



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Introducción a la Teoría de Conos

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
Luis González Aguilar

DIRECTOR DE TESIS
Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna

PUEBLA, PUE.

Agosto de 2016

A mi madre

Agradecimientos

Agradezco a mi mamá que es mi mayor inspiración y mi pilar incondicional. Por ser paciente hasta ver el fruto de mi esfuerzo, por acompañarme en los momentos de felicidad y, brindarme soporte en los momentos difíciles. Sobre todo, por creer en mí.

A mis hermanos, por brindarme su apoyo en todo momento.

A mis amigos de la facultad, en especial a Andrea, Ángeles, Fernanda, Guadalupe, Jorge, José, Lazaro y Miguel Ángel, por todos los momentos que pasamos juntos y por la valiosa amistad que me brindaron.

A mis sinodales, M.C. Guadalupe Raggi Cárdenas, Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros y Dra. María Araceli Juárez Ramírez, por tomarse el tiempo para revisar este proyecto.

Finalmente a mi asesor, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, por haberme aceptado como su tesista, por el apoyo brindado en el desarrollo de este trabajo y por toda su paciencia.

A todos ustedes, gracias.

Índice general

Introducción	I
1. Preliminares	1
1.1. Conceptos Básicos	1
1.2. Teorema de Hahn-Banach en Espacios Vectoriales	3
2. Espacios Vectoriales Ordenados	5
2.1. Espacios Vectoriales Ordenados	5
2.2. Espacios de Riesz	9
2.3. T. de Hahn-Banach en Espacios Vectoriales Ordenados	11
2.3.1. Consecuencias del Teorema de Hahn-Banach	16
3. Conos en Espacios Normados	19
3.1. Conos Normales	19
3.2. Conos Regulares y Conos Completamente Regulares	25
3.3. Conos Lattice y Dedekind Completos	30
3.4. Conos Generadores y Cono Dual	34
Bibliografía	39

Introducción

En el estudio de los espacios normados, en general, no se cuenta con una estructura de orden. Sin embargo, en varios de los espacios normados “clásicos”, si se tiene una estructura de orden que es “compatible” con la estructura algebraica y métrica del espacio. Por ejemplo, en el espacio de los números reales \mathbb{R} , se tiene el resultado de que toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente. Otro ejemplo, en el espacio $C([a, b], \mathbb{R})$, es el teorema de Dini, que afirma lo siguiente, dado (E, d) un espacio métrico compacto y $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas (monótona creciente o monótona decreciente), si $f_n \rightarrow f$ en E y f es continua, entonces la convergencia es uniforme. Lo anterior es nuestra motivación para el estudio de los conos.

El objetivo de esta tesis es dar una introducción a la teoría de conos, tanto en espacios vectoriales como en espacios normados, y aplicar éstos a teoremas de extensión de funcionales lineales.

La tesis está dividida en tres capítulos. En el primer capítulo, iniciamos con conceptos básicos que se utilizan a lo largo de la tesis, como son: conjunto parcialmente ordenado, cota superior, elemento maximal, el Lema de Zorn, espacio normado y espacio de Banach. También presentamos el Teorema de Hahn-Banach, en varias de sus versiones, para entrar en contexto con los teoremas de extensión que se presentan en los capítulos posteriores. En el segundo capítulo, se presentan la definición de cono y espacio vectorial ordenado. Se introducen los espacios de Riesz, algunas de sus propiedades fundamentales, se enuncia el Teorema de Hahn-Banach, en su versión de espacios vectoriales ordenados, y algunas consecuencias. En el tercer capítulo, se introduce el concepto de cono en espacios de Banach y se desarrollan algunas clases de conos, como son: los normales, regulares, completamente regulares, lattice y generadores. Por último, se presenta un teorema de extensión de un funcional lineal acotado positivo.

Introducción a la Teoría de Conos

Luis González Aguilar

Agosto de 2016

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Conceptos Básicos

Definición 1.1. Sean X un conjunto y \leq una relación binaria sobre X . Diremos que \leq es una relación de orden o relación de orden parcial sobre X , si satisface las siguientes tres propiedades:

- (i) $x \leq x$ para toda $x \in X$ (reflexiva),
- (ii) Si $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces, $x = y$ (antisimétrica),
- (iii) Si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces, $x \leq z$ (transitiva).

Un conjunto parcialmente ordenado es un par ordenado (X, \leq) , donde \leq es una relación de orden parcial.

Un conjunto totalmente ordenado es un conjunto parcialmente ordenado (X, \leq) tal que

- (iv) para toda $x, y \in X$, se tiene que $x \leq y$ o $y \leq x$.

Ejemplo 1.2. 1. La relación de igualdad $=$ sobre un conjunto X es una relación de orden.

2. Sea $P(X) = \{A : A \subset X\}$ el conjunto potencia de X . La relación de inclusión \subset es una relación de orden sobre $P(X)$.

3. El conjunto de los números naturales \mathbb{N} con el orden usual es un conjunto totalmente ordenado.

4. El conjunto de los números reales \mathbb{R} con el orden usual es un conjunto totalmente ordenado.

Definición 1.3. Sean (X, \leq) un conjunto parcialmente ordenado, $A \subset X$ y $x_0 \in X$. Diremos que

1. x_0 es una cota superior de A si para toda $a \in A$ tenemos que $a \leq x_0$.
2. A está acotado superiormente si existe una cota superior de A .
3. x_0 es un supremo de A , si se cumple

- a) x_0 es cota superior de A .
- b) Si y es cota superior de A , entonces $x_0 \leq y$.

4. x_0 es un elemento maximal de X si para toda $x \in X$, si $x_0 \leq x$, entonces $x_0 = x$.

Los conceptos de cota inferior, ínfimo y elemento mínimo son definidos de manera similar.

Definición 1.4. Sea (X, \leq) un conjunto parcialmente ordenado. Una cadena en X es un subconjunto $C \subset X$ que es totalmente ordenado por el orden que induce X .

Lema 1.5 (Lema de Zorn). Sea (X, \leq) un conjunto parcialmente ordenado, $X \neq \emptyset$, tal que toda cadena tiene una cota superior en X . Entonces existe un $x_0 \in X$ tal que x_0 es un elemento maximal de X .

Definición 1.6. Sea X un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Una función $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ se llama norma en X si cumple:

1. $\|x\| \geq 0$ para toda $x \in X$.
2. $\|x\| = 0$, si y sólo si, $x = 0$.
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para toda $x \in X$ y toda $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para toda $x, y \in X$. (Desigualdad del Triángulo).

A la pareja ordenada $(X, \|\cdot\|)$ se le llama espacio normado.

Observación 1.7. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, la función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = \|x - y\|$ es una métrica en X . Por lo tanto, todo espacio normado es a su vez un espacio métrico.

Definición 1.8. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, en el que se define la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$. Si (X, d) es completo, entonces se dice que X es un espacio de Banach.

1.2. Teorema de Hahn-Banach en Espacios Vectoriales

El objetivo de esta sección es dar los conceptos principales y la teoría necesaria que involucran el Teorema de Hahn-Banach en espacios vectoriales. Esto nos servirá para desarrollar su versión general en espacios vectoriales ordenados.

Recordemos brevemente las siguientes definiciones.

Definición 1.9. Dados X, Y dos conjuntos no vacíos, $A \subset X$ no vacío y $f : A \rightarrow Y$ una función, la función $g : X \rightarrow Y$ se llama una extensión de f a X , si $g(x) = f(x)$ para cada $x \in A$.

Observación 1.10. Dada una función $f : A \rightarrow Y$, siempre podemos hallar una función $g : X \rightarrow Y$ que extiende f a X . Para ello, sea $y_0 \in Y$ y definamos $g(x) = f(x)$, si $x \in A$ y $g(x) = y_0$ si $x \notin A$.

Definición 1.11. Sean X un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional. Diremos que

1. p es subaditiva cuando $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para cada $x, y \in X$,
2. p es homogénea positiva cuando $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, para cada $x \in X$ y $\lambda \geq 0$,
3. p es convexa cuando $p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda p(x) + (1 - \lambda)p(y)$, para cada $x, y \in X$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Diremos que p es sublineal si es subaditiva y homogénea positiva.

Ejemplo 1.12. Ejemplos de funciones sublineales.

1. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es un operador lineal, entonces f es sublineal.
2. Si definimos $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $p(x) = |x|$, entonces p es sublineal pero no lineal.
3. Si X es un espacio normado real con norma $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces $\|\cdot\|$ es sublineal.

En Análisis son frecuentes los casos en que un funcional lineal es dominado por un funcional sublineal convexo. Por ejemplo, la integral de Riemann de una función $x = x(t)$ es un funcional lineal $f(x) = \int_0^1 x(t) dt$, en cambio, la integral superior $p(x)$ es sublineal y se tiene que $f(x) \leq p(x)$. Se quiere extender un funcional lineal que cumpla una propiedad de acotación similar. La respuesta a esto la da el Teorema de Hahn-Banach.

El Teorema de Hahn-Banach es un teorema de extensión de funcionales lineales. Existen varias versiones del Teorema clásico de Hahn-Banach, la versión algebraica, la versión analítica y varias versiones "geométricas". En esta tesis sólo estudiaremos las versiones algebraica y analítica.

Las definiciones anteriores son las necesarias para enunciar el Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 1.13 (Hahn-Banach, versión algebraica). *Sea X un espacio vectorial real, M un subespacio de X , p un funcional sublineal sobre X , f un funcional lineal sobre M tal que $f(x) \leq p(x)$ para cada $x \in M$. Entonces existe $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funcional lineal que extiende f a X y tal que $F(x) \leq p(x)$ para cada $x \in X$.*

Teorema 1.14 (Hahn-Banach, versión analítica). *Sea f un funcional lineal y acotado sobre un subespacio M de un espacio normado X . Entonces existe un funcional lineal y acotado F sobre X que extiende a f y conserva la norma.*

En [4] se presenta una generalización del Teorema de Hahn-Banach poco conocida, al menos por nosotros. En lugar de una función sublineal p , considera una función convexa p . El teorema es

Teorema 1.15. *Sean X un espacio vectorial y $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Sean M un subespacio vectorial de X y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal dominado por p sobre M . Entonces existe una (generalmente no es única) extensión lineal \bar{f} de f a X que es dominada por p sobre X .*

Capítulo 2

Espacios Vectoriales Ordenados

2.1. Espacios Vectoriales Ordenados

El objetivo de esta sección es dotar a un espacio vectorial X de una estructura de orden. Esto lo haremos de dos formas. La primera a través de los conos y la segunda considerando a X junto con un orden parcial.

Definición 2.1. Sean X un espacio vectorial y $P \subset X$ un conjunto convexo no vacío. Diremos que P es un cono en X si satisface las siguientes dos condiciones:

1. Si $x \in P$, entonces $\lambda x \in P$ para todo $\lambda \geq 0$,
2. Si $x \in P$ y $-x \in P$, entonces $x = 0$.

De la definición de cono se desprende la siguiente observación.

Observación 2.2. Sea P un cono en X . Entonces se cumple que:

1. $0 \in P$.
2. Si $x, y \in P$, entonces $x + y \in P$.
3. $\{0\}$ es un cono y se le conoce como cono trivial.
4. $\{0\}$ es el único subespacio vectorial de E que es un cono.

En todo lo que sigue, cuando hablemos de un cono P , estamos suponiendo implícitamente que no es el cono trivial, esto es, $P \neq \{\theta\}$.

En la definición de cono, podemos quitar la condición de que P sea convexo y agregar 2. de la observación 2.2. a la definición y automáticamente P sería un conjunto convexo. Así tenemos lo siguiente.

Lema 2.3. Sea X un espacio vectorial y $P \subset X$ no vacío. Entonces, P es un cono, si y sólo si, P satisface las siguientes tres condiciones:

1. Si $x, y \in P$, entonces $x + y \in P$,
2. Si $x \in P$, entonces $\lambda x \in P$ para todo $\lambda \geq 0$,
3. Si $x \in P$ y $-x \in P$, entonces $x = \theta$.

Demostración. La necesidad se cumple por la observación 2.2.. Para la suficiencia sólo resta probar que P es un conjunto convexo.

Sean $x, y \in P$ y λ con $0 \leq \lambda \leq 1$. Así $\lambda \geq 0$ y $1 - \lambda \geq 0$, y como P es un cono, entonces $\lambda x, (1 - \lambda)y \in P$. Luego por 1. tenemos que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in P$. Por lo tanto P es un conjunto convexo. □

Este lema será utilizado para demostrar que un conjunto P es un cono.

Definición 2.4. Sean X un espacio vectorial y \leq una relación de orden sobre X . Diremos que \leq es un orden parcial vectorial si \leq es compatible con la estructura de X en el siguiente sentido: Si $x \leq y$, entonces

1. $x + z \leq y + z$ para todo $z \in X$ y
2. $\lambda x \leq \lambda y$ para todo $\lambda \geq 0$.

Ahora, estamos listos para dar la definición de espacio vectorial ordenado.

Definición 2.5. Sea X un espacio vectorial equipado con un orden parcial vectorial \leq . Entonces, X es llamado un espacio vectorial ordenado o espacio vectorial parcialmente ordenado, denotado (X, \leq) o simplemente X si se entiende bien quien es \leq .

En un espacio vectorial ordenado (X, \leq) cualquier vector $x \in X$ que satisface $0 \leq x$ es llamado vector positivo y al conjunto de todos los vectores positivos $X_+ = \{x \in X : 0 \leq x\}$ lo llamamos cono positivo de X . El cono positivo, también es denotado por X^+ .

Teorema 2.6. *Sea (X, \leq) un espacio vectorial ordenado. Entonces, el cono positivo X^+ de X es un cono.*

Demostración. Para esto usaremos el Lema 2.3. Primero notemos que $X^+ \subset X$ y es no vacío ya que $0 \in X^+$. Ahora veamos que se cumplen las condiciones restantes para que X^+ sea un cono.

- (a) Sean $x, y \in X^+$, entonces $0 \leq x$ y $0 \leq y$. Dado que \leq es un vector ordenado y por 1. de la definición 2.4., tenemos que $0 \leq y = 0 + y \leq x + y$, esto es, $0 \leq x + y$. Por lo tanto $x + y \in X^+$.
- (b) Sean $x \in X^+$ y $\lambda \geq 0$, entonces $0 \leq x$. Por 2. de la definición 2.4., tenemos que $0 = \lambda 0 \leq \lambda x$, esto es, $0 \leq \lambda x$. Por lo tanto $\lambda x \in X^+$.
- (c) Supongamos que $x \in X^+$ y $-x \in X^+$, entonces $0 \leq x$ y $0 \leq -x$. Por 1. de la definición 2.4., tenemos que $0 + x \leq -x + x$, luego $x \leq 0$. Así, $0 \leq x$ y $x \leq 0$ lo que implica que $x = 0$.

Por lo tanto por (a),(b) y (c), se concluye que X^+ es un cono. □

El teorema anterior nos dice que cualquier espacio vectorial ordenado define un cono. Surge de manera natural la siguiente pregunta, dado cualquier cono en un espacio vectorial, ¿definirá este un espacio vectorial ordenado? La respuesta la da el siguiente teorema.

Teorema 2.7. *Todo cono P en X define un orden parcial vectorial \leq en X como sigue:*

$$x \leq y, \text{ si y sólo si, } y - x \in P.$$

Demostración.

Primero veamos que \leq es una relación de orden sobre X .

- (i) Sea $x \in X$. Dado que $x - x = 0$ y $0 \in P$, $x - x \in P$ lo que implica que $x \leq x$.
- (ii) Sean $x, y \in X$ tales que $x \leq y$ y $y \leq x$. Entonces $y - x \in P$ y $x - y \in P$. Notemos que $x - y = -(y - x)$, luego $y - x, -(y - x) \in P$. Dado que P es un cono se tiene que $y - x = 0$ y por lo tanto $x = y$.

- (iii) Sean $x, y, z \in P$ tales que $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $y - x \in P$ y $z - y \in P$. Notemos que $z - x = z + 0 - x = z - y + y - x = (z - y) + (y - x)$, es decir, $z - x = (z - y) + (y - x)$. Por la observación anterior se sigue que $z - x \in P$, esto es, $x \leq z$.

Lo que sigue es ver que \leq es compatible con la estructura de X .

- (iv) Sean $x, y, z \in X$ tal que $x \leq y$, entonces $y - x \in P$. Notemos que $y - x = y + 0 - x = y + (z - z) - x = (y + z) - (x + z)$, esto es, $y - x = (y + z) - (x + z)$, luego $(y + z) - (x + z) \in P$. Por lo tanto $(x + z) \leq (y + z)$.
- (v) Sean $x, y \in X$ tal que $x \leq y$ y $\lambda \geq 0$, esto es, $y - x \in P$. Dado que $y - x \in P$ y P es un cono, se sigue que $\lambda(y - x) = \lambda y - \lambda x \in P$. Por lo tanto, $\lambda x \leq \lambda y$.

Por lo tanto, de (i)-(v), \leq es un orden parcial vectorial. □

Por lo tanto, siempre que tengamos un cono, vamos a tener un espacio vectorial ordenado cuyo orden parcial vectorial es el inducido por el cono. En consecuencia, existe una correspondencia uno a uno entre los ordenes parciales vectoriales y los conos. En otras palabras, un espacio vectorial ordenado es un espacio vectorial equipado con un cono.

Observación 2.8. Dado un cono P en X , se cumple que el cono positivo X^+ de X coincide con P , esto es, $X^+ = P$ o lo que es igual $P = \{x \in X : 0 \leq x\}$.

Si deseamos enfatizar que el orden parcial vectorial sobre X es generado por el cono P , entonces podemos denotarlo por \leq_P .

Terminaremos esta sección con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.9. Ejemplos de espacios vectoriales ordenados y conos.

1. Sea $X = \mathbb{R}$ con el orden usual de \mathbb{R} . Entonces, X es un espacio vectorial ordenado con cono positivo igual a la recta real positiva, esto es, $X^+ = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x\}$.
2. Sea $X = \mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico, esto es, si $(a, b), (c, d) \in X$ decimos que $(a, b) \leq (c, d)$, si y sólo si, $a < c$ ó $(a = c \text{ y } b \leq d)$. Entonces, X es un espacio vectorial ordenado con cono positivo $X^+ = \{(x, y) \in X : 0 < c \text{ ó } (x = 0 \text{ y } 0 \leq y)\}$.

3. Sea $X = \mathbb{R}^2$ con el orden siguiente:
Si $(a, b), (c, d) \in X$ decimos que $(a, b) \leq (c, d)$, si y sólo si, $a \leq c$ y $b \leq d$. Entonces, X es un espacio vectorial ordenado con cono positivo $X^+ = \{(x, y) \in X : 0 \leq x \text{ y } 0 \leq y\}$.
4. Sea $X = \mathbb{R}^n$ con el orden siguiente:
Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ decimos que $x \leq y$, si y sólo si, $x_i \leq y_i$ para toda $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces, X es un espacio vectorial ordenado con cono positivo $X^+ = \{x \in X : 0 \leq x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$.
5. Sea $X = C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua en } [a, b]\}$ con el orden siguiente:
Si $f, g \in X$ decimos que $f \leq g$, si y sólo si, $f(t) \leq g(t)$ para cada $t \in [a, b]$. Entonces, X es un espacio vectorial ordenado con cono positivo $X^+ = \{f \in X : 0 \leq f(t), t \in [a, b]\}$.

2.2. Espacios de Riesz

En esta sección discutiremos la clase de los espacios de Riesz, exhibiremos algunas de sus principales propiedades. Comenzaremos con la definición de espacio de Riesz.

Definición 2.10. *Sea L un espacio vectorial ordenado. Diremos que*

1. *L es un espacio de Riesz si para cada par de vectores $x, y \in L$ su supremo existe en L .*
2. *L es Dedekind completo si $\sup D$ existe en L para cada conjunto no vacío $D \subset L$ el cuál es acotado superiormente.*

El cono de un espacio de Riesz es llamado cono lattice. También decimos que un cono P de un espacio vectorial X es un cono lattice si X parcialmente ordenado por el cono P es un espacio de Riesz. Un subespacio vectorial M de un espacio de Riesz L se dice que es un **subespacio de Riesz** si M bajo el orden inducido de L es un espacio de Riesz.

Utilizaremos la notación clásica de lattice, esto es, si L es un espacio de Riesz y $x, y \in L$, entonces $\sup\{x, y\} = x \vee y$ e $\inf\{x, y\} = x \wedge y$.

En todo espacio de Riesz hay tres vectores importantes asociados con cada elemento del espacio.

Definición 2.11. Sean L un espacio de Riesz y $x \in L$. Entonces

1. $x^+ = x \vee 0$ es llamado la parte positiva de x ,
2. $x^- = (-x) \vee 0$ es llamado la parte negativa de x ,
3. $|x| = x \vee (-x)$ es llamado el valor absoluto de x .

Observación 2.12. Sean L un espacio de Riesz y $x \in L$. Entonces x^+ y x^- pertenecen a L^+ .

El siguiente teorema contiene una lista de identidades que se cumplen para todo elemento de un espacio de Riesz.

Teorema 2.13. Sea L un espacio de Riesz, entonces para todo $x, y, z \in L$ tenemos lo siguiente

1. $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$ y $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$,
2. $x - (y \vee z) = (x - y) \vee (x - z)$ y $x - (y \wedge z) = (x - y) \wedge (x - z)$,
3. $x \vee y = (x - y)^+ + y = (y - x)^+ + x$,
4. $\lambda(x \vee y) = (\lambda x) \vee (\lambda y)$ y $\lambda(x \wedge y) = (\lambda x) \wedge (\lambda y)$ para todo $\lambda \geq 0$,
5. $|\lambda x| = \lambda|x|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,
6. $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ y $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$,
7. $x + y = (x \vee y) + (x \wedge y)$,
8. $x = x^+ - x^-$ y $x^+ \wedge x^- = 0$,
9. $|x| = x^+ + x^-$ (y así $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$),
10. $|x - y| = (x \vee y) - (x \wedge y)$,
11. $|x + y| \vee |x - y| = |x| + |y|$,
12. $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$ y $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}(|x + y| - |x - y|)$.

Demostración. Sólo demostraremos las identidades que nos serán de utilidad en lo posterior. Las demás pruebas las puede consultar en [1].

4. Sean $x, y \in L$. Si $\lambda = 0$ es inmediato. Supongamos que $\lambda > 0$. Dado que $x \leq x \vee y$ y $y \leq x \vee y$, tenemos que $\lambda x \leq \lambda(x \vee y)$ y $\lambda y \leq \lambda(x \vee y)$. Ahora supongamos que $\lambda x \leq z$ y $\lambda y \leq z$. Se sigue que $x \leq \frac{1}{\lambda}z$ y $y \leq \frac{1}{\lambda}z$, y así $x \vee y \leq \frac{1}{\lambda}z$. Por consiguiente $\lambda(x \vee y) \leq z$, y por lo tanto $(\lambda x) \vee (\lambda y) = \lambda(x \vee y)$. La prueba de la otra identidad es análoga a la anterior.

8. Sea $x \in L$ y supongamos que $y = 0$ en la identidad 7., entonces $x = (x \vee 0) + (x \wedge 0) = (x \vee 0) - ((-x) \vee 0) = x^+ - x^-$, esto es, $x = x^+ - x^-$.

□

2.3. T. de Hahn-Banach en Espacios Vectoriales Ordenados

Esta sección está dedicada a presentar una generalización de el Teorema de Hahn-Banach en el contexto de los espacios vectoriales ordenados. Para enunciar y probar este resultado, necesitamos recordar algunas definiciones.

Definición 2.14. Sean X un espacio vectorial real, M un espacio vectorial ordenado y $p : X \rightarrow M$ una función. Diremos que

1. p es subaditiva cuando $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para cada $x, y \in X$,
2. p es homogénea positiva cuando $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, para cada $x \in X$ y $\lambda \geq 0$,
3. p es convexa cuando $p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda p(x) + (1 - \lambda)p(y)$, para cada $x, y \in X$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Diremos que p es sublineal si es subaditiva y homogénea positiva.

Observación 2.15. Toda función sublineal es convexa.

Demostración. Sean X un espacio vectorial, M un espacio vectorial ordenado y $p : X \rightarrow M$ una función sublineal. Sean $x, y \in X$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, entonces $0 \leq \lambda$ y $0 \leq 1 - \lambda$. Por 1. y 2. de la definición 2.14., tenemos que $p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq p(\lambda x) + p((1 - \lambda)y) = \lambda p(x) + (1 - \lambda)p(y)$, esto es, $p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda p(x) + (1 - \lambda)p(y)$. Por lo tanto, p es una función convexa. \square

Con las definiciones anteriores estamos listos para enunciar y demostrar una versión más general del Teorema de Hahn-Banach.

Lema 2.16. Sea X un espacio vectorial real, M un espacio de Riesz Dedekind completo, Y un subespacio propio de X y $u \in X \setminus Y$. Sean $V = \{y + \lambda u : y \in Y, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $f : Y \rightarrow M$ un operador lineal, $p : X \rightarrow M$ una función convexa tal que $f(y) \leq p(y)$ para toda $y \in Y$. Entonces existe $F : V \rightarrow M$ un operador lineal tal que $F(x) \leq p(x)$ para toda $x \in V$, y $F(y) = f(y)$ para toda $y \in Y$ (F es una extensión de f a V).

Demostración. Primero probemos que existe una extensión lineal de f a V .

Sea $w \in M$. Definimos $F : V \rightarrow M$ por $F(y + \lambda u) = f(y) + \lambda w$, entonces tenemos que

1. $F(y) = f(y)$ para toda $y \in Y$.

En efecto, sea $y \in Y$. Notemos que $y = y + 0u$ y así $y \in V$. Entonces $F(y) = F(y + 0u) = f(y) + 0w = f(y)$, esto es, $F(y) = f(y)$.

2. F es un operador lineal.

En efecto, sean $y, y_1, y_2 \in Y$, $\alpha, \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Entonces

$$(a) \quad F((y_1 + \lambda_1 u) + (y_2 + \lambda_2 u)) = F((y_1 + y_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)u) = f(y_1 + y_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)w = f(y_1) + f(y_2) + \lambda_1 w + \lambda_2 w = (f(y_1) + \lambda_1 w) + (f(y_2) + \lambda_2 w) = F(y_1 + \lambda_1 u) + F(y_2 + \lambda_2 u), \text{ esto es, } F((y_1 + \lambda_1 u) + (y_2 + \lambda_2 u)) = F(y_1 + \lambda_1 u) + F(y_2 + \lambda_2 u).$$

$$(b) \quad F(\alpha(y + \lambda u)) = F((\alpha y) + (\alpha \lambda)u) = f(\alpha y) + (\alpha \lambda)w = \alpha f(y) + \alpha(\lambda w) = \alpha(f(y) + \lambda w) = \alpha F(y + \lambda u), \text{ esto es, } F(\alpha(y + \lambda u)) = \alpha F(y + \lambda u).$$

De (a) y (b) concluimos que F es lineal.

Por lo tanto, por 1. y 2., F es un operador lineal que extiende f a V .

Para la otra parte de la prueba, debe existir $w \in M$ tal que

$$F(y + \lambda u) = f(y) + \lambda w \leq p(y + \lambda u) \tag{2.1}$$

para toda $y \in Y$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Así tenemos que probar (2.1). Notemos que (2.1) es equivalente a las siguientes proposiciones:

- (i) Existe $w \in M$ tal que $f(y) + \lambda w \leq p(y + \lambda u)$ para toda $y \in Y$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (ii) Existe $w \in M$ tal que $\frac{1}{\lambda}[f(x) - p(x - \lambda u)] \leq w \leq \frac{1}{\mu}[p(y + \mu u) - f(y)]$ para toda $x, y \in Y$ y $\lambda, \mu > 0$.
- (iii) $\sup\{\frac{1}{\lambda}[f(x) - p(x - \lambda u)] : x \in Y, \lambda > 0\} \leq \inf\{\frac{1}{\mu}[p(y + \mu u) - f(y)] : y \in Y, \mu > 0\}$.
- (iv) $\frac{1}{\lambda}[f(x) - p(x - \lambda u)] \leq \frac{1}{\mu}[p(y + \mu u) - f(y)]$ para toda $x, y \in Y$ y $\lambda, \mu > 0$.
- (v) $f(\mu x + \lambda y) \leq \mu p(x - \lambda u) + \lambda p(y + \mu u)$ para toda $x, y \in Y$ y $\lambda, \mu > 0$.

Demostración.

(i) \implies (ii): Sean $x, y \in Y$ y $\lambda, \mu > 0$. Entonces para $-\lambda$ y μ , tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) + (-\lambda)w &\leq p(x + (-\lambda)u) & y & f(y) + \mu w \leq p(y + \mu u) \\ \implies f(x) - p(x - \lambda u) &\leq \lambda w & y & \mu w \leq p(y + \mu u) - f(y) \\ \implies \frac{1}{\lambda}[f(x) - p(x - \lambda u)] &\leq w & y & w \leq \frac{1}{\mu}[p(y + \mu u) - f(y)] \end{aligned}$$

(ii) \implies (i): Sean $y \in Y$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (a) Si $\lambda = 0$, entonces $f(y) \leq p(y)$ es verdadero por hipótesis.
- (b) Si $\lambda > 0$, por (ii) tomando $\mu = \lambda$, $w \leq \frac{1}{\lambda}[p(y + \lambda u) - f(y)] \implies f(y) + \lambda w \leq p(y + \lambda u)$.
- (c) Si $\lambda < 0$, $-\lambda > 0$, entonces por (ii) tomando $x = y$, $\frac{1}{-\lambda}[f(y) - p(y - (-\lambda)u)] \leq w \implies f(y) + \lambda w \leq p(y + \lambda u)$.

(ii) \implies (iii): Supongamos que (ii) es verdadero, entonces w es cota superior de $\{\frac{1}{\lambda}[f(x) - p(x - \lambda u)] : x \in Y, \lambda > 0\}$ y este conjunto es no vacío, como M es Riesz Dedekind completo existe $\sup\{\frac{1}{\lambda}[f(x) - p(x - \lambda u)] : x \in Y, \lambda > 0\}$ y $\sup\{\frac{1}{\lambda}[f(x) - p(x - \lambda u)] : x \in Y, \lambda > 0\} \leq w$. De forma análoga, $w \leq \inf\{\frac{1}{\mu}[p(y + \mu u) - f(y)] : y \in Y, \mu > 0\}$.

(iii) \implies (ii): Basta tomar $w = \sup\{\frac{1}{\lambda}[f(x) - p(x - \lambda u)] : x \in Y, \lambda > 0\}$ ó $w = \inf\{\frac{1}{\mu}[p(y + \mu u) - f(y)] : y \in Y, \mu > 0\}$.

(iii) \implies (iv): Se sigue de la definición de supremo e ínfimo.

(iv) \implies (iii): Se sigue de la definición de supremo e ínfimo.

(iv) \Leftrightarrow (v): Sean $x, y \in Y$ y $\lambda, \mu > 0$. Tenemos que

$$\frac{1}{\lambda}[f(x) - p(x - \lambda u)] \leq \frac{1}{\mu}[p(y + \mu u) - f(y)]$$

$$\Leftrightarrow \mu[f(x) - p(x - \lambda u)] \leq \lambda[p(y + \mu u) - f(y)]$$

$$\Leftrightarrow f(\mu x) - \mu p(x - \lambda u) \leq \lambda p(y + \mu u) - f(\lambda y)$$

$$\Leftrightarrow f(\mu x) + f(\lambda y) \leq \lambda p(y + \mu u) + \mu p(x - \lambda u)$$

$$\Leftrightarrow f(\mu x + \lambda y) \leq \lambda p(y + \mu u) + \mu p(x - \lambda u).$$

□

Por lo tanto, por (i)-(v), (2.1) será verdadera si (v) es verdadera. Veamos que (v) se cumple. Para mostrar (v) usaremos la conexidad de p . Sean $x, y \in Y$ y $\lambda, \mu > 0$, entonces

$$\begin{aligned} f(\mu x + \lambda y) &= (\lambda + \mu)f\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}x + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}y\right) \\ &\leq (\lambda + \mu)p\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}x + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}y\right) \\ &= (\lambda + \mu)p\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}[x - \lambda u] + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}[y + \mu u]\right) \\ &\leq (\lambda + \mu)\left[\frac{\mu}{\lambda + \mu}p(x - \lambda u) + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}p(y + \mu u)\right] \\ &= \mu p(x - \lambda u) + \lambda p(y + \mu u) \end{aligned}$$

Por lo tanto (v) es verdadera y en consecuencia (2.1) también lo es. Definamos $F : V \rightarrow M$ como $F(y + \lambda u)$ con $y \in Y$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, que por todo lo anterior en un operador lineal que extiende a f y cumple (2.1).

□

Teorema 2.17 (Hahn-Banach real). *Sea X un espacio vectorial real, M un espacio de Riesz Dedekind Completo, y sea $p : X \rightarrow M$ una función convexa-en particular, sea p sublineal. Si Y es un subespacio vectorial de X y $S : Y \rightarrow M$ es un operador lineal que satisface $S(y) \leq p(y)$ para cada $y \in Y$, entonces existe un operador lineal $T : X \rightarrow M$ tal que*

1. $T = S$ sobre Y , esto es, T es una extensión lineal de S a todo X y
2. $T(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Demostración. Si $Y = X$ el resultado se cumple.

Sean Y un subespacio propio de X y $u \in X \setminus Y$. Consideremos el conjunto

$$W = \{g : D_g \rightarrow M : D_g \leq X, g \text{ es lineal}, g|_Y = S \text{ y } g(x) \leq p(x), \forall x \in D_g\}$$

El conjunto $W \neq \emptyset$ ya que $S \in W$. Definimos un orden parcial sobre W como sigue: Sean $g_1, g_2 \in W$, entonces

$g_1 \leq g_2$ si y sólo si g_2 extiende a g_1 , esto es, $D_{g_1} \subset D_{g_2}$ y $g_2|_{D_{g_1}} = g_1$.

\leq es un orden parcial sobre W .

Ahora veamos que W satisface las hipótesis del Lema de Zorn.

Sea $C = \{g_\alpha : \alpha \in I\}$ un a cadena en W y definamos $\bar{g} : D_{\bar{g}} \rightarrow M$ por $\bar{g}(x) = g_\alpha(x)$, si $x \in D_{g_\alpha}$, donde $D_{\bar{g}} = \bigcup_{\alpha \in I} D_{g_\alpha}$.

(i) $D_{\bar{g}}$ es un subespacio vectorial de X .

Sean $x, y \in D_{\bar{g}}$ y $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$, entonces existen $\alpha, \beta \in I$ tal que $x \in D_{g_\alpha}, y \in D_{g_\beta}$ y además $\lambda x \in D_{g_\alpha}$ y $\eta y \in D_{g_\beta}$. Dado que D_{g_α} y D_{g_β} son subespacios de X , $D_{g_\alpha} \subset D_{g_\beta}$ ó $D_{g_\beta} \subset D_{g_\alpha}$. Supongamos que $D_{g_\alpha} \subset D_{g_\beta}$, entonces $\lambda x, \eta y \in D_{g_\beta}$ y así $\lambda x + \eta y \in D_{g_\beta}$. Como $D_{g_\beta} \subset D_{\bar{g}}$ se tiene que $\lambda x + \eta y \in D_{\bar{g}}$. De manera similar si $D_{g_\beta} \subset D_{g_\alpha}$.

(ii) \bar{g} es lineal.

Sean $x, y \in D_{\bar{g}}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces existen $\alpha, \beta \in I$ tal que $x \in D_{g_\alpha}, y \in D_{g_\beta}$ y además $\lambda x \in D_{g_\alpha}$. Supongamos que $D_{g_\alpha} \subset D_{g_\beta}$, entonces $\lambda x, x, y \in D_{g_\beta}$. Así $\bar{g}(x+y) = g_\beta(x+y) = g_\beta(x) + g_\beta(y) = \bar{g}(x) + \bar{g}(y)$, esto es, $\bar{g}(x+y) = \bar{g}(x) + \bar{g}(y)$ y $\bar{g}(\lambda x) = g_\beta(\lambda x) = \lambda g_\beta(x) = \lambda \bar{g}(x)$, esto es, $\bar{g}(\lambda x) = \lambda \bar{g}(x)$. De manera similar si $D_{g_\beta} \subset D_{g_\alpha}$.

(iii) \bar{g} extiende a S , esto es, $\bar{g}|_Y = S$.

(iv) $\bar{g}(x) \leq p(x)$ para toda $x \in D_{\bar{g}}$.

(v) \bar{g} es cota superior de C .

Sea $g_\alpha \in C$. Notamos que $D_{g_\alpha} \subset D_{\bar{g}}$ y $\bar{g}|_{D_{g_\alpha}} = g_\alpha$. Entonces $g_\alpha \leq \bar{g}$.

Por lo tanto, de (i)-(v), toda cadena en W tiene una cota superior en W . Aplicando el Lema de Zorn existe $T \in W$ elemento maximal de W . Resta probar que $D_T = X$. Por contradicción, supongamos que existe $u \in X \setminus D_T$. Por el Lema 2.16., existe F operador lineal definido en $V_1 = \{x + \lambda u : x \in D_T, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $F|_{D_T} = T$ y $F(x) \leq p(x)$ para toda $x \in D_F$. Esto quiere decir que $F \in W$ y $T \leq F$, y dado que T es maximal en W se concluye que $T = F$, lo que es una contradicción ya que D_T está contenido propiamente en V_1 . □

2.3.1. Consecuencias del Teorema de Hahn-Banach

En esta sección ilustraremos algunas consecuencias del Teorema de Hahn-Banach, principalmente las relacionadas con teoremas de extensión de operadores positivos.

Antes que nada, introducimos una clase de operador entre espacios ordenados que está relacionado con la estructura de orden de los espacios.

Definición 2.18. Sea $T : L \longrightarrow M$ un operador lineal entre dos espacios vectoriales ordenados. Diremos que T es positivo si $0 \leq T(x)$ para toda $x \in L^+$.

Observación 2.19. Si $T : L \longrightarrow M$ es un operador lineal positivo y $x, y \in L$ con $x \leq y$, entonces $T(x) \leq T(y)$.

Demostración. Sean $x, y \in L$ tal que $x \leq y$, entonces $0 = x + (-x) \leq y + (-x) = y - x$, esto es, $0 \leq y - x$ y así $y - x \in L^+$. Dado que T es positivo, se sigue que $0 \leq T(y - x) = T(y) - T(x)$ y por lo tanto $T(x) \leq T(y)$. \square

Teorema 2.20. Sea $T : L \longrightarrow M$ un operador lineal positivo entre dos espacios de Riesz con M Dedekind completo. Supongamos también que G es un subespacio de Riesz de L y que $S : G \longrightarrow M$ es un operador lineal que satisface $0 \leq S(x) \leq T(x)$ para todo $x \in G^+$. Entonces S puede ser extendido a un operador lineal positivo $F : L \longrightarrow M$ tal que $0 \leq F(x) \leq T(x)$ para todo $x \in L^+$.

Demostración.

En primer lugar veamos que existe una función sublineal p que domina a S en todo G . Definamos $p : L \longrightarrow M$ con $p(x) = T(x^+)$.

(i) p es subaditiva.

Sean $x, y \in L$. Por la definición de x^+ y y^+ , tenemos que $(0 \leq x^+$ y $x \leq x^+)$ y $(0 \leq y^+$ y $y \leq y^+)$, luego $0 \leq x^+ + y^+$ y $x + y \leq x^+ + y^+$ y así $(x + y)^+ \leq x^+ + y^+$. Entonces, por la observación 2.20, $T((x + y)^+) \leq T(x^+ + y^+) = T(x^+) + T(y^+)$, esto es, $T((x + y)^+) \leq T(x^+) + T(y^+)$. Por lo tanto $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

(ii) p es homogénea positiva.

Sean $x \in L$ y $\lambda \geq 0$. Por 4. del teorema 2.13., $\lambda x^+ = \lambda(x \vee 0) = (\lambda x) \vee (\lambda 0) = (\lambda x) \vee 0 = (\lambda x)^+$, esto es, $\lambda x^+ = (\lambda x)^+$. Entonces

$T((\lambda x)^+) = T(\lambda x^+) = \lambda T(x^+)$, esto es, $T((\lambda x)^+) = \lambda T(x^+)$. Por lo tanto, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.

Por lo tanto, por (i) y (ii), p es sublineal. Ahora veamos que p domina a S en G .

Sea $x \in G$, por 8. del teorema 2.13., $x = x^+ - x^-$, entonces $S(x) = S(x^+ - x^-) = S(x^+) - S(x^-)$, esto es, $S(x) = S(x^+) - S(x^-)$. Por la observación 2.12., $x^+, x^- \in G^+$, luego por hipótesis $0 \leq S(x^+) \leq T(x^+)$ y $0 \leq S(x^-) \leq T(x^-)$. Dado que $0 \leq S(x^-)$, se tiene que $S(x^+) \leq S(x^+) + S(x^-)$ ó lo que es igual $S(x^+) - S(x^-) \leq S(x^+)$. Entonces $S(x) \leq S(x^+) \leq T(x^+) = p(x)$, esto es, $S(x) \leq p(x)$.

Por el teorema 2.17.(Teorema de Hahn-Banach) existe una extensión lineal de F de S a todo L que satisface $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in L$. Ahora, si $x \in L^+$, entonces

$$-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = T((-x)^+) = T(0) = 0$$

y así $0 \leq F(x) \leq p(x) = T(x^+) = T(x)$. Por lo tanto $0 \leq F(x) \leq T(x)$. □

Antes de continuar, demos la siguiente definición.

Definición 2.21. Sean L un espacio vectorial ordenado y G un subespacio vectorial de L . Diremos que G mayoriza a L , si para cada $x \in L$ existe $y \in G$ tal que $x \leq y$.

Teorema 2.22 (Kantorovich). Sean L y M dos espacios vectoriales ordenados con M un espacio de Riesz Dedekind completo. Si G es un subespacio vectorial que mayoriza a L y $T : G \rightarrow M$ es un operador lineal positivo, entonces T tiene una extensión lineal positiva a todo L .

Demostración. Sea $x \in L$ fijo y sea $y \in G$ tal que $x \leq y$. Desde que G mayoriza a L , existe un vector $u \in G$ con $u \leq y$. Por lo tanto, $u \leq y$ y la positividad de T implica que $T(u) \leq T(y)$ para toda $y \in G$ con $x \leq y$. En particular, se sigue que $\inf\{T(y) : y \in G \text{ y } x \leq y\}$ existe en M para toda $x \in L$. Así, una función $p : L \rightarrow M$ puede ser definida vía la formula

$$p(x) = \inf\{T(y) : y \in G \text{ y } x \leq y\}.$$

Claramente, $T(x) = p(x)$ se cumple para toda $x \in G$ y un argumento fácil muestra que p es también sublineal.

Ahora, por el Teorema de Hahn-Banach, el operador T tiene una extensión lineal S a todo L que satisface $S(z) \leq p(z)$ para todo $z \in L$. Si $z \in L^+$, entonces de

$$-S(z) = S(-z) \leq p(-z) \leq T(0) = 0$$

vemos que $0 \leq S(z)$. Esto muestra que S es una extensión lineal positiva de T a todo L .

□

Capítulo 3

Conos en Espacios Normados

En este capítulo, primero introduciremos el concepto de un cono P en un espacio de Banach y la relación parcialmente ordenada inducida por P . Entonces discutiremos algunas clases de conos elementales, los normales, regulares, completamente regulares, lattice y generadores.

3.1. Conos Normales

Definición 3.1. Sea E un espacio de Banach real y $P \subset E$ un conjunto convexo cerrado no vacío.

1. P es llamado un cono si satisface las siguientes condiciones:

- a) Si $x \in P$, entonces $\lambda x \in P$ para todo $\lambda \geq 0$,
- b) Si $x \in P$ y $-x \in P$, entonces $x = \theta$.

2. Supongamos que P es un cono en E . Si $\overset{\circ}{P} \neq \emptyset$, donde $\overset{\circ}{P}$ denota el conjunto de puntos interiores de P , decimos que P es un cono sólido.

Observación 3.2. De la definición de cono se desprende lo siguiente:

- 1. $\theta \in P$.
- 2. Si $x, y \in P$, entonces $x + y \in P$.
- 3. $\{\theta\}$ es un cono y se le conoce como cono trivial.
- 4. $\{\theta\}$ es el único subespacio vectorial de E que es un cono.

Demostración.

1. Dado que P es distinto del vacío existe $x \in P$. Si tomamos $\lambda = 0$, entonces $\lambda x \in P$ pero $\lambda x = \theta$, es decir, $\theta \in P$.
2. Sean $x, y \in P$ y $0 < \alpha, \beta$, entonces $(\frac{\alpha+\beta}{\alpha})x, (\frac{\beta}{\alpha+\beta})y \in P$. Así, dado que P es conexo, se sigue que $x + y = (\frac{\alpha}{\alpha+\beta})(\frac{\alpha+\beta}{\alpha})x + (\frac{\beta}{\alpha+\beta})(\frac{\beta}{\alpha+\beta})y \in P$ ya que $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1$.
3. La prueba es fácil.
4. Supongamos que existe $V \neq \{\theta\}$ subespacio vectorial de E tal que V es un cono. Entonces existe $x \in V$ con $x \neq \theta$. Como $x \in V$, entonces $-x \in V$, así dado que V es un cono $x = \theta$, lo que es una contradicción.

□

En todo lo que sigue, cuando hablemos de un cono P , estamos suponiendo implícitamente que no es el cono trivial, esto es, $P \neq \{\theta\}$.

Teorema 3.3. *Cada cono P en E define una relación de orden \leq en E como sigue:*

$$x \leq y, \text{ si y sólo si, } y - x \in P.$$

Demostración.

Veamos que en efecto \leq es una relación de orden sobre E .

1. Sea $x \in E$. Dado que $x - x = \theta$ y $\theta \in P$, $x - x \in P$ lo que implica que $x \leq x$.
2. Sean $x, y \in E$ tales que $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $y - x \in P$ y $x - y \in P$. Notemos que $x - y = -(y - x)$, luego $y - x, -(y - x) \in P$. Dado que P es un cono se tiene que $y - x = \theta$ y por lo tanto $x = y$.
3. Sean $x, y, z \in E$ tales que $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $y - x \in P$ y $z - y \in P$. Notemos que $z - x = z + \theta - x = z - y + y - x = (z - y) + (y - x)$, esto es, $z - x = (z - y) + (y - x)$. Por la observación 3.2., se sigue que $z - x \in P$, esto es $x \leq z$.

□

Por lo tanto cada espacio de Banach E es un conjunto parcialmente ordenado.

Observación 3.4. Si P es un cono, entonces $P = \{x \in E : \theta \leq x\}$.

Nota 1. 1. Si $x \leq y$ y $x \neq y$, denotamos esto por $x < y$.

2. Si P es un cono solido y $y - x \in \overset{\circ}{P}$, denotamos esto por $x \ll y$.

De la definición 3.1. y la observación 3.2., se deducen las siguientes propiedades:

Proposición 3.5. Sean E un espacio de Banach y P un cono en E . Entonces se cumple:

1. Si $x \leq y$, entonces $-y \leq -x$.
2. Si $x \leq y$ y $\lambda > 0$, entonces $\lambda x \leq \lambda y$.
3. Si $x_1 \leq y_1$ y $x_2 \leq y_2$, entonces $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$.

Demostración.

1. Supongamos que $x \leq y$, entonces $y - x \in P$, pero $y - x = -x - (-y)$, es decir, $-x - (-y) \in P$. Así $-y \leq -x$.
2. Supongamos que $x \leq y$ y sea $\lambda > 0$, entonces $y - x \in P$. Por la definición de cono, $\lambda(y - x) = \lambda y - \lambda x \in P$. Así $\lambda x \leq \lambda y$.
3. Supongamos que $x_1 \leq y_1$ y $x_2 \leq y_2$, entonces $y_1 - x_1, y_2 - x_2 \in P$. Por la observación 3.2., $(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) \in P$, pero $(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) = (y_1 + y_2) - (x_1 + x_2)$, es decir, $(y_1 + y_2) - (x_1 + x_2) \in P$. Por lo tanto, $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$.

□

Ejemplo 3.6. Ejemplos de conos y conos solidos

1. Sean $E = \mathbb{R}^n$ con la norma uniforme y $P_1 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$. P_1 es un cono. Además P_1 es solido, $(1, 0, \dots, 0) \in \overset{\circ}{P}_1$. Más aún, $\overset{\circ}{P}_1 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$.
2. Sean $E = C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua en } [a, b]\}$ con la norma uniforme y $P_2 = \{h \in E : 0 \leq h(t), t \in [a, b]\}$. P_2 es un cono. Más aún, $\overset{\circ}{P}_2 = \{h \in E : h(t) > 0, t \in [a, b]\}$.

3. Sea $E = \{f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua y diferenciable en } [0, 2\pi]\}$, esto es, $E = C^1[0, 2\pi]$, donde su norma es definida como sigue:

$$\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |x(t)| + \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |x'(t)|$$

Sea $P_3 = \{x \in E : x(t) \geq 0, t \in [0, 2\pi]\}$. P_3 es un cono.

4. Sea $E = l_\infty = \{x = \{x_n\} \subset \mathbb{R} : \{x_n\} \text{ es acotada en } \mathbb{R}\}$ con la norma uniforme. Sea $P_4 = \{x \in E : x_n \geq 0, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$. P_4 es un cono solido y $\overset{\circ}{P}_4 = \{x \in E : x_n > 0, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$.
5. Sea $E = c_0 = \{x = \{x_n\} \subset \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$ con la norma uniforme. Sea $P_5 = \{x \in E : x_n \geq 0, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$. P_5 es un cono solido y $\overset{\circ}{P}_5 = \{x \in E : x_n > 0, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$.

Definición 3.7. Un cono $P \subset E$ se dice que es normal si existe una constante $N > 0$ tal que para toda $x, y \in P$

$$\text{si } \theta \leq x \leq y \text{ entonces } \|x\| \leq N\|y\|.$$

El menor número positivo N que satisface lo anterior es llamado constante normal.

Observación 3.8. Sea P un cono. Si P no es normal, entonces para toda $N > 0$ existen $x_N, y_N \in P$ tal que $\theta \leq x_N \leq y_N$ y $\|x_N\| > N\|y_N\|$.

Teorema 3.9. Sea P un cono en E . Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. P es normal.
2. Existe una norma equivalente $\|\cdot\|_1$ sobre E tal que

$$\text{si } \theta \leq x \leq y \text{ entonces } \|x\|_1 \leq \|y\|_1$$

esto es, la norma $\|\cdot\|$ es monótona

3. $x_n \leq z_n \leq y_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, $\|y_n - x\| \rightarrow 0 \implies \|z_n - x\| \rightarrow 0$.

4. El conjunto $(B+P)\cap(B-P)$ es acotado, donde $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$.
5. Cualquier intervalo ordenado $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ es acotado.
6. Existe $\delta > 0$ tal que $\|x+y\| \geq \delta$ para cada $x, y \in P$ con $\|x\| = \|y\| = 1$.
7. Existe $\gamma > 0$ tal que

$$\|x+y\| \geq \gamma \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

para cada $x, y \in P$.

Demostración.

(1) \implies (2): Para cada $x \in E$, sean $A_x = \{\|u\| : u \leq x\}$ y $B_x = \{\|v\| : x \leq v\}$, definimos $\|\cdot\|_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$ como $\|x\|_1 = \inf A_x + \inf B_x = \inf(A_x + B_x)$. Probemos que $\|\cdot\|_1$ es una norma sobre E . Como 0 es una cota inferior para $A_x + B_x$, entonces $0 \leq \|x\|_1$ para cada $x \in E$. Claramente, $\|\theta\|_1 = 0$. Supongamos que $\|x\|_1 = 0$, esto es, $\inf(A_x + B_x) = 0$. Sea $\epsilon > 0$, entonces ϵ no es cota inferior de $A_x + B_x$, así existen $u, v \in E$ tal que $u \leq x \leq v$, $\|u\| + \|v\| < \epsilon$. Por lo tanto, por la normalidad de P , tenemos

$$\|x\| \leq \|x - u\| + \|u\| \leq N\|v - u\| + \|u\| \leq N(\|u\| + \|v\|) + \|u\| < (N+1)\epsilon$$

donde N es la constante normal de P . Luego $\|x\| < (N+1)\epsilon$. Por lo tanto, $\|x\| = 0$ y así $x = \theta$. Es fácil ver que $\|\lambda x\|_1 = |\lambda|\|x\|_1$ para cada $x \in E$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sean $x, y \in E$ y $\epsilon > 0$. Entonces $\|x\|_1 + \epsilon, \|y\|_1 + \epsilon$ no son cotas inferiores de $A_x + B_x$ y $A_y + B_y$, respectivamente. Así, existen $u_1, v_1, u_2, v_2 \in E$ tal que $u_1 \leq x \leq v_1, u_2 \leq y \leq v_2$ y

$$\|u_1\| + \|v_1\| < \|x\|_1 + \epsilon, \|u_2\| + \|v_2\| < \|y\|_1 + \epsilon$$

Por lo tanto, por la proposición 3.5., tenemos que $u_1 + u_2 \leq x + y \leq v_1 + v_2$, de lo cuál se sigue que

$$\|x+y\|_1 \leq \|u_1 + u_2\| + \|v_1 + v_2\|$$

y así

$$\|x+y\|_1 \leq (\|u_1\| + \|v_1\|) + (\|u_2\| + \|v_2\|) < \|x\|_1 + \|y\|_1 + 2\epsilon.$$

Por la arbitrariedad de ϵ , tenemos que $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$. Por lo tanto, $\|\cdot\|_1$ es una norma sobre E .

Ahora probemos que la norma $\|\cdot\|_1$ es monótona. Sean $x, y \in E$ y supongamos que $\theta \leq x \leq y$. Entonces tenemos que

$$\inf A_x = \inf A_y = 0$$

y así

$$\|x\|_1 = \inf B_x \leq \inf B_y = \|y\|_1$$

, esto es, $\|x\|_1 \leq \|y\|_1$.

Por último, probemos que $\|\cdot\|_1$ es equivalente a $\|\cdot\|$. Sea $x \in E$. Dado que $\|x\| \in A_x$ y $\|x\| \in B_x$, $\inf A_x \leq \|x\|$ y $\inf B_x \leq \|x\|$, por lo que $\|x\|_1 \leq \|x\| + \|x\|$, esto es, $\|x\|_1 \leq 2\|x\|$. Por otro lado, para todo $u, v \in E$ con $u \leq x \leq v$, tenemos

$$\|x\| \leq \|x - u\| + \|u\| \leq N\|v - u\| + \|u\| \leq (N + 1)(\|u\| + \|v\|)$$

, esto es, $\frac{1}{N+1}\|x\| \leq \|u\| + \|v\|$. Luego $\frac{1}{N+1}\|x\|$ es cota inferior de $A_x + B_x$, por lo que $\frac{1}{N+1}\|x\| \leq \|x\|_1$. Por lo tanto, $\frac{1}{N+1}\|x\| \leq \|x\|_1 \leq 2\|x\|$.

(2) \implies (3): Sean $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\} \subset E$ sucesiones tales que $x_n \leq z_n \leq y_n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, y $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, $\|y_n - x\| \rightarrow 0$. Por la proposición 2.5., se tiene que $\theta \leq z_n - x_n \leq y_n - x_n$, así por hipótesis $\|z_n - x_n\|_1 \leq \|y_n - x_n\|_1$. Como existen $M > m > 0$ tal que $m\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \|x\|$ para cada $x \in E$ y por hipótesis, $\|z_n - x_n\| \leq \frac{1}{m}\|z_n - x_n\|_1 \leq \frac{1}{m}\|y_n - x_n\|_1 \leq \frac{M}{m}\|y_n - x_n\|$, esto es, $\|z_n - x_n\| \leq \frac{M}{m}\|y_n - x_n\|$. Veamos que $\|y_n - x_n\| \rightarrow 0$. Sea $\epsilon > 0$. Para $\frac{\epsilon}{2}$ existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{2}$ y $\|y_n - x\| < \frac{\epsilon}{2}$ para cada $n \geq N_1$ y $n \geq N_2$, respectivamente. Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, tenemos que $\|y_n - x_n\| \leq \|y_n - x\| + \|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ para cada $n \geq N$. Por lo tanto, $\|y_n - x_n\| \rightarrow 0$. Así $\|z_n - x\| \leq \frac{M}{m}\|y_n - x_n\| \rightarrow 0$, por consiguiente $\|z_n - x\| \rightarrow 0$. Por último, se tiene que $\|z_n - x\| \leq \|z_n - x_n\| + \|x_n - x\| \rightarrow 0$. Por lo tanto $\|z_n - x\| \rightarrow 0$.

Las demás pruebas las puede consultar en [2].

□

Ejemplo 3.10. Ejemplos de conos normales

1. El cono P_1 del ejemplo 2.6. es normal.

Sean $x, y \in E = \mathbb{R}^n$ tal que $\theta \leq x \leq y$, esto es, $x_i \leq y_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Sea $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, como A es finito, $\sup A = \text{máx } A$, así existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $x_j = \sup A$. Así $\|x\|_\infty = x_j \leq y_j \leq \|y\|_\infty$, luego $\|x\|_\infty \leq \|y\|_\infty$. Por lo tanto, P_1 es normal con constante normal $N = 1$.

2. Los conos P_2, P_4 y P_5 del ejemplo 2.6., también son normales.
3. El cono P_3 no es normal.

Supongamos que P_3 es normal, entonces existe $N > 0$ tal que si $\theta \leq x \leq y$, entonces $\|x\| \leq N\|y\|$. Sean $x_n(t) = 1 - \cos nt$ y $y_n(t) = 2$ para $i = 1, 2, \dots, n$, tenemos que $\theta \leq x_n \leq y_n$, $\|x_n\| = 2 + n$ y $\|y_n\| = 2$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces $2 + n \leq 2N$ para $i = 1, 2, \dots, n$, lo que es imposible. Por lo tanto, P_3 no es normal.

3.2. Conos Regulares y Conos Completamente Regulares

Definición 3.11. Sea P un cono en un espacio de Banach E .

1. Si cada sucesión creciente en E acotada superiormente tiene límite (esto es, si una sucesión $\{x_n\} \subset E$ y $y \in E$ satisfacen la siguiente condición:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq y,$$

entonces existe $x \in E$ tal que $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$), entonces P se dice que es regular.

2. Si cada sucesión creciente en E acotada en la norma tiene límite (esto es, si una sucesión $\{x_n\} \subset E$ satisface la siguiente condición:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots, M = \sup_n \|x_n\| < \infty,$$

entonces existe $x \in E$ tal que $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$), entonces P se dice que es completamente regular.

Observación 3.12. Sea P un cono en E . Entonces:

1. P es regular, si y sólo si, cada sucesión decreciente en E acotada inferiormente tiene límite.
2. P es completamente regular, si y sólo si, cada sucesión decreciente en E acotada en la norma tiene límite.

Demostración.

1. Necesidad. Supongamos que P es un cono regular. Sean $\{x_n\} \subset E$ una sucesión y $y \in E$ tal que

$$y \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots \leq x_2 \leq x_1.$$

Veamos que existe $z \in E$ tal que $\|x_n - z\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. De las desigualdades anteriores se sigue que

$$-x_1 \leq -x_2 \leq \cdots \leq -x_n \leq \cdots \leq -y,$$

entonces $\{-x_n\} \subset E$ es una sucesión creciente acotada superiormente y como P es regular existe $x \in E$ tal que $\|-x_n - x\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sea $\epsilon > 0$. Dado que $\|-x_n - x\| = \|x_n - (-x)\|$, existe $N > 0$ tal que $\|x_n - (-x)\| < \epsilon$ para $n \geq N$, esto es, $\|x_n - (-x)\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto, $\{x_n\}$ tiene límite.

Suficiencia. Es análogo a lo anterior.

2. Necesidad. Supongamos que P es un cono completamente regular. Sea $\{x_n\} \subset E$ una sucesión tal que

$$\cdots \leq x_n \leq \cdots \leq x_2 \leq x_1, \quad M = \sup_n \|x_n\| < \infty.$$

Notemos que $\|-x_n\| = \|x_n\|$ y así $M = \sup_n \|-x_n\| < \infty$. De lo anterior se sigue que

$$-x_1 \leq -x_2 \leq \cdots \leq -x_n \leq \cdots,$$

entonces $\{-x_n\} \subset E$ es una sucesión creciente acotada en norma y como P es completamente regular existe $x \in E$ tal que $\|-x_n - x\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sea $\epsilon > 0$. Dado que $\|-x_n - x\| = \|x_n - (-x)\|$, existe $N > 0$ tal que $\|x_n - (-x)\| < \epsilon$ para $n \geq N$, esto es, $\|x_n - (-x)\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto, $\{x_n\}$ tiene límite.

Suficiencia. Es análogo a lo anterior.

□

El siguiente teorema muestra la relación que existe entre los conos normales, regulares y completamente regulares.

Teorema 3.13. *Sea P un cono en un espacio de Banach E . Entonces P es completamente regular $\implies P$ es regular $\implies P$ es normal.*

Demostración. Primero probemos que, si P no es normal entonces P no es regular ni completamente regular. Supongamos que P no es normal. Entonces por la observación 3.8., para toda $n \in \mathbb{N}$, $2^n > 0$ y así existen sucesiones $\{x_n\}, \{y_n\} \subset P$ tal que

$$\theta \leq x_n \leq y_n \text{ y } \|x_n\| > 2^n \|y_n\| \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.1)$$

Notemos que $\theta < x_n$, esto es, $\theta \leq x_n$ y $\theta \neq x_n$. Si $x_n = \theta$, entonces $\|x_n\| = 0 > 2^n \|y_n\| \geq 0$, luego $0 > 0$, lo que es falso. Así, $x_n \neq \theta$ y $\|x_n\| > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De forma similar $y_n \neq \theta$ y $\|y_n\| > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Ahora, sean $z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$ y $v_n = \frac{y_n}{2^n \|y_n\|}$. Por (3.1) tenemos que $\frac{1}{\|x_n\|} < \frac{1}{2^n \|y_n\|}$, luego $0 < \frac{1}{2^n \|y_n\|} - \frac{1}{\|x_n\|}$. Dado que $x_n \in P$ y P es un cono, tenemos que $(\frac{1}{2^n \|y_n\|} - \frac{1}{\|x_n\|})x_n = \frac{x_n}{2^n \|y_n\|} - \frac{x_n}{\|x_n\|} \in P$, por lo cual $z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \leq \frac{x_n}{2^n \|y_n\|}$. Ahora, como $0 < \frac{1}{2^n \|y_n\|}$ y $x_n \leq y_n$, por la proposición 3.5., $\frac{x_n}{2^n \|y_n\|} \leq \frac{y_n}{2^n \|y_n\|} = v_n$. De lo anterior tenemos que

$$\theta < z_n \leq \frac{x_n}{2^n \|y_n\|} \leq v_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (3.2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1. \quad (3.3)$$

Dado que en un espacio de Banach toda serie absolutamente convergente es convergente, existe $v \in E$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|$ converge a v , esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| = v. \quad (3.4)$$

Definase

$$w_n = \begin{cases} v_1 + v_2 + \dots + v_{2m} & \text{si } n = 2m \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \\ v_1 + v_2 + \dots + v_{2m} + z_{2m+1} & \text{si } n = 2m + 1 \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \end{cases}$$

Se sigue de (3.2),(3.3) y (3.4) que

$$\theta < w_2 \leq w_3 \leq w_4 \leq \cdots \leq v, \quad \sup_n \|w_n\| \leq 2.$$

Desde que $w_{2m+1} - w_{2m} = (v_1 + v_2 + \cdots + v_{2m} + z_{2m+1}) - (v_1 + v_2 + \cdots + v_{2m}) = z_{2m+1}$ se sigue que $\|w_{2m+1} - w_{2m}\| = \|z_{2m+1}\| = 1$, por lo tanto la sucesión $\{w_n\}$ no es de Cauchy y por consiguiente no es convergente. Por lo tanto, P no es regular ni completamente regular.

Por último, resta probar que si P es completamente regular, entonces P es regular. Supongamos que P es completamente regular. De acuerdo a la conclusión anterior, P es normal. Sean $\{x_n\}$ una sucesión en E y $y \in E$ tal que

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots \leq y.$$

Entonces tenemos que

$$\theta \leq y - x_n \leq y - x_1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

y así por normalidad

$$\|y - x_n\| \leq N\|y - x_1\|$$

donde N es la constante normal de P . Así tenemos que $\sup_n \|x_n\| < \infty$. Dado que P es completamente regular, entonces existe $x \in E$ tal que $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, y por lo tanto P es regular. □

Ejemplo 3.14. Ejemplos de conos regulares y completamente regulares

1. El cono P_1 del ejemplo 3.6., es completamente regular y por el teorema anterior, P_1 también es regular.
2. El cono P_2 no es regular. Por el ejemplo 3.10., P_2 es normal.
3. El cono P_3 no es normal por el ejemplo 3.10. y por el teorema anterior, P_3 no es regular.

Ejemplo 3.15. Ejemplo de un cono regular que no es completamente regular.

Sea $E = c_0$ y $P_5 = \{x \in E : x_n \geq 0, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$, el cono del ejemplo

3.6., con su norma definida por $\|x\| = \sup_n |x_n|$ para toda $x \in E$. Primero veamos que P_5 es un cono regular en c_0 .

Sean $x^{(m)} = \{x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}, \dots\}$, $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\} \in c_0$ tal que

$$x^{(1)} \leq x^{(2)} \leq \dots \leq x^{(m)} \dots \leq y,$$

esto es,

$$\begin{array}{ccccccc} x_1^{(1)} & \leq & x_1^{(2)} & \leq & \dots & \leq & x_1^{(m)} & \leq & \dots & \leq & y_1, \\ x_2^{(1)} & \leq & x_2^{(2)} & \leq & \dots & \leq & x_2^{(m)} & \leq & \dots & \leq & y_2, \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ x_n^{(1)} & \leq & x_n^{(2)} & \leq & \dots & \leq & x_n^{(m)} & \leq & \dots & \leq & y_n, \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

para cada $m, n = 1, 2, 3, \dots$. Entonces, las sucesiones $\{x_n^{(m)}\}$ para $m, n = 1, 2, 3, \dots$, son crecientes y acotadas superiormente en \mathbb{R} y por lo tanto existe $x_n^* \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} x_n^{(m)} = x_n^*$. Sea $x^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \dots\}$. Veamos que $x^* \in c_0$. De lo anterior y dado que $x^{(1)}, y \in c_0$ se cumple que

$$x_n^{(1)} \leq x_n^{(m)} \leq x_n^* \leq y_n \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \tag{3.5}$$

y $x_n^{(1)} \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, de (3.1) y por el teorema del sándwich, $x^* \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ y así $x^* \in c_0$. A continuación veamos que $x^{(m)}$ converge a x^* . Sea $\epsilon > 0$, y n_0 un entero positivo tal que

$$|x_n^{(1)}| < \epsilon, |y_n| < \epsilon, \quad n > n_0, \tag{3.6}$$

entonces, por (3.1) y (3.2), tenemos que

$$|x_n^{(m)}| < \epsilon, |x_n^*| < \epsilon, \quad n > n_0, \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \tag{3.7}$$

Escojamos un entero positivo m_0 tal que

$$|x_n^{(m)} - x_n^*| < \epsilon, \quad m > m_0 \quad (n = 1, 2, \dots, n_0). \tag{3.8}$$

Entonces, por (3.3) y (3.4), tenemos que

$$\begin{aligned} \|x^{(m)} - x^*\| &= \sup_n |x_n^{(m)} - x_n^*| \\ &\leq \sup_{n=1,2,\dots,n_0} |x_n^{(m)} - x_n^*| + \sup_{n>n_0} |x_n^{(m)}| + \sup_{n>n_0} |x_n^*| \\ &\leq 3\epsilon, \quad m > m_0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|x^{(m)} - x^*\|$ si $n \rightarrow \infty$, lo que prueba que P_5 es regular.

Por otro lado, sea $z^{(m)} = \{z_1^{(m)}, z_2^{(m)}, \dots, z_n^{(m)}, \dots\}$, donde

$$z_n^{(m)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq m, \\ 0 & \text{si } n > m \end{cases}$$

Es fácil ver que $z^{(m)} \in c_0$, $\|z^{(m)}\|$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) y $z^{(1)} \leq z^{(2)} \leq \dots \leq z^{(m)} \leq \dots$. Así, $z^{(m)}$ es una sucesión creciente y acotada en norma, pero dado que $\|z^{(m+1)} - z^{(m)}\| = 1$ ($m = 1, 2, 3, \dots$), se tiene que $\{z^{(m)}\}$ no es convergente en c_0 . Por lo tanto, el cono P_5 no es completamente regular.

3.3. Conos Lattice y Dedekind Completos

Definición 3.16. Sea P un cono en un espacio de Banach E .

1. El cono P se dice que es lattice si $\sup\{x, y\}$ existe para cada $x, y \in E$.
2. El cono P se dice que es Dedekind completo si $\sup D$ existe para cada conjunto no vacío $D \subset E$ el cuál es acotado superiormente.

Observación 3.17. De la definición anterior se desprende lo siguiente.

1. P es lattice, si y sólo si, $\inf\{x, y\}$ existe para cada $x, y \in E$.
2. P es Dedekind completo, si y sólo si, $\inf D$ existe para cada conjunto no vacío acotado inferiormente $D \subset E$.

Demostración.

1. Necesidad. Sean $x, y \in E$, entonces $-x, -y \in E$. Dado que P es lattice, $\sup\{-x, -y\}$ existe. Sea $z = \sup\{-x, -y\}$. Veremos que $-z = \inf\{x, y\}$. Por definición de supremo, tenemos que $-x \leq z$ y $-y \leq z$ ó lo que es igual $-z \leq x$ y $-z \leq y$, esto es, $-z$ es cota inferior de el conjunto $\{x, y\}$. Sea $t \in E$ tal que $t \leq x$ y $t \leq y$, esto implica que $-x \leq -t$ y $-y \leq -t$, y entonces $z \leq -t$, esto es, $t \leq z$. Por lo tanto, $-z = \inf\{x, y\}$.

Suficiencia. Es análogo a lo anterior.

2. Necesidad. Sea $D \subset E$ tal que D es no vacío y D es acotado inferiormente, entonces existe $y \in E$ tal que $y \leq d$ para cada $d \in D$, esto es, $-d \leq -y$ para cada $d \in D$. Definamos $B = \{-d : d \in D\}$. Como $-d \leq -y$ para cada $d \in D$, entonces B es acotado superiormente y como D es no vacío implica que B es no vacío. Entonces dado que P es Dedekind completo existe $d_0 \in E$ tal que $d_0 = \sup B$. Veamos que $-d_0 = \inf D$. Primero, como $d_0 = \sup B$, $-d \leq d_0$ para cada $d \in D$, esto es, $-d_0 \leq d$ para cada $d \in D$. Por otro lado, sea $y_0 \in E$ tal que $y_0 \leq d$ para cada $d \in D$, así $-d \leq -y_0$ para cada $d \in D$, esto es, $-y_0$ es cota superior de B y dado que $d_0 = \sup B$, $d_0 \leq -y_0$, y así $y_0 \leq -d_0$. Por lo tanto, $-d_0 = \inf D$.

Suficiencia. Es análogo a lo anterior.

□

Ejemplo 3.18. Ejemplos de conos lattice

1. El cono $P_1 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ es un cono lattice.
Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, tenemos que $\sup\{x, y\} = z$, donde $z = (\max\{x_1, y_1\}, \max\{x_2, y_2\}, \dots, \max\{x_n, y_n\})$.
2. El cono $P_2 = \{h \in C[a, b] : 0 \leq h(t), t \in [a, b]\}$ es un cono lattice.
Para todo $h, g \in C[a, b]$, tenemos que $\sup\{h, g\} = f$, donde $f(t) = \max\{h(t), g(t)\}$ para toda $t \in [a, b]$.

Lema 3.19. Sea P un cono regular en un espacio de Banach E . Entonces tenemos lo siguiente:

1. Cada conjunto acotado superiormente y totalmente ordenado en E tiene un supremo.
2. Cada conjunto acotado inferiormente y totalmente ordenado en E tiene un ínfimo.

Demostración.

1. Por el teorema 3.13. sabemos que P es normal. Sean $N > 0$ la constante normal de P , $D \subset E$ totalmente ordenado y acotado superiormente. Para cada $x \in D$, definimos

$$\phi(x) = \sup\{\|z - y\| : x \leq y \leq z, y, z \in D\}$$

Sea x_0 la cota superior de D , esto es, $t \leq x_0$ para cada $t \in D$. Dado que $x \in D$, $x \leq x_0$, por lo que $\theta \leq x_0 - x$ y como P es normal, $0 \leq N\|x_0 - x\|$. Sea $D_x = \{\|z - y\| : x \leq y \leq z, y, z \in D\}$. Sean $y, z \in D$ tal que $x \leq y \leq z$, así $-y \leq -x$ y $z \leq x_0$, luego $\theta \leq z - y \leq x_0 - x$ y por normalidad $\|z - y\| \leq N\|x_0 - x\| < \infty$. Así $N\|x_0 - x\|$ es cota superior de D_x . Por lo tanto, $0 \leq \phi(x) \leq N\|x_0 - x\|$, luego ϕ es una función no negativa definida sobre D .

Sean $x, y \in D$ tal que $x \leq y$. Notamos que $D_y \subset D_x$, por lo que $\sup D_y \leq \sup D_x$. Por lo tanto, $\phi(y) \leq \phi(x)$. Así, ϕ es una función decreciente.

Además, tenemos que $\inf\{\phi(x) : x \in D\} = 0$. De hecho, si no fuera así, entonces existiría $\delta > 0$ tal que $\phi(x) > \delta$ para toda $x \in D$. Consideremos a $x_1 \in D$, entonces, $\phi(x_1) > \delta$, luego existen $y_1, z_1 \in D$ tal que $x_1 \leq y_1 \leq z_1$ y $\|z_1 - y_1\| > \delta$. Dado que $\phi(z_1) > \delta$, existen $y_2, z_2 \in D$ tal que $z_1 \leq y_2 \leq z_2$ y $\|z_2 - y_2\| > \delta$. Siguiendo este proceso, tenemos dos sucesiones $\{y_n\}, \{z_n\} \subset D$ tal que

$$x_1 \leq y_1 \leq z_1 \leq y_2 \leq z_2 \leq \cdots \leq y_n \leq z_n \leq \cdots \leq x_0, \quad \|z_n - y_n\| > \delta$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$. Entonces la sucesión $\{y_1, z_1, y_2, z_2, \dots, y_n, z_n, \dots\}$ es una sucesión no convergente, lo cual contradice la regularidad de P . Por lo tanto, $\inf\{\phi(x) : x \in D\} = 0$. Así existe $\{x_n\} \subset D$ tal que $\phi(x_n) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$. Dado que D es un conjunto totalmente ordenado, $y_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ existe y $y_n \in D$, donde y_n es igual a alguno de x_1, x_2, \dots, x_n . Entonces, tenemos que

$$y_n \geq x_n, \quad y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n \leq \cdots \leq x_0.$$

Desde que ϕ es una función decreciente, $0 \leq \phi(y_n) \leq \phi(x_n)$ y así $\phi(y_n) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$.

Por otro lado, por la regularidad de P , existe $x^* \in E$ tal que

$$\|y_n - x^*\| \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

Se prueba que $x^* = \sup\{y_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$. Ahora, veamos que $x^* = \sup D$. Para hacerlo, sólo tenemos que probar que x^* es cota superior de D . Sea $x \in D$, desde que D es totalmente ordenado, entonces

(a) existe un entero positivo n tal que $x \leq y_n$

ó

(b) x es una cota superior de $\{y_n\}$.

En el caso (a), tenemos que $x \leq x^*$. En el caso (b), tenemos $x^* \leq x$. Así, de $\theta \leq x - x^* \leq x - y_n$, tenemos que

$$\|x - x^*\| \leq N\|x - y_n\| \leq N\phi(y_n) \longrightarrow 0$$

si $n \longrightarrow \infty$. Así se sigue que $x = x^*$. En cualquiera de los casos se tiene que $x \leq x^*$, esto es, x^* es una cota superior de D .

2. Sea $D \subset E$ tal que D es acotado inferiormente y totalmente ordenado. Sean $x_0 \in E$ la cota inferior de D y $-D = \{-x : x \in D\}$. Se sigue de la hipótesis que, $-D$ es un conjunto totalmente ordenado y acotado superiormente, cuya cota superior es $-x_0$. Por lo tanto, por la conclusión de 1., $\sup(-D)$ existe. Sea $x_1 = \sup(-D)$. Veamos que $\inf(D) = -x_1$. En efecto, sea $x \in D$, entonces, $-x \in -D$, luego $-x \leq x_1$, de lo que se sigue que $-x_1 \leq x$ para cada $x \in D$. Por otro lado, sea $y \in E$ tal que $y \leq x$ para cada $x \in D$, así $-x \leq -y$ para cada $-x \in -D$, luego $x_1 \leq -y$, por lo que $y \leq -x_1$. Por lo tanto, $\inf(D) = -x_1$ y así $\inf(D)$ existe.

□

Como consecuencia inmediata del Lema 3.19., tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.20. *Sea P un cono en E . Si P es regular y lattice, entonces P es Dedekind completo.*

Demostración. Sea $D \subset E$ un conjunto no vacío acotado superiormente. Sea $x_0 \in E$ una cota superior de D . Veamos que $\sup D$ existe. Sea F el conjunto de todas las cotas superiores de D . Entonces $x_0 \in F$. Consideremos a F_1 un subconjunto totalmente ordenado de F , esto es, una cadena de F . Notemos que todo elemento $x \in D$ es cota inferior de F_1 . Entonces, por 2. del lema 3.19., existe $y_1 \in E$ tal que $y_1 = \inf F_1$ y $x \leq y_1$ para toda $x \in D$. Así $y_1 \in F$ y por el Lema de Zorn, F tiene un elemento minimal x^* . Ahora veamos que $x^* = \sup D$. Dado que P es lattice, para todo $y \in F$, existe $z \in E$ tal que $z = \{x^*, y\}$, luego $z \leq x^*$ y $z \leq y$. Dado que $x \leq x^*$ y $x \leq y$ para toda $x \in D$, tenemos que $x \leq z$. Así $z \in F$ y, desde que x^* es un elemento minimal de F , se sigue que $z = x^*$. Esto implica que $x^* \leq y$ y por lo tanto $x^* = \sup D$.

□

Ejemplo 3.21. Ejemplo de cono Dedekind completo

El cono $P_1 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ es regular y lattice por los ejemplos 3.14. y 3.18., respectivamente. Por el teorema 3.20., P_1 es Dedekind completo.

3.4. Conos Generadores y Cono Dual

Definición 3.22. Sea P un cono en E .

1. Si $E = P - P$, esto es, cualquier elemento $x \in E$ puede expresarse en la forma $x = y - z$, donde $y, z \in P$, entonces decimos que P es generador.
2. Si $E = \overline{P - P}$, entonces decimos que P es total.

Observación 3.23. Si P es generador, entonces P es total.

Demostración. Supongamos que P es generador. Siempre se cumple que $\overline{P - P} \subset E$ y $P - P \subset \overline{P - P}$. Como P es generador $E \subset \overline{P - P}$ y así $E = \overline{P - P}$. Por lo tanto, P es total. □

Ejemplo 3.24. Ejemplos de conos generadores y totales.

1. Sean $E = \mathbb{R}^n$ y $P_1 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E : x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$. P_1 es un cono generador y por la observación 3.23., también es total.

En efecto, sabemos que P_1 es un cono y si $x \in P_1$, entonces x puede expresarse en la forma $x = y - z$, donde

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{si } x_i \geq 0, \\ 0 & \text{si } x_i < 0. \end{cases} \quad y \quad z_i = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i \geq 0, \\ -x_i & \text{si } x_i < 0. \end{cases}$$

con $y, z \in E$.

2. Sean $E = C[a, b]$ y P_2 el cono del ejemplo 3.6., entonces P_2 es un cono generador y por la observación 3.23., también es total.

En efecto, si $f \in P_2$, entonces f puede expresarse en la forma $f = g - h$, donde

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } f(t) \geq 0, \\ 0 & \text{si } f(t) < 0. \end{cases} \quad y \quad h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(t) \geq 0, \\ -f(t) & \text{si } f(t) < 0. \end{cases}$$

con $f, h \in E$.

Teorema 3.25. *Si P es un cono solido en E , entonces P es generador.*

Demostración. Supongamos que P es un cono solido, entonces $\overset{\circ}{P} \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in \overset{\circ}{P}$, entonces existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) = \{x \in E : \|x - x_0\| \leq r\} \subset P$. Sea $x \in E$. Si $x = \theta$, $x = \theta - \theta$ con $\theta \in P$, luego $x \in P - P$. Si $x \neq \theta$, entonces $x_0 \pm \frac{r}{\|x\|}x \in B(x_0, r)$ ya que $\|(x_0 \pm \frac{r}{\|x\|}x) - x_0\| = r$. Dado que $B(x_0, r) \subset P$, $x_0 \pm \frac{r}{\|x\|}x \in P$, y así $x = y - z$ donde $y = \frac{\|x\|}{2r}(x_0 + \frac{r}{\|x\|}x)$, $z = \frac{\|x\|}{2r}(x_0 - \frac{r}{\|x\|}x) \in P$, lo cuál implica que P es generador. \square

Nota 2. Los conos P_1 , P_2 , P_4 y P_5 del ejemplo 3.6., son conos solidos. En consecuencia del teorema 3.25. y la observación 3.23., también son conos generadores y totales.

Definición 3.26. *Sea P un cono en E . Entonces*

$$P^* = \{f \in E^* : f(x) \geq 0, x \in P\}$$

es llamado un cono dual de P .

Observación 3.27. Se prueba que P^* es un conjunto cerrado convexo no vacío en E^* y que si $f \in P^*$ entonces $\lambda f \in P^*$ para toda $\lambda \geq 0$. Pero puede no cumplirse que si $f \in P^*$ y $-f \in P^*$, entonces $f = \theta$. Por lo tanto, P^* no necesariamente es un cono en E^* .

El siguiente teorema nos da una condición necesaria para que P^* sea un cono en E^*

Lema 3.28. P^* es un cono en E^* , si y sólo si, P es total (esto es, $E = \overline{P - P}$).

Demostración. Puede consultar la demostración en [2]. \square

Corolario 3.29. *Si P es generador, entonces P^* es un cono en E^* .*

Demostración. Supongamos que P es un cono generador. Por la observación 3.23., P es un cono total. Por lo tanto, por el Lema 328., P^* es un cono en E^* . □

Finalmente, damos un teorema de extensión de un funcional lineal acotado positivo.

Teorema 3.30. *Sean P un cono solido en E y G un subespacio lineal de E tal que $\overset{\circ}{P} \cap G \neq \emptyset$. Si f es un funcional lineal acotado positivo definido sobre G , esto es, f es un funcional lineal acotado definido sobre G , y $f(x) \geq 0$ para toda $x \in G \cap P$. Entonces f se puede extender al funcional F definido sobre G y $f(x) \geq 0$ para toda $x \in G \cap P$. Así f puede ser extendido a un funcional lineal acotado positivo definido sobre G , esto es, existe $\bar{f} \in P^*$ tal que $\bar{f}(x) = f(x)$ para toda $x \in G$*

Demostración. Consideremos el conjunto

$$W = \{G_1 : G_1 \leq G, G_1 \subset G, f \text{ es extendido a } f_1 \text{ definido sobre } G_1\},$$

donde f_1 es un funcional lineal acotado positivo. El conjunto W es no vacío ya que $f \in W$. Definamos un orden parcial sobre W de la siguiente manera: Sean $G_1, G_2 \in W$, entonces

$$G_1 \leq G_2 \text{ ,si y sólo si, } G_1 \subset G_2 \text{ y } f_2 \text{ es una extensión de } f_1.$$

Se prueba que \leq es un orden parcial sobre W .

Veamos que W cumple las hipótesis del Lema de Zorn. Sea $H = \{G_\alpha : \alpha \in I\}$ un subconjunto totalmente ordenado de W y $G_H = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$.

(·) G_H es un subespacio vectorial de E .

Sean $x, y \in G_H$ y $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$, entonces existen $\alpha, \beta \in I$ tal que $x \in G_\alpha, y \in G_\beta$ y además $\lambda x \in G_\alpha$ y $\eta y \in G_\beta$. Dado que G_α y G_β son subespacios de E , $G_\alpha \subset G_\beta$ ó $G_\beta \subset G_\alpha$. Supongamos que $G_\alpha \subset G_\beta$, entonces $\lambda x, \eta y \in G_\beta$ y así $\lambda x + \eta y \in G_\beta$. Como $G_\beta \subset G_H$ se tiene que $\lambda x + \eta y \in G_H$. De manera similar si $G_\beta \subset G_\alpha$.

Notemos además que $G \subset G_H$. Ahora definamos un funcional $f_H : G_H \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue: Para $x \in G_H$, $f_H(x) = f_\alpha$, si $x \in G_\alpha$.

(i) f_H es lineal.

Sean $x, y \in G_H$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces existen $\alpha, \beta \in I$ tal que $x \in G_\alpha, y \in G_\beta$ y además $\lambda x \in G_\alpha$. Supongamos que $G_\alpha \subset G_\beta$, entonces $\lambda x, x, y \in G_\beta$. Así $f_H = f_\beta(x + y) = f_\beta(x) + f_\beta(y) = f_H(x) + f_H(y)$, esto es, $f_H(x + y) = f_H(x) + f_H(y)$ y $f_H(\lambda x) = f_\beta(\lambda x) = \lambda f_\beta(x) = \lambda f_H(x)$, esto es, $f_H(\lambda x) = \lambda f_H(x)$. De manera similar si $G_\beta \subset G_\alpha$.

(ii) f_H es positivo.

Sea $x \in G_H \cap P$, entonces existe $\alpha \in I$ tal que $x \in G_\alpha$ y así $x \in G_\alpha \cap P$. Dado que f_α es un funcional positivo, tenemos que $f_H(x) = f_\alpha(x) \geq 0$, esto es, $f_H(x) \geq 0$.

(iii) f_H es acotado.

Por hipótesis $\overset{\circ}{P} \cap G \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in \overset{\circ}{P} \cap G$. Entonces existe $r > 0$ tal que

$$B(x_0, r) = \{x \in E : \|x - x_0\| \leq r\} \subset P.$$

Sea $z \in G_H$ con $\|z\| \leq 1$. Dado que $x_0 \in G \subset G_H$, $x_0 \in G_H$ y así $x_0 \pm rz \in G_H$. Notemos que $\|x_0 \pm rz - x_0\| = \|\pm rz\| = r\|z\| \leq r$, luego $x_0 \pm rz \in B(x_0, r) \subset P$ y así $x_0 \pm rz \in P$. Por lo tanto, $x_0 \pm rz \in G_H \cap P$. Por (i) y (ii), sabemos que f_H es lineal y positivo, entonces $f_H(x_0 \pm rz) \geq 0$, esto es $\frac{1}{r}f_H(x_0) \geq \mp f_H(z)$. Así tenemos que

$$|f_H(z)| \leq \frac{1}{r}f_H(x_0) = \frac{1}{r}f(x_0), \quad z \in G_H, \quad \|z\| \leq 1. \quad (3.9)$$

Por lo tanto, de (i)-(iii) y (3.9), f_H es un funcional lineal acotado positivo definido sobre G_H con G_H subespacio de E . Así, $g_H \in F$ y además G_H es cota superior de H . Por el Lema de Zorn, existe $G_m \in F$ elemento maximal de F .

Veamos que $G_m = E$. Supongamos que $G_m \neq E$, entonces existe $y_0 \in E$ tal que $y_0 \in E \setminus G_m$. Notemos que $y_0 \neq \theta$ ya que $\theta \in G_m$. De lo hecho anteriormente tenemos que $B(x_0, r) \subset P$ y como $G \subset G_m$, se sigue que $x_0 \in \overset{\circ}{P} \cap G \subset \overset{\circ}{P} \cap G_m$. Notemos que $\|x_0 \pm \frac{r}{\|y_0\|}y_0 - x_0\| = r$, luego $x_0 \pm \frac{r}{\|y_0\|}y_0 \in P$ y por tanto $x_0 \pm \frac{r}{\|y_0\|}y_0 \geq \theta$, esto es,

$$x_1 \leq y_0 \leq x_2, \quad (3.10)$$

donde $x_1 = -\frac{\|y_0\|}{r}x_0, x_2 = \frac{\|y_0\|}{r}x_0 \in G_m$. Sean $S_m = \{x \in G_m : x \leq y_0\}$ y $T_m = \{x \in G_m : x \geq y_0\}$. Por (3.9) se tiene que $S_m \neq \emptyset$ y $T_m \neq \emptyset$. Sea f_m el

funcional lineal acotado positivo correspondiente a G_m .

Sean $A_S = \{f_m(x) : x \in S_m\}$ y $B_T = \{f_m(y) : y \in T_m\}$. Sea $f_m(x) \in A_S$ con $x \in S_m$, esto es, $x \leq y_0$ y sea $f_m(y) \in B_T$ con $y \in T_m$, esto es, $y_0 \leq y$. Por transitividad, $x \leq y$ ó lo que es igual $\theta \leq y - x$ y así $y - x \in P$. Dado que $x \in S_m$ y $y \in T_m$ se sigue que $x, y \in G_m$ y así $y - x \in P \cap G_m$ con $\theta \leq y - x$. Como f_m es lineal y positivo, tenemos que $0 \leq f_m(y - x) = f_m(y) - f_m(x)$ y así $f_m(x) \leq f_m(y)$ para toda $y \in T_m$, esto es, f_m es bota inferior de B_T para toda $x \in S_m$. Entonces, $f_m \leq \inf B_T$ para toda $x \in S_m$, luego $\sup A_S \leq \inf B_T$.

Ahora, consideremos $\xi \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup A_S \leq \xi \leq \inf B_T. \quad (3.11)$$

Sea $G_* = \{x + ty_0 : x \in G_m, t \in \mathbb{R}\}$. G_* es un subespacio lineal de E y además $G \subset G_m \subset G_*$ con $G_* \neq G_m$. Ahora, definamos un funcional f_* sobre G_* , como sigue:

$$f_*(x + ty_0) = f_m(x) + t\xi \quad (3.12)$$

con $x \in G_m$ y $t \in \mathbb{R}$. Entonces, tenemos que

- (a) f_* es una extensión de f_m sobre G_*
- (b) f_* es un funcional lineal.
- (c) f_* es acotado.

Sean $x \in G_m$ y $t \in \mathbb{R}$ tal que $x + ty_0 \geq \theta$, entonces

$$y_0 \geq -\frac{x}{t}, \quad t > 0, \quad y_0 \leq -\frac{x}{t}, \quad t < 0.$$

Entonces (3.11) implica que

$$\xi \geq -\frac{1}{t}f_m(x), \quad t > 0, \quad \xi \leq -\frac{1}{t}f_m(x), \quad t < 0.$$

De lo anterior, tenemos que $f_*(x) = f_m(x) + t\xi \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

- (d) f_* es acotado.
- Es similar a la prueba de (3.9).

Por (a)-(d), f_* es un funcional lineal acotado positivo sobre G_* que extiende a f_m . Por lo tanto, $G_* \in W$ y $G_m \leq G_*$, y dado que G_m es maximal en W implica que $G_m = G_*$, lo cuál es una contradicción porque G_m esta contenido propiamente en G_* .

□

Bibliografía

- [1] Aliprantis, Charalambos D. y Tourky, Rabee, *Cones and duality*. American Mathematical Society, Board, Providence, Rhode Island, 2007.
- [2] Dajun Guo, Yeol Je Cho, Jiang Zhu, *Partial Ordering Methods in Non-linear Problems*. Nova Science Publishers, Inc. New York, 2004.
- [3] Aliprantis, Charalambos D. y Burkinshaw, Owen, *Positive Operators*. Springer Verlag, Netherlands, 2006.
- [4] Aliprantis, Charalambos D. y Border, Kim C., *Infinite Dimensional Analysis - A Hitchhiker's Guide*. Springer Verlag, 3rd Edition, Berlin, 2006.
- [5] Kreyszig, Erwin, *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, University of Windsor, 1989.
- [6] Kolmogorov A.N., Fomin S.V., *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. Mir, 3ra Edición, Moscu, 1978.