

*Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla*



Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Nudos y Superficies

Tesis presentada como requisito para obtener el título de
Licenciada en Matemáticas

por

Daniela Cortés Rodríguez

Directora de tesis

Dra. Fabiola Manjarrez Gutiérrez

Puebla, Pue.
(Mayo de 2016)

A Dario, Mireya y Enrique

Agradecimientos

Este trabajo no habría sido posible sin el amor, confianza y apoyo incondicional que he recibido por parte de mis padres, Darío y Mireya, mi hermano Enrique y mi tío Hugo. Gracias a ustedes y al resto de mi familia por estar a mi lado y enseñarme a siempre buscar ser una mejor persona.

A mis amigos, dentro y fuera de la universidad, gracias por todos los consejos y palabras de aliento; por permitirme ser parte de su vida y por ser parte fundamental en esta etapa de la mía.

Agradezco a la Dra. Fabiola Manjarrez Gutiérrez por aceptar ser mi guía, por su paciencia y por enseñarme lo que sé sobre nudos.

A mis sinodales, Dr. Fernando Macías Romero, Dr. Raúl Escobedo Conde y M.C. Manuel Ibarra Contreras, por sus sugerencias y sus consejos para mejorar esta tesis.

Durante la realización de este trabajo conté con el apoyo del Instituto de Matemáticas de la UNAM, campus Cuernavaca, y el proyecto CB-2012-01/181882 de CONACyT. Agradezco a estas instituciones por respaldarme.

Introducción

El concepto de nudo matemático es una abstracción del objeto físico del mismo nombre; la utilidad práctica de dichos objetos no necesita explicación, ya que son objetos cotidianos que el hombre ha usado desde tiempos antiguos. Para imaginarnos lo que es un nudo matemático basta con hacer un nudo cualquiera con una cuerda y pegar los dos extremos. De esta forma, podemos concebir un nudo como una manera específica de insertar una circunferencia en el espacio. Además, cualquier alteración de un nudo que se realice sin cortar y volver a pegar la curva que lo representa, produce un nudo equivalente.

El objetivo principal de la Teoría de Nudos es la búsqueda de métodos matemáticos que permitan diferenciar un nudo de otro y distinguir los que están realmente anudados de los que no. Una manera de establecer una clasificación es mediante invariantes de nudos. Son propiedades que se preservan bajo equivalencia de nudos. La utilidad de los invariantes radica en que dos nudos con invariante distinto son nudos diferentes.

H. Seifert proporcionó un algoritmo para asociar a un nudo una superficie conexa y orientable, cuya frontera es el nudo. La ventaja que esto supone es enorme, ya que existe una clasificación de superficies. Usando dichas superficies es posible asignar un invariante al nudo, el género, que se define como el género mínimo sobre todas las superficies de Seifert que posee. Por tanto, el algoritmo de Seifert proporciona una cota superior para el género de un nudo; de esta forma, es interesante conocer bajo que condiciones el algoritmo nos proporciona una superficie de Seifert cuyo género es el género del nudo.

Dos superficies de Seifert para un nudo son equivalentes si se pueda llevar una a la otra de manera continua. De esta forma, es natural preguntarse el número de superficies de Seifert de género mínimo distintas que tiene un nudo, así como la forma en que se relacionan.

En [12], M. Scharlemann y A. Thompson demostraron que dada cualquier superficie de Seifert para un nudo, es posible dar una sucesión de superficies de Seifert, ajenas dos a dos, que la relaciona con una superficie de género mínimo.

Posteriormente, en [7], O. Kakimizu proporciona un complejo simplicial conformado por clases de equivalencia de superficies de Seifert de género mínimo. El objetivo principal de esta tesis es estudiar los resultados obtenidos por Scharlemann-Thompson y Kakimizu.

El Capítulo 1 está dedicado a conceptos básicos de topología. Definimos n -variedad e introducimos a la categoría PL. Enunciamos teoremas clásicos y útiles en la topología de dimensiones bajas como el Teorema de Alexander, el Teorema de la Curva de Jordan y el Teorema de Schoenflies. Finalizaremos con algunos resultados de Espacios Cubrientes.

En el Capítulo 2 nos enfocamos en el estudio de superficies. Definimos la suma conexa de dos superficies y demostramos el teorema de clasificación. Además introducimos los conceptos de género e incompresibilidad de una superficie.

En el Capítulo 3 damos los conceptos básicos de la teoría de nudos. Demostramos el algoritmo de Seifert y definimos el exterior de un nudo.

Dedicamos el Capítulo 4 a algunos resultados del artículo de Scharlemann y Thompson. Dadas dos superficies de Seifert para un nudo, podemos crear dos nuevas superficies de Seifert mediante una operación llamada suma transversal. Bajo ciertas condiciones, esta operación da como resultado superficies de Seifert con género menor que las originales. Usando esta idea, Scharleman y Thompson demuestran que para toda superficie de Seifert, existe una sucesión de superficies de Seifert cuyo género decrece hasta llegar a una superficie de género mínimo. Además probamos que al aplicar el algoritmo de Seifert sobre un diagrama alter-nante, se obtiene una superficie de Seifert de género mínimo.

Estudiamos el artículo de Kakimizu en el Capítulo 5. Usando el cubriente cíclico infinito para el exterior de un nudo, definimos la distancia entre clases de equivalencia de superficies de Seifert y construimos el complejo de superficies $MS(K)$. Los vértices de $MS(K)$ son las clases de equivalencia de superficies de Seifert de género mínimo y n vértices forman un n -simplejo si existen superficies representantes de cada clase que son disjuntas entre si. Este complejo se conoce como el complejo de Kakimizu. Finalmente, proporcionamos ejemplos del complejo de Kakimizu para algunos nudos.

Índice general

Introducción	III
1. Preliminares	1
1.1. Topología Cociente	1
1.2. Variedades Topológicas	4
1.3. Categoría PL	5
1.4. Espacios Cubrientes	8
2. Superficies	11
2.1. Teoremas de Clasificación	15
2.2. Herramientas topológicas	22
3. Nudos	25
3.1. Diagramas	26
3.2. Superficies de Seifert	29
4. Encontrando Superficies de Seifert Disjuntas	35
5. Complejo de Superficies de Seifert de género mínimo	41
5.1. Cubriente Cíclico Infinito.	41
5.2. Conjunto $\mathcal{S}(K)$	42
5.3. Complejo simplicial $MS(K)$	47
5.4. Ejemplos del Complejo de Kakimizu	47
Conclusiones	53
Índice de símbolos	55
Índice alfabético	57
Referencias	59

Capítulo 1

Preliminares

Revisaremos conceptos de topología cociente, el concepto de n -variedad. También presentaremos a la categoría PL y a los espacios cubrientes. Como referencia se pueden consultar los capítulos 3 y 11 de [9], el capítulo 2 de [3]

Para cualquier número natural n , llamaremos espacio n -dimensional a $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$. Denotaremos por \mathbb{R}_+^n al subconjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ de \mathbb{R}^n . La n -bola se define como $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$, donde $\|x\|$ representa la norma usual de x en \mathbb{R}^n y la n -esfera, S^n , como el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$. Notar que $\partial B^{n+1} = S^n$. Nos referiremos a $B^1 = [0, 1]$ como I y a B^2 como disco.

1.1. Topología Cociente

Dado un espacio topológico hay varias maneras de obtener un nuevo espacio identificando algunos puntos, esta construcción es importante para argumentos de “cortar y pegar” que se usan en la teoría de variedades. Formalmente nos referimos a la topología cociente.

Definición 1.1. *Sea X un espacio topológico, Y cualquier conjunto y $q : X \rightarrow Y$ una función sobreyectiva. La **topología cociente** inducida por q es la topología sobre Y tal que $U \subset Y$ es abierto si y sólo si $q^{-1}(U)$ es abierto en X . A la función q la llamamos **función cociente**.*

Proposición 1.2. ([9], 3.69). *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua que es abierta o cerrada. Si f es sobreyectiva, entonces es una función cociente.*

Si \sim es una relación de equivalencia sobre un espacio topológico X , para cada $x \in X$ denotemos por $[x]$ a la clase de equivalencia de x , y por X/\sim al conjunto de todas las clases de equivalencia. Si $p : X \rightarrow X/\sim$ es la proyección natural que envía cada elemento de X a su clase de equivalencia, entonces p es una función cociente y X/\sim es un espacio cociente.

Teorema 1.3. (Propiedad Característica de la topología cociente) *Sea X un espacio topológico, \sim una relación de equivalencia sobre X , $p : X \rightarrow X/\sim$ la proyección natural y $f : X \rightarrow Y$ una función continua tal que si $x \sim y$ entonces $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in X$. Entonces existe una única función continua $f' : X/\sim \rightarrow Y$ tal que $f' \circ p = f$.*

Demostración. Sea $f' : X/\sim \rightarrow Y$ tal que $f'([x]) = f(x)$, para todo $[x] \in X/\sim$. Sean $x, y \in X$ tal que $[x] = [y]$, entonces $f(x) = f(y)$ y por tanto $f'([x]) = f'([y])$, es decir, f' está bien

definida. Por la definición de f' , es evidente que $f = f' \circ p$. Como f es continua y $f = f' \circ p$, f' es continua. Finalmente, supongamos que existe una función $g : X/\sim \rightarrow Y$ tal que $f = g \circ p$, entonces $g([x]) = g(p(x)) = f(x) = f'(p(x)) = f'([x])$. \square

Teorema 1.4. (Unicidad de la topología cociente) Sean \sim_1, \sim_2 relaciones de equivalencia sobre un espacio topológico X tal que para todo $x, y \in X$, $x \sim_1 y$ si y sólo si $x \sim_2 y$. Entonces existe un único homeomorfismo $\varphi : X/\sim_1 \rightarrow X/\sim_2$ tal que $\varphi \circ q_1 = q_2$, donde $q_i : X \rightarrow X/\sim_i$ es la proyección natural para $i = 1, 2$.

Demostración. Sea $Y_i = X/\sim_i$, por el Teorema 1.3 existen funciones únicas $q'_2 : Y_1 \rightarrow Y_2$ y $q'_1 : Y_2 \rightarrow Y_1$ que hacen conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} X & & X \\ q_1 \downarrow & \searrow q_2 & \downarrow q_2 \quad \searrow q_1 \\ Y_1 & \xrightarrow{q'_2} & Y_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & & X \\ q_2 \downarrow & \searrow q_1 & \downarrow q_1 \quad \searrow q_2 \\ Y_2 & \xrightarrow{q'_1} & Y_1 \end{array}$$

Se sigue que $q'_1 \circ (q'_2 \circ q_1) = q'_1 \circ q_2 = q_1$ y por tanto los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & q_1 \swarrow & \downarrow q_2 & \searrow q_1 & \\ Y_1 & \xrightarrow{q'_2} & Y_2 & \xrightarrow{q'_1} & Y_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & & X \\ q_1 \downarrow & \searrow q_1 & \\ Y_1 & \xrightarrow{id} & Y_1 \end{array}$$

Por el Teorema 1.3, $q'_1 \circ q'_2$ es igual a la función identidad de Y_1 . Análogamente $q'_2 \circ q'_1$ es la función identidad de Y_2 . Por lo tanto $\varphi = q'_2$ es el homeomorfismo requerido y es único por el Teorema 1.3. \square

Ejemplo 1.5. Sea \sim la relación de equivalencia definida en $I \times I$ tal que $(x, 0) \sim (x, 1)$ y $(0, y) \sim (1, y)$, para todo $x, y \in I$, al espacio $I \times I/\sim$ lo llamamos **Toro** y lo denotaremos por T^2 .

Ejemplo 1.6. Sea \sim la relación de equivalencia definida en $I \times I$ donde $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ para todo $y \in I$. A dicho espacio lo llamamos **Banda de Möbius**.

Ejemplo 1.7. La **Botella de Klein** es el espacio $I \times I/\sim$, tal que $(x, 0) \sim (x, 1)$ y $(0, y) \sim (1, 1 - y)$.

Ejemplo 1.8. La n -esfera, S^n , es homeomorfa al espacio cociente de B^n módulo la relación de equivalencia generada por $(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim (x_1, x_2, \dots, -x_n)$, para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \partial B^n$. Ver Figura 1.2 a).

Ejemplo 1.9. El resultado de identificar puntos antipodales en S^n se llama **n -espacio proyectivo real** y se denota por P^n .

El **plano proyectivo**, P^2 , es homeomorfo al disco B^2 módulo la relación de equivalencia generada por $(x, y) \sim (-x, -y)$, para todo $(x, y) \in \partial B^2$. Ver Figura 1.2 b).

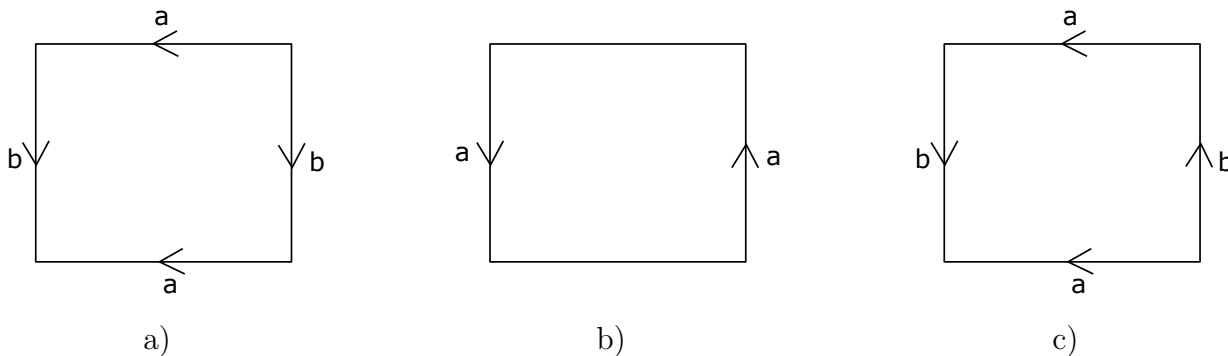


Figura 1.1: a) Toro; b) Banda de Möbius; c) Botella de Klein.

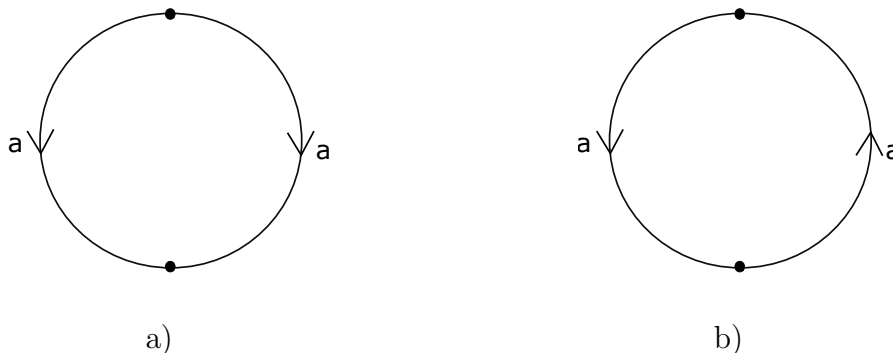


Figura 1.2: a) Espacio homeomorfo a S^2 ; b) espacio homeomorfo a P^2

Definición 1.10. Sea $h : X \rightarrow Y$ una función continua e inyectiva. Si $h : X \rightarrow h(X)$ es un homeomorfismo decimos que h es un **encaje** y que X está encajado en Y . Si X y Y tienen frontera no vacía y $h(X) \cap \partial Y = h(\partial X)$, decimos que X está **propiamente encajado** en Y .

Definición 1.11. Sean $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ dos funciones continuas, decimos que f_0 y f_1 son **homotópicas** si existe una función continua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f_0(x)$ y $H(x, 1) = f_1(x)$ para cada $x \in X$. H es un **homotopía** de f_0 y f_1 .

Definición 1.12. Sean $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ dos encajes, decimos que f_0 y f_1 son **isotópicos** si existe una función continua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f_0(x)$ y $H(x, 1) = f_1(x)$ para cada $x \in X$ y $H(\cdot, t)$ es un encaje para todo $t \in I$. H es una **isotopía** de f_0 y f_1 .

Teorema 1.13. (Truco de Alexander) Si $h : \partial B^n \rightarrow \partial B^n$ es una función continua, entonces existe una función continua $H : B^n \rightarrow B^n$ tal que para todo $x \in \partial B^n$, $H(x) = h(x)$. Si h es un homeomorfismo, entonces H también lo es.

Demostración. Sea $H : B^n \rightarrow B^n$, definida por

$$H(x) = \begin{cases} \|x\| h\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

H está bien definida, es continua y como para todo $x \in \partial B^n$, $\|x\| = 1$, $H(x) = h(x)$. Si h es un homeomorfismo, entonces tiene inversa y por tanto podemos definir la inversa de H como

$$H^{-1}(w) = \begin{cases} \|w\| / h^{-1} \left(\frac{w}{\|w\|} \right) & \text{si } w \neq 0 \\ 0 & \text{si } w = 0 \end{cases}$$

Como h^{-1} es continua, entonces H^{-1} también lo es y por lo tanto H es un homeomorfismo. \square

Teniendo la noción de isotopía el Truco de Alexander se puede enunciar como sigue: “Si $h, g : B^n \rightarrow B^n$ son homeomorfismos tal que $h(x) = g(x)$ para todo $x \in \partial B^n$, entonces h es isotópica a g .”

1.2. Variedades Topológicas

Definición 1.14. Una *n -variedad topológica* o *n -variedad* M es un espacio topológico Hausdorff, segundo numerable tal que cada punto de M tiene una vecindad homeomorfa a \mathbb{R}^n o bien a \mathbb{R}_+^n , a esta última propiedad se le denomina ser **localmente euclidiano**.

La **frontera** de M , denotada por ∂M , es el conjunto de puntos de M con vecindad homeomorfa a \mathbb{R}_+^n . El **interior** de M es $\text{int}M = M - \partial M$. Si M es compacta y $\partial M = \emptyset$ decimos que M es **cerrada**. La **dimensión** de una n -variedad es n . Dos variedades son **equivalentes** si son homeomorfas.

Algunas propiedades notables de las n -variedades son las siguientes:

1. Toda n -variedad es metrizable.
2. Toda n -variedad compacta se puede encajar en un espacio euclidiano; mas aún, siempre es posible encajarla en \mathbb{R}^{2n+1} .
3. Todo subespacio abierto de una n -variedad es también una n -variedad.
4. El producto de una n -variedad y una m -variedad es una $(n + m)$ -variedad.

En adelante, sólo consideraremos variedades conexas.

Ejemplo 1.15. \mathbb{R}^n es una n -variedad no compacta y sin frontera.

Ejemplo 1.16. S^n es una n -variedad cerrada y conexa. En efecto, al ser un subespacio de \mathbb{R}^{n+1} , es un espacio Hausdorff y segundo numerable. Ahora sólo se necesita verificar que es localmente euclidiano, para esto, la proyección estereográfica, $h : S^n - \{(0, 0, \dots, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $h(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 - x_{n+1}}$, nos proporciona, para todo punto en $S^n - \{(0, 0, \dots, 0, 1)\}$ un homeomorfismo entre $S^n - \{(0, 0, \dots, 0, 1)\}$ y \mathbb{R}^n . Para el punto $(0, 0, \dots, 0, -1) \in S^n$, la función $h' : S^n - \{(0, 0, \dots, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $h'(x) = -h(x)$, es un homeomorfismo.

De esta forma, podemos pensar en S^n como la compactación de \mathbb{R}^n a un punto. Esto significa tomar \mathbb{R}^n y un punto adicional denotado por ∞ y dotarlo de la topología en la que $U \subset \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ es abierto si U es abierto en \mathbb{R}^n , o $U = V \cup \{\infty\}$ donde V es el complemento de un conjunto cerrado y acotado en \mathbb{R}^n .

Por otro lado, la n -esfera también es homeomorfa a la unión de dos n -bolas pegadas por su frontera. Por ejemplo, en dimensiones pequeñas: S^1 se obtiene al pegar dos intervalos por sus extremos y S^2 es formado al identificar dos discos por su frontera.

Ejemplo 1.17. Es evidente que la n -bola, B^n , es una n -variedad con frontera. Por otro lado, $\text{int}(B^n)$ es una n -variedad sin frontera.

Ejemplo 1.18. T^2 , P^2 y La Botella de Klein son 2-variedades cerradas, mientras que la Banda de Möbius es una 2-variedad compacta y con frontera.

Ejemplo 1.19. El resultado de quitar un disco de T^2 , nos proporciona una 2-variedad con frontera, llamada **asa**.

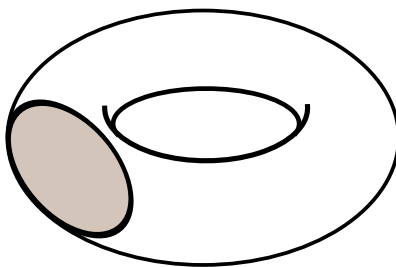


Figura 1.3: asa

Ejemplo 1.20. El toro sólido, $D^2 \times S^1$, es una 3-variedad compacta cuya frontera es T^2 .

1.3. Categoría PL

Definición 1.21. Sea $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ un subconjunto de \mathbb{R}^n , con $n \geq k + 1$. $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ es **geométricamente independiente** si el conjunto $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_k - x_0\}$ es linealmente independiente.

Definición 1.22. Dado un conjunto geométricamente independiente, $\{x_0, x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, definimos

$$\langle x_0, x_1, \dots, x_k \rangle = \left\{ \sum a_i x_i : a_i \geq 0 \text{ y } \sum a_i = 1 \right\}$$

como el k -**simplejo** generado por $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$. A los puntos x_i les llamaremos **vértices** del k -simplejo. Cualquier l -simplejo, generado por un subconjunto de $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ se llama **cara** del k -simplejo. Si γ es una cara de un k -simplejo σ lo denotamos por $\gamma \prec \sigma$.

Definición 1.23. Un **complejo simplicial** K en \mathbb{R}^n es un conjunto de simplejos en \mathbb{R}^n tal que:

1. Si $\sigma \in K$ y $\gamma \prec \sigma$, entonces $\gamma \in K$.

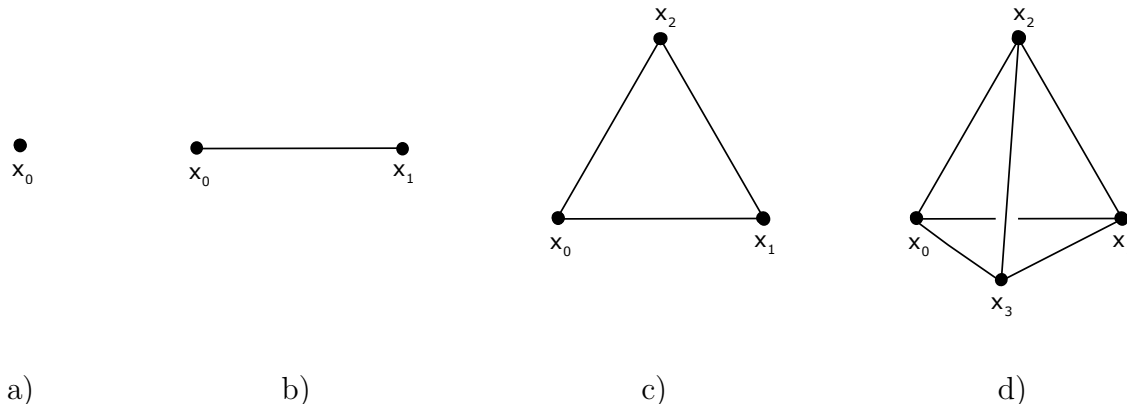


Figura 1.4: a) 0-simplejo; b) 1-simplejo; c) 2-simplejo; d) 3-simplejo.

2. Si $\gamma, \sigma \in K$ y $\gamma \cap \sigma \neq \emptyset$, entonces $\gamma \cap \sigma \prec \gamma$ y $\gamma \cap \sigma \prec \sigma$.

3. Para todo $\sigma \in K$ existe un abierto U en \mathbb{R}^n tal que $\sigma \subset U$ y U intersecta a un número finito de elementos de K .

Se define el **poliedro** de K como $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$.

En la Figura 1.5 se muestran ejemplos que no son complejos simpliciales:

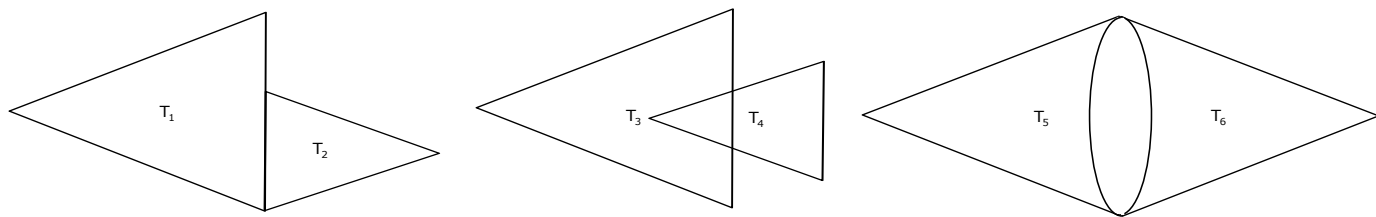


Figura 1.5: Ejemplos de intersecciones prohibidas en un complejo simplicial

Definición 1.24. Sean K y L complejos simpliciales, L es una **subdivisión** de K si $|L| = |K|$ y para todo $\sigma \in L$ existe $\gamma \in K$ tal que $\sigma \subset \gamma$.

Definición 1.25. Sea $f : \langle x_0, x_1, \dots, x_r \rangle \rightarrow \langle y_0, y_1, \dots, y_s \rangle$ tal que $\sum \lambda_i x_i \mapsto \sum \lambda_i f(x_i)$. f es una **función lineal** si $f(x_i) \in \{y_0, y_1, \dots, y_s\}$ para cada $0 \leq i \leq r$.

Definición 1.26. Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una función continua, decimos que f es **simplicial** si para todo $\sigma \in K$, $f|_{\sigma}$ es lineal.

Definición 1.27. Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una función continua, decimos que f es una **función PL** si existen subdivisiones K' y L' de K y L respectivamente tal que $f : |K'| \rightarrow |L'|$ es una función simplicial. Un homeomorfismo h es PL si h y h^{-1} son PL.

Definición 1.28. Sea M una n -variedad compacta, decimos que M es **triangulable** si existe un complejo simplicial K y un homeomorfismo $\varphi : |K| \rightarrow M$. Dos variedades triangulables son equivalentes si existe un homeomorfismo PL entre ellas.

Teorema 1.29. (Radó, Kerekjarto) Toda 2-variedad es triangulable.

Teorema 1.30. (Bing, Moise) Toda 3-variedad es triangulable.

Ejemplo 1.31. La superficie de un tetraedro en \mathbb{R}^3 es una triangulación de S^2 . En la Figura 1.6 se muestra una triangulación del plano proyectivo y una triangulación del toro, en esta ocasión usamos los vértices para indicar la forma en que se identifican los aristas.

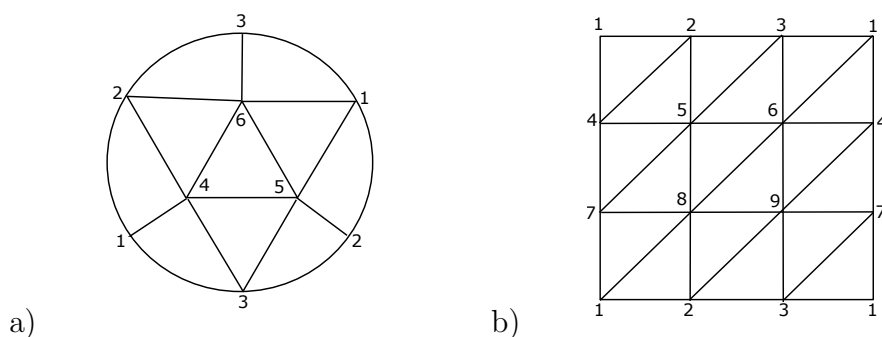


Figura 1.6: a) Triangulación de P^2 ; b) Triangulación de T^2

Definición 1.32. Sea M una n -variedad triangulable, V una m -subvariedad compacta y $Y \subset M$ un subcomplejo finito. V es una **vecindad regular** de Y si $Y \subset \text{int}(V)$ y V se colapsa a Y , esto significa que podemos ir borrando en cierto orden los simplejos de V hasta llegar a Y .

Definición 1.33. Sea M una n -variedad y $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ un encaje propio, llamaremos **arco** a $\alpha([0, 1])$. Si $\beta : S^1 \rightarrow M$ es un encaje, llamaremos **curva simple cerrada** a $\beta(S^1)$. Sea Y un conjunto conexo y $X \subset Y$, si $Y \setminus X$ es desconexo, decimos que X **separa** a Y .

Definición 1.34. Sean S_1, S_2 2-variedades propiamente encajadas en una 3-variedad M . Diremos que S_1 y S_2 están en **posición general** si su intersección consiste de una colección finita de curvas simples cerradas $\{\alpha_j\}$, $1 \leq j \leq n$ y una colección finita de arcos $\{\alpha_j\}$, $n+1 \leq j \leq m$, los cuales no contienen vértices de sus respectivas triangulaciones y son tales que para todo $p \in \alpha_j$ con $1 \leq j \leq n$ o $p \in \text{int}(\alpha_j)$ con $n+1 \leq j \leq m$, existe una vecindad $V_p \subset M$ y un homeomorfismo $\phi : V_p \rightarrow B$, donde B es una bola en \mathbb{R}^3 con centro en el origen, tal que se cumple:

i) $\phi_p(p) = 0$.

ii) $\phi_p(V_p \cap S_1) = P_0 \cap B$, donde P_0 es el plano yz en \mathbb{R}^3 .

iii) $\phi_p(V_p \cap S_2) = P_1 \cap B$, donde P_1 es el plano xz en \mathbb{R}^3 .

Y para cada $p \in \partial\alpha_j$ con $n+1 \leq j \leq m$, existe una vecindad $V_p \subset M$ y un homeomorfismo $\phi_p : V_p \rightarrow B'$, donde B' es una media bola en \mathbb{R}_+^3 con centro en el origen tal que se cumplen:

i) $\phi_p(p) = 0$.

ii) $\phi_p(V_p \cap S_1) = P_0 \cap B'$, donde P_0 es el plano yz en \mathbb{R}^3 .

iii) $\phi_p(V_p \cap S_2) = P_1 \cap B'$, donde P_1 es el plano xz en \mathbb{R}^3 .

Con esta definición, garantizamos que dos 2-variedades que se intersectan, lo hacen únicamente en curvas y arcos.

Teorema 1.35. (Curva de Jordan) Una curva λ encajada en \mathbb{R}^2 separa al plano en dos componentes conexas, cada una con frontera λ .

Teorema 1.36. (Schoenflies) Si λ es una curva encajada en \mathbb{R}^2 , entonces hay un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $h(\lambda)$ es el círculo unitario.

Como consecuencia de los dos teoremas anteriores obtenemos:

1. La cerradura de una componente de $\mathbb{R}^2 \setminus \lambda$ es homeomorfa a un disco.
2. Una curva λ , encajada en S^2 , separa a la esfera en dos componentes conexas, donde cada una es un disco acotado por λ .

El enunciado del Teorema de la Curva de Jordan se generaliza a \mathbb{R}^3 como sigue.

Teorema 1.37. (Alexander) Una esfera Σ triangulable encajada en \mathbb{R}^3 separa a \mathbb{R}^3 en dos componentes conexas, cada una con frontera Σ .

Como consecuencia, una esfera triangulable encajada en \mathbb{R}^3 separa a \mathbb{R}^3 y es frontera de una bola por un lado. Una esfera triangulable encajada en S^3 acota una bola en cada lado.

1.4. Espacios Cubrientes

Definición 1.38. Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ una función continua y sobreyectiva, con \tilde{X} un espacio conexo y localmente conexo por caminos. p es una **función cubriente** si para todo $x \in X$ existe una vecindad $U \subset X$ tal que $p^{-1}(U) = \bigsqcup U_i$, donde U_i es abierto y conexo en \tilde{X} y $p|_{U_i}$ es un homeomorfismo para todo i . Nos referiremos a \tilde{X} como **espacio cubriente** de X , a X como **base** y a $p^{-1}(x)$ una **fibra**, $x \in X$.

Ejemplo 1.39. La función $\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $\epsilon(x) = e^{2\pi ix}$ es una función cubriente. Por lo tanto, \mathbb{R} es un espacio cubriente de S^1 .

Ejemplo 1.40. $p_n : S^1 \rightarrow S^1$ tal que $p_n(z) = z^n$, para todo $z \in S^1$, es una función cubriente.

Ejemplo 1.41. Definamos $\epsilon^n : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ por $\epsilon^n(x_1, \dots, x_n) = (\epsilon(x_1), \dots, \epsilon(x_n))$, donde ϵ es la función definida en el Ejemplo 1.39. Se tiene que ϵ^n es una función cubriente y por tanto \mathbb{R}^n es un espacio cubriente de T^n .

Ejemplo 1.42. La función $q : S^n \rightarrow P^n$, que envía a cada punto $x \in S^n$ a la línea que pasa por el origen y por x , es una función cubriente.

Definición 1.43. Si $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es una función cubriente y $\varphi : Y \rightarrow X$ es cualquier función continua, un **levantamiento** de φ es una función continua $\tilde{\varphi} : Y \rightarrow \tilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$.

Teorema 1.44. (Unicidad de levantamientos) ([9], 11.12) Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ una función cubriente. Si Y es un espacio conexo, $\varphi : Y \rightarrow X$ es continua y $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 : Y \rightarrow \tilde{X}$ son levantamientos de φ , entonces el conjunto $\{y \in Y : \tilde{\varphi}_1(y) = \tilde{\varphi}_2(y)\}$ es vacío o bien es todo Y .

Definición 1.45. Sean $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ y $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ dos cubrientes del mismo espacio X .

- Un **homeomorfismo cubriente** de p_1 a p_2 es una función continua $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tal que $p_2 \circ \varphi = p_1$.
- Un **isomorfismo cubriente** es un homeomorfismo cubriente que también es un homeomorfismo.
- Dos cubrientes son **isomorfos** si existe un isomorfismo cubriente entre ellos. Esto es una relación de equivalencia sobre los cubrientes de X .

Teorema 1.46. ([9], 11.41) Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ una función cubriente.

- Si \tilde{X} es simplemente conexo, es decir, toda curva simple cerrada es homotópica a un punto, y $p' : \tilde{X}' \rightarrow X$ es cualquier función cubriente, entonces existe una función cubriente $q : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X} & & \\
 \downarrow p & \searrow q & \\
 & & \tilde{X}' \\
 & \swarrow p' & \\
 X & &
 \end{array}$$

- Cualesquiera dos cubrientes simplemente conexos del mismo espacio son isomorfos.

Del Teorema 1.46 se sigue que cualquier espacio cubriente simplemente conexo es cubriente de cualquier otro espacio cubriente de X ; además, dicho espacio es único salvo isomorfismo.

Definición 1.47. Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un espacio cubriente. Si \tilde{X} es simplemente conexo, p se llamará **cubriente universal** y \tilde{X} **espacio cubriente universal**.

Teorema 1.48. (Existencia del espacio cubriente universal) ([9], 11.43) Toda variedad conexa tiene un espacio cubriente universal.

Definición 1.49. Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ una función cubriente. Una **transformación cubriente** de p es un isomorfismo cubriente de p consigo mismo.

Denotemos por $Aut_p(\tilde{X})$ al conjunto de todas las transformaciones cubrientes de p . Es evidente que la composición de dos transformaciones cubrientes, la inversa de una transformación cubriente y la función identidad de \tilde{X} también son transformaciones cubrientes; por lo tanto $Aut_p(\tilde{X})$ es un grupo, al cual llamaremos **grupo de transformaciones cubrientes**.

Capítulo 2

Superficies

Las superficies juegan un papel importante en la teoría de nudos, así como en el estudio de las 3-variedades. En este capítulo demostraremos el teorema de clasificación de superficies y hablaremos de algunas propiedades de estas. Como referencia se pueden consultar los capítulos 1 de [10], 6 de [9] y 2 de [3].

Definición 2.1. Una *superficie* es una 2-variedad compacta y conexa.

La 2-esfera (S^2), el 2-toro (T^2) y el plano proyectivo (P^2) son ejemplos de superficies, estas superficies pueden considerarse como las piezas fundamentales para la construcción de nuevas superficies. A continuación mencionaremos dos formas para construir nuevas superficies, con o sin frontera.

Construcción I

Consideremos S^2 con el interior de g discos ajenos removidos. El resultado es una superficie cuya frontera tiene g componentes conexas. A cada componente le pegamos un asa, mediante un homeomorfismo entre los círculos frontera. El resultado es una superficie cerrada a la que denotamos por $F_{g,0}$.

Si removemos nuevamente el interior de b discos, el resultado es una superficie con frontera, tal frontera tiene b componentes conexas. A dicha superficie la denotaremos por $F_{g,b}$.

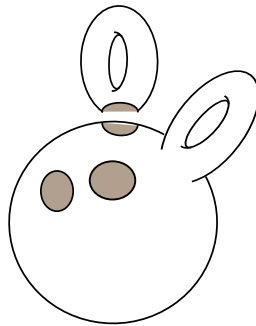


Figura 2.1: Esquema de $F_{g,b}$

Construcción II

Sea S^2 con el interior de h discos ajenos removidos. El resultado de pegar a cada componente de la frontera una Banda de Möbius, vía un homeomorfismo de los círculos frontera, es una superficie cerrada, denotada por $N_{h,0}$.

De manera análoga a la construcción anterior, si removemos de $N_{h,0}$ el interior de b discos, el resultado es una superficie con frontera; denotada por $N_{h,b}$.

Las construcciones anteriores se pueden formalizar con el concepto de suma conexa dado a continuación.

Definición 2.2. La **suma conexa** de dos superficies disjuntas S_1 y S_2 , denotada por $S_1 \# S_2$, se define como sigue: elegimos subespacios, $D_1 \subset S_1$ y $D_2 \subset S_2$, tal que D_1 y D_2 son discos. Sea S'_i el complemento del interior de D_i en S_i , para $i = 1, 2$; elegimos un homeomorfismo h de la frontera de D_1 sobre la frontera de D_2 . Entonces $S_1 \# S_2$ es el espacio cociente de $S'_1 \sqcup S'_2$ con la relación de equivalencia $x \sim h(x)$, para todo $x \in \partial D_1$.

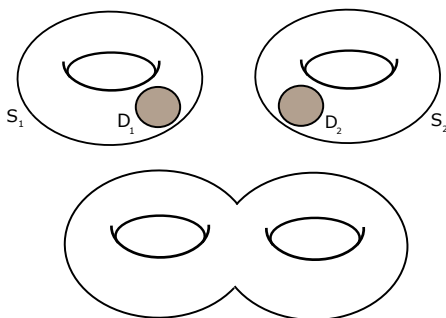


Figura 2.2: Suma conexa de dos toros

El resultado, $S_1 \# S_2$, también es una superficie. Si S_i tiene s_i componentes en su frontera, para $i = 1, 2$, entonces $S_1 \# S_2$ tiene $s_1 + s_2$ componentes en su frontera.

Ejemplo 2.3. Si S_2 es una 2-esfera, entonces $S_1 \# S_2$ es homeomorfa a S_1 . En efecto, el complemento del interior de un disco en S^2 es homeomorfo a un disco; por lo que el resultado de identificar la frontera de dicho disco con la frontera del disco removido en S_1 es homeomorfo a S_1 .

Ejemplo 2.4. Si S_1 y S_2 son toros, entonces $S_1 \# S_2$ es homeomorfo a la superficie mostrada en la Figura 2.2.

Ejemplo 2.5. $F_{g,b}(N_{h,b})$ es homeomorfo a la superficie obtenida de eliminar el interior de b discos a la suma conexa de g toros (suma conexa de h planos proyectivos).

La suma conexa no depende de la elección del disco y el Truco de Alexander garantiza que tampoco depende del homeomorfismo, por lo tanto está bien definida. Además, es una operación simétrica y asociativa y la esfera funciona como elemento neutro de la suma conexa.

Por el momento estamos interesados en el estudio de tres superficies especiales: S^2 , T^2 y P^2 . Como se mencionó anteriormente, la suma conexa de cualquier superficie con la 2-esfera es homeomorfa a la superficie original; además, por el Ejemplo 1.16 es posible representar a S^2 mediante un polígono de dos lados identificados como aa^{-1} . A continuación, mostraremos que la suma conexa de n toros y la de n planos proyectivos se puede obtener como el cociente de un polígono con sus lados identificados.

Representación de la suma conexa de dos toros. Como la suma conexa no depende de la elección del disco sobre cada superficie, los elegiremos de manera que su frontera sea tangente a un vértice en cada toro. Al eliminar el interior de cada uno de los discos, las superficies son homeomorfas a un pentágono con los lados identificados como se muestra en la Figura 2.3. Finalmente, identificar las fronteras de los discos es equivalente a pegar c_1 con c_2 .

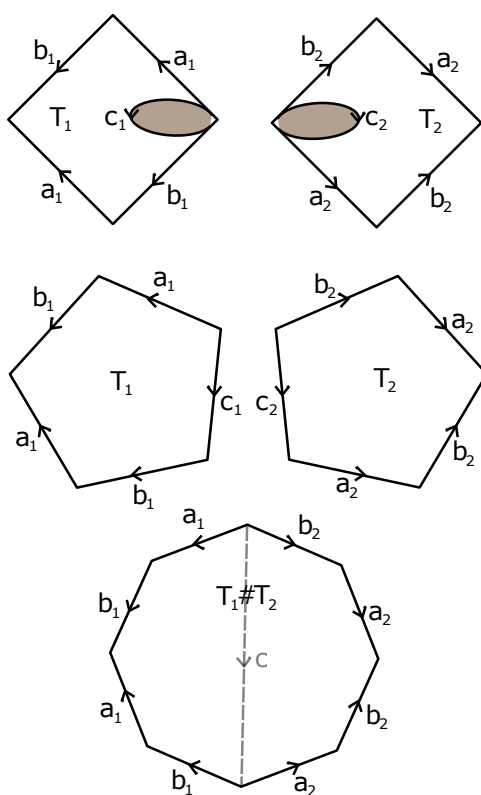


Figura 2.3: Suma conexa de dos toros

De esta forma obtenemos un polígono de ocho lados, identificados como se muestra en la imagen. Por inducción, es posible demostrar que la suma conexa de n toros es un polígono de $4n$ lados, identificados como sigue: $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$.

Representación de la suma conexa de dos planos proyectivos Por un argumento similar al anterior, la suma conexa de dos planos proyectivos es homeomorfo a un cuadrado con los lados identificados como en la Figura 2.4.

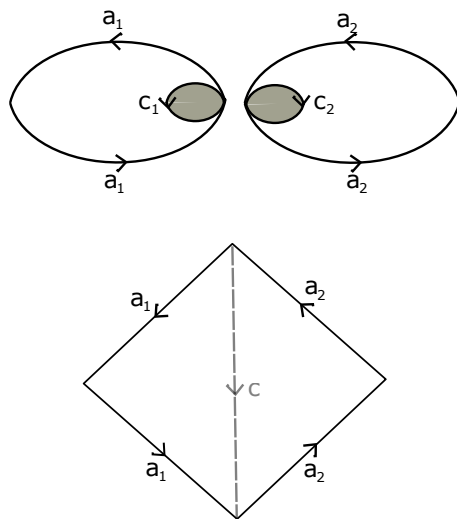


Figura 2.4: Suma conexa de dos planos proyectivos

De manera análoga, la suma conexa de n planos proyectivos es homeomorfa al espacio cociente de un polígono de $2n$ lados, identificados de la siguiente forma: $a_1 a_1^{-1} a_2 a_2^{-1} \dots a_n a_n^{-1}$.

Hemos representado sumas conexas de toros y planos proyectivos por un polígono D cuyos aristas se identifican en pares. Esta identificación puede ser indicada mediante símbolos, por ejemplo: $aa^{-1}fbcc^{-1}b^{-1}fee$, donde el superíndice -1 significa que al recorrer la frontera del disco en una dirección, la arista correspondiente va en dirección contraria.

Por el Teorema 1.29 toda 2-variedad es triangulable. Podemos parafrasear la definición de triangulación \mathcal{T} de una superficie S como sigue: una triangulación consiste de una familia finita de subconjuntos cerrados $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ que cubre a S , y una familia de homeomorfismos $\phi_i : T'_i \rightarrow T_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, donde cada T'_i es un 2-simplejo en \mathbb{R}^2 . En adelante llamaremos **triángulo** a T_i y a T'_i ; cada 1-simplejo y su imagen se llamará **arista** y las imágenes de vértices también se llamarán vértices. Finalmente, es requisito que cualesquiera dos triángulos distintos T_i y T_j cumplan que $T_i \cap T_j = \emptyset$, $T_i \cap T_j$ es un vértice o bien $T_i \cap T_j$ es una arista. Una triangulación \mathcal{T} de una superficie cerrada cumple las siguientes propiedades:

1. Cada arista es arista de exactamente dos triángulos.
Cada punto en la arista debe tener una vecindad homeomorfa a \mathbb{R}^2 , si una arista perteneciera sólo a un triángulo o más de dos, esto no sería posible.
2. Sea v un vértice de una triangulación, entonces podemos acomodar el conjunto de todos los triángulos que tienen a v como vértice en orden cíclico, $T_0, T_1, \dots, T_n = T_0$, tal que T_i y T_{i+1} tienen exactamente una arista en común, para $0 \leq i \leq n-1$.
En efecto, sea U una vecindad de v homeomorfa a B^2 . Sea $\mathcal{T}' = \{T \in \mathcal{T} : v \in T, T \cap U \neq \emptyset\}$ y fijemos $T_0 \in \mathcal{T}'$ y e_1 una arista de T_0 que tiene a v . Sean T_1 el único triángulo tal

que $T_0 \cap T_1 = e_1$ y e_2 la otra arista de T_1 que tiene por vértice a v . Continuamos con este proceso, como \mathcal{T}' es finito, llegamos al último triángulo, T_{n-1} . Como en cada triángulo dos aristas tienen al vértice v y ya se han considerado ambas aristas en los triángulos T_1, \dots, T_{n-2} , el único triángulo que comparte arista e_n con T_{n-1} es T_0 ; es decir, $T_n = T_0$.

En el caso de las superficies con frontera la primera propiedad no siempre se cumple, el problema es que los puntos sobre la frontera tienen vecindades homeomorfas a \mathbb{R}_+^n ; es por esto que las aristas que están sobre la frontera sólo pertenecen a un triángulo. Por otro lado, la segunda propiedad se cumple para vértices que no están en la frontera, en caso contrario el orden no es cíclico; además, hay que considerar que para que T_i y T_{i+1} , $0 \leq i \leq n-1$ compartan una arista es necesario que T_0 y T_n tengan una arista sobre la frontera. En la Figura 2.5 se muestra una triangulación de la Banda de Möbius, $\{T_0, T_1, T_2, T_3\}$ son todos los triángulos que tienen al vértice v_1 y $\{T_3, T_0, T_1\}$ es el conjunto de triángulos que tienen al vértice v_2 .

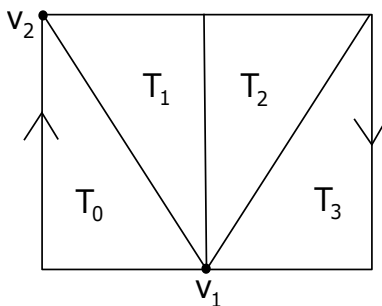


Figura 2.5: Triangulación de la Banda de Möbius.

2.1. Teoremas de Clasificación

Queremos demostrar que cualquier superficie cerrada es homeomorfa a una de las superficies ya mencionadas: la 2-esfera, el toro, el plano proyectivo y la suma conexa de estas.

Lema 2.6. *La Botella de Klein es homeomorfa a la suma conexa de dos planos proyectivos.*

Demostración. Para esto consideremos el esquema de la Figura 2.6. Sólo tenemos que cortar la Botella de Klein a lo largo de c y pegar por b . \square

Lema 2.7. *La suma conexa de un toro y un plano proyectivo es homeomorfa a la suma conexa de tres planos proyectivos.*

Demostración. En la Figura 2.7 a) se muestra la suma conexa de una Botella de Klein y P^2 , cortamos por d y pegamos c , para obtener b), luego cortamos por e y pegamos b ; de esta forma obtenemos la representación de $T^2 \# P^2$.

Con esto, la suma conexa del toro con un plano proyectivo es homeomorfo a la suma conexa de la Botella de Klein con un plano proyectivo, por el Lema 2.6 es homeomorfo a la suma conexa de tres planos proyectivos. \square

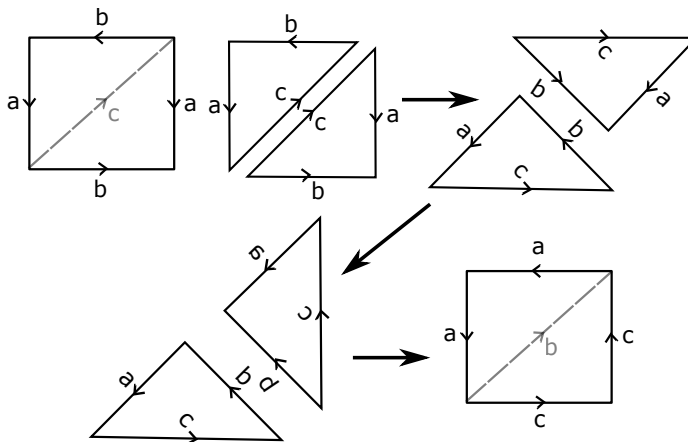


Figura 2.6: Botella de Klein es equivalente a la suma conexa de dos Planos proyectivos.

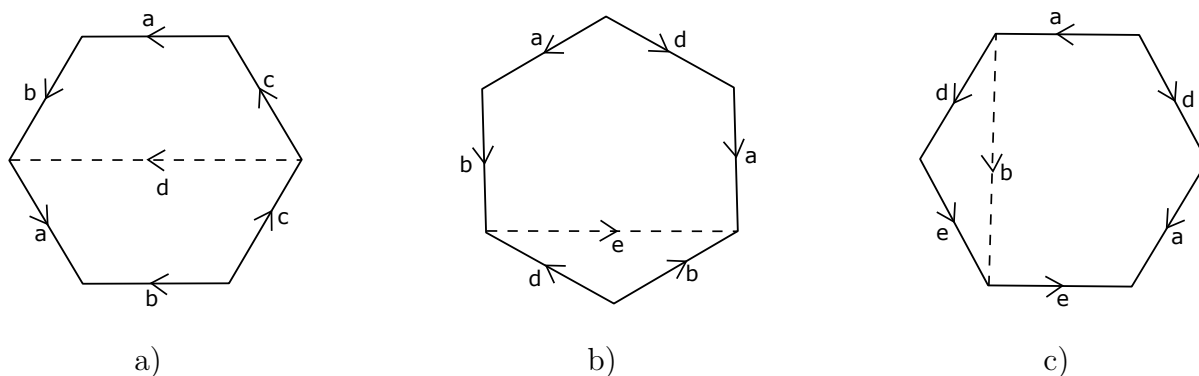


Figura 2.7: La suma conexa de una Botella de Klein y P^2 es homeomorfa a $T^2 \# P^2$

Teorema 2.8. (Clasificación de superficies cerradas) Toda superficie cerrada es homeomorfa a una esfera, o a la suma conexa de toros o bien a la suma conexa de planos proyectivos.

Demostración. Sea S una superficie cerrada. Demostraremos que S es homeomorfa a un polígono con aristas identificadas por pares, representados por una de las siguientes:

1. aa^{-1} ,
2. $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$,
3. $a_1a_1a_2a_2\dots a_na_n$

Primer paso: S es homeomorfa a un polígono con aristas identificadas

Sea \mathcal{T} una triangulación de S ; supongamos que n es el número de triángulos en \mathcal{T} . Podemos enumerar los triángulos de tal forma que el triángulo T_i tiene una arista en común con al menos uno de los triángulos T_1, T_2, \dots, T_{i-1} , para $i = 2, \dots, n$. Para probar esta afirmación, nombremos a uno de los triángulos T_1 y sea e_2 una de sus aristas; sea T_2 el triángulo que

tiene por arista a e_2 , sea e_3 una de las aristas restantes de $T_1 \cup T_2$; sea T_3 el triángulo con arista e_3 y sea e_4 una de las aristas restantes de $T_1 \cup T_2 \cup T_3$. Repetimos este proceso. Si en algún momento no es posible continuar, hemos terminado o bien tenemos dos conjuntos de triángulos $\{T_1, \dots, T_k\}$ y $\{T_{k+1}, \dots, T_n\}$ tal que ningún triángulo del primer conjunto tiene una arista o vértice en común con cualquier triángulo del segundo conjunto. Pero esto proporciona una partición de S en dos conjuntos cerrados, no vacíos y disjuntos, lo que contradice que S es conexo.

Recordemos que para cada triángulo T_i existe un triángulo euclidiano T'_i en \mathbb{R}^2 y un homeomorfismo $\phi_i : T'_i \rightarrow T_i$.

Sea $T' = \bigsqcup_{i=1}^n T'_i$. Entonces T' es un subespacio compacto de \mathbb{R}^2 . Definamos $\phi : T' \rightarrow S$ por $\phi|_{T'_i} = \phi_i$. Como T' es compacto y S es un espacio de Hausdorff, ϕ es una función cerrada; además, es evidente que ϕ es una función continua y sobreyectiva. Por la Proposición 1.2, S tiene la topología cociente determinada por ϕ . Esto significa que S se obtiene pegando los triángulos T_1, \dots, T_n a lo largo de aristas apropiadas.

Por hipótesis, cada arista e_i , $2 \leq i \leq n$, pertenece a dos triángulos, T_i y T_j , con $1 \leq j \leq i$. Mas aún, $\phi^{-1}(e_i)$, consiste de una arista en T'_i y otra en T'_j . Identificamos dichas aristas mediante la siguiente relación; $\forall x, y \in \phi^{-1}(e_i)$, $x \sim y$ si y sólo si $\phi(x) = \phi(y)$. Sean q_1 la función inducida por esta relación y $D = T'/\sim$.

Consideremos ahora la relación \sim' tal que $\forall x, y \in D$, $x \sim' y$ si y sólo si $\phi(x) = \phi(y)$. Sea q_2 la función inducida por esta relación y $D' = D/\sim'$. De esta forma, D' es un espacio cociente de T' y es tal que $q_2 \circ q_1(x) = q_2 \circ q_1(y)$ si y sólo si $\phi(x) = \phi(y)$. Por el Teorema 1.4, existe un único homeomorfismo $\psi : D' \rightarrow S$.

$$\begin{array}{ccc}
 T' & & \\
 q_1 \downarrow & \searrow \phi & \\
 D & & S \\
 q_2 \downarrow & \nearrow \psi & \\
 D' & &
 \end{array}$$

Por otro lado, si identificamos dos discos a lo largo de arcos sobre su frontera, el espacio cociente resultante también es un disco. Como los T'_i son homeomorfos a discos, D también lo es. Por lo tanto, S es homeomorfo a un polígono D con lados identificados.

Si la letra de un determinado par de aristas ocurre con ambos exponentes, lo llamaremos de *primera clase*; en caso contrario diremos que el par de aristas es de *segunda clase*.

Segundo paso: *Eliminación de aristas adyacentes de primera clase.*

Si tenemos un par de aristas adyacentes de primera clase, las podemos eliminar con la modificación que se muestra en la Figura 2.8.

Continuamos este proceso hasta que todos los pares de aristas adyacentes de primera clase son eliminados, o hasta obtener un polígono con dos lados; en cuyo caso este polígono está representado por aa^{-1} o aa , es decir, es una esfera o un plano proyectivo, y por tanto cumple el enunciado del teorema. En caso contrario, si se eliminan todos los pares de aristas adyacentes de primera clase, se procede con los siguientes pasos.

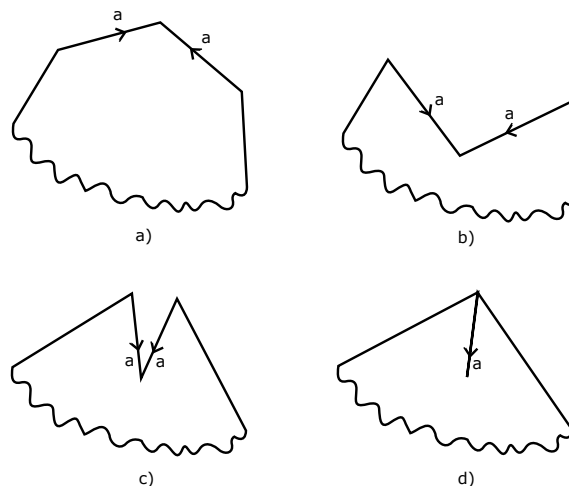


Figura 2.8: Eliminación de aristas adyacentes de primera clase.

Tercer paso: *Transformación a un polígono que identifica todos sus vértices a un sólo vértice.*

Aunque las aristas del polígono están identificadas en pares, los vértices están identificados en conjuntos de uno, dos, etc.

Supongamos que hay por lo menos dos diferentes clases de equivalencia de vértices, entonces el polígono tiene un par de vértices adyacentes que no son equivalentes, digamos P y Q . Como P y Q no son equivalentes, en el segundo paso hemos eliminado las parejas de aristas adyacentes de primera clase y por tanto no puede ocurrir que los lados a y b de la Figura 2.9 estén identificados.

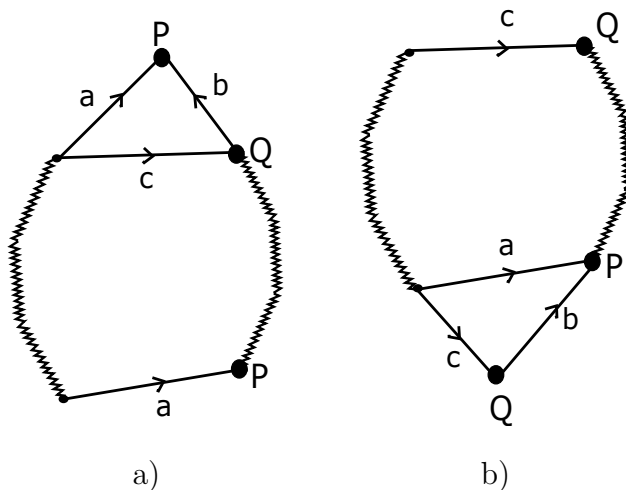


Figura 2.9: Tercer paso.

Hacemos un corte a lo largo de la línea c , que va del vértice Q al vértice de a que no es P ; luego pegamos las aristas etiquetadas con a . De esta forma, obtenemos un nuevo polígono

con un vértice menos en la clase de equivalencia de P y uno más en la de Q . De ser necesario ejecutamos el segundo paso nuevamente; es decir, si obtenemos un par de aristas adyacentes de primera clase, los eliminamos. Después aplicamos el tercer paso nuevamente para reducir el número de vértices de la clase de equivalencia de P . Cuando sólo queda un elemento de la clase de equivalencia de P , significa que sólo queda un par de aristas adyacentes de primera clase. Por tanto es posible eliminar la clase de equivalencia de P . Repetimos este proceso hasta obtener una única clase de equivalencia. De esta forma obtenemos un polígono con todos sus vértices identificados en un sólo vértice.

Cuarto paso: *Hacer cualquier par de aristas de segunda clase adyacente.*

Supongamos que tenemos un par de aristas de segunda clase, etiquetadas con b , que no son adyacentes, ver Figura 2.10. Cortamos a lo largo de a y pegamos a lo largo de b . Ahora las dos aristas son adyacentes. Continuamos con este proceso hasta que las aristas de cada par de segunda clase son adyacentes.

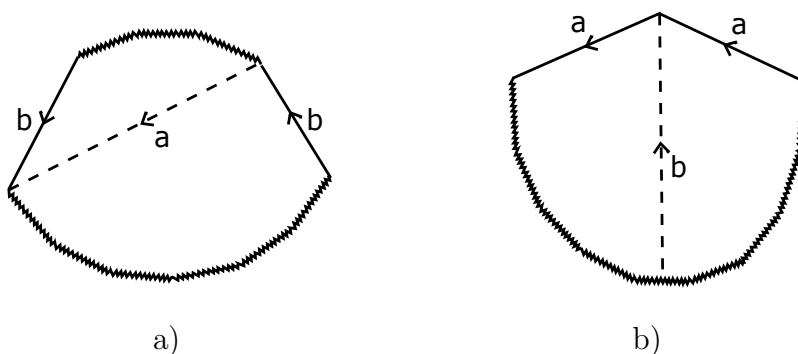


Figura 2.10: Cuarto paso.

Si no hay pares de primera clase, entonces nuestro polígono tiene la forma $a_1a_1a_2a_2\dots a_na_n$, es decir, S es la suma conexa de n planos proyectivos. Supongamos lo contrario, hay por lo menos un par de aristas de primera clase, digamos c y c^{-1}

Afirmamos que hay por lo menos otro par de aristas de primera clase, tal que ambos pares se separan mutuamente; así que nuestro polígono se representa como $c\dots d\dots c^{-1}\dots d^{-1}\dots$. Para probar esta afirmación, supongamos que c y c^{-1} no están separados por otro par de aristas de primera clase, entonces nuestro polígono es como se muestra en la Figura 2.11.

Se cumple que toda arista de A debe identificarse con una arista en A , ya que si son de segunda clase, entonces son adyacentes, y si son de primera clase, no separan a c y c^{-1} . Lo mismo ocurre con B . Se sigue que v y v' no son equivalentes. Pero esto contradice que todos los vértices se identifican en un sólo vértice.

Quinto paso: *Agrupar pares de primera clase.*

Supongamos entonces que tenemos dos pares de primera clase que se separan mutuamente. Demostraremos que podemos transformar el polígono de tal forma que las cuatro aristas son consecutivas, para esto consideremos la Figura 2.12.

Primero cortamos a lo largo de c y pegamos en b , luego cortamos en d y pegamos en a . De esta forma nuestro polígono se representa por $cdc^{-1}d^{-1}\dots$. Continuamos con este proceso hasta

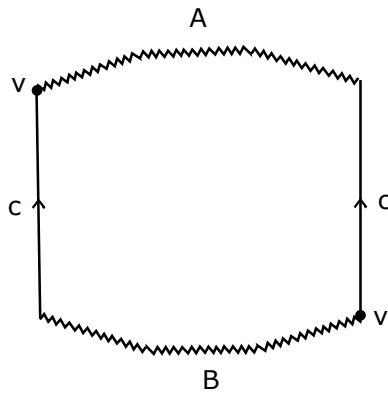


Figura 2.11: Par de aristas de primera clase.

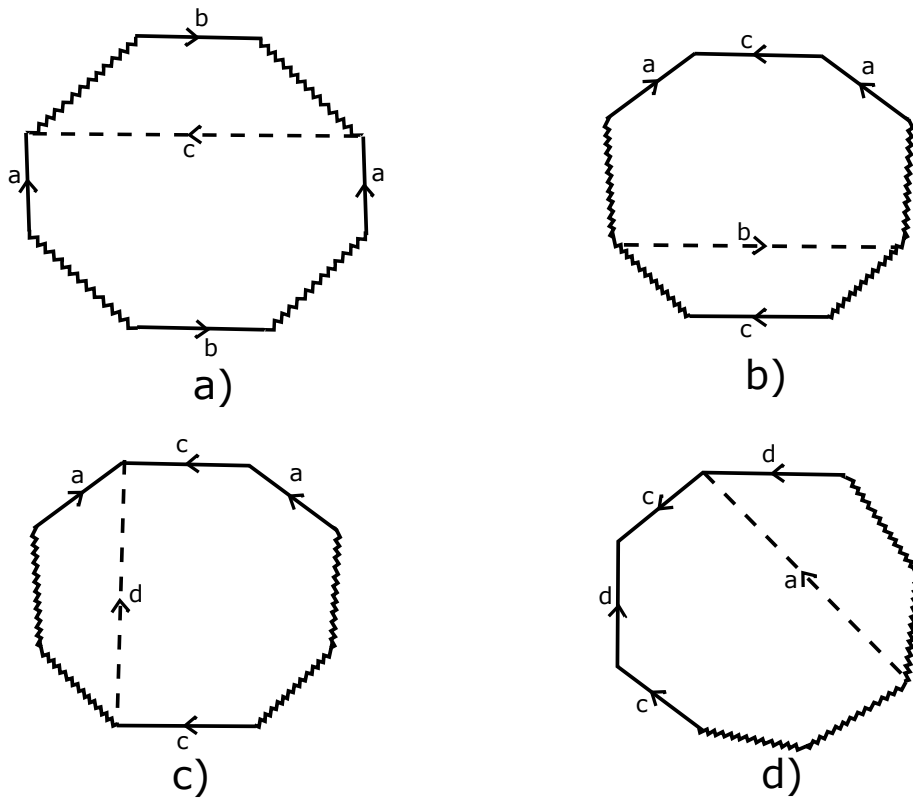


Figura 2.12: Quinto paso.

que todos los pares de primera clase están en grupos de cuatro. Si no hay pares de segunda clase, las aristas del polígono están etiquetadas de la siguiente forma $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$, y por tanto la superficie es la suma conexa de n toros.

Supongamos que el polígono tiene m pares de segunda clase ($m > 0$) tal que las dos aristas

de cada par son adyacentes y n -cuartetos de lados tal que cada uno consiste en dos pares de aristas de primera clase que se separan mutuamente. Entonces la superficie es la suma conexa de m planos proyectivos y n toros. Por el Lema 2.7, esto es homeomorfo a la suma conexa de $m + 2n$ planos proyectivos. \square

En general, por el Ejemplo 2.5 se tiene el siguiente Teorema.

Teorema 2.9. (Clasificación de superficies) *Toda superficie es homeomorfa a $F_{g,b}$ o bien a $N_{h,b}$, donde $g \geq 0$, $h \geq 1$ y $b \geq 0$.*

Definición 2.10. *Una superficie es **orientable** si es homeomorfa a $F_{g,b}$, con $g \geq 0$ y $b \geq 0$. Si una superficie es homeomorfa a $N_{h,b}$, con $h \geq 1$ y $b \geq 0$, decimos que es **no orientable**.*

Definición 2.11. *Sea S una superficie, el **género** de S se define como*

$$g(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } S = F_{0,b}, b \geq 0. \\ g & \text{si } S = F_{g,b}, g \geq 1, b \geq 0. \\ h & \text{si } S = N_{h,b}, h \geq 1, b \geq 0. \end{cases}$$

Dada una superficie S con una triangulación \mathcal{T} , se define la función $\chi(\mathcal{T})$ como sigue; $\chi(\mathcal{T}) = v - e + t$, donde v denota el número de vértices, e el número de aristas y t el número de triángulos. Se sabe que si tenemos dos triangulaciones $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ para S , entonces $\chi(\mathcal{T}_1) = \chi(\mathcal{T}_2)$, así que podemos definir la **característica de Euler** de S como $\chi(S)$.

Teorema 2.12. *Sean S_1 y S_2 dos superficies compactas, entonces $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$.*

Demostración. Sean \mathcal{T}_i una triangulación de S_i y T_i un triángulo de \mathcal{T}_i , para $i = 1, 2$. Definamos $S'_i = S_i \setminus \text{int}(T_i)$, entonces $S_1 \# S_2 = S'_1 \sqcup S'_2 / \sim$, donde \sim es la relación que identifica a la frontera de T_1 con la de T_2 . De esta forma, obtenemos una triangulación \mathcal{T} para $S_1 \# S_2$. Sean t_i, a_i, v_i el número de triángulos, aristas y vértices de T_i , $i = 1, 2$. Se tiene que $\chi(\mathcal{T}) = (t_1 + t_2 - 2) - (a_1 + a_2 - 3) + (v_1 + v_2 - 3) = \chi(\mathcal{T}_1) + \chi(\mathcal{T}_2)$. El resultado se sigue de la definición de característica de Euler de una superficie. \square

Los siguientes resultados son útiles al trabajar con superficies. Basta considerar las triangulaciones de S^2, T^2 y P^2 , junto con un argumento inductivo, para obtener lo siguiente.

Corolario 2.13. 1) $\chi(S^2) = 2$,

2) Si S es la suma conexa de n toros, entonces $\chi(S) = 2 - 2n$,

3) Si S es la suma conexa de n planos proyectivos, entonces $\chi(S) = 2 - n$.

Lo siguiente se obtiene del Corolario 2.13 y la definición de género de una superficie.

Proposición 2.14. *Para una superficie cerrada S se cumple*

$$g(S) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi(S)) & \text{si } S \text{ es orientable} \\ 2 - \chi(S) & \text{si } S \text{ es no orientable.} \end{cases}$$

Si S es una superficie con frontera, $2g(S) = 2 - \chi(S) - |\partial S|$, donde $|\partial S|$ es el número de componentes de la frontera de S .

Finalmente, del Teorema de Clasificación de superficies, la definición de superficie orientable y la Proposición 2.14, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.15. *Sean S_1 y S_2 dos superficies. Entonces S_1 y S_2 son homeomorfas si y sólo si tienen la misma característica de Euler, el mismo número de componentes en su frontera y ambas son orientables o ambas son no orientables.*

2.2. Herramientas topológicas

Definición 2.16. *Sea X un conjunto de curvas simples cerradas disjuntas encajadas en una superficie S . Si $\lambda \in X$ es una curva que es frontera de un disco $\Delta \subset S$ tal que $\Delta \cap X = \partial\Delta = \lambda$, decimos que λ es una **curva de más adentro** y Δ es un disco de más adentro.*

Teorema 2.17. *Un conjunto finito de curvas simples cerradas disjuntas sobre una esfera, con al menos dos elementos, contiene al menos dos curvas de más adentro.*

Demostración. Demostraremos por inducción que una familia de $n \geq 2$ curvas simples cerradas disjuntas sobre una esfera Σ contiene al menos dos curvas de más adentro. Es evidente que se cumple para $n = 2$.

Supongamos que se cumple para k curvas simples cerradas disjuntas. Sea X un conjunto de $k + 1$ curvas simples cerradas disjuntas y $\lambda \in X$, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2 \in X \setminus \{\lambda\}$ curvas de más adentro. Por Teorema 1.35 y Teorema 1.36, se sigue que λ_1 separa a Σ en dos discos, digamos Δ_1 y Δ_2 , con Δ_1 el disco de más adentro; entonces $\lambda_2 \subset \Delta_2$. Si $\lambda \subset \Delta_1$, λ y λ_2 son dos curvas de más adentro.

Si $\lambda \subset \Delta_2$, consideremos a los discos Δ_3 y Δ_4 que tienen por frontera a λ_2 , con Δ_3 el disco de más adentro. Si $\lambda \subset \Delta_3$, entonces λ y λ_1 son curvas de más adentro. Finalmente, si $\lambda \subset \Delta_4$, entonces λ_1 y λ_2 son las curvas de más adentro que buscamos. \square

Definición 2.18. *Sea X un conjunto de arcos disjuntos propiamente encajados en una superficie S . Si $\alpha \in X$ es un arco separante que corta un disco $\Delta \subset S$ tal que $\Delta \cap X = \alpha$ y $\partial\Delta = \alpha \cup \beta$, donde $\beta \subset \partial S$, entonces α es un **arco de más afuera** y Δ es un disco de más afuera.*

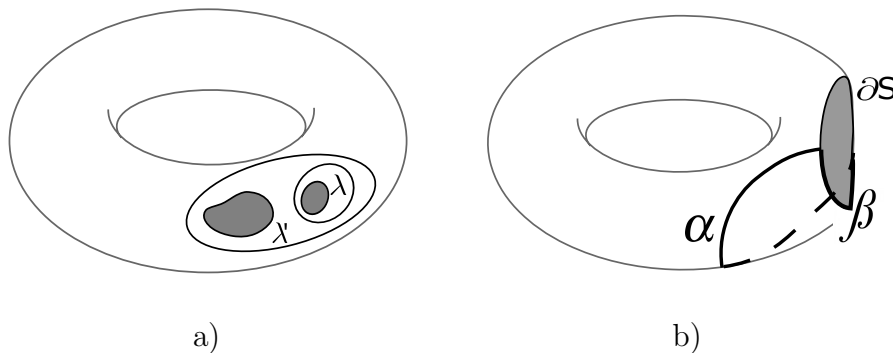


Figura 2.13: a) Curvas de más adentro; b) Arco de más afuera.

De manera análoga al Teorema 2.17 se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 2.19. *Un conjunto finito, con al menos dos elementos, de arcos disjuntos propiamente encajados en un disco contiene al menos dos arcos de más afuera.*

Las superficies, al estar clasificadas, resultan ser una herramienta muy útil en el estudio de 3-variedades. En particular las superficies más destacadas son las incompresibles.

Definición 2.20. *Una curva simple cerrada λ encajada en una superficie S es **esencial** si no es frontera de un disco en S . De otra manera, decimos que es **inesencial**.*

Definición 2.21. *Una superficie S propiamente encajada en una 3-variedad M es **compresible** si se satisface una de las siguientes:*

1. S es una 2-esfera y es frontera de una 3-bola en M .
2. S es un disco en ∂M
3. S es un disco propiamente encajado en M y existe una 3-bola en M cuya frontera está contenida en $S \cup \partial M$.
4. S no es una 2-esfera o un disco, y existe un disco $\Delta \subset M$ tal que $\Delta \cap S = \partial\Delta$ y $\partial\Delta$ es una curva esencial en S . El disco Δ es llamado **disco de compresión** para S .

Una superficie que no es compresible en M se llama **incompresible**.

Definición 2.22. *Un arco α propiamente encajado en una superficie S es **inesencial** si existe $\gamma \subset \partial S$ tal que $\partial\alpha = \partial\gamma$ y $\alpha \cup \gamma$ es frontera de un disco en S . En caso contrario, decimos que α es **esencial**.*

Definición 2.23. *Una superficie S propiamente encajada en una 3-variedad M , con $\partial S \neq \emptyset$, es **frontera compresible**, denotado por **∂ -compresible**, si existe un disco $D \subset M$ tal que $\partial D = \alpha \cup \beta$, donde α es un arco esencial en S y un β un arco en ∂M y $D \cap S = \alpha$. D se llama disco de **∂ -compresión**. Si S no es ∂ -compresible, decimos que es **∂ -incompresible**.*

Definición 2.24. *Sea M una 3-variedad, si toda 2-esfera $\Sigma \subset M$ es compresible, entonces M es **irreducible**.*

Ejemplo 2.25. Por el Teorema 1.37, \mathbb{R}^3 y S^3 son irreducibles.

Sea $S \subset M$ una superficie orientable encajada en una 3-variedad M , si S es compresible y Δ es un disco de compresión, se define el proceso de **compresión** como sigue: Sea V una vecindad de Δ en M tal que $V \cap S$ es vecindad de $\partial\Delta$ en S . Tomemos $S' = S \setminus V$. La superficie S' tiene dos componentes en la frontera, las cuales tapamos con dos copias de Δ . Ver Figura 2.14.

Si la superficie obtenida es compresible, repetimos los pasos anteriores hasta obtener una esfera, o bien una superficie incompresible posiblemente desconexa.

Si S es una superficie ∂ -compresible, podemos definir análogamente el proceso de **∂ -compresión**, donde V es una vecindad del disco de ∂ -compresión, Δ' en M tal que $V \cap S$ es vecindad del arco α en S y $V \cap \partial M$ es vecindad de β . Ver Figura 2.15.

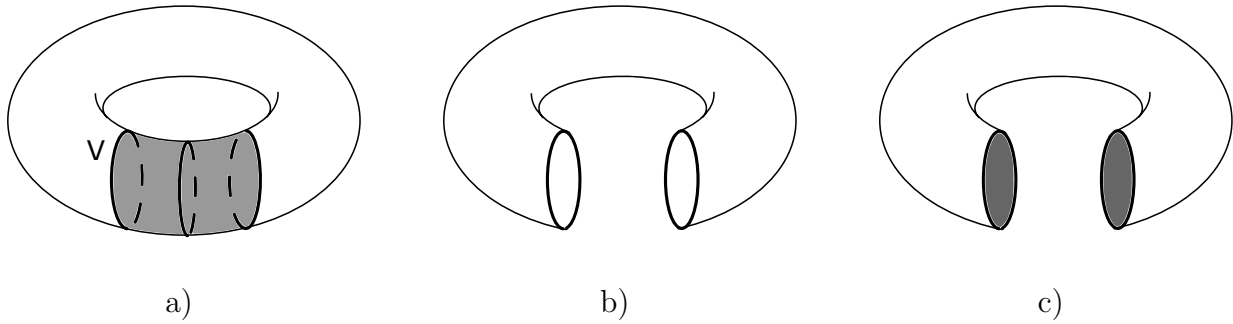
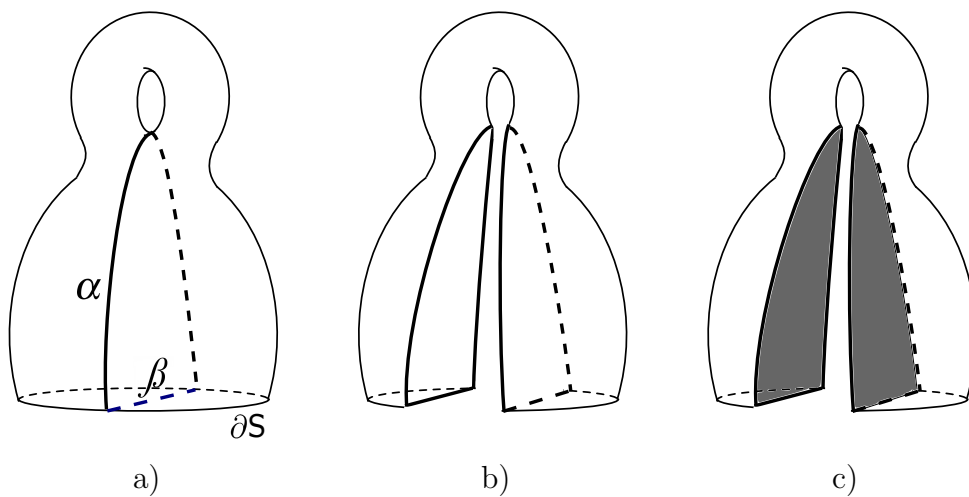


Figura 2.14: Compresión

Figura 2.15: ∂ -compresión.

Proposición 2.26. *Sea S compresible o ∂ -compresible. Si \hat{S} es la superficie obtenida al hacer una vez compresión o ∂ -compresión respectivamente a S , entonces $\chi(S) < \chi(\hat{S})$.*

Demostración. Sea $S' = S \setminus V$, como en la definición del proceso de compresión, se tiene que $\chi(S') = \chi(S)$. Al pegar copias de Δ a S' , $\chi(S) = \chi(\hat{S}) + 2$. De manera análoga se demuestra que $\chi(S) = \chi(\hat{S}) + 1$. Por tanto, $\chi(S) < \chi(\hat{S})$. \square

Corolario 2.27. *Sea S compresible y \hat{S} la superficie obtenida al comprimir S una vez, entonces $g(\hat{S}) < g(S)$.*

Notar que en las Figuras 2.14 y 2.15, en a) se muestra una superficie de género 1 y la superficie obtenida al hacer compresión o ∂ -compresión es de género 0. Intuitivamente, el Corolario 2.27 nos dice que al hacer el proceso de compresión o ∂ -compresión obtenemos una superficie más simple que la original.

Capítulo 3

Nudos

Los nudos se pueden considerar en \mathbb{R}^3 o en $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ dependiendo del contexto. Las definiciones en esta sección son equivalentes para \mathbb{R}^3 o S^3 , en caso de ser necesario, enfatizaremos cuando se trate de S^3 . Como referencia se puede consultar [11].

Definición 3.1. Un *nudo* es la imagen de un encaje PL de S^1 en \mathbb{R}^3 .

En la Figura 3.1 se muestran algunos nudos, notar que en b) se suavizó el nudo en a).

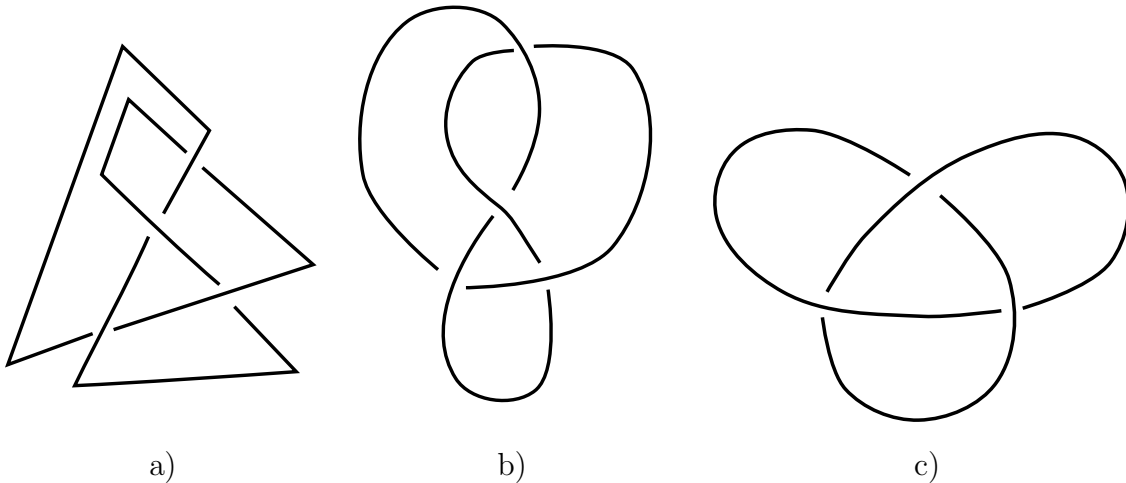


Figura 3.1: a) y b) nudo ocho y c)trébol

Sea K un nudo encajado en \mathbb{R}^3 y Δ un triángulo tal que:

1. K no interseca el interior de Δ .
2. K interseca uno o dos lados de $\partial\Delta$.
3. Los vértices de K en $K \cap \Delta$ también son vértices de Δ .
4. Los vértices de Δ en $K \cap \Delta$ también son vértices de K .

Se define una **movida triangular** sobre K como sigue: reemplazar K por $(K - (K \cap \Delta)) \cup (\partial\Delta - K)$. Ver Figura 3.2

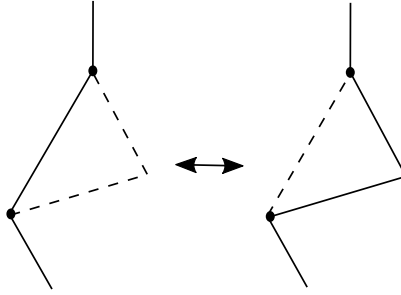


Figura 3.2: Movida triangular.

Definición 3.2. Dos nudos K_1 y K_2 son **equivalentes** si existe una sucesión finita de movidas triangulares que transforman K_1 en K_2 .

Usaremos la palabra “nudo” para referirnos a una clase de equivalencia o a un elemento de esta.

Definición 3.3. Un nudo K es *trivial* si es equivalente a S^1 .

3.1. Diagramas

Podemos hacer una representación del nudo al proyectarlo sobre un plano. Aunque dicha proyección nos da información sobre el encaje en el espacio, esto no es suficiente para recrearlo; toda la información respecto a la altura se pierde, así que no sabemos cual parte pasa por arriba y cual por debajo.

Definición 3.4. Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un nudo y $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Un punto $x \in \pi(K)$ es **regular** si $|\pi^{-1}(x)|$ es un sólo punto, decimos que es **singular** en caso contrario. Si $|\pi^{-1}(x)| = 2$, entonces x se llama **punto doble**. Decimos que π es una **proyección regular** si $\pi(K)$ tiene un número finito de puntos singulares, todos ellos son puntos dobles, y cumple que si $v \in K$ es un vértice, entonces $|\pi^{-1}(\pi(v))| = 1$.

Definición 3.5. Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un nudo. Una ε -**perturbación** de K es el resultado de mover un vértice de K una distancia menor que ε .

En la Figura 3.3 se muestra que una ε -perturbación se puede obtener con una sucesión de movidas triangulares; en este caso, el vértice v se mueve a un punto v' que dista menos de ε . De esta forma, si K' es una ε -perturbación de K , entonces K' es equivalente a K .

Teorema 3.6. Todo nudo K tiene una proyección regular.

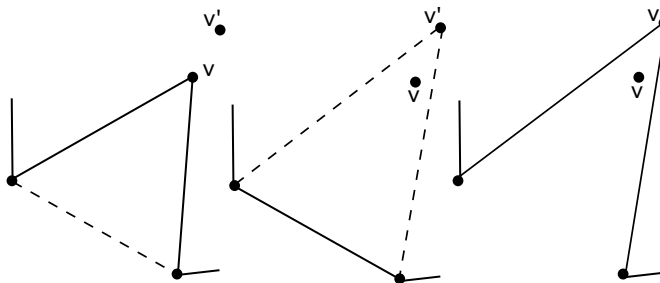


Figura 3.3: Una ε -perturbación usando movidas triangulares.

Demostración. Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un nudo y $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una proyección. Supongamos que π no es una proyección regular, entonces se tienen los siguientes casos:

1. Existen puntos de tangencia, es decir, $\pi(v_1) \in \pi(e_1)$ o $\pi(v_1) = \pi(v_2)$, donde v_1, v_2 son vértices y e_1 es un arista de K . En ambos casos, hacemos ε -perturbación a v_1 para eliminar el punto de tangencia.
2. Si existen aristas e_1, e_2 y e_3 tal que sus proyecciones se intersectan en un punto, hacemos ε -perturbación a uno de los vértices de e_3 .
3. Existen e_1 y e_2 aristas de K tal que $\pi(e_1) \subseteq \pi(e_2)$. Sean v_1 y v_2 los vértices de e_1 . Hacemos ε -perturbación sobre v_1 , de esta forma $\pi(v_2)$ es un punto tangente a $\pi(e_2)$. Por el primer caso, podemos eliminar este punto de tangencia.

En caso de tener más de dos vértices o más de tres aristas tales que sus proyecciones se intersectan, podemos repetir los pasos anteriores las veces que sea necesario. Si K' es el resultado de las ε -perturbaciones, entonces K' es equivalente a K y $\pi(K')$ es una proyección regular. \square

Sea $x \in \pi(K)$ un punto doble, entonces $\pi^{-1}(x) = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\}$. Podemos suponer que $z_1 < z_2$, sea α_x un arco que tiene en su interior a (x_1, y_1, z_1) y que sólo intersecta a la arista que lo contiene. Cambiamos $\pi(K)$ por $\pi(K) \setminus \pi(\alpha_x)$. Hacemos lo mismo por cada punto singular, de esta forma estamos cambiando $\pi(K)$ por $\pi(K) \setminus \bigcup \pi(\alpha_x)$.

Definición 3.7. Llamaremos **diagrama** de un nudo K a $\pi(K) \setminus \bigcup \pi(\alpha_x)$. A cada punto doble del diagrama lo llamaremos **cruce**.

Como consecuencia del Teorema 3.6 se obtiene lo siguiente.

Corolario 3.8. Todo nudo tiene un diagrama.

Definición 3.9. Una **orientación** para un nudo K es una dirección en la que se recorre el nudo.

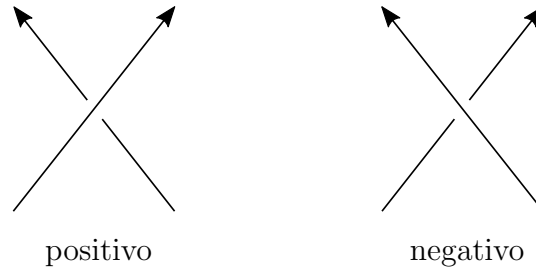


Figura 3.4: Cruces en un diagrama orientado

Un diagrama también puede ser orientado, ya que hereda una orientación via la proyección regular. Cada cruce de un diagrama orientado se verá localmente como uno de los mostrados en la Figura 3.4. Estos tipos de cruces son llamados **positivo** y **negativo**. Un diagrama es **alternante** si al recorrerlo, se pasa alternadamente por encima y por debajo en cada cruce; decimos que un nudo es alternante si tiene un diagrama alternante.

Definición 3.10. Las *movidas de Reidemeister* en un diagrama son los cambios localizados que se muestran en la Figura 3.5.

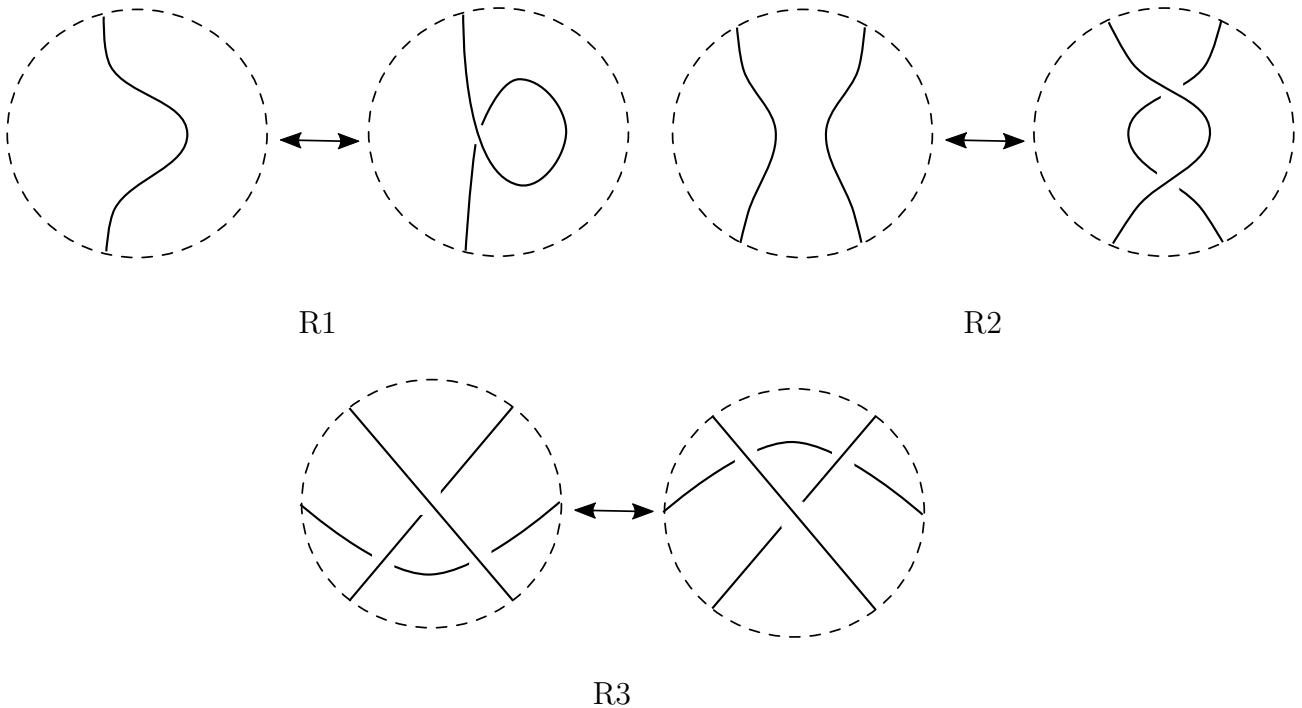


Figura 3.5: Movidas de Reidemeister.

Definición 3.11. Dos diagramas D_1 y D_2 son **equivalentes** si existe un número finito de movidas de Reidemeister que llevan D_1 a D_2 .

Teorema 3.12. *Dos nudos K_1 y K_2 son equivalentes si y sólo si D_1 y D_2 son equivalentes, donde D_i es un diagrama de K_i para $i = 1, 2$.*

Demostración. Si K_1 y K_2 son nudos equivalentes, entonces existe una sucesión finita de movidas triangulares que transforman K_1 en K_2 . Por otro lado, si D_1 y D_2 son equivalentes, existe una sucesión finita de movidas de Reidemeister que las relaciona. Por lo tanto basta hacer una relación entre movidas triangulares en un nudo y movidas de Reidemeister en un diagrama. Se tienen los siguientes casos, ver Figura 3.6.

- a) Si al hacer una movida triangular la proyección del triángulo contiene un segmento de la proyección del arco que intersecta a su frontera, hacer la movida triangular implica hacer R1 sobre el diagrama y viceversa.
- b) Si la proyección del triángulo contiene un segmento de la imagen de algún arco que no intersecta a su frontera, en el diagrama realizamos R2.
- c) Si la proyección del triángulo contiene un cruce, significa que en el diagrama realizamos R3.

□

3.2. Superficies de Seifert

Definición 3.13. *Sea K un nudo en \mathbb{R}^3 . Una superficie orientable $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie de Seifert** para K si $\partial S = K$.*

Teorema 3.14. (Algoritmo de Seifert) *Todo nudo tiene una superficie de Seifert.*

Demostración. Sea K un nudo, le asignamos una orientación y sea D un diagrama en el plano XY en \mathbb{R}^3 . En una vecindad pequeña de cada cruce hacemos el siguiente cambio local al diagrama: borrar el cruce y conectar los extremos de la única forma compatible con la orientación, ver Figura 3.7. El diagrama D se convierte en un conjunto de curvas disjuntas en el plano; estas curvas se llaman círculos de Seifert, ver Figura 3.8 b).

Puede ocurrir que dichos círculos estén anidados. Sea $h(\lambda)$ el número de círculos de Seifert que contienen a λ . Usaremos a este índice para definir una función altura.

Para cada círculo de Seifert λ , tomamos un disco Δ en el plano $z = h(\lambda)$ tal que $\partial\Delta$ se proyecta a λ . Esta colección de discos viven en \mathbb{R}_+^3 y están acomodados de tal forma que si miramos “desde arriba” la frontera de cada disco es visible. Estos discos heredan una orientación del diagrama. Coloreamos los dos lados de cada disco; si la frontera de un disco está orientado en sentido contrario a las manecillas del reloj cuando miramos desde un plano superior, lo pintamos de blanco, en caso contrario de negro, como se muestra en la Figura 3.8 c). De esta forma los colores se invierten en el lado inferior.

Insertamos un pequeño rectángulo torcido en el lugar de cada cruce, el sentido de la media vuelta se elige para producir la clase correcta de cruce, ver Figura 3.9 c). Esto produce una superficie con frontera K .

Si una banda conecta dos discos con el mismo índice altura, entonces estos deben tener colores diferentes, ya que los círculos de Seifert se crearon de la única forma posible según la

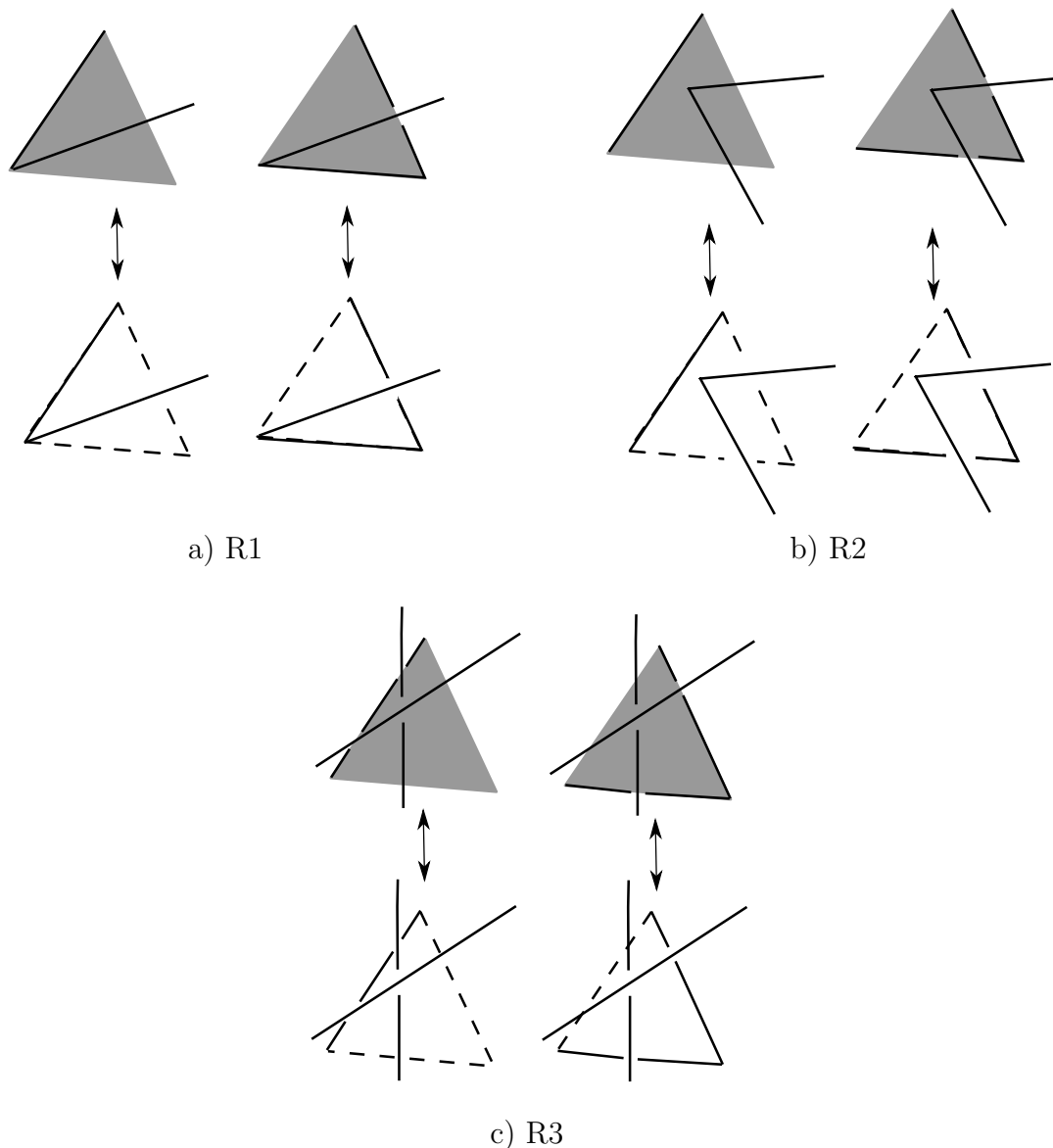


Figura 3.6: Relación entre movidas triangulares y movidas de Reidemeister.

orientación. Así que el color puede ser extendido naturalmente a través de la banda torcida sin causar problemas, como se muestra en Figura 3.9 d). Cualquier otra banda conecta discos cuyos índices de altura difieren en una unidad. Estos discos deben tener el mismo color en la cara superior y cuando la banda se agrega, la torsión trae el lado superior del disco de abajo y se conecta con el disco de arriba. Por lo tanto, esta superficie es de dos lados, es decir, es orientable. \square

Teorema 3.15. *La característica de Euler de una superficie de Seifert S , construida con el algoritmo de Seifert de un diagrama D , con $s(D)$ círculos de Seifert y $c(D)$ cruces es $\chi(S) = s(D) - c(D)$.*

Demostración. Sea S una superficie de Seifert construida con el algoritmo de Seifert, entonces



Figura 3.7: Cambio de los cruces.

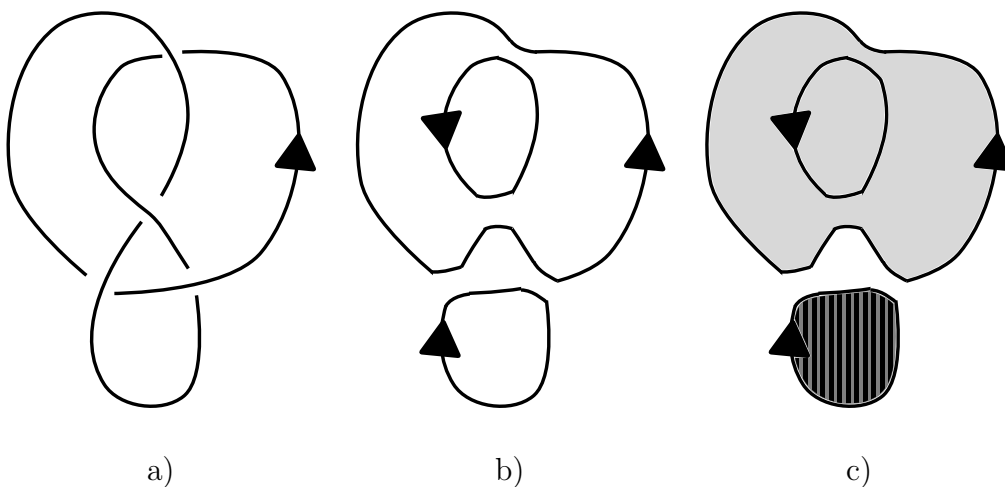


Figura 3.8: a)Nudo ocho orientado; b)Círculos de Seifert ; c)Coloración

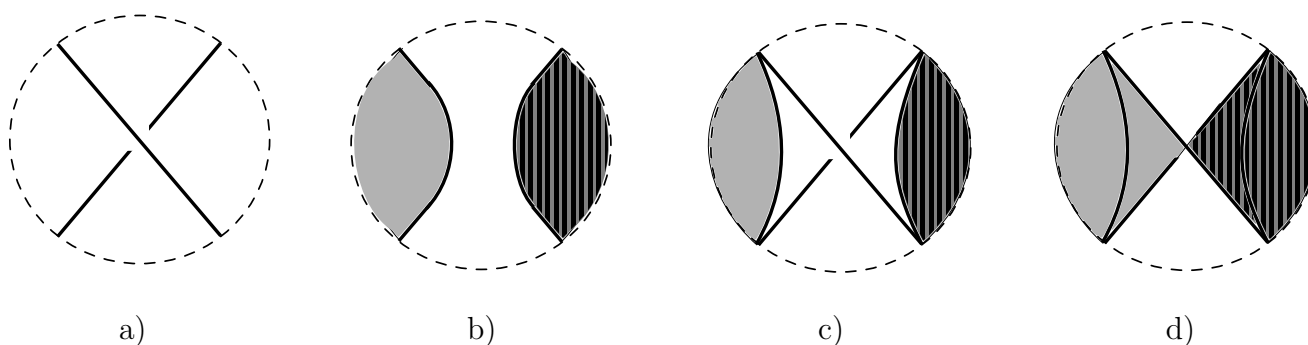


Figura 3.9:

S está formada por discos y bandas, dividimos estos elementos en triángulos de la siguiente forma: un disco al que se conectan n bandas lo dividimos en $2n$ triángulos con un vértice en su interior y una banda en dos triángulos, ver Figura 3.10. Sea J el número total de uniones donde una banda se pega a un disco. Por cada cruce, una

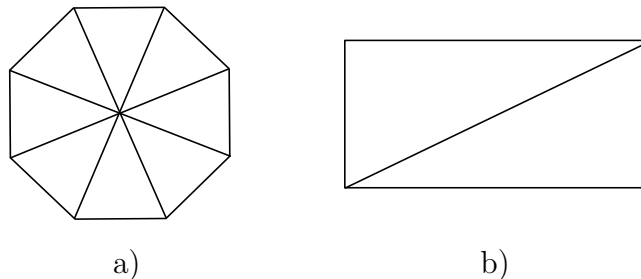


Figura 3.10: a) Triangulación de un círculo de Seifert; b) triangulación de una banda.

banda se une a dos discos, así que $J = 2c(D)$. Además, por cada banda que se une a un disco hay dos triángulos, por lo tanto hay $2J$ triángulos en los discos y dos en cada banda. Por lo tanto el número de triángulos es $t = 2J + 2c(D) = 3J$. Para conocer el número de vértices sólo contaremos los que están en los discos, ya que en estos se incluyen los vértices de las bandas. Como en cada disco hay un vértice interior, $v = 2J + s(D)$. Por último, cada disco tiene el doble de aristas que de triángulos y cada banda sólo agrega 3 aristas a la cuenta; con esto, hay $4J$ aristas por cada disco y 3 aristas por cada cruce, esto es, $a = 4J + 3c(D) = 5J + c(D)$. Finalmente, $\chi(S) = v - a + t = s(D) - c(D)$. \square

Por el Teorema anterior y la Proposición 2.14 se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 3.16. *El género de una superficie de Seifert S , construida con el algoritmo de Seifert sobre el diagrama D , satisface que $2g(S) = 1 - s(D) + c(D)$*

Definición 3.17. *El **género de un nudo** K , denotado por $g(K)$, es el mínimo género sobre todas las superficies de Seifert para K . Una superficie de Seifert S para el nudo K es de **género mínimo** si $g(S) = g(K)$*

Lema 3.18. *Un nudo K es trivial si y sólo si $g(K) = 0$.*

Demostración. Si K es el nudo trivial, entonces tiene un digrama en un plano P con cero cruces. Por el Teorema de Schoenflies, K es frontera de un disco estandar D . Por lo tanto K es frontera de un disco Δ , con $g(\Delta) = 0$; es decir, $g(K) = 0$. Por otro lado, si $g(K) = 0$, entonces K es frontera de un disco y con una sucesión de Δ -movidas, con triángulos contenidos en el disco, obtenemos una representación de K que es un triángulo, por lo tanto K es el nudo trivial. \square

Teorema 3.19. *Toda superficie de Seifert de género mínimo es incompresible.*

Demostración. Sea S una superficie de Seifert de género mínimo para un nudo K . Supongamos que es compresible, entonces existe un disco Δ tal que $\partial\Delta \subset S$ y $\partial\Delta$ es esencial en S . Comprimitos a S a lo largo de Δ y llamamos S' a la componente que contiene a la frontera. Se tiene que $\chi(S') > \chi(S)$ y por tanto $g(S') < g(S)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto S es incompresible. \square

Definición 3.20. *La **suma conexa** de dos nudos orientados K_1 y K_2 , denotada por $K = K_1 \# K_2$, se define como sigue: cortar un arco sobre cada nudo y unir los extremos de K_1 con los de K_2 de tal forma que tenga sentido la orientación, en la Figura 3.11 se muestra un ejemplo de esto.*

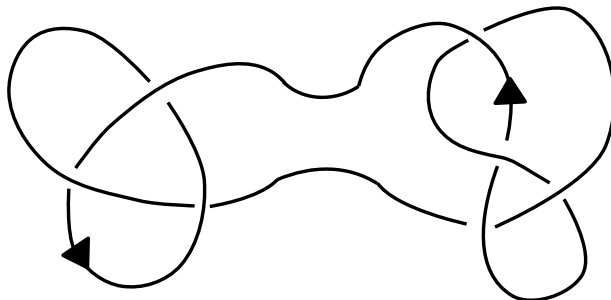


Figura 3.11: Suma conexa del nudo trébol y el nudo ocho.

Como la elección de los arcos y la forma en que se pegan los extremos no dependen del orden, la suma conexa de nudos orientados está bien definida, es asociativa y conmutativa.

Sea $K = K_1 \# K_2$, observemos que existe una esfera Σ en S^3 tal que $\Sigma \cap K$ consiste exactamente de dos puntos y tal que si α es un arco que une a tales puntos, entonces $S^3 \setminus \Sigma = B_1 \sqcup B_2$, donde B_i es una 3-bola en S^3 , tal que $(B_i \cap K) \cup \alpha$ es equivalente a K_i , con $i = 1, 2$. Diremos que Σ factoriza a K en K_1 y K_2 .

Un factor de un nudo K es **propio** si no es el nudo trivial y no es igual a K . Un nudo con factores propios se llama compuesto y llamaremos a un nudo **primo** si no es trivial y no tiene factores propios.

Teorema 3.21. Sean K_1 y K_2 nudos orientados, entonces $g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2)$.

Demostración. Sea S_i una superficie de Seifert de género mínimo para K_i y α_i el arco sobre $K_i = \partial S_i$, con $i = 1, 2$, que se cortó de K_i para hacer la suma conexa. De esta forma, es evidente que $S_1 \cup S_2$, pegadas mediante un homeomorfismo a lo largo de α_1 y α_2 , es una superficie de Seifert para $K_1 \# K_2$; así que $g(K_1) + g(K_2) = g(S_1) + g(S_2) = g(S_1 \cup S_2) \geq g(K_1 \# K_2)$. Sea F una superficie de Seifert para $K = K_1 \# K_2$ y Σ una esfera que factoriza a K . Supongamos que F y Σ están en posición general, entonces estas se intersectan en un único arco α , que conecta a los dos puntos de $K \cap \Sigma$, y en un conjunto, posiblemente vacío, de curvas disjuntas. Sea $\lambda \in F \cap \Sigma$ una curva de más adentro en Σ , entonces λ es frontera de un disco Δ en Σ tal que $\Delta \cap F = \partial \Delta = \lambda$. Como F es incompresible, λ también es frontera de un disco Δ' en F . La unión $\Delta \cup \Delta'$ es una 2-esfera que es frontera de una 3-bola B . Usamos B para isotopar Δ' sobre Δ , posteriormente isotopamos a F en posición general con Σ . De esta forma, obtenemos una superficie isotópica a F que intersecta a Σ en un número menor de curvas. Hacemos esto con todas las curvas de $F \cap \Sigma$. Por lo tanto, $F \cap \Sigma = \alpha$.

Sean U_1 y U_2 las componentes de $S^3 \setminus \Sigma$ y $F_i = (F \cap U_i) \cup \alpha$. Se tiene que F_i es una superficie de Seifert de K_i , para $i = 1, 2$. Luego, $g(K) = g(F) = g(F_1) + g(F_2) \geq g(K_1) + g(K_2)$, con lo que terminamos la demostración. \square

Con el teorema anterior podemos decir más cosas respecto a la suma conexa de nudos.

Corolario 3.22. a) Todo nudo de género uno es primo.

b) La factorización de un nudo es finita.

c) No hay inverso aditivo en la suma conexas.

Demostración. a) Sea K un nudo de género uno. Si $K = K_1 \# K_2$, por el Teorema 3.21 $g(K_1) + g(K_2) = 1$ y por tanto, $g(K_i) = 1$ y $g(K_j) = 0$, para $i \neq j$.

b) Para esto consideramos factores propios. Como cada factor tiene género mayor que cero y el género de cualquier nudo K es un número natural, entonces K tiene a lo más $g(K)$ factores.

c) Sea K un nudo no trivial, supongamos que existe un nudo K' tal que $K \# K'$ es un nudo trivial; se sigue que $g(K) + g(K') = 0$ y por tanto $g(K') = -g(K) < 0$, lo cual es una contradicción. \square

El Teorema de Descomposición Prima para nudos, nos dice que todo nudo no trivial es la suma conexas de un número finito de números primos.

Teorema 3.23. ([14]) *Sea K un nudo no trivial. Entonces K se puede factorizar de forma única como sigue:*

$$K = K_1 \# K_2 \# \dots \# K_n,$$

donde K_i es un nudo primo no trivial para $i = 1, \dots, n$.

A un nudo $K \subset S^3$ se le puede asociar naturalmente una 3-variedad compacta.

Definición 3.24. *Sea $K \subset S^3$ un nudo y $N(K) \subset S^3$ una vecindad regular de K . El exterior de K , denotado por $E(K)$, se define como $S^3 \setminus \text{int}(N(K))$.*

Observemos que $N(K)$ es homeomorfo a $S^1 \times D^2$. $E(K)$ de un nudo K es una 3-variedad compacta e irreducible, cuya frontera es $\partial N(K)$.

Dada una superficie de Seifert F para K , $F' = F \cap E(K)$ es una superficie propiamente encajada en $E(K)$ así que tiene sentido hablar de una superficie de Seifert en el exterior de K . A $\partial F'$ la llamaremos **longitud preferente** en $\partial E(K)$.

Dadas dos superficies de Seifert F_1, F_2 en $E(K)$ (o en S^3), decimos que son **equivalentes** si son isotópicas en $E(K)$ (o en S^3). Es posible isotopar un conjunto finito de superficies de Seifert en $E(K)$, de tal forma que las fronteras de las superficies sean ajenas. En adelante, cuando hablemos de superficies de Seifert para un nudo, asumiremos estas condiciones.

Capítulo 4

Encontrando Superficies de Seifert Disjuntas

En esta sección estudiaremos algunos de los resultados obtenidos por Scharlemann y Thompson en [12].

Sean M una 3-variedad y S, T superficies propiamente encajadas en M . Supongamos que S y T están orientadas y en posición general. Una vecindad regular N de $S \cap T$ en M puede verse como $(S \cap T) \times D^2$, donde S y T intersectan a cada copia de D^2 en los ejes horizontales y verticales respectivamente. Sea Λ el par de líneas en D^2 que une a $(-1, 0)$ con $(0, 1)$ y $(1, 0)$ con $(0, -1)$. La **suma transversal** de S y T , denotada por $S \natural T$, es la única superficie orientada que se obtiene al reemplazar $S \cup T$ en N por $(S \cap T) \times \Lambda$. Ver Figura 4.1

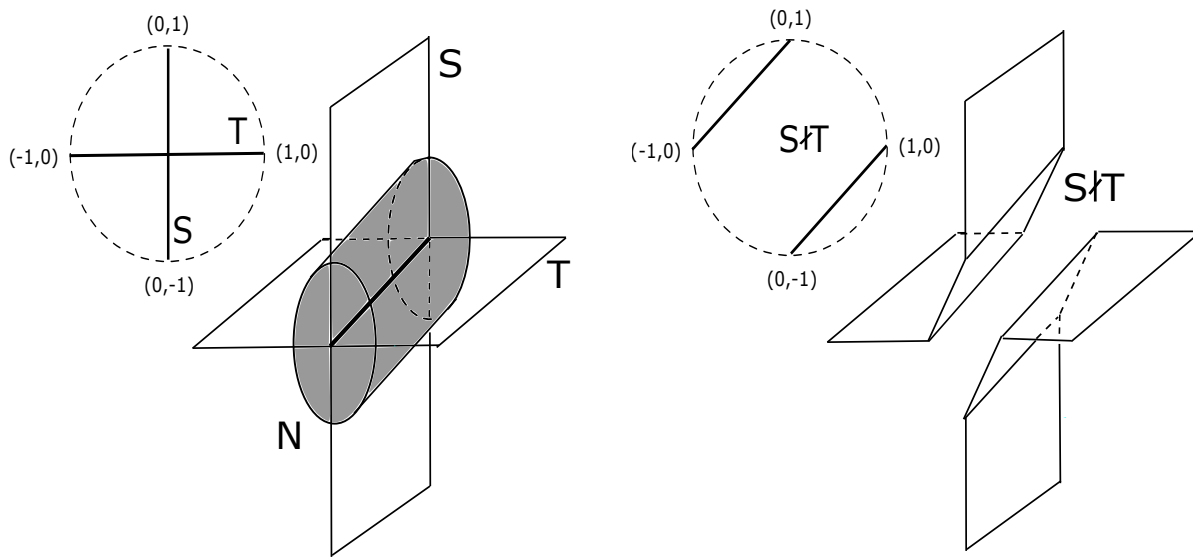


Figura 4.1: Suma transversal de dos superficies.

Básicamente, la suma transversal de dos superficies orientadas S y T consiste en cortar $S \cup T$ a lo largo de una vecindad de $S \cap T$ y luego unir los “extremos” de T con los de S , de la única forma en que tiene sentido la orientación.

Denotemos por $|S \cap T|$ al número de componentes de $S \cap T$ minimizado sobre todas las superficies isotópicas a S y a T .

Lema 4.1. *Sean S, T dos superficies orientadas y en posición general.*

- a) $\chi(S \dagger T) = \chi(S) + \chi(T)$.
- b) Si $|S \cap T| > 0$, entonces para cualquier par de componentes C_0 y C_1 de $S \dagger T$, al menos una satisface $|S \cap C_i| < |S \cap T|$ y $|T \cap C_i| < |S \cap T|$.
- c) Si T es homóloga a una superficie disjunta de S , entonces para algún $k \in \mathbb{N}$, $T \dagger kS$ puede ser isotopado fuera de S , donde kS denota k copias paralelas de S .

Demostración. a) La superficie $S \dagger T$ es obtenida al remover vecindades de curvas y arcos de la unión disjunta de S y T y pegarlas en forma diferente, así que la característica no cambia. b) Sea λ una curva de $S \cap T$ y D un disco transversal en $N(\lambda)$. En D hay cuatro arcos de $(S \dagger T) \cap (T \cup S)$, dos en S y dos en T . Elegimos dos que pertenecen a la misma componente de $S \dagger T$. De esta forma, cerca de cada curva de $S \cap T$ existe un par de componentes paralelas, S' y T' , de $(S \dagger T) \cap (S \cup T)$, uno en S y otro en T , pero ambos en la misma componente de $S \dagger T$.

Consideremos ahora dos componentes de $S \dagger T$, C_0 y C_1 . Si existe un par $\{S', T'\}$ que está en C_0 , entonces C_1 satisface que $|S \cap C_1| < |S \cap T|$ y $|T \cap C_1| < |S \cap T|$. Si ningún par está en C_0 , entonces C_0 es disjunto de S y T y por tanto se cumple b).

c) Sea \hat{N} una vecindad regular de S , entonces \hat{N} es homeomorfa a $S \times [0, 1]$. Isotopamos $T \dagger S$ de manera que $(T \dagger S) \cap S$ esté sobre $S \times \{0\} \cup S \times \{1\}$ y $(T \dagger S) \cap (S \times \{i\}) \neq \emptyset$, $i = 0, 1$. Podemos elegir una isotopía tal que $|(T \dagger S) \cap S| < |T \cap S|$ ([13], Lema 3.2b), en la Figura 4.2 se muestra un ejemplo. Como T y S se intersectan en un número finito de componentes, repetimos este proceso, usando $T \dagger S$ y S , hasta que $T \dagger (kS)$ sea disjunto de S \square

Sea K un nudo en S^3 y sean S, T dos superficies de Seifert en $E(K)$. Supongamos que S y T son incompresibles, están orientadas y en posición general tal que ∂S y ∂T son paralelas en $\partial N(K)$; isotopadas tal que $|S \cap T|$ es lo más pequeño posible.

Lema 4.2. *$S \dagger T$ contiene dos superficies de Seifert, C_0 y C_1 tal que $\chi(C_0) + \chi(C_1) \geq \chi(S) + \chi(T)$.*

Demostración. Como ∂S y ∂T son disjuntos, $\partial(S \dagger T)$ tiene dos componentes, que son longitudes de $\partial N(K)$ con la misma orientación. Si ambas copias están en la misma componente C de $S \dagger T$, entonces la unión de C y un anillo sobre $\partial N(K)$ acotado por ∂S y ∂T , es una superficie cerrada no orientable en S^3 , lo cual es imposible.

Por lo tanto, existen dos componentes C_0 y C_1 de $S \dagger T$ que tienen por frontera a K , es decir, son superficies de Seifert.

Una componente de $S \dagger T$ es la unión de componentes de $S \setminus T$ con componentes de $T \setminus S$ a lo largo de curvas de $S \cap T$. En particular, si hay una esfera en $S \dagger T$, entonces una curva de más adentro λ de $S \cap T$ es frontera de un disco Δ en $S \setminus T$ o en $T \setminus S$, digamos que se cumple lo primero. Como T es incompresible y Δ sólo intersecta a T en su frontera, λ es frontera de un disco Δ' en T . Como $E(K)$ es irreducible, $\Delta \cup \Delta'$ es frontera de una 3-bola B . Usamos B para isotopar Δ' en Δ . La superficie obtenida es isotópica a T e intersecta

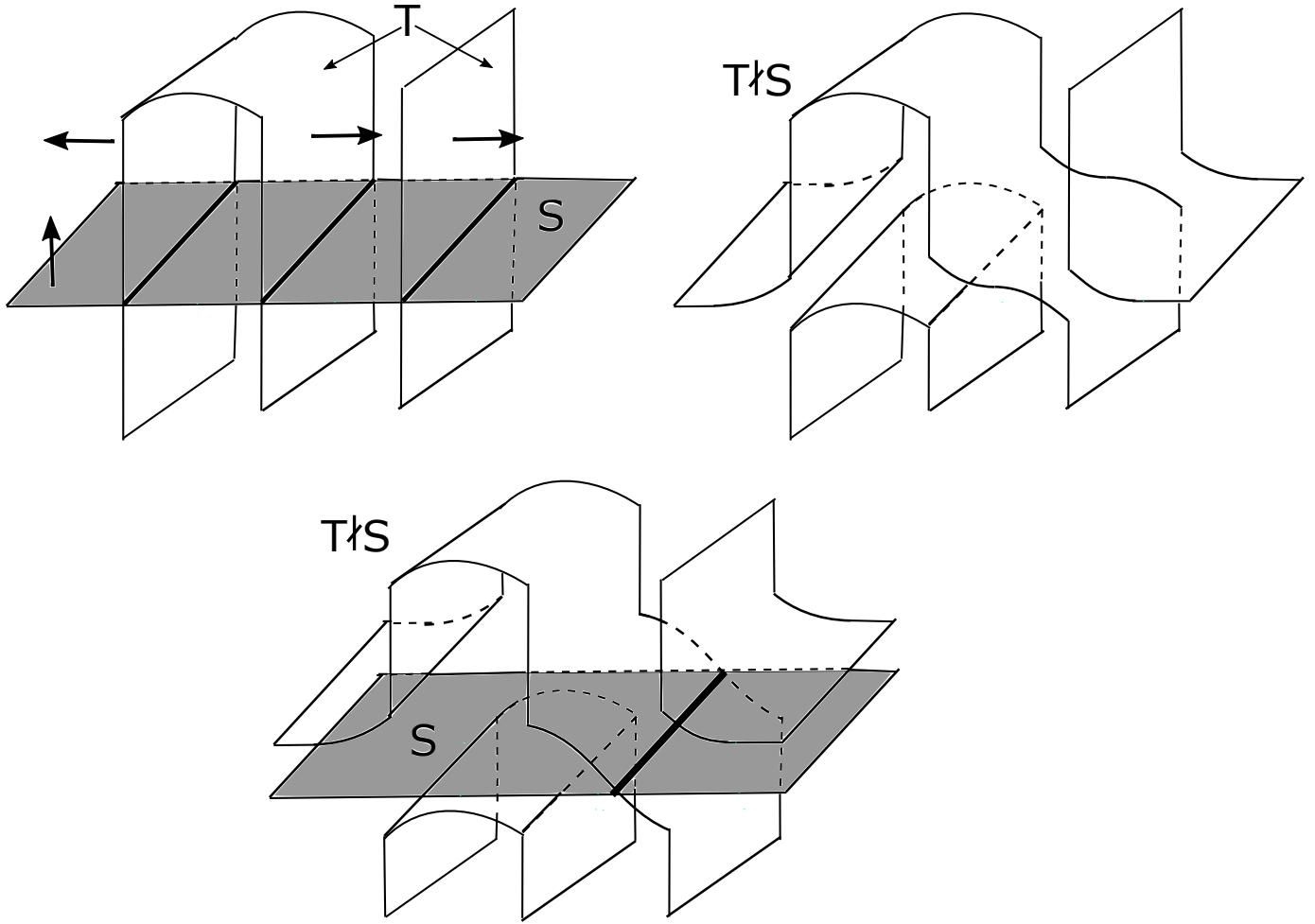


Figura 4.2: Esquema de la demostración de c)

en menos curvas a S , pero esto contradice la elección de S y T . Por lo tanto no hay esferas en $S \# T$; esto es, ninguna componente de $S \# T$ tiene característica positiva. Finalmente $\chi(C_0) + \chi(C_1) \geq \chi(S \# T) = \chi(S) + \chi(T)$. \square

Teorema 4.3. *Si S y T son superficies de Seifert de género mínimo para K . Entonces existe una sucesión de superficies de Seifert de género mínimo $S = S_0, S_1, \dots, S_n = T$ tal que para cada i , $1 \leq i \leq n$, $|S_i \cap S_{i-1}| = 0$.*

Demostración. Consideremos una sucesión de superficies de Seifert de género mínimo $S = S_0, \dots, S_n = T$, podría ser la sucesión S, T . Para cada $1 \leq i \leq n$, definimos $r_i = |S_i \cap S_{i-1}|$. Sea $r = \max\{r_i\}$ y $s \geq 1$ el número de enteros tal que $r_i = r$. Demostraremos que si $r \geq 1$, podemos producir una sucesión para la cual (r, s) se reduce, con respecto al orden lexicográfico. Si $r = 0$, hemos terminado.

Supongamos que $r \geq 1$, elijamos i tal que $r_i = r$. Entonces S_{i-1} y S_i pueden ser isotopadas de manera que se intersectan en r componentes. Por el Lema 4.2 hay dos componentes C_0 y C_1 de $S_{i-1} \# S_i$ que son superficies de Seifert y $g(C_0) + g(C_1) \leq g(S_{i-1}) + g(S_i)$. Como S_i y

S_{i-1} son de género mínimo, entonces C_0 y C_1 también lo son. Más aún, por el Lema 4.1b) al menos una componente, digamos C_0 cumple $|C_0 \cap S_{i-1}| < r$ y $|C_0 \cap S_i| < r$. Entonces la sucesión $S_0, \dots, S_{i-1}, C_0, S_i, \dots, S_n$ tiene un valor menor para r , o bien el mismo valor pero con s menor. \square

En general, podemos demostrar lo siguiente.

Teorema 4.4. *Para cualquier superficie de Seifert S de K hay una sucesión de superficies de Seifert, $S = S_0, \dots, S_n$, tal que S_n tiene género mínimo, $g(S_i) < g(S_{i-1})$ y $S_{i-1} \cap S_i = \emptyset$.*

Demostración. Si S es una superficie compresible, primero realizamos una sucesión de compresiones hasta llegar a una superficie incompresible. En adelante, supongamos que S es incompresible. Es suficiente demostrar que si S no es de género mínimo, hay una superficie de Seifert disjunta de género menor que S . Sea T una superficie de Seifert de género mínimo para K , isotopada para minimizar $|S \cap T|$. Por el Lema 4.1c), existe un entero k tal que $T \not\uparrow kS$ puede hacerse disjunto de S . Como en la demostración del Lema 4.2, $T \not\uparrow kS$ contiene $k + 1$ componentes que son superficies de Seifert para K , digamos C_0, \dots, C_k , tal que $\sum \chi(C_i) \geq \chi(T) + k\chi(S) \geq (k + 1)\chi(S)$. Así que al menos una componente, C_i , cumple que $g(C_i) < g(S)$. \square

Corolario 4.5. *Para toda superficie de Seifert S que no es de género mínimo, existe una superficie de Seifert S' tal que $S \cap S' = \emptyset$ y $\chi(S') > \chi(S)$.*

El algoritmo de Seifert garantiza que todo nudo posee una superficie de Seifert, más no que la superficie obtenida sea de género mínimo. Para nudos alternantes si se puede afirmar que el algoritmo de Seifert nos da una superficie de género mínimo.

Teorema 4.6. *Si D es un diagrama de un nudo alternante K , entonces la superficie de Seifert S obtenida con el algoritmo de Seifert es de género mínimo.*

Demostración. Haremos inducción sobre el número n de cruces. Para $n = 1$, D es de la forma mostrada en la Figura 4.3 a) y con una movida de Reidemeister del tipo 1, es fácil ver que K es el nudo trivial. Con el algoritmo de Seifert obtenemos la superficie S mostrada en b), la cuál es isotópica a un disco cerrado, es decir, tiene género cero. Por lo tanto $g(K) = g(S)$. Supongamos que el teorema se cumple para diagramas de n cruces o menos, lo probaremos

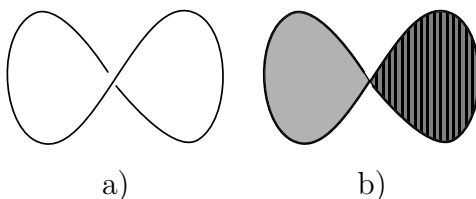


Figura 4.3: Nudo con un cruce.

para diagramas de $n + 1$ cruces. Sea S una superficie de Seifert obtenida al aplicar el algoritmo de Seifert a un diagrama alternante con $n + 1$ cruces, supongamos que S no es de género mínimo.

Caso 1: Los círculos de Seifert no están anidados. En este caso, los círculos de Seifert están en un sólo plano y por tanto podemos isotopar S tal que los círculos estén sobre S^2 . De esta forma, S yace sobre S^2 , excepto en pequeñas vecindades de los cruces. Perturbamos K de tal forma que sólo intersecte a S^2 en dos puntos por cruce como se muestra en la Figura 4.4, esto es $|S^2 \cap K| = 2n + 2$.

Por el Corolario 4.5 existe una superficie de Seifert T para K tal que $\chi(T) > \chi(S)$ y

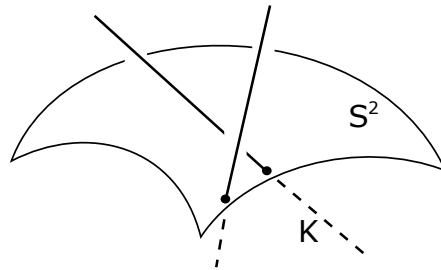


Figura 4.4: K intersecciona a S^2 en dos puntos por cruce.

$T \cap S = \emptyset$. Sea D un disco abierto en $S^2 \setminus S$ tal que \bar{D} intersecciona a K en un número par de puntos, digamos $2k$, con $k < n + 1$, ver Figura 4.5 a); isotopamos T tal que $T \cap \bar{D}$ consista de k arcos, que tienen por extremo a los $2k$ puntos, ver Figura 4.5 b).

Sea β un arco de más afuera de $T \cap \bar{D}$, entonces β es paralelo en \bar{D} a un arco α en S . Al

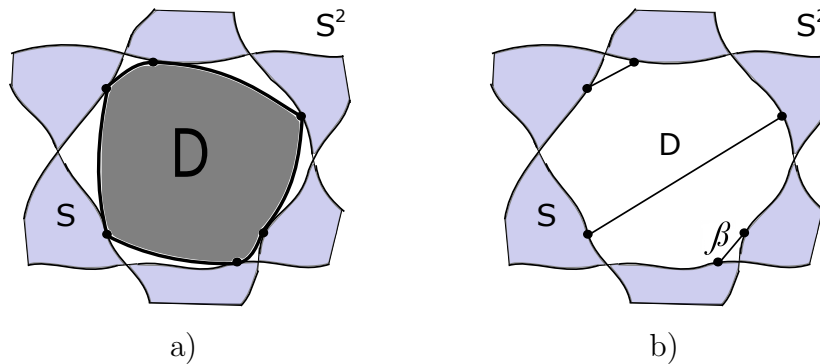


Figura 4.5: a) Disco $D \subset S^2 \setminus S$; b) $T \cap \bar{D}$

cortar S a lo largo de α se produce un bucle, el cual podemos deshacer. Ver Figura 4.6.

De esta forma obtenemos una superficie S' , que es la superficie obtenida al aplicar el algoritmo de Seifert a un diagrama alternante D' con n cruces. Cortando T a lo largo de β , obtenemos una superficie de Seifert T' para el nudo correspondiente a D' con $\chi(T') > \chi(S')$, lo cual contradice la hipótesis de inducción, ya que S' es de género mínimo.

Caso 2: Los círculos de Seifert están anidados. Sea λ un círculo de Seifert anidado que es frontera del disco Δ y sea $S^2 \subset S^3$ una esfera tal que $S^2 \cap S = \Delta$. El disco $\Delta' = S^2 \setminus \Delta$ intersecciona a K en un número par de puntos, $2k$.

Como en el caso 1, existe una superficie de Seifert T para K con $T \cap S = \emptyset$, $\chi(T) > \chi(S)$

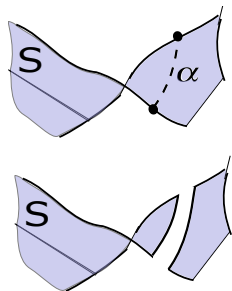


Figura 4.6:

y $T \cap \Delta'$ igual a k arcos. Cada arco de más afuera es paralelo en Δ' a un arco α en S . La prueba se sigue como en el caso 1. \square

Capítulo 5

Complejo de Superficies de Seifert de género mínimo

Este capítulo está basado en los resultados obtenidos por Kakimizu en [7].

5.1. Cubriente Cíclico Infinito.

Sea $K \subset S^3$ y S una superficie de Seifert en $E(K)$. Una vecindad H de S en $E(K)$ es homeomorfa a $S \times (-1, 1)$ tal que $S = S \times \{0\} \subset H$. Definimos $H_+ = S \times (0, 1)$, $H_- = S \times (-1, 0)$ y $Y = E(K) \setminus S$. En la Figura 5.1 a) se muestra un esquema de lo antes descrito.

Consideremos las tripletas (H, H^+, H^-) y (Y, H^+, H^-) y formemos copias de estos (H_i, H_i^+, H_i^-) y (Y_i, H_i^+, H_i^-) , con $i \in \mathbb{Z}$. Sean $\tilde{H} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}} H_i$ y $\tilde{Y} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}} Y_i$.

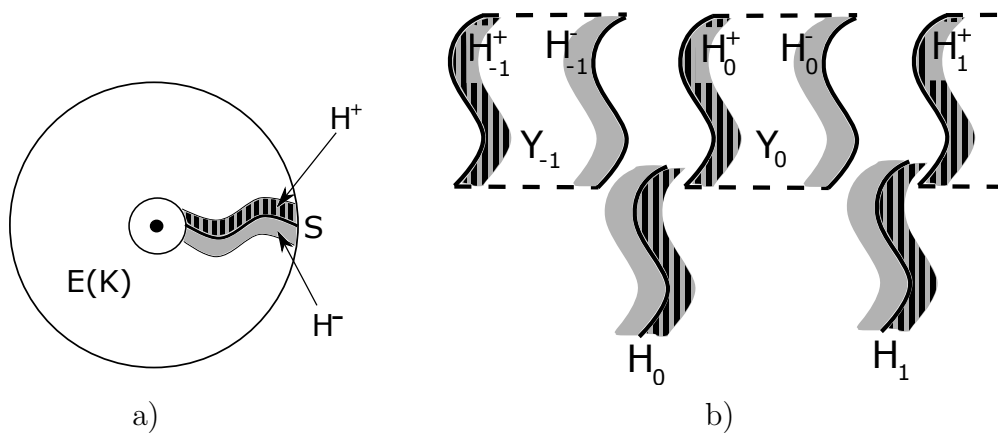


Figura 5.1:

Identificamos $H_i^+ \subset Y_i$ con $H_i^+ \subset H_i$ y $H_{i-1}^- \subset Y_{i-1}$ con $H_i^- \subset H_i$ vía el homeomorfismo identidad, ver Figura 5.1 b). Denotemos al espacio resultante $\tilde{E}(K)$.

Teorema 5.1. $\tilde{E}(K)$ es un espacio cubriente de $E(K)$.

Demostración. Para cada $\tilde{x} \in \tilde{X}$, existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $\tilde{x} \in Y_i \cup H_i$. Como Y_i y H_i son copias de Y y H , definamos $p : \tilde{E}(K) \rightarrow E(K)$ tal que a cada $\tilde{x} \in \tilde{E}(K)$, $p(\tilde{x})$ es el correspondiente punto $x \in E(K)$ del que \tilde{x} es copia.

Sea $x \in E(K)$, entonces hay tres posibles casos:

Caso 1: $x \in E(K) \setminus H$. Entonces existe una vecindad $U \subset Y$ de x ; luego $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}} U_i$,

donde U_i es la copia de U en Y_i . Además, para cada U_i , $p|_{U_i}$ es un homeomorfismo.

Caso 2: $x \in H^+ \cup H^-$. Análogo al caso anterior.

Caso 3: $x \in S$. Sea $U \subset H$ una vecindad de x . Definamos $U^+ = U \cap H^+$ y $U^- = U \cap H^-$ y sean U_i^+ y U_i^- sus respectivas copias en $\tilde{E}(K)$. Identifiquemos U_i^- , U_i y U_{i+1}^+ , de la misma forma en que se construyó $\tilde{E}(K)$; llamemos a dicho espacio \hat{U}_i . De esta forma, $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}} \hat{U}_i$, con

\hat{U}_i abierto en $\tilde{E}(K)$. Para cada \hat{U}_i , $p|_{\hat{U}_i}$ es un homeomorfismo. \square

Teorema 5.2. *Sea $\tau : \tilde{E}(K) \rightarrow \tilde{E}(K)$ tal que para cada $i \in \mathbb{Z}$, y cada $\tilde{x}_i \in Y_i \cup H_i$, $\tau(\tilde{x}_i)$ está en la fibra de $p(\tilde{x}_i)$ y en $Y_{i+1} \cup H_{i+1}$. Entonces τ genera al grupo $Aut_p(\tilde{E}(K))$.*

Demostración. Es evidente que τ es un homeomorfismo y que $p \circ \tau = p$, así que τ es una transformación cubriente de p .

Sean $\varphi \in Aut_p(\tilde{E}(K))$ y $\tilde{x} \in \tilde{E}(K)$. Entonces existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $\tilde{x} \in Y_i \cup H_i$. Como $p \circ \varphi = p$, $\varphi(\tilde{x})$ está en la fibra de $p(\tilde{x})$. Además, $\varphi(\tilde{x})$ está en $Y_j \cup H_j$, para algún $j \in \mathbb{Z}$. Se sigue que $\tau^{j-i}(\tilde{x}) = \varphi(\tilde{x})$. Por lo tanto, τ genera a $Aut_p(\tilde{E}(K))$. \square

Enlistamos algunas de las propiedades de $\tilde{E}(K)$, como referencia se puede consultar el Capítulo 5 de [11].

1. $\tilde{E}(K)$ es el cubriente universal de $E(K)$.
2. $\tilde{E}(K)$ no depende de la elección de la superficie S .
3. $\tilde{E}(K)$ es una 3-variedad conexa por trayectorias.

Definición 5.3. $\tilde{E}(K)$ se llama **espacio cubriente cíclico infinito de $E(K)$** .

5.2. Conjunto $\mathcal{S}(K)$

Sea $K \subset S^3$ un nudo orientado. Dos superficies de Seifert, S y T en $E(K)$ son equivalentes si son isotópicas en $E(K)$. Sea $\mathcal{S}(K)$ el conjunto de clases de equivalencia de superficies de Seifert para K .

Consideremos al cubriente cíclico infinito de la sección anterior. Sea $S \subset E(K)$ una superficie de Seifert para el nudo K y E_0 la cerradura de un levantamiento de $E(K) \setminus S$. Sea $E_j = \tau^j(E_0)$ y $S_j = E_{j-1} \cap E_j$, para cada $j \in \mathbb{Z}$, con τ un generador del grupo de transformaciones cubrientes. Se tiene que

$$\tilde{E}(K) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} E_j, \quad p^{-1}(S) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} S_j \quad \text{y} \quad p|_{S_j} : S_j \rightarrow S \text{ es un homeomorfismo.}$$

En la Figura 5.2 se muestra un esquema del espacio $\tilde{E}(K)$.

Sea S' otra superficie de Seifert para K . Entonces tenemos otra descripción de $\tilde{E}(K)$ en

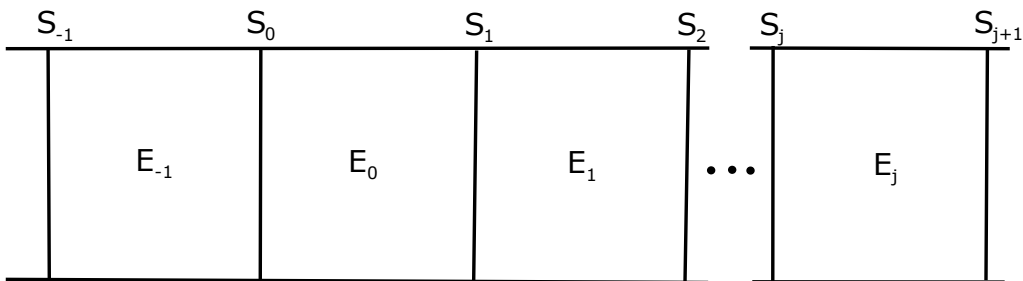


Figura 5.2: Espacio cubriente de $E(K)$

términos de S' :

$$\tilde{E}(K) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} E'_j, \quad p^{-1}(S') = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} S'_j \quad \text{y} \quad p|_{S'_j} : S'_j \rightarrow S \text{ es un homeomorfismo.}$$

Definamos $m = \min\{k \in \mathbb{Z} | E_0 \cap E'_k \neq \emptyset\}$, $r = \max\{k \in \mathbb{Z} | E_0 \cap E'_k \neq \emptyset\}$ y $d(S, S') = r - m$, ver Figura 5.3.

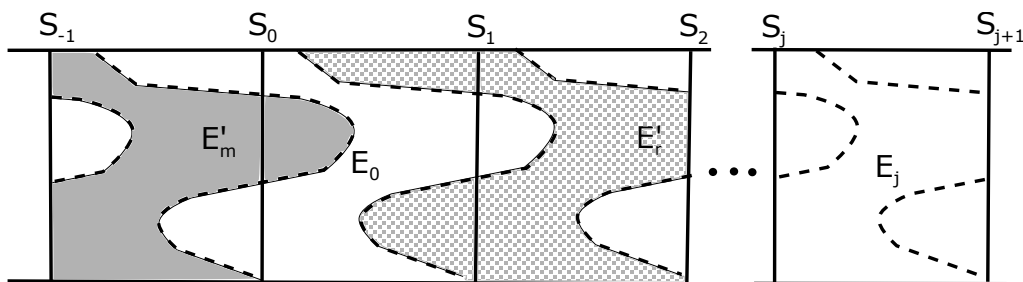


Figura 5.3: Espacio cubriente de $E(K)$

Proposición 5.4. Sean S y S' dos superficies de Seifert para un nudo K , entonces:

- a) $d(S, S') \geq 1$.
- b) $d(S, S') = 1$ si y sólo si $S \cap S' = \emptyset$.
- c) $E_j \cap E'_k \neq \emptyset$ si y sólo si $m \leq k - j \leq r$.
- d) $E_0 \subset \bigcup_{m \leq k \leq r} E'_k$, $S_1 \subset \bigcup_{m+1 \leq k \leq r} E'_k$.

Demostración. a) Es claro que $d(S, S') \geq 0$. Si $d(S, S') = 0$, entonces existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\min\{k \in \mathbb{Z} | E_0 \cap E'_k \neq \emptyset\} = k_0 = \max\{k \in \mathbb{Z} | E_0 \cap E'_k \neq \emptyset\}$, así que $E_0 \subset E'_{k_0}$, pero esto no es posible, ya que en E_0 debe existir una copia de S' . Por lo tanto $d(S, S') \geq 1$.

b) Supongamos que $d(S, S') = 1$ y que $S \cap S' \neq \emptyset$, entonces existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $j = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid E_0 \cap E'_k \neq \emptyset\}$ y $j + 1 = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid E_0 \cap E'_k \neq \emptyset\}$, se tiene que S'_j intersecta a S_0 y S'_{j+1} intersecta a S_1 . Entonces E'_{j+1} y E'_{j-1} intersectan a E_0 ; es decir, $d(S, S') = 2$, pero esto es una contradicción. Supongamos ahora que $d(S, S') > 1$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $E_0 \cap E'_k \neq \emptyset$ y $E_0 \cap E'_{k+1} \neq \emptyset$, lo que implica que $S_0 \cap S'_k \neq \emptyset$ y por tanto $S \cap S' \neq \emptyset$.

c) Se tiene que $E_0 \cap E'_m \neq \emptyset$ y $E_0 \cap E'_r \neq \emptyset$, entonces $E_j \cap E'_{m+j} \neq \emptyset$ y $E_j \cap E'_{r+j} \neq \emptyset$, de donde se obtiene el resultado.

d) Se obtiene de la definición. \square

Para $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}(K)$, definimos $d(\sigma, \sigma') \in \mathbb{Z}_+$ por

$$d(\sigma, \sigma') = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma = \sigma' \\ \min\{d(S, S') \mid S \in \sigma, S' \in \sigma'\} & \text{si } \sigma \neq \sigma' \end{cases}$$

Proposición 5.5. *La función $d : \mathcal{S}(K) \times \mathcal{S}(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ es una métrica, es decir, cumple lo siguiente:*

1. $d(\sigma, \sigma') = 0$ si y sólo si $\sigma = \sigma'$,
2. $d(\sigma, \sigma') = d(\sigma', \sigma)$,
3. $d(\sigma, \sigma'') \leq d(\sigma, \sigma') + d(\sigma', \sigma'')$.

Demostración. 1. Es evidente que si $\sigma = \sigma'$ entonces $d(\sigma, \sigma') = 0$. Supongamos que $d(\sigma, \sigma') = 0$ y $\sigma \neq \sigma'$, entonces existen $S \in \sigma$ y $S' \in \sigma'$ tales que $d(S, S') = 0$ lo cual contradice la Proposición 5.4 a).

2. Supongamos que $\sigma \neq \sigma'$ y $d(\sigma, \sigma') = d(S, S')$ con $S \in \sigma$ y $S' \in \sigma'$. Por la Proposición 5.4 c) $E'_0 \cap E_j \neq \emptyset$ si y sólo si $-r \leq j \leq -m$, esto es, $d(S', S) \leq r - m$. Así que $d(\sigma', \sigma) \leq d(S', S) \leq r - m = d(\sigma, \sigma')$. Similarmente, $d(\sigma, \sigma') \leq d(\sigma', \sigma)$.

3. Es suficiente verificar la desigualdad en el caso que $\sigma \neq \sigma'$ y $\sigma' \neq \sigma''$. Supongamos que $d(\sigma, \sigma') = d(S, S')$, para $S \in \sigma$ y $S' \in \sigma'$. Fijamos $S'' \in \sigma''$, entonces $d(\sigma', \sigma'') \leq d(S', S'')$.

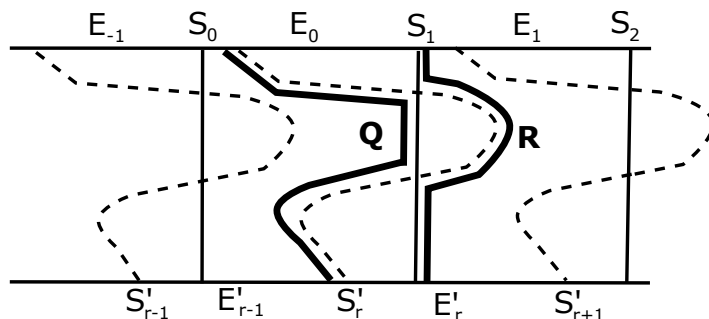
En términos de S'' , $\tilde{E}(K)$ se describe como:

$$\tilde{E} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} E''_i, \quad S''_i = E''_{i-1} \cap E''_i \quad \text{y} \quad p^{-1}(S'') = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} S''_i$$

Supongamos que $E_j \cap E'_k \neq \emptyset$ y $E'_k \cap E''_i \neq \emptyset$, esto ocurre si y sólo si $m \leq k - j \leq r$ y $m' \leq i - k \leq r'$. Esto implica que $d(\sigma, \sigma') = r - m$ y $d(\sigma', \sigma'') \leq r' - m'$. Si $E_0 \cap E''_i \neq \emptyset$, existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $E_0 \cap E'_{k_0} \neq \emptyset$ y $E'_{k_0} \cap E''_i \neq \emptyset$, con $m \leq k_0 \leq r$. Como $m' \leq i - k_0 \leq r'$, se sigue que $m + m' \leq i \leq r + r'$, esto implica que $d(\sigma, \sigma'') \leq d(S, S'') \leq (r + r') - (m + m') = d(\sigma, \sigma') + d(\sigma', \sigma'')$. \square

En adelante, para una superficie de Seifert S , denotamos por $[S] \in \mathcal{S}(K)$ a su clase de equivalencia.

Teorema 5.6. *Sea $K \subset S^3$ un nudo y sean $S, S' \subset E(K)$ dos superficies de Seifert de género mínimo para K . Supongamos que $n = d([S], [S']) \geq 1$. Entonces existe una sucesión de superficies de Seifert de género mínimo $S = F_0, F_1, \dots, F_n$ tal que:*

Figura 5.4: Construcción de R y Q .

1. $[F_n] = [S']$,
2. $F_{i-1} \cap F_i = \emptyset$ para $1 \leq i \leq n$ y
3. $d([S], [F_i]) = i$ para cada $0 \leq i \leq n$.

Demostración. Haremos inducción sobre $n = d([S], [S'])$. Para $n = 1$, por la Proposición 5.4 b), S' es equivalente a una superficie de Seifert F tal que $F \cap S = \emptyset$ y por tanto se cumplen 1 – 3.

Supongamos que el Teorema se cumple para $n < q$ y que $d([S], [S']) = q$. Isotopamos S y S' tal que se intersecten transversalmente, $d(S, S') = q$, $\partial S \cap \partial S' = \emptyset$ y $|S \cap S'|$ es mínimo.

Sea $\lambda \in S \cap S'$. Afirmamos que λ es esencial en S y S' . Supongamos λ es inessential en S , entonces λ es frontera de un disco Δ en S , como S' es incompresible, λ también es frontera de un disco Δ' en S' . Se tiene que $\Delta \cup \Delta'$ es una 2-esfera en $E(K)$ y por tanto es frontera de una 3-bola B . Usamos B para isotopar Δ' en Δ , la superficie obtenida es isotópica a S e intersecta en menos curvas a S' , pero esto contradice la elección de S y S' . Por lo tanto, toda curva de $S \cap S'$ es esencial en S y en S' .

Encontraremos una superficie de Seifert de género mínimo $S'' \subset E(K)$, tal que $S'' \cap S' = \emptyset$ y $d([S], [S'']) = q - 1$. Sea X una vecindad regular de $S'_r \cup (E_0 \cup E'_r)$ en E'_r con $X \cap E_q = \emptyset$ y sea Y la cerradura de la componente de $E'_r \setminus X$ que contiene a S'_{r+1} y definamos $R = X \cap Y$. Entonces R es una superficie en E'_r disjunta de E_0, E_q, S'_r y S'_{r+1} .

Sea $Z = (E_0 \cup E_1) \cap (\bigcup_{k \leq r-1} E'_k)$, V una vecindad regular de $(E_1 \cup S'_r) \cap Z$ en Z y W la

cerradura de la componente de $Z \setminus V$ que contiene a S_0 . Sea $Q = V \cap W$. En la Figura 5.4 se muestra un esquema de R y Q .

R y Q heredan orientación de S_1 y S'_r . Como $R \subset E'_r \setminus (S'_r \cup S'_{r+1})$, $p : R \rightarrow E(K)$ es un encaje y por tanto, $p(R)$ es una superficie de Seifert para K . De manera análoga se obtiene que $p(Q)$ es una superficie de Seifert para K . Por la construcción de R y Q , como todas las curvas de $S \cap S'$ son esenciales, $\chi(R) + \chi(Q) \geq \chi(S_1) + \chi(S'_r) = 2\chi(S)$ (ver demostración del Lema 4.2). Esto implica que $\chi(Q) = \chi(R) = \chi(S)$ y que $p(R)$ es una superficie de Seifert de género mínimo para K . Definamos $S'' = p(R)$.

Se tiene que $S' \cap S'' = \emptyset$ y por tanto, $d([S'], [S'']) = 1$. Se sigue que $d([S], [S'']) \geq d([S], [S']) -$

$d([S'], [S'']) \geq q - 1$. Consideremos la descripción de \tilde{E} asociada a S''

$$\tilde{E}(K) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} E_j'', \quad S_j'' = E_{j-1}'' \cap E_j'' \text{ y } p^{-1}(S'') = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} S_j''.$$

Sean S_i'' el levantamiento de S'' que está en E_i' y $m = r - q$, entonces $m = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid E_0 \cap E_k' \neq \emptyset\}$ y $R = S_r''$ como se muestra en la Figura 5.5 a). Además, S_m'' es disjunto de E_0 , ya que S_r'' es disjunto de E_q , Figura 5.5 b). De esta forma, $E_0 \subset \bigcup_{m \leq k \leq r-1} E_k''$, es decir, $d([S], [S'']) \leq (r - 1) - m = q - 1$. Por lo tanto $d([S], [S'']) = q - 1$.

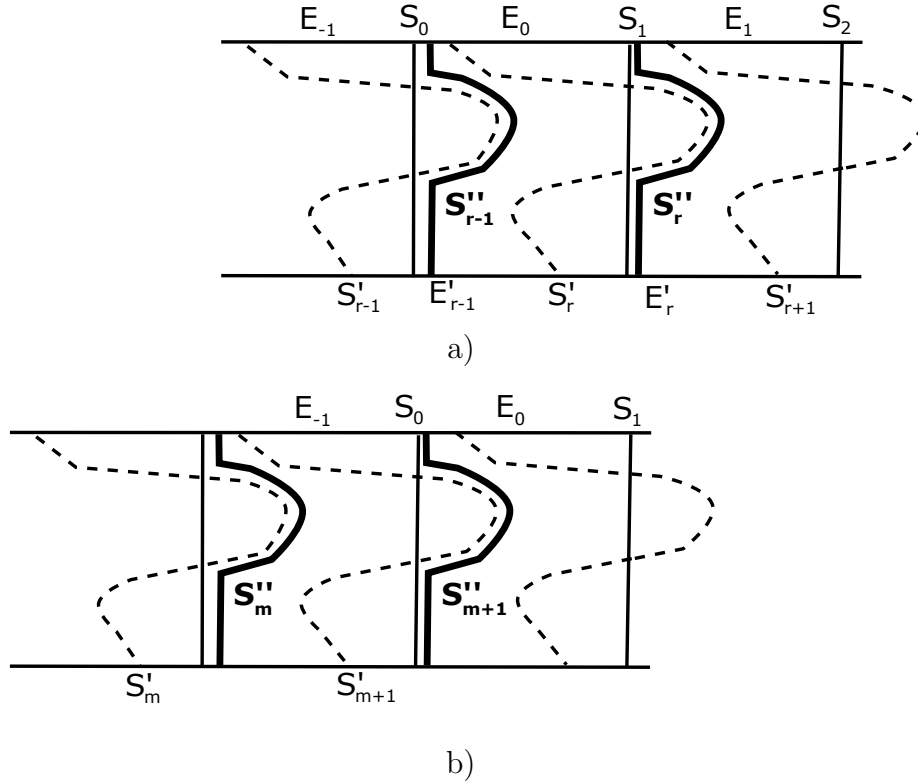


Figura 5.5: Levantamiento de S''

Por hipótesis de inducción, existe una sucesión de superficies de Seifert de género mínimo $S = F_0, F_1, \dots, F_{q-1}$ tal que

- i) $[F_{q-1}] = [S'']$,
- ii) $F_{i-1} \cap F_i = \emptyset$, $1 \leq i \leq q - 1$ y
- iii) $d([S], [F_i]) = i$, $0 \leq i \leq q - 1$.

Por i), existe una isotopía h de $E(K)$ tal que $h_0 = id$ y $h_1(S'') = F_{q-1}$. Sea $F_q = h_1(S')$, entonces $[F_q] = [S']$, $F_{q-1} \cap F_q = \emptyset$, pues $S' \cap S'' = \emptyset$, y $d([S], [F_q]) = q$. Por lo tanto, el teorema se cumple para $n = q$. \square

El Teorema anterior también se puede demostrar para superficies de Seifert incompresibles, pero se requieren resultados que están más allá de lo que se persigue en esta tesis.

5.3. Complejo simplicial $MS(K)$

Denotemos por $\mathcal{MS}(K)$ al subconjunto de $\mathcal{S}(K)$ de clases de equivalencia de superficies de Seifert de género mínimo. Asociamos al nudo K el complejo simplicial $MS(K)$ como sigue: los vértices de $MS(K)$ son los elementos de $\mathcal{MS}(K)$ y los vértices $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k \in \mathcal{MS}(K)$ forman un k -simplejo si existen $S_i \in \sigma_i$, $0 \leq i \leq k$, tales que $S_i \cap S_j = \emptyset$, para todo $i < j$. El complejo $MS(K)$ se conoce como el complejo de Kakimizu

Del Teorema 5.6 se obtiene lo siguiente.

Teorema 5.7. *Sea K un nudo, $MS(K)$ es conexo.*

Observemos que en este contexto, el Teorema 4.3 implica que $MS(K)$ es conexo, sin embargo, el Teorema 5.6 nos proporciona más información de este complejo, relacionada con la distancia entre dos de sus vértices.

Con esto, podemos definir $l_M(\sigma, \sigma')$, para $\sigma, \sigma' \in \mathcal{MS}(K)$, como el mínimo número de aristas en $MS(K)$ que conectan a σ con σ' .

Proposición 5.8. $l_M(\sigma, \sigma') = d(\sigma, \sigma')$, para $\sigma, \sigma' \in \mathcal{MS}(K)$.

Demostración. Primero, $l_M(\sigma, \sigma') = 1$ si y sólo si existe una arista (1-simplejo) que conecta a σ y a σ' , es decir, existen $S \in \sigma$ y $S' \in \sigma'$ tal que $S \cap S' = \emptyset$, si y sólo si $d(\sigma, \sigma') = 1$.

Por el Teorema 5.6, $l_M(\sigma, \sigma') \leq d(\sigma, \sigma')$. Supongamos que $l_M(\sigma, \sigma') = n$, entonces existe una sucesión $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n = \sigma'$ tal que $l_M(\sigma_{i-1}, \sigma_i) = 1$. Así que $l_M(\sigma, \sigma') = \sum l_M(\sigma_{i-1}, \sigma_i) = \sum d(\sigma_{i-1}, \sigma_i) \geq d(\sigma_0, \sigma_n) = d(\sigma, \sigma')$. Por lo tanto, $l_M(\sigma, \sigma') = d(\sigma, \sigma')$. \square

5.4. Ejemplos del Complejo de Kakimizu

Decimos que una función $f : A \rightarrow B$ es una **fibración** con **fibra** F si cada punto de $y \in B$ tiene una vecindad U_y y un homeomorfismo $h_y : f^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tal que el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times F \\ & \searrow f & \swarrow j \\ & & U \end{array}$$

donde $j(x, z) = x$ para todo $(x, z) \in U \times F$. Nos referiremos a A y a B como espacios total y base respectivamente. Cada conjunto $f^{-1}(b)$ se llama fibra y es homeomorfo a F .

Definición 5.9. *Un nudo $K \subset S^3$ es **fibrado** si su exterior admite una fibración $f : E(K) \rightarrow S^1$ tal que la fibra es una superficie de Seifert.*

Ejemplo 5.10. Los nudos trivial, trébol y ocho son nudos fibrados.

A continuación se enlistan algunas propiedades de los nudos fibrados, para mayor referencia se pueden consultar [2] y [15]

1. Un nudo fibrado admite una única fibración, así pues tiene una única superficie de Seifert incompresible.

2. La suma conexa de nudos fibrados es un nudo fibrado.
3. Si K_1 tiene una única superficie de Seifert incompresible pero no es fibrado y K_2 es fibrado, entonces $K_1 \# K_2$ tiene exactamente una superficie de Seifert incompresible.

Por el Teorema 3.19, si K cumple con alguno de los casos anteriores, $MS(K)$ consiste de un único vértice que representa a la única clase de superficies de Seifert de género mínimo para K .

A continuación, presentamos ejemplos en el que el complejo de Kakimizu es homeomorfo a \mathbb{R} . Sea $K = K_1 \# K_2$, con K_1 y K_2 nudos no fibrados, entonces $E(K) = E(K_1) \cup E(K_2)$ y $A = E(K_1) \cap E(K_2) = \partial E(K_1) \cap \partial E(K_2)$ es un anillo, ver Figura 5.6.

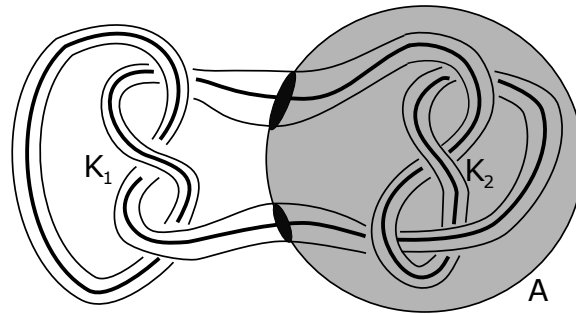


Figura 5.6: Exterior de $K_1 \# K_2$.

Sea $S \subset E(K)$ una superficie de Seifert de género mínimo para el nudo K , tal que $R_i = S \cap E(K_i)$ es una superficie de Seifert de género mínimo para K_i , con $i = 1, 2$. Notemos que $S = R_1 \cup R_2$ y que $I = R_1 \cap R_2 = S \cap A$ es un arco en A como se muestra en la Figura 5.7.

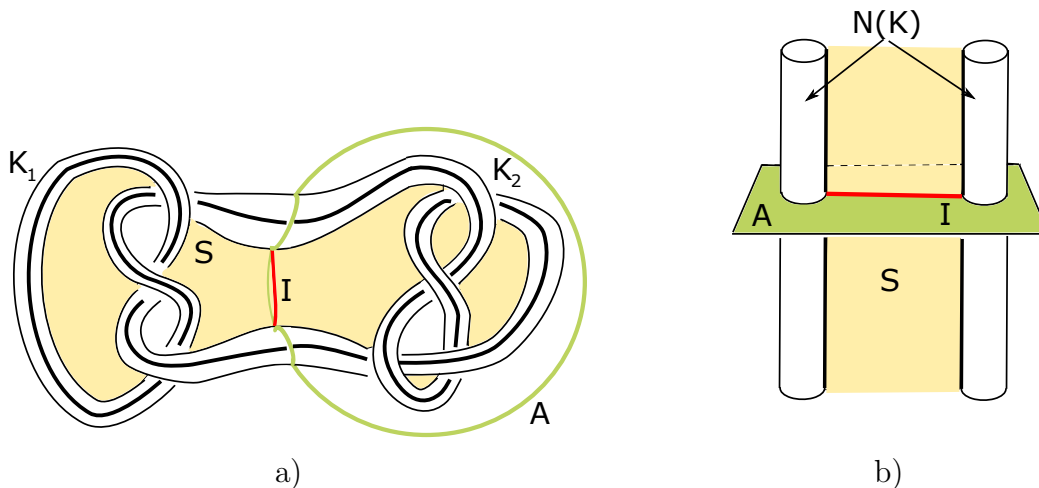


Figura 5.7: Superficie de Seifert para el nudo K

Hacemos la siguiente identificación $A = \{(e^{2\pi i\theta}, s) | 0 \leq \theta \leq 1, 0 \leq s \leq 1\}$ tal que $I = \{(1, s) | 0 \leq s \leq 1\}$. Consideremos $A \times [0, 1] \subset E(K_1)$, encajado de tal forma que $A = A \times \{1\}$

y $(A \times [0, 1]) \cap \partial E(K) = \partial A \times [0, 1]$. Definimos al homeomorfismo $f : E(K) \rightarrow E(K)$ tal que $f|_{E(K_2)} = id$, $f|_{E(K_1) \setminus (A \times [0, 1])} = id$ y $f(e^{2\pi i \theta}, s, t) = (e^{2\pi i(\theta+t)}, s, t)$ sobre $A \times [0, 1]$. Sea $S^{(n)} = f^n(S)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, de esta forma, f^n envuelve a S a lo largo de $\partial E(K)$ en $A \times [0, 1]$. En la Figura 5.8 b) se muestra como actúa f sobre S en $A \times [0, 1]$ y en c) cómo cambia la frontera de S .

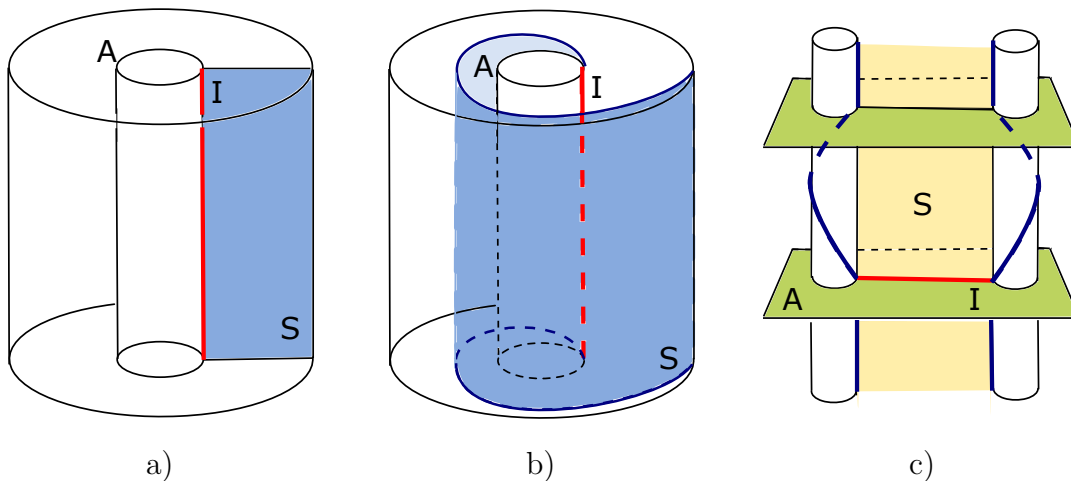


Figura 5.8: $S^{(1)}$ en $A \times [0, 1]$.

Proposición 5.11. *Para todo $n \in \mathbb{Z}$, S^n es una superficie de Seifert de género mínimo para K y cumple las siguientes propiedades:*

- $S^{(n)} \cap A = I$.
- $S^{(n)} \cap E(K_2) = R_2$.
- $S^{(n)} \cap E(K_1)$ es una superficie de Seifert de género mínimo para K_1 equivalente a R_1 .
- $S^{(k)} = f^{k-n}(S^{(n)})$.

Demostración. Los incisos a), b) y d) se cumplen por definición. Por otro lado, $S^{(n)} \cap E(K_1)$ está propiamente encajada en $E(K_1)$ y por tanto es una superficie de Seifert para K_1 y como es homeomorfa a R_1 es una superficie de género mínimo. Definimos $H : E(K_1) \times [0, 1] \rightarrow E(K_1)$ tal que $H(x, r) = x$ para todo $x \in (E(K_1) \setminus (A \times [0, 1])) \times [0, 1]$ y $H(e^{2\pi i \theta}, s, t, r) = (e^{2\pi i(\theta+rt)}, s, t)$ en $(A \times [0, 1]) \times [0, 1]$. Se tiene que H es una isotopía, por tanto H^n es una isotopía tal que $H_0^n(R_1) = R_1$ y $H_1^n(R_1) = f^n(R_1) = S^{(n)} \cap E(K_1)$. Por lo tanto $S^{(n)} \cap E(K_1)$ es equivalente a R_1 . \square

Teorema 5.12. ([4], 6.2) $S^{(k)}$ y $S^{(n)}$ no son equivalentes, para $k \neq n$.

Proposición 5.13. *Sean $K = K_1 \# K_2$, con K_1 y K_2 nudos no fibrados, y $\{S^{(n)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ las superficies de Seifert para K construidas anteriormente. Supongamos además que las superficies de Seifert de género mínimo R_i para K_i , con $i = 1, 2$, son únicas. Entonces cualquier*

superficie de Seifert de género mínimo para K es equivalente a alguna superficie $S^{(n)}$, con $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Supongamos que existe una superficie de Seifert de género mínimo F' para K que no es equivalente a alguna superficie $S^{(k)}$. Elegimos $m \in \mathbb{Z}$, por el Teorema 5.7 existe una sucesión $F' = F_0, \dots, F_r$ tal que:

1. $[F_r] = [S^{(m)}]$ y
2. $F_{i-1} \cap F_i = \emptyset$ para $1 \leq i \leq r$

Sea $w = \min\{i \in \mathbb{Z} | 1 \leq i \leq r \text{ y } F_i \text{ es equivalente a algún } S^{(k)}\}$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $[S^{(n)}] = [F_w]$. Sea h una isotopía entre $S^{(n)}$ y F_w definamos $F'' = h_1(F_{w-1})$, entonces F'' no es equivalente a alguna $S^{(k)}$ y es disjunta de $S^{(n)}$.

Afirmación: Sea F una superficie de Seifert de género mínimo para K que es disjunta de $S^{(n)}$. Entonces F es equivalente a $S^{(n-1)}$, $S^{(n)}$ o $S^{(n+1)}$.

Notemos que esta afirmación contradice la existencia de F'' y por tanto queda demostrada la proposición.

Por la Proposición 5.11, F es una superficie de Seifert de género mínimo para K disjunta de $S^{(n)}$ si y sólo si $f^{-n}(F)$ es una superficie de Seifert de género mínimo para K disjunta de $f^{-n}(S^{(n)}) = S^{(0)} = S$. Por lo tanto es suficiente demostrar la afirmación para $n = 0$.

Sea F una superficie de Seifert de género mínimo para K que es disjunta de $S = S^{(0)}$. Isotopamos F tal que esté en posición general con el anillo A , de esta forma, $F \cap A$ es un conjunto finito de curvas simples cerradas y arcos. Como F es incompresible, por un argumento de curva de más adentro, podemos isotoparla de tal forma que sólo intersecte a A en arcos; además, F está propiamente encajada en $E(K)$, por tanto $F \cap A$ consiste de un único arco J . Como F es disjunta de S , J es paralelo a I . Así, $F_i = F \cap E(K_i)$ es una superficie de Seifert de género mínimo para K_i , con $i = 1, 2$. Supongamos que $J = \{(-1, s) | 0 \leq s \leq 1\} \subset A$.

Por la unicidad de la superficie de Seifert para K_i , F_i es isotópico a R_i en $E(K_i)$, para $i = 1, 2$. Sea $e^{(i)} : E(K_i) \times [0, 1] \rightarrow E(K_i)$ una isotopía entre F_i y R_i , para $i = 1, 2$. Se tiene que $e^{(i)}(F_i \times \{1\}) = R_i$, entonces $e^{(i)}(J \times \{1\}) = R_i \cap A = I$. Nuestro propósito es encontrar una isotopía entre F y $S^{(j)}$, para algún $j \in \{-1, 0, 1\}$. Es evidente que podemos definir una función g que tome los valores de $e^{(i)}$ en $E(K_i)$, pero para que g sea una isotopía, necesitamos saber cómo es en $E(K_1) \cap E(K_2)$; es decir, necesitamos ver cómo $e^{(i)}$ envía J a I , para $i = 1, 2$. Es por esto que elegimos $e^{(i)}$ tal que $e^{(i)}(J \times [0, 1]) = A \cap e^{(i)}(F_i \times [0, 1])$.

Definamos $A_+ = \{(e^{2\pi i \theta}, s) | 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}, 0 \leq s \leq 1\}$ y $A_- = \{(e^{2\pi i \theta}, s) | \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1, 0 \leq s \leq 1\}$. Se tienen cuatro casos:

- i) $e^{(1)}(J \times [0, 1]) = e^{(2)}(J \times [0, 1]) = A_+$, entonces $F = F_1 \cup F_2$ es paralelo a $S = R_1 \cup R_2$.
- ii) $e^{(1)}(J \times [0, 1]) = e^{(2)}(J \times [0, 1]) = A_-$, entonces F es paralelo a S .
- iii) $e^{(1)}(J \times [0, 1]) = A_+$ y $e^{(2)}(J \times [0, 1]) = A_-$, en la Figura 5.9 a) se muestra un ejemplo de dicha superficie, entonces F es paralelo a $S^{(1)}$.
- iv) $e^{(1)}(J \times [0, 1]) = A_-$ y $e^{(2)}(J \times [0, 1]) = A_+$, ver Figura 5.9 b), entonces F es paralelo a $S^{(-1)}$.

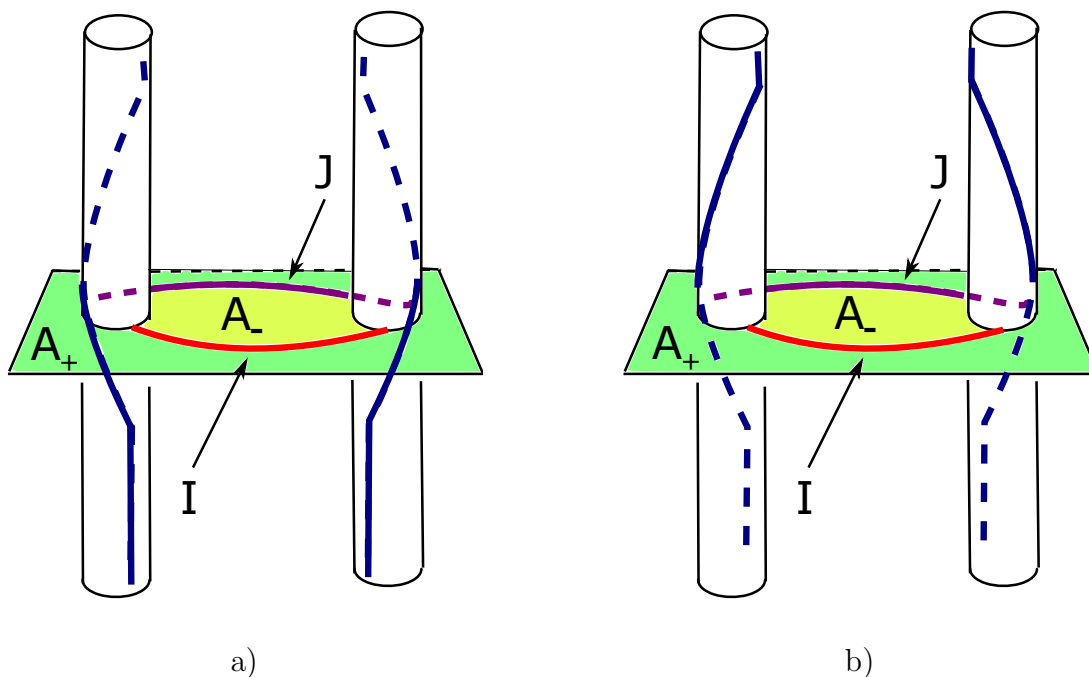


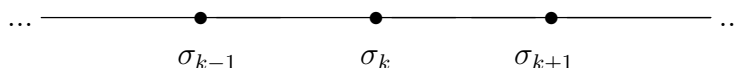
Figura 5.9: Superficie F

Por lo tanto, toda superficie de Seifert de género mínimo para K es equivalente a alguna superficie $S^{(n)}$. \square

Lema 5.14. (*[7], 3.5 (ii)*) Sea $K = K_1 \# K_2$, con K_1 y K_2 nudos no fibrados tales que las superficies de Seifert de género mínimo R_i para K_i , con $i = 1, 2$, son únicas. Entonces, $d([S^{(n)}], [S^{(k)}]) = n - k$, para todo $n \geq k$.

De la Proposición 5.13 y el Lema 5.14 se obtiene el siguiente Teorema.

Teorema 5.15. Sea $K = K_1 \# K_2$, con K_1 y K_2 nudos no fibrados. Supongamos además que las superficies de Seifert de género mínimo para K_i , con $i = 1, 2$, son únicas. Entonces $MS(K)$ es de la forma



Posteriormente, J. E. Banks, demostró un resultado que generaliza al Teorema 5.15.

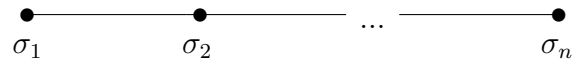
Teorema 5.16. (*[1], 1.2*) Sean K_1 y K_2 nudos no fibrados en S^3 y $K = K_1 \# K_2$. Entonces $MS(K)$ es homeomorfo a $MS(K_1) \times MS(K_2) \times \mathbb{R}$.

Del Teorema anterior, se obtiene que el complejo de Kakimizu no es finito para un nudo compuesto por nudos no fibrados. Además, junto con el Teorema de Descomposición Prima para nudos, se concluye que para conocer el complejo de Kakimizu para cualquier nudo, basta con encontrar el complejo de los nudos primos en que se descompone. En 2005, Kakimizu publicó una tabla en la que se enlistan las clases de equivalencia de superficies de Seifert para nudos primos de hasta 10 cruces.

Teorema 5.17. ([8], A) *Las superficies de Seifert para todo nudo primo de hasta 10 cruces son únicas, excepto por los siguientes nudos*

7_4	8_3	9_5	9_{10}	9_{13}	9_{18}	9_{23}	10_3	10_{11}	10_{16}	10_{18}
2	2	2	4	2	3	2	2	2	4	3
10_{24}	10_{28}	10_{30}	10_{31}	10_{33}	10_{37}	10_{38}	10_{53}	10_{67}	10_{68}	10_{74}
3	2	2	3	4	2	2	2	2	2	3

En la tabla anterior, cada nudo tiene exactamente dos, tres o cuatro clases de equivalencia de superficies de Seifert de género mínimo, de acuerdo al número escrito bajo el nudo. Además, por el Teorema C en [8], dichos complejos son de la forma:



con $n = 2, 3, 4$.

Conclusiones

En el presente trabajo se revisaron algunas de las propiedades clásicas de topología de dimensiones bajas para poder entender la relación que tienen las superficies y los nudos. De las cuestiones planteadas al inicio, sabemos que el algoritmo de Seifert aplicado a un diagrama alternante produce una superficie de Seifert de género mínimo.

Como se vió, es posible asociar a cada nudo un complejo simplicial conexo, cuyos vértices representan superficies de Seifert de género mínimo. Mas aún, cada camino que une a dos clases de equivalencia distintas, representa una sucesión de superficies de Seifert de género mínimo disjuntas dos a dos.

Existen nudos, como los fibrados, que tienen una única superficie de Seifert de género mínimo; mientras que la suma conexa de nudos no fibrados tiene una infinidad.

El estudio del complejo de Kakimizu en esta tesis, nos motiva a hacer las siguientes preguntas:

1. ¿El complejo de Kakimizu es finito para todo nudo primo?
2. ¿Cuáles son todas las clases de nudos que tienen complejo de Kakimizu finito?
3. Además de conexidad, ¿qué otras propiedades cumple el complejo de Kakimizu para cualquier nudo?

Índice de símbolos

$[\cdot]$	clase de equivalencia, 1
$\langle \cdot \rangle$	simplejo, 5
$ \cdot $	cardinalidad
$ K $	poliedro de un complejo simplicial, 6
\prec	cara, 5
$\#$	suma conexa de superficies, 12
$\#$	suma conexa de nudos, 32
\dagger	suma transversal, 35
\bar{A}	cerradura
$Aut_p(X)$	grupo de transformaciones cubrientes, 10
B^n	bola unitaria, 1
$E(K)$	exterior de un nudo, 34
$\tilde{E}(K)$	cubriente cíclico infinito, 42
∂	frontera, 4
$g(S)$	género de una superficie, 21
$g(K)$	género de un nudo, 32
int	interior, 4
$\mathcal{MS}(K)$	conjunto de clases de equivalencia de Superficies de Seifert de género mínimo, 47
$MS(K)$	complejo de Kakimizu, 47
π	proyección, 26
P^2	plano proyectivo, 2
\mathbb{R}	conjunto de números reales
\mathbb{R}^n	espacio n -dimensional, 1
$\mathcal{S}(K)$	conjunto de clases de equivalencia de Superficies de Seifert, 42
S^n	n -esfera, 2
$S^{(n)}$	$f^n(S)$, 49
T^2	toro, 2
$\chi(S)$	característica de Euler, 21
X/\sim	conjunto de clases de equivalencia, 1
\mathbb{Z}	conjunto de números enteros

Índice alfabético

- ε -perturbación, 26
- k -simplejo, 5
- n -variedad, 4

- arco, 7
 - de más afuera, 22

- complejo simplicial, 5
- compresión, 23
- cruce, 27
- curva
 - de más adentro, 22
 - esencial e inesencial, 23
- curva simple cerrada, 7

- diagrama, 27
 - alternante, 28

- encaje, 3
- equivalencia
 - de diagramas, 28
 - de nudos, 26
 - de superficies de Seifert, 34
- espacio cubriente, 8
 - levantamiento, 9
 - transformación cubriente, 10
 - universal, 9
- espacio cubriente cíclico infinito de $E(K)$, 42
- exterior de un nudo, 34

- función PL, 7

- género
 - de un nudo, 32
 - de una superficie, 21

- homotopía, 3

- isotopía, 3

- longitud preferente, 34

- movida triangular, 26
- movidas de Reidemeister, 28

- nudo, 25
 - fibrado, 47
 - orientación, 27

- poliedro, 6
- posición general, 7
- proyección regular, 26

- suma conexa
 - de nudos, 32
 - de superficies, 12
- suma transversal, 35
- superficie, 11
 - ∂ -compresible, 23
 - compresible e incompresible, 23
 - orientable, 21
- superficie de Seifert, 29
 - de género mínimo, 32

- topología cociente, 1

- variedad
 - irreducible, 23
 - triangulable, 7
- vecindad regular, 7

Referencias

- [1] J. E. Banks, *The Kakimizu complex of a connected sum of links*, Mathematical Institute, University of Oxford, 2011.
- [2] G. Burde, H. Zieschang, *Knots*, de Gruyter Studies in Mathematics 5, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1985.
- [3] P. Cromwell, *Knots and Links*, Cambridge University Press, 2004.
- [4] J. R. Eisner, *Knots with infinitely many minimal spanning surfaces*, Transactions of the American Mathematical Society 229 (1977), 329-349.
- [5] J. R. Eisner, *Addendum to Knots with infinitely many minimal spanning surfaces*, Transactions of the American Mathematical Society 233 (1977), 367-369.
- [6] D. Gabai, *Genera of the Alternating Links*, Duke Mathematical Journal 53 (1986), no. 3, 677-681.
- [7] O. Kakimizu, *Finding disjoint incompressible spanning surfaces for a link*, Hiroshima Math J. 22 (1992), 225-236.
- [8] O. Kakimizu, *Classification of the incompressible spanning surfaces for prime knots of 10 or less crossings*, Hiroshima Math J. 35 (2005), 47-92.
- [9] John M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, Graduate Text in Mathematics, Springer, 2011.
- [10] William S. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Graduate Text in Mathematics, Springer, 1991.
- [11] D. Rolfsen, *Knots and Links*, AMS Chelsea Publishing, 1990.
- [12] M. Scharlemann, A. Thompson, *Finding disjoint Seifert surfaces*, Bull. London Math. Soc. 20 (1988), no. 1, 61-64.
- [13] M. Scharlemann, *Sutured Manifolds and Generalized Thurston Norms*, J. Differential Geometry 29 (1989), 557-614.
- [14] H. Schubert, *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knoten in Primknoten*, Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Nat. 3 (1949), 57-104.
- [15] W. Whitten, *Isotopy types of knot spanning surfaces*, Topology, vol. 12 (1973), 373-380.