BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FUNCIÓN ZETA, ANILLO DE BURNSIDE Y SUS GENERALIZACIONES.

TESIS

Para obtener el título de:

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta:

JUAN MANUEL RAMÍREZ CONTRERAS

Asesor:

Dr. DAVID VILLA HERNÁNDEZ

PUEBLA, PUE. *JUNIO 2018*

Índice general

Introducción

Dado G un grupo finito, las clases de isomorfismo de los $G-$conjuntos generan un anillo conmutativo. En 1967 Louis Solomon llama a dicho anillo, el anillo de Burnside, ya que al parecer, había sido definido por primera vez en el libro *Theory of groups of finite order* de William Burnside. Además, Solomon denota por $B(G)$ al anillo de Burnside, y prueba que $B(G) \otimes \mathbb{Q}$ es un álgebra semisimple sobre $\mathbb{Q}$ y que fórmulas para ciertos idempotentes primitivos de esta álgebra conducen al Terorema de Artin en caracteres racionales en una forma explicita debida a Brauer [6].

Por otra parte, se sabe que dado un V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{Q}$, G un grupo finito y $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ una representación, existe L una $\mathbb{Z}-$retícula en V que expande a V y que es estable bajo G. Dicha L es una $\mathbb{Z}[G]-$retícula sobre V. Y el Teorema de Jordan-Zassenhaus [4, Sect.79] nos dice que el número de clases de isomorfismo de las $\mathbb{Z}[G]-$retículas sobre V es finito, pero las pruebas usuales no dan un algoritmo útil para determinar las clases [8].

En 1977 Louis Solomon da un algoritmo para hacer tales cálculos. Además, define la funcion zeta como

$$\zeta_L(s) = \zeta_L(s; \Lambda) = \sum_{N \in \Delta(L)} (L : N)^{-s},$$

donde Λ es un anillo con unidad, L un $\Lambda-$módulo izquierdo con unidad, $\Delta(L)$ el conjunto de las clases de isomorfismo de índice finito en L, y $\Delta(L)$ tiene sólo un número finito de submódulos de cualquier índice finito n [8].

Solomon también probó que existe una identidad del producto de Euler

$$\zeta_\Lambda(L; s) = \prod_p \zeta_{\Lambda_p}(L_p; s),$$

donde conjeturó sobre la naturaleza de los factores $\zeta_{\Lambda_p}(L_p; s)$, y dio una definición literal, en terminos de funciones zeta de Dedekind, de una función zeta $\zeta_\Lambda(V; s)$ la cual depende sólo del módulo V y no del orden Λ o de la retícula L [3].

En 1979 Irving Reiner calcula $\zeta_{RG}(s)$, donde RG es el anillo de grupo para G un grupo cíclico de orden p y p^2 sobre R el anillo de enteros algebraicos en un campo de número algebraicos o en una localización o en la completación $P-$ádica de tal anillo. Durante este proceso, Reiner usa el producto fibrado (pullback) para conocer los clases de isomorfismo de los ideales de índice finito de RG [7].

Se puede observar que Solomon había introducido una función zeta, la cual contaba subretículas de una retícula sobre un orden. En 1980 Colin J. Bushnell e Irving Reiner retoman la definición de la funcion zeta de Solomon de la siguiente manera:

$$\zeta_\Lambda(L;s) = \sum_{N \subseteq L} (L:N)^{-s},$$

donde la suma corre sobre todas las $\Lambda-$retículas plenas en L, $(L:N)$ denota el índice de N en L, s es una variable compleja, L una $\Lambda-$retícula plena en V, V un $A-$módulo izquierdo finitamente generado, Λ un orden en A y A una álgebra semisimple de dimensión finita sobre $\mathbb{Q}$ o sobre $\mathbb{Q}_p$ [3].

De esta manera, cuando A es una $\mathbb{Q}-$álgebra, Λ es un $\mathbb{Z}-$orden en A; similarmente, cuando A es una $\mathbb{Q}_p-$álgebra, Λ es un $\mathbb{Z}_p-$orden en A [3].

Además, si Λ es un $\mathbb{Z}-$orden en la $\mathbb{Q}-$álgebra A, y L es una $\Lambda-$retícula plena en el $A-$módulo V, entonces para cada número primo p, L_p es una Λ_p-retícula plena en el A_p-módulo V_p, de aquí Bushnell y Reiner pueden formar la función zeta local $\zeta_p(\Lambda_p; s)$ [3].

Más aún, Bushnell y Reiner dan un breve desarrollo de la teoría de Salomón desde este punto de vista. Este nuevo enfoque, conduce a una manera para calcular la función zeta de Solomon, que en muchas circunstancias da una manera más eficiente, que los métodos elementales algebraicos y combinatorios empleados por Solomon [3].

Además, obtienen una ecuación local para la función zeta de Solomon; es decir, mediante una transición a ideales obtienen una fórmula que relaciona a la función zeta de Λ con la suma de funciones, denotadas por ellos como $Z(M,s)$, donde la suma corre sobre los representantes de las clases de isomorfismo de las $\Lambda-$retículas plenas en V y $Z(M,s)$ es una integral definida en las unidades de A [11].

En 2009 David Villa Hernández se da cuenta que el anillo de Burnside $B(G)$ para grupos finitos cumple con todas las características para poder conocer su función zeta, y usa un metodo similar al de I. Reiner para conocer sus clases de isomorfismo de los ideales de índice finito de $B(G)$, y calcula $\zeta_{B(G)}(s)$ con G un grupo cíclico de orden p y p^2 [9].

En 2011 David Villa Hernández conociendo las clases de isomorfismo de los ideales de índice finito de $B(G)$ con G un grupo cíclico de orden p y p^2, puede conocer las clases de isomorfismo de los ideales fraccionales de índice finito de $B(G)$ con G un grupo cíclico de orden p y p^2, y en parte de su tesis doctoral, Villa Hernández calcula $\zeta_{B(G)}(s)$ con G un grupo cíclico de orden p y p^2, pero mediante la suma de las funciones $Z(M,s)$, donde la suma corre sobre los representantes las clases de isomorfismo de los ideales fraccionales de índice finito de $B(G)$ [10].

En 2014 Villa Hernández y un servidor calculamos las clases de isomorfismo de los ideales de índice finito de $B(G)$, y damos a conocer $\zeta_{B(G)}(s)$ con G un grupo cíclico de orden p^3.

Sin embargo, en este proceso, nos encontramos con que hay $82+7p+5(p-1)+3(p-2)$ familias de representantes de las clases de isomorfismo de los ideales fraccionales de índice finito de $B_p(G)$ con G un grupo cíclico de orden p^3 y p un número primo.

Esto nos hacer darnos cuenta que no es sencillo conocer las clases de isomorfismo de los ideales fraccionales de indice finito de $B_p(G)$ con G un grupo cíclico de orden p^n, $n \in \mathbb{N}$ y p un número primo. En consecuencia, tenemos la dificultad de conocer $\zeta_{B_p(G)}(s)$ en el caso local, y por tal motivo sea difícil conocer $\zeta_{B(G)}(s)$ en el caso global para G un grupo cíclico de orden p^n, $n \in \mathbb{N}$ y p un número primo.

Por tal motivo, el objetivo de esta tesis es desarrollar cirtas condiciones para poder tener resultados que nos acerquen a el conocimiento de $\zeta_{B(G)}(s)$ con G un grupo cíclico de orden p^n, $n \in \mathbb{N}$ y p un número primo.

En el capítulo uno desarrollamos una comprensión básica del anillo de Burnside. Sabemos que éste puede ser estudiado desde diferentes puntos de vista. Nosotros procederemos de la siguiente manera: comenzaremos desarrollando teoría conocida de los $G-$conjuntos, esto con el fin de notar (en su momento) que, dado un grupo finito G la unión disjunta y el producto cartesiano dan lugar a una suma y un producto en el conjunto de clases de isomorfismo de los $G-$conjuntos finitos.

Más aún, a excepción de la falta de inversos aditivos, dicho conjunto satisface los axiomas de un anillo conmutativo, con lo cual, si agregamos formalmente dichos inversos, obtenemos el correspondiente anillo de Grothendieck, el cual se conoce como el anillo de Burnside $B(G)$ de G. Cabe mencionar que, mostramos que como grupo abeliano el anillo de Burnside es libre generado por ciertos $G-$conjuntos transitivos.

También, en éste primer capítulo se desarrolla teoría de la Marca para mostrar que los elementos del anillo de Burnside se pueden caracterizar en el producto de los enteros tantas veces como elementos en las clases de conjugación se tengan.

En el capítulo dos comenzaremos dando teoría conocida sobre la función zeta, la cual nos permitirá saber sobre la función zeta para el anillo de Burnside, por ejemplo definimos la función Zeta $Z_\Lambda\left(M;s\right)$ dada por Bushnell y Reiner para Λ un $\mathbb{Z}_p-$orden en una álgebra semisimple de dimensión finita sobre $\mathbb{Q}_p$ el campo de los racionales $p-$ádicos para algún primo p y M una $\Lambda-$retícula plena en dicha álgebra semisimple.

Más aún, para dicha integral se define el concepto de conductor de una $\Lambda-$retícula plena, el cuál forma una parte fundamental del siguiente capítulo. Posteriormente, mediante el método usado por Reiner daremos a conocer quienes son las clases de isomorfismo de los ideales fraccionales de $B_p(G)$ con G un grupo cíclico de orden p^3 y p un número primo. Luego, mediante ésta colección finita de clases de isomorfismo, usaremos el método de Bushnell y Reiner para calcular, tanto en el caso local como en el caso global de $\zeta_{B(G)}(s)$ con G un grupo cíclico de orden p^3.

En los resultados del capítulo dos, se puede notar que los únicos conductores de los ideales fraccionales de $B_p(G)$ con G un grupo cíclico de orden p^3 y p un número primo, son cuatro diferentes retículas plenas. Por tanto, observamos que para el caso local de $\zeta_{B(G)}(s)$ con G un grupo cíclico de orden p^3 es suficiente calcular las integrales correspondientes de estos cuatro conductores. Por tal motivo, el objetivo del capítulo tres es observar que pasa con los conductores de $B_p(G)$ con G un grupo cíclico de orden p^n, $n \in \mathbb{N}$ y p un número primo.

En el capítulo tres damos los requerimientos necesarios para tener que, sólo $n+1$ retículas plenas pueden ser los únicos conductores de las clases de isomorfismos de los ideales fraccionales de $B_p(G)$ con G un grupo cíclico de orden p^n, $n \in \mathbb{N}$ y p un número primo. Luego, bajo esta condición probamos que existen $n+1$ polinomios en $\mathbb{Z}[p^s]$ de grado menor o igual que $\frac{n(n+1)}{2}$, los cuales nos permiten en el caso local de $\zeta_{B_p(G)}(s)$ hacer depender a dicha función zeta de estos $n+1$ polinomios para G un grupo cíclico de orden p^n, $n \in \mathbb{N}$ y p un número primo. Más aún, en el capítulo se prueba que $\zeta_{B_p(G)}(s)$ es la suma del producto de estos $n+1$ polinomios por la integral que depende de su respectivo conductor. Posteriormente, se da una fórmula recursiva de calcular estas $n+1$ integrales, de hecho, se da una gran una gran despripción de estas integrales. Después, presentamos nuestra conjetura sobre cuando un ideal fraccional de $B_p(G)$ con G un grupo cíclico de orden p^n, $n \in \mathbb{N}$ y p un número primo, puede ser un $\mathbb{Z}_p-$orden. Finalizamos el capítulo con dar un ejemplo de como aplicar el Lema 3.1.4.

Finalmente, incluimos un apéndice sobre la función Zeta, donde se consideran algunos resultados, tecnicas u otras herramientas, las cuales se ha decidido no poner en los capítulos para no salirse del contexto que se desea dar a entender, cabe mencionar, que estos, no son menos importantes a lo desarrollado a lo largo de esta tesis.

Capítulo 1

Anillo de Burnside

1.1. *Preliminares*

En este trabajo de tesis sólo consideraremos grupos finitos, es decir, si en algún lugar del texto está escrito que algo es un grupo, es porque lo estamos considerando como un grupo finito a pesar de que en la mayoria de los resultados de las secciones 1.1 y 1.2 no es necesaria la condición de finitud del grupo. También, se espera que el lector este familiarizado con la teoría de grupos y su notación más común, que en ella se usa.

El anillo de Burnside $B(G)$ es uno de los anillos fundamentales de representación de G. Además, es el objeto universal a considerar en el estudio de la categoría de G-conjuntos finitos. Es un análogo para los G-conjuntos finitos del anillo $\mathbb{Z}$; de hecho, el anillo $\mathbb{Z}$ es isomorfo al anillo de Burnside del grupo trivial. Por otra parte, el estudio de su espectro primo y de sus idempotentes primitivos conduce a varios teoremas de inducción como el de Artin, Brauer y Dress (teoremas de representación). El anillo de Burnside es un invariante del grupo, el cual detecta solubilidad. Andreas Dress, probó que un grupo es soluble si y sólo si los únicos idempotentes de $B(G)$ son los triviales. También probó el teorema de inducción de Dress para $B(G)$, el cual, a partir del hecho de que $B(G)$ actúa en los funtores de Mackey, se tradujo en un teorema de inducción para cada uno de estos funtores, ver [2]. El lector puede encontrar más aplicaciones en [1], [2] y [3].

Definición 1.1.1. Sean X un conjunto y G un grupo, diremos que X es un $G-$*conjunto* si existe una función

$$*: G \times X \longrightarrow X \text{ tal que } (g, x) \longmapsto *((g, x)) = g * x$$

que satisface:

i) $e * x = x$ para todo $x \in X$, donde e es la identidad en G.

ii) $(gh) * x = g * (h * x)$ para todo $g, h \in G$ y $x \in X$.

Observación 1. A la función $*$ usualmente se le conoce como la *acción* de G en X y se dice que G *actúa* en X.

Ejemplo 1. Sean G un grupo y X un conjunto, entonces X es un $G-$conjunto mediante:

$$*: G \times X \longrightarrow X \text{ tal que } (g,x) \longmapsto g * x = x.$$

La acción $*$ es llamada la *acción trivial* de G en X, y cuando consideramos dicha acción decimos que G actúa trivialmente en X.

Ejemplo 2. Sea G un grupo y $H \leq G$, entonces G/H (el conjunto de las clases laterales izquierdas de H) es un $G-$conjunto mediante la multiplicación por la izquierda, es decir:

$$*: G \times G/H \longrightarrow G/H \text{ tal que } (g, g_1H) \longmapsto g * (g_1H) = (gg_1)H$$

para todo $g \in G$ y $g_1H \in G/H$.

Definición 1.1.2. Sean X y Y conjuntos. Considere los conjuntos $X' = X \times \{1\}$ y $Y' = Y \times \{2\}$ donde $1 \notin Y$ y $2 \notin X$, entonces definimos la unión ajena de X y Y como $X \sqcup Y = X' \cup Y'$. Note que $X' \cap Y' = \emptyset$.

De manera más general, dada $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos, la unión ajena de dicha familia es $\bigsqcup\limits_{i\in I} X_i = \bigcup\limits_{i\in I} X_i'$, donde $X_i' = X_i \times \{i\}$ con $i \notin X_j$ para $j \neq i$ y $j \in I$.

Ejemplo 3. Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia de $G-$conjuntos, entonces $\bigsqcup\limits_{i\in I} X_i$ es un $G-$conjunto mediante:

$$*: G \times \bigsqcup_{i\in I} X_i \longrightarrow \bigsqcup_{i\in I} X_i \text{ tal que } (g,(x,i)) \longmapsto g * (x,i) = (g *_i x, i),$$

donde $*_i$ es la acción de G en X_i con $x \in X_i$, para algún $i \in I$.

Ejemplo 4. Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia de $G-$conjuntos, entonces el producto cartesiano de la familia $\{X_i\}_{i\in I}$ (denotado por $\prod\limits_{i\in I} X_i$) es un $G-$conjunto mediante:

$$*: G \times \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i \text{ tal que } (g,(x_i)_{i\in I}) \longmapsto g * (x_i)_{i\in I} = (g *_i x_i)_{i\in I},$$

donde $*_i$ es la acción de G en X_i, para cada $i \in I$.

Ejemplo 5. Si X y Y son dos $G-$conjuntos, entonces

$$\operatorname{Hom}(X,Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ es función}\}$$

es un $G-$conjunto mediante:

$$*: G \times \operatorname{Hom}(X,Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}(X,Y) \text{ tal que } (g,f) \longmapsto g * f,$$

donde $(g * f)(x) = g \underset{Y}{*} f(g^{-1} \underset{X}{*} x)$, para toda $x \in X,\ f \in \operatorname{Hom}(X,Y)$ y $g \in G$. Además, $\underset{Y}{*}, \underset{X}{*}$ son las acciones de G en Y y X, respectivamente.

Observación 2. Dada $*$ una acción de G en X se tiene que $\sim$ es una relación de equivalencia en X, donde $y \sim x$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $y = g * x$ para $x,\ y \in X$.

Definición 1.1.3. De acuerdo a la relación anterior $\sim$, denotaremos a la clase de equivalencia de $x \in X$ por $\mathcal{O}_G(x)$ y la llamaremos *órbita* de x en G. Observe que $\mathcal{O}_G(x) = \{g * x : g \in G\} \subseteq X$.

Definición 1.1.4. Sean X, Y dos $G-$conjuntos con acciones $\underset{X}{*}$ y $\underset{Y}{*}$, respectivamente. Diremos que $f \in$Hom(X,Y) es un morfismo de $G-$conjuntos si satisface que $f(g \underset{X}{*} x) = g \underset{Y}{*} f(x)$ para todo $g \in G$ y $x \in X$. Denotamos a la colección de morfismos de G-conjuntos de X a Y por $\mathrm{Hom}_G(X,Y)$.

Ejemplo 6. Sea X un $G-$conjunto, la *identidad*

$$1_X : X \longrightarrow X \text{ tal que } x \longmapsto x$$

es un morfismo de $G-$conjuntos.

Ejemplo 7. Sean $H \leq K \leq G$, entonces

$$\Pi : G/H \longrightarrow G/K \quad \text{tal que } aH \longmapsto aK$$

es un morfismo de $G-$conjuntos sobreyectivo.

Observación 3. La composición de morfismos de $G-$conjuntos es nuevamente un morfismo de $G-$conjuntos.

Definición 1.1.5. Sean X, Y dos $G-$conjuntos, diremos que $f \in \mathrm{Hom}_G(X,Y)$ es un *isomorfismo* de $G-$conjuntos si existe $g \in \mathrm{Hom}_G(Y,X)$ tal que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$. Además, diremos que X y Y son *isomorfos* como $G-$conjuntos si existe $f \in \mathrm{Hom}_G(X,Y)$ isomorfismo de $G-$conjuntos. Si X y Y son isomorfos lo denotaremos por $X \cong_G Y$.

Observación 4.

i) Un morfismo de $G-$conjuntos es un isomorfismo de $G-$conjuntos si y sólo si es biyectivo.

ii) El inverso de un isomorfismo de $G-$conjuntos es también un isomorfismo de $G-$conjuntos.

iii) Un morfismo de $G-$conjuntos manda órbitas en órbitas.

Definición 1.1.6. Sean G un grupo, X un $G-$conjunto y $x \in X$. Definimos el *estabilizador* de x en G como $stab_G(x) = \{g \in G : g * x = x\}$.

Observación 5. Note que $stab_G(x)$ es un subgrupo de G.

De aquí en adelante si no hay lugar a confusión, vamos a abreviar la notación y escribiremos gx en lugar de $g * x$.

Definición 1.1.7. Llamaremos a un $G-$conjunto *transitivo* si tiene una única órbita; es decir, si para cada $x,\ y \in X$ existe $g \in G$ tal que $y = gx$.

Teorema 1.1.1. Si G es un grupo, X un *G-conjunto* y $x_0 \in X$, entonces

i) $stab_G(gx_0) = g(stab_G(x_0))g^{-1}$.

ii) $\mathcal{O}_G(x_0) \underset{G}{\cong} G/stab_G(x_0)$.

iii) Si H es un subgrupo de G, entonces G/H es transitivo.

iv) Si X es un $G-$conjunto transitivo, entonces $X \underset{G}{\cong} G/H$ para algún $H \leq G$.

Demostración. *i*) Sea $a \in stab_G(gx_0)$, así $a(gx_0) = gx_0$, de aquí $(ag)x_0 = gx_0$, en consecuencia $g^{-1}agx_0 = x_0$, de aquí que $g^{-1}ag \in stab_G(x_0)$, con lo que $a \in g(stab_G(x_0))g^{-1}$, por tanto $stab_G(gx_0) \subset g(stab_G(x_0))g^{-1}$. De manera análoga $g(stab_G(x_0))g^{-1} \subset stab_G(gx_0)$, por lo tanto

$$stab_G(gx_0) = g(stab_G(x_0))g^{-1}.$$

ii) Definimos $f : \mathcal{O}_G(x_0) \longrightarrow G/stab_G(x_0)$ tal que $gx_0 \longmapsto g(stab_G(x_0))$.

Sean $g_1x_0,\ g_2x_0 \in \mathcal{O}_G(x_0)$. Entonces $g_1x_0 = g_2x_0$ si y sólo si $(g_2^{-1}g_1)x_0 = x_0$, esto último es equivalente a que $g_2^{-1}g_1 \in stab_G(x_0)$ y esto pasa si y sólo si $g_2(stab_G(x_0)) = g_1(stab_G(x_0))$. Por lo tanto, f está bien definida y es inyectiva.

Ahora, sea $g(stab_G(x_0)) \in G/stab_G(x_0)$, notemos que $gx_0 \in \mathcal{O}_G(x_0)$ y es tal que $f(gx_0) = g(stab_G(x_0))$, así f es suprayectiva.

Sólo falta demostrar que f es morfismo de $G-$conjuntos, para ello tomemos $g, g' \in G$ entonces

$$f(g'(gx_0)) = f((g'g)x_0)) = g'g(stab_G(x_0)) = g'(g(stab_G(x_0))) = g'(f(gx_0)).$$

Por lo tanto $\mathcal{O}_G(x_0) \underset{G}{\cong} G/stab_G(x_0)$.

iii) Como G actúa en G/H mediante la acción del Ejemplo 2, tenemos que $G/H = \mathcal{O}_G(H)$. Por lo tanto, G/H es transitivo.

iv) Es inmediato de *ii*). □

Teorema 1.1.2. Si X es un $G-$conjunto finito, entonces existe un conjunto de índices I tal que

$$X \underset{G}{\cong} \bigsqcup_{i\in I} G/H_i \text{ donde } H_i \leq G \text{ para cada } i \in I.$$

Demostración. Sean X un $G-$conjunto y $\{x_i : i \in I\}$ un conjunto de representantes de las órbitas de G en X. Entonces $X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_G(x_i)$ y por el Teorema 1.1.1 sabemos que $\mathcal{O}_G(x_i) \underset{G}{\cong} G/stab_G(x_i)$ para cada $i \in I$; llamemos f_i al isomorfismo de $\mathcal{O}_G(x_i)$ a $G/stab_G(x_i)$. Así, definimos

$$f : \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_G(x_i) \longrightarrow \bigsqcup_{i\in I} (G/stab_G(x_i)) \text{ tal que } x \longmapsto (f_i(x), i) \text{ para } x \in \mathcal{O}_G(x_i)$$

el cual es un isomorfismo de $G-$conjuntos. Finalmente definimos $H_i = stab_G(x_i)$, con lo cual queda demostrado el teorema. □

Definición 1.1.8. Sea $H \leq G$, llamaremos *conjugado* de H por $g \in G$ al subgrupo de G definido por $gHg^{-1} = \left\{ghg^{-1} : h \in H\right\}$.

Observación 6. Sea $X = \{H \subseteq G : H \leq G\}$, entonces X es un $G-$conjunto mediante

$$* : G \times X \longrightarrow X \text{ tal que } (g, H) \longmapsto g * H = gHg^{-1}$$

Definición 1.1.9. Al conjunto de órbitas de X bajo la acción de G (ver Observación 6) lo denotaremos $\mathscr{C}(G)$ y lo llamaremos las clases de conjugación de subgrupos de G. Denotamos por $[H] \in \mathscr{C}(G)$ la órbita de $H \in X$ bajo esta acción, es decir: $[H] = \left\{gHg^{-1} : g \in G\right\}$. Además, $[K] = [H]$ si y sólo si $K = gHg^{-1}$ para algún $g \in G$, es decir, H y K son subgrupos conjugados.

Lema 1.1.1. Si $H,\ K \leq G$, entonces $G/H \underset{G}{\cong} G/K$ si y sólo si $[H] = [K]$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Sabemos que $[K] = [H]$, entonces existe $g \in G$ tal que $K = gHg^{-1}$, así

$$g^{-1}Kg = H.$$

Luego, definimos $f : G/H \longrightarrow G/K$ tal que $aH \longmapsto ag^{-1}K$. Sean $aH,\ bH \in G/H$. Entonces

$$\begin{aligned} aH = bH \Leftrightarrow ag^{-1}Kg \ &= bg^{-1}Kg \\ \Leftrightarrow ag^{-1}K \ &= bg^{-1}K. \end{aligned}$$

Por lo tanto f está bien definida y es inyectiva.

Ahora, sea $bK \in G/K$ con $b \in G$, notemos que $bgH \in G/H$, luego $f(bgH) = bgg^{-1}K = bK$. De aquí, f es suprayectiva y, por tanto, biyectiva.

Por último, $f(g_1(aH)) = f(g_1aH) = (g_1ag^{-1})K = g_1(ag^{-1})K = g_1f(aH)$, con lo que f es morfismo de $G-$conjuntos. Por lo tanto, $G/H \underset{G}{\cong} G/K$.

($\Rightarrow$) Sea $f : G/H \longrightarrow G/K$ un isomorfismo de $G-$conjuntos tal que $H \longmapsto gK$ para algún $g \in G$. Así, para todo $h \in H,\ gK = f(H) = f(hH) = hgK$, así $gK = hgK$, luego $g^{-1}hg \in K$, de aquí $g^{-1}Hg \subset K$.

Tomemos f^{-1}, el cual sabemos que es un morfismo de $G-$conjuntos y note que para cada k en K, $kg^{-1}H = kf^{-1}(K) = f^{-1}(kK) = f^{-1}(K) = g^{-1}H$, así $gkg^{-1} \in H$ para todo $k \in K$, luego $gKg^{-1} \subset H$, en consecuencia $K \subset g^{-1}Hg$, por tanto $K = g^{-1}Hg$, por lo tanto $[H] = [K]$. $\square$

Definición 1.1.10. Sean $H,\ K \leq G$. Si existe $g \in G$ tal que $gHg^{-1} \subseteq K$, diremos que H es *subconjugado* de K

Teorema 1.1.3. Si $H,\ K \leq G$, entonces $Hom_G(G/H, G/K) \neq \emptyset$ si y sólo si H es subconjugado de K.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $f \in \mathrm{Hom}_G(G/H, G/K)$, entonces $f(eH) = aK$ para alguna $a \in G$. Para cada $h \in H$ tenemos que $hH = H$, entonces se tiene que $f(hH) = f(eH) = aK$, lo anterior implica que $aK = f(hH) = hf(eH) = haK$. Por lo tanto $(a^{-1})ha \in K$, y así tenemos que $(a^{-1})Ha \subset K$.

($\Leftarrow$) Sea $\alpha : G/H \longrightarrow G/a^{-1}Ha$ un isomorfismo de $G-$conjuntos. Por otro lado, existe $a \in G$ tal que $a^{-1}Ha \leq K$, entonces del Ejemplo 7 tenemos el morfismo de $G-$conjuntos $\Pi : G/a^{-1}Ha \longrightarrow G/K$. En consecuencia

$$(\Pi \circ \alpha) \in \mathrm{Hom}_G(G/H, G/K).$$

$\square$

Observación 7. Si H es subconjugado de K, entonces todo conjugado de H es subconjugado de cualquier conjugado de K.

Observación 8. En $\mathscr{C}(G)$ hay una relación de orden parcial. Dados $[H],\ [K] \in \mathscr{C}(G)$, tenemos que

$$[H] \preceq [K] \text{ si y sólo si } H \text{ es subconjugado de } K.$$

1.2. *Propiedades de la Marca*

Definición 1.2.1. Sean G un grupo, $H \leq G$ y X un $G-$conjunto finito. Definimos X^H como el conjunto de todos los puntos de X que quedan fijos bajo la acción de H; es decir,

$$X^H = \{x \in X : h * x = x \text{ para todo } h \in H\}.$$

Definimos la *Marca* de H en X como el número de elementos de X^H y la denotamos por

$$\varphi_H(X) = \mid X^H \mid .$$

Teorema 1.2.1. Si $H,\ K \leq G$ y X, Y son $G-$conjuntos finitos, entonces

i) $\varphi_H(X \sqcup Y) = \varphi_H(X) + \varphi_H(Y)$.

ii) $\varphi_H(X \times Y) = \varphi_H(X)\varphi_H(Y)$.

iii) Si $[H] = [K]$, entonces $\varphi_H(X) = \varphi_K(X)$ para todo G-conjunto finito X.

Demostración. *i)*

$$\begin{aligned}
(X \sqcup Y)^H &= \{z \in X \sqcup Y : h * z = z \ \ \forall \ \ h \in H\} \\
&= \{z : (z \in X \times \{1\} \vee z \in Y \times \{2\}) \wedge h * z = z \ \ \forall\ h \in H\} \\
&= \{z : (z \in X \times \{1\} \wedge h * z = z) \vee (z \in Y \times \{2\} \wedge h * z = z) \ \ \forall\ h \in H\} \\
&= \{z \in X \times \{1\} \ \ \vee z \in Y \times \{2\} : h * z = z \ \ \forall\ h \in H\} \\
&= X^H \sqcup Y^H.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mid (X \sqcup Y)^H \mid = \mid X^H \sqcup Y^H \mid = \mid X^H \mid + \mid Y^H \mid$.

ii)

$$\begin{aligned}
(X \times Y)^H &= \{(x,y) \in X \times Y : h * (x,y) = (x,y) \ \ \forall \ \ h \in H\} \\
&= \{(x,y) \in X \times Y : (h * x, h * y) = (x,y) \ \ \forall \ \ h \in H\} \\
&= \{(x,y) : x \in X^H \text{ y } y \in Y^H\} \\
&= X^H \times Y^H.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mid (X \times Y)^H \mid = \mid X^H \times Y^H \mid = \mid X^H \mid\mid Y^H \mid$.

iii) Sea X un $G-$conjunto. Supongamos que $[H] = [K]$, esto implica que existe $g \in G$ tal que $H = gKg^{-1}$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
X^H &= \{x \in X : h * x = x \ \ \forall \ \ h \in H\} \\
&= \{x \in X : gkg^{-1} * x = x \ \ \forall \ \ k \in K\} \\
&= \{x \in X : k(g^{-1} * x) = g^{-1} * x \ \ \forall \ \ k \in K\} \\
&= \{x \in X : g^{-1} * x \in X^K\} \\
&= \{x \in X : x \in gX^K\} \\
&= gX^K.
\end{aligned}$$

Del párrafo anterior tenemos que $| X^H |=| gX^K |$.

Ahora definimos $\psi : X^K \longrightarrow gX^K$ tal que $x \longmapsto gx$. Observe que, ψ es una biyección, por lo que $| X^K |=| gX^K |$, y con ello se tiene que $| X^H |=| X^K |$. Por lo tanto, para todo $G-$conjunto X tenemos que $\varphi_H(X) = \varphi_K(X)$. $\square$

Lema 1.2.1. Sean $H,\ K \leq G$, entonces existe una biyección entre

$$(G/K)^H \text{ y } Hom_G(G/H, G/K).$$

Demostración. *i*) Supongamos que H no es subconjugado de K, entonces por el Teorema 1.26

$$\mathrm{Hom}_G(G/H, G/K) = \emptyset.$$

Por otro lado tenemos que:

$$\begin{aligned}(G/K)^H &= \{gK \in G/K : (hg)K = gK \text{ para todo } h \in H\}\\ &= \{gK \in G/K : g^{-1}hgK = K \text{ para todo } h \in H\}\\ &= \{gK \in G/K : g^{-1}Hg \subset K\}\\ &= \emptyset.\end{aligned}$$

ii) Supongamos que H es subconjugado de K. Definimos

$$\gamma : (G/K)^H \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(G/H, G/K) \text{ tal que } aK \longmapsto \gamma_a$$

donde $\gamma_a : G/H \longrightarrow G/K$ está definida por $gH \longmapsto gaK$.

Veamos que γ_a está bien definida. Sean $g_1H = g_2H$, así $g_1 = g_2h$ para algún $h \in H$. Luego, $\gamma_a(g_1H) = g_1aK = g_2(h(aK)) = g_2(aK) = \gamma_a(g_2H)$.

Ahora veamos que γ_a es un morfismo de $G-$conjuntos. Sean $g' \in G$ y $gH \in G/H$, entonces $\gamma_a(g'(gH)) = \gamma_a((g'g)H) = g'gaK = g'\gamma_a(gH)$.

Veamos que γ está bien definida. Sean $aK,\ bK \in (G/K)^H$ tales que $aK = bK$. Entonces $b = ak$ para algún $k \in K$. Luego, $\gamma_b(gH) = gbK = gakK = gaK = \gamma_a(gH)$ para toda $gH \in G/H$, por tanto $\gamma_a = \gamma_b$.

Sea

$$\gamma' : \mathrm{Hom}_G(G/H, G/K) \longrightarrow (G/K)^H \text{ tal que } \alpha \longmapsto \alpha(H).$$

Veamos que γ' está bien definida. Dado $h \in H$, tenemos que $h\alpha(H) = \alpha(hH) = \alpha(H)$, por lo que $\alpha(H) \in (G/K)^H$.

Ahora, veamos que $\gamma \circ \gamma' = Id_{\mathrm{Hom}_G(G/H,G/K)}$.

$(\gamma \circ \gamma')(\alpha) = \gamma(\gamma'(\alpha)) = \gamma(\alpha(H)) = \gamma(gK) = \gamma_g$, donde $\alpha(H) = gK$.

Por otro lado $((\gamma \circ \gamma')(\alpha))(xH) = \gamma_g(xH) = xgK = x\alpha(H) = \alpha(xH)$, para todo $xH \in G/H$.

Por lo que $(\gamma \circ \gamma')(\alpha) = \alpha$, de aquí

$$\gamma \circ \gamma' = Id_{\mathrm{Hom}_G(G/H,G/K)}.$$

Ahora, sea $aK \in (G/K)^H$, $(\gamma' \circ \gamma)(aK) = \gamma'(\gamma_a) = \gamma_a(H) = aK$.

Por tanto

$$\gamma' \circ \gamma = Id_{(G/K)^H}.$$

Por lo tanto, γ es biyección. $\square$

En vista del Lema 1.2.1 y el Teorema 1.1.3 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.2.1. Sean $H,\ K \leq G$. Entonces $\varphi_H(G/K) \neq 0$ si y sólo si H es subconjugado de K.

Definición 1.2.2. Dados G un grupo y $H \leq G$. Definimos el normalizador de H en G como:

$$N_G(H) = \{g \in G : gH = Hg\}.$$

Lema 1.2.2. Sean $H, K \leq G$ subgrupos, entonces

$$\varphi_H(G/K) = \left(\frac{|N_G(K)|}{|K|}\right)\alpha(H,K) = \left(\frac{|N_G(H)|}{|K|}\right)\beta(H,K)$$

donde

$$\alpha(H,K) = |\{E \leq G : [E] = [K] \text{ y } H \subseteq E\}|$$

y

$$\beta(H,K) = |\{E \leq G : [E] = [H] \text{ y } E \subseteq K\}|\,.$$

Demostración. Primero, llamemos $\mathfrak{A} = \{E \leq G : [E] = [K] \text{ y } H \subseteq E\}$. Luego, sabemos que

$$\begin{aligned}
(G/K)^H &= \{aK : haK = aK \text{ para toda } h \in H\} \\
&= \left\{aK : a^{-1}ha \in K \text{ para toda } h \in H\right\} \\
&= \left\{aK : a^{-1}Ha \subseteq K\right\} \\
&= \left\{aK : H \subseteq aKa^{-1}\right\}.
\end{aligned}$$

Ahora, tomemos $f : \left\{aK : H \subseteq aKa^{-1}\right\} \longrightarrow \mathfrak{A}$ tal que $aK \longmapsto aKa^{-1}$.

Veamos que f está bien definida. Sean $aK = bK$, entonces existe $k \in K$ tal que $a = bk$, por lo tanto $aKa^{-1} = bkKk^{-1}b^{-1} = bKb^{-1}$.

Veamos que f es sobreyectiva. Sea $E \in \mathfrak{A}$, así $[E] = [K]$, es decir, existe $a \in G$ tal que $E = aKa^{-1}$. Sólo falta ver que $aK \in (G/K)^H$. Sea $h \in H \subseteq E$, entonces $h = ak'a^{-1}$ para algún $k' \in K$, por lo que $haK = ak'a^{-1}aK = aK$.

Por tanto, $\left\{aK : H \subseteq aKa^{-1}\right\} = \bigcup\limits_{E \in \mathfrak{A}} f^{-1}(E)$, donde $f^{-1}(E)$ es la imagen inversa de E bajo f.

Veamos que $f^{-1}(E) = \{abK : bK \in N_G(K)/K\}$.

($\subseteq$) Sea $cK \in \left\{aK : H \subseteq aKa^{-1}\right\}$ tal que $f(cK) = aKa^{-1}$, de aquí que $cKc^{-1} = aKa^{-1}$, así $a^{-1}cKc^{-1}a = K$, con lo cual $a^{-1}c \in N_G(K)$, en consecuencia $a^{-1}c = b \in N_G(K)$, entonces $c = ab$ tal que $bK \in N_G(K)/K$.

($\supseteq$) Sea abK con $bK \in N_G(K)/K$, en consecuencia $f(abK) = abKb^{-1}a^{-1} = aKa^{-1} = E$, entonces $abK \in f^{-1}(E)$.

Observemos que si $bK, b'K \in N_G(K)/K$ entonces $bK = b'K$ si y sólo si $abK = ab'K$ por lo que de la igualdad anterior de conjuntos obtenemos que $|f^{-1}(E)| = |N_G(K)/K|$. Por lo tanto,

$$\varphi_H(G/K) = \left(\frac{|N_G(K)|}{|K|}\right)\alpha(H,K).$$

Por otro lado, llamemos $A = \left\{a \in G : a^{-1}Ha \subseteq K\right\}$ y tomemos

$$f_1 : A \longrightarrow \left\{aK : a^{-1}Ha \subseteq K\right\} \text{ tal que } a \longmapsto aK.$$

Es claro que f_1 está bien definida y es sobreyectiva.

Ahora, tenemos que la imagen inversa de aK bajo f_1 es:

$$\begin{aligned}
(f_1)^{-1}(aK) &= \{g \in G : f_1(g) = aK\} \\
&= \{g \in G : gK = aK\} \\
&= \left\{g \in G : a^{-1}g \in K\right\} \\
&= \{g \in G : g = ak \text{ para algún } k \in K\} \\
&= \{ak : k \in K\} \\
&= aK.
\end{aligned}$$

Así, $\left|(f_1)^{-1}(aK)\right| = |aK| = |K|$, de aquí que $|A| = |K|\,\varphi_H(G/K)$.

Ahora, llamemos $\mathfrak{B} = \{E \leq G : [E] = [H] \text{ y } E \subseteq K\}$ y veamos que

$$|A| = |N_G(H)|\,\beta(H,K).$$

Para ello, tomemos

$$f_2 : A \longrightarrow \mathfrak{B} \text{ tal que } a \longmapsto a^{-1}Ha.$$

Notemos que f_2 está bien definida. Luego, sea $E \in \mathfrak{B}$, así $[E] = [H]$ por lo que existe $a \in G$ tal que $E = a^{-1}Ha \subseteq K$, en consecuencia $a \in A$, por tanto f_2 es sobreyectiva.

Por otra parte, la imagen inversa de E bajo f_2 es:

$$\begin{aligned}
(f_2)^{-1}(E) &= \left\{g \in G : f_2(g) = a^{-1}Ha\right\} \\
&= \left\{g \in G : g^{-1}Hg = a^{-1}Ha\right\} \\
&= \left\{g \in G : ag^{-1}Hga^{-1} = H\right\} \\
&= \left\{g \in G : ga^{-1} \in N_G(H)\right\} \\
&= \left\{g \in G : ga^{-1} = x \text{ para algún } x \in N_G(H)\right\} \\
&= \{xa : x \in N_G(H)\} \\
&= (N_G(H))a.
\end{aligned}$$

De lo anterior, $\left|(f_2)^{-1}(E)\right| = |(N_G(H))a| = |N_G(H)|$. Por lo tanto,

$$|A| = |N_G(H)|\,\beta(H,K).$$

Concluyendo que

$$\varphi_H(G/K) = \left(\frac{|N_G(H)|}{|K|}\right)\beta(H,K). \qquad \square$$

1.3. *El Anillo de Burnside*

Desde que la observación 3 y el ejemplo 6 nos dicen que la composición de morfismos de $G-$conjuntos es nuevamente de $G-$conjuntos y que cualquier función identidad es de $G-$conjuntos; respectivamente. Podemos construir una categoria tomando como clase de objetos a la clase de todos los $G-$conjuntos y como clase de morfismos a la clase de todos los morfismos de $G-$conjuntos. Y llamaremos a ésta categoria la categoria de $G-$conjuntos.

Recordemos que a nosotros nos interesan los $G-$conjuntos finitos, de modo que, dentro de la categoria de $G-$conjuntos podemos considerar a los $G-$conjuntos finitos. Dando como resultado la categoria de $G-$conjuntos finitos, la cual es una subcategoria completa de la categoria de $G-$conjuntos [2, pag. 22].

Dado G un grupo finito, sea $\mathbb{A}$ la clase de todos los G-conjuntos finitos; es decir,

$$\mathbb{A} = \{X : X \text{ es un } G-\text{conjunto finito}\}$$

Observación 9. En $\mathbb{A}$ hay una relación de equivalencia $\sim$. A saber, dados X y $Y \in \mathbb{A}$ se tiene que $X \sim Y$ si y sólo si $X \cong_G Y$.

Definición 1.3.1. Sea $X \in \mathbb{A}$. Denotaremos por $[X]$ a la clase de equivalencia de $X \in \mathbb{A}$ ($[X] = \{Y \in \mathbb{A} : X \cong_G Y\}$) y la llamaremos la clase de $G-$isomorfismo de X. Así, definimos

$$B^+(G) = \{[X] : X \in \mathbb{A}\}.$$

Teorema 1.3.1. *Sea G un grupo finito, entonces $(B^+(G), +, \cdot)$ es un semianillo conmutativo con unidad, con las siguientes operaciones binarias:*

i) $+ : B^+(G) \times B^+(G) \longrightarrow B^+(G)$ *tal que* $([X], [Y]) \longmapsto [X] + [Y] = [X \sqcup Y]$.

ii) $\cdot : B^+(G) \times B^+(G) \longrightarrow B^+(G)$ *tal que* $([X], [Y]) \longmapsto [X] \cdot [Y] = [X \times Y]$.

Demostración. Veamos que la suma está bien definida:

Sean $[X_1], [X_2], [Y_1]$ y $[Y_2] \in B^+(G)$ tales que $[X_1] = [X_2]$ y $[Y_1] = [Y_2]$. Entonces existen $f_1 : X_1 \to X_2$ y $f_2 : Y_1 \to Y_2$ isomorfismos de $G-$conjuntos los cuales inducen el siguiente isomorfismo de $G-$conjuntos:

$$\begin{aligned} f_3 : (X_1 \times \{1\}) \cup (Y_1 \times \{2\}) &\to (X_2 \times \{1\}) \cup (Y_2 \times \{2\}) \\ (z, i) &\mapsto (f_i(z), i) \text{ para } i = 1, 2. \end{aligned}$$

Y por lo tanto $[X_1 \sqcup Y_1] = [X_2 \sqcup Y_2]$. Concluyendo que la suma no depende de los representantes.

Por otro lado, con la notación anterior tenemos que f_1 y f_2 inducen el siguiente isomorfismo de $G-$conjuntos:

$$\begin{aligned} f_4 : X_1 \times Y_1 &\to X_2 \times Y_2 \\ (x, y) &\mapsto (f_1(x), f_2(y)) \end{aligned}$$

Obteniendo que $[X_1 \times Y_1] = [X_2 \times Y_2]$, por lo que el producto está bien definido.

En lo siguiente podemos considerar, sin pérdida de generalidad, que para elementos $[X], [Y] \in B^+(G)$ tenemos que $X \cap Y = \emptyset$; esto debido a que $[X] = [X \times \{1\}]$, $[Y] = [Y \times \{2\}]$, y a que la suma no depende del representante.

Veamos que $B^+(G)$ cumple las propiedades de semianillo conmutativo con unidad. Para ello sean $[X], [Y], [Z] \in B^+(G)$ donde X, Y y Z son ajenos dos a dos. Por lo que las uniones en los siguientes puntos serán ajenas.

i) Asociatividad de la suma.

$$\begin{aligned} [X] + ([Y] + [Z]) &= [X] + [Y \cup Z] \\ &= [X \cup (Y \cup Z)] \\ &= [(X \cup Y) \cup Z] \\ &= [X \cup Y] + [Z] \\ &= ([X] + [Y]) + [Z]. \end{aligned}$$

ii) Conmutatividad de la suma.

$$\begin{aligned} [X] + [Y] &= [X \cup Y] \\ &= [Y \cup X] \\ &= [Y] + [X]. \end{aligned}$$

iii) Observamos que $[\emptyset] \in B^+(G)$, así $[X] + [\emptyset] = [X \cup \emptyset] = [X]$. Por tanto, $[\emptyset]$ es el neutro con la suma.

iv) Asociatividad del producto.

$$\begin{aligned} [X] \cdot ([Y] \cdot [Z]) &= [X] \cdot [Y \times Z] \\ &= [X \times (Y \times Z)] \\ &= [(X \times Y) \times Z] \\ &= [X \times Y] \cdot [Z] \\ &= ([X] \cdot [Y]) \cdot [Z]. \end{aligned}$$

v) Conmutatividad del producto. Sea

$$l : X \times Y \longrightarrow Y \times X \quad \text{tal que } (x, y) \longmapsto (y, x).$$

Claramente l está bien definida, es biyectiva y es de $G-$conjuntos. Por lo tanto $[X] \cdot [Y] = [Y] \cdot [X]$.

vi) Distributividad.

$$\begin{aligned} [X] \cdot ([Y] + [Z]) &= [X] \cdot [Y \cup Z] \\ &= [X \times (Y \cup Z)] \\ &= [(X \times Y) \cup (X \times Z)] \\ &= [X \times Y] + [X \times Z] \\ &= [X] \cdot [Y] + [X] \cdot [Z]. \end{aligned}$$

vii) Notamos que $[G/G] \in B^+(G)$. Tenemos que

$$f : X \times G/G \longrightarrow X \text{ tal que } (x, eG) \longmapsto x$$

es un isomorfismo de $G-$conjuntos. Por tanto, $[G/G]$ es la unidad en $B^+(G)$.

Por lo tanto, $(B^+(G), +, \cdot)$ es un semianillo conmutativo con unidad. □

Observación 10. Dados $G = \{e\}$ y X un conjunto. Entonces X es un $\{e\}-$conjunto con acción trivial. Además, dos $G-$conjuntos con la acción trivial son isomorfos si y sólo si existe una biyección entre ellos. De aquí que

$$\phi : B^+(\{e\}) \longrightarrow \mathbb{N} \text{ tal que } \quad [X] \longmapsto |X|$$

es un isomorfismo de semianillos, con lo cual $\mathbb{N} \cong B^+(\{e\})$. En este capítulo consideramos al cero como un elemento de los números naturales.

Teorema 1.3.2. Sean $[X], [Y], [Z] \in B^+(G)$ tales que $[X]+[Y] = [Z]+[Y]$, entonces $[X] = [Z]$. Es decir, hay cancelación con la suma en $B^+(G)$.

Demostración. Sean $[X], [Y]$ y $[Z] \in B^+(G)$ tales que $[X] + [Y] = [Z] + [Y]$. Como antes podemos asumir sin pérdida de generalidad que X, Y, Z son ajenos dos a dos, y por consiguiente todas las uniones que aparecen a continuación son ajenas. Sean $X = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{O}_G(x_i)$, $Y = \bigcup_{j=1}^{l} \mathcal{O}_G(y_j)$ y $Z = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}_G(z_k)$, puesto que $[X \cup Y] = [Z \cup Y]$ hay una correspondencia biyecctiva entre las órbitas de $X \cup Y$ y $Z \cup Y$, esto implica que $m + l = n + l$, por lo que $m = n$. Por lo tanto $Z = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{O}_G(z_i)$.

Demostremos que hay cancelación por inducción sobre $1 \leq l$.

$i)$ Para $l = 1$, existe un isomorfismo de $G-$conjuntos

$$f : X \cup \mathcal{O}_G(y_1) \longrightarrow Z \cup \mathcal{O}_G(y_1).$$

Observemos que si $f(O_G(y_1)) = O_G(y_1)$ entonces $f\mid_X : X \to Z$ es un isomorfismo de $G-$conjuntos, por lo que $[X] = [Z]$.

En caso contrario, sin pérdida de generalidad, supongamos que $f(O_G(y_1)) = O_G(z_m)$, entonces $[O_G(y_1)] = [O_G(z_m)]$. Por otro lado, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $f(O_G(x_m)) = O_G(y_1)$, entonces $[O_G(x_m)] = [O_G(y_1)]$. Por lo tanto $[O_G(x_m)] = [O_G(z_m)]$. Sea $f_1 : O_G(x_m) \to O_G(z_m)$ un isomorfismo de $G-$conjuntos. Por otro lado observemos que

$$f\mid_{\bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{O}_G(x_i)} : \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{O}_G(x_i) \to \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{O}_G(z_i)$$

es un isomorfismo de $G-$conjuntos, por lo que este junto con f_1 inducen un isomorfismo entre $\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{O}_G(x_i)$ y $\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{O}_G(z_i)$. Por lo tanto $[X] = [Z]$.

ii) Para $l > 1$ tenemos que $[X] + [Y] = [Z] + [Y]$ entonces

$$([X] + [\bigcup_{j=1}^{l-1} \mathcal{O}_{\mathrm{G}}(y_j)]) + [\mathcal{O}_{\mathrm{G}}(y_l)] = ([Z] + [\bigcup_{j=1}^{l-1} \mathcal{O}_{\mathrm{G}}(y_j)]) + [\mathcal{O}_{\mathrm{G}}(y_l)]$$

por lo que utilizando i) podemos cancelar una órbita, en este caso la órbita $\mathcal{O}_{\mathrm{G}}(y_l)$ obteniendo que $[X] + [\bigcup_{j=1}^{l-1} \mathcal{O}_{\mathrm{G}}(y_j)] = [Z] + [\bigcup_{j=1}^{l-1} \mathcal{O}_{\mathrm{G}}(y_j)]$, finalmente por hipótesis de inducción podemos cancelar $l-1$ órbitas, concluyendo que $[X] = [Z]$. $\square$

Observación 11. El Teorema 1.3.2 nos permite definir una relación de equivalencia en $B^+(G) \times B^+(G)$. A saber, dados $([X_1], [Y_1])$ y $([X_2], [Y_2]) \in B^+(G) \times B^+(G)$ tenemos que $([X_1], [Y_1]) \sim ([X_2], [Y_2])$ si y sólo si $[X_1] + [Y_2] = [X_2] + [Y_1]$. Denotaremos a la clase de equivalencia de $([X], [Y]) \in B^+(G) \times B^+(G)$ por $[X] - [Y]$.

Definición 1.3.2. Definimos el *Anillo de Burnside* $B(G)$ de un grupo finito G como:

$$B(G) = \{[X] - [Y] : ([X], [Y]) \in B^+(G) \times B^+(G)\}$$

dotado de las siguientes operaciones binarias de suma y producto:

$$([X_1] - [Y_1]) + ([X_2] - [Y_2]) = ([X_1] + [X_2]) - ([Y_1] + [Y_2])$$
$$([X_1] - [Y_1])\,([X_2] - [Y_2]) = ([X_1][X_2] + [Y_1][Y_2]) - ([X_1][Y_2] + [X_2][Y_1])$$

Observación 12. $B(G)$ es el anillo de Grothendieck de $B^+(G)$, donde

i) El neutro de la suma es $[\emptyset] - [\emptyset] = [X] - [X]$ con $[X] \in B^+(G)$.

ii) Dado $[X] - [Y] \in B(G)$ su inverso aditivo es $[Y] - [X]$.

iii) En el producto la unidad es $[G/G] - [\emptyset]$.

Teorema 1.3.3. Dado un grupo finito G. Entonces $B(G)$ como grupo abeliano es libre como $\mathbb{Z}$-módulo, generado por los elementos de la forma $[G/H_i]$, donde H_i recorre un conjunto de representantes de $\mathscr{C}(G)$.

Demostración. Sea G un grupo finito y X un $G-$conjunto finito. Por el Teorema 1.1.2, $X \cong_G \bigsqcup_{i\in I} G/H_i$, donde $H_i \leq G$ para cada $i \in I$. Así,

$$[X] = \left[\bigsqcup_{i\in I} G/H_i\right] = \sum_{i\in I} [G/H_i] \in B^+(G).$$

Ahora, por el Lema 1.1.1 podemos tener repeticiones de algunos $[G/H_i]$, ya que $[G/H_i] = [G/H_j]$ si y sólo si $[H_i] = [H_j]$. Por lo que denotaremos con $a_{H_i} \in \mathbb{N}$ al número de veces que se repite el elemento $[G/H_i]$. En consecuencia, si $[X] \in B^+(G)$, entonces $[X] = \sum_{[H]\in\mathscr{C}(G)} a_H[G/H]$, con $a_H[G/H] \in \mathbb{N}[G/H] \subseteq B^+(G)$. Por lo que, abusando de la notación tenemos que los elementos de $B(G)$ son de la forma:

$$\sum_{[H]\in\mathscr{C}(G)} a_H[G/H], \text{ con } a_H[G/H] \in \mathbb{Z}[G/H] \subseteq B(G).$$

Ahora, sólo falta ver que esta expresión es única. Supongamos que

$$\sum_{[H]\in\mathscr{C}(G)} a_H[G/H] = 0$$

y que no todos los a_H son cero, así tenemos la siguiente igualdad en $B^+(G)$.

$$\sum_{a_K>0} a_K[G/K] = \sum_{a_L<0} (-a_L)[G/L].$$

Llamemos $[Y] = \sum_{a_K>0} a_K[G/K]$ y $[Z] = \sum_{a_L<0} (-a_L)[G/L]$. Ahora, si $[Y] = [\emptyset]$, entonces $\emptyset$ tendría una órbita distinta del vacío, lo que no es posible. De aquí que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $[Y] \neq [\emptyset]$ y $[Z] \neq [\emptyset]$. Entonces si $a_{K_0} > 0$ existe $\mathcal{O}_G(y_0) \subseteq Y$ tal que $\mathcal{O}_G(y_0) \cong_G G/K_0$. Por otro lado, $[Y] = [Z]$, entonces $\mathcal{O}_G(y_0) \cong_G \mathcal{O}_G(z_0)$ para algún $z_0 \in Z$ que a su vez $\mathcal{O}_G(z_0) \cong_G G/L_0$ para algún L_0 tal que $a_{L_0} < 0$, en consecuencia $G/K_0 \cong_G G/L_0$, así $[K_0] = [L_0]$, lo que no es posible. Por tanto,

$$B(G) = \bigoplus_{[H]\in\mathscr{C}(G)} \mathbb{Z}[G/H]$$

□

Observación 13. Hay una inclusión

$$\iota : B^+(G) \longrightarrow B(G) \text{ tal que } [X] \longmapsto [X] - [\emptyset].$$

Observación 14. Dados G un grupo finito, R un anillo conmutativo y

$$f : B^+(G) \longrightarrow R$$

un morfismo de semianillos, tenemos que f se extiende de manera única a $B(G)$; es decir, existe

$$F : B(G) \longrightarrow R$$

un morfismo de anillos tal que $F\big|_{B^+(G)} = f$. Además, F esta dada por:

$$F([X] - [Y]) = f([X]) - f([Y]).$$

Lema 1.3.1. Sea

$$\varphi : B^+(G) \longrightarrow \prod_{[H]\in\mathscr{C}(G)} \mathbb{Z} \text{ dada por } [X] \longmapsto \varphi([X]) = (\varphi_H(X))_{[H]\in\mathscr{C}(G)},$$

entonces φ es un morfismo inyectivo de semianillos. De aquí que, φ se extiende de manera única a un morfismo inyectivo de anillos:

$$\widetilde{\varphi} : B(G) \longrightarrow \prod_{[H]\in\mathscr{C}(G)} \mathbb{Z}.$$

DEMOSTRACIÓN. Observe que $\prod_{[H]\in\mathscr{C}(G)} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{|\mathscr{C}(G)|}$ es un anillo conmutativo con suma y producto definimos de manera usual (entrada a entrada).

Veamos que φ está bien definida. Sea $[X] \in B^+(G)$. Entonces $(\varphi_H(X))_{[H]\in\mathscr{C}(G)}$ no depende del representante de $[H]$ por el Teorema 1.2.1 inciso iii). Sea $[Y] \in B^+(G)$ tal que $[X] = [Y]$, esto implica que existe $f : X \to Y$ un isomorfismo de $G-$conjuntos. Sean $[H] \in \mathscr{C}(G)$ y $x \in X^H$ entonces $hx = x$ para toda $h \in H$, esto es equivale a que $hf(x) = f(x)$ para toda $h \in H$ y esto pasa si y sólo si $f(x) \in Y^H$. Por lo que tenemos la siguiente biyección

$$\begin{aligned} X^H &\longrightarrow Y^H \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

obteniendo que $\varphi_H(X) = \varphi_H(Y)$. Lo anterior se cumple para cada $[H] \in \mathscr{C}(G)$, de modo que $\varphi([X]) = (\varphi_H(X))_{[H]\in\mathscr{C}(G)} = (\varphi_H(Y))_{[H]\in\mathscr{C}(G)} = \varphi([Y])$. Por lo tanto φ está bien definida.
Recuerde que $1_{B(G)} = [G/G]$ y $1_{\mathbb{Z}^{|\mathscr{C}(G)|}} = \underbrace{(1, ..., 1)}_{|\mathscr{C}(G)|-\text{veces}}$.

Ahora, para cada $H \le G$ subgrupo, tenemos que $[H] \preceq [G]$, así $\varphi_H(G/G) \ne 0$, de modo que $\varphi_H(G/G) = 1$. Por tanto, $\varphi([G/G]) = (\varphi_H(G/G))_{[H]\in\mathscr{C}(G)} = \underbrace{(1, ..., 1)}_{|\mathscr{C}(G)|-\text{veces}}$.

De las propiedades de la marca, es fácil ver que φ preserva la suma y el producto (ver Teorema 1.2.1 inciso i) y ii)). Por lo tanto φ es un morfismo de semianillos.
Ahora veamos que φ es inyectiva. Recordemos que φ es inyectiva si y sólo si para cada $0 \ne a \in B^+(G)$, se tiene que $\varphi(a) \ne 0$.
Sea $a \in B^+(G)$ tal que $a \ne 0$, así $a = \sum_{[H]\in\mathscr{C}(G)} a_H[G/H]$ con $a_H \in \mathbb{N}$, donde no todos los a_H son cero. Puesto que G es finito, toda cadena estrictamente creciente $[K_1] \prec [K_2] \prec ...$ se estaciona. Elegimos $[K']$ máximo con respecto a este orden tal que $a_{K'} \ne 0$. Tenemos que

$$a = \sum_{[H]\in\mathscr{C}(G)} a_H\,[G/H] = \left[\bigsqcup_{i\in I} G/H_i\right],$$

donde $|I|$ es el número de órbitas y $H_i \le G$ para cada $i \in I$. Entonces

$$\varphi_{K'}\left(\bigsqcup_{i\in I} G/H_i\right) = \sum_{i\in I} \varphi_{K'}\,(G/H_i)\,.$$

Ahora, por la buena definición de φ tenemos que si $[G/H_i] = [G/H_j]$ entonces $\varphi_{K'}\,(G/H_i) = \varphi_{K'}\,(G/H_j)$ y esto ocurre si y sólo si $[H_i] = [H_j]$, por lo tanto

$$\varphi_{K'}\left(\bigsqcup_{i\in I} G/H_i\right) = \sum_{[H]\in\mathscr{C}(G)} a_H \varphi_{K'}\,(G/H)\,,$$

vease Teorema 1.3.3 .
Por otro lado sabemos que $\varphi_{K'}(G/H) \ne 0$ si y sólo si $[K'] \preceq [H]$ y puesto que elegimos $[K']$ máximo con respecto a este orden parcial tal que $a_{K'} \ne 0$, entonces

$$\varphi_{K'}\left(\bigsqcup_{i\in I} G/H_i\right) = a_{K'}\varphi_{K'}\,(G/K') = a_{K'}|N_G(K')/K'| \ne 0.$$

Así la coordenada $[K']-$ésima de $\varphi(a)$ es distinta de cero y esto implica $\varphi(a) \neq 0$. Por tanto φ es un morfismo inyectivo de semianillos.
Por último veamos que

$$\widetilde{\varphi} : B(G) \longrightarrow \prod_{[H]\in\mathscr{C}(G)} \mathbb{Z}$$

es inyectiva:
Sean $[X_1] - [Y_1],\ [X_2] - [Y_2] \in B(G)$ tales que

$$\widetilde{\varphi}([X_1] - [Y_1]) = \widetilde{\varphi}([X_2] - [Y_2])$$

lo cual ocurre si y sólo si

$$\begin{aligned} \varphi([X_1]) - \varphi([Y_1]) &= \varphi([X_2]) - \varphi([Y_2]) \\ \Leftrightarrow \varphi([X_1]) + \varphi([Y_2]) &= \varphi([X_2]) + \varphi([Y_1]) \\ \Leftrightarrow \quad \varphi([X_1] + [Y_2]) &= \varphi([X_2] + [Y_1]) \end{aligned}$$

y puesto que φ es inyectiva, entonces

$$[X_1] + [Y_2] = [X_2] + [Y_1]$$

obteniendo que

$$[X_1] - [Y_1] = [X_2] - [Y_2]$$

ver Observación 11. Por lo tanto $\widetilde{\varphi}$ es un morfismo inyectivo de anillos, ver Observación 14. □

Corolario 1.3.1. Sean G un grupo finito y X, Y dos $G-$conjuntos finitos, entonces $[X] = [Y]$ si y sólo si $\varphi_H(X) = \varphi_H(Y)$ para toda $[H] \in \mathscr{C}(G)$.

Demostración. El resultado es inmediato por la buena definición y la inyectividad de φ del lema anterior. □

Capítulo 2

Función zeta de $B(C_{p^3})$

2.1. *Función Zeta del Anillo de Burnside*

En el capítulo anterior se dierón algunos conceptos básicos y generales para el anillo de Burnside de un grupo G. Ahora, dado p un número primo, consideraremos a $C_{p^3} = \langle a \rangle$ un grupo cíclico de orden p^3, dicho esto, el objetivo principal de este capítulo será dar una forma explícita de la función zeta para $B(C_{p^3})$.

Definición 2.1.1. Sean R un dominio de Dedekind con campo de cocientes K y B una $K-$álgebra de dimensión finita. Entonces, para cualquier $K-$espacio de dimensión finita V, diremos que un $R-$submódulo L en V es una $R-$*retícula plena* en V si L es finitamente generado, y es tal que $KL = V$, donde

$$KL = \left\{ \sum \alpha_i l_i \text{ (suma finita)} : \alpha_i \in K,\, l_i \in L \right\}.$$

Definición 2.1.2. Sean R y B como en la Definición 2.1.1. Diremos que un subanillo Λ de B es un $R-$*orden* en B si el centro de Λ contiene a R, y además Λ es una $R-$retícula plena en B.

Definición 2.1.3. Sean R y K como en la Definición 2.1.1. Diremos que una $R-$retícula plena I es un *ideal fraccional* de R si I esta en K.

Observación 15. De la Definición 2.1.3, se puede ver que existe un elemento no cero $r \in R$, tal que $rI \subseteq R$.

Definición 2.1.4. Sean $p \in \mathbb{Z}$ un primo racional y $\mathbb{Z}_p$ el anillo de los enteros $p-$ádicos. Definimos los siguientes productos tensoriales por

$$B_p(G) = \mathbb{Z}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}} B(G) = \bigoplus_{[H]\in\mathscr{C}(G)} \mathbb{Z}_p \left(G/H\right)$$

y

$$\widetilde{B}_p(G) = \mathbb{Z}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{B}(G) = \prod_{[H]\in\mathscr{C}(G)} \mathbb{Z}_p.$$

Observación 16. $B_p(G)$ es un $\mathbb{Z}_p-$orden, siendo $\widetilde{B}_p(G)$ su orden máximo. Para más información sobre ordenes, ver [5, capítulos 2,3].

Observación 17. En adelante usaremos $(Y_1 : Y_2)$ como símbolo de índice en el siguiente sentido general: si Y_1 y Y_2 son $\mathbb{Z}_p-$retículas sobre el mismo $\mathbb{Q}_p-$espacio vectorial, entonces

$$(Y_1 : Y_2) = \frac{(Y_1 : Y_1 \cap Y_2)}{(Y_2 : Y_1 \cap Y_2)}.$$

Por tanto, este símbolo $(Y_1 : Y_2)$ lo definimos sin ambiguedad si Y_1 contiene o no a Y_2.

Definición 2.1.5. Sean A una álgebra semisimple de dimensión finita sobre $\mathbb{Q}_p$ el campo de los racionales $p-$ádicos para algún primo p, Λ un $\mathbb{Z}_p-$orden en A e I un ideal izquierdo de Λ tal que el índice $(\Lambda : I)$ es finito. Definimos la ***función Zeta de Solomon*** $\zeta_\Lambda(s)$ de Λ, como sigue:

$$\zeta_\Lambda(s) := \sum_{\substack{I \leq \Lambda, \text{ ideal izquierdo} \\ (\Lambda : I) < \infty}} (\Lambda : I)^{-s},$$

Observación 18. $\zeta_\Lambda(s)$ es una generelización de la clasica función Zeta de Dedekind $\zeta_{\mathcal{K}}(s)$ de un campo de números algebraicos $\mathcal{K}$. Además, para los anillos conmutativos $B_p(G)$ and $\widetilde{B}_p(G)$, la suma corre sobre todos los ideales de índice finito y converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 1\}$. Para más información, ver [8].

Observación 19. Sean los $\mathbb{Z}$-ordenes Λ y Λ_i para $i = 1, ..., n$ y el $\mathbb{Z}_p$-orden $\Lambda_p = \mathbb{Z}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$. Entonces, se puede ver que la función $\zeta_\Lambda(s)$ satisface las siguientes propiedades:

i) Si $\Lambda = \prod_{i=1}^{n} \Lambda_i$, entonces $\zeta_\Lambda(s) = \prod_{i=1}^{n} \zeta_{\Lambda_i}(s)$.

ii) $\zeta_\Lambda(s) = \prod_{p-\text{primo}} \zeta_{\Lambda_p}(s)$, el producto de Euler.

Para más información sobre la función zeta de Solomon, ver [8].

Teorema 2.1.1. Sean G un grupo finito y $B(G)$ su anillo de Burnside. Si $q \in \mathbb{Z}$ es un número primo, entonces

$$\zeta_{B_q(G)}(s) = f_G\left(q^{-s}\right) \zeta_{\widetilde{B}_q(G)}(s),$$

donde $f_G(q^{-s})$ es un polinomio en $\mathbb{Z}[p^{-s}]$. Ver [8, Teorema 1].

Observación 20. Si q no divide $|G|$, entonces $B_q(G) = \widetilde{B}_q(G)$, y concluimos que $f_G(q^{-s}) = 1$ cuando q no divide a $|G|$.

En adelante consideraremos a A y Λ como en la Definición 2.1.5.

Definición 2.1.6. Sea M una $\Lambda-$retícula plena en A. Definimos la *función Zeta* $Z_{\Lambda}(M;s)$, como sigue:

$$Z_{\Lambda}(M;s)=\sum(\Lambda:N)^{-s},$$

donde la suma corre sobre todas las $\Lambda-$subretículas plenas N en A, tales que $N,\ M$ estan en la misma clase de isomorfismo. Por lo que podemos expresar

$$\zeta_{\Lambda}(s)=\sum_{M}Z_{\Lambda}(M;s),$$

donde la suma corre sobre un conjunto de representantes de todas las clases de isomorfismo de las $\Lambda-$retículas plenas en A.

Definición 2.1.7. Sean M como en la Definición 2.1.6. Definimos el *conductor* de M en Λ, como sigue:

$$\{M:\Lambda\}=\{x\in A:Mx\subseteq\Lambda\}.$$

Observación 21. Sea $\Phi_{\{M:\Lambda\}}$ la funcíon característica en A de $\{M:\Lambda\}$. Ahora, elegimos la medida de Haar $d^{*}x$ sobre el grupo de unidades A^{*}. Para conjuntos medibles $E\subset A$, $E'\subset A^{*}$, es conveniente escribir

$$\mu(E)=\int_{E}dx,\qquad \mu^{*}(E')=\int_{E'}d^{*}x.$$

Tenemos que:

$$Z_{\Lambda}(M;s)=\mu^{*}(\mathrm{Aut}_{\Lambda}M)^{-1}(\Lambda:M)^{-s}\int_{x\in A^{*}}\Phi_{\{M:\Lambda\}}(x)\left\|x\right\|_{A}^{s}d^{*}x,$$

donde $\left\|x\right\|_{A}=(Lx:L)$, para $x\in A^{*}$, la cual es independiente de la elección de la $\mathbb{Z}_{p}-$retícula plena L en A, y observamos que es multiplicativa. Más aún, se puede ver que $\left\|x\right\|_{A}=1$ siempre que x sea una unidad en algún $\mathbb{Z}_{p}-$orden en A. Para más información de este resultado, ver [3, 2.1 El caso local, pp 138-139].

Observación 22. Ahora, asumimos que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[d, "g_2"] \\ A_1 \arrow[r, "g_1"'] & \overline{A} \end{tikzcd}$$

es un diagrama de producto fibrado (pullback) de anillos, donde todos son morfismos sobreyectivos de anillos. Entonces, por Definición

$$A=\{(a_1,a_2):\ a_i\in A_i \text{ para } \ i=1,2 \ \text{ y } \ g_1(a_1)=g_2(a_2)\}.$$

Luego, sea $I \leq A$ e $I_i \leq A_i$ ideales izquierdos, tales que $I_i = f_i(I)$ para $i = 1, 2$. Sea A_2 un DIP. Entonces $I_2 = A_2\beta$ para algún $\beta \in A_2$. Sea $\alpha \in I_1$ tal que $(\alpha, \beta) \in I$. Sea $J = \{c \in A_1 : (c, 0) \in I\}$, un ideal de A_1. Tenemos que:

$$I = A(\alpha, \beta) + (J, 0)$$

el cual esta determinado por:

1. Un generador β de un ideal principal $A_2\beta$ de A_2.
2. Un ideal $J \leq A_1$ tal que $g_1(J) = 0$.
3. Un elemento $\alpha \in A_1$ tal que $g_1(\alpha) = g_2(\beta)$. Claramente, α esta determinado de manera única mod J.
4. Sea $D = \{a \in A : \ f_2(a)\beta = 0\}$ el cual es un ideal de A. Entonces
$$f_1(D)\alpha \subseteq J.$$

Para más detalles de este resultado, vease [3].

2.2. *Clases de Isomorfismo de los ideales fraccionales de* $B_p(C_{p^3})$

Sea $B_p(C_{p^3})$ el anillo de Burnside de un grupo cíclico de orden p^3. Entonces tenemos que las clases de conjugación de C_{p^3} son:

$$\mathscr{C}(C_{p^3}) = \left\{ \langle a \rangle, \langle a^p \rangle, \left\langle a^{p^2} \right\rangle, \left\langle a^{p^3} \right\rangle \right\}.$$

Luego, consideremos el siguiente conjunto:

$$\left\{ a_0 = C_{p^3} \diagup \langle a \rangle,\ a_1 = C_{p^3} \diagup \langle a^p \rangle,\ a_2 = C_{p^3} \diagup \left\langle a^{p^2} \right\rangle,\ a_3 = C_{p^3} \diagup \left\langle a^{p^3} \right\rangle \right\}.$$

Entonces por el Teorema 1.3.3 y por la Definición 2.1.4, tenemos que

$$B_p(C_{p^3}) = \bigoplus_{i=0}^{3} a_i \mathbb{Z}_p.$$

Más aún, $\widetilde{B}_p(C_{p^3}) = \mathbb{Z}_p^4$ es su orden máximo. Por otro lado, sabemos que

$$\varphi_H(G/K) = \begin{cases} |G/K| & \text{para H} \subseteq \text{K} \\ 0 & \text{para H} \nsubseteq \text{K} \end{cases},$$

así φ induce la siguiente inclusión.

$$\begin{array}{ccc} B_p(C_{p^3}) & \overset{\varphi}{\hookrightarrow} & \mathbb{Z}_p^4 \\ X & \longmapsto & (\varphi_H(X))_{[H]\in\mathscr{C}(G)} \\ & & \\ a_0 & \longmapsto & (1,1,1,1) \\ a_1 & \longmapsto & (0,p,p,p) \\ a_2 & \longmapsto & (0,0,p^2,p^2) \\ a_3 & \longmapsto & (0,0,0,p^3). \end{array}$$

Por tanto, podemos ver a $B_p\left(C_{p^3}\right)$ en $\widetilde{B}_p\left(C_{p^3}\right)$ como sigue:

$$B_p\left(C_{p^3}\right)=\left\{(u_0,u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{Z}_p^4\colon\ (u_1-u_0)\in p\mathbb{Z}_p,\ (u_2-u_1)\in p^2\mathbb{Z}_p,\ (u_3-u_2)\in p^3\mathbb{Z}\right\}$$

similarmente, se tiene que

$$B_p\left(C_{p^2}\right)=\left\{(u_0,u_1,u_2)\in\mathbb{Z}_p^3\colon\ (u_1-u_0)\in p\mathbb{Z}_p\ (u_2-u_1)\in p^2\mathbb{Z}_p\right\}\subseteq\mathbb{Z}_p^3$$

para el cual, podemos dar la siguiente estructura de producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
(u_0,u_1,u_2,u_3) \arrow[rrr, mapsto, dashed] \arrow[ddd, mapsto, dashed] & & & u_3 \arrow[ddd, mapsto, dashed] \\
& B_p(C_{p^3}) \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & \mathbb{Z}_p \arrow[d, "g_2"] & \\
& B_p(C_{p^2}) \arrow[r, "g_1"'] & \mathbb{Z}_p/p^3\mathbb{Z}_p & \\
(u_0,u_1,u_2) \arrow[rrr, mapsto, dashed] & & & \overline{u_2}=\overline{u_3}
\end{tikzcd}$$

Ahora, observamos que $\mathbb{Z}_p$ es un DIP. Por tanto, sus ideales son de la forma $p^t\mathbb{Z}_p$, para algún entero $t\geq 0$, y de acuerdo a la estructura de producto fibrado, tenemos que los ideales de índice finito en $B_p\left(C_{p^3}\right)$ son ideales de la forma

$$I=(\alpha,p^t)\,B_p\left(C_{p^3}\right)+(J,0)\,, \tag{I}$$

donde α es un elemento de un ideal de $B_p\left(C_{p^2}\right)$ y $J\leq B_p\left(C_{p^2}\right)$ es un ideal tal que:
1) $g_1\left(J\right)=0,$
2) $g_1\left(\alpha\right)=g_2\left(p^t\right)$, donde α está determinado de manera única mod J y
3) si $D=p\mathbb{Z}_p\times p^2\mathbb{Z}_p\times p^3\mathbb{Z}_p\times\{0\}$, entonces $f_1\left(D\right)\alpha\subseteq J.$

Sea $F_p=\{0,1,...,p-1\}$ y $F_p^*=\{1,...,p-1\}$, por [9] sabemos que los ideales de índice finito en $B_p\left(C_{p^2}\right)$ son:

$J_1=\left(p^m,\ p^k,\ p^l\right)\mathbb{Z}_p^3$ para $m\geq 1$, $k\geq 2$, y $l\geq 2$.

$J_2=\left(p^m,\ p^k w_1,\ p^l\right)\left\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_p^3\colon\ (y-x)\in p\mathbb{Z}_p\right\}$ para $m\geq 1$, $k\geq 2$, $l\geq 2$, y $w_1\in F_p^*$.

$J_3=\left(p^m w_0,\ p^k,\ p^l\right)\left\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_p^3\colon\ (z-x)\in p\mathbb{Z}_p\right\}$ para $m\geq 1$, $k\geq 2$, $l\geq 2$, y $w_0\in F_p^*$.

$J_4=\left(p^m,\ p^k w_1,\ p^l\right)\left\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_p^3\colon\ (z-y)\in p\mathbb{Z}_p\right\}$ para los siguientes casos:
i) $m\geq 1$, $k=l=1$ y $w_1=1$.
ii) $m\geq 1$, $k\geq 2$, $l\geq 2$, y $w_1\in F_p^*$.

$J_5=\left(p^m,\ p^k\left(w_1+pw_2\right),\ p^l\right)\left\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_p^3\colon\ (z-y)\in p^2\mathbb{Z}_p\right\}$ para los siguientes casos:
i) $m\geq 1$, $k=l=1$, $w_2\in F_p$ y $w_1=1$.
ii) $m\geq 1$, $k\geq 2$, $l\geq 2$, $w_1\in F_p^*$ y $w_2\in F_p$.

$J_6 = \left(p^m w_0,\ p^k w_1,\ p^l\right) \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3\colon\ (y-x) \in p\mathbb{Z}_p,\ (z-y) \in p\mathbb{Z}_p\right\}$ para los siguientes casos:
i) $m \geq 1,\ k = l = 1,\ w_0 \in F_p^*$ y $w_1 = 1$.
ii) $m \geq 1,\ k \geq 2,\ l \geq 2,$ y $w_0, w_1 \in F_p^*$.

$J_7 = \left(p^m w_0,\ p^k (w_1 + p w_2),\ p^l\right) B_p \left(C_{p^2}\right)$ para los siguientes casos:
i) $m = k = l = 0,\ w_0 = w_1 = 1$ y $w_2 = 0$.
ii) $m \geq 1,\ k = l = 1,\ w_0 \in F_p^*,\ w_2 \in F_p$ y $w_1 = 1$.
iii) $m \geq 1,\ k \geq 2,\ l \geq 2,\ w_0, w_1 \in F_p^*$ y $w_2 \in F_p$.

$J_8 = \left(p^m,\ p^k w_1,\ p^l w_2\right) \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3\colon x - y + z \in p\mathbb{Z}_p\right\}$ para $m \geq 1,\ k \geq 2,\ l \geq 2,$ y $w_1, w_2 \in F_p^*$.

$J_9 = \left(p^m w_0,\ p^k,\ p^l w_0 (w_1 + p w_2)^{-1}\right) \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_p^3 : px - y + z \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}$ para los siguientes casos:
i) $m \geq 1,\ k = l = 1,\ w_0 \in F_p^*,\ w_2 \in F_p$ y $w_1 = w_0$.
ii) $m \geq 1,\ k \geq 2,\ l \geq 2,\ w_0, w_1 \in F_p^*$ y $w_2 \in F_p$.

Ahora, sólo basta estudiar (I) para los nueve casos anteriores. Denotamos a $B_p\left(C_{p^3}\right)$ por B.

1) A partir de (I), para J_1 obtenemos los siguientes ideales de íncide finito en B :

$$(\alpha_1,\ p^r)\, B + (J_1, 0) \ \text{ donde:}$$

$$\alpha_1 = \left(p^{m-1} a_0,\ p^{k-2} (a_1 + p a_2),\ p^{l-3} \left(a_3 + p a_4 + p^2 a_5\right)\right) \in B_p\left(C_{p^2}\right),$$

para $m \geq 1,\ k \geq 2,\ l \geq 3$ y $a_i \in F_p$ para $i \in \{0, .., 5\}$.

Más aún, tenemos que:

$$p^{l-3}\left(a_3 + p a_4 + p^2 a_5\right) \equiv p^r \bmod \left(p^3\mathbb{Z}_p\right),\ \text{ donde } r \geq 0.$$

A partir de estos ideales, obtenemos la siguiente lista de ideales fraccionales de B :

$\boldsymbol{M_1 = B}$
$= \left\langle (1,1,1,1), (0,p,p,p), (0,0,p^2,p^2), (0,0,0,p^3) \right\rangle$
$\{M_1 : B\} = B,\ \ \mathrm{Aut}_B M_1 = B^*$ y $(B : M_1)^{-s} = 1$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : B^*\right) = p^3 (p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : B\right) = p^6$
— —
$\boldsymbol{M_2 = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w-v) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \left\langle (1,0,0,0), (0,p^2,0,0), (0,1,1,1), (0,0,0,p^3) \right\rangle$
$\{M_2 : B\} = (p,p,p,p)\, M_8,\ \ \mathrm{Aut}_B M_2 = M_2^*$ y $(B : M_2)^{-s} = p^s$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_2^*\right) = p^3 (p-1)^2,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_2\right) = p^5$
— —
$\boldsymbol{M_3 = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w-u), (w-v) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \left\langle (p,0,0,0), (0,p,0,0), (1,1,1,1), (0,0,0,p^3) \right\rangle$
$\{M_3 : B\} = (p,p,p,p)\, M_8,\ \ \mathrm{Aut}_B M_3 = M_3^*$ y $(B : M_3)^{-s} = p^s$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_3^*\right) = p^2 (p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_3\right) = p^5$
— —
$\boldsymbol{M_4 = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (w-v) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \left\langle (1,0,0,0), (0,p,0,0), (0,1,1,1), (0,0,0,p^3) \right\rangle$
$\{M_4 : B\} = (p,p,p,p)\, M_8,\ \ \mathrm{Aut}_B M_4 = M_4^*$ y $(B : M_4)^{-s} = p^{2s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_4^*\right) = p^2 (p-1)^2,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_4\right) = p^4$
— —

$\boldsymbol{M_5 = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (w-u) \in p\mathbb{Z}_p, \ (w-v), (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (p,0,0,0), (0,p^2,0,0), (1,1,1,1), (0,0,0,p^2) \rangle$
$\{M_5 : B\} = (p,p,p,p)\, M_8, \ \ \mathrm{Aut}_B M_5 = M_5^*$ y $(B : M_5)^{-s} = p^s$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_5^* \right) = p^2(p-1)^3, \ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_5\right) = p^5$
— —

$\boldsymbol{M_6 = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (w-v), (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,0,0), (0,p^2,0,0), (0,1,1,1), (0,0,0,p^2) \rangle$
$\{M_6 : B\} = (p,p,p,p)\, M_8, \ \ \mathrm{Aut}_B M_6 = M_6^*$ y $(B : M_6)^{-s} = p^{2s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_6^* \right) = p^2(p-1)^2, \ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_6\right) = p^4$
— —

$\boldsymbol{M_7 = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (w-u), (w-v) \in p\mathbb{Z}_p, \ (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (p,0,0,0), (0,p,0,0), (1,1,1,1), (0,0,0,p^2) \rangle$
$\{M_7 : B\} = (p,p,p,p)\, M_8, \ \ \mathrm{Aut}_B M_7 = M_7^*$ y $(B : M_7)^{-s} = p^{2s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_7^* \right) = p(p-1)^3, \ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_7\right) = p^4$
— —

$\boldsymbol{M_8 = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (w-v) \in p\mathbb{Z}_p, \ (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,0,0), (0,p,0,0), (0,1,1,1), (0,0,0,p^2) \rangle$
$\{M_8 : B\} = (p,p,p,p)\, M_8, \ \ \mathrm{Aut}_B M_8 = M_8^*$ y $(B : M_8)^{-s} = p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_8^* \right) = p(p-1)^2, \ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_8\right) = p^3$
— —

$\boldsymbol{M_9 = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (w-u) \in p\mathbb{Z}_p, \ (t-w) \in p^3\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (p,0,0,0), (0,1,0,0), (1,0,1,1), (0,0,0,p^3) \rangle$
$\{M_9 : B\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_9 = M_9^*$ y $(B : M_9)^{-s} = p^{2s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_9^* \right) = p^2(p-1)^2, \ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_9\right) = p^4$
— —

$\boldsymbol{M_{10} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (t-w) \in p^3\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,1), (0,0,0,p^3) \rangle$
$\{M_{10} : B\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{10} = M_{10}^*$ y $(B : M_{10})^{-s} = p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{10}^* \right) = p^2(p-1), \ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{10}\right) = p^3$
— —

$\boldsymbol{M_{11} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (w-u) \in p\mathbb{Z}_p, \ (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (p,0,0,0), (0,1,0,0), (1,0,1,1), (0,0,0,p^2) \rangle$
$\{M_{11} : B\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{11} = M_{11}^*$ y $(B : M_{11})^{-s} = p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{11}^* \right) = p(p-1)^2, \ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{11}\right) = p^3$
— —

$\boldsymbol{M_{12} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,1), (0,0,0,p^2) \rangle$
$\{M_{12} : B\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{12} = M_{12}^*$ y $(B : M_{12})^{-s} = p^{4s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{12}^* \right) = p(p-1), \ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{12}\right) = p^2$
— —

$\boldsymbol{M_{13} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (w-u), (w-v), (t-w) \in p\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (p,0,0,0), (0,p,0,0), (1,1,1,1), (0,0,0,p) \rangle$
$\{M_{13} : B\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{13} = M_{13}^*$ y $(B : M_{13})^{-s} = p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{13}^* \right) = (p-1)^3, \ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{13}\right) = p^3$
— —

$\boldsymbol{M_{14} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : (w-v), (t-w) \in p\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,0,0), (0,p,0,0), (0,1,1,1), (0,0,0,p) \rangle$
$\{M_{14} : B\} = (p, p^2, p^2, p^2)\, M_{16}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{14} = M_{14}^*$ y $(B : M_{14})^{-s} = p^{4s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{14}^* \right) = (p-1)^2, \ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{14}) = p^2$

$\boldsymbol{M_{15} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : (w-u), (t-w) \in p\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (p,0,0,0), (0,1,0,0), (1,0,1,1), (0,0,0,p) \rangle$
$\{M_{15} : B\} = (p, p^2, p^2, p^2)\, M_{16}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{15} = M_{15}^*$ y $(B : M_{15})^{-s} = p^{4s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{15}^* \right) = (p-1)^2, \ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{15}) = p^2$

$\boldsymbol{M_{16} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : (t-w) \in p\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,1), (0,0,0,p) \rangle$
$\{M_{16} : B\} = (p, p^2, p^2, p^2)\, M_{16}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{16} = M_{16}^*$ y $(B : M_{16})^{-s} = p^{5s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{16}^* \right) = (p-1), \ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{16}) = p$

$\boldsymbol{M_{17} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : (v-u), (w-v) \in p\mathbb{Z}_p, \ (t-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \left\langle (p,0,0,0), (1,1,1,1), (0,0,p,0), (0,0,0,p^2) \right\rangle$
$\{M_{17} : B\} = (p, p^2, p^2, p^2)\, M_{16}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{17} = M_{17}^*$ y $(B : M_{17})^{-s} = p^{2s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{17}^* \right) = p(p-1)^3, \ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{17}) = p^4$

$\boldsymbol{M_{18} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : (w-v) \in p\mathbb{Z}_p, \ (t-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \left\langle (1,0,0,0), (0,1,1,1), (0,0,p,0), (0,0,0,p^2) \right\rangle$
$\{M_{18} : B\} = (p, p^2, p^2, p^2)\, M_{16}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{18} = M_{18}^*$ y $(B : M_{18})^{-s} = p^{3s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{18}^* \right) = p(p-1)^2, \ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{18}) = p^3$

$\boldsymbol{M_{19} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : (v-u) \in p\mathbb{Z}_p, \ (t-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \left\langle (p,0,0,0), (1,1,0,1), (0,0,1,0), (0,0,0,p^2) \right\rangle$
$\{M_{19} : B\} = (p, p^2, p^3, p^3)\, M_{24}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{19} = M_{19}^*$ y $(B : M_{19})^{-s} = p^{3s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{19}^* \right) = p(p-1)^2, \ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{19}) = p^3$

$\boldsymbol{M_{20} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : (t-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \left\langle (1,0,0,0), (0,1,0,1), (0,0,1,0), (0,0,0,p^2) \right\rangle$
$\{M_{20} : B\} = (p, p^2, p^3, p^3)\, M_{24}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{20} = M_{20}^*$ y $(B : M_{20})^{-s} = p^{4s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{20}^* \right) = p(p-1), \ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{20}) = p^2$

$\boldsymbol{M_{21} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : (v-u), (t-v) \in p\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (p,0,0,0), (1,1,0,1), (0,0,1,0), (0,0,0,p) \rangle$
$\{M_{21} : B\} = (p, p^2, p^3, p^3)\, M_{24}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{21} = M_{21}^*$ y $(B : M_{21})^{-s} = p^{4s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{21}^* \right) = (p-1)^2, \ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{21}) = p^2$

$\boldsymbol{M_{22} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : (t-v) \in p\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,0,0), (0,1,0,1), (0,0,1,0), (0,0,0,p) \rangle$
$\{M_{22} : B\} = (p, p^2, p^3, p^3)\, M_{24}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{22} = M_{22}^*$ y $(B : M_{22})^{-s} = p^{5s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{22}^* \right) = (p-1), \ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{22}) = p$

$\boldsymbol{M_{23} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (t-u) \in p\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,p) \rangle$
$\{M_{23} : B\} = \left(p, p^2, p^3, p^3\right) M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{23} = M_{23}^*$ y $(B : M_{23})^{-s} = p^{5s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{23}^*\right) = (p-1),\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{23}\right) = p$
– –
$\boldsymbol{M_{24} = \mathbb{Z}_p^4}$
$= \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$
$\{M_{24} : B\} = \left(p, p^2, p^3, p^3\right) M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{24} = M_{24}^*$ y $(B : M_{24})^{-s} = p^{6s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{24}^*\right) = 1,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{24}\right) = 1$
– –

2) A partir de (I), para J_2 obtenemos los siguientes ideales de íncide finito en B :

$$(\alpha_2,\ p^r)\, B + (J_2, 0)$$

donde:
$$\alpha_2 = \left(p^m a_0,\ p^{k-1} w_1 \left(a_1 + p a_2\right),\ p^{l-3}\left(a_3 + p a_4 + p^2 a_5\right)\right) \in B_p\left(C_{p^2}\right),$$
para $m \geq 1$, $k \geq 2$, $l \geq 3$, $w_1 \in F_p^*$ y $a_i \in F_p$ para $i \in \{0,..,5\}$. Más aún, tenemos que:

$$p^{l-3}\left(a_3 + p a_4 + p^2 a_5\right) \equiv p^r \bmod \left(p^3 \mathbb{Z}_p\right),\ \text{donde } r \geq 1.$$

A partir de estos ideales, obtenemos la siguiente lista de ideales fraccionales de B :

$\boldsymbol{M_{25} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu - v + t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^3\mathbb{Z}_p\}}$
$= \left\langle (1,p,0,0), (0,p^2,0,0), (0,0,p^3,0), (0,1,1,1) \right\rangle$
$\{M_{25} : B\} = (p,p,p,p)\, M_8,\ \ \mathrm{Aut}_B M_{25} = B^*$ y $(B : M_{25})^{-s} = p^{s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : B^*\right) = p^3(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{25}\right) = p^5$
– –
$\boldsymbol{M_{26} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu - v + t),(t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \left\langle (1,p,0,0), (0,p^2,0,0), (0,0,p^2,0), (0,1,1,1) \right\rangle$
$\{M_{26} : B\} = (p,p,p,p)\, M_8,\ \ \mathrm{Aut}_B M_{26} = M_5^*$ y $(B : M_{26})^{-s} = p^{2s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_5^*\right) = p^2(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{26}\right) = p^4$
– –
$\boldsymbol{M_{27} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u - v + t) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^3\mathbb{Z}_p\}}$
$= \left\langle (1,1,0,0), (0,p,0,0), (0,0,p^3,0), (0,1,1,1) \right\rangle$
$\{M_{27} : B\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{27} = M_3^*$ y $(B : M_{27})^{-s} = p^{2s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_3^*\right) = p^2(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{27}\right) = p^4$
– –
$\boldsymbol{M_{28} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-u) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^3\mathbb{Z}_p\}}$
$= \left\langle (1,1,0,0), (0,p,0,0), (0,0,1,1), (0,0,0,p^3) \right\rangle$
$\{M_{28} : B\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{28} = M_{28}^*$ y $(B : M_{28})^{-s} = p^{2s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{28}^*\right) = p^2(p-1)^2,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{28}\right) = p^4$
– –
$\boldsymbol{M_{29} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u - v + t) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \left\langle (1,1,0,0), (0,p,0,0), (0,0,p^2,0), (0,1,1,1) \right\rangle$
$\{M_{29} : B\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{29} = M_7^*$ y $(B : M_{29})^{-s} = p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_7^*\right) = p(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{29}\right) = p^3$

$-----------------------------------$

$\boldsymbol{M_{30} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-u) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \left\langle (1,1,0,0),(0,p,0,0),(0,0,p^2,0),(0,0,1,1)\right\rangle$
$\{M_{30} : B\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{30} = M_{30}^*$ y $(B : M_{30})^{-s} = p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{30}^*\right) = p(p-1)^2,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{30}\right) = p^3$

$-----------------------------------$

$\boldsymbol{M_{31} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu-v+t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t-w) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \left\langle (1,p,0,0),(0,p^2,0,0),(0,0,p,0),(0,1,1,1)\right\rangle$
$\{M_{31} : B\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{31} = M_{17}^*$ y $(B : M_{31})^{-s} = p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{17}^*\right) = p(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{31}\right) = p^3$

$-----------------------------------$

$\boldsymbol{M_{32} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-v+t)\,,(t-w) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \langle (1,1,0,0),(0,p,0,0),(0,0,p,0),(0,1,1,1)\rangle$
$\{M_{32} : B\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{32} = M_{13}^*$ y $(B : M_{32})^{-s} = p^{4s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{13}^*\right) = (p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{32}\right) = p^2$

$-----------------------------------$

$\boldsymbol{M_{33} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-v)\,,(t-w) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \langle (1,1,0,0),(0,p,0,0),(0,0,p,0),(0,0,1,1)\rangle$
$\{M_{33} : B\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{33} = M_{33}^*$ y $(B : M_{33})^{-s} = p^{4s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{33}^*\right) = (p-1)^2,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{33}\right) = p^2$

$-----------------------------------$

$\boldsymbol{M_{34} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu-v+t) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \left\langle (1,p,0,0),(0,p^2,0,0),(0,0,1,0),(0,1,0,1)\right\rangle$
$\{M_{34} : B\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{34} = M_{19}^*$ y $(B : M_{34})^{-s} = p^{4s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{19}^*\right) = p(p-1)^2,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{34}\right) = p^2$

$-----------------------------------$

$\boldsymbol{M_{35} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-v+t) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \langle (1,1,0,0),(0,p,0,0),(0,0,1,0),(0,1,0,1)\rangle$
$\{M_{35} : B\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{35} = M_{21}^*$ y $(B : M_{35})^{-s} = p^{5s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{21}^*\right) = (p-1)^2,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{35}\right) = p$

$-----------------------------------$

$\boldsymbol{M_{36} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u-v) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \langle (1,1,0,0),(0,p,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle$
$\{M_{36} : B\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{36} = M_{36}^*$ y $(B : M_{36})^{-s} = p^{5s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{36}^*\right) = (p-1),\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{36}\right) = p$

$-----------------------------------$

3) A partir de (I), para J_3 obtenemos los siguientes ideales de íncide finito en B :

$$(\alpha_3,\ p^r)\,B + (J_3,0)\ \text{ donde:}$$

$$\alpha_3 = \left(p^m w_0 a_0,\ p^{k-2}\left(a_1+pa_2\right),\ p^{l-2}\left(a_3+pa_4+p^2a_5\right)\right) \in B_p\left(C_{p^2}\right),$$

para $m \geq 1$, $k \geq 2$, $l \geq 3$, $w_0 \in F_p^*$ y $a_i \in F_p$ para $i \in \{0,..,5\}$. Más aún, tenemos que:

$$p^{l-2}\left(a_3+pa_4+p^2a_5\right) \equiv p^r \bmod \left(p^3\mathbb{Z}_p\right),\ \text{ donde } r \geq 1.$$

A partir de estos ideales, obtenemos la siguiente lista de ideales fraccionales de B :

$\boldsymbol{M_{37} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (p^2u - w + t) \in p^3\mathbb{Z}_p,\ (t-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,p^2,0), (0,p^2,0,0), (0,0,p^3,0), (0,1,1,1) \rangle$
$\{M_{37} : B\} = (p,p,p,p)\, M_8,\ \ \mathrm{Aut}_B M_{37} = B^*$ y $(B : M_{37})^{-s} = p^s$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : B^* \right) = p^3(p-1)^3,\ \ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{37}) = p^5$
− −
$\boldsymbol{M_{38} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (p^2u - w + t) \in p^3\mathbb{Z}_p,\ (t-v) \in p\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,p^2,0), (0,p,0,0), (0,0,p^3,0), (0,1,1,1) \rangle$
$\{M_{38} : B\} = (p,p,p,p)\, M_8,\ \ \mathrm{Aut}_B M_{38} = M_3^*$ y $(B : M_{38})^{-s} = p^{2s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_3^* \right) = p^2(p-1)^3,\ \ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{38}) = p^4$
− −
$\boldsymbol{M_{39} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (p^2u - w + t) \in p^3\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,p^2,0), (0,1,0,0), (0,0,p^3,0), (0,0,1,1) \rangle$
$\{M_{39} : B\} = (p,p^2,p^2,p^2)\, M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{39} = M_9^*$ y $(B : M_{39})^{-s} = p^{3s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_9^* \right) = p^2(p-1)^2,\ \ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{39}) = p^3$
− −
$\boldsymbol{M_{40} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu - w + t), (t-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,p,0), (0,p^2,0,0), (0,0,p^2,0), (0,1,1,1) \rangle$
$\{M_{40} : B\} = (p,p^2,p^2,p^2)\, M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{40} = M_5^*$ y $(B : M_{40})^{-s} = p^{2s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_5^* \right) = p^2(p-1)^3,\ \ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{40}) = p^4$
− −
$\boldsymbol{M_{41} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu - w + t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t-v) \in p\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,p,0), (0,p,0,0), (0,0,p^2,0), (0,1,1,1) \rangle$
$\{M_{41} : B\} = (p,p^2,p^2,p^2)\, M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{41} = M_7^*$ y $(B : M_{41})^{-s} = p^{3s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_7^* \right) = p(p-1)^3,\ \ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{41}) = p^3$
− −
$\boldsymbol{M_{42} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu - w + t) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,p,0), (0,1,0,0), (0,0,p^2,0), (0,0,1,1) \rangle$
$\{M_{42} : B\} = (p,p^2,p^2,p^2)\, M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{42} = M_{11}^*$ y $(B : M_{42})^{-s} = p^{4s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{11}^* \right) = p(p-1)^2,\ \ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{42}) = p^2$
− −
$\boldsymbol{M_{43} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u - w + t) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,1,0), (0,p^2,0,0), (0,0,p,0), (0,1,1,1) \rangle$
$\{M_{43} : B\} = (p,p^2,p^3,p^3)\, M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{43} = M_{17}^*$ y $(B : M_{43})^{-s} = p^{3s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{17}^* \right) = p(p-1)^3,\ \ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{43}) = p^3$
− −
$\boldsymbol{M_{44} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u - w) \in p\mathbb{Z}_p,\ (t-v) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,1,0), (0,p^2,0,0), (0,0,p,0), (0,1,0,1) \rangle$
$\{M_{44} : B\} = (p,p^2,p^3,p^3)\, M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{44} = M_{44}^*$ y $(B : M_{44})^{-s} = p^{3s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{44}^* \right) = p(p-1)^2,\ \ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{44}) = p^3$
− −
$\boldsymbol{M_{45} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (u - w + t), (t-v) \in p\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,1,0), (0,p,0,0), (0,0,p,0), (0,1,1,1) \rangle$
$\{M_{45} : B\} = (p,p^2,p^3,p^3)\, M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{45} = M_{13}^*$ y $(B : M_{45})^{-s} = p^{4s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{13}^* \right) = (p-1)^3,\ \ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{45}) = p^2$
− −

$\boldsymbol{M_{46}=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (u-w)\,,(t-v)\in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$=\langle(1,0,1,0),(0,p,0,0),(0,0,p,0),(0,1,0,1)\rangle$
$\{M_{46}:B\}=\left(p,p^2,p^3,p^3\right)M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{46}=M_{46}^*$ y $(B:M_{46})^{-s}=p^{4s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_{46}^*\right)=(p-1)^2,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{46}\right)=p^2$
— —
$\boldsymbol{M_{47}=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (u-w+t)\in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$=\langle(1,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,p,0),(0,0,1,1)\rangle$
$\{M_{47}:B\}=\left(p,p^2,p^3,p^3\right)M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{47}=M_{15}^*$ y $(B:M_{47})^{-s}=p^{5s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_{15}^*\right)=(p-1)^2,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{47}\right)=p$
— —
$\boldsymbol{M_{48}=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (u-w)\in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$=\langle(1,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,p,0),(0,0,0,1)\rangle$
$\{M_{48}:B\}=\left(p,p^2,p^3,p^3\right)M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{48}=M_{48}^*$ y $(B:M_{48})^{-s}=p^{5s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_{48}^*\right)=(p-1),\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{48}\right)=p$
— —

4) A partir de (I), para J_4 obtenemos los siguientes ideales de íncide finito en B :

$$(\alpha_4,\ p^r)\,B+(J_4,0)\ \text{ donde:}$$

$$\alpha_4=\left(p^{m-1}a_0,\ p^{k-1}w_1\left(a_1+pa_2\right),\ p^{l-2}\left(a_3+pa_4+p^2a_5\right)\right)\in B_p\left(C_{p^2}\right),$$

para $m\geq 1,\ k\geq 2,\ l\geq 3,\ w_1\in F_p^*$ y $a_i\in F_p$ para $i\in\{0,..,5\}$. Más aún, tenemos que:

$$p^{l-2}\left(a_3+pa_4+p^2a_5\right)\equiv p^r \bmod\left(p^3\mathbb{Z}_p\right),\ \text{ donde } r\geq 1.$$

A partir de estos ideales, obtenemos la siguiente lista de ideales fraccionales de B :

$\boldsymbol{M_{49}\,(a)=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (pav-(1+pa)w+t)\in p^3\mathbb{Z}_p,\ (u-t)\,,(v-t)\in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$=\left\langle(p,0,0,0),(0,p,p^2(1+pa)^{-1}a,0),(0,0,(1+pa)^{-1}p^3,0),(1,1,1,1)\right\rangle$
$a\in F_p^*,\quad \{M_{49}\,(a):B\}=(p,p,p,p)\,M_8,\ \mathrm{Aut}_B M_{49}\,(a)=M_{49}^*\,(a)$ y $(B:M_{49}\,(a))^{-s}=p^s$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_{49}^*(a)\right)=p^2(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{49}(a)\right)=p^5$
— —
$\boldsymbol{M_{50}\,(a)=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (pav-(1+pa)w+t)\in p^3\mathbb{Z}_p,\ (v-t)\in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$=\left\langle(1,0,0,0),(0,p,p^2(1+pa)^{-1}a,0),(0,0,(1+pa)^{-1}p^3,0),(0,1,1,1)\right\rangle$
$a\in F_p^*,\quad \{M_{50}\,(a):B\}=(p,p,p,p)\,M_8,\ \mathrm{Aut}_B M_{50}\,(a)=M_{50}^*\,(a)$ y $(B:M_{50}\,(a))^{-s}=p^{2s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_{50}^*(a)\right)=p^2(p-1)^2,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{50}(a)\right)=p^4$
— —
$\boldsymbol{M_{51}=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ \left(p^2v-w+t\right)\in p^3\mathbb{Z}_p,\ (u-t)\in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$\left\langle(p,0,0,0),(0,1,p^2,0),(0,0,p^3,0),(1,0,1,1)\right\rangle$
$\{M_{51}:B\}=\left(p,p^2,p^2,p^2\right)M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{51}=M_3^*$ y $(B:M_{51})^{-s}=p^{2s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_3^*\right)=p^2(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{51}\right)=p^4$
— —
$\boldsymbol{M_{52}=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ \left(p^2v-w+t\right)\in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$
$=\left\langle(1,0,0,0),(0,1,p^2,0),(0,0,p^3,0),(0,0,1,1)\right\rangle$
$\{M_{52}:B\}=\left(p,p^2,p^2,p^2\right)M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{52}=M_4^*$ y $(B:M_{52})^{-s}=p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_4^*\right)=p^2(p-1)^2,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{52}\right)=p^3$
— —

$\boldsymbol{M_{53}=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (v-w)\in p^2\mathbb{Z}_p,\ (v-u),(t-v)\in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$=\left\langle(p,0,0,0),(1,1,1,1),(0,0,p^2,0),(0,0,0,p)\right\rangle$
$\{M_{53}:B\}=\left(p,p^2,p^2,p^2\right)M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{53}=M_{53}^*$ y $(B:M_{53})^{-s}=p^{2s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_{53}^*\right)=p(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{53}\right)=p^4$
− −
$\boldsymbol{M_{54}(a)=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (av-(1+a)w+t)\in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t-u),(v-t)\in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$=\left\langle(p,0,0,0),(0,p,p(1+a)^{-1}a,0),(0,0,(1+a)^{-1}p^2,0),(1,1,1,1)\right\rangle$
$a\in\{1,...,p-2\}, \quad \{M_{54}(a):B\}=\left(p,p^2,p^2,p^2\right)M_{16},$
$\mathrm{Aut}_B M_{54}(a)=M_{54}^*(a)$ y $(B:M_{54}(a))^{-s}=p^{2s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_{54}^*(a)\right)=p(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{54}(a)\right)=p^4$
− −
$\boldsymbol{M_{55}=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (v-w)\in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t-v)\in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$=\left\langle(1,0,0,0),(0,1,1,1),(0,0,p^2,0),(0,0,0,p)\right\rangle$
$\{M_{55}:B\}=\left(p,p^2,p^2,p^2\right)M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{55}=M_{55}^*$ y $(B:M_{55})^{-s}=p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_{55}^*\right)=p(p-1)^2,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{55}\right)=p^3$
− −
$\boldsymbol{M_{56}(a)=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (av-(1+a)w+t)\in p^2\mathbb{Z}_p,\ (v-t)\in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$=\left\langle(1,0,0,0),(0,p,p(1+a)^{-1}a,0),(0,0,(1+a)^{-1}p^2,0),(0,1,1,1)\right\rangle$
$a\in\{1,...,p-2\}, \quad \{M_{56}(a):B\}=\left(p,p^2,p^2,p^2\right)M_{16},$
$\mathrm{Aut}_B M_{56}(a)=M_{56}^*(a)$ y $(B:M_{56}(a))^{-s}=p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_{56}^*(a)\right)=p(p-1)^2,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{56}(a)\right)=p^3$
− −
$\boldsymbol{M_{57}=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (pv-w+t)\in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t-u)\in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$=\left\langle(p,0,0,0),(0,1,p,0),(0,0,p^2,0),(1,0,1,1)\right\rangle$
$\{M_{57}:B\}=\left(p,p^2,p^2,p^2\right)M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{57}=M_7^*$ y $(B:M_{57})^{-s}=p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_7^*\right)=p(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{57}\right)=p^3$
− −
$\boldsymbol{M_{58}=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (pv-w+t)\in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$=\left\langle(1,0,0,0),(0,1,p,0),(0,0,p^2,0),(0,0,1,1)\right\rangle$
$\{M_{58}:B\}=\left(p,p^2,p^2,p^2\right)M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{58}=M_8^*$ y $(B:M_{58})^{-s}=p^{4s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_8^*\right)=p(p-1)^2,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{58}\right)=p^2$
− −
$\boldsymbol{M_{59}=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (v-pw+t)\in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t-u)\in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$=\left\langle(p,0,0,0),(0,p^2,0,0),(0,p,1,0),(1,-1,0,1)\right\rangle$
$\{M_{59}:B\}=\left(p,p^2,p^3,p^3\right)M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{59}=M_{17}^*$ y $(B:M_{59})^{-s}=p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_{17}^*\right)=p(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{59}\right)=p^3$
− −
$\boldsymbol{M_{60}=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (v-pw+t)\in p^2\mathbb{Z}_p,\right\}}$
$=\left\langle(1,0,0,0),(0,p^2,0,0),(0,p,1,0),(0,-1,0,1)\right\rangle$
$\{M_{60}:B\}=\left(p,p^2,p^3,p^3\right)M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{60}=M_{18}^*$ y $(B:M_{60})^{-s}=p^{4s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_{18}^*\right)=p(p-1)^2,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{60}\right)=p^2$
− −
$\boldsymbol{M_{61}=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (v-w+t),(t-u)\in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$=\langle(p,0,0,0),(0,p,0,0),(0,1,1,0),(1,-1,0,1)\rangle$
$\{M_{61}:B\}=\left(p,p^2,p^3,p^3\right)M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{61}=M_{13}^*$ y $(B:M_{61})^{-s}=p^{4s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_{13}^*\right)=(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{61}\right)=p^2$
− −

$\boldsymbol{M_{62} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w+t) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \langle (1,0,0,0),(0,p,0,0),(0,1,1,0),(0,-1,0,1)\rangle$
$\{M_{62} : B\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{62} = M_{14}^*$ y $(B : M_{62})^{-s} = p^{5s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{14}^*\right) = (p-1)^2,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{62}\right) = p$
$---------------------------------$
$\boldsymbol{M_{63} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w)\,,(t-u) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \langle (p,0,0,0),(0,p,0,0),(0,1,1,0),(1,0,0,1)\rangle$
$\{M_{63} : B\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{63} = M_{63}^*$ y $(B : M_{63})^{-s} = p^{4s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{63}^*\right) = (p-1)^2,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{63}\right) = p^2$
$---------------------------------$
$\boldsymbol{M_{64} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \langle (1,0,0,0),(0,p,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\rangle$
$\{M_{64} : B\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{64} = M_{64}^*$ y $(B : M_{64})^{-s} = p^{5s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{64}^*\right) = (p-1),\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{64}\right) = p$
$---------------------------------$

5) A partir de (I), para J_5 obtenemos los siguientes ideales de íncide finito en B :

$$(\alpha_5,\ p^r)\,B + (J_5,0)\,,\ \text{donde:}$$

$$\alpha_5 = \left(p^{m-1}a_0,\ p^k\,(w_1+pw_2)\,(a_1+pa_2)\,,\ p^{l-1}\left(a_3+pa_4+p^2a_5\right)\right) \in B_p\left(C_{p^2}\right),$$

para $m \geq 1,\ k \geq 2,\ l \geq 3,\ w_1 \in F_p^*$ y $w_2, a_i \in F_p$ para $i \in \{0,..,5\}$. Más aún, tenemos que:

$$p^{l-1}\left(a_3+pa_4+p^2a_5\right) \equiv p^r \bmod \left(p^3\mathbb{Z}_p\right),\ \text{donde } r \geq 2.$$

A partir de estos ideales, obtenemos la siguiente lista de ideales fraccionales de B :

$\boldsymbol{M_{65} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pv-w+t) \in p^3\mathbb{Z}_p,\ (t-u) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \left\langle (p,0,0,0),(0,1,p,0),(0,0,p^3,0),(1,0,1,1)\right\rangle$
$\{M_{65} : B\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{65} = B^*$ y $(B : M_{65})^{-s} = p^{2s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : B^*\right) = p^3(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{65}\right) = p^4$
$---------------------------------$
$\boldsymbol{M_{66} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pv-w+t) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \left\langle (1,0,0,0),(0,1,p,0),(0,0,p^3,0),(0,0,1,1)\right\rangle$
$\{M_{66} : B\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{66} = M_2^*$ y $(B : M_{66})^{-s} = p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_2^*\right) = p^3(p-1)^2,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{66}\right) = p^3$
$---------------------------------$
$\boldsymbol{M_{67} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w+t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t-u) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \left\langle (p,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,p^2,0),(1,0,1,1)\right\rangle$
$\{M_{67} : B\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{67} = M_5^*$ y $(B : M_{67})^{-s} = p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_5^*\right) = p^2(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{67}\right) = p^3$
$---------------------------------$
$\boldsymbol{M_{68} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w+pt) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (t-u) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \left\langle (p,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,p^2,0),(1,0,p,1)\right\rangle$
$\{M_{68} : B\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{68} = M_{53}^*$ y $(B : M_{68})^{-s} = p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{53}^*\right) = p(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{68}\right) = p^3$
$---------------------------------$

$\boldsymbol{M_{69} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (v-w) \in p^2\mathbb{Z}_p, \ (t-u) \in p\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (p,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,p^2,0),(1,0,0,1) \rangle$
$\{M_{69} : B\} = (p,p^2,p^3,p^3)\, M_{24}$, $\ \mathrm{Aut}_B M_{69} = M_{69}^*$ y $(B : M_{69})^{-s} = p^{3s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{69}^* \right) = p(p-1)^2$, $\ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{69}) = p^3$
– –
$\boldsymbol{M_{70} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (v-w+t) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,p^2,0),(0,0,1,1) \rangle$
$\{M_{70} : B\} = (p,p^2,p^3,p^3)\, M_{24}$, $\ \mathrm{Aut}_B M_{70} = M_6^*$ y $(B : M_{70})^{-s} = p^{4s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_6^* \right) = p^2(p-1)^2$, $\ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{70}) = p^2$
– –
$\boldsymbol{M_{71} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (v-w+pt) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,p^2,0),(0,0,p,1) \rangle$
$\{M_{71} : B\} = (p,p^2,p^3,p^3)\, M_{24}$, $\ \mathrm{Aut}_B M_{71} = M_{55}^*$ y $(B : M_{71})^{-s} = p^{4s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{55}^* \right) = p(p-1)^2$, $\ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{71}) = p^2$
– –
$\boldsymbol{M_{72} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (v-w) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,p^2,0),(0,0,0,1) \rangle$
$\{M_{72} : B\} = (p,p^2,p^3,p^3)\, M_{24}$, $\ \mathrm{Aut}_B M_{72} = M_{72}^*$ y $(B : M_{72})^{-s} = p^{4s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{72}^* \right) = p(p-1)$, $\ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{72}) = p^2$
– –

6) A partir de (I), para J_6 obtenemos los siguientes ideales de íncide finito en B :

$$(\alpha_6,\ p^r)\, B + (J_6, 0)$$

donde

$$\alpha_6 = \left(p^m w_0 a_0,\ p^{k-1} w_1 (a_1 + pa_2),\ p^{l-2}\left(a_3 + pa_4 + p^2 a_5\right) \right) \in B_p\left(C_{p^2}\right),$$

para $m \geq 1$, $k \geq 2$, $l \geq 3$, $w_0, w_1 \in F_p^*$ y $a_i \in F_p$ para $i \in \{0,..,5\}$.

Más aún, tenemos que:

$$p^{l-2}\left(a_3 + pa_4 + p^2 a_5\right) \equiv p^r \mathrm{mod}\left(p^3\mathbb{Z}_p\right), \text{ donde } r \geq 1.$$

A partir de estos ideales, obtenemos la siguiente lista de ideales fraccionales de B :

$\boldsymbol{M_{73}(a) = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (pau - v + t) \in p^2\mathbb{Z}_p, \ (p^2u - w + t) \in p^3\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,pa,p^2,0),(0,p^2,0,0),(0,0,p^3,0),(0,1,1,1) \rangle$
$a \in F_p^*$, $\{M_{73}(a) : B\} = (p,p,p,p)\, M_8$, $\mathrm{Aut}_B M_{73}(a) = B^*$ y
$(B : M_{73}(a))^{-s} = p^s$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : B^* \right) = p^3(p-1)^3$, $\ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{73}(a)) = p^5$
– –
$\boldsymbol{M_{74}(a) = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (p^2u - w + t) \in p^3\mathbb{Z}_p, \ (u - v + at) \in p\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,1,p^2,0),(0,p,0,0),(0,0,p^3,0),(0,a,1,1) \rangle$
$a \in F_p$, $\ \{M_{74}(a) : B\} = (p,p^2,p^2,p^2)\, M_{16}$, $\ \mathrm{Aut}_B M_{74}(a) = M_3^*$ y
$(B : M_{74}(a))^{-s} = p^{2s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_3^* \right) = p^2(p-1)^3$, $\ (\mathbb{Z}_p^4 : M_{74}(a)) = p^4$
– –

$\boldsymbol{M_{75}(a)} = \{\boldsymbol{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : (pau - v + t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (pu - w + t) \in p^2\mathbb{Z}_p}\}$
$= \langle (1, pa, p, 0), (0, p^2, 0, 0), (0, 0, p^2, 0), (0, 1, 1, 1) \rangle$
$a \in F_p^*, \quad \{M_{75}(a) : B\} = (p, p^2, p^2, p^2)\, M_{16}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{75}(a) = M_5^*$ y
$(B : M_{75}(a))^{-s} = p^{2s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_5^*\right) = p^2(p-1)^3, \ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{75}(a)\right) = p^4$
– –
$\boldsymbol{M_{76}(a)} = \{\boldsymbol{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : (pu - w + t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (u - v + at) \in p\mathbb{Z}_p}\}$
$= \langle (1, 1, p, 0), (0, p, 0, 0), (0, 0, p^2, 0), (0, a, 1, 1) \rangle$
$a \in F_p, \quad \{M_{76}(a) : B\} = (p, p^2, p^2, p^2)\, M_{16}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{76}(a) = M_7^*$ y
$(B : M_{76}(a))^{-s} = p^{3s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_7^*\right) = p(p-1)^3, \ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{76}(a)\right) = p^3$
– –
$\boldsymbol{M_{77}(a)} = \{\boldsymbol{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : (pu - v + t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (u - w + at) \in p\mathbb{Z}_p}\}$
$= \langle (1, p, 1, 0), (0, p^2, 0, 0), (0, 0, p, 0), (0, 1, a, 1) \rangle$
$a \in F_p, \quad \{M_{77}(a) : B\} = (p, p^2, p^3, p^3)\, M_{24}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{77}(a) = M_{17}^*$ y
$(B : M_{77}(a))^{-s} = p^{3s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{17}^*\right) = p(p-1)^3, \ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{77}(a)\right) = p^3$
– –
$\boldsymbol{M_{78}} = \{\boldsymbol{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : (u - w) \in p\mathbb{Z}_p,\ (u - v) \in p\mathbb{Z}_p}\}$
$= \langle (1, 1, 1, 0), (0, p, 0, 0), (0, 0, p, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$
$\{M_{78} : B\} = (p, p^2, p^3, p^3)\, M_{24}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{78} = M_{78}^*$ y $(B : M_{78})^{-s} = p^{4s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{78}^*\right) = (p-1)^2, \ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{78}\right) = p^2$
– –
$\boldsymbol{M_{79}(a)} = \{\boldsymbol{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : (u - w + t) \in p\mathbb{Z}_p,\ (u - v + at) \in p\mathbb{Z}_p}\}$
$= \langle (1, 1, 1, 0), (0, p, 0, 0), (0, 0, p, 0), (0, a, 1, 1) \rangle$
$a \in F_p, \quad \{M_{79}(a) : B\} = (p, p^2, p^3, p^3)\, M_{24}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{79}(a) = M_{13}^*$ y
$(B : M_{79}(a))^{-s} = p^{4s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{13}^*\right) = (p-1)^3, \ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{79}(a)\right) = p^2$
– –
$\boldsymbol{M_{80}} = \{\boldsymbol{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : (u - w) \in p\mathbb{Z}_p,\ (u - v + t) \in p\mathbb{Z}_p}\}$
$= \langle (1, 1, 1, 0), (0, p, 0, 0), (0, 0, p, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$
$\{M_{80} : B\} = (p, p^2, p^3, p^3)\, M_{24}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{80} = M_{13}^*$ y $(B : M_{80})^{-s} = p^{4s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{13}^*\right) = (p-1)^3, \ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{80}\right) = p^2$
– –

7) A partir de (I), para J_7 obtenemos los siguientes ideales de íncide finito en B :

$$(\alpha_7,\ p^r)\, B + (J_7, 0) \ \text{ donde:}$$

$$\alpha_7 = \left(p^m w_0 a_0,\ p^k (w_1 + p w_2)(a_1 + p a_2),\ p^{l-1}(a_3 + p a_4 + p^2 a_5)\right) \in B_p(C_{p^2}),$$

para $m \geq 1,\ k \geq 2,\ l \geq 3,\ w_0, w_1 \in F_p^*$ y $w_2, a_i \in F_p$ para $i \in \{0, .., 5\}$.

Más aún, tenemos que:

$$p^{l-1}(a_3 + p a_4 + p^2 a_5) \equiv p^r \bmod (p^3\mathbb{Z}_p), \ \text{donde } r \geq 2.$$

A partir de estos ideales, obtenemos la siguiente lista de ideales fraccionales de B :

$\boldsymbol{M_{81}\,(a)=\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (pv-w+t)\in p^3\mathbb{Z}_p,\ (u-v+at)\in p\mathbb{Z}_p\}}$
$=\langle(p,0,0,0),(1,1,p,0),(0,0,p^3,0),(-a,0,1,1)\rangle$
$a\in F_p,\quad\{M_{81}\,(a):B\}=\left(p,p^2,p^2,p^2\right)M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{81}\,(a)=B^*$ y
$(B:M_{81}\,(a))^{-s}=p^{2s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:B^*\right)=p^3(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{81}(a)\right)=p^4$
– –
$\boldsymbol{M_{82}=\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (v-w)\in p^2\mathbb{Z}_p,\ (u-w)\in p\mathbb{Z}_p\}}$
$=\langle(p,0,0,0),(0,p^2,0,0),(1,1,1,0),(0,0,0,1)\rangle$
$\{M_{82}:B\}=\left(p,p^2,p^3,p^3\right)M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{82}=M_{82}^*$ y $(B:M_{82})^{-s}=p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_{82}^*\right)=p(p-1)^2,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{82}\right)=p^3$
– –
$\boldsymbol{M_{83}=\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (v-w)\in p^2\mathbb{Z}_p,\ (u-w+t)\in p\mathbb{Z}_p\}}$
$=\langle(p,0,0,0),(0,p^2,0,0),(1,1,1,0),(-1,0,0,1)\rangle$
$\{M_{83}:B\}=\left(p,p^2,p^3,p^3\right)M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{83}=M_{53}^*$ y $(B:M_{83})^{-s}=p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_{53}^*\right)=p(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{83}\right)=p^3$
– –
$\boldsymbol{M_{84}\,(a)=\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (v-w+pt)\in p^2\mathbb{Z}_p,\ (u-w+at)\in p\mathbb{Z}_p\}}$
$=\langle(p,0,0,0),(0,p^2,0,0),(1,1,1,0),(-a,-p,0,1)\rangle$
$a\in F_p,\quad\{M_{84}\,(a):B\}=\left(p,p^2,p^3,p^3\right)M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{84}\,(a)=M_{53}^*$ y
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_{53}^*\right)=p(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{84}(a)\right)=p^3$ y $(B:M_{84}\,(a))^{-s}=p^{3s}$
– –
$\boldsymbol{M_{85}\,(a)=\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ (v-w+t)\in p^2\mathbb{Z}_p,\ (u-w+at)\in p\mathbb{Z}_p\}}$
$=\langle(p,0,0,0),(0,p^2,0,0),(1,1,1,0),(-a,-1,0,1)\rangle$
$a\in F_p,\quad\{M_{85}\,(a):B\}=\left(p,p^2,p^3,p^3\right)M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{85}\,(a)=M_5^*$ y $(B:M_{85}\,(a))^{-s}=p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_5^*\right)=p^2(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{85}(a)\right)=p^3.$
– –

8) A partir de (I), para J_8 obtenemos los siguientes ideales de íncide finito en B :

$$(\alpha_8,\ p^r)\,B+(J_8,0)\ \text{ donde:}$$

$$\alpha_8=\left(p^m a_0,\ p^{k-1}w_1\left(a_1+pa_2\right),\ p^{l-2}w_2\left(a_3+pa_4+p^2a_5\right)\right)\in B_p\left(C_{p^2}\right),$$

para $m\geq 1,\ k\geq 2,\ l\geq 3,\ w_1,w_2\in F_p^*$ y $a_i\in F_p$ para $i\in\{0,..,5\}$. Más aún, tenemos que:

$$p^{l-2}w_2\left(a_3+pa_4+p^2a_5\right)\equiv p^r\mathrm{mod}\left(p^3\mathbb{Z}_p\right),\ \text{ donde } r\geq 1.$$

A partir de estos ideales, obtenemos la siguiente lista de ideales fraccionales de B :

$\boldsymbol{M_{86}\,(a)=\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ \left(pav-(1+pa)w-p^2u+t\right)\in p^3\mathbb{Z}_p,\ (v-t)\in p\mathbb{Z}_p\}}$
$=\langle(1,0,-p^2(1+pa)^{-1},0),(0,p,p^2a(1+pa)^{-1},0),(0,0,0,p^3),(0,1,1,1)\rangle$
$a\in F_p^*,\quad\{M_{86}\,(a):B\}=(p,p,p,p)\,M_8,$
$\mathrm{Aut}_B M_{86}\,(a)=M_{49}^*\,(a)$ y $(B:M_{86}\,(a))^{-s}=p^{2s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_{49}^*(a)\right)=p^2(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{86}(a)\right)=p^4$
– –
$\boldsymbol{M_{87}=\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4:\ \left(p^2v-w-p^2u+t\right)\in p^3\mathbb{Z}_p\}}$
$=\langle(1,0,-p^2,0),(0,1,p^2,0),(0,0,p^3,0),(0,0,1,1)\rangle$
$\{M_{87}:B\}=\left(p,p^2,p^2,p^2\right)M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{87}=M_3^*$ y $(B:M_{87})^{-s}=p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4:M_3^*\right)=p^2(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4:M_{87}\right)=p^3$

$\boldsymbol{M_{88}\,(a) = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (av-(1+a)w-pu+t) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (v-t) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \left\langle (1,0,-p(1+a)^{-1},0),(0,p,pa(1+a)^{-1},0),(0,0,p^2,0),(0,1,1,1)\right\rangle$
$a \in \{1,...,p-2\}\,,\quad \{M_{88}\,(a) : B\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16},\ \left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{54}^*(a)\right) = p(p-1)^3$
$\mathrm{Aut}_B M_{88}\,(a) = M_{54}^*\,(a)\,,\,(B : M_{88}\,(a))^{-s} = p^{3s}$ y $\left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{88}(a)\right) = p^3$

$\boldsymbol{M_{89} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w-pu) \in p^2\mathbb{Z}_p,\ (v-t) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \left\langle (1,0,-p,0),(0,1,1,1),(0,0,p^2,0),(0,0,0,p)\right\rangle$
$\{M_{89} : B\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{89} = M_{53}^*$ y $(B : M_{89})^{-s} = p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{53}^*\right) = p(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{89}\right) = p^3$

$\boldsymbol{M_{90} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pv-pu-w+t) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \left\langle (1,0,-p,0),(0,1,p,0),(0,0,p^2,0),(0,0,1,1)\right\rangle$
$\{M_{90} : B\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{90} = M_7^*$ y $(B : M_{90})^{-s} = p^{4s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_7^*\right) = p(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{90}\right) = p^2$

$\boldsymbol{M_{91} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pu-v+pw+t) \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \left\langle (1,p,0,0),(0,p^2,0,0),(0,p,1,0),(0,1,0,1)\right\rangle$
$\{M_{91} : B\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{91} = M_{17}^*$ y $(B : M_{91})^{-s} = p^{4s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{17}^*\right) = p(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{91}\right) = p^2$

$\boldsymbol{M_{92} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-u-w+t) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \langle (1,1,0,0),(0,p,0,0),(0,1,1,0),(0,-1,0,1)\rangle$
$\{M_{92} : B\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{92} = M_{13}^*$ y $(B : M_{92})^{-s} = p^{5s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{13}^*\right) = (p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{92}\right) = p$

$\boldsymbol{M_{93} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (v-w-u) \in p\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \langle (1,1,0,0),(0,p,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\rangle$
$\{M_{93} : B\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right) M_{24},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{93} = M_{78}^*$ y $(B : M_{93})^{-s} = p^{5s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : M_{78}^*\right) = (p-1)^2,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{93}\right) = p$

---

9) A partir de (I), para J_9 obtenemos los siguientes ideales de íncide finito en B :

$$(\alpha_9,\ p^r)\,B + (J_9, 0)$$

donde:

$$\alpha_9 = \left(p^m w_0 a_0,\ p^k\,(a_1 + pa_2)\,,\ p^{l-1} w_0\,(w_1 + pw_2)^{-1}\left(a_3 + pa_4 + p^2 a_5\right)\right) \in B_p\left(C_{p^2}\right),$$

para $m \geq 1$, $k \geq 2$, $l \geq 3$, $w_0, w_1 \in F_p^*$ y $w_2, a_i \in F_p$ para $i \in \{0,..,5\}$. Más aún, tenemos que:

$$p^{l-1} w_0\,(w_1 + pw_2)^{-1}\left(a_3 + pa_4 + p^2 a_5\right) \equiv p^r \mathrm{mod}\left(p^3\mathbb{Z}_p\right),\ \text{donde } r \geq 2.$$

A partir de estos ideales, obtenemos la siguiente lista de ideales fraccionales de B :

$\boldsymbol{M_{94} = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 :\ (pv-w-p^2u+t) \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}}$
$= \left\langle (1,0,-p^2,0),(0,1,p,0),(0,0,p^3,0),(0,0,1,1)\right\rangle$
$\{M_{94} : B\} = \left(p,p^2,p^2,p^2\right) M_{16},\ \ \mathrm{Aut}_B M_{94} = B^*$ y $(B : M_{94})^{-s} = p^{3s}$
$\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4 : B^*\right) = p^3(p-1)^3,\ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{94}\right) = p^3$

$\boldsymbol{M_{95} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (pu + w - v + t) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,-p,0),(0,1,1,0),(0,0,p^2,0),(0,0,-1,1) \rangle$
$\{M_{95} : B\} = (p,p^2,p^3,p^3)\, M_{24}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{95} = M_5^*$ y $(B : M_{95})^{-s} = p^{4s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_5^* \right) = p^2(p-1)^3, \ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{95}\right) = p^2$
— —
$\boldsymbol{M_{96} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (pu + w - v + pt) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,-p,0),(0,1,1,0),(0,0,p^2,0),(0,0,-p,1) \rangle$
$\{M_{96} : B\} = (p,p^2,p^3,p^3)\, M_{24}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{96} = M_{53}^*$ y $(B : M_{96})^{-s} = p^{4s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{53}^* \right) = p(p-1)^3, \ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{96}\right) = p^2$
— —
$\boldsymbol{M_{97} = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \ (pu + w - v) \in p^2\mathbb{Z}_p\}}$
$= \langle (1,0,-p,0),(0,1,1,0),(0,0,p^2,0),(0,0,0,1) \rangle$
$\{M_{97} : B\} = (p,p^2,p^3,p^3)\, M_{24}, \ \ \mathrm{Aut}_B M_{97} = M_{82}^*$ y $(B : M_{97})^{-s} = p^{4s}$
$\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : M_{82}^* \right) = p(p-1)^2, \ \left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{97}\right) = p^2$
— —

Observación 23. Los ideales $M_1, ..., M_{97}$ son representantes de las clases de isomorfismo de los ideales fraccionales de índice finito de $B_p\left(C_{p^3}\right)$.

En los resultados previos, observamos que los únicos conductores son los siguientes: $B_p\left(C_{p^3}\right)$, $(p,p,p,p)\left(\mathbb{Z}_p \times B_p\left(C_{p^2}\right)\right)$, $\left(p,p^2,p^2,p^2\right)\left(\mathbb{Z}_p^2 \times B_p\left(C_p\right)\right)$ y $\left(p,p^2,p^3,p^3\right)\mathbb{Z}_p^4$. Por tanto, en la siguiente sección es suficiente calcular las integrales correspondientes de estos cuatro conductores.

2.3. *La Función Zeta de* $B_p\left(C_{p^3}\right)$

Teorema 2.3.1. Sea G un grupo finito y sea $\widetilde{B}(G)$ el orden máximo de $B(G)$. Entonces

$$\zeta_{\widetilde{B}_p(G)}(s) = \frac{1}{(1-p^{-s})^{|\mathscr{C}(G)|}}$$

y

$$\zeta_{\widetilde{B}(G)}(s) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\right]^{|\mathscr{C}(G)|}.$$

Más aún

$$\zeta_{B_p(G)}(s) = \frac{f_G\left(p^{-s}\right)}{(1-p^{-s})^{|\mathscr{C}(G)|}},$$

donde $f_G\left(p^{-s}\right) \in \mathbb{Z}\left[p^{-s}\right]$.

Demostración. Tenemos que $\widetilde{B}_p(G) = \mathbb{Z}_p^{|\mathscr{C}(G)|}$. Luego, como

$$\zeta_{\mathbb{Z}_p}(s) = \sum_{t=0}^{\infty}\left(\mathbb{Z}_p : p^t\mathbb{Z}_p\right)^{-s} = \sum_{t=0}^{\infty}\left(p^{-s}\right)^t = \frac{1}{(1-p^{-s})},$$

se sigue que

$$\zeta_{\widetilde{B}_p(G)}(s) = \left(\zeta_{\mathbb{Z}_p}(s)\right)^{|\mathscr{C}(G)|} = \frac{1}{(1-p^{-s})^{|\mathscr{C}(G)|}}.$$

$\square$

Ahora, por el producto de Euler, se tiene que

$$\zeta_{\widetilde{B}(G)}(s)=\prod_{p-\text{primo}}\zeta_{\widetilde{B}_p(G)}(s)=\prod_{p-\text{primo}}\frac{1}{\left(1-p^{-s}\right)^{|\mathscr{C}(G)|}}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\right]^{|\mathscr{C}(G)|}.$$

Finalmente, por el teorema 2.1.1 obtenemos que

$$\zeta_{B_p(G)}\left(s\right)=\frac{f_G\left(p^{-s}\right)}{\left(1-p^{-s}\right)^{|\mathscr{C}(G)|}},$$

donde $f_G\left(p^{-s}\right)\in\mathbb{Z}\left[p^{-s}\right]$.

Corolario 2.3.1. Sea $n\in\mathbb{N}$ y $B\left(C_{p^n}\right)$ el anillo de Burnside para el grupo cíclico de orden p^n, y sea $\widetilde{B}\left(C_{p^n}\right)$ su orden máximo. Entonces

$$\zeta_{B_p\left(C_{p^n}\right)}\left(s\right)=\frac{f_{C_{p^n}}\left(p^{-s}\right)}{\left(1-p^{-s}\right)^{n+1}},$$

donde $f_{C_{p^n}}\left(p^{-s}\right)\in\mathbb{Z}\left[p^{-s}\right]$. Más aún,

$$\zeta_{B\left(C_{p^n}\right)}\left(s\right)=f_{C_{p^n}}\left(p^{-s}\right)\left[\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\right]^{n+1}.$$

Demostración. Tenemos que las clases de conjugación de C_{p^n} son

$$\mathscr{C}\left(C_{p^n}\right)=\left\{\langle a\rangle,\langle a^p\rangle,\left\langle a^{p^2}\right\rangle,...,\left\langle a^{p^n}\right\rangle\right\},$$

por tanto $\widetilde{B}_p\left(C_{p^n}\right)=\mathbb{Z}_p^{(n+1)}$. Luego, por el teorema 2.3.1 se tiene que

$$\zeta_{\widetilde{B}_p\left(C_{p^n}\right)}\left(s\right)=\frac{1}{\left(1-p^{-s}\right)^{n+1}}$$

y

$$\zeta_{B_p\left(C_{p^n}\right)}\left(s\right)=\frac{f_{C_{p^n}}\left(p^{-s}\right)}{\left(1-p^{-s}\right)^{n+1}},$$

donde $f_{C_{p^n}}\left(p^{-s}\right)\in\mathbb{Z}\left[p^{-s}\right]$.

Ahora, por el producto de Euler, se sigue que

$$\zeta_{B\left(C_{p^n}\right)}\left(s\right)=\prod_{q-\text{primo}}\zeta_{B_q\left(C_{p^n}\right)}\left(s\right)=\zeta_{B_p\left(C_{p^n}\right)}\left(s\right)\prod_{\substack{q-\text{primo}\\ q\neq p}}\zeta_{B_q\left(C_{p^n}\right)}\left(s\right).$$

Luego, por la observación 20, tenemos que $f_{C_{p^n}}\left(q^{-s}\right)=1$ cuando $q\neq p$. Así, por el teorema 2.1.1 obtenemos que:

$$\zeta_{B\left(C_{p^n}\right)}\left(s\right)=f_{C_{p^n}}\left(p^{-s}\right)\zeta_{\widetilde{B}_p\left(C_{p^n}\right)}\left(s\right)\prod_{\substack{q-\text{primo}\\ q\neq p}}\zeta_{\widetilde{B}_q\left(C_{p^n}\right)}\left(s\right)=$$

$$f_{C_{p^n}}\left(p^{-s}\right)\prod_{q-\text{primo}}\zeta_{\widetilde{B}_q\left(C_{p^n}\right)}\left(s\right)=f_{C_{p^n}}\left(p^{-s}\right)\zeta_{\widetilde{B}\left(C_{p^n}\right)}\left(s\right)=$$

$$f_{C_{p^n}}\left(p^{-s}\right)\zeta_{\mathbb{Z}^{n+1}}\left(s\right)=f_{C_{p^n}}\left(p^{-s}\right)\left[\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\right]^{n+1}.$$

□

2.3.1. *El Caso Local.*

Ahora, Recordemos que

$$\zeta_{B_p\left(C_{p^3}\right)}(s)=\sum_{i=1}^{97} Z_{B_p\left(C_{p^3}\right)}(M_i;s).$$

Por tanto, para el cálculo de la función Zeta de $B_p\left(C_{p^3}\right)$, es necesario calcular $Z_{B_p\left(C_{p^3}\right)}(M_i;s)$ para $i=1,...,97$. De acuerdo a las secciones previas, sólo necesitamos calcular las intergrales que estudiamos en las siguientes observaciones.

Observación 24. Elegimos la medida de Haar d^*x en $\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^4$, tal que $d^*x=(d^*\alpha)^4$, donde $d^*\alpha$ es la medida de haar de $\mathbb{Q}_p^*$ tal que $\int_{\mathbb{Z}_p^*} d^*\alpha=1$. Entonces

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p^*\bigcap\mathbb{Z}_p} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s\, d^*\alpha=\int\limits_{\bigcup_{t=0}^{\infty} p^t\mathbb{Z}_p^*} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s\, d^*\alpha=$$

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left[\left(p^{-s}\right)^t\int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} d^*\alpha\right]=\frac{1}{(1-p^{-s})} \qquad \text{(II)}.$$

Además, tenemos que

$$\mathfrak{I}_1=\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^4\bigcap\left(p,p^2,p^3,p^3\right)\mathbb{Z}_p^4} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s\, d^*x=\left\|\left(p,p^2,p^3,p^3\right)\right\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s\left[\int\limits_{\mathbb{Q}_p^*\bigcap\mathbb{Z}_p} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s\, d^*\alpha\right]^4$$

Entonces, a partir de (II), obtenemos que:

$$\boldsymbol{\mathfrak{I}_1=\frac{\left(p^{-s}\right)^9}{(1-p^{-s})^4}}.$$

Observación 25. Ahora, elegimos la medida de Haar d^*z de $\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^2$, tal que $d^*z=(d^*\alpha)^2$. Sabemos que, $B_p(C_p)$ es local, donde $\operatorname{rad}(B_p(C_p))=(p,p)\,\mathbb{Z}_p^2$. Así, $B_p(C_p)=B_p^*(C_p)\bigcup(p,p)\,\mathbb{Z}_p^2$ y entonces

$$\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^2\bigcap B_p(C_p)} \|z\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s\, d^*z=\int\limits_{B_p^*(C_p)} d^*z+\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^2\bigcap(p,p)\mathbb{Z}_p^2} \|z\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s\, d^*z=$$

$$\frac{1}{(p-1)}+\|(p,p)\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s\left[\int\limits_{\mathbb{Q}_p^*\bigcap\mathbb{Z}_p} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s\, d^*\alpha\right]^2=$$

$$\frac{1}{(p-1)}+\frac{\left(p^{-s}\right)^2}{(1-p^{-s})^2}=\frac{1-2\left(p^{-s}\right)+p\left(p^{-s}\right)^2}{(p-1)(1-p^{-s})^2} \qquad \text{(III)}.$$

Además, se tiene que

$$\mathfrak{I}_2=\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^4\bigcap\left(p,p^2,p^2,p^2\right)\left[\mathbb{Z}_p^2\times B_p(C_p)\right]} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s\, d^*x=$$

$$\left\|\left(p,p^2,p^2,p^2\right)\right\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s \left[\int_{\mathbb{Q}_p^*\bigcap\mathbb{Z}_p} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s \, d^*\alpha\right]^2 \left[\int_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^2\bigcap B_p(C_p)} \|z\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s \, d^*z\right]$$

Así, a partir de (III), obtenemos:

$$\mathbf{J_2} = \frac{\left(p^{-s}\right)^7\left(1-2\left(p^{-s}\right)+p\left(p^{-s}\right)^2\right)}{(p-1)\left(1-p^{-s}\right)^4}.$$

Observación 26. Elegimos la medida de Haar d^*y en $\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3$, tal que $d^*y = \left(d^*\alpha\right)^3$. Sabemos que, $B_p\left(C_{p^2}\right)$ es local, donde $\operatorname{rad}\left(B_p\left(C_{p^2}\right)\right) = (p,p,p)\left[\mathbb{Z}_p \times B_p\left(C_p\right)\right]$. Así, $B_p\left(C_{p^2}\right) = B_p^*\left(C_{p^2}\right) \bigcup (p,p,p)\left[\mathbb{Z}_p \times B_p\left(C_p\right)\right]$ y entonces

$$\int_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3\bigcap B_p\left(C_{p^2}\right)} \|y\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s \, d^*y = \int_{B_p^*\left(C_{p^2}\right)} d^*y + \int_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3\bigcap(p,p,p)\left[\mathbb{Z}_p\times B_p\left(C_p\right)\right]} \|y\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s \, d^*y =$$

$$\frac{1}{p\left(p-1\right)^2} + \|(p,p,p)\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s \left[\int_{\mathbb{Q}_p^*\bigcap\mathbb{Z}_p} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s \, d^*\alpha\right] \left[\int_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^2\bigcap B_p(C_p)} \|z\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s \, d^*z\right] =$$

$$\frac{1}{p\left(p-1\right)^2} + \frac{\left(p^{-s}\right)^3\left(1-2\left(p^{-s}\right)+p\left(p^{-s}\right)^2\right)}{(p-1)\left(1-p^{-s}\right)^3} =$$

$$\frac{1-3\left(p^{-s}\right)+3\left(p^{-s}\right)^2+\left(p^2-p-1\right)\left(p^{-s}\right)^3}{p\left(p-1\right)^2\left(1-p^{-s}\right)^3} +$$

$$\frac{-2p\left(p-1\right)\left(p^{-s}\right)^4+p^2\left(p-1\right)\left(p^{-s}\right)^5}{p\left(p-1\right)^2\left(1-p^{-s}\right)^3} \qquad \text{(IV)}.$$

Además, tenemos que

$$\mathfrak{J}_3 = \int_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^4\bigcap(p,p,p,p)\left[\mathbb{Z}_p\times B_p\left(C_{p^2}\right)\right]} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s \, d^*x =$$

$$\|(p,p,p,p)\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s \left[\int_{\mathbb{Q}_p^*\bigcap\mathbb{Z}_p} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s \, d^*\alpha\right] \left[\int_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3\bigcap B_p\left(C_{p^2}\right)} \|y\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s \, d^*y\right]$$

Así, a partir de (IV), tenemos que:

$$\mathbf{J_3} = \frac{\left(p^{-s}\right)^4\left(1-3\left(p^{-s}\right)+3\left(p^{-s}\right)^2+\left(p^2-p-1\right)\left(p^{-s}\right)^3\right)}{p\left(p-1\right)^2\left(1-p^{-s}\right)^4} +$$

$$\frac{\left(p^{-s}\right)^4\left(-2p\left(p-1\right)\left(p^{-s}\right)^4+p^2\left(p-1\right)\left(p^{-s}\right)^5\right)}{p\left(p-1\right)^2\left(1-p^{-s}\right)^4}.$$

Observación 27. Sabemos que, $B_p\left(C_{p^3}\right)$ es local, donde $\operatorname{rad}\left(B_p\left(C_{p^3}\right)\right) = (p,p,p,p)\left[\mathbb{Z}_p \times B_p\left(C_{p^2}\right)\right]$.

Así

$$B_p\left(C_{p^3}\right)=B_p^*\left(C_{p^3}\right)\bigcup(p,p,p,p)\left[\mathbb{Z}_p\times B_p\left(C_{p^2}\right)\right]$$

entonces

$$\mathfrak{I}_4=\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^4\bigcap B_p\left(C_{p^3}\right)}\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s\,d^*x=$$

$$\int\limits_{B_p^*\left(C_{p^3}\right)}d^*x+\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^4\bigcap(p,p,p,p)\left[\mathbb{Z}_p\times B_p\left(C_{p^2}\right)\right]}\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s\,d^*x=$$

$$\frac{1}{p^3\left(p-1\right)^3}+$$

$$\|(p,p,p,p)\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s\left[\int\limits_{\mathbb{Q}_p^*\bigcap\mathbb{Z}_p}\|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s\,d^*\alpha\right]\left[\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^3\bigcap B_p\left(C_{p^3}\right)}\|y\|_{\mathbb{Q}_p^3}^s\,d^*y\right]=$$

$$\frac{1}{p^3\left(p-1\right)^3}+\frac{\left(p^{-s}\right)^4\left(1-3\left(p^{-s}\right)+3\left(p^{-s}\right)^2\right)}{p\left(p-1\right)^2\left(1-p^{-s}\right)^4}+$$

$$\frac{\left(p^{-s}\right)^4\left(\left(p^2-p-1\right)\left(p^{-s}\right)^3-2p\left(p-1\right)\left(p^{-s}\right)^4+p^2\left(p-1\right)\left(p^{-s}\right)^5\right)}{p\left(p-1\right)^2\left(1-p^{-s}\right)^4}=$$

$$\mathfrak{I}_4=\frac{1-4\left(p^{-s}\right)+6\left(p^{-s}\right)^2-4\left(p^{-s}\right)^3+\left(p^3-p^2+1\right)\left(p^{-s}\right)^4}{p^3\left(p-1\right)^3\left(1-p^{-s}\right)^4}+$$

$$\frac{-3p^2\left(p-1\right)\left(p^{-s}\right)^5+3p^2\left(p-1\right)\left(p^{-s}\right)^6}{p^3\left(p-1\right)^3\left(1-p^{-s}\right)^4}+$$

$$\frac{\left(p^5-2p^4+p^2\right)\left(p^{-s}\right)^7-2p^3\left(p-1\right)^2\left(p^{-s}\right)^8+p^4\left(p-1\right)^2\left(p^{-s}\right)^9}{p^3\left(p-1\right)^3\left(1-p^{-s}\right)^4}.$$

Teorema 2.3.2. Sea p un primo racional y sea $B=B_p\left(C_{p^3}\right)$ el anillo de Burnside del grupo cíclico C_{p^3} de orden p^3. Entonces, la función Zeta es:

$$\zeta_{B_p\left(C_{p^3}\right)}\left(s\right)=f_{C_{p^3}}\left(p^{-s}\right)\zeta_{\mathbb{Z}_p^4}\left(s\right),$$

donde $\zeta_{\mathbb{Z}_p^4}\left(s\right)=\frac{1}{\left(1-p^{-s}\right)^4}$ y

$$f_{C_{p^3}}\left(p^{-s}\right)=$$

$$1-3p^{-s}+\left(3+p+p^2+p^3\right)p^{-2s}+\left(-1-2p+p^2\right)\left(1+p+p^2\right)p^{-3s}+$$

$$p\left(3-p^3+p^4\right)p^{-4s}+p\left(p-1\right)\left(1-p+p^2+2p^3+p^4\right)p^{-5s}+$$

$$p^2\left(p-1\right)^3\left(p+1\right)p^{-6s}+p^3\left(p-1\right)\left(-1+p^2+p^3\right)p^{-7s}+$$

$$p^3\left(p-1\right)\left(1-2p+p^2+p^3\right)p^{-8s}+p^4\left(p-1\right)^2p^{-9s}.$$

Demostración. Recordemos que

$$Z_B(M_i;s) = \mu^*(\mathrm{Aut}_B M_i)^{-1}(B:M_i)^{-s} \int\limits_{x\in(\mathbb{Q}_p^*)^4} \Phi_{\{M_i:B\}}(x)\,\|x\|_{\mathbb{Q}_p^4}^s\, d^*x.$$

Por tanto, a partir del caso 1) en la sección 2.2, con la observación 27, obtenemos que:

$$Z_B(M_1;s) = p^3(p-1)^3\,\mathfrak{I}_4.$$

A partir del caso 1) en la sección 2.2, con la observación 26, obtenemos que:

$$Z_B(M_2;s) = p^3(p-1)^2\,p^s\mathfrak{I}_3,$$

$$Z_B(M_3;s) = p^2(p-1)^3\,p^s\mathfrak{I}_3,$$
$$Z_B(M_4;s) = p^2(p-1)^2\,p^{2s}\mathfrak{I}_3,$$
$$Z_B(M_5;s) = p^2(p-1)^3\,p^s\mathfrak{I}_3,$$
$$Z_B(M_6;s) = p^2(p-1)^2\,p^{2s}\mathfrak{I}_3,$$
$$Z_B(M_7;s) = p(p-1)^3\,p^{2s}\mathfrak{I}_3,$$
$$Z_B(M_8;s) = p(p-1)^2\,p^{3s}\mathfrak{I}_3.$$

A partir del caso 1) en la sección 2.2, con la observación 25, obtenemos que:

$$Z_B(M_9;s) = p^2(p-1)^2\,p^{2s}\mathfrak{I}_2,$$

$$Z_B(M_{10};s) = p^2(p-1)\,p^{3s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B(M_{11};s) = p(p-1)^2\,p^{3s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B(M_{12};s) = p(p-1)\,p^{4s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B(M_{13};s) = (p-1)^3\,p^{3s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B(M_{14};s) = (p-1)^2\,p^{4s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B(M_{15};s) = (p-1)^2\,p^{4s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B(M_{16};s) = (p-1)\,p^{5s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B(M_{17};s) = p(p-1)^3\,p^{2s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B(M_{18};s) = p(p-1)^2\,p^{3s}\mathfrak{I}_2.$$

A partir del caso 1) en la sección 2.2, con la observación 24, obtenemos que:

$$Z_B(M_{19};s) = p(p-1)^2\,p^{3s}\mathfrak{I}_1,$$

$$Z_B(M_{20};s) = p(p-1)\,p^{4s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B(M_{21};s) = (p-1)^2\,p^{4s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B(M_{22};s) = (p-1)\,p^{5s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B(M_{23};s) = (p-1)\,p^{5s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B(M_{24};s) = p^{6s}\mathfrak{I}_1.$$

A partir del caso 2) en la sección 2.2, con la observación 26, obtenemos que:

$$Z_B(M_{25};s) = p^3(p-1)^3\,p^s\mathfrak{I}_3,$$

$$Z_B(M_{26};s) = p^2(p-1)^3\,p^{2s}\mathfrak{I}_3.$$

A partir del caso 2) en la sección 2.2, con la observación 25, obtenemos que:

$$Z_B\left(M_{27};s\right)=p^2\left(p-1\right)^3p^{2s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B\left(M_{28};s\right)=p^2\left(p-1\right)^2p^{2s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B\left(M_{29};s\right)=p\left(p-1\right)^3p^{3s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B\left(M_{30};s\right)=p\left(p-1\right)^2p^{3s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B\left(M_{31};s\right)=p\left(p-1\right)^3p^{3s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B\left(M_{32};s\right)=\left(p-1\right)^3p^{4s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B\left(M_{33};s\right)=\left(p-1\right)^2p^{4s}\mathfrak{I}_2.$$

A partir del caso 2) en la sección 2.2, con la observación 24, obtenemos que:

$$Z_B\left(M_{34};s\right)=p\left(p-1\right)^2p^{4s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B\left(M_{35};s\right)=\left(p-1\right)^2p^{5s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B\left(M_{36};s\right)=\left(p-1\right)p^{5s}\mathfrak{I}_1.$$

A partir del caso 3) en la sección 2.2, con la observación 26, obtenemos que:

$$Z_B\left(M_{37};s\right)=p^3\left(p-1\right)^3p^{s}\mathfrak{I}_3,$$
$$Z_B\left(M_{38};s\right)=p^2\left(p-1\right)^3p^{2s}\mathfrak{I}_3.$$

A partir del caso 3) en la sección 2.2, con la observación 25, obtenemos que:

$$Z_B\left(M_{39};s\right)=p^2\left(p-1\right)^2p^{3s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B\left(M_{40};s\right)=p^2\left(p-1\right)^3p^{2s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B\left(M_{41};s\right)=p\left(p-1\right)^3p^{3s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B\left(M_{42};s\right)=p\left(p-1\right)^2p^{4s}\mathfrak{I}_2.$$

A partir del caso 3) en la sección 2.2, con la observación 24, obtenemos que:

$$Z_B\left(M_{43};s\right)=p\left(p-1\right)^3p^{3s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B\left(M_{44};s\right)=p\left(p-1\right)^2p^{3s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B\left(M_{45};s\right)=\left(p-1\right)^3p^{4s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B\left(M_{46};s\right)=\left(p-1\right)^2p^{4s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B\left(M_{47};s\right)=\left(p-1\right)^2p^{5s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B\left(M_{48};s\right)=\left(p-1\right)p^{5s}\mathfrak{I}_1.$$

A partir del caso 4) en la sección 2.2, con la observación 26, obtenemos que:

$$Z_B\left(M_{49}\left(a\right);s\right)=p^2\left(p-1\right)^3p^{s}\mathfrak{I}_3$$

para $a\in F_p^*$,

$$Z_B\left(M_{50}\left(a\right);s\right)=p^2\left(p-1\right)^2p^{2s}\mathfrak{I}_3$$

para $a\in F_p^*$.

A partir del caso 4) en la sección 2.2, con la observación 25, obtenemos que:

$$Z_B\left(M_{51};s\right)=p^2\left(p-1\right)^3p^{2s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B\left(M_{52};s\right)=p^2\left(p-1\right)^2p^{3s}\mathfrak{I}_2,$$

$$Z_B(M_{53};s) = p(p-1)^3 p^{2s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B(M_{54}(a);s) = p(p-1)^3 p^{2s}\mathfrak{I}_2$$
para $a \in \{1,...,p-2\}$,
$$Z_B(M_{55};s) = p(p-1)^2 p^{3s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B(M_{56}(a);s) = p(p-1)^2 p^{3s}\mathfrak{I}_2$$
para $a \in \{1,...,p-2\}$,
$$Z_B(M_{57};s) = p(p-1)^3 p^{3s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B(M_{58};s) = p(p-1)^2 p^{4s}\mathfrak{I}_2.$$
A partir del caso 4) en la sección 2.2, con la observación 24, obtenemos que:
$$Z_B(M_{59};s) = p(p-1)^3 p^{3s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B(M_{60};s) = p(p-1)^2 p^{4s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B(M_{61};s) = (p-1)^3 p^{4s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B(M_{62};s) = (p-1)^2 p^{5s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B(M_{63};s) = (p-1)^2 p^{4s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B(M_{64};s) = (p-1) p^{5s}\mathfrak{I}_1.$$
A partir del caso 5) en la sección 2.2, con la observación 25, obtenemos que:
$$Z_B(M_{65};s) = p^3(p-1)^3 p^{2s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B(M_{66};s) = p^3(p-1)^2 p^{3s}\mathfrak{I}_2.$$
A partir del caso 5) en la sección 2.2, con la observación 24, obtenemos que:
$$Z_B(M_{67};s) = p^2(p-1)^3 p^{3s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B(M_{68};s) = p(p-1)^3 p^{3s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B(M_{69};s) = p(p-1)^2 p^{3s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B(M_{70};s) = p^2(p-1)^2 p^{4s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B(M_{71};s) = p(p-1)^2 p^{4s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B(M_{72};s) = p(p-1) p^{4s}\mathfrak{I}_1.$$
A partir del caso 6) en la sección 2.2, con la observación 26, obtenemos que:
$$Z_B(M_{73}(a);s) = p^3(p-1)^3 p^{s}\mathfrak{I}_3$$
para $a \in F_p^*$.

A partir del caso 6) en la sección 2.2, con la observación 25, obtenemos que:
$$Z_B(M_{74}(a);s) = p^2(p-1)^3 p^{2s}\mathfrak{I}_2$$
para $a \in F_p$.
$$Z_B(M_{75}(a);s) = p^2(p-1)^3 p^{2s}\mathfrak{I}_2$$
para $a \in F_p^*$,
$$Z_B(M_{76}(a);s) = p(p-1)^3 p^{3s}\mathfrak{I}_2$$
para $a \in F_p$.

A partir del caso 6) en la sección 2.2, con la observación 24, obtenemos que:

$$Z_B\left(M_{77}\left(a\right);s\right)=p\left(p-1\right)^3p^{3s}\mathfrak{I}_1$$

para $a\in F_p$,

$$Z_B\left(M_{78};s\right)=\left(p-1\right)^2p^{4s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B\left(M_{79}\left(a\right);s\right)=\left(p-1\right)^3p^{4s}\mathfrak{I}_1$$

para $a\in F_p$,

$$Z_B\left(M_{80};s\right)=\left(p-1\right)^3p^{4s}\mathfrak{I}_1.$$

A partir del caso 7) en la sección 2.2, con la observación 25, obtenemos que:

$$Z_B\left(M_{81}\left(a\right);s\right)=p^3\left(p-1\right)^3p^{2s}\mathfrak{I}_2$$

para $a\in F_p$.

A partir del caso 7) en la sección 2.2, con la observación 24, obtenemos que:

$$Z_B\left(M_{82};s\right)=p\left(p-1\right)^2p^{3s}\mathfrak{I}_1,$$

$$Z_B\left(M_{83};s\right)=p\left(p-1\right)^3p^{3s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B\left(M_{84}\left(a\right);s\right)=p\left(p-1\right)^3p^{3s}\mathfrak{I}_1$$

para $a\in F_p$,

$$Z_B\left(M_{85}\left(a\right);s\right)=p^2\left(p-1\right)^3p^{3s}\mathfrak{I}_1$$

para $a\in F_p$.

A partir del caso 8) en la sección 2.2, con la observación 26, obtenemos que:

$$Z_B\left(M_{86}\left(a\right);s\right)=p^2\left(p-1\right)^3p^{2s}\mathfrak{I}_3$$

para $a\in F_p^*$.

A partir del caso 8) en la sección 2.2, con la observación 25, obtenemos que:

$$Z_B\left(M_{87};s\right)=p^2\left(p-1\right)^3p^{3s}\mathfrak{I}_2,$$

$$Z_B\left(M_{88}\left(a\right);s\right)=p\left(p-1\right)^3p^{3s}\mathfrak{I}_2$$

para $a\in\{1,...,p-2\}$,

$$Z_B\left(M_{89};s\right)=p\left(p-1\right)^3p^{3s}\mathfrak{I}_2,$$
$$Z_B\left(M_{90};s\right)=p\left(p-1\right)^3p^{4s}\mathfrak{I}_2.$$

A partir del caso 8) en la sección 2.2, con la observación 24, obtenemos que:

$$Z_B\left(M_{91};s\right)=p\left(p-1\right)^3p^{4s}\mathfrak{I}_1,$$

$$Z_B\left(M_{92};s\right)=\left(p-1\right)^3p^{5s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B\left(M_{93};s\right)=\left(p-1\right)^2p^{5s}\mathfrak{I}_1.$$

A partir del caso 9) en la sección 2.2, con la observación 25, obtenemos que:

$$Z_B\left(M_{94};s\right)=p^3\left(p-1\right)^3p^{3s}\mathfrak{I}_2.$$

A partir del caso 9) en la sección 2.2, con la observación 24, obtenemos que:

$$Z_B\left(M_{95};s\right)=p^2\left(p-1\right)^3p^{4s}\mathfrak{I}_1,$$

$$Z_B(M_{96};s) = p(p-1)^3 p^{4s}\mathfrak{I}_1,$$
$$Z_B(M_{97};s) = p(p-1)^2 p^{4s}\mathfrak{I}_1.$$

Finalmente, obtenemos el resutado de la siguiente suma:

$$\sum_{i=1}^{97} Z_{B_p\left(C_{p^3}\right)}(M_i;s).$$

$\square$

2.3.2. *El Caso Global*

Por el corolario 2.3.1, se sigue que

$$\zeta_{B\left(C_{p^3}\right)}(s) = f_{C_{p^3}}\left(p^{-s}\right)\zeta_{\mathbb{Z}^4}(s) =$$

$$\begin{gathered}[1-3p^{-s}+\left(3+p+p^2+p^3\right)p^{-2s}+\left(-1-2p+p^2\right)\left(1+p+p^2\right)p^{-3s}+\\ p\left(3-p^3+p^4\right)p^{-4s}+p(p-1)\left(1-p+p^2+2p^3+p^4\right)p^{-5s}+\\ p^2(p-1)^3(p+1)p^{-6s}+p^3(p-1)\left(-1+p^2+p^3\right)p^{-7s}+\\ p^3(p-1)\left(1-2p+p^2+p^3\right)p^{-8s}+p^4(p-1)^2p^{-9s}]\left[\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\right]^4.\end{gathered}$$

Observación 28. Por último, vamos a estudiar algunas relaciones que satisfacen las funciones zeta $Z_B(M_i;s)$.

Sea τ la función tal que

$$\begin{array}{cccc}\tau: & \mathbb{Q}_p^4 & \to & \mathbb{Q}_p\\ & (a_1,a_2,a_3,a_4) & \longmapsto & \sum_{i=1}^4 a_i\end{array}$$

Ahora, denotamos por

$$\overline{M}_i = \left((a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{Q}_p^4:\ \tau\left((u,v,w,t)(a_1,a_2,a_3,a_4)\right)\in\mathbb{Z}_p\ \forall\ (u,v,w,t)\in\{M_i:B\}\right).$$

a) Para cada i en

$$\{19,...,24,34,...,36,43,...,48,59,...,64,67,...,72,77,...,80,82,...,85,91,92,93,95,96,97\}$$

tenemos que:

$$\{M_i:B\} = \left(p,p^2,p^3,p^3\right)\mathbb{Z}_p^4$$

de donde obtenemos $\overline{M}_i = \left(p^{-1},p^{-2},p^{-3},p^{-3}\right)\mathbb{Z}_p^4$. Así,

$$\overline{M}_i = \left(p^{-2},p^{-4},p^{-6},p^{-6}\right)\{M_i:B\}.$$

Por tanto, de acuerdo a la ecuación funcional dada en [10, Theorem 2.3] las siguientes relaciones se cumplen:

$$\frac{Z_B(M_i;s)}{Z_B(M_i;1-s)} = \left[\frac{\|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p^4}^{1-s}(B:M_i)^{1-2s}}{\left(\mathbb{Z}_p^4:\{M_i:B\}\right)}\right]\frac{\zeta_{\mathbb{Z}_p^4}(s)}{\zeta_{\mathbb{Z}_p^4}(1-s)}, \tag{V}$$

donde $\alpha = \left(p^{-2},p^{-4},p^{-6},p^{-6}\right)$, así $\|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p^4}^{1-s} = \left(p^{18}\right)^{1-s}$, además, $\left(\mathbb{Z}_p^4:\{M_i:B\}\right) = p^9$, por lo tanto, de (V) obtenemos:

$$\frac{Z_B(M_i;s)}{Z_B(M_i;1-s)} = \left[\left(p^9\right)^{1-2s}(B:M_i)^{1-2s}\right]\frac{\zeta_{\mathbb{Z}_p^4}(s)}{\zeta_{\mathbb{Z}_p^4}(1-s)}.$$

Por ejemplo $(B : M_{24}) = p^{-6}$. Así

$$\frac{Z_B(M_{24};s)}{Z_B(M_{24};1-s)} = \left[\left(p^3\right)^{1-2s}\right] \frac{\zeta_{\mathbb{Z}_p^4}(s)}{\zeta_{\mathbb{Z}_p^4}(1-s)}.$$

b) Para cada

$$i \in \{9, ..., 18, 27, ..., 33, 39, ..., 42, 51, ..., 58, 65, 66, 74, ..., 76, 81, 87, ..., 90, 94\}$$

tenemos que

$$\{M_i : B\} = \left(p, p^2, p^2, p^2\right)\left(\mathbb{Z}_p^2 \times B_p(C_p)\right)$$

de donde obtenemos $\overline{M}_i = \left(p^{-1}, p^{-2}, -p^{-3}, p^{-3}\right)\left(\mathbb{Z}_p^2 \times B_p(C_p)\right)$ así

$$\overline{M}_i = \left(p^{-2}, p^{-4}, -p^{-5}, p^{-5}\right)\{M_i : B\}.$$

Por lo tanto, para $\alpha = \left(p^{-2}, p^{-4}, -p^{-5}, p^{-5}\right)$, tenemos que $\|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p^4}^{1-s} = \left(p^{16}\right)^{1-s}$, además, $\left(\mathbb{Z}_p^4 : \{M_i : B\}\right) = p^8$, por lo tanto, de (V) obtenemos

$$\frac{Z_B(M_i;s)}{Z_B(M_i;1-s)} = \left[\left(p^8\right)^{1-2s}(B : M_i)^{1-2s}\right] \frac{\zeta_{\mathbb{Z}_p^4}(s)}{\zeta_{\mathbb{Z}_p^4}(1-s)}.$$

Por ejemplo $(B : M_{16}) = p^{-5}$, así

$$\frac{Z_B(M_{16};s)}{Z_B(M_{16};1-s)} = \left[\left(p^3\right)^{1-2s}\right] \frac{\zeta_{\mathbb{Z}_p^4}(s)}{\zeta_{\mathbb{Z}_p^4}(1-s)}.$$

c) Para cada $i \in \{2, ..., 8, 25, 26, 37, 38, 49, 50, 73, 86\}$ tenemos que

$$\{M_i : B\} = (p, p, p, p)\left(\mathbb{Z}_p \times B_p\left(C_{p^2}\right)\right)$$

de lo cual obtenemos $\overline{M}_i = \left(p^{-1}, p^{-2}, -p^{-3}, p^{-3}\right) M_{58}$ por lo tanto, la condición requerida en la ecuación funcional dada en [10, Theorem 2.3], no se cumple.

d) Finalmente, para $i = 1$ tenemos que

$$\{M_1 : B\} = B$$

satisface $\overline{M}_1 = \left(-p^{-1}, p^{-2}, -p^{-3}, p^{-3}\right) M_{94}$ por lo tanto, la condición requerida en la ecuación funcional dada en [10, Theorem 2.3], no se cumple .

Capítulo 3

Los Conductores de $B_p(C_{p^n})$

3.1. Los Conductores de $B_p(C_{p^n})$

En la Definición 2.1.7 podemos encontrar el concepto de conductor de una $\Lambda-$retícula plena M, en una álgebra semisimple A de dimensión finita sobre $\mathbb{Q}_p$ con Λ un $\mathbb{Z}_p-$orden en A para p un número primo. Luego, en la observación 16 se menciona que $B_p(G)$ es un $\mathbb{Z}_p-$orden con su respectivo orden máximo, con lo cual se puede pensar en los conductores de $B_p(G)$, pero puede no ser sencillo saber quienes son todas las $B_p(G)-$retículas plenas, lo cual hace que no pueda ser sencillo calcular la función zeta de $B_p(G)$ en el caso local (ver observación 21), y de $B(G)$ en el caso global. Sin embargo, en la observacion 23 se hace notar que para el caso $n = 3$ y sus $82 + 7p + 5(p-1) + 3(p-2)$ familias de representantes de las clases de isomorfismo de los ideales fraccionales de índice finito de $B_p(C_{p^3})$, sólo se obtienen 4 diferentes tipos de conductor, lo que facilita, hasta cierto punto, el conocimiento de la función zeta de $B_p(C_{p^3})$. Por tal motivo, el objetivo del capítulo es observar que pasa con los conductores de $B_p(C_{p^n})$.

Observación 29. Sea p un número primo, y sea $C_{p^n} = \langle a \rangle$ un grupo cíclico de orden p^n para $n \in \mathbb{N}$. Entonces, tenemos que las clases de conjugación de C_{p^n} son:

$$\mathscr{C}\left(C_{p^n}\right) = \left\{ \langle a \rangle,\ \langle a^p \rangle,\ \left\langle a^{p^2} \right\rangle, \ldots,\ \left\langle a^{p^n} \right\rangle = \langle 1 \rangle \right\}.$$

Por lo tanto, una base para $B_p\left(C_{p^n}\right)$ es

$$\left\{ a_0 = C_{p^n} \diagup \langle a \rangle,\ a_1 = C_{p^n} \diagup \langle a^p \rangle,\ a_2 = C_{p^n} \diagup \left\langle a^{p^2} \right\rangle, \ldots,\ a_n = C_{p^n} \diagup \left\langle a^{p^n} \right\rangle \right\},$$

y así

$$B_p\left(C_{p^n}\right) = \bigoplus_{i=0}^{n} a_i \mathbb{Z}_p.$$

Más aún, $\widetilde{B}_p\left(C_{p^n}\right) = \mathbb{Z}_p^{n+1}$ es su orden máximo. Por otro lado, sabemos que

$$\varphi_H\left(C_{p^n}/K\right) = \begin{cases} \left|C_{p^n}/K\right| & \text{if H} \subseteq \text{K} \\ 0 & \text{if H} \nsubseteq \text{K.} \end{cases}$$

Con lo cual, tenemos que φ induce la siguiente inclusión:

$$\begin{array}{ccc}
B_p\left(C_{p^n}\right) & \overset{\varphi}{\hookrightarrow} & \mathbb{Z}_p^{n+1} \\
X & \longmapsto & \left(\varphi_H(X)\right)_{[H]\in\mathscr{C}(C_{p^n})} \\
a_0 & \longmapsto & (\underbrace{1\ ,\ ...\ ,\ 1}_{(n+1)-\text{veces}}) \\
a_1 & \longmapsto & (0,\underbrace{p,\ ...\ ,p}_{n-\text{veces}}) \\
a_2 & \longmapsto & (0,0,\underbrace{p^2,\ ...\ ,p^2}_{(n-1)-\text{veces}}) \\
 & \vdots & \\
a_n & \longmapsto & (\underbrace{0,\ ...\ ,0}_{n-\text{veces}},p^n).
\end{array}$$

Por lo tanto, podemos caracterizar a $B_p\left(C_{p^n}\right)$ en $\widetilde{B}_p\left(C_{p^n}\right)$ como sigue:

$$B_p\left(C_{p^n}\right) = \left\{(x_1,x_2,\ ...\ ,x_{n+1}) \in \mathbb{Z}_p^{n+1}\colon\ (x_i - x_{i+1}) \in p^i\mathbb{Z}_p \ \text{ para }\ i = 1,...,n\right\}.$$

De aquí que, podemos dar la siguiente estructura de producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
(x_1,...,x_n,x_{n+1}) \arrow[rrr, mapsto, dashed] \arrow[ddd, mapsto, dashed] & & & x_{n+1} \arrow[ddd, mapsto, dashed] \\
& B_p(C_{p^n}) \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & \mathbb{Z}_p \arrow[d, "g_2"] & \\
& B_p(C_{p^{n-1}}) \arrow[r, "g_1"'] & \mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p & \\
(x_1,...,x_n) \arrow[rrr, mapsto, dashed] & & & \overline{x_n} = \overline{x_{n+1}}
\end{tikzcd}$$

Observemos que $\mathbb{Z}_p$ es un DIP. Por tanto, tiene ideales de la forma $p^r\mathbb{Z}_p$, para cada entero $r \geq 0$, y de acuerdo a la estructura de producto fibrado, tenemos que los ideales de índice finito en $B_p\left(C_{p^n}\right)$ son ideales de la forma:

$$I = (\alpha, p^r)\, B_p\left(C_{p^n}\right) + (J,0)\,,$$

donde α es un elemento de $B_p\left(C_{p^{n-1}}\right)$ y $J \leq B_p\left(C_{p^{n-1}}\right)$ es un ideal tal que:

1. $g_1\left(J\right) = 0.$
2. $g_1\left(\alpha\right) = g_2\left(p^r\right)$, donde α esta determidado de manera única mod J.
3. Si $D = p\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times \cdots \times p^n\mathbb{Z}_p \times \{0\}$, entonces $f_1\left(D\right)\alpha \subseteq J$.

En lo siguiente, vamos a denotar

$$\mathcal{N}_i = (p,p^2,...,p^{i-1},p^i,\ \underbrace{p^i,\ ...\ ,p^i}_{(n-i+1)-\text{veces}}\ )\left(\mathbb{Z}_p^i \times B_p(C_{p^{n-i}})\right) \ \text{ para }\ i = 1,...,n-1 \ \text{ y}$$

$$\mathcal{N}_n = \left(p,p^2,...,p^n,p^n\right)\mathbb{Z}_p^{n+1}.$$

Lema 3.1.1. Sea $\mathcal{N}_0 = B_p(C_{p^n})$. Entonces $\mathcal{N}_0, ..., \mathcal{N}_n$ son los conductores de algunos ideales fraccionales de índice finito en $B_p(C_{p^n})$.

Demostración. Primero, notemos que $\{B_p(C_{p^n}) : B_p(C_{p^n})\} = \mathcal{N}_0$ y entonces $\mathcal{N}_0$ es su propio conductor.

Luego, sean $i \in \{1, ..., n-1\}$, y $\mathbb{Z}_p^i \times B_p(C_{p^{n-i}})$ un ideal fraccional de índice finito en $B_p(C_{p^n})$, el cuál, pertenece a la misma clase de isomorfismo que $\mathcal{N}_i$. Es sencillo ver que $\mathbb{Z}_p^i \times B_p(C_{p^{n-i}}) = \langle e_1, e_2 ..., e_i, \beta_{i+1}, \beta_{i+2}, ..., \beta_{n+1}\rangle \subset \mathbb{Z}_p^{n+1}$ como $\mathbb{Z}_p$−módulo, donde

$$\begin{array}{ccc} e_1 = (1,0,...,0) & & \beta_{i+1} = (0,...,0,\underset{\underset{(i+1)-\text{ésima coordenada}}{\downarrow}}{1},1,...,1) \\ e_2 = (0,1,0,...,0) & \text{y} & \beta_{i+2} = (0,...,0,\underset{\underset{(i+2)-\text{ésima coordenada}}{\downarrow}}{p},p,...,p) \\ \vdots & & \vdots \\ e_i = (0,...,0,\underset{\underset{i-\text{ésima coordenada}}{\downarrow}}{1},0,...,0) & & \beta_{n+1} = (0,...,0,p^{n-i}). \end{array}$$

Por otra parte, sabemos que $\left\{\left(\mathbb{Z}_p^i \times B_p(C_{p^{n-i}})\right) : B_p(C_{p^n})\right\} =$

$$\left\{(y_1, ..., y_{n+1}) \in \mathbb{Q}_p^{n+1} : \ (y_1, ..., y_{n+1})\left(\mathbb{Z}_p^i \times B_p(C_{p^{n-i}})\right) \subseteq B_p(C_{p^n})\right\}.$$

Si $(y_1, ..., y_{n+1}) \in \left\{\left(\mathbb{Z}_p^i \times B_p(C_{p^{n-i}})\right) : \ B_p(C_{p^n})\right\}$, entonces tenemos que

$$\begin{array}{ccc} (y_1,0,...,0) \in B_p(C_{p^n}) & & \alpha_{i+1} = (0,...,0,y_{i+1},...,y_{n+1}) \in B_p(C_{p^n}) \\ (0,y_2,0,...,0) \in B_p(C_{p^n}) & \text{y} & \alpha_{i+2} = (0,...,0,py_{i+2},...,py_{n+1}) \in B_p(C_{p^n}) \\ \vdots & & \vdots \\ (0,...,0,y_i,0,...,0) \in B_p(C_{p^n}) & & \alpha_{n+1} = (0,...,0,p^{n-i}y_{n+1}) \in B_p(C_{p^n}). \\ \text{(i)} & & \text{(ii)} \end{array}$$

De (i), se sigue que $y_\kappa \in p^\kappa \mathbb{Z}_p$ para $\kappa \in \{1, ..., i\}$. De (ii) se tiene que $\alpha_{i+1} \in B_p(C_{p^n})$, luego $y_\lambda \in p^i\mathbb{Z}_p$ para $\lambda \in \{i+1, ..., n+1\}$. Se sigue que $y_\lambda = p^i b_\lambda$ para algún $b_\lambda \in \mathbb{Z}_p$. Más aún, tenemos que $y_{l+1} - y_l \in p^l\mathbb{Z}_p$ para $l \in \{i+1, ..., n\}$, entonces $b_{l+1} - b_l \in p^{l-i}\mathbb{Z}_p$. Así, se tiene que

$$\left\{\left(\mathbb{Z}_p^i \times B_p(C_{p^{n-i}})\right) : \ B_p(C_{p^n})\right\} \subseteq \mathcal{N}_i.$$

Es sencillo ver la otra inclusión $\left\{\left(\mathbb{Z}_p^i \times B_p(C_{p^{n-i}})\right) : \ B_p(C_{p^n})\right\} \supseteq \mathcal{N}_i$. Entonces

$$\left\{\left(\mathbb{Z}_p^i \times B_p(C_{p^{n-i}})\right) : \ B_p(C_{p^n})\right\} = \mathcal{N}_i \quad \text{ para } i = 1, ..., n-1.$$

Finalmente, se puede ver que $\left\{\mathbb{Z}_p^{n+1} : B_p(C_{p^n})\right\} = \mathcal{N}_n$. Por tanto $\mathcal{N}_n$ es el conductor del ideal fraccional $\mathbb{Z}_p^{n+1}$ de índice finito en $B_p(C_{p^n})$.

$\square$

Lema 3.1.2. Sean M y N $\mathbb{Z}_p$−retículas plenas en $\mathbb{Q}_p^{n+1}$. Entonces $\{M : B_p(C_{p^n})\} = N$ si y sólo si $\{\alpha M : B_p(C_{p^n})\} = \alpha^{-1}N$ para cada $\alpha \in (\mathbb{Q}_p^*)^{n+1}$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $\{M : B_p(C_{p^n})\} = N$, entonces tenemos que

$$\{\alpha M : B_p(C_{p^n})\} = \left\{\beta \in \mathbb{Q}_p^{n+1} : \beta(\alpha M) \subseteq B_p(C_{p^n})\right\} = \left\{\beta \in \mathbb{Q}_p^{n+1} : (\alpha\beta)M \subseteq B_p(C_{p^n})\right\} =$$

$$\left\{\beta \in \mathbb{Q}_p^{n+1} : (\alpha\beta) \in \{M : B_p(C_{p^n})\}\right\} = \alpha^{-1}\{M : B_p(C_{p^n})\},$$

de aquí

$$\{\alpha M : B_p(C_{p^n})\} = \alpha^{-1}N.$$

($\Leftarrow$) Si $\{\alpha M : B_p(C_{p^n})\} = \alpha^{-1}N$ para cada $\alpha \in \mathbb{Q}_p^{n+1}$, entonces en particular, cuando $\alpha = (1, ..., 1) \in \mathbb{Q}_p^{n+1}$, obtenemos que

$$\{M : B_p(C_{p^n})\} = N.$$

$\square$

Observación 30. Ahora, vamos a denotar $\mathcal{M}_i = \left(\mathbb{Z}_p^i \times B_p(C_{p^{n-i}})\right)$ para $i = 1, ..., n-1$, y $\mathcal{M}_n = \mathbb{Z}_p^{n+1}$.

Sea M un ideal fraccional de índice finito en $B_p(C_{p^n})$ tal que

$$\{M : B_p(C_{p^n})\} = \alpha\{\mathcal{M}_j : B_p(C_{p^n})\}$$

para algún $j \in \{1, ..., n\}$ y $\alpha \in (\mathbb{Q}_p^*)^{n+1}$. Entonces, por la Proposición 3.1.2 tenemos que

$$\{\alpha M : B_p(C_{p^n})\} = \{\mathcal{M}_j : B_p(C_{p^n})\}.$$

Lo cual nos permite evitar, de ser necesario, unidades $\alpha \in (\mathbb{Q}_p^*)^{n+1}$, cuando trabajamos clases de isomorfismo, ya que $[M] = [\alpha M]$.

Lema 3.1.3. Sea M un ideal fraccional de índice finito en $B_p(C_{p^n})$. Si

$$\{M : B_p(C_{p^n})\} = \{\mathcal{M}_i : B_p(C_{p^n})\}$$

para algún $i \in \{1, ..., n\}$, entonces $M \subseteq \mathcal{M}_i$.

Demostración. Primeramente, observemos que si $\{M : B_p(C_{p^n})\} = \{\mathcal{M}_n : B_p(C_{p^n})\}$, entonces es claro que $M \subseteq \mathcal{M}_n$.

De la prueba del Lema 3.1.1, tenemos que $\{\mathcal{M}_i : B_p(C_{p^n})\} = \mathcal{N}_i$ para $i = 1, ..., n-1$, luego, sabemos que $(0, ..., 0, \underset{\substack{\downarrow \\ (i+1)-\text{ésima coordenada}}}{p^i}, ..., p^i) \in \{\mathcal{M}_i : B_p(C_{p^n})\}$.

Ahora, si $\{M : B_p(C_{p^n})\} = \{\mathcal{M}_i : B_p(C_{p^n})\}$ para algún $i \in \{1, ..., n-1\}$, entonces $(0, ..., 0, p^i, ..., p^i) \in \{M : B_p(C_{p^n})\}$. De aquí que

$$(0, ..., 0, p^i, ..., p^i)(m_1, ..., m_{n+1}) \in B_p(C_{p^n}) \text{ para todo } (m_1, ..., m_{n+1}) \in M,$$

en consecuencia

$$(0, ..., 0, p^i m_{i+1}, ..., p^i m_{n+1}) \in B_p(C_{p^n}),$$

entonces

$$p^i(m_{k+1} - m_k) \in p^k\mathbb{Z}_p \text{ para } k = i+1, ..., n.$$

Con lo cual $(m_{k+1} - m_k) \in p^{k-i}\mathbb{Z}_p$ para $k = i+1, ..., n$, así

$$(m_1, ..., m_{n+1}) \in \mathcal{M}_i = \mathbb{Z}_p^i \times B_p(C_{p^{n-i}}),$$

y por tanto

$$M \subseteq \mathcal{M}_i.$$

$\square$

Observación 31. De acuerdo con la notación de la observación 30, tenemos la siguiente contencion de anillos

$$\mathcal{M}_0 = B_p(C_{p^n}) \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{M}_n = \mathbb{Z}_p^{n+1}.$$

Sea M un ideal fraccional de índice finito en $B_p(C_{p^n})$ tal que $M \not\subseteq B_p(C_{p^n})$ y $M \neq \mathcal{M}_i$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Se tiene que $M \subseteq \mathcal{M}_n$, entonces podemos elegir $i \in \{1, ..., n\}$ el índice mínimo, tal que $M \subseteq \mathcal{M}_i$ y también $M \not\subseteq \mathcal{M}_{i-1}$.

Lema 3.1.4. sea M un ideal fraccional de índice finito en $B_p(C_{p^n})$ y sea $i \in \{1, ..., n\}$ el índice mínimo, tal que $M \subseteq \mathcal{M}_i$. Sea $M = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$, donde $\mathcal{X} = M \cap \mathcal{M}_{i-1}^c$ y $\mathcal{Y} = M \cap \mathcal{M}_{i-1}$ (Aquí $\mathcal{M}_{i-1}^c$ es el complemento de $\mathcal{M}_{i-1}$ in $\mathbb{Z}_p^{n+1}$). Si existen $\gamma_1, ..., \gamma_{n+1} \in M$, tal que $\mathcal{X} \subset (N = \langle \gamma_1, ..., \gamma_{n+1} \rangle$ as $\mathbb{Z}_p-$módulo) y $\{N : B_p(C_{p^n})\} \subseteq \{\mathcal{M}_i : B_p(C_{p^n})\}$, entonces $\{M : B_p(C_{p^n})\} = \{\mathcal{M}_i : B_p(C_{p^n})\}$.

Demostración.

Tenemos que $i \in \{1, ..., n\}$ es el índice mínimo, tal que $M \subseteq \mathcal{M}_i$, entonces $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Ahora, $N \subseteq M$, then $\{M : B_p(C_{p^n})\} \subseteq \{N : B_p(C_{p^n})\}$, y por hipótesis $\{N : B_p(C_{p^n})\} \subseteq \{\mathcal{M}_i : B_p(C_{p^n})\}$, así

$$\{M : B_p(C_{p^n})\} \subseteq \{\mathcal{M}_i : B_p(C_{p^n})\}.$$

Finalmente, se tiene que $M \subseteq \mathcal{M}_i$, con lo cual

$$\{\mathcal{M}_i : B_p(C_{p^n})\} \subseteq \{M : B_p(C_{p^n})\},$$

y por lo tanto

$$\{M : B_p(C_{p^n})\} = \{\mathcal{M}_i : B_p(C_{p^n})\}.$$

□

Observación 32. De la la observación 29, podemos probrar por inducción sobre n que los ideales de índice finito en $B_p(C_{p^n})$ son de la forma:

$$\left(p^{k_1}\beta_1, ..., p^{k_{n+1}}\beta_{n+1}\right)\left\{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{Z}_p^{n+1} : \mathcal{R}_1 \in p^{m_1}\mathbb{Z}_p, ..., \mathcal{R}_\lambda \in p^{m_\lambda}\mathbb{Z}_p\right\},$$

donde:

1. $0 \leq k_i,\ \ \beta_i \in \mathbb{Z}_p^*$ para $i = 1, ..., n+1$;
2. $1 \leq \lambda \leq n,\ \ 0 \leq m_j \leq n,\ \ \sum_{j=1}^{\lambda} m_j \leq \frac{n(n+1)}{2}$;
3. $\mathcal{R}_j = \sum_{i=1}^{n+1}\left(\alpha_{i,1} + p\alpha_{i,2} + ... + p^{m_j-1}\alpha_{i,m_j}\right)x_i$ para $\alpha_{i,\nu} \in \{0, ..., p-1\}$ y al menos dos $\alpha_{i,1}$ no son cero.

Entonces si M es un ideal fraccional de índice finito de $B_p(C_{p^n})$, este es de la forma:

$$M = \left\{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{Z}_p^{n+1} :\ \ \mathcal{R}_1 \in p^{m_1}\mathbb{Z}_p, ..., \mathcal{R}_\lambda \in p^{m_\lambda}\mathbb{Z}_p\right\}$$

para algún $\mathcal{R}_j \in p^{m_j}\mathbb{Z}_p$ y $\sum_{j=1}^{\lambda} m_j \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

En el siguiente teorema, consideramos las hipotesis de los Lemas 3.1.1, 3.1.3 y 3.1.4.

Teorema 3.1.1. Los únicos conductores de las clases de isomorfismo de los ideales fraccionales de índice finito en $B_p(C_{p^n})$ son:

$$\mathcal{N}_0 = B_p(C_{p^n}),$$

$$\mathcal{N}_i = (p, p^2, ..., p^{i-1}, p^i, \underbrace{p^i, ..., p^i}_{(n-i+1)-\text{veces}})\left(\mathbb{Z}_p^i \times B_p(C_{p^{n-i}})\right) \text{ para } i = 1, ..., n-1, \text{ y}$$

$$\mathcal{N}_n = \left(p, p^2, ..., p^n, p^n\right)\mathbb{Z}_p^{n+1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Esto se sigue de las pruebas de los Lemas 3.1.1, 3.1.3 y 3.1.4. $\square$

Teorema 3.1.2. Existen polinomios $f_i(p^s) \in \mathbb{Z}[p^s]$ de grado

$$\partial(f_i(p^s)) \leq \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{para } i = 0, ..., n \text{ tal que}$$

$$\zeta_{B_p(C_{p^n})}(s) = \sum_{i=0}^{n} f_i(p^s) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^{n+1} \bigcap \mathcal{N}_i} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^{n+1}}^s \, d^*x$$

DEMOSTRACIÓN. Sea M un ideal fraccional de índice finito en $B_p(C_{p^n})$. Sabemos que

$$Z_{B_p(C_{p^n})}(M;s) = \mu^*\left(\mathrm{Aut}_{B_p(C_{p^n})}M\right)^{-1}(B_p(C_{p^n}) : M)^{-s} \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^{n+1} \bigcap \{M : B_p(C_{p^n})\}} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^{n+1}}^s \, d^*x.$$

Por otro lado, tenemos que (similar al apéndice A)

$$\mu^*\left(\mathrm{Aut}_{B_p(C_{p^n})}M\right)^{-1} = \left((\mathbb{Z}_p^*)^{n+1} : \mathrm{Aut}_{B_p(C_{p^n})}M\right) \in \mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

Luego, de la observación 32 sabemos que M es de la forma:

$$M = \left\{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{Z}_p^{n+1} : \quad \mathcal{R}_1 \in p^{m_1}\mathbb{Z}_p, ..., \mathcal{R}_\lambda \in p^{m_\lambda}\mathbb{Z}_p\right\}$$

para algún $\mathcal{R}_j \in p^{m_j}\mathbb{Z}_p$ y $\sum_{j=1}^{\lambda} m_j \leq \frac{n(n+1)}{2}$. Ahora, es fácil ver que

$$\frac{\mathbb{Z}_p^{n+1}}{M} \cong \frac{\mathbb{Z}}{p^{m_1}\mathbb{Z}} \times \cdots \times \frac{\mathbb{Z}}{p^{m_\lambda}\mathbb{Z}} \text{ (similar al apéndice A).}$$

De aquí que

$$\begin{gathered}(B_p(C_{p^n}) : M)^{-s} = \left(B_p(C_{p^n}) : \mathbb{Z}_p^{n+1}\right)^{-s}\left(\mathbb{Z}_p^{n+1} : \; M\right)^{-s} = \\ \left(\mathbb{Z}_p^{n+1} : B_p(C_{p^n})\right)^s p^{-\left(\sum_{j=1}^{\lambda} m_j\right)s} = p^{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)s} p^{-\left(\sum_{j=1}^{\lambda} m_j\right)s} = (p^s)^d\end{gathered} \tag{3.2}$$

para algún $d \in \mathbb{N}$, tal que $0 \leq d \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

Más aún, del Teorema 3.1.1, existe $i \in \{0, ..., n\}$ tal que

$$\{M : B_p(C_{p^n})\} = \mathcal{N}_i \tag{3.3}$$

entonces de (3.1), (3.2) y (3.3) se sigue que

$$Z_{B_p(C_{p^n})}(M;s) = f_M(p^s) \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^{n+1} \bigcap \mathcal{N}_i} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^{n+1}}^s \, d^*x$$

para algún polinomio $f_M(p^s) \in \mathbb{Z}[p^s]$ de grado $0 \leq \partial(f_M(p^s)) \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

Finalmente, sabemos que

$$\zeta_{B_p(C_{p^n})}(s) = \sum_M Z_{B_p(C_{p^n})}(M;s),$$

donde la suma se extiende sobre todos los representantes de las clases de isomorfismo de ideales fraccionales de índice finito en $B_p(C_{p^n})$. Entonces, si asociamos a estos representantes de acuerdo con sus conductores, obtenemos lo deseado. $\square$

Teorema 3.1.3. Existe una fórmula recursiva para calcular

$$\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^{n+1}\bigcap \mathcal{N}_i} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^{n+1}}^s\, d^*x \text{ para } i=0,...,n.$$

Demostración. Primero, elegimos una medida de Haar d^*x en $\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^{n+1}$, tal que $d^*x = (d^*\alpha)^{n+1}$, donde $d^*\alpha$ es una medida de Haar $\mathbb{Q}_p^*$ tal que $\int_{\mathbb{Z}_p^*} d^*\alpha = 1$. Entonces

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p^*\bigcap \mathbb{Z}_p} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s\, d^*\alpha = \int\limits_{\bigcup\limits_{t=0}^{\infty} p^t\mathbb{Z}_p^*} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s\, d^*\alpha = \sum_{t=0}^{\infty}\left[\left(p^{-s}\right)^t \int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} d^*\alpha\right] = \frac{1}{(1-p^{-s})}.$$

Ahora, tenemos que

$$\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^{n+1}\bigcap \mathcal{N}_n} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^{n+1}}^s\, d^*x =$$

$$\left\|\left(p,p^2,...,p^n,p^n\right)\right\|_{\mathbb{Q}_p^{n+1}}^s \left[\int\limits_{\mathbb{Q}_p^*\bigcap \mathbb{Z}_p} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s\, d^*\alpha\right]^{n+1} = \frac{\left(p^{-s}\right)^{\frac{n(n+3)}{2}}}{(1-p^{-s})^{n+1}}. \tag{3.4}$$

Ahora, sea $i\in\{1,...,n-1\}$. Elegimos una medida de Haar d^*y en $\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^{n-i+1}$, tal que $d^*y = (d^*\alpha)^{n-i+1}$, luego, obtenemos que

$$\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^{n+1}\bigcap \mathcal{N}_i} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^{n+1}}^s\, d^*x =$$

$$\left\|(p,p^2,...,p^i,\underbrace{p^i,...,p^i}_{(n-i+1)-\text{veces}})\right\|_{\mathbb{Q}_p^{n+1}}^s \left[\int\limits_{\mathbb{Q}_p^*\bigcap \mathbb{Z}_p} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s\, d^*\alpha\right]^i \int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^{n-i+1}\bigcap B_p\left(C_{p^{n-i}}\right)} \|y\|_{\mathbb{Q}_p^{n-i+1}}^s\, d^*y =$$

$$\frac{\left(p^{-s}\right)^{\frac{i(2n+3-i)}{2}}}{(1-p^{-s})^i}\left[\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^{n-i+1}\bigcap B_p\left(C_{p^{n-i}}\right)} \|y\|_{\mathbb{Q}_p^{n-i+1}}^s\, d^*y\right]. \tag{3.5}$$

Finalmente, podemos calcular recursivamente

$$\int\limits_{\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^{n-i+1}\bigcap B_p\left(C_{p^{n-i}}\right)} \|y\|_{\mathbb{Q}_p^{n-i+1}}^s\, d^*y$$

como sigue:

Sea $2\le l$. Elegimos una medida de Haar d^*y_{l+1} en $\left(\mathbb{Q}_p^*\right)^{l+1}$, tal que $d^*y_{l+1} = (d^*\alpha)^{l+1}$. Sabemos que, $B_p\left(C_{p^l}\right)$ es local, donde

$$\operatorname{rad}\left(B_p\left(C_{p^l}\right)\right) = (p,...,p)\left[\mathbb{Z}_p\times B_p\left(C_{p^{l-1}}\right)\right].$$

Entonces

$$B_p\left(C_{p^l}\right) = B_p^*\left(C_{p^l}\right)\bigcup (p,...,p)\left[\mathbb{Z}_p\times B_p\left(C_{p^{l-1}}\right)\right]$$

y luego

$$\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^{l+1}\bigcap B_p\left(C_{p^l}\right)} \|y_{l+1}\|_{\mathbb{Q}_p^{l+1}}^s \, d^*y_{l+1} =$$

$$\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^{l+1}\bigcap B_p^*\left(C_{p^l}\right)} d^*y_{l+1} + \int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^{l+1}\bigcap (p,...,p)\left[\mathbb{Z}_p \times B_p\left(C_{p^{l-1}}\right)\right]} \|y_{l+1}\|_{\mathbb{Q}_p^{l+1}}^s \, d^*y_{l+1} =$$

$$\left((\mathbb{Z}_p^*)^{l+1} : \; B_p^*\left(C_{p^l}\right)\right)^{-1} + \|(p,...,p)\|_{\mathbb{Q}_p^{l+1}}^s \left[\int\limits_{\mathbb{Q}_p^*\bigcap \mathbb{Z}_p} \|\alpha\|_{\mathbb{Q}_p}^s \, d^*\alpha\right] \left[\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^l\bigcap B_p\left(C_{p^{l-1}}\right)} \|y_l\|_{\mathbb{Q}_p^l}^s \, d^*y_l\right] =$$

$$\frac{1}{p^{\frac{l(l-1)}{2}}(p-1)^l} + \frac{\left(p^{-s}\right)^{l+1}}{(1-p^{-s})}\left[\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^l\bigcap B_p\left(C_{p^{l-1}}\right)} \|y_l\|_{\mathbb{Q}_p^l}^s \, d^*y_l\right]. \tag{3.6}$$

$\square$

Corolario 3.1.1.

$$\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^{n+1}\bigcap \mathcal{N}_i} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^{n+1}}^s \, d^*x = \frac{g_i(p^{-s})}{p^{\frac{(n-i)(n-i-1)}{2}}(p-1)^{n-i}(1-p^{-s})^{n+1}},$$

donde $g_i(p^{-s}) \in \mathbb{Z}\left[p^{-s}\right]$ es un polinomio de grado

$$\partial\left(g_i(p^{-s})\right) = \frac{n(n+3)}{2}, \text{ para } i = 0,...,n.$$

Demostración. De la observación 26, tenemos que

$$\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^2\bigcap B_p(C_p)} \|z\|_{\mathbb{Q}_p^2}^s \, d^*z = \frac{1-2\left(p^{-s}\right)+p\left(p^{-s}\right)^2}{(p-1)\left(1-p^{-s}\right)^2}.$$

Ahora, de (3.6) es fácil ver por inducción sobre $2 \leq l$, que

$$\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^{l+1}\bigcap B_p\left(C_{p^l}\right)} \|y_{l+1}\|_{\mathbb{Q}_p^{l+1}}^s \, d^*y_{l+1} = \frac{h_l(p^{-s})}{p^{\frac{l(l-1)}{2}}(p-1)^l(1-p^{-s})^{l+1}}, \tag{3.7}$$

donde $h_l(p^{-s}) \in \mathbb{Z}\left[p^{-s}\right]$ es un polinomio de grado

$$\partial\left(h_l(p^{-s})\right) = \frac{l(l+3)}{2}$$

entonces, de (3.4), (3.5) y (3.7) se sigue que:

$$\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^{n+1}\bigcap \mathcal{N}_i} \|x\|_{\mathbb{Q}_p^{n+1}}^s \, d^*x = \frac{g_i(p^{-s})}{p^{\frac{(n-i)(n-i-1)}{2}}(p-1)^{n-i}(1-p^{-s})^{n+1}},$$

donde $g_i(p^{-s}) \in \mathbb{Z}\left[p^{-s}\right]$ es un polinomio de grado

$$\partial\left(g_i(p^{-s})\right) = \frac{n(n+3)}{2}, \; i = 0,...,n.$$

$\square$

Lema 3.1.5. Sea M un ideal fraccional de índice finito en $B_p(C_{p^n})$. Si M es un $\mathbb{Z}_p-$orden, entonces

$$\mu^*\left(\mathrm{Aut}_{B_p(C_{p^n})}M\right)^{-1}(B_p(C_{p^n}):M)^{-s}=p^b(p-1)^c(p^s)^d$$

para $b+c+d=\frac{n(n+1)}{2}$

Demostración. De la observación 32, tenemos que:

$$M=\left\{(x_1,...,x_{n+1})\in\mathbb{Z}_p^{n+1}:\quad \mathcal{R}_1\in p^{m_1}\mathbb{Z}_p,...,\mathcal{R}_\lambda\in p^{m_\lambda}\mathbb{Z}_p\right\}$$

para algún $\mathcal{R}_j\in p^{m_j}\mathbb{Z}_p$ y $\sum_{j=1}^{\lambda}m_j\leq\frac{n(n+1)}{2}$. De (3.2) tenemos que

$$(B_p(C_{p^n}):M)^{-s}=(p^s)^{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-\left(\sum_{j=1}^{\lambda}m_j\right)} \tag{3.8}$$

y de (3.1) tenemos

$$\mu^*\left(\mathrm{Aut}_{B_p(C_{p^n})}M\right)^{-1}=\left((\mathbb{Z}_p^*)^{n+1}:\mathrm{Aut}_{B_p(C_{p^n})}M\right)$$

Ahora por hipótesis, obtenemos que

$$\mathrm{End}_{B_p(C_{p^n})}M=M$$

y su grupo de unidades es $\mathrm{Aut}_{B_p(C_{p^n})}M=M^*$. Es fácil ver (similar al apéndice A) que

$$\frac{(\mathbb{Z}_p^*)^{n+1}}{M^*}\cong\left(\frac{\mathbb{Z}}{p^{m_1}\mathbb{Z}}\right)^*\times\cdots\times\left(\frac{\mathbb{Z}}{p^{m_\lambda}\mathbb{Z}}\right)^*$$

Luego

$$\left((\mathbb{Z}_p^*)^{n+1}:\mathrm{Aut}_{B_p(C_{p^n})}M\right)=p^{\left(\sum_{j=1}^{\lambda}m_j\right)-\lambda}(p-1)^\lambda \tag{3.9}$$

Finalmente, de (3.1), (3.8) y (3.9) obtenemos

$$\mu^*\left(\mathrm{Aut}_{B_p(C_{p^n})}M\right)^{-1}(B_p(C_{p^n}):M)^{-s}=p^{\left(\sum_{j=1}^{\lambda}m_j\right)-\lambda}(p-1)^\lambda\,(p^s)^{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-\left(\sum_{j=1}^{\lambda}m_j\right)}$$

□

Ahora, enunciamos un conjetura importante, que de ser cierta, nos permitiría dar una estructura algebraica a través de la función zeta.

Conjetura 1. Sea M un ideal fraccional de índice finito de $B_p(C_{p^n})$. Entonces, M es un $\mathbb{Z}_p-$orden si y sólo si

$$Z_{B_p(C_{p^n})}(M;s)=p^b(p-1)^c(p^s)^d\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^{n+1}\cap\{M:B_p(C_{p^n})\}}\|x\|_{\mathbb{Q}_p^{n+1}}^s\,d^*x$$

para $b+c+d=\frac{n(n+1)}{2}$

Observación 33. Sea M un ideal fraccional de índice finito de $B_p(C_{p^n})$. Obtenemos que:

$$Z_{B_p(C_{p^n})}(M;s)=$$
$$\mu^*\left(\mathrm{Aut}_{B_p(C_{p^n})}M\right)^{-1}(B_p(C_{p^n}):M)^{-s}\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^{n+1}\cap\{M:B_p(C_{p^n})\}}\|x\|_{\mathbb{Q}_p^{n+1}}^s\,d^*x.$$

Si M es un $\mathbb{Z}_p-$orden, entonces el resultado en la conjetura 1 se sigue del lema 3.1.5. Reciprocamente, si

$$Z_{B_p(C_{p^n})}(M;s)=p^b(p-1)^c(p^s)^d\int\limits_{(\mathbb{Q}_p^*)^{n+1}\cap\{M:B_p(C_{p^n})\}}\|x\|_{\mathbb{Q}_p^{n+1}}^s\,d^*x$$

para $b+c+d=\frac{n(n+1)}{2}$, entonces M es un $\mathbb{Z}_p-$orden para $n=1,2,3$.

3.2. *Ejemplo de aplicación del Lema* 3.1.4

Al observar la prueba del teorema 3.1.4 algunas de las hipótesis parecen estar de más. Sin embargo, en esta sección se pretende ilustrar la importancia de considerarlas en el caso específico de describir que forma debe tener N de modo que $\{N : B\} \subseteq \{M_i : B\}$, a partir de que $M \subseteq M_i$ y $M \not\subseteq M_{i-1}$.

Para ver mas claro el proceso a seguir consideremos el caso $B_p(C_{p^3})$.

Observación 34. Sustituyendo $n = 3$ en el Lema 3.1.1, tenemos que si M es un ideal fraccional de B tal que $M = B$ o $M = \mathcal{M}_1$ o $M = \mathcal{M}_2$ o $M = \mathcal{M}_3 = \mathbb{Z}_p^4$, se tiene que el conductor de M en B es B o $(p,p,p,p)\,\mathcal{M}_1$ o $\left(p,p^2,p^2,p^2\right)\mathcal{M}_2$ o $\left(p,p^2,p^3,p^3\right)\mathbb{Z}_p^4$; respectivamente, donde
$B = B_p(C_{p^3}) = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v-u \in p\mathbb{Z}_p,\ w-v \in p^2\mathbb{Z}_p \text{ y } t-w \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}$,
$\mathcal{M}_1 = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w-v \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } t-w \in p^2\mathbb{Z}_p\right\}$ y
$\mathcal{M}_2 = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t-w \in p\mathbb{Z}_p\right\}$.

Ahora, consideremos el caso $M \neq B,\ \mathcal{M}_1,\ \mathcal{M}_2$ y $\mathcal{M}_3$ y sea i el menor entero positivo tal que $M \subseteq \mathcal{M}_i$, entonces:

Caso 1) $i = 1$.
Caso 2) $i = 2$.
Caso 3) $i = 3$.

Caso 2)

Sea $M \subseteq \mathcal{M}_2$ un ideal fraccional de B tal que $M \not\subseteq \mathcal{M}_1$. En base al Lema 3.1.4, sea $(u,v,w,t) \in \mathcal{X} = M \cap \mathcal{M}_1^c$. Entonces $(u,v,w,t) \notin \mathcal{M}_1$, por lo que tenemos los siguientes casos:

i) $w - v \in p\mathbb{Z}_p$ y $t - w \notin p^2\mathbb{Z}_p$.

ii) $w - v \notin p\mathbb{Z}_p$ y $t - w \in p^2\mathbb{Z}_p$.

Observemos que para *i*) y *ii*), se cumple que $t - w \in p\mathbb{Z}_p$.

Consideremos el caso *i*).

Notemos que para este caso, se tiene que $w - a_1u \in p\mathbb{Z}_p$ si y sólo si $t - a_1u \in p\mathbb{Z}_p$ si y sólo si $v - a_1u \in p\mathbb{Z}_p$ para $a_1 \in U(\mathbb{Z}_p)$. Con lo cual, sólo hay que analizar los siguientes casos para *i*):

i_1) $w - a_1u \notin p\mathbb{Z}_p$ con $a_1 \in U(\mathbb{Z}_p)$.

i_2) $w - a_1u \in p\mathbb{Z}_p$ con $a_1 \in U(\mathbb{Z}_p)$.

Veamos el caso i_1).

Notemos que en general

$$a_1'u + a_2'v + a_3'w + a_4't \notin p\mathbb{Z}_p,$$
$$a_1'u + a_2'v + a_3'w \notin p\mathbb{Z}_p,$$
$$a_1'u + a_2'v + a_4't \notin p\mathbb{Z}_p \text{ y}$$
$$a_1'u + a_3'w + a_4't \notin p\mathbb{Z}_p$$

con $a_i' \in U(\mathbb{Z}_p)$ para $i = 1,2,3,4$. Porque de lo contrario, tendríamos que $u - a_3''w \in p\mathbb{Z}_p$ para $a_3'' \in U(\mathbb{Z}_p)$ o $u \in p\mathbb{Z}_p$ lo cual no es posible.

Por otro lado, si
$$a_2'v + a_3'w + a_4't \in p^s\mathbb{Z}_p \text{ con } s = 1,\ 2.$$
Entonces, si $s = 1$ se sigue que $(a_2' + a_3' + a_4')\,w \in p\mathbb{Z}_p$, de aquí que $w \in p\mathbb{Z}_p$ o $a_2' + a_3' + a_4' \in p\mathbb{Z}_p$, pero $w \in p\mathbb{Z}_p$ no es posible, de modo que $a_3' = -(a_2' + a_4') + pa_5'$ con $a_5' \in \mathbb{Z}_p$, por lo que $a_2'v + a_3'w + a_4't \in p\mathbb{Z}_p$ implica que $a_2'(v - w) + a_4'(t - w) \in p\mathbb{Z}_p$, la cual no es una nueva restricción.

Observación 35. El análisis de $a_2'v + a_3'w + a_4't \in p^2\mathbb{Z}_p$ se encontrará al final del caso i_1).

Salvo la Observación 35, sólo basta ver que pasa con las relaciones siguientes:

$$v - w + p\alpha_1 u + p\alpha_2 v + p\alpha_3 w + p\alpha_4 t \in p^n\mathbb{Z}_p \text{ con } n \leq 2 \quad \text{y} \tag{3.10}$$

$$i_{1_1})\ t - w + p\beta_1 u + p\beta_2 v + p\beta_3 w + p\beta_4 t \in p^m\mathbb{Z}_p \text{ con } m \leq 3 \quad \text{o} \tag{3.11}$$

$$i_{1_2})\ v - t + p\beta_1 u + p\beta_2 v + p\beta_3 w + p\beta_4 t \in p^m\mathbb{Z}_p \text{ con } m \leq 2. \tag{3.12}$$

Veamos el caso i_{1_1}).

Despejando w y t de (3.10) y (3.11); respectivamente, obtenemos que

$$v = w + pv' \text{ con } v' \in \mathbb{Z}_p. \tag{3.13}$$

$$t = w + pt' \text{ con } t' \in \mathbb{Z}_p. \tag{3.14}$$

Sustituyendo (3.13) y (3.14) en (3.10) y tomando módulo p^n, tenemos que

$$v - (1 - p\alpha_3')w + p\alpha_1 u \in p^n\mathbb{Z}_p \text{ con } n \leq 2. \tag{3.15}$$

Además de (3.11) tenemos que

$$(1 + p\beta_4)t - (1 - p\beta_3)w + p\beta_1 u + p\beta_2 v \in p^m\mathbb{Z}_p \text{ con } m \leq 3.$$

De aquí que

$$(1 - p\alpha_3')^{-1}v - w + p\alpha_1' u \in p^n\mathbb{Z}_p \text{ con } n \leq 2 \text{ y} \tag{3.16}$$

$$(1 + p\beta_4)(1 - p\beta_3)^{-1}t - w + p\beta_1' u + p\beta_2' v \in p^m\mathbb{Z}_p \text{ con } m \leq 3 \tag{3.17}$$

reemplazando $(1 - p\alpha_3')^{-1}v$ y $(1 + p\beta_4)(1 - p\beta_3)^{-1}t$ por v y t en (3.16) y (3.17) (lo cual es equivalente a cambiar de representante en $[M]$), respectivamente, se tiene que

$$v - w + p\alpha_1' u \in p^n\mathbb{Z}_p \text{ con } n \leq 2. \tag{3.18}$$

$$t - w + p\beta_1' u + p\beta_2'' v \in p^m\mathbb{Z}_p \text{ con } m \leq 3 \tag{3.19}$$

Notemos que en (3.19), si $m = 1$, entonces $\beta_1' = \beta_2'' = 0$ y en otro caso $\beta_1' \in F_p^*$ o $\beta_2'' \in F_p^*$.

Así, despejando v en (3.18), tenemos que

$$v = w - p\alpha_1' u + p^n v' \text{ con } n \leq 2 \text{ y } v' \in \mathbb{Z}_p. \tag{3.20}$$

Sustituyendo (3.20) en (3.19), obtenemos

$$t=(1-p\beta_2'')w-p(\beta_1'-p\alpha_1'\beta_2'')u-p^{n+1}\beta_2''v'+p^m t' \text{ con } t'\in\mathbb{Z}_p.$$

Observemos que, si $m\geq 2$, entonces $\beta_1'\in F_p^*$, ya que de lo contrario $t-(1-p\beta_2'')w\in p^2\mathbb{Z}_p$, de aquí que con un cambio adecuado de representante de $[M]$, obtenemos que $t-w\in p^2\mathbb{Z}_p$, lo cual no es posible.

Entonces sin perdida de generalidad, sea

$$N=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4 : v-w+p\alpha u\in p^n\mathbb{Z}_p \text{ y } t-w+p\beta_1 u+p\beta_2 v\in p^m\mathbb{Z}_p\right\},$$

para $n\leq 2$, $\alpha\in F_p$, $\beta_2\in\mathbb{Z}_p$, $m\leq 3$ y si $m=1$, entonces $\beta_1=0$ o en otro caso $\beta_1\in F_p^*$.

En consecuencia para $(u,v,w,t)\in\mathcal{X}$, se tiene que

$$(u,v,w,t)=u(1,-p\alpha,0,-p(\beta_1-p\alpha\beta_2))+v'(0,p^n,0,-p^{n+1}\beta_2)+w(0,1,1,(1-p\beta_2))+t'(0,0,0,p^m).$$

Luego, notemos que

$$(1,-p\alpha,0,-p(\beta_1-p\alpha\beta_2)),(0,p^n,0,-p^{n+1}\beta_2),(0,1,1,(1-p\beta_2)) \text{ y } (0,0,0,p^m)\in N.$$

De aquí que, considerando

$$N=\left\langle(1,-p\alpha,0,-p(\beta_1-p\alpha\beta_2)),(0,p^n,0,-p^{n+1}\beta_2),(0,1,1,(1-p\beta_2)),(0,0,0,p^m)\right\rangle\subseteq M.$$

Puesto que $m=1$ o $\beta_1-p\alpha\beta_2\in U(\mathbb{Z}_p)$, tenemos que $\{N:B\}\subseteq\{\mathcal{M}_2:B\}$, así por el Lema 3.1.4 obtenemos para este caso que:

$$\{M:B\}=\{\mathcal{M}_2:B\}.$$

Ahora, para i_{1_2}).

De una manera similar a i_{1_1}), de (3.10) y (3.12), respectivamente, obtenemos:

$$v-w+p\alpha u\in p^n\mathbb{Z}_p \text{ con } n\leq 2.$$

$$v-t+p\beta u\in p^m\mathbb{Z}_p \text{ con } m\leq 2.$$

Entonces sin perdida de generalidad, sea

$$N=\left\{(u,v,w,t)\in\mathbb{Z}_p^4 : v-w+p\alpha u\in p^n\mathbb{Z}_p \text{ y } v-t+p\beta u\in p^m\mathbb{Z}_p\right\} \text{ para } n,\ m\leq 2,$$

donde α y $\beta\in F_p$.

Observemos que si $n=m=2$, entonces $\beta-\alpha\in F_p^*$.

En consecuencia para $(u,v,w,t)\in\mathcal{X}$, se tiene que

$$(u,v,w,t)=u(1,0,p\alpha,p\beta)+v(0,1,1,1)+w'(0,0,p^n,0)+t'(0,0,0,p^m).$$

Luego, notemos que $(1,0,p\alpha,p\beta)$, $(0,1,1,1)$, $(0,0,p^n,0)$ y $(0,0,0,p^m)\in N$.

De aquí que, $N=\langle(1,-p\alpha,0,p(\beta-\alpha)),(0,1,1,1),(0,0,p^n,0),(0,0,0,p^m)\rangle\subseteq M$, entonces en cualquiera de los casos $n=1$ o $m=1$ o ($m=n=2$ y $\beta-\alpha\in U(\mathbb{Z}_p)$) tenemos que $\{N:B\}\subseteq\{\mathcal{M}_2:B\}$, así por el Lema 3.1.4 obtenemos para este caso que:

$$\{M:B\}=\{\mathcal{M}_2:B\}.$$

Para la Observacion 35, notemos que $v-w$ y $t-w \in p\mathbb{Z}_p$, por lo que

$$a_2'v + a_3'w + a_4't + p\gamma_1 u + p\gamma_2 v + p\gamma_3 w + p\gamma_4 t \in p^2\mathbb{Z}_p. \tag{3.21}$$

Entonces $a_3' = -a_2' - a_4' + pa_3''$. De esto tenemos que

$$a_2'(v-w) + a_4'(t-w) + p\gamma_1 u + p\gamma_2 v + p\gamma_3' w + p\gamma_4 t \in p^2\mathbb{Z}_p.$$

Luego, si tenemos que $n \neq 1$ y $m \neq 1$ en los casos anteriores, entonces podemos obtener (3.21), es decir

$$(3.10) \text{ y } (3.11) \text{ implican } (3.21) \quad \text{y}$$

$$(3.10) \text{ y } (3.12) \text{ implican } (3.21).$$

Entonces, basta analizar (3.21) con cualquiera de (3.10), (3.11) o (3.12) para $n=1$ y $m=1$ ya que estos últimos tres son equivalentes en este caso.

Por ejemplo, para (3.21) y (3.12) con $m=1$, de una manera similar a i_{1_1}), obtenemos que

$$a_2'v - (1 + a_2' - p\gamma_3')w + t + p\gamma_1 u \in p^2\mathbb{Z}_p \quad \text{y}$$

$$t - v \in p\mathbb{Z}_p.$$

Observe que si $a_2' = p-1$ caemos en el caso i_{1_2}. Entonces sin perdida de generalidad, sea

$$N = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \alpha v - \beta w + t + p\beta_2 u \in p^2\mathbb{Z}_p \text{ y } t - v \in p\mathbb{Z}_p\right\},$$

con $\beta = 1 + \alpha - p\beta_1$, $\alpha \in \left(F_p^* - \{p-1\}\right)$ y $\beta_1,\ \beta_2 \in F_p$.

En consecuencia para $(u,v,w,t) \in \mathfrak{X}$, se tiene que

$$(u,v,w,t) = u(1,0,p\beta_2\beta^{-1},0) + v'(0,p,p\alpha\beta^{-1},0) + w'(0,0,p^2\beta^{-1},0) + t(0,1,(1+\alpha)\beta^{-1},1).$$

Luego, notemos que

$$(1,0,p\beta_2\beta^{-1},0), (0,p,p\alpha\beta^{-1},0), (0,0,p^2\beta^{-1},0) \text{ y } (0,1,(1+\alpha)\beta^{-1},1) \in M.$$

De aquí que, considerando

$$N = \left\langle (1,0,p\beta_2\beta^{-1},0), (0,p,p\alpha\beta^{-1},0), (0,0,p^2\beta^{-1},0), (0,1,(1+\alpha)\beta^{-1},1) \right\rangle \subseteq M,$$

tenemos que $\{N : B\} \subseteq \{\mathcal{M}_2 : B\}$. Así, por el Lema 3.1.4 obtenemos para este caso que:

$$\{M : B\} = \{\mathcal{M}_2 : B\}.$$

Observación 36.

- M_{14}, M_{41} y $M_{75}(a)$ satisfacen las condiciones del caso i_{1_1}.
- M_{18}, M_{31}, M_{40}, M_{55} y M_{89} satisfacen las condiciones del caso i_{1_2}).
- $M_{56}(a)$ y $M_{88}(a)$ satisfacen las condiciones de la Observación 35.

El caso i_2).

De una manera similar al caso i_1) notemos que si

$$a_1'u + a_2'v + a_3'w + a_4't \in p\mathbb{Z}_p$$

con $a_i' \in U(\mathbb{Z}_p)$ para $i = 1,2,3,4$; entonces $a_1'(u - a_1^{-1}w) + a_2'(v-w) + a_4'(t-w) \in p\mathbb{Z}_p$.

Ahora, para las relaciones tres a tres, se tiene que

$$a'_1u + a'_2v + a'_4t \in p\mathbb{Z}_p$$

implica que $a'_1u + a'_2v + a''_3w \in p\mathbb{Z}_p$ para $a''_3 \in U(\mathbb{Z}_p)$; de modo que, basta analizar

$$a'_1u + a'_2v + a'_3w \in p\mathbb{Z}_p,$$

$$a'_1u + a'_3w + a'_4t \in p\mathbb{Z}_p \text{ y}$$
$$a'_2v + a'_3w + a'_4t \in p^s\mathbb{Z}_p$$

con $s = 1$ y 2. Así, obtenemos que

$$a'_1(u - a_1^{-1}w) + a'_2(v - w) \in p\mathbb{Z}_p,$$
$$a'_1(u - a_1^{-1}w) + a'_4(t - w) \in p\mathbb{Z}_p \quad \text{y}$$
$$a'_2(v - w) + a'_4(t - w) \in p\mathbb{Z}_p \text{ con } s = 1,$$

respectivamente.

Observación 37. El análisis de $a'_2v + a'_3w + a'_4t \in p^2\mathbb{Z}_p$ se encontrará al final del caso i_2).

Salvo la Observación 37, sólo basta ver que pasa con las relaciones siguientes:

$$v - w + p\alpha_1u + p\alpha_2v + p\alpha_3w + p\alpha_4t \in p^n\mathbb{Z}_p \text{ con } n \leq 2 \quad \text{y}$$

$$w - u \in p\mathbb{Z}_p \text{ si y sólo si } v - u \in p\mathbb{Z}_p, \tag{3.22}$$

junto con los siguientes casos:

$$i_{2_1})\ t - w + p\beta_1u + p\beta_2v + p\beta_3w + p\beta_4t \in p^m\mathbb{Z}_p \text{ con } m \leq 3 \quad \text{y}$$

$$i_{2_2})\ v - t + p\beta_1u + p\beta_2v + p\beta_3w + p\beta_4t \in p^m\mathbb{Z}_p \text{ con } m \leq 2.$$

Para i_{2_1}).

Supongamos que $m \leq 2$, y de una manera similar a i_{1_1}), tenemos que

$$v - w + p\alpha u \in p^n\mathbb{Z}_p \text{ con } n \leq 2. \tag{3.23}$$

$$t - w + p\beta u \in p^m\mathbb{Z}_p \text{ con } m \leq 2. \tag{3.24}$$

Ahora, por (3.22) y (3.23) se sigue (con un cambio adecuado de representante de $[M]$) que:

$$v - w \in p^n\mathbb{Z}_p \text{ con } n \leq 2.$$

Además, por (3.22) y (3.24) se obtiene (con un cambio adecuado de representante de $[M]$) que:

$$t - w \in p^m\mathbb{Z}_p \text{ con } m \leq 2,$$

y puesto que $t - w \notin p^2\mathbb{Z}_p$ tenemos que $m = 1$, entonces $t - w \in p\mathbb{Z}_p$ si y sólo si $t - v \in p\mathbb{Z}_p$.

Entonces sin perdida de generalidad, sea

$$N = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w \in p^n\mathbb{Z}_p,\ t - v \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } v - u \in p\mathbb{Z}_p\right\} \text{ para } n \leq 2\ .$$

En consecuencia para $(u, v, w, t) \in \mathcal{X}$, se tiene que

$$(u, v, w, t) = u'(p, 0, 0, 0) + v(1, 1, 1, 1) + w'(0, 0, p^n, 0) + t'(0, 0, 0, p).$$

Luego, notemos que $(p, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(0, 0, p^n, 0)$ y $(0, 0, 0, p) \in N$.

De aquí que,

$$N = \langle (p, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 0, p^n, 0), (0, 0, 0, p) \rangle \subseteq M,$$

entonces $\{N : B\} \subseteq \{\mathcal{M}_2 : B\}$, por el Lema 3.1.4 obtenemos para este caso que:

$$\{M : B\} = \{\mathcal{M}_2 : B\}.$$

Ahora, supongamos que $m = 3$ y de una manera similar a i_{1_1}), ver (3.18) y (3.19) tenemos que

$$v - w + p\alpha_1 u \in p^n\mathbb{Z}_p \text{ con } n \leq 2.$$

$$t - w + p\beta_1 u + p\beta_2 v \in p^3\mathbb{Z}_p.$$

Por (3.22) y con un cambio de representante adecuado de $[M]$, se sigue que

$$t - w \in p^2\mathbb{Z}_p.$$

Lo cual no es posible.

Para i_{2_2}).

De una manera similar a i_{2_1}) en el caso $m \leq 2$, tenemos que

$$v - w \in p^n\mathbb{Z}_p \text{ con } n \leq 2 \text{ y}$$

$$v - t \in p^m\mathbb{Z}_p \text{ con } m \leq 2.$$

Y puesto que $t - w \notin p^2\mathbb{Z}_p$ tenemos que $n = 1$ o $m = 1$. Entonces sin perdida de generalidad, sea

$$N = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w \in p^n\mathbb{Z}_p,\ t - v \in p^m\mathbb{Z}_p \text{ y } v - u \in p\mathbb{Z}_p\right\}$$

para $n,\ m \leq 2$ y ($n = 1$ o $m = 1$). En consecuencia para $(u, v, w, t) \in \mathcal{X}$, se tiene que

$$(u, v, w, t) = u'(p, 0, 0, 0) + v(1, 1, 1, 1) + w'(0, 0, p^n, 0) + t'(0, 0, 0, p^m).$$

Luego, notemos que $(p, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(0, 0, p^n, 0)$ y $(0, 0, 0, p^m) \in N$.

De aquí que,

$$N = \langle (p, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 0, p^n, 0), (0, 0, 0, p^m) \rangle \subseteq M,$$

entonces $\{N : B\} \subseteq \{\mathcal{M}_2 : B\}$, por el Lema 3.1.4 obtenemos para este caso que:

$$\{M : B\} = \{\mathcal{M}_2 : B\}.$$

Para la Observacion 37, de una manera similar a la Observación 35, tenemos sin perdida de generalidad que

$$N = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : \alpha v - \beta w + t \in p^2\mathbb{Z}_p,\ t - u \in p\mathbb{Z}_p \text{y } t - v \in p\mathbb{Z}_p\right\},$$

con $\beta = 1 + \alpha - p\beta_1$, $\alpha \in \left(F_p^* - \{p - 1\}\right)$ y $\beta_1 \in F_p$.

En consecuencia para $(u, v, w, t) \in \mathcal{X}$, se tiene que

$$(u, v, w, t) = u(p, 0, 0, 0) + v'(0, p, p\alpha\beta^{-1}, 0) + w'(0, 0, p^2\beta^{-1}, 0) + t(1, 1, (1+\alpha)\beta^{-1}, 1).$$

Luego, notemos que

$$(p, 0, 0, 0), (0, p, p\alpha\beta^{-1}, 0), (0, 0, p^2\beta^{-1}, 0) \text{ y } (1, 1, (1+\alpha)\beta^{-1}, 1) \in N.$$

De aquí que, considerando

$$N = \left\langle (p, 0, 0, 0), (0, p, p\alpha\beta^{-1}, 0), (0, 0, p^2\beta^{-1}, 0), (1, 1, (1+\alpha)\beta^{-1}, 1) \right\rangle \subseteq M.$$

Tenemos que $\{N : B\} \subseteq \{\mathcal{M}_2 : B\}$, así por el Lema 3.1.4 obtenemos para este caso que:

$$\{M : B\} = \{\mathcal{M}_2 : B\}.$$

Observación 38.
- M_{13} satisface las condiciones del caso i_{2_1}.
- M_{17} y M_{53} satisfacen las condiciones del caso i_{2_2}).
- $M_{54}(a)$ satisface las condiciones de la Observación 37.

consideremos el caso ii).

Notemos que para este caso, se tiene que $t - v \notin p\mathbb{Z}_p$.

Observemos que, $w - a_1u \notin p\mathbb{Z}_p$ si y sólo si $t - a_1u \notin p\mathbb{Z}_p$, y $v - a_1u \in p\mathbb{Z}_p$ o $v - a_1u \notin p\mathbb{Z}_p$.

Además, $w - a_1u \in p\mathbb{Z}_p$ si y sólo si $t - a_1u \in p\mathbb{Z}_p$, lo cual implica que $v - a_1u \notin p\mathbb{Z}_p$. Con lo cual, basta analizar los siguientes casos para ii):

ii_1) $w - a_1u \notin p\mathbb{Z}_p,\ t - a_1u \notin p\mathbb{Z}_p$ y $v - a_1u \in p\mathbb{Z}_p$ con $a_1 \in U(\mathbb{Z}_p)$.

ii_2) $w - a_1u \in p\mathbb{Z}_p,\ t - a_1u \in p\mathbb{Z}_p$ y $v - a_1u \notin p\mathbb{Z}_p$ con $a_1 \in U(\mathbb{Z}_p)$.

ii_3) $w - a_1u \notin p\mathbb{Z}_p,\ t - a_1u \notin p\mathbb{Z}_p$ y $v - a_1u \notin p\mathbb{Z}_p$ con $a_1 \in U(\mathbb{Z}_p)$.

Consideremos el caso ii_1).

Con un cambio de representante adecuado de $[M]$, tenemos en este caso:

$$v - u \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } t - w \in p^2\mathbb{Z}_p.$$

Entonces

$$a_1'u + a_2'v + a_3'w + a_4't \notin p\mathbb{Z}_p$$

con $a_i' \in U(\mathbb{Z}_p)$ para $i = 1, 2, 3$ y 4. Ya que de lo contrario, tendriamos que

$$a_1'(u - v) + a_3'(w - t) \in p\mathbb{Z}_p$$

la cual no es una nueva restricción, o bien

$$w \in p\mathbb{Z}_p \text{ o } v \in p\mathbb{Z}_p \text{ o } w - v \in p\mathbb{Z}_p,$$

lo cual no es posible.

Similarmente, se tiene que

$$a_1'u + a_2'v + a_3'w \notin p\mathbb{Z}_p \text{ o}$$
$$a_1'u + a_2'v + a_4't \notin p\mathbb{Z}_p,$$

$$a_1'u + a_3'w + a_4't \notin p\mathbb{Z}_p \text{ y}$$
$$a_2'v + a_3'w + a_4't \notin p^s\mathbb{Z}_p,$$
con $s = 1,\ 2$; y $a_i' \in U(\mathbb{Z}_p)$ para $i = 1, 2, 3$ y 4, respectivamente.

Con lo cual, sólo basta analizar las siguientes relaciones:

$$t - w + p\alpha_1 u + p\alpha_2 v + p\alpha_3 w + p\alpha_4 t \in p^n\mathbb{Z}_p \text{ con } n \leq 3 \text{ y}$$

$$v - u \in p\mathbb{Z}_p.$$

Como $t - w \in p^2\mathbb{Z}_p$, tenemos que

$$t - (1 - p\alpha_3')w + p\alpha_1 u + p\alpha_2 v \in p^n\mathbb{Z}_p \text{ con } n \leq 3\ .$$

Con un cambio de representante apropiado de $[M]$, obtenemos

$$t - w + p\alpha_1 u + p\alpha_2 v \in p^n\mathbb{Z}_p \text{ con } n \leq 3 \text{ y}$$

$$v - u \in p\mathbb{Z}_p.$$

Entonces sin perdida de generalidad, sea

$$N = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - w + p\alpha_1 u + p\alpha_2 v \in p^n\mathbb{Z}_p \text{ y } v - u \in p\mathbb{Z}_p\right\}$$

para $n \leq 3$ y $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{Z}_p$. En consecuencia para $(u, v, w, t) \in \mathcal{X}$, se tiene que

$$(u, v, w, t) = u'(p, 0, 0, -p^2\alpha_1) + v(1, 1, 0, -p(\alpha_1 + \alpha_2)) + w(0, 0, 1, 1) + t'(0, 0, 0, p^n).$$

Luego, notemos que $(p, 0, 0, -p^2\alpha_1)$, $(1, 1, 0, -p(\alpha_1 + \alpha_2))$, $(0, 0, 1, 1)$ y $(0, 0, 0, p^n) \in N$.

De aquí que,

$$N = \left\langle (p, 0, 0, -p^2\alpha_1), (1, 1, 0, -p(\alpha_1 + \alpha_2)), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, p^n) \right\rangle \subseteq M,$$

entonces $\{N : B\} \subseteq \{\mathcal{M}_2 : B\}$, por el Lema 3.1.4 obtenemos para este caso que:

$$\{M : B\} = \{\mathcal{M}_2 : B\}\,.$$

Observación 39. $M_{28},\ M_{30}$ y M_{33} satisfacen las condiciones de ii_1).

Consideremos el caso ii_2).

Observemos que
$$a_1'u + a_2'v + a_3'w + a_4't \notin p\mathbb{Z}_p$$
con $a_i' \in U(\mathbb{Z}_p)$ para $i = 1, 2, 3$ y 4. Ya que de lo contrario, tendriamos que

$$v \in p\mathbb{Z}_p \text{ o } w - v \in p\mathbb{Z}_p,$$

lo cual no es posible.

Similarmente,
$$a_1'u + a_2'v + a_3'w \notin p\mathbb{Z}_p,$$
$$a_1'u + a_2'v + a_4't \notin p\mathbb{Z}_p,$$
$$a_2'v + a_3'w + a_4't \notin p^s\mathbb{Z}_p \text{ con } s = 1,\ 2.$$

Ahora, si
$$a_1'u + a_3'w + a_4't \in p\mathbb{Z}_p$$
con $a_i' \in U(\mathbb{Z}_p)$ para $i = 1, 2, 3$ y 4. Entonces
$$a_1'(u - w) + a_4'(w - t) \in p\mathbb{Z}_p$$
la cual no es una nueva restricción. Con lo cual, sólo basta analizar las siguientes relaciones:
$$t - w + p\alpha_1 u + p\alpha_2 v + p\alpha_3 w + p\alpha_4 t \in p^n\mathbb{Z}_p \text{ con } n \leq 3 \text{ y}$$
$$ii_{2_1})\ t - u \in p\mathbb{Z}_p \quad \text{o}$$
$$ii_{2_2})\ w - u \in p\mathbb{Z}_p.$$
Observemos que el caso $ii_{2_1})$ es equivalente al caso $ii_{2_2})$. Luego, Como $t - w \in p^2\mathbb{Z}_p$, tenemos que
$$t - (1 - p\alpha_3')w + p\alpha_1 u + p\alpha_2 v \in p^n\mathbb{Z}_p \text{ con } n \leq 3\ .$$
Con un cambio de representante apropiado de $[M]$, obtenemos
$$t - w + p\alpha_1 u + p\alpha_2 v \in p^n\mathbb{Z}_p \text{ con } n \leq 3 \text{ y}$$
$$t - u \in p\mathbb{Z}_p.$$
Entonces sin perdida de generalidad
$$N = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - w + p\alpha_1 u + p\alpha_2 v \in p^n\mathbb{Z}_p \text{ y } t - u \in p\mathbb{Z}_p\right\} \text{ para } n \leq 3 \text{ y } \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{Z}_p.$$
En consecuencia para $(u, v, w, t) \in \mathcal{X}$, se tiene que
$$(u, v, w, t) = u'(p, 0, p^2\alpha_1, 0) + v(0, 1, p\alpha_2, 0) + w'(0, 0, p^n, 0) + t(1, 0, 1 + p\alpha_1, 1).$$
Luego, notemos que $(p, 0, p^2\alpha_1, 0)$, $(0, 1, p\alpha_2, 0)$, $(0, 0, p^n, 0)$ y $(1, 0, 1 + p\alpha_1, 1) \in N$.

De aquí que,
$$N = \left\langle (p, 0, p^2\alpha_1, 0), (0, 1, p\alpha_2, 0), (0, 0, p^n, 0), (1, 0, 1 + p\alpha_1, 1) \right\rangle \subseteq M,$$
entonces $\{N : B\} \subseteq \{\mathcal{M}_2 : B\}$, por el Lema 3.1.4 obtenemos para este caso que:
$$\{M : B\} = \{\mathcal{M}_2 : B\}\ .$$

Observación 40. M_9, M_{11}, M_{15}, M_{51}, M_{57} y M_{65} satisfacen las condiciones de ii_2).

Consideremos el caso ii_3).

Notemos que si
$$a_1'u + a_2'v + a_3'w + a_4't \in p\mathbb{Z}_p,$$
entonces
$$a_1'u + a_2'v + a_3''w \in p\mathbb{Z}_p$$
con a_3'', $a_i' \in U(\mathbb{Z}_p)$ para $i = 1, 2, 3$ y 4. Con lo cual, sólo basta fijarnos en las relaciones tres a tres. Pero,
$$a_1'u + a_3'w + a_4't \in p\mathbb{Z}_p \text{ y}$$
$$a_2'v + a_3'w + a_4't \in p^s\mathbb{Z}_p$$

con $s=1,\ 2$ y $a_i' \in U(\mathbb{Z}_p)$ para $i=1,2,3$ y 4; implican que

$$u \in p\mathbb{Z}_p \text{ o } w-u \in p\mathbb{Z}_p \text{ y}$$

$$v \in p\mathbb{Z}_p \text{ o } w-v \in p\mathbb{Z}_p$$

lo cual no es posible, respectivamente.

Con lo cual basta fijarnos en los siguientes casos:

$$ii_{3_1})\ t-w+p\beta_1 u+p\beta_2 v+p\beta_3 w+p\beta_4 t \in p^m\mathbb{Z}_p \text{ con } m \leq 3 \quad \text{ y} \tag{3.25}$$

$$u-v+aw \in p\mathbb{Z}_p \text{ si y sólos si } u-v+at \in p\mathbb{Z}_p \text{ con } a \in F_p^*.$$

$$ii_{3_2})\ t-w+p\beta_1 u+p\beta_2 v+p\beta_3 w+p\beta_4 t \in p^m\mathbb{Z}_p \text{ con } m \leq 3.$$

Consideremos $ii_{3_1})$**.**

Tenemos que $t-w \in p^2\mathbb{Z}_p$, entonces

$$t-(1-p\beta_3')w+p\beta_1 u+p\beta_2 v \in p^m\mathbb{Z}_p \text{ con } m \leq 3.$$

Con un cambio de representante apropiado de $[M]$, obtenemos

$$u-v+at \in p\mathbb{Z}_p \text{ con } a \in F_p^* \quad \text{y}$$

$$t-w+p\beta_1' u+p\beta_2' v \in p^m\mathbb{Z}_p \text{ con } m \leq 3.$$

Sin perdida de generalidad, sea

$$N=\left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t-w+p\beta_1 u+p\beta_2 v \in p^m\mathbb{Z}_p \text{ y } u-v+at \in p\mathbb{Z}_p\right\}$$

con $\beta_1,\ \beta_2 \in \mathbb{Z}_p$ y $m \leq 3$.

En consecuencia para $(u,v,w,t) \in \mathcal{X}$, se tiene que

$$(u,v,w,t)=u'(p,0,p^2\beta_1,0)+v(1,1,p(\beta_1+\beta_2),0)+w'(0,0,p^m,0)+t(-a,0,1-p\beta_1 a,1).$$

Luego, notemos que

$$(p,0,p^2\beta_1,0),\ (1,1,p(\beta_1+\beta_2),0),\ (0,0,p^m,0) \text{ y } (-a,0,1-p\beta_1 a,1) \in N$$

.

De aquí que,

$$N=\left\langle(p,0,p^2\beta_1,0),(1,1,p(\beta_1+\beta_2),0,(0,0,p^m,0),(-a,0,1-p\beta_1 a,1)\right\rangle \subseteq M,$$

entonces $\{N:B\} \subseteq \{\mathcal{M}_2:B\}$, por el Lema 3.1.4 obtenemos para este caso que:

$$\{M:B\}=\{\mathcal{M}_2:B\}.$$

Observación 41. $M_{27},\ M_{29},\ M_{32},\ M_{74(a)},\ M_{76}(a)$ y $M_{81}(a)$ satisfacen las condiciones de $ii_{3_1})$.

Veamos el caso ii_{3_2}).

$$t - w + p\beta_1 u + p\beta_2 v + p\beta_3 w + p\beta_4 t \in p^m\mathbb{Z}_p \text{ con } m \leq 3.$$

Con un cambio de representante apropiado de $[M]$, obtenemos

$$t - w + p\beta_1 u + p\beta_2 v \in p^m\mathbb{Z}_p \text{ con } m \leq 3.$$

Sin perdida de generalidad, sea

$$N = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - w + p\beta_1 u + p\beta_2 v \in p^m\mathbb{Z}_p\right\} \text{ para } m \leq 3,\ \beta_1,\ \beta_2 \in \mathbb{Z}_p.$$

En consecuencia para $(u,v,w,t) \in \mathcal{X}$, se tiene que

$$(u,v,w,t) = u(1,0,0,-p\beta_1) + v(0,1,0,-p\beta_2) + w(0,0,1,1) + t'(0,0,0,p^m).$$

Luego, notemos que $(u,v,w,t) = (1,0,0,-p\beta_1)$, $(0,1,0,-p\beta_2)$, $(0,0,1,1)$ y $(0,0,0,p^m) \in N$.

De aquí que, $N = \langle(1,0,0,-p\beta_1),(0,1,0,-p\beta_2),(0,0,1,1),(0,0,0,p^m)\rangle \subseteq M$,

entonces $\{N : B\} \subseteq \{\mathcal{M}_2 : B\}$, por el Lema 3.1.4 obtenemos para este caso que:

$$\{M : B\} = \{\mathcal{M}_2 : B\}.$$

Observación 42. M_{10}, M_{12}, M_{16}, M_{39}, M_{42}, M_{52}, M_{58}, M_{66}, M_{87}, M_{90}, y M_{94} satisfacen las condiciones de ii_{3_2}).

Caso 1)

Sea $M \subseteq \mathcal{M}_1$ un ideal fraccional de B tal que $M \not\subseteq B$. En base al Lema 3.1.4, sea $(u,v,w,t) \in \mathcal{X}$. Entonces $(u,v,w,t) \notin B$, por lo que tenemos los siguientes casos:

i) $t - w \notin p^3\mathbb{Z}_p$.

ii) $w - v \notin p^2\mathbb{Z}_p$.

iii) $v - u \notin p\mathbb{Z}_p$.

Observemos que para *i*), *ii*) y *iii*), se cumple que $w - v \in p\mathbb{Z}_p$ y $t - w \in p^2\mathbb{Z}_p$. De esto, notemos que para *i*), *ii*) y *iii*) no tenemos relaciones 4 a 4, ni tampoco relaciones 3 a 3.

Para el caso *i*), notemos que sólo hay que analizar los siguientes casos:

i_1) $w - v \notin p^2\mathbb{Z}_p$ y $v - u \in p\mathbb{Z}_p$.

i_2) $w - v \notin p^2\mathbb{Z}_p$ y $v - u \notin p\mathbb{Z}_p$.

i_3) $w - v \in p^2\mathbb{Z}_p$ y $v - u \notin p\mathbb{Z}_p$.

i_4) $w - v \in p^2\mathbb{Z}_p$ y $v - u \in p\mathbb{Z}_p$.

De una manera similar al caso 2), obtenemos para i_1) que:

$$N = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - u,\ v - w \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\right\} \quad \text{por lo que}$$

$$N = \left\langle(p,0,0,0),(0,p,0,0),(1,1,1,1),(0,0,0,p^2)\right\rangle \subseteq M,$$

y entonces $\{N : B\} \subseteq \{\mathcal{M}_1 : B\}$, entonces por el Lema 3.1.4 obtenemos para este caso que:

$$\{M : B\} = \{\mathcal{M}_1 : B\}.$$

Observación 43. M_7 satisface las condiciones de i_1).

De una manera similar al caso 2), obtenemos para i_2) que:

$$N = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\right\} \text{ por lo que}$$

$$N = \left\langle (1,0,0,0),(0,p,0,0),(0,1,1,1),(0,0,0,p^2)\right\rangle \subseteq M,$$

y entonces $\{N : B\} \subseteq \{\mathcal{M}_1 : B\}$, entonces por el Lema 3.1.4 obtenemos para este caso que:

$$\{M : B\} = \{\mathcal{M}_1 : B\}.$$

Observación 44. M_8 satisface las condiciones de i_2).

De una manera similar al caso 2), obtenemos para i_3) que:

$$N = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v + p\alpha u \in p^2\mathbb{Z}_p \text{ y } t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\right\} \text{ con } \alpha \in F_p \text{ por tanto}$$

$$N = \left\langle (1,p\alpha,0,0),(0,p^2,0,0),(0,1,1,1),(0,0,0,p^2)\right\rangle \subseteq M,$$

y entonces $\{N : B\} \subseteq \{\mathcal{M}_1 : B\}$, entonces por el Lema 3.1.4 obtenemos para este caso que:

$$\{M : B\} = \{\mathcal{M}_1 : B\}.$$

Observación 45. M_6, M_{26} satisfacen las condiciones de i_3).

De una manera similar al caso 2), obtenemos para i_4) que:

$$N = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - u \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } w - v,\ t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\right\} \qquad \text{por tanto}$$

$$N = \left\langle (p,0,0,0),(0,p^2,0,0),(1,1,1,1),(0,0,0,p^2)\right\rangle \subseteq M,$$

y entonces $\{N : B\} \subseteq \{\mathcal{M}_1 : B\}$, entonces por el Lema 3.1.4 obtenemos para este caso que:

$$\{M : B\} = \{\mathcal{M}_1 : B\}.$$

Observación 46. M_5 satisface las condiciones de i_4).

Para el caso ii), notemos que sólo hay que analizar los siguientes casos:

ii_1) $w - v \in p\mathbb{Z}_p$ y $t - w \in p^3\mathbb{Z}_p$.
ii_2) $w - u,\ w - v \in p\mathbb{Z}_p$ y $t - w \in p^3\mathbb{Z}_p$.

De una manera similar al caso 2), obtenemos para ii_1) que:

$$N = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } t - (1+pa)w + p^2\alpha u + p\beta v \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}$$

con $a,\ \alpha$ y $\beta \in \mathbb{Z}_p$, y $p \mid (a - \beta)$. Por tanto

$$N = \left\langle (1,0,0,-p^2\alpha),(0,p,0,-p^2\beta),(0,1,1,1+p(a-\beta)),(0,0,0,p^3)\right\rangle \subseteq M,$$

entonces $\{N : B\} \subseteq \{\mathcal{M}_1 : B\}$, entonces por el Lema 3.1.4 obtenemos para este caso que:

$$\{M : B\} = \{\mathcal{M}_1 : B\}.$$

Observación 47. M_4, M_{38}, $M_{50}(a)$ y $M_{86}(a)$ satisfacen las condiciones de ii_1).

De una manera similar al caso 2), obtenemos para ii_2) que:

$$N = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v,\ w - u \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } t - (1+pa)w + p\alpha u + p\beta v \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}$$

con $a,\ \alpha$ y $\beta \in \mathbb{Z}_p$, y $p \mid (a - \alpha - \beta)$. Por tanto

$$N = \left\langle (p,0,0,-p^2\alpha),(0,p,0,-p^2\beta),(1,1,1,1+p(a-\alpha-\beta)),(0,0,0,p^3)\right\rangle \subseteq M,$$

y entonces $\{N : B\} \subseteq \{\mathcal{M}_1 : B\}$, entonces por el Lema 3.1.4 obtenemos para este caso que:

$$\{M : B\} = \{\mathcal{M}_1 : B\}.$$

Observación 48. M_3 y $M_{49}(a)$ satisfacen las condiciones de ii_2).

Para el caso iii), tenemos que $w-v \in p^2\mathbb{Z}_p$ y $t-w \in p^3\mathbb{Z}_p$.

Entonces, de una manera similar al caso 2), obtenemos para iii) que:

$$N = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w-v+p\beta u \in p^2\mathbb{Z}_p \text{ y } t-w+p^2\alpha u \in p^3\mathbb{Z}_p\right\}$$

con $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ y $\beta \in F_p$. Por tanto

$$N = \left\langle (1,p\beta,0,-p^2\alpha),(0,p^2,0,0),(0,1,1,1),(0,0,0,p^3)\right\rangle \subseteq M,$$

y entonces $\{N : B\} \subseteq \{\mathcal{M}_1 : B\}$, entonces por el Lema 3.1.4 obtenemos para este caso que:

$$\{M : B\} = \{\mathcal{M}_1 : B\}.$$

Observación 49. M_2, M_{25}, M_{37} y $M_{73}(a)$ satisfacen las condiciones de iii).

Caso 3)

Sea $M \subseteq \mathbb{Z}_p^4$ un ideal fraccional de B tal que $M \not\subseteq B$. En base al Lema 3.1.4, sea $(u,v,w,t) \in \mathcal{X}$. Entonces $(u,v,w,t) \notin \mathcal{M}_2$, por lo que tenemos los siguientes casos:

i) $v-u \in p\mathbb{Z}_p$ y $w-v \in p^n\mathbb{Z}_p$ con $n \leq 2$.

ii) $v-u \in p\mathbb{Z}_p$, $t-v \in p^n\mathbb{Z}_p$ con $n \leq 2$.

iii) $v-u \in p\mathbb{Z}_p$.

iv) $t-u \in p\mathbb{Z}_p$ y $w-v \in p^n\mathbb{Z}_p$ con $n \leq 2$.

v) $w-v \in p^n\mathbb{Z}_p$ con $n \leq 2$..

vi) $t-v \in p^n\mathbb{Z}_p$ y $w-u \in p\mathbb{Z}_p$ con $n \leq 2$.

vii) $t-v \in p^n\mathbb{Z}_p$ con $n \leq 2$..

viii) $t-u \in p\mathbb{Z}_p$.

ix) $w-u \in p\mathbb{Z}_p$.

x) No hay ninguna relación dos a dos.

Para el caso i), de una manera similar al caso 2), obtenemos que:

i_1) $N = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v-u \in p\mathbb{Z}_p\right\} =$

$$\langle (p,0,0,0),(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle$$

i_2) $N = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v-u \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } w-v+p\alpha t \in p^n\mathbb{Z}_p\right\} =$

$$\langle (p,0,0,0),(1,1,1,0),(0,0,p^n,0),(0,0,-p\alpha,1)\rangle \text{ con } \alpha \in F_p \text{ y } n \leq 2.$$

Para los caso i_1) e i_2) se cumple que $N \subseteq M$, entonces por el Lema 3.1.4 se sigue que:

$$\{M : B\} = \left\{\mathbb{Z}_p^4 : B\right\}.$$

Observación 50.

- M_{36} satisface las condiciones de i_1).
- M_{78}, M_{82} y M_{84} con $a=0$ satisfacen las condiciones de i_2).

Para el caso ii), de una manera similar al caso 2), obtenemos que:

$$N = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v-u \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } t-v+p\alpha w \in p^n\mathbb{Z}_p\right\} =$$

$$\langle (p,0,0,0),(1,1,0,1),(0,0,1,-p\alpha),(0,0,0,p^n)\rangle \text{ con } \alpha \in F_p \text{ y } n \leq 2.$$

Se cumple que $N \subseteq M$, entonces por el Lema 3.1.4 se sigue que:

$$\{M : B\} = \left\{\mathbb{Z}_p^4 : B\right\}.$$

Observación 51. M_{19}, M_{21}, M_{59} satisface las condiciones de ii).

Para el caso iii), de una manera similar al caso 2), obtenemos que:

iii_1) $N = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v-u \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } w+v+(a+p\alpha)t \in p^n\mathbb{Z}_p\right\} =$

$$\langle (p,0,0,0),(1,1,-1,0),(0,0,p^n,0),(0,0,-(a+p\alpha),1)\rangle \text{ con } a \in F_p^*,\ \alpha \in F_p \text{ y } n \leq 2.$$

iii_2) $N = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u+w+at \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } v+w+(a+p\alpha)t \in p^n\mathbb{Z}_p\right\} =$

$$\langle (p,0,0,0),(0,p^n,0,0),(-1,-1,1,0),(-a,-(a+p\alpha),0,1)\rangle \text{ con } a \in F_p^*,\ \alpha \in F_p \text{ y } n \leq 2.$$

Para los caso iii_1) e iii_2) se cumple que $N \subseteq M$, entonces por el Lema 3.1.4 se sigue que:

$$\{M : B\} = \left\{\mathbb{Z}_p^4 : B\right\}.$$

Observación 52.

- M_{79} con $a = 0$ satisface las condiciones de iii_1).
- M_{83} y M_{85} con $a \in F_p^*$ satisfacen las condiciones de iii_2).

Para el caso iv), de una manera similar al caso 2), obtenemos que:

$$N = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t-u \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } w-v+p\alpha u \in p^n\mathbb{Z}_p\right\} =$$

$$\langle (1,0,-p\alpha,1),(0,1,1,0),(0,0,p^n,0),(0,0,0,p)\rangle \text{ con } \alpha \in F_p \text{ y } n \leq 2.$$

Se cumple que $N \subseteq M$, entonces por el Lema 3.1.4 se sigue que:

$$\{M : B\} = \left\{\mathbb{Z}_p^4 : B\right\}.$$

Observación 53. M_{63}, M_{68} y M_{69} satisfacen las condiciones de iv).

Para el caso v), de una manera similar al caso 2), obtenemos que:

v_1) $N = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w-v+p\alpha_1 u+p\alpha_2 t \in p^n\mathbb{Z}_p\right\} =$

$$\langle (1,p\alpha_1,0,0),(0,p^n,0,0),(0,1,1,0),(0,p\alpha_2,0,1)\rangle \text{ con } \alpha_1,\ \alpha_2 \in F_p \text{ y } n \leq 2.$$

v_2) $N = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u+w+t \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } w-v+p\alpha u \in p^n\mathbb{Z}_p\right\} =$

$$\langle (1,p\alpha,0,-1),(0,p^n,0,0),(0,1,1,-1),(0,0,0,p)\rangle \text{ con } \alpha \in F_p \text{ y } n \leq 2.$$

Para los caso v_1) y v_2) se cumple que $N \subseteq M$, entonces por el Lema 3.1.4 se sigue que:

$$\{M : B\} = \left\{\mathbb{Z}_p^4 : B\right\}.$$

Observación 54.

- M_{64}, M_{71}, M_{72}, M_{96} y M_{97} satisfacen las condiciones de v_1).
- M_{79} con $a = 1$ y M_{84} con $a \in F_p^*$ satisfacen las condiciones de v_2).

Para el caso vi), de una manera similar al caso 2), obtenemos que:

$$N = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - v + p\alpha u \in p^n\mathbb{Z}_p \text{ y } w - u \in p\mathbb{Z}_p\} =$$
$$\langle (1, p\alpha, 1, 0), (0, p^n, 0, 0), (0, 0, p, 0), (0, 1, 0, 1)\rangle \text{ con } \alpha \in F_p \text{ y } n \leq 2.$$

Se cumple que $N \subseteq M$, entonces por el Lema 3.1.4 se sigue que:

$$\{M : B\} = \{\mathbb{Z}_p^4 : B\}.$$

Observación 55. M_{44}, M_{46} y M_{77} con $a = 0$ satisfacen las condiciones de vi).

Para el caso vii), de una manera similar al caso 2), obtenemos que:

vii_1) $N = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - v + p\alpha_1 u + p\alpha_2 w \in p^n\mathbb{Z}_p\} =$
$$\langle (1, p\alpha_1, 0, 0), (0, p^n, 0, 0), (0, p\alpha_2, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\rangle \text{ con } \alpha_1,\ \alpha_2 \in F_p \text{ y } n \leq 2.$$

vii_2) $N = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - v + p\alpha u \in p^n\mathbb{Z}_p \text{ y } u + v + w \in p\mathbb{Z}_p\} =$
$$\langle (p, 0, 0, 0), (-1, 1, 0, 1 + p\alpha), (-1, 0, 1, p\alpha), (0, 0, 0, p^n)\rangle \text{ con } \alpha \in F_p \text{ y } n \leq 2.$$

Para los caso vii_1) y vii_2) se cumple que $N \subseteq M$, entonces por el Lema 3.1.4 se sigue que:

$$\{M : B\} = \{\mathbb{Z}_p^4 : B\}.$$

Observación 56.
- M_{20}, M_{22}, M_{34}, M_{60} y M_{91} satisfacen las condiciones de vii_1).
- M_{43}, M_{45} y M_{77} con $a \in F_p^*$ satisfacen las condiciones de vii_2).

Para el caso $viii$), de una manera similar al caso 2), obtenemos que:

$viii_1$) $N = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - u \in p\mathbb{Z}_p\} =$
$$\langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, p)\rangle$$

$viii_2$) $N = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - u \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } t + v + w \in p^n\mathbb{Z}_p\} =$
$$\langle (p, 0, 0, 0), (0, p^n, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\rangle \text{ con } n \leq 2.$$

Para los caso $viii_1$) y $viii_2$) se cumple que $N \subseteq M$, entonces por el Lema 3.1.4 se sigue que:

$$\{M : B\} = \{\mathbb{Z}_p^4 : B\}.$$

Observación 57.
- M_{23} satisface las condiciones de $viii_1$).
- M_{61}, M_{67} satisfacen las condiciones de $viii_2$).

Para el caso ix), de una manera similar al caso 2), obtenemos que:

ix_1) $N = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - u \in p\mathbb{Z}_p\} =$
$$\langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, p, 0), (0, 0, 0, 1)\rangle$$

ix_2) $N = \{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w + v + t + p\alpha u \in p^n\mathbb{Z}_p \text{ y } u + v + t \in p\mathbb{Z}_p\} =$
$$\langle (p, 0, 0, 0), (-1, 1, (-1 + p\alpha), 0), (0, 0, p^n, 0), (-1, 0, (-1 + p\alpha), 1)\rangle \text{ con } \alpha \in F_p \text{ y } n \leq 2.$$

Para los caso ix_1) y ix_2) se cumple que $N \subseteq M$, entonces por el Lema 3.1.4 se sigue que:

$$\{M : B\} = \{\mathbb{Z}_p^4 : B\}.$$

Observación 58.

- M_{48} satisface las condiciones de ix_1).
- M_{80}, M_{85} con $a = 0$ satisfacen las condiciones de ix_2).

Para el caso x), de una manera similar al caso 2), obtenemos que:

x_1) $N = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u + v + w + t \in p\mathbb{Z}_p\right\} =$

$$\langle (p, 0, 0, 0), (-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\rangle$$

x_2) $N = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u + w + v \in p\mathbb{Z}_p\right\} =$

$$\langle (p, 0, 0, 0), (-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\rangle$$

x_3) $N = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u + v + t \in p\mathbb{Z}_p\right\} =$

$$\langle (p, 0, 0, 0), (-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\rangle$$

x_4) $N = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u + w + t \in p\mathbb{Z}_p\right\} =$

$$\langle (p, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\rangle$$

x_5) $N = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v + w + t + p\alpha u \in p^n\mathbb{Z}_p\right\} =$

$$\langle (1, -p\alpha, 0, 0), (0, p^n, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\rangle \text{ con } \alpha \in F_p \text{ y } n \leq 2.$$

x_6) $N = \left\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u + v + w \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } v + aw + t + p\alpha u \in p^n\mathbb{Z}_p\right\} =$

$$\langle (p, 0, 0, 0), (-1, 1, 0, (-1 + p\alpha)), (-1, 0, 1, (-a + p\alpha)), (0, 0, 0, p^n)\rangle \text{ con } a \in F_p^*,\ \alpha \in F_p \text{ y } n \leq 2.$$

x_7) $N = \mathbb{Z}_p^4 = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\rangle$

Para los caso x_j) para $j = 1, ..., 7$ se cumple que $N \subseteq M$, entonces por el Lema 3.1.4 se sigue que:

$$\{M : B\} = \left\{\mathbb{Z}_p^4 : B\right\}.$$

Observación 59.

- M_{92} satisface las condiciones de x_1).
- M_{93} satisface las condiciones de x_2).
- M_{35} satisface las condiciones de x_3).
- M_{47} satisfacen las condiciones de x_4)
- M_{62}, M_{70} y M_{95} satisfacen las condiciones de x_5).
- M_{79} con $a \in F_p^* - \{1\}$ satisface las condiciones de x_6).
- M_{24} satisfacen las condiciones de x_7).

Apéndice A

Apéndice A

A lo largo de esta tesis se consideran algunos resultados, tecnicas u otras herramientas, las cuales se ha decidido no poner en los capítulos para no salirse del contexto que se desea dar a entender, cabe mencionar, que estos, no son menos importantes a lo desarrollado a lo largo de esta tesis.

Por ejemplo, en la observación 21 podemos notar que $Z_\Lambda\left(M;s\right)$ depende de saber quien es $\mu^*\left(\mathrm{Aut}_\Lambda M\right)^{-1}$, $\left(\Lambda : M\right)^{-s}$ y $\int_{x\in A^*}\Phi_{\{M:\Lambda\}}\left(x\right)\left\|x\right\|_A^s d^*x$.

Obsermos que tanto en el capítulo 2 como en el capítulo 3 se hace notar la importancia de $\{M : \Lambda\}$ e incluso se da una idea de como calcular las integrales para ese conductor.

Como consecuencia este apéndice se enfoca en dar a entender como se pueden conocer $\mu^*\left(\mathrm{Aut}_\Lambda M\right)^{-1}$ y $\left(\Lambda : M\right)^{-s}$ en el caso de $B_p(C_{p^3})$, incluso pudiendo aplicar los mismos pasos para casos mas generales.

La medida de Haar es

$$1 = \int_{(\mathbb{Z}_p^*)^4} d^*x = \int_{\dot{\bigcup}_j (a_j(\mathrm{Aut}_B M))} d^*x,$$

donde a_j es un conjunto de representantes de las clases laterales izquierdas $\left(\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^4/\mathrm{Aut}_B M\right)$ y M es un ideal fraccional de B.

De aquí

$$\int_{\dot{\bigcup}_j (a_j(\mathrm{Aut}_B M))} d^*x = \sum_j \int_{a_j(\mathrm{Aut}_B M)} d^*x = \sum_j \int_{\mathrm{Aut}_B M} d^*x = \left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : \mathrm{Aut}_B M\right) \int_{\mathrm{Aut}_B M} d^*x.$$

En consecuencia, $1 = \left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : \mathrm{Aut}_B M\right)\mu^*(\mathrm{Aut}_B M)$.

Por lo tanto

$$\mu^*(\mathrm{Aut}_B M)^{-1} = \left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : \mathrm{Aut}_B M\right).$$

Ahora, veamos como calcular $\mathrm{Aut}_B M$ para M un ideal fraccional de B.

Para ello, recordamos que $\mathrm{Aut}_B M$ son las unidades de $\mathrm{End}_B M$, donde

$$\mathrm{End}_B M = \left\{(x,y,w,z) \in \mathbb{Q}_p^4 : (x,y,w,z)M \subseteq M\right\}.$$

Sea $M = M_{81}(a)$ como en la sección 2.2 del capítulo 2; es decir

$$M_{81}\left(a\right) = \left\{(u,v,w,t) \in \mathbb{Z}_p^4 : (pv - w + t) \in p^3\mathbb{Z}_p,\ (u - v + at) \in p\mathbb{Z}_p\right\} \text{ con } a \in F_p.$$

Sea $(u,v,w,t) \in M_{81}(a)$. Entonces $w = t + pv + p^3w'$ y $u = v - at + pu'$ con w' y $u' \in \mathbb{Z}_p$, con lo cual

$$(u,v,w,t) = u'(p,0,0,0) + v(1,1,p,0) + w'(0,0,p^3,0) + t(-a,0,1,1).$$

Observar que $(p,0,0,0),\ (1,1,p,0),\ (0,0,p^3,0),\ (-a,0,1,1) \in M_{81}(a)$, por tanto

$$M_{81}(a) = \left\langle (p,0,0,0),(1,1,p,0),(0,0,p^3,0),(-a,0,1,1)\right\rangle. \tag{A.1}$$

En consecuencia, para calcular $\mathrm{End}_B M_{81}(a)$ sólo basta estudiar los generadores de $M_{81}(a)$:

Sea $(x,y,w,z) \in \mathrm{End}_B M_{81}(a)$, entonces

$$(px,0,0,0) \in M_{81}(a) \tag{A.2}$$

$$(x,y,pw,0) \in M_{81}(a) \tag{A.3}$$

$$(0,0,p^3w,0) \in M_{81}(a) \tag{A.4}$$

$$(-ax,0,w,z) \in M_{81}(a). \tag{A.5}$$

Por (A.2) y (A.4) tenemos que $x,\ w \in \mathbb{Z}_p$, respectivamente. Luego, por (A.3) y (A.5) tenemos que $y - x \in p\mathbb{Z}_p$, $w - y \in p^2\mathbb{Z}_p$, $z - w \in p^3\mathbb{Z}_p$ y $az - ax \in p\mathbb{Z}_p$; respectivamente.

Ahora, si $a = 0$, entonces $az - ax \in p\mathbb{Z}_p$ no es una restricción. Si $a \neq 0$, entonces $az - ax \in p\mathbb{Z}_p$ implica que $z - x \in p\mathbb{Z}_p$ lo cual ya se sabia desde que $y - x \in p\mathbb{Z}_p$, $w - y \in p^2\mathbb{Z}_p$ y $z - w \in p^3\mathbb{Z}_p$.

Finalmente, como $x,\ w \in \mathbb{Z}_p$, se tiene que y y $z \in \mathbb{Z}_p$. Por tanto,

$$\mathrm{End}_B M_{81}(a) \subseteq B.$$

Ahora, observemos que $\mathrm{End}_B M_{81}(a)$ es un $\mathbb{Z}_p-$orden. Entonces $\mathrm{End}_B M_{81}(a)$ es un $\mathbb{Z}_p-$retícula plena contenida en B, pero en B las retículas plenas son $\mathbb{Z}_p-$submódulos finitamente generados en B y B es anillo conmutativo.

En consecuencia, $\mathrm{End}_B M_{81}(a) \leq B$ es un ideal tal que $1_{\mathrm{End}_B M_{81}(a)} = 1_B$.

Por tanto

$$\mathrm{End}_B M_{81}(a) = B.$$

De aquí $\mathrm{Aut}_B M_{81}(a) = B^*$, donde B^* denota las unidades de B.

Entonces $\mu^*(\mathrm{Aut}_B M_{81}(a))^{-1} = \left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : B^*\right)$.

Sea

$$\varphi : (\mathbb{Z}_p^*)^4 \longrightarrow \left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\right)^* \times \left(\frac{\mathbb{Z}}{p^2\mathbb{Z}}\right)^* \times \left(\frac{\mathbb{Z}}{p^3\mathbb{Z}}\right)^* \text{ tal que}$$

$$(x, y, w, z) \longmapsto \Big(y_0^{-1} x_0, (w_0 + pw_1)^{-1}(y_0 + py_1), \left(z_0 + pz_1 + p^2 z_2\right)^{-1}\left(w_0 + pw_1 + p^2 w_2\right)\Big),$$

donde

$$x = x_0 + px_1 + p^2 x_2 + \cdots$$

$$y = y_0 + py_1 + p^2 y_2 + \cdots$$

$$w = w_0 + pw_1 + p^2 w_2 + \cdots$$

$$z = z_0 + pz_1 + p^2 z_2 + \cdots$$

con $x_0,\ y_0,\ w_0$ y $z_0 \in F_p^*$ y $x_i,\ y_i,\ w_i$ y $z_i \in F_p$ para $i = 1, 2, ...$

Es claro que φ está bien definida, y se puede ver que φ es un morfismo de grupos multiplicativos.

Ahora, sea $(a, b, c) \in \left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\right)^* \times \left(\frac{\mathbb{Z}}{p^2\mathbb{Z}}\right)^* \times \left(\frac{\mathbb{Z}}{p^3\mathbb{Z}}\right)^*$. Entonces

$$\left(1, a^{-1}, a^{-1}b^{-1}, a^{-1}b^{-1}c^{-1}\right) \in (\mathbb{Z}_p^*)^4,$$

y es tal que $\varphi\left(\left(1, a^{-1}, a^{-1}b^{-1}, a^{-1}b^{-1}c^{-1}\right)\right) = (a, b, c)$. Es decir, φ es sobreyectiva.

Además, por construcción tenemos que $ker(\varphi) = B^*$.

Entonces por el primer teorema de isomorfismo tenemos que

$$\frac{(\mathbb{Z}_p^*)^4}{B^*} \cong \left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\right)^* \times \left(\frac{\mathbb{Z}}{p^2\mathbb{Z}}\right)^* \times \left(\frac{\mathbb{Z}}{p^3\mathbb{Z}}\right)^*.$$

Por lo tanto, $\left((\mathbb{Z}_p^*)^4 : B^*\right) = p^3(p-1)^3$.

Luego, veamos como calcular $\{M : B\}$ para M un ideal fraccional de B, donde

$$\{M : B\} = \left\{a \in \mathbb{Q}_p^4 : aM \subseteq B\right\}.$$

En nuestro caso, veamos como se calcula el conductor de $M = M_{81}(a)$.

Sabemos por (A.1) que:

$$M_{81}(a) = \big\langle (p, 0, 0, 0), (1, 1, p, 0), (0, 0, p^3, 0), (-a, 0, 1, 1) \big\rangle.$$

En consecuencia, para calcular $\{M_{81}(a) : B\}$ sólo basta estudiar los generadores de $M_{81}(a)$.

Sea $(x,y,w,z) \in \{M_{81}(a) : B\}$, entonces

$$(px,0,0,0) \in B \tag{A.6}$$

$$(x,y,pw,0) \in B \tag{A.7}$$

$$(0,0,p^3w,0) \in B \tag{A.8}$$

$$(-ax,0,w,z) \in B. \tag{A.9}$$

Por (A.9) tenemos que $w \in p^2\mathbb{Z}_p$ y $z - w \in p^3\mathbb{Z}_p$, con lo cual $z \in p^2\mathbb{Z}_p$.

Luego, por (A.7) tenemos que $pw - y \in p^2\mathbb{Z}_p$, pero $w \in p^2\mathbb{Z}_p$.

De aquí que $y \in p^2\mathbb{Z}_p$.

Ademas, por (A.7) $y - x \in p\mathbb{Z}_p$, pero $y \in p^2\mathbb{Z}_p$, así $x \in p\mathbb{Z}_p$.

Finalmente, (A.6) y (A.8) obtenemos que $x \in \mathbb{Z}_p$ y $w \in \mathbb{Z}_p$; respectivamente, así se tiene que y y $z \in \mathbb{Z}_p$.

Por tanto, $\{M_{81}(a) : B\} \subseteq (p,p^2,p^2,p^2)\left(\mathbb{Z}_p^2 \times B_p(C_p)\right)$.

Por otro lado, observemos que si $M \subseteq N$ con $M,\ N$ ideales fraccionales de B, entonces

$$\{N : B\} \subseteq \{M : B\}.$$

Luego, $M_{81}(a) \subseteq \left(\mathbb{Z}_p^2 \times B_p(C_p)\right)$. Por lo tanto

$$\{M_{81}(a) : B\} = (p,p^2,p^2,p^2)\left(\mathbb{Z}_p^2 \times B_p(C_p)\right).$$

Finalmente, es necesario conocer $(B : M)^{-s}$ con M un ideal fraccional de B.

Sabemos que

$$(M : B) = \left(M : \mathbb{Z}_p^4\right)\left(\mathbb{Z}_p^4 : B\right) = p^6\left(\mathbb{Z}_p^4 : M\right)^{-1},$$

con lo cual

$$(B : M)^{-s} = p^{6s}\left(\mathbb{Z}_p^4 : M\right)^{-s}.$$

Ahora, vamos como calcular $\left(\mathbb{Z}_p^4 : M\right)^{-s}$ para M un ideal fraccional de B.

Por ejemplo, sea $M = M_{81}(a)$.

Entonces, definimos

$$\varphi : \mathbb{Z}_p^4 \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{p^3\mathbb{Z}}$$

tal que

$$(x,y,w,z) \longmapsto \left(x_0 - y_0 + az_0, -\left(w_0 + pw_1 + p^2w_2\right) + \left(z_0 + pz_1 + p^2z_2\right) + p(y_0 + py_1)\right),$$

donde

$$x = x_0 + px_1 + p^2 x_2 + \cdots$$

$$y = y_0 + py_1 + p^2 y_2 + \cdots$$

$$w = w_0 + pw_1 + p^2 w_2 + \cdots$$

$$z = z_0 + pz_1 + p^2 z_2 + \cdots$$

con $x_i,\ y_i,\ w_i$ y $z_i \in F_p$ para $i = 0, 1, 2, ...$

Se puede probar que φ está bien definida y es de grupos abelianos aditivos.

Ahora, sea $(a, b) \in \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{p^3\mathbb{Z}}$.

Entonces $(a, 0, -b, 0) \in \mathbb{Z}_p^4$ y es tal que $\varphi\left((a, 0, -b, 0)\right) = (a, b)$. Es decir, φ es sobreyectiva.

Además, por construcción tenemos que $ker(\varphi) = M_{81}(a)$.

Entonces por el primer teorema de isomorfismo tenemos que

$$\frac{\mathbb{Z}_p^4}{M_{81}(a)} \cong \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{p^3\mathbb{Z}}.$$

Con lo cual,

$$\left|\frac{\mathbb{Z}_p^4}{M_{81}(a)}\right| = \left|\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{p^3\mathbb{Z}}\right| = p^4.$$

De modo que, $\left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{81}(a)\right) = p^4$.

Entonces, $\left(\mathbb{Z}_p^4 : M_{81}(a)\right)^{-s} = p^{-4s}$.

Por lo tanto,

$$(B : M_{81}(a))^{-s} = p^{6s} p^{-4s} = p^{2s}.$$

Bibliografía

[1] Bouc S. Burnside rings, Handbook of algebra, North-Holland, Amsterdam, vol 2 (2000), pp 739-804.

[2] Bouc S. Biset functors for finite group, Springer, Berlin 2010.

[3] Bushnell C. J. and Reiner I. Zeta functions of arithmetic orders and Solomon's conjectures. Math. Z. 173 (1980), pp 135-161.

[4] Curtis C. W. and Reiner I., Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, Interscience, New York, 1962.

[5] Reiner I. Maximal Orders, Academic Press, London-New York, 1975.

[6] Solomon L., The Burnside algebra of a finite group, Journal of Combinatorial Theory 2, 603-615 (1967) 6033615.

[7] Reiner I., Zeta Functions of Integral Representation, Communication in Algebra 8, pp.911-925 (1980).

[8] Solomon L. Zeta Functions and Integral Representation Theory, Advances in Mathematics 26 (1977) pp 306-326.

[9] Villa-Hernández D. Zeta functions of Burnside rings of grups of order p and p^2. Communications in Algebra, 37 (2009), pp 1758-1786.

[10] Villa-Hernández D. Functional Equations for Zeta functions of Burnside rings. JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications Vol. 29 (2013) No. 1, pp 1-16

[11] Villa-Hernández D. La Función Zeta del Anillo de Burnside. Tesis Doctoral, CCM-UNAM(Morelia) (2011).

[12] Zaidi S. M. A., Irfan M. and Muhiuddin G., On the Category of G-sets-I. International Mathematical Forum, 4 (2009), no. 8, 383 - 393.