acotado}\},$$

es decir, M es el conjunto de todos los valores $c \in \mathbb{C}$, tales que la órbita de 0 bajo f_c es acotada.

Para visualizar este conjunto en el plano complejo, se usa el software *Fractalstream*, programa desarrollado por the Cornell Mathematics Department. Obtenemos el

7. Fractales de funciones meromorfas

conjunto de Mandelbrot, estudiado y nombrado de esta manera por los matemáticos Adrien Douady y John H. Hubbard en 1982 [12]. Obsérvese la Figura 7.1.

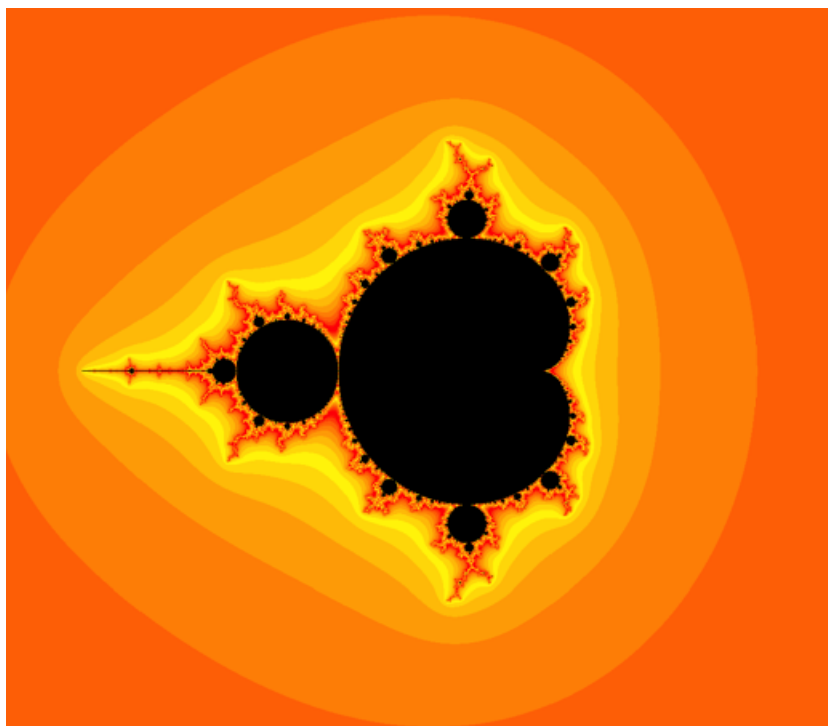


Figura 7.1: Conjunto de Mandelbrot

*El conjunto de Mandelbrot es, quizás, el objeto más fascinante de la matemática contemporánea. La belleza de este objeto se debe a su **estructura fractal**. Realizando algunos acercamientos, se obtienen las siguientes imágenes, véase Figura 7.2.*

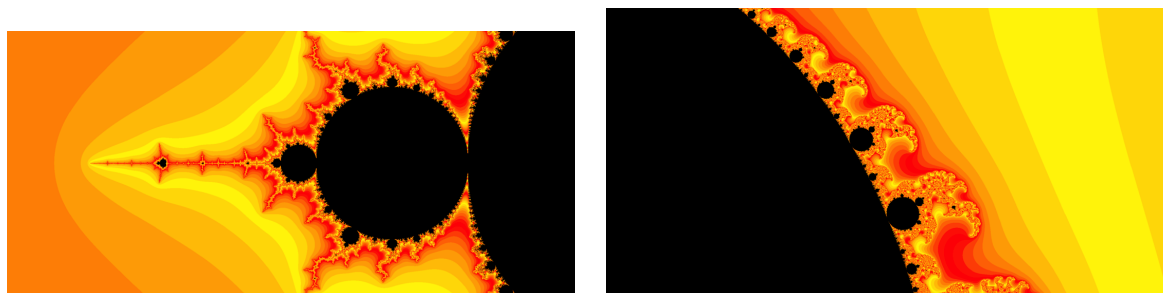


Figura 7.2: Acercamientos al conjunto de Mandelbrot

7.2. Conjuntos de Julia para la familia f_c

Llegamos al momento culminante de la presente tesis, la relación existente entre el conjunto de Julia y los objetos fractales. Recuérdese que el conjunto de Julia, de acuerdo al teorema 6.1, es igual a la clausura del conjunto de puntos periódicos repulsivos de f_c ; es decir, la frontera de los puntos que escapan a infinito bajo iteraciones de la familia f_c ; se define como:

$$\mathcal{J}(f) = \partial\{z \in \mathbb{C} : f_c^n(z) \rightarrow \infty\}.$$

Ahora, lo que se desea es mostrar la sorprendente relación del conjunto de Julia y el conjunto de Mandelbrot, por medio del siguiente teorema.

Teorema 7.1. *Si la órbita de 0 no escapa bajo iteraciones de f_c , entonces $\mathcal{J}(f)$ es un conjunto conexo.*

La demostración se puede consultar en [28]. Esta dicotomía básica permite mostrar que, si se toma cualquier valor $c \in M$, entonces el conjunto de Julia es conexo o es totalmente desconexo. Sea $c = -0,122561 + 0,744862i$ un parámetro perteneciente al conjunto de Mandelbrot. Estos datos se iteran, nuevamente, al introducirlos en el programa, y se obtiene el plano dinámico, donde la frontera es el conjunto de Julia. Este objeto fractal se conoce como el conejo de Douady. Así como Kepler soñó el panorama de la tierra vista desde la luna, quizás, de alguna manera, Gaston Julia soñó los objetos fractales. Obsérvese la Figura 7.3.

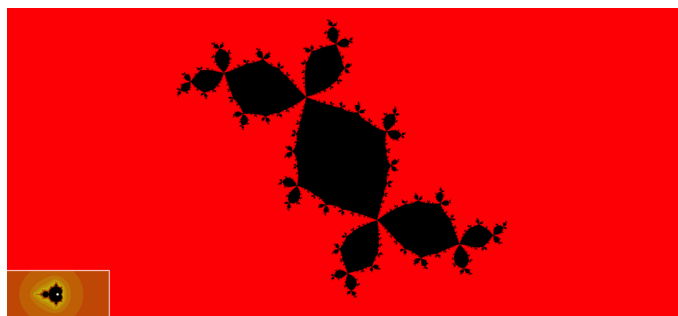
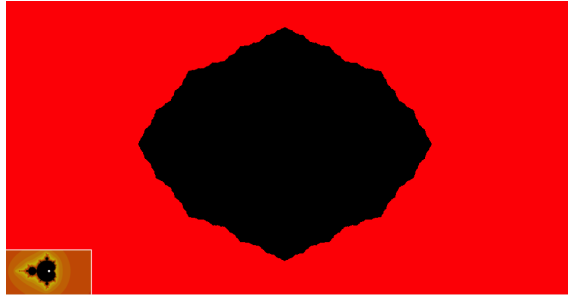


Figura 7.3: Conejo de Douady con valor $c = -0,122561 + 0,744862i$

7. Fractales de funciones meromorfas

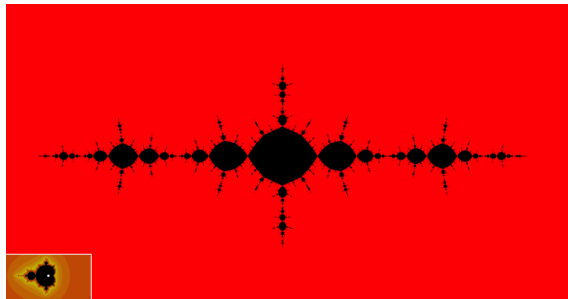
A continuación se grafican algunos conjuntos de Julia, tomando $c \in M$. Obsérvense las imágenes de la Figura 7.4.



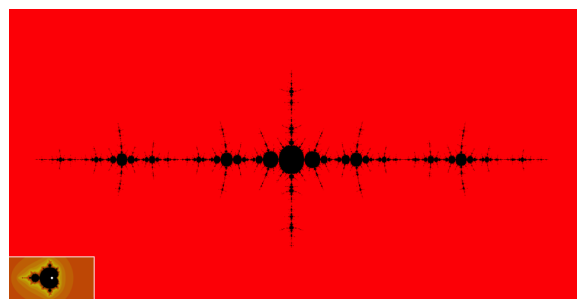
$$c = -0,275 + 0i$$



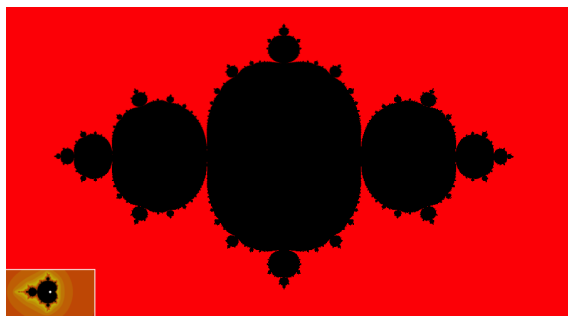
$$c = 0,25 + 0i$$



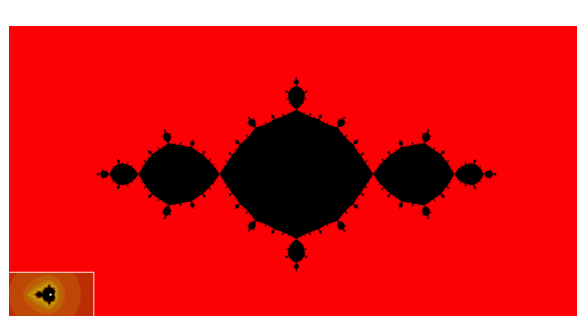
$$c = -1,312 + 0i$$



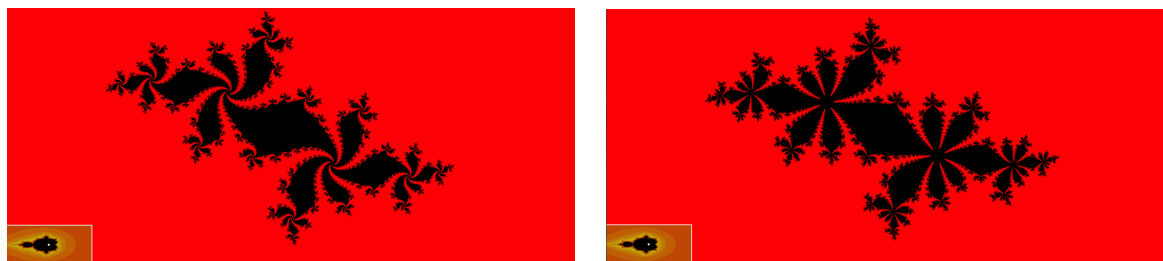
$$c = -1,375 + 0i$$



$$c = 0,75 + 0i$$



$$c = -1 + 0i$$

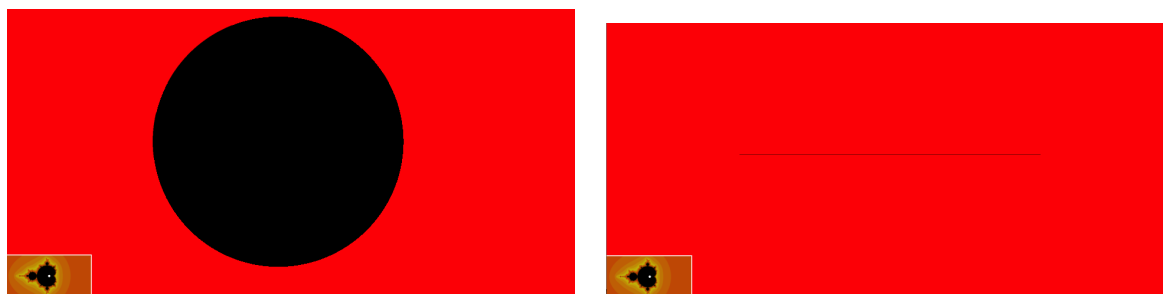


$$c = 0,275 + i0,535$$

$$c = 0 + i$$

Figura 7.4: Ejemplos de conjuntos de Julia

Ahora bien, en los parámetros $c = 0$ y $c = -2$, resulta ser que el conjunto de Julia no es un objeto fractal. Por tanto, no todo conjunto de Julia es un objeto fractal. Obsérvense las imágenes de la Figura 7.5.



$$c = 0$$

$$c = -2$$

Figura 7.5: Conjuntos de Julia que no son objetos fractales

7.3. Plano de parámetros de la familia trascendente

entera $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$

En esta sección se muestra la existencia de fractales en la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$, cuya dinámica fue estudiada por Domínguez y Sienna [15]. Con una idea similar a la del conjunto de Mandelbrot, se obtiene el plano de parámetros y algunos de sus correspondientes conjuntos de Julia.

Obsérvese que la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ pertenece a la clase \mathcal{E} , es decir, funciones

7. Fractales de funciones meromorfas

analíticas que presentan una singularidad esencial en ∞ . En esta familia, se obtienen los siguientes resultados:

1. Como $f_\lambda(0) = \lambda \sin 0 = 0$, se tiene que $z = 0$ es un punto fijo.
2. Los puntos críticos son $\frac{(2k-1)\pi}{2}$, donde $k \in \mathbb{Z}$.
3. La familia tiene dos valores críticos $\{\lambda, -\lambda\}$ carece de valores asintóticos.
4. La familia no tiene anillos de Herman, véase [4].
5. La familia no tiene dominios errantes ni dominios de Baker, véase [18].

Definición 7.2. El plano de parámetros de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ está definido por:

$$\mathbb{M} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |f_\lambda^n\left(\frac{\pi}{2}\right)| \text{ es acotado}\}.$$

Obsérvense el plano de parámetros de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ en la Figura 7.6.

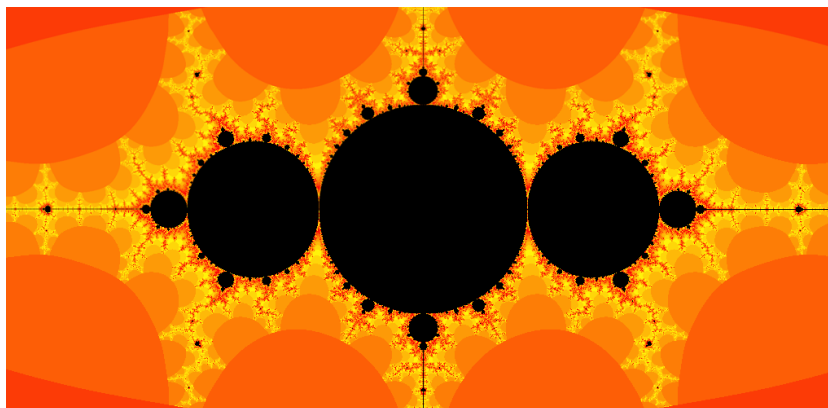
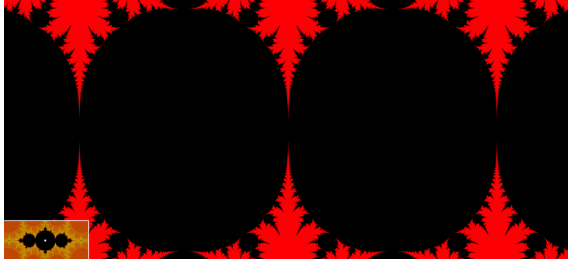


Figura 7.6: Plano de parámetros de $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$

7.3.1. Plano dinámico de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$

Algunos ejemplos de planos dinámicos de diferentes $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ son los siguientes, donde se puede apreciar que el conjunto de Julia es un fractal. Obsérvense las imágenes de la Figura 7.7.

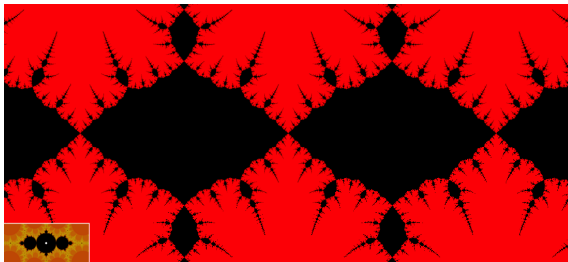
7. Fractales de funciones meromorfas



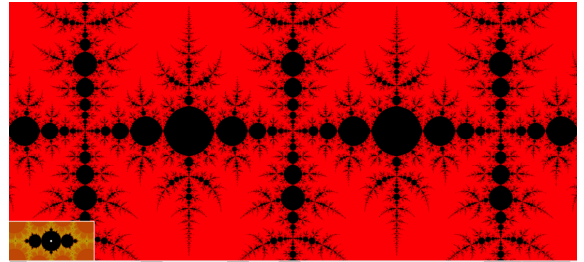
$$\lambda = -1$$



$$\lambda = 0,8,0i$$



$$\lambda = 1,9,0i$$



$$\lambda = 0 + 1,3i$$



$$\lambda = 0,6 + 0,8i$$



$$\lambda = 0 + 1,1i$$

Figura 7.7: Conjuntos de Julia de la familia $f(z) = \lambda \sin z$

7.4. Plano de parámetros de la familia trascendente

meromorfa $f(z) = \lambda \sin z + \frac{\mu}{z-k\pi}$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
y $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

En esta sección se muestra la existencia de fractales en la familia $f(z) = \lambda \sin z + \frac{\mu}{z-k\pi}$, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, que pertenece a la clase \mathcal{M} .

A diferencia de las familias de las secciones anteriores, esta familia tiene más de un parámetro y de un punto crítico [16], lo cual dificulta el graficar su plano de parámetros. Esta familia consta de tres parámetros, así que una idea para poder graficarlo es fijando dos de ellos, digamos $\mu = \mu_0$ y $k\pi = z_0$, con lo cual se obtiene la siguiente expresión:

$$f(z) = \lambda \sin z + \frac{\mu_0}{z - z_0}.$$

El corte del espacio de parámetros está definido por:

$$\mathfrak{M} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |f_{\lambda, \mu_0}^n(\text{punto crítico})| \text{ es acotada}\}.$$

Si asignamos los valores de $\mu = 0,9$ y $k = 5$, se obtiene la familia: $f(z) = \lambda \sin z + \frac{0,9}{z-5\pi}$. Al introducir estos datos en el programa, se obtiene el corte de parámetros, que resulta ser un objeto fractal. Obsérvese la Figura 7.8.

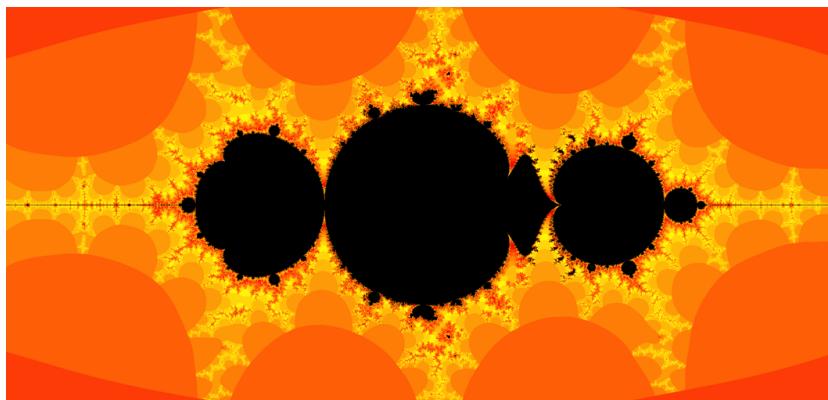


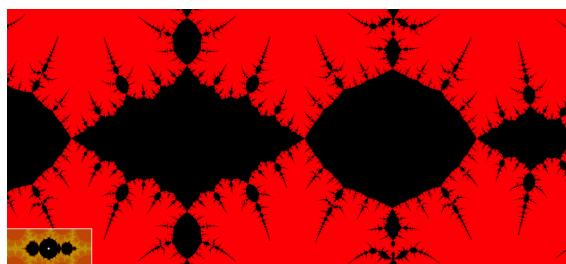
Figura 7.8: El corte de $f(z) = \lambda \sin z + \frac{\mu}{z-k\pi}$, donde $\mu = 0,9$ y $k = 5$

7.4.1. Plano dinámico de la familia $f(z) = \lambda \sin z + \frac{\mu}{z-k\pi}$, donde $\mu = 0,9$ y $k = 5$

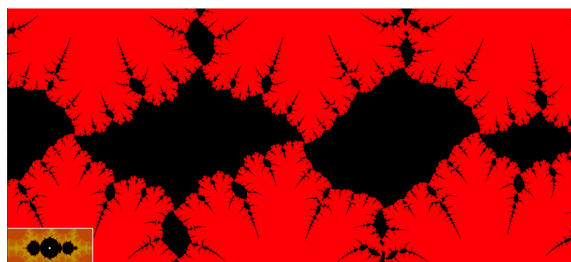
En la presente sección se muestran algunos conjuntos de Julia para el corte de plano de parámetros de $f(z) = \lambda \sin z + \frac{\mu}{z-k\pi}$, donde $\mu = 0,9$ y $k = 5$. Obsérvese las imágenes de la Figura 7.9.



$$\lambda = 1,3 + 0i$$



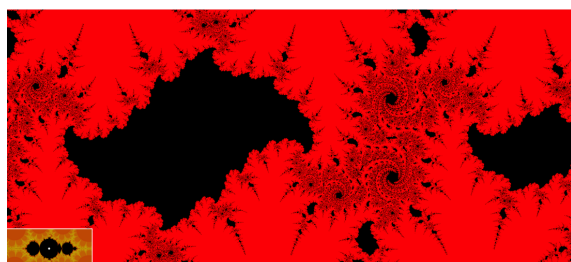
$$\lambda = 1,9 + 0i$$



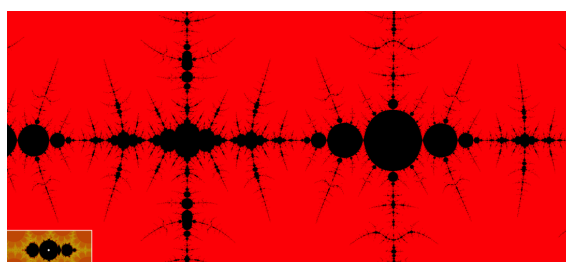
$$\lambda = 0,9 + 0,3i$$



$$\lambda = 1,9 + 0,3i$$



$$\lambda = 1,5 + 0,5i$$



$$\lambda = 2,5 + 0i$$

Figura 7.9: Conjuntos de Julia de la familia $f(z) = \lambda \sin z + \frac{\mu}{z-k\pi}$, donde $\mu = 0,9$ y $k = 5$

7. Fractales de funciones meromorfas

Observación 7.1 *Los conjuntos de Julia se obtienen de la misma forma que en los ejemplos anteriores, con la diferencia de que éstos corresponden a los cortes de parámetros dados.*

Capítulo 8

Conclusiones

Se realizó el estudio del campo de los números complejos y de funciones de variable compleja. Se enunciaron las propiedades básicas de iteración de funciones meromorfas. Se mostró la existencia de objetos fractales en la iteración de tres clases de funciones meromorfas. Se hizo notar que, a partir de la teoría de variable compleja, nace un interés en profundizar la teoría de los objetos fractales.

Bibliografía

- [1] AHLFORS, Lars, (1979), *Complex analysis, an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, third Edition, McGraw-Hill.*
- [2] AUDIN, Michèle, (2014), *Fatou, Julia, Montel the great prize of mathematical science of 1918, and beyond, Springer.*
- [3] ARENAS, José, (2014), “¿Es estable el sistema solar?”, *Latin-american journal of physics education. Vol. 8, No. 2.*
- [4] BAKER, I. N., (1975), “The domains of normality of an entire function”, *Annales Acadademia Scientiarum Fenniae Series A. I. Mathematica, voumen 1, pp. 227-283.*
- [5] BARNESLEY, Michael, (1988), *Fractals everywhere, Academic press.*
- [6] BEARDON, Alan, (1990), *Iteration of rational functions, complex analytic dynamical system, Springer Verlag.*
- [7] BERGWEILER, W., (1993), “Iteration of meromorphic functions”, *American Mathematical Society.*
- [8] CONWAY, John, 1978, *Functions of one complex variable, Second Edition, Springer Verlag.*
- [9] CARLESON, Lennart, (1992), *Complex dynamics. Springer-Verlag.*

- [10] CHUANG, Chi-thai, (1993), *Normal families of meromorphic function*, World Scientific.
- [11] DEUFLHARD, Peter, (2002), “A short history of Newton’s method”, *Documenta mathematica*.
- [12] DEVANEY, Robert, (1989), *Complex dynamical system the mathematics behind the Mandelbrot set and Julia set*, American Mathematical Society.
- [13] DEVANEY, Robert, (1989), *A first course in chaotic dynamical system: theory and experiment*, Addison-Wesley Publishing.
- [14] DOMÍNGUEZ, Patricia, y Contreras, Valente, (2014) *Dinámica holomorfa, los conjuntos de Fatou y julia y algunas de sus propiedades de tres clases de funciones meromorfas*.
- [15] DOMÍNGUEZ, Patricia, y Sienna Guillermo, (2002), “A study of the dynamics of the family $\lambda \sin z$ ”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*.
- [16] DOMÍNGUEZ, Patricia, (2017), “A study of the Dynamics of the Family $f(z) = \lambda \sin z + \frac{\mu}{z-k\pi}$, where $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ and $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ”, *Scientific Publishing, Discontinuity, Nonlinearity, and Vcomplexity*.
- [17] DOUGUNDJI, James, (1966), *Topology*, Allyn and bacon.
- [18] EREMENKO, A, (1992), “Dynamical Properties of Some Functions”, *Annales de l’intitud Fourier*.
- [19] ESCAMILLA, J A., (2010), *Introducción a la teoría de espacios métricos*, Textos científicos Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- [20] FATOU, Piere, (1919), “Sur les équations fonctionnelles”, *Bulletin de la Societé Mathématique de France*.
-

BIBLIOGRAFÍA
BIBLIOGRAFÍA

- [21] ACCEF, Flor de María, LLUIS-PUEBLA, Emilio, (2007), *Matemática en la matemática II, música II, naturaleza y nuestro Cuerpo*, Publicaciones Electrónicas Sociedad Matemática Mexicana.
- [22] FRAME, Michael, COHEN, Nathan, y MANDELBROT, Benoit, (2015) *A life in many dimensions*, World Scientific Publishing.
- [23] MADHU, Gupta, (2006), “El arte de escher, la gráfica smith ya la geometría hiperbólica”, *IEEE Microwave Magazine*, págs. 66-76.
- [24] IRIBARREN, Ignacio,(2008), *topología de espacios métricos* , LIMUSA.
- [25] JULIA, Gaston, (1918), *Mémoire sur L’itéracion des fonctions rationelles*, *Journal de Mathématiques Pures Et Appliquées*.
- [26] MANDELBROT, Benoit, (1997), *La Geometría Fractal de la naturaleza*, Tusquets Editores.
- [27] MANDELBROT, Benoit, (2004), *Fractas and chaos the Mandelbrot set and beyond*, Springer.
- [28] MANDELBROT, Benoit, (1967), “How long is the coast of britain?”, *International Business Machines*.
- [29] MERINO, Orlando, (2006), “A short history of complex numbers”, *University of Rhode Island*.
- [30] MORENO, Monica, (2007), “Dimensión y conjuntos de Julia”, CONCYTEG.
- [31] NOGUCHI, J, (1993), *Introduction to complex analysis*, American Mathematical Society.
- [32] PEITGEN, Heinz-otto, JURGENS, Harmut, (1993), *Fractals for the classroom: Strategic activities volume One*, Springer-Velag.
-

BIBLIOGRAFÍA
BIBLIOGRAFÍA

- [33] PEITGEN, Heinz-otto, JURGENS, Harmut, (2004), *Chaos and fractal new frontieres of science*, Springer.
- [34] Ruiz, Ángel, (2003), *Historia y filosofía de las matemáticas*, Editorial Universidad Estatal a Distancia.
- [35] SAGAN, Carl, (1980), *Cosmos, Un viaje personal*, Random House.
- [36] SALICRUP, Graciela., (1997), *Introducción a la topología*, Sociedad matemática mexicana.
- [37] SHIFF, Joel, (1993), *Normal families*, Springer Velag.
- [38] TALANQUER, Vicente, (2010), *Fractus; fracta, fractal. fractales, de laberintos y espejos*, Fondo de Cultura Económica.