Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Instituto de Física "Luis Rivera Terrazas"

Agujeros negros y geometrías de Schrödinger con violación de hiperescala en teorías de campo con gravedad

Tesis presentada por

Carlos Eduardo Romero Figueroa

para obtener el grado de

Maestría
(Física)

Dirigida por
Dr. Alfredo Herrera Aguilar

Puebla, México
junio 2021

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis padres, *Raúl Enrique Romero* y *Roxana Figueroa* por todo el amor y apoyo incondicional brindado a lo largo de mi vida, sin ellos este trabajo no sería posible. Al *IFUAP*, por haberme dado la oportunidad de ser parte de tan prestigioso instituto. Al *CONACYT*, por darme el apoyo económico necesario para poder cursar mi grado de maestría. A mi asesor, el *Dr. Alfredo Herrera* por todo el tiempo dedicado a este trabajo y todos los consejos brindados para llegar a ser un mejor investigador.

Resumen

En esta tesis se presentan diferentes familias de soluciones exactas a las ecuaciones de campo de una teoría de gravedad acoplada a un campo escalar real y n campos vectoriales masivos en un espaciotiempo de Schrödinger con violación de hiperescala en $D+3$ dimensiones. Se obtiene una solución para una teoría Einstein-Maxwell-Dilatón generalizada con exponentes z y θ libres. También se presenta una solución en una teoría Einstein-Proca en $D=2$ soportada en un espaciotiempo puramente AdS. Por último se realiza una búsqueda exhaustiva de configuraciones de agujeros negros, obteniendo la primera familia de agujeros negros con violación de hiperescala asintóticamente Schrödinger para cualquier valor de z y un número arbitrario de dimensiones D.

Introducción

La correspondencia holográfica o norma/gravedad es una herramienta para estudiar teorías de campo fuertemente acopladas. En el contexto holográfico, una teoría de campos de D dimensiones es mapeada a una teoría de gravedad de generalmente $D+1$ dimensiones, donde la teoría de campo surge como la frontera del espaciotiempo. El interés inicial de la holografía surgió con teorías de campo conformes duales a espaciotiempos Anti de Sitter (AdS/CFT por sus siglas en inglés) [1], pero en la búsqueda de describir sistemas de materia condensada en la vecindad de un punto crítico, estas técnicas holográficas necesitan ser extendidas más allá del dominio relativista, esto debido a que en la proximidad de un punto crítico los observables generalmente exhiben una simetría de reescalamiento anisótropa entre espacio y tiempo que puede ser parametrizada por el *exponente crítico dinámico* z: $(t,x) \to (\lambda^z t, \lambda x)$ donde teorías con $z \neq 1$ son invariantes ante transformaciones no relativistas [2, 3]. Hay una gran cantidad de álgebras que implementan este tipo de anisotropías, muchas de las cuales son subálgebras del álgebra conforme relativista; esto implica que sistemas que exhiben este tipo de simetrías tienen una gran posibilidad de presentar duales gravitatorios que puedan realizarse como deformaciones apropiadas de AdS, siendo los mas simples de estos los espaciotiempos de Lifshitz y Schrödinger [4].

Las geometrías de Lifshitz son duales a teorías de campo invariantes de escala, aunque no son conformemente invariantes, cuentan con un exponente crítico dinámico $z \neq 1$ y una coordenada de dimensión extra o coordenada holográfica r, como se muestra en la métrica[1]

$$ds^2 = -\left(\frac{l}{r}\right)^{2z} dt^2 + \left(\frac{l}{r}\right)^2 \left[dr^2 + dx^i dx_i\right], \qquad i = 1, 2, 3 \ldots D;$$

[1] A menos que se indique lo contrario en este trabajo se usa el convenio de sumatoria de Einstein, por lo que $dx^i dx_i$ significa: $dx^1 dx_1 + dx^2 dx_2 + \ldots dx^D dx_D$.

el parámetro real l representa el radio de curvatura del espaciotiempo de Lifshitz [5, 6] y $z = 1$ corresponde al espaciotiempo de máxima simetría Anti de Sitter, que es generado por la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica negativa. Este tipo de geometrías surge al acoplar gravedad con campos de materia apropiados (como un campo de norma masivo en el caso mas simple [7]). Esta generalización de AdS es utilizada ampliamente como ansatz para modelar sistemas de materia condensada [8] y es invariante ante el reescalado

$$x^i \to x'^i = \lambda x^i, \qquad r \to r' = \lambda r, \qquad t \to t' = \lambda^z t.$$

Otros espaciotiempos que se pueden utilizar en el lado de gravedad para reproducir el comportamiento anisótropo entre espacio y tiempo son las geometrías de Schrödinger; el grupo de isometrías de estas geometrías es llamado grupo de Schrödinger $Sch_D(z)$ [9, 10].

En sistemas de materia condensada las transiciones de fase en modelos clásicos pueden ser producidas debido a las fluctuaciones térmicas, en contraste, los sistemas cuánticos exhiben fluctuaciones asociadas al principio de incertidumbre de Heisenberg y esto puede producir transiciones de fase a temperatura cero, conocidas como transiciones de fase cuánticas [11]. Un punto cuántico crítico puede ser caracterizado por diferentes tipos de exponentes críticos y satisfacer diferentes relaciones entre ellos, como las llamadas *relaciones de hiperescala* que tienen la particularidad de que la dimensión del espacio aparece en ellas explícitamente. En los últimos años ha surgido un gran interés por estudiar sistemas no relativistas que presenten este tipo de propiedad, por ejemplo, en [12] Bom Kim estudia de forma exhaustiva propiedades holográficas de sistemas no relativistas con violación de hiperescala y exponente dinámico general z, centrando el estudio en la entropía de entrelazamiento para fondos tipo Schrödinger de $D + 3$ dimensiones.

En general los sistemas con violación de hiperescala puede ser modelados desde el lado de gravedad utilizando la siguiente familia de métricas[2]

$$ds^2_{D+2} = r^{-2(D-\theta)/D}(-r^{-2(z-1)}dt^2 + dr^2 + dx^i dx_i),$$

donde θ es el llamado *exponente de violación de hiperescala*; esta es la clase mas general de geometrías que presenta una violación de hiperescala y un exponente crítico dinámico,

[2]Que se reduce a Lifshitz puro cuando $\theta = 0$.

estas métricas transforman el elemento de distancia propia como

$$ds \to \lambda^{\frac{\theta}{D}} ds.$$

Para teorías con hiperescala la entropía se comporta como $S \sim T^{D/z}$ donde T, D y z son la temperatura, el número de dimensiones espaciales y el exponente crítico dinámico, respectivamente. El exponente θ está relacionado con la transformación de la distancia propia y la no invariancia de esta última implica la violación de hiperescala de la teoría de campo dual, lo cual se traduce en que, por ejemplo, el comportamiento de la entropía se modifica a $S \sim T^{(D-\theta)/z}$ [13]; en general en un sistema con violación de hiperescala el comportamiento termodinámico de la teoría es como si exhibiera un exponente dinámico z, pero viviera en $(D - \theta)$ dimensiones espaciales. La violación de hiperescala ya ha sido estudiada por diferentes motivos, por ejemplo en [13] se utiliza AdS en el marco del cono de luz para derivar la termodinámica de agujeros negros de Schrödinger con violación de hiperescala. En [3] se construyen soluciones hiperbólicas de agujeros negros cargados con violación de hiperescala, mientras que en [14] se presenta una solución analítica de agujero negro con factor de violación de hiperescala en la teoría Einsten-Maxwell-Dilatón. En [15] se estudian agujeros negros de Lifshitz acoplados a campos de norma no abelianos con violación de hiperescala y en [8] se analizan varios aspectos relacionados con teorías holográficas con exponente dinámico general y parámetro de violación de hiperescala.

Esta tesis se estructura de la siguiente manera. En el capítulo 1 se presenta una breve introducción a los grupos de simetría no relativistas, con especial énfasis en la realización geométrica de la simetría de Schrödinger. En el capítulo 2 se discute en detalle un sistema particular de gravedad acoplada a campos de materia y se desarrollan las ecuaciones de campo de esta teoría en un fondo tipo Schrödinger con violación de hiperescala de $D + 3$ dimensiones. En el capítulo 3 se construye una solución exacta a las ecuaciones de campo en el marco de la teoría Einstein-Maxwell-Dilatón con violación de hiperescala, esto se logra con un campo vectorial sin masa puramente eléctrico y un campo escalar real. En el capítulo 4 se presenta una configuración de campos que soporta la geometría de Schrödinger sin violación de hiperescala para una teoría Einstein-Proca. En el capítulo 5 se presenta la primera familia de agujeros negros con violación de hiperescala asintóticamente Schrödinger para cualquier valor de z y D. Por último en el capítulo 6 se exponen las conclusiones al trabajo de investigación y se discute el posible trabajo futuro.

Contenido

Capítulo 1

Grupos de simetría no relativistas

En esta sección se presenta una pequeña introducción a los grupos de simetría no relativistas, siendo de especial interés la simetría de Schrödinger. Una teoría de campos relativista es aquella que es invariante ante el grupo de Poincaré[1], donde P^μ son los generadores de traslaciones y $M^{\mu\nu}$ los generadores de las transformaciones de Lorentz

$$\begin{aligned} P^\mu &: x^\mu \to x^{'\mu} = x^\mu + a^\mu, \\ M^{\mu\nu} &: x^\mu \to x^{'\mu} = M^\mu_\nu x^\nu; \end{aligned} \tag{1.1}$$

además una teoría presenta invariancia conforme si es invariante ante las dilataciones isótropas D y transformaciones conformes especiales K^μ [7]

$$\begin{aligned} D &: x^\mu \to x^{'\mu} = \lambda x^\mu, \\ K^\mu &: x^\mu \to x^{'\mu} = \frac{x^\mu + K^\mu x \cdot x}{1 + 2K^\mu x_\mu + k^2 x^2}; \end{aligned} \tag{1.2}$$

mientras una teoría de campos no relativista homogénea y espacialmente isótropa en D dimensiones con coordenadas espaciales x^i y una coordenada temporal t es invariante ante los generadores

$$\begin{aligned} P^i &: x^i \to x^{'i} = x^i + a^i, \\ L^{ij} &: x^i \to x^{'i} = L^i_j x^j, \\ H &: t \to t^{'} = t + a, \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde P^i, H y L^{ij} son los generadores de traslaciones espaciales, temporales y rotaciones espaciales, respectivamente. Estas transformaciones pueden realizarse mediante las trans-

[1] El grupo de Poincaré consiste en las traslaciones espacio-temporales y las transformaciones de Lorentz.

formaciones de Galileo C^i

$$C^i : x^i \to x'^i = x^i - v^i t; \tag{1.4}$$

el grupo Galileano resultante de estas transformaciones es una contracción del grupo de Poincaré, este grupo admite el álgebra [7, 10]

$$[C^i, P^j] = M\delta^{ij}, \tag{1.5}$$

donde M es el número de partícula o la masa no relativista. Una teoría invariante Lifshitz homogénea y espacialmente isótropa admite la simetría de reescalamiento no relativista

$$D_z : x^i \to x'^i = \lambda x, \qquad\qquad t \to t' = \lambda^z t, \tag{1.6}$$

donde el parámetro z es el conocido exponente crítico dinámico que codifica la anisotropía entre espacio y tiempo; el grupo de simetría que consiste de los generadores (H, P^i, L^{ij}, D_z) es el denotado como grupo de Lifshitz $Lif_D(z)$ y no es un subgrupo ni una contracción del grupo conforme. Realizaciones geométricas de la simetría de Lifshitz, originalmente introducidas en [2], han sido ampliamente estudiadas en el contexto holográfico, por ejemplo construcciones de soluciones analíticas de agujeros negros asintóticamente Lifshitz en teorías con campos vectoriales masivos se reportan en [5,6,16,17], también en la literatura se pueden encontrar múltiples soluciones de agujeros negros con simetría Lifshitz en modelos Einstein-Maxwell-Dilatón [3, 18, 19]. En este trabajo de tesis no se estudia la simetría de Lifshitz sino que nos interesa estudiar otro grupo de simetría no relativista, el llamado grupo de Schrödinger $Sch_D(z)$.

1.1 Simetría de Schrödinger

El grupo de Schrödinger presenta simetría invariante de escala y es un grupo no relativista que se puede realizar en $D + 2$ dimensiones con D coordenadas espaciales x^i y dos coordenadas de cono de luz x^+ y x^-, siendo para cualquier valor de z un subgrupo del grupo conforme $SO(D + 2)$ [7]. $Sch_D(z)$ consiste de traslaciones espaciales P^i y rotaciones espaciales L^{ij}

$$\begin{aligned} P^i : &\quad x^i \to x'^i = x^i + a^i, \\ L^{ij} : &\quad x^i \to x'^i = L^i_j x^j \end{aligned} \tag{1.7}$$

y cuenta con las traslaciones de las coordenadas del cono de luz

$$\begin{aligned} H: &\quad x^{+} \to x^{'+} = x^{+} + a, \\ M: &\quad x^{-} \to x^{'-} = x^{-} + a; \end{aligned} \tag{1.8}$$

además incorpora las transformaciones de Galileo C^i

$$C^i: \quad x^i \to x^{'i} = x^i - v^i x^+, \quad x^- \to x^{'-} = x^- + v^i x^i - \frac{1}{2} v^2 x^+ \tag{1.9}$$

y las dilataciones anisótropas D_z

$$D_z: \quad x^i \to x^{'i} = \lambda x^i, \quad x^+ \to x^{'+} = \lambda^z x^+, \quad x^- \to x^{'-} = \lambda^{2-z} x^-, \qquad r \to r^{'} = \lambda r. \tag{1.10}$$

Algo importante a tener en cuenta es que para el caso $z = 2$ se puede extender el grupo de simetría e incluir la simetría especial conforme K^μ

$$K^\mu: \quad x^\mu \to x^{'\mu} = \frac{x^\mu + k^\mu x^2}{1 + 2k^\mu x_\mu + k^2 x^2}; \tag{1.11}$$

donde $x^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$.

1.2 Realización geométrica de la simetría de Schrödinger

El grupo de Schrödinger geométricamente se puede realizar primero deformando AdS y de esta forma reducir las simetrías a las de $Sch_D(z)$ [10]; este grupo se presenta como el grupo de isometrías de la siguiente geometría de $D + 3$ dimensiones [7, 10, 20]

$$ds^2 = \frac{-b^2 (dx^+)^2}{r^{2z}} + \frac{1}{r^2}(dr^2 + dx^j dx_j + 2dx^+ dx^-), \quad j = 1, 2, 3...D, \tag{1.12}$$

donde el parámetro b es arbitrario y se puede absorber por la siguiente transformación de escala

$$x^+ \to x'^+ = bx^+, \quad x^- \to x^- = x^-/b,$$

sin embargo, resulta útil escribirlo explícitamente ya que el caso $b = 0$ corresponde a la métrica AdS, mientras $b \neq 0$ corresponde a una deformación de la teoría conforme [7]. Las geometrías de Schrödinger surgen como soluciones a una variedad de modelos de gravedad, por ejemplo en teorías de *gravedad masiva topológica* la cual es una teoría en 3 dimensiones en donde la usual acción de Einstein-Hilbert es reemplazada por un término gravitacional Chern-Simons, con una acción [9]

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^3x\sqrt{-g}\left[R - 2\Lambda + \frac{1}{2\mu}\epsilon^{\lambda\mu\nu}(\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}\partial_\mu\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu} + \frac{2}{3}\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\tau}\Gamma^{\tau}_{\nu\rho})\right],$$

donde R es el escalar de curvatura, $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ son los coeficientes de la conexión asociada a la métrica $g_{\mu\nu}$, Λ es la constante cosmológica y ϵ es el símbolo Levi-Civita [21]; otro ejemplo son teorías de gravedad acopladas a campos vectoriales masivos como se muestra en la acción [7, 9]

$$S = \frac{1}{16\pi G_{d+1}}\int d^{d+1}x\sqrt{-g}\left[R - 2\Lambda - \frac{1}{4}F^2 - \frac{1}{2}M^2A^2\right],$$

donde A es el campo vectorial que soporta la geometría y F es el tensor de campo electromagnético [7]. También se pueden encontrar en la literatura otras realizaciones geométricas diferentes a la simetría de Schrödinger, por ejemplo en [4] los autores estudian varios aspectos geométricos de la simetría de Schrödinger en coordenadas de Poincaré y en coordenadas globales. Una de las principales realizaciones de las geometrías de Schrödinger es presentada en el artículo publicado por Dam Son [10], en el que se discute la posibilidad de que este tipo de geometrías corresponda al dual gravitatorio de un sistema de fermiones unitarios fuertemente acoplados cuyo grupo de simetrías es el grupo de Schrödinger.

Capítulo 2

Ecuaciones de campo del sistema gravedad-campos de materia

El objetivo principal de este trabajo de tesis es encontrar configuraciones de campo que soporten la geometría de Schrödinger con violación de hiperescala, es bien sabido que estas geometrías no son soportadas en entornos *Ricci flat*[1] por lo que se necesita partir de una teoría de gravedad acoplada a campos de materia [7, 10]. En este capítulo se presentan en detalle las ecuaciones de campo de un sistema particular de gravedad-campos de materia en un fondo de $D+3$ dimensiones tipo Schrödinger con violación de hiperescala.

2.1 Acción de la teoría de gravedad-campos de materia

Nuestro punto de inicio es la teoría de Einstein-Hilbert como modelo de gravedad con acoplamiento mínimo a un campo escalar real ϕ llamado *dilatón* y n campos vectoriales A_i con masas M_i, esta teoría se describe por la siguiente acción en $D+3$ dimensiones[2]

$$S[g_{\mu\nu}, A_\mu, \phi] = \frac{1}{16\pi G} \int d^{D+3}x\sqrt{-g}\left[R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) - \frac{1}{4}\chi_i(\phi)F_i^2 - \frac{1}{2}M_i^2 A_i^2\right], \quad (2.1)$$

donde R es el escalar de curvatura, $(\nabla\phi)^2 = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ corresponde al término cinético del campo escalar, F_i es el tensor electromagnético del campo vectorial A_i

$$F_i = dA_i \rightarrow \quad F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu, \quad i = 1, 2, 3 \ldots n;$$

[1] Un espaciotiempo es Ricci flat si $R_{\mu\nu} = 0$.

[2] Recordar que ii indica suma sobre $i = 1, 2, 3...n$ campos vectoriales.

$F_i^2 = F_{\mu\nu}^{(i)} F_{(i)}^{\mu\nu}$ es el término cinético de Maxwell y $A_i^2 = A_\mu^{(i)} A_{(i)}^\mu$ es el cuadrado del campo vectorial[3]; además el campo escalar está sujeto a un potencial de autointeracción no trivial $V(\phi)$ y la teoría presenta acoplamientos no-mínimos $\chi_i(\phi)$ entre el campo escalar y los invariantes de Maxwell [22]. La presencia del potencial $V(\phi)$ se puede pensar como una generalización de una constante cosmológica Λ y las funciones de acoplamiento $\chi_i(\phi)$ facilitan la obtención de soluciones analíticas a las ecuaciones de campo con parámetros z y θ. Las ecuaciones de campo[4] que se derivan de la acción (2.1) son

$$\Box\phi = \partial_\phi V(\phi) + \frac{1}{4}\partial_\phi \chi_i(\phi) F_i^2, \tag{2.2}$$

$$\nabla_\mu \left[\chi_{(i)}(\phi) F_{(i)}^{\mu\nu}\right] = M_{(i)}^2 A_{(i)}^\nu, \tag{2.3}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu}, \tag{2.4}$$

donde el tensor energía-momento de los campos de materia que actúa como fuente de la curvatura del espaciotiempo es

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} g_{\mu\nu} (\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V(\phi) + \frac{1}{2}\chi_i(\phi) \left[F_{\alpha\mu}^{(i)} F_{(i)\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} F_i^2 g_{\mu\nu}\right] \\ + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2} M_i^2 A_\mu^{(i)} A_\nu^{(i)} - \frac{1}{4} M_i^2 A_i^2 g_{\mu\nu}; \end{aligned} \tag{2.5}$$

se puede comprobar que la expresión dada por (2.5) cumple con la conservación local de la energía, es decir que

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0.$$

2.2 Cantidades geométricas del espaciotiempo de Schrödinger con violación de hiperescala

En relatividad general la gravedad se expresa en términos de un tensor métrico que describe las propiedades geométricas del espaciotiempo, por lo que para poder resolver el sistema de ecuaciones de campo dado por (2.2), (2.3) y (2.4) a (1.12), pero se hace una transformación de coordenadas $r \to 1/r$, lo cual físicamente se traduce en cambiar la frontera asintótica del espaciotiempo[5], también se añade a la geometría el factor conforme

[3] Nótese que los índices entre paréntesis indican que no hay suma implícita para esos índices repetidos.
[4] Remito al lector al apéndice A para ver en completo detalle la derivación de las ecuaciones de campo.
[5] Esta transformación está permitida debido a la covariancia de las ecuaciones de Einstein.

$r^{-2\theta/D}$ que incorpora la simetría de violación de hiperescala. La dualidad norma/gravedad identifica el espacio en el que se define una teoría de campos como la frontera conforme del espaciotiempo de la teoría de gravedad [1], algo importante a mencionar es que para estudiar de forma holográfica teorías de campos a temperatura finita, el diccionario holográfico demanda que las soluciones requeridas del lado de gravedad sean geometrías con agujeros negros [23–25]. Para poder realizar un estudio mas profundo de esta teoría de gravedad y posteriormente una posible teoría de campos holográfica se permite que el espaciotiempo presente soluciones de agujeros negros. Para esto se necesita incorporar a la métrica una función $f(r)$ llamada *factor de ennegrecimiento*, esta función debe anularse en un punto $r \neq 0$ que determine la existencia de un horizonte de eventos. Además se demanda que $f(r) \to 1$ cuando $r \to 0$ o $r \to \infty$ para recuperar la geometría de Schrödinger con violación de hiperescala en la frontera asintótica del espaciotiempo; con todo esto se tiene la siguiente métrica [6]

$$ds^2_{D+3} = r^{-2\theta/D}\left[-b^2 r^{2z} f(r)(dx^+)^2 + \frac{1}{r^2 f(r)}dr^2 + r^2(dx^j dx_j + 2dx^+ dx^-)\right], \qquad (2.6)$$

donde $j = 1, 2, 3..D$. Hay que tener mucho cuidado al calcular todas las cantidades geométricas del espaciotiempo descrito por la métrica (2.6) ya que se pude observar que el tensor métrico tiene una forma no diagonal, lo cual se evidencia de forma mas clara si se escribe en su forma matricial

$$g_{\mu\nu} = r^{-2\tilde{\theta}} \begin{pmatrix} -b^2 r^{2z} f(r) & r^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ r^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 f(r)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & r^2 \end{pmatrix},$$

[6] En lo que resta de trabajo por comodidad algebraica se normaliza el valor del exponente de violación de hiperescala $\tilde{\theta} = \theta/D$ y el radio de curvatura se fija a $l = 1$.

con su respectiva matriz inversa

$$g^{\mu\nu} = r^{-2\tilde{\theta}} \begin{pmatrix} 0 & r^{-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ r^{-2} & b^2 r^{2(z-2)} f(r) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & r^2 f(r) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & r^{-2} \end{pmatrix},$$

donde los elementos covariantes y contravariantes de la métrica (2.6) son

$$\begin{aligned} g_{++} &= -b^2 r^{2(z-\tilde{\theta})} f(r), & g^{--} &= b^2 r^{2(z+\tilde{\theta}-2)} f(r), \\ g_{rr} &= \frac{r^{-2(\tilde{\theta}+1)}}{f(r)}, & g^{rr} &= f(r) r^{2(\tilde{\theta}+1)}, \\ g_{ab} &= \delta_{ab} r^{-2(\tilde{\theta}-1)}, & g^{ab} &= \delta^{ab} r^{2(\tilde{\theta}-1)}, \\ g_{+-} &= r^{-2(\tilde{\theta}-1)}, & g^{+-} &= r^{2(\tilde{\theta}-1)}; \end{aligned} \tag{2.7}$$

nótese que se usa la convención de índice latino para coordenadas espaciales transversales; esto significa que $a, b = 1, 2...D$; mientras que el determinante de la métrica (2.6) está dado por

$$|g| = -\frac{1}{f(r)} r^{-2\left[\tilde{\theta}(D+3)-(D+1)\right]},$$

se puede observar que $|g|$ solo depende de la función métrica $f(r)$ y el parámetro $\tilde{\theta}$. A continuación se calculan todas las cantidades geométricas de la métrica (2.6) que se necesitan para poder desarrollar las ecuaciones de campo (2.2), (2.3) y (2.4).

2.2.1 Símbolos de Christoffel

La geometría de Schrödinger es un espaciotiempo libre de torsión y con compatibilidad métrica por lo que la conexión definida sobre esta variedad es la conexión de Levi-Civita cuyas componentes en una base coordenada son los llamados símbolos de Christoffel [26]

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left[\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right]; \tag{2.8}$$

usando la definición (2.8) para calcular la conexión de la geometría definida por el tensor métrico (2.6), se obtienen los siguientes símbolos de Christoffel no nulos[7]

$$\begin{aligned}
\Gamma^r_{++} &= \frac{b^2 r^{2(z+1)} f^2}{2}\left\{\frac{f'}{f} + \frac{2(z-\tilde{\theta})}{r}\right\}, & \Gamma^r_{ab} &= r^3 f(\tilde{\theta}-1)\delta_{ab}, \\
\Gamma^r_{+-} &= r^3 f(\tilde{\theta}-1), & \Gamma^r_{rr} &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{f'}{f} + \frac{2(1+\tilde{\theta})}{r}\right\}, \\
\Gamma^+_{+r} &= -\frac{(\tilde{\theta}-1)}{r}, & \Gamma^-_{-r} &= -\frac{(\tilde{\theta}-1)}{r}, \\
\Gamma^-_{+r} &= -\frac{b^2 f r^{2(z-1)}}{2}\left\{\frac{f'}{f} + \frac{2(z-1)}{r}\right\}, & \Gamma^a_{br} &= -\frac{(\tilde{\theta}-1)}{r}\delta^a_b.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Recordar al lector que los símbolos de Christoffel no son cantidades tensoriales [21, 26], sin embargo representan una conexión simétrica ante el intercambio de los índices covariantes.

2.2.2 Tensor de Riemann

Una vez que se tiene la conexión de la geometría se procede a calcular el tensor de curvatura o tensor de Riemann, que es una de las cantidades mas importantes en geometría diferencial para definir la curvatura de una variedad de dimensión arbitraria, el cual se puede expresar como un tensor tipo (1,3) [21]

$$R^\sigma_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}, \tag{2.10}$$

el valor de cualquier otra entidad que describa la curvatura de una variedad puede deducirse de este tensor, tal es el caso del tensor de Ricci o el escalar de curvatura que son las expresiones que describen la parte geométrica en las ecuaciones de campo de Einstein[8]. Las componentes no nulas del tensor de Riemann para el tensor métrico (2.6) son

$$\begin{aligned}
R^+_{r+r} &= \frac{(\tilde{\theta}-1)}{r}\left\{\frac{f'}{2f} + \frac{1}{r}\right\}, & R^-_{r-r} &= \frac{(\tilde{\theta}-1)}{r}\left\{\frac{f'}{2f} + \frac{1}{r}\right\}, & R^a_{rbr} &= \frac{(\tilde{\theta}-1)}{r}\left\{\frac{f'}{2f} + \frac{1}{r}\right\}\delta^a_b, \\
R^+_{++-} &= -r^2 f(\tilde{\theta}-1)^2, & R^r_{+r-} &= (\tilde{\theta}-1)r^3 f\left\{\frac{f'}{2f} + \frac{1}{r}\right\}, & R^a_{+b-} &= -r^2 f(\tilde{\theta}-1)^2\delta^a_b, \\
R^+_{a+b} &= -r^2 f(\tilde{\theta}-1)^2\delta_{ab}, & R^-_{a-b} &= -r^2 f(\tilde{\theta}-1)^2\delta_{ab}, & R^r_{arb} &= (\tilde{\theta}-1)r^3 f\left\{\frac{f'}{2f} + \frac{1}{r}\right\}\delta_{ab},
\end{aligned}$$

[7] A partir de esta página queda implícita la dependencia radial del factor de ennegrecimiento $f(r)$, por lo que f' y f'' significan primera y segunda derivada con respecto a la coordenada r, respectivamente.

[8] El tensor de Ricci y el escalar de curvatura contienen toda la información de la traza del tensor de Riemann.

$$R^{c}_{acb} = -r^2 f(D-1)(\tilde{\theta}-1)^2\delta_{ab}, \qquad R^{-}_{+-+} = b^2 f^2 r^{2z}(\tilde{\theta}-1)^2,$$

$$R^{a}_{+b+} = -\frac{b^2 f^2(\tilde{\theta}-1)}{2r} r^{2(z+1)} \left\{ \frac{f'}{f} + \frac{2(z-\tilde{\theta})}{r} \right\} \delta^a_b,$$

$$R^{r}_{+r+} = b^2 f^2 r^{2(z+1)} \left\{ \frac{f''}{2f} + \frac{1}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{(5z-2\tilde{\theta}-2)}{2rf} f' + \frac{(z-\tilde{\theta})(2z-1)+(z-1)(\tilde{\theta}-1)}{r^2} \right\}$$

$$R^{-}_{r+r} = b^2 r^{2z-4} \left\{ \frac{r^2 f''}{2} + \frac{r^2}{4}\frac{f'^2}{f} + \frac{(5z-2\tilde{\theta}-2)}{2} r f' + (z-1)(2z-\tilde{\theta}) f \right\},$$

$$R^{-}_{a+b} = -b^2 r^{2z}(\tilde{\theta}-1) f \left\{ \frac{rf'}{2} + (z-1) f \right\};$$

cabe mencionar que se puede obtener $R^{\sigma}_{\rho\nu\mu}$ a partir de $R^{\sigma}_{\rho\mu\nu}$ si se hace uso de la antisimetría del tensor de Riemann ante el intercambio de los últimos dos índices[9], por lo que en las cantidades de arriba solo se muestran las componentes independientes del tensor de Riemann.

2.2.3 Tensor de Ricci

Para el tensor de curvatura formado a partir de una conexión arbitraria[10] hay diferentes contracciones independientes que se pueden tomar [21], pero para la conexión de Levi-Civita el tensor de Ricci es la única contracción diferente de cero que se puede formar del tensor de Riemann y se define como como la traza resultante de la contracción del primer y tercer índice del tensor de curvatura. Para la métrica (2.6) las componentes no nulas del tensor de Ricci son

$$R_{++} = b^2 r^{2(z+1)} \left\{ \frac{1}{2} f f'' + \frac{1}{4} f'^2 + \frac{\beta}{2r} f f' + \frac{\alpha}{r^2} f^2 \right\}, \tag{2.11}$$

$$R_{rr} = \frac{(D+2)(\tilde{\theta}-1)}{r} \left\{ \frac{f'}{2f} + \frac{1}{r} \right\}, \tag{2.12}$$

$$R_{+-} = (\tilde{\theta}-1) r^2 \left\{ \frac{rf'}{2} + \Big[1-(\tilde{\theta}-1)(D+1)\Big] f \right\}, \tag{2.13}$$

$$R_{ab} = (\tilde{\theta}-1) r^2 \left\{ \frac{rf'}{2} + \Big[1-(\tilde{\theta}-1)(D+1)\Big] f \right\} \delta_{ab}, \tag{2.14}$$

[9]La antisimetría ante el intercambio de los primeros dos índices no es evidente a menos que se exprese el tensor de Riemann en su forma (0,4).

[10]No necesariamente Christoffel.

donde

$$\alpha = (z - \tilde{\theta}) \left\{ 2z - D(\tilde{\theta} - 1) - \tilde{\theta} \right\} + 2(\tilde{\theta} - 1)(z - 1), \qquad \beta = 5z - 2\tilde{\theta} - D(\tilde{\theta} - 1) - 1.$$

El último ingrediente necesario para construir el tensor de Einstein es el escalar de curvatura o escalar de Ricci que se define como la traza del tensor de Ricci y se forma de la contracción del tensor de Ricci con la métrica $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, que para la métrica de Schrödinger con violación de hiperescala (2.6) toma la siguiente forma

$$R = (D + 2)(\tilde{\theta} - 1) r^{2\tilde{\theta}} \left\{ r f' + \left[2 - (\tilde{\theta} - 1)(D + 1) \right] f \right\}; \tag{2.15}$$

algo importante a comentar es que una de las características de la geometría descrita por la métrica (2.6) es que para el caso en que no hay agujeros negros[11] se tiene que $R \propto r^{2\tilde{\theta}}$, esto implica un escalar de curvatura que no es constante, a diferencia de las geometrías que no presentan violación de hiperescala [7, 8].

2.3 Desarrollo de las ecuaciones de campo

Una vez calculadas todas las cantidades geométricas de interés se procede a insertar la información de la geometría en las ecuaciones de campo (2.2), (2.3), (2.4) y de esta forma desarrollar la configuración de campos en un fondo con simetría de Schrödinger con violación de hiperescala.

2.3.1 Ecuaciones de Einstein

Con las expresiones del tensor de Ricci (2.11)-(2.14) y el escalar de curvatura (2.15) se construye el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ que representa la curvatura del espaciotiempo del sistema gravedad-campos de materia descrito por la acción (2.1)

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \tag{2.16}$$

donde las componentes no triviales de $G_{\mu\nu}$ son

$$G_{++} = \frac{b^2 r^{2z}}{2} \left\{ r^2 f f'' + \frac{1}{2} r^2 f'^2 + (5z - 3) r f f' + \left[4z^2 - 2z(1 + 2\tilde{\theta}) - 2\tilde{\theta}(\tilde{\theta} - 6) - 8 \right] f^2 \right\}, \tag{2.17}$$

[11] Es decir $f(r) = 1$.

$$G_{rr} = \frac{(D+1)(D+2)(\tilde{\theta}-1)^2}{2r^2}, \tag{2.18}$$

$$G_{+-} = \frac{(1-\tilde{\theta})(D+1)}{2} r^3 f' + \frac{(1-\tilde{\theta})(D+1)\left[D(1-\tilde{\theta})+2\right]}{2} r^2 f, \tag{2.19}$$

$$G_{ab} = \delta_{ab}\left\{\frac{(1-\tilde{\theta})(D+1)}{2} r^3 f' + \frac{(1-\tilde{\theta})(D+1)\left[D(1-\tilde{\theta})+2\right]}{2} r^2 f\right\}; \tag{2.20}$$

ahora falta desarrollar la parte de materia de las ecuaciones de campo de Einstein que corresponde al tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$ que describre la concentración de materia que curva el espaciotiempo[12], cabe mencionar que la métrica (2.6) describe un espaciotiempo estático[13], entonces por consistencia con la parte geométrica en las ecuaciones de campo se impone que todos los campos de materia hereden las isometrías del espaciotiempo (2.6), por lo que tanto el campo escalar ϕ y los n campos vectoriales A_i solo son funciones de la coordenada holográfica r [22]

$$\phi = \phi(r) \quad \text{y} \quad A_i = A_i(r),$$

por lo que si la ecuación (2.5) se expresa por componentes se tiene que

$$\begin{aligned} T_{++} = \chi_i(\phi) r^{2\tilde{\theta}} f^2 &\left\{\frac{r^{2(1-z)}}{fb^2}\left(A^{i}_{+}{}'\right)^2 + A^{i}_{+}{}' A^{i}_{-}{}' + \frac{1}{2}A^{i}_{c}{}' A^{i}_{c}{}'\right\} \\ &+ \frac{f}{r^{2\tilde{\theta}}}\left[\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi)\right] + \frac{M_i^2}{r^2} f\left[\frac{A^{i}_{+}{}^2}{fb^2 r^{2(z-1)}} + A^i_+ A^i_- + +\frac{1}{2}A^i_c A^i_c\right], \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} T_{rr} = \frac{1}{2}\chi_i(\phi) r^{2(\tilde{\theta}-1)} &\left\{\frac{fb^2}{r^{2(1-z)}}\left(A^{i}_{-}{}'\right)^2 + A^{i}_{+}{}' A^{i}_{-}{}' + \frac{1}{2}A^{i}_{c}{}' A^{i}_{c}{}'\right\} \\ &- \frac{1}{2fr^{2(\tilde{\theta}+1)}}\left[\frac{-(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi)\right] - \frac{M_i^2}{2fr^4}\left[A^i_+ A^i_- + \frac{1}{2}A^i_c A^i_c\right], \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$T_{+-} = -\frac{1}{4} f \chi_i(\phi) r^{2(\tilde{\theta}+1)} A^{i}_{c}{}' A^{i}_{c}{}' - \frac{1}{2r^{2(\tilde{\theta}-1)}}\left[\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi)\right] - \frac{M_i^2}{4} A^i_c A^i_c \tag{2.23}$$

[12]Por ejemplo si $T_{\mu\nu}$=0 implica una teoría en el vacío es decir puramente gravitatoria.

[13]Tanto los elementos de la métrica como el factor de ennegrecimiento solo dependen de r.

$$T_{ab} = \frac{1}{2} f \chi_i(\phi) r^{2(\tilde{\theta}+1)} \left\{ A_a^{i\,\prime} A_b^{i\,\prime} - \delta_{ab} \left[A_+^{i\,\prime} A_-^{i\,\prime} + \frac{1}{2} A_c^{i\,\prime} A_c^{i\,\prime} \right] \right\} + \frac{M_i^2}{2} A_a^i A_b^i$$
$$- \delta_{ab} \left\{ \frac{1}{2r^{2(\tilde{\theta}-1)}} \left[\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi) \right] + \frac{M_i^2}{2} \left[A_+^i A_-^i + \frac{1}{2} A_c^i A_c^i \right] \right\} \quad (2.24)$$

$$T_{--} = \left(A_-^{i\,\prime}\right)^2 + \frac{\left(M_i A_-^i\right)^2}{f\chi_i(\phi) r^{2(1+\tilde{\theta})}}, \quad (2.25)$$

$$T_{+a} = A_+^{i\,\prime} A_a^{i\,\prime} + \frac{M_i^2 A_+^i A_a^i}{f\chi_i(\phi) r^{2(1+\tilde{\theta})}}, \quad (2.26)$$

$$T_{-a} = A_-^{i\,\prime} A_a^{i\,\prime} + \frac{M_i^2 A_-^i A_a^i}{f\chi_i(\phi) r^{2(1+\tilde{\theta})}}, \quad (2.27)$$

$$T_{+r} = A_+^{i\,\prime} A_r^{i\,\prime} + \frac{M_i^2 A_+^i A_r^i}{f\chi_i(\phi) r^{2(1+\tilde{\theta})}}, \quad (2.28)$$

$$T_{-r} = A_-^{i\,\prime} A_r^{i\,\prime} + \frac{M_i^2 A_-^i A_r^i}{f\chi_i(\phi) r^{2(1+\tilde{\theta})}}, \quad (2.29)$$

$$T_{ar} = A_a^{i\,\prime} A_r^{i\,\prime} + \frac{M_i^2 A_a^i A_r^i}{f\chi_i(\phi) r^{2(1+\tilde{\theta})}}; \quad (2.30)$$

donde los términos $A_c^i A_c^i$ y $A_c^{i\,\prime} A_c^{i\,\prime}$ contienen una doble suma implícita[14], la primera sobre todas las componentes espaciales transversales del i-ésimo campo vectorial y la segunda sobre los n campos vectoriales. Finalmente se iguala la parte geométrica de las ecuaciones de Einstein[15] $G_{\mu\nu}$ con la parte de materia dada por $T_{\mu\nu}$, resultando en el siguiente sistema acoplado de 10 ecuaciones diferenciales no lineales[16]

$$\mathcal{E}_{++}: \quad r^2 f'' + \frac{1}{2}\frac{r^2 f'^2}{f} + \beta_1 r f' + \alpha_1 f = f\chi_i(\phi) r^{2\tilde{\theta}} \left\{ \frac{r^{2(1-z)}}{fb^2} \left(A_+^{i\,\prime}\right)^2 + A_+^{i\,\prime} A_-^{i\,\prime} \right\}$$
$$+ \frac{1}{r^{2\tilde{\theta}}} \left[\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi) \right] + \frac{M_i^2}{r^2} \left[\frac{A_+^{i\;2}}{fb^2 r^{2(z-1)}} + A_+^i A_-^i \right], \quad (2.31)$$

[14] Por ejemplo $A_c^i A_c^i$ realmente significa $\sum_{i=1}^{n} \sum_{c=1}^{D} A_c^i A_c^i$.
[15] Se define el símbolo $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ para hacer referencia a las ecuaciones de Einstein.
[16] En realidad son más de 10 ecuaciones diferenciales, porque $\mathcal{E}_{ab}$ contiene D ecuaciones idénticas.

$$\mathcal{E}_{rr}: \quad \alpha_2 f = \frac{1}{2} f \chi_i(\phi) r^{2\tilde{\theta}} \left\{ \frac{f b^2}{r^{2(1-z)}} \left(A_-^{i}{}'\right)^2 + A_+^{i}{}' A_-^{i}{}' + \frac{1}{2} A_c^{i}{}' A_c^{i}{}' \right\}$$
$$- \frac{1}{2r^{2\tilde{\theta}}} \left[\frac{-(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi) \right] - \frac{M_i^2}{2r^2} \left[A_+^i A_-^i + \frac{1}{2} A_c^i A_c^i \right], \quad (2.32)$$

$$\mathcal{E}_{+-}: \quad \beta_2 r f' + \alpha_3 f = -\frac{1}{4} f \chi_i(\phi) r^{2\tilde{\theta}} A_c^{i}{}' A_c^{i}{}' - \frac{1}{2r^{2\tilde{\theta}}} \left[\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi) \right] - \frac{M_i^2}{4r^2} A_c^i A_c^i, \quad (2.33)$$

$$\mathcal{E}_{ab}: \quad \delta_{ab} \left\{ \beta_2 r f' + \alpha_3 f \right\} = \frac{1}{2} f \chi_i(\phi) r^{2\tilde{\theta}} \left\{ A_a^{i}{}' A_b^{i}{}' - \delta_{ab} \left[A_+^{i}{}' A_-^{i}{}' + \frac{1}{2} A_c^{i}{}' A_c^{i}{}' \right] \right\} + \frac{M_i^2}{2r^2} A_a^i A_b^i$$
$$- \delta_{ab} \left\{ \frac{1}{2r^{2\tilde{\theta}}} \left[\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi) \right] + \frac{M_i^2}{2r^2} \left[A_+^i A_-^i + \frac{1}{2} A_c^i A_c^i \right] \right\}, \quad (2.34)$$

$$\mathcal{E}_{--}: \quad \left(A_-^{i}{}'\right)^2 + \frac{\left(M_i A_-^i\right)^2}{f \chi_i(\phi) r^{2(1+\tilde{\theta})}} = 0, \quad (2.35)$$

$$\mathcal{E}_{+a}: \quad A_+^{i}{}' A_a^{i}{}' + \frac{M_i^2 A_+^i A_a^i}{f \chi_i(\phi) r^{2(1+\tilde{\theta})}} = 0, \quad (2.36)$$

$$\mathcal{E}_{-a}: \quad A_-^{i}{}' A_a^{i}{}' + \frac{M_i^2 A_-^i A_a^i}{f \chi_i(\phi) r^{2(1+\tilde{\theta})}} = 0, \quad (2.37)$$

$$\mathcal{E}_{+r}: \quad A_+^{i}{}' A_r^{i}{}' + \frac{M_i^2 A_+^i A_r^i}{f \chi_i(\phi) r^{2(1+\tilde{\theta})}} = 0, \quad (2.38)$$

$$\mathcal{E}_{-r}: \quad A_-^{i}{}' A_r^{i}{}' + \frac{M_i^2 A_-^i A_r^i}{f \chi_i(\phi) r^{2(1+\tilde{\theta})}} = 0, \quad (2.39)$$

$$\mathcal{E}_{ar}: \quad A_a^{i}{}' A_r^{i}{}' + \frac{M_i^2 A_a^i A_r^i}{f \chi_i(\phi) r^{2(1+\tilde{\theta})}} = 0; \quad (2.40)$$

donde α_1, β_1, α_2, α_3 y β_2 son las siguientes constantes que dependen de los parámetros z y θ

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 4z^2 - 2z(1+2\tilde{\theta}) - 2\left[4+\tilde{\theta}(\tilde{\theta}-6)\right],\\
\alpha_2 &= \frac{1}{2}(D+1)(D+2)(\tilde{\theta}-1)^2,\\
\alpha_3 &= -\frac{1}{2}(\tilde{\theta}-1)(D+1)\left\{D(1-\tilde{\theta})+2\right\},\\
\beta_1 &= 5z-3,\\
\beta_2 &= -\frac{1}{2}(\tilde{\theta}-1)(D+1),\\
\tilde{\theta} &= \theta/D.
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (2.35)-(2.40) corresponden a las restricciones impuestas sobre $T_{\mu\nu}$ por las componentes que son idénticamente cero de $G_{\mu\nu}$, lo cual se discute con mayor detalle más adelante cuando se presentan diferentes *ansätze* de los campos de materia para poder resolver el sistema de ecuaciones de campo.

2.3.2 Ecuaciones de Proca para los campos vectoriales A_i

Para escribir por componentes las ecuaciones de Proca (2.3) primero se desarrolla explícitamente la derivada covariante del primer miembro [21, 26]

$$\nabla_\mu\left[\chi_{(i)}(\phi)F^{\mu\nu}_{(i)}\right] = \partial_\mu\left[\chi_{(i)}(\phi)F^{\mu\nu}_{(i)}\right] + \chi_{(i)}(\phi)\left[\Gamma^\mu_{\mu\lambda}F^{\lambda\nu}_{(i)} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}F^{\mu\lambda}_{(i)}\right],$$

pero el término $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}F^{\mu\lambda}_{(i)}$ es idénticamente cero porque es una contracción de un par de índices simétricos (símbolos de Christoffel) con un par antisimétrico (tensor de campo electromagnético) [21], por lo que,

$$\nabla_\mu\left[\chi_{(i)}(\phi)F^{\mu\nu}_{(i)}\right] = \partial_\mu\left[\chi_{(i)}(\phi)F^{\mu\nu}_{(i)}\right] + \chi_{(i)}(\phi)\left[\Gamma^\mu_{\mu\lambda}F^{\lambda\nu}_{(i)}\right], \tag{2.41}$$

esta expresión se puede simplificar si se desarrollan[17] los símbolos de Christoffel $\Gamma^\mu_{\mu\lambda}$ de la siguiente manera

$$\Gamma^\mu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left[\partial_\lambda g_{\mu\rho} + \partial_\mu g_{\mu\rho} - \partial_\mu g_{\mu\rho}\right] = \frac{1}{2}tr(g^{-1}\partial_\lambda g),$$

[17] Donde g es la representación matricial del tensor métrico, g^{-1} su matriz inversa y tr significa calcular la traza.

si se escribe $g^{-1}\partial_\lambda g$ como la derivada de un logaritmo y se conmuta[18] la derivada con la operación tr se tiene que

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} tr[\partial_\lambda Log(g)], \tag{2.42}$$

la ecuación (2.42) se puede escribir de forma mas inteligente si se usa la siguiente identidad válida para matrices diagonalizables [21, 26]

$$Log(-|g|) = tr[Log(g)], \tag{2.43}$$

siendo $|g|$ el determinante[19] de la matriz g; si se inserta la ecuación (2.43) en (2.42), con un poco de álgebra se obtiene

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-|g|}} \partial_\lambda \sqrt{-|g|}, \tag{2.44}$$

por último se inserta (2.44) en (2.41), con lo que se tiene que

$$\nabla_\mu \left[\chi_{(i)}(\phi) F^{\mu\nu}_{(i)}\right] = \partial_\mu \left[\chi_{(i)}(\phi) F^{\mu\nu}_{(i)}\right] + \chi_{(i)} F^{\lambda\nu}_{(i)} \frac{1}{\sqrt{-|g|}} \partial_\lambda \sqrt{-|g|}, \tag{2.45}$$

donde como se explico antes, por consistencia solo existen derivadas con respecto a la coordenada r, lo que implica que $\mu = r$ y $\lambda = r$ es la única componente no trivial en (2.45), por lo que

$$\nabla_\mu \left[\chi_{(i)}(\phi) F^{\mu\nu}_{(i)}\right] = \partial_r \left[\chi_{(i)}(\phi) F^{r\nu}_{(i)}\right] + \chi_{(i)} F^{r\nu}_{(i)} \frac{1}{\sqrt{-|g|}} \partial_r \sqrt{-|g|}, \tag{2.46}$$

el lector podrá notar claramente que (2.46) corresponde a la derivada de un producto que se puede escribir de forma compacta como

$$\nabla_\mu \left[\chi_{(i)}(\phi) F^{\mu\nu}_{(i)}\right] = \frac{1}{\sqrt{-|g|}} \partial_r \left[\sqrt{-|g|} \chi_{(i)}(\phi) F^{r\nu}_{(i)}\right], \tag{2.47}$$

la ecuación (2.47) representa el primer miembro de las ecuaciones de Proca (2.3), por lo que al igualar el segundo miembro de (2.3) con (2.47) se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{-|g|}} \partial_r \left[\sqrt{-|g|} \chi_{(i)}(\phi) F^{r\nu}_{(i)}\right] = M^2_{(i)} A^{\nu}_{(i)}, \tag{2.48}$$

las cuales son las ecuaciones de Proca en una forma mas útil para realizar cálculos. Al expresar por componentes la ecuacion (2.48) se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden para las componentes del campo vectorial[20] A_i

$$A^{i}_{-}{}'' + \left\{ \frac{f'}{2f} + \frac{\chi_i'(\phi)}{\chi_i(\phi)} + \frac{(1+\tilde{\theta}) + D(1-\tilde{\theta})}{r} \right\} A^{i}_{-}{}' - \frac{M_i^2 A^i_-}{f \chi_i(\phi) r^{2(1+\tilde{\theta})}} = 0, \tag{2.49}$$

[18] Tanto la traza como la derivada son operaciones lineales por lo que conmutan.

[19] Nótese que se está trabajando con una variedad Lorentziana por lo que $|g| < 0$.

[20] En las ecuaciones de Proca el índice ii no indica suma ímplcita.

$$A^{i}_{+}{}'' + \left\{ \frac{f'}{2f} + \frac{\chi_i'(\phi)}{\chi_i(\phi)} + \frac{(1+\tilde{\theta}) + D(1-\tilde{\theta})}{r} \right\} A^{i}_{+}{}' - \frac{M_i^2 A^i_+}{f\chi_i(\phi) r^{2(1+\tilde{\theta})}} = -b^2 \left[f r^{2(z-1)} \right]' A^{i}_{+}{}', \tag{2.50}$$

$$A^{i}_{a}{}'' + \left\{ \frac{f'}{2f} + \frac{\chi_i'(\phi)}{\chi_i(\phi)} + \frac{(1+\tilde{\theta}) + D(1-\tilde{\theta})}{r} \right\} A^{i}_{a}{}' - \frac{M_i^2 A^i_a}{f\chi_i(\phi) r^{2(1+\tilde{\theta})}} = 0, \tag{2.51}$$

$$A^i_r = 0; \tag{2.52}$$

que la componente radial de los campos vectoriales sea cero es consecuencia directa de las isometrías del espaciotiempo (2.6) y de la antisimetría del tensor de campo electromagnético $F_i^{\mu\nu}$; esto implica que las ecuaciones (2.38), (2.39) y (2.40) que son las restricciones impuestas sobre las componentes no diagonales T_{+r}, T_{-r} y T_{ar} se cumplen trivialmente debido a que $A^i_r = 0$.

2.3.3 Ecuación del campo escalar ϕ

La última ecuación que queda por desarrollar es la ecuación asociada al campo escalar [23]

$$\Box\phi = \partial_\phi V(\phi) + \frac{1}{4}\partial_\phi \chi_i(\phi) F_i^2, \tag{2.53}$$

donde $\Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ es el operador D'Alambertiano; por lo que si se inserta la información de la métrica (2.6) en el primer miembro de (2.53) se tiene que[21]

$$\begin{aligned} \Box\phi &= g^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\nu\phi \\ \Box\phi &= g^{\mu\nu}\left[\partial_\mu\partial_\nu\phi - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda\phi\right], \end{aligned} \tag{2.54}$$

pero el campo escalar solo depende de la coordenada r, por lo que en el primer término de (2.54) $\mu = r$, $\nu = r$ y en el segundo término $\lambda = r$, por lo que

$$\Box\phi = g^{rr}\phi'' - g^{\mu\nu}\Gamma^r_{\mu\nu}\phi', \tag{2.55}$$

al desarrollar la doble suma en el término $g^{\mu\nu}\Gamma^r_{\mu\nu}$ se tiene que

$$\Box\phi = g^{rr}\phi - \left[g^{rr}\phi\Gamma^r_{rr} + g^{ab}\Gamma^r_{ab} + 2g^{+-}\Gamma^r_{+-}\right], \tag{2.56}$$

[21] Se recuerda que ϕ es una cantidad escalar por lo que $\nabla_\nu\phi = \partial_\nu\phi$.

lo que procede es insertar los símbolos de Christoffel (2.9) y los elementos contravariantes de la métrica (2.7) en la ecuación (2.56), al realizar el álgebra correspondiente finalmente se obtiene

$$\Box\phi = fr^{2(1+\tilde{\theta})}\left\{\phi'' + \left[\frac{f'}{2f} + \frac{(D+3)-\tilde{\theta}(D+1)}{r}\right]\phi'\right\}, \tag{2.57}$$

por lo que al igualar (2.57) con el segundo miembro de (2.53), la ecuación del campo escalar se escribe como

$$\phi'' + \left\{\frac{f'}{2f} + \frac{(D+3)-\tilde{\theta}(D+1)}{r}\right\}\phi' = \frac{1}{fr^{2(1+\tilde{\theta})}}\left\{\partial_\phi V(\phi) + \frac{1}{4}\partial_\phi\chi_i(\phi)F_i^2\right\},$$

al desarrollar F_i^2, la ecuación del campo escalar se expresa como

$$\begin{aligned}\phi'' + \left\{\frac{f'}{2f} + \frac{(D+3)-\tilde{\theta}(D+1)}{r}\right\}\phi' &= \frac{\partial_\phi V(\phi)}{fr^{2(1+\tilde{\theta})}} \\ &+ \frac{1}{2}\partial_\phi\chi_i(\phi)r^{2(\tilde{\theta}-1)}\left\{fb^2r^{2(z-1)}\left({A_-^i}'\right)^2 + 2{A_+^i}'{A_-^i}' + {A_c^i}'{A_c^i}'\right\}.\end{aligned} \tag{2.58}$$

La ecuación (2.58) es la que dicta la dinámica del campo escalar. En resumen, las ecuaciones (2.31)-(2.40) hacen referencia a las ecuaciones de campo de Einstein, las ecuaciones (2.49)-(2.52) son las ecuacíones de Proca para las componentes de los campos vectoriales A_i y (2.58) es la ecuación asociada al campo escalar, donde todas estas ecuaciones juntas forman un solo sistema acoplado de 15 ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden, el cual presenta varias soluciones exactas que se discuten en los próximos capítulos.

Capítulo 3

Solución en una teoría Einstein-Maxwell-Dilatón generalizada

En este capítulo se presenta una solución exacta a las ecuaciones de campo del sistema gravedad-campos de materia descrito por la acción (2.1) para el caso de campos sin masa, para obtener esta solución se necesita al menos un campo vectorial acoplado a un campo escalar real, de esta forma en la sección 3.1.2 se presenta una solución de gravedad en el marco de la conocida teoría Einstein-Maxwell-Dilatón en un número arbitrario de dimensiones la cual soporta la geometría de Schrödinger a temperatura cero con exponentes z y θ libres.

3.1 Ecuaciones de campo para $M_i = 0$

Para construir esta solución el primer paso es analizar las ecuaciones de campo para el *ansatz* de campos vectoriales sin masa[1], esto se traduce matemáticamente en hacer $M_i = 0$ en el sistema de ecuaciones diferenciales (2.31)-(2.40), (2.49)-(2.51) y (2.58), con lo

[1]Para campos vectoriales sin masa las ecuaciones de Proca se reducen a las ecuaciones de Maxwell.

cual el sistema de ecuaciones de campo de Einstein se reducen a

$$\mathcal{E}_{++}: \quad r^2 f'' + \frac{1}{2}\frac{r^2 f'^2}{f} + \beta_1 r f' + \alpha_1 f = f\chi_i(\phi) r^{2\tilde{\theta}} \left\{ \frac{r^{2(1-z)}}{fb^2} \left(A_+^{i\,\prime}\right)^2 + A_+^{i\,\prime} A_-^{i\,\prime} \right\} + \frac{1}{r^{2\tilde{\theta}}} \left[\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi) \right], \tag{3.1}$$

$$\mathcal{E}_{rr}: \quad \alpha_2 f = \frac{1}{2} f\chi_i(\phi) r^{2\tilde{\theta}} \left\{ \frac{fb^2}{r^{2(1-z)}} \left(A_-^{i\,\prime}\right)^2 + A_+^{i\,\prime} A_-^{i\,\prime} + \frac{1}{2} A_c^{i\prime} A_c^{i\prime} \right\} - \frac{1}{2r^{2\tilde{\theta}}} \left[\frac{-(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi) \right], \tag{3.2}$$

$$\mathcal{E}_{+-}: \quad \beta_2 r f' + \alpha_3 f = -\frac{1}{4} f\chi_i(\phi) r^{2\tilde{\theta}} A_c^{i\prime} A_c^{i\prime} - \frac{1}{2r^{2\tilde{\theta}}} \left[\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi) \right], \tag{3.3}$$

$$\mathcal{E}_{ab}: \quad \delta_{ab}\left\{\beta_2 r f' + \alpha_3 f\right\} = \frac{1}{2} f\chi_i(\phi) r^{2\tilde{\theta}} \left\{ A_a^{i\prime} A_b^{i\prime} - \delta_{ab} \left[A_+^{i\,\prime} A_-^{i\,\prime} + \frac{1}{2} A_c^{i\prime} A_c^{i\prime} \right] \right\} - \delta_{ab} \left\{ \frac{1}{2r^{2\tilde{\theta}}} \left[\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi) \right] \right\}, \tag{3.4}$$

$$\mathcal{E}_{--}: \quad \left(A_-^{i\,\prime}\right)^2 = 0, \tag{3.5}$$

$$\mathcal{E}_{+a}: \quad A_+^{i\,\prime} A_a^{i\,\prime} = 0, \tag{3.6}$$

$$\mathcal{E}_{-a}: \quad A_-^{i\,\prime} A_a^{i\,\prime} = 0, \tag{3.7}$$

donde se tienen las constantes

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 4z^2 - 2z(1+2\tilde{\theta}) - 2\left[4 + \tilde{\theta}(\tilde{\theta}-6)\right], \\
\alpha_2 &= \frac{1}{2}(D+1)(D+2)(\tilde{\theta}-1)^2, \\
\alpha_3 &= -\frac{1}{2}(\tilde{\theta}-1)(D+1)\left\{D(1-\tilde{\theta}) + 2\right\}, \\
\beta_1 &= 5z - 3, \\
\beta_2 &= -\frac{1}{2}(\tilde{\theta}-1)(D+1), \\
\tilde{\theta} &= \theta/D;
\end{aligned}$$

mientras las ecuaciones de Maxwell para las componentes de los campos vectoriales son[2]

$$A_{-}^{i}{}'' + \left\{ \frac{f'}{2f} + \frac{\chi_i'(\phi)}{\chi_i(\phi)} + \frac{(1+\tilde{\theta}) + D(1-\tilde{\theta})}{r} \right\} A_{-}^{i}{}' = 0, \tag{3.8}$$

$$A_{+}^{i}{}'' + \left\{ \frac{f'}{2f} + \frac{\chi_i'(\phi)}{\chi_i(\phi)} + \frac{(1+\tilde{\theta}) + D(1-\tilde{\theta})}{r} \right\} A_{+}^{i}{}' = -b^2 \left[f r^{2(z-1)} \right]' A_{-}^{i}{}', \tag{3.9}$$

$$A_{a}^{i}{}'' + \left\{ \frac{f'}{2f} + \frac{\chi_i'(\phi)}{\chi_i(\phi)} + \frac{(1+\tilde{\theta}) + D(1-\tilde{\theta})}{r} \right\} A_{a}^{i}{}' = 0, \tag{3.10}$$

$$A_r^i = 0; \tag{3.11}$$

la ecuación asociada al campo escalar no se ve afectada directamente al hacer cero la masa de los campos vectoriales, por lo que es la misma ecuación del capítulo anterior

$$\begin{aligned} \phi'' + \left\{ \frac{f'}{2f} + \frac{(D+3) - \tilde{\theta}(D+1)}{r} \right\} \phi' &= \frac{\partial_\phi V(\phi)}{f r^{2(1+\tilde{\theta})}} \\ &+ \frac{1}{2} \partial_\phi \chi_i(\phi) r^{2(\tilde{\theta}-1)} \left\{ f b^2 r^{2(z-1)} \left(A_{-}^{i}{}'\right)^2 + 2 A_{+}^{i}{}' A_{-}^{i}{}' + A_c^{i}{}' A_c^{i}{}' \right\}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Se observa que al considerar campos vectoriales sin masa, las ecuaciones (3.5)-(3.7) que son las restricciones impuestas a las componentes T_{--}, T_{+a} y T_{-a} del tensor energía momento, adquieren una forma sencilla que proporciona información sobre las componentes de los campos vectoriales. La ecuación $\mathcal{E}_{--}$ impone que las componentes A_{-}^{i} deban ser constantes[3], lo que implica que la ecuación para $\mathcal{E}_{-a}$ se cumple trivialmente, entonces de este conjunto de restricciones solo queda por satisfacer la ecuación para $\mathcal{E}_{+a}$ que se traduce en

$$A_{+}^{i}{}' \neq 0 \quad o \quad A_{a}^{i}{}' \neq 0;$$

sin embargo a continuación se va a demostrar que debido a que las componentes A_{-}^{i} son cero, entonces las ecuaciones de Einstein imponen necesariamente que las componentes A_a^i

[2]En las ecuaciones de Maxwell el índice ii no indica suma ímplcita.
[3]Las cuales se pueden hacer cero sin perdida de generalidad.

también deban ser cero o constantes arbitrarias. Para poder ver esta afirmación se escriben las ecuaciones de Einstein no triviales con $A_{-}^{i} = 0$, las cuales son

$$\mathcal{E}_{++}: \quad r^2 f'' + \frac{1}{2}\frac{r^2 f'^2}{f} + \beta_1 r f' + \alpha_1 f = \chi_i(\phi)\frac{r^{2(1+\tilde{\theta}-z)}}{b^2}\left(A_{+}^{i}{}'\right)^2 + \frac{1}{r^{2\tilde{\theta}}}\left[\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi)\right], \tag{3.13}$$

$$\mathcal{E}_{rr}: \quad \alpha_2 f = \frac{1}{4} f \chi_i(\phi) r^{2\tilde{\theta}} A_c^{i}{}' A_c^{i}{}' - \frac{1}{2r^{2\tilde{\theta}}}\left[\frac{-(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi)\right], \tag{3.14}$$

$$\mathcal{E}_{+-}: \quad \beta_2 r f' + \alpha_3 f = -\frac{1}{4} f \chi_i(\phi) r^{2\tilde{\theta}} A_c^{i}{}' A_c^{i}{}' - \frac{1}{2r^{2\tilde{\theta}}}\left[\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi)\right], \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{ab}: \quad \delta_{ab}\left\{\beta_2 r f' + \alpha_3 f\right\} = \frac{1}{2} f \chi_i(\phi) r^{2\tilde{\theta}} &\left\{A_a^{i}{}' A_b^{i}{}' - \delta_{ab}\frac{1}{2} A_c^{i}{}' A_c^{i}{}'\right\} \\ &- \delta_{ab}\left\{\frac{1}{2r^{2\tilde{\theta}}}\left[\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi)\right]\right\},\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\mathcal{E}_{+a}: \quad A_{+}^{i}{}' A_a^{i}{}' = 0, \tag{3.17}$$

es importante notar que en la ecuación para $\mathcal{E}_{ab}$ cuando $a \neq b$ se tiene que

$$f \chi_i(\phi) r^{2\tilde{\theta}} A_a^{i}{}' A_b^{i}{}' = 0, \tag{3.18}$$

pero tanto el factor de ennegrecimiento $f(r)$ y las funciones $\chi_i(\phi)$ no pueden ser cero, entonces se tiene que solo una de componentes espaciales transversales A_a^i puede ser no trivial, se elige $A_a^{i}{}' \neq 0$ para $a = 1$ y $A_a^{i}{}' = 0$ para $a = 2, 3 \ldots D$; ahora cuando $a = b$, $\mathcal{E}_{ab}$ toma la siguiente forma

$$\beta_2 r f' + \alpha_3 f = \frac{1}{2} f \chi_i(\phi) r^{2\tilde{\theta}}\left\{\left(A_a^{i}{}'\right)^2 - \frac{1}{2} A_c^{i}{}' A_c^{i}{}'\right\} - \frac{1}{2r^{2\tilde{\theta}}}\left[\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi)\right], \tag{3.19}$$

pero si se resta $\mathcal{E}_{+-} - \mathcal{E}_{ab}$ con $a = b$ se tiene que

$$f \chi_i(\phi) r^{2\tilde{\theta}}\left(A_a^{i}{}'\right)^2 = 0, \tag{3.20}$$

por lo que de las ecuaciones (3.18) y (3.20) se observa que realmente todas las componentes espaciales transversales A_a^i son triviales. En resumen de este pequeño análisis se concluye que para campos vectoriales sin masa esta teoría de gravedad solo admite campos vectoriales puramente eléctricos[4], es decir con componentes $A_+^i \neq 0$.

3.1.1 Sistema de ecuaciones para campos vectoriales eléctricos

El que esta teoría de gravedad solo permita[5] campos vectoriales puramente eléctricos simplifica y disminuye la cantidad de ecuaciones a resolver, por lo que se procede a escribir las ecuaciones no triviales del sistema, las cuales son

$$\mathcal{E}_{++}: \quad r^2 f'' + \frac{1}{2}\frac{r^2 f'^2}{f} + \beta_1 r f' + \alpha_1 f = \chi_i(\phi)\frac{r^{2(1+\tilde{\theta}-z)}}{b^2}({A_+^i}')^2 + \frac{1}{r^{2\tilde{\theta}}}\left[\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi)\right], \tag{3.21}$$

$$\mathcal{E}_{rr}: \quad \alpha_2 f = -\frac{1}{2r^{2\tilde{\theta}}}\left[\frac{-(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi)\right], \tag{3.22}$$

$$\mathcal{E}_{+-}: \quad \beta_2 r f' + \alpha_3 f = -\frac{1}{2r^{2\tilde{\theta}}}\left[\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi)\right], \tag{3.23}$$

$$\mathcal{E}_{ab}: \quad \left\{\beta_2 r f' + \alpha_3 f\right\} = \delta_{ab}\left\{-\frac{1}{2r^{2\tilde{\theta}}}\left[\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi)\right]\right\}, \tag{3.24}$$

$${A_+^i}'' + \left\{\frac{f'}{2f} + \frac{\chi_i'(\phi)}{\chi_i(\phi)} + \frac{(1+\tilde{\theta}) + D(1-\tilde{\theta})}{r}\right\}{A_+^i}' = 0, \tag{3.25}$$

$$\phi'' + \left\{\frac{f'}{2f} + \frac{(D+3) - \tilde{\theta}(D+1)}{r}\right\}\phi' = \frac{\partial_\phi V(\phi)}{f r^{2(1+\tilde{\theta})}}; \tag{3.26}$$

La ecuación para $\mathcal{E}_{ab}$ realmente son D ecuaciones idénticas a la ecuación $\mathcal{E}_{+-}$ por lo que no hace falta seguir considerándola; es importante mencionar que en el segundo miembro de

[4] En teoría clásica de campos la componente temporal de A_μ está relacionada con el campo eléctrico, mientras las componentes espaciales con un campo magnético [21].

[5] Esta afirmación solo es válida para campos vectoriales sin masa, en el capítulo 5 se presenta una solución para campos masivos y con componentes A_+ y A_- proporcionales.

la ecuación asociada al campo escalar (3.26) solo aparece como fuente $V(\phi)$, esto se debe a que $\chi_i(\phi)$ son las funciones de acoplamiento entre el campo escalar y los invariantes de Maxwell, pero $F_i^2 = 0$ para campos vectoriales puramente eléctricos. Encontrar soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein es una tarea complicada, una de las principales razones es que son un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, esto implica que no hay una forma sistemática para trabajar con ellas, debido a esto la mayoría de soluciones que se han encontrado en la literatura corresponden a casos altamente simétricos, por ejemplo la solución de Schwarzschild, que es la solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío para simetría esférica. La estrategia que se lleva acabo en esta tesis es tomar combinaciones lineales de las ecuaciones para de esta manera resolver las que son realmente independientes y poder encontrar configuraciones de campos[6] que resuelvan el sistema de ecuaciones dado por (3.21)-(3.26); lo primero que se intenta hacer es tratar de desacoplar la función métrica $f(r)$ de los campos de materia a partir de la ecuación para $\mathcal{E}_{++}$[7], de esta forma si se toma la combinación $\mathcal{E}_{++} + 2\mathcal{E}_{+-}$ se obtiene

$$r^2 f'' + \frac{1}{2}\frac{r^2 f'^2}{f} + \tilde{\beta}_1 r f' + \tilde{\alpha}_1 f = \chi_i(\phi)\frac{r^{2(1+\tilde{\theta}-z)}}{b^2}\left(A_+^{i\,\prime}\right)^2, \tag{3.27}$$

donde

$$\tilde{\alpha}_1 = 2(z-1)\big[D + 2z - \tilde{\theta}(D+1)\big] \quad y \quad \tilde{\beta}_1 = 5z - \tilde{\theta}(D+1) + (D-2);$$

cabe mencionar que la ecuación (3.27) también se puede obtener de una forma directa si se escriben las ecuaciones de Einstein con un índice arriba y uno abajo $\mathcal{E}^\mu_\nu$, donde la ecuación (3.27) realmente corresponde a la componente $\mathcal{E}^-_+$. Es importante notar que la ventaja de (3.27) es que ya no aparece explícitamente el campo escalar ϕ ni el potencial $V(\phi)$, solo aparece como fuente de la curvatura del espaciotiempo las derivadas de los campos vectoriales $A_+^{i\,\prime}$ y las funciones $\chi_i(\phi)$. Esto hace que (3.27) sea una ecuación más fácil de analizar debido a que los campos A_i al no tener masa aceptan una primera integral dada por la ecuación de Maxwell (3.25), que se puede reescribir de una forma mas conveniente como

$$\partial_r \log\left[A_+^{i\,\prime}\right] = -\partial_r \log\left[\sqrt{f}\chi_i(\phi) r^{(1+\tilde{\theta})+D(1-\tilde{\theta})}\right], \tag{3.28}$$

[6]Es decir encontrar la función métrica $f(r)$, los campos vectoriales A_i y el campo escalar ϕ.

[7]Se escoge esta ecuación ya que es la única ecuación diferencial de segundo orden del sistema y de esta forma poder tener la solución mas general posible.

al integrar con respecto a r ambos miembros de (3.28), se obtiene

$$\log\left[{A^i_+}'\right] = -\log\left[\sqrt{f}\chi_i(\phi)r^{(1+\tilde{\theta})+D(1-\tilde{\theta})}\right] + \log(\rho_i), \tag{3.29}$$

donde ρ_i son constantes de integración arbitrarias, que para acoplamiento mínimo $\chi_i(\phi) = 1$ se identifican con las cargas eléctricas de los campos [5, 22]; por lo que al aplicar la función exponencial a ambos miembros de (3.29) se encuentra una expresión mas útil para la derivada de los campos vectoriales

$${A^i_+}'(r) = \frac{\rho_i}{\sqrt{f}\chi_i(\phi)r^{(1+\tilde{\theta})+D(1-\tilde{\theta})}}, \tag{3.30}$$

el siguiente paso para desacoplar $f(r)$ es insertar $\left({A^i_+}'\right)^2$ en el segundo miembro de (3.27), con lo que al final de un poco de álgebra se obtiene

$$r^2 f'' + \frac{1}{2}\frac{r^2 f'^2}{f} + \tilde{\beta}_1 r f' + \tilde{\alpha_1} f = \frac{\rho_i^2 r^{2\left[D(\tilde{\theta}-1)-z\right]}}{f b^2 \chi_i(\phi)}. \tag{3.31}$$

A pesar de que la ecuación (3.31) no logra desacoplar $f(r)$, es una expresión mas simplificada en la que ya no aparecen los campos de materia explícitamente como fuente en el segundo miembro, solo aparecen las funciones de acoplamiento $\chi_i(\phi)$. Ahora para poder desacoplar el campo escalar ϕ se toma la combinación $\mathcal{E}_{rr} - \mathcal{E}_{+-}$, que resulta en

$$\frac{(\tilde{\theta}-1)(D+1)}{2}\frac{rf'}{f} + \tilde{\theta}(\tilde{\theta}-1)(D+1) = \frac{(\nabla\phi)^2}{2fr^{2\tilde{\theta}}}, \tag{3.32}$$

al desarrollar $(\nabla\phi)^2$ recordando que solo hay derivadas con respecto a la coordenada r, se encuentra que

$$(\nabla\phi)^2 = \partial^\mu\phi\partial_\mu\phi = fr^{2(1+\tilde{\theta})}(\phi')^2, \tag{3.33}$$

al insertar (3.33) en (3.32) se obtiene la ecuación diferencial a resolver para encontrar el campo escalar, la cual al simplificar se tiene

$$\phi'(r) = \frac{\sqrt{(D+1)(\tilde{\theta}-1)}}{r}\sqrt{\frac{rf'}{f} + 2\tilde{\theta}}; \tag{3.34}$$

para desacoplar el potencial $V(\phi)$ se toma la combinación $\mathcal{E}_{rr} + \mathcal{E}_{+-}$ y con un procedimiento similar al anterior se encuentra que

$$V(\phi) = \frac{(D+1)(\tilde{\theta}-1)}{2}r^{2\tilde{\theta}}\left\{rf' - 2\left[\tilde{\theta}(D+1) - (D+2)\right]f\right\}. \tag{3.35}$$

A lo largo de este análisis se han usado todas las ecuaciones de campo excepto la ecuación asociada al campo escalar (3.26), esto se debe a que esta ecuación es consecuencia directa[8] de $\nabla^{\mu}T_{\mu\nu}=0$, por lo que se espera que las soluciones obtenidas cumplan como una identidad (3.26) o a lo más podría imponer alguna restricción sobre los parámetros z y θ.

De las ecuaciones (3.34) y (3.35) se evidencia que una vez encontrada la función métrica $f(r)$ tanto el campo escalar como el potencial $V(\phi)$ quedan completamente determinados, con esto se intuye que lo primero que se debe encontrar es $f(r)$, pero para poder encontrar la función métrica se tiene que resolver la ecuación diferencial (3.31). En la siguiente sección se presenta el caso $f(r)=1$ que corresponde a una teoría Einstein-Maxwell-Dilatón generalizada a temperatura cero con violación de hiperescala[9].

3.1.2 Solución a temperatura cero

A temperatura cero se tiene que $f(r)=1$ [3, 23, 27], esto implica que todas las derivadas de f se anulan y por lo tanto de la ecuación (3.31) se encuentran las funciones $\chi_i(\phi)$ como

$$\tilde{\alpha_1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\rho_i^2 r^{2\left[D(\tilde{\theta}-1)-z\right]}}{b^2\chi_i(\phi)}, \tag{3.36}$$

de la ecuación (3.36) se puede concluir que se necesita al menos un campo vectorial para soportar la geometría de Schrödinger.

Particularmente si se considera solo un campo vectorial e insertando $\tilde{\alpha_1}$ en (3.36) se tiene la función de acoplamiento

$$\chi(\phi)=\frac{\rho^2}{2(z-1)\left[D+2z-\tilde{\theta}(D+1)\right]b^2}r^{2\left[D(\tilde{\theta}-1)-z\right]}, \tag{3.37}$$

ahora para encontrar $V(\phi)$ basta con hacer $f(r)=1$ en la ecuación (3.35), con lo que se obtiene

$$V(\phi)=-\left[\tilde{\theta}(D+1)-(D+2)\right](D+1)(\tilde{\theta}-1)r^{2\tilde{\theta}}, \tag{3.38}$$

ahora se procede a encontrar el campo escalar, para esto se reescribe la ecuación (3.34) con $f(r)=1$

$$\phi'(r)=\frac{\sqrt{2\tilde{\theta}(D+1)(\tilde{\theta}-1)}}{r}, \tag{3.39}$$

[8] En el apéndice B se demuestra esta afirmación.

[9] Es decir sin agujeros negros.

al integrar ambos miembros con respecto a r se tiene

$$\phi(r) = \sqrt{2\tilde{\theta}(D+1)(\tilde{\theta}-1)}\log(r) + \phi_0, \tag{3.40}$$

donde ϕ_0 es una constante de integración arbitraria; se puede observar de la ecuación (3.40) que el exponente de violación de hiperescala para valores $\tilde{\theta} \neq 0$ y $\tilde{\theta} \neq 1$ es crucial para tener un campo escalar no trivial. Ya que se conoce el campo escalar, se necesita encontrar $r(\phi)$ y de esta forma expresar la función de acoplamiento (3.37) y el potencial (3.38) en función de ϕ, al invertir la ecuación (3.40) se obtiene

$$r(\phi) = e^{\frac{\phi-\phi_0}{\delta}}, \tag{3.41}$$

donde se define

$$\delta = \sqrt{2\tilde{\theta}(D+1)(\tilde{\theta}-1)}; \tag{3.42}$$

al insertar (3.41) en (3.37) y (3.38) se tiene que

$$V(\phi) = V_0 e^{\lambda_0(\phi-\phi_0)}, \tag{3.43}$$

$$\chi(\phi) = \chi_0 e^{\lambda(\phi-\phi_0)}; \tag{3.44}$$

donde se definen las constantes

$$V_0 = -\left[\tilde{\theta}(D+1) - (D+2)\right](D+1)(\tilde{\theta}-1), \tag{3.45}$$

$$\chi_0 = \frac{\rho^2}{2(z-1)\left[D+2z-\tilde{\theta}(D+1)\right]b^2}, \tag{3.46}$$

$$\lambda_0 = 2\tilde{\theta}/\delta, \tag{3.47}$$

$$\lambda = \frac{2[D(\tilde{\theta}-1)-z]}{\delta}; \tag{3.48}$$

de la expresión (3.44) se puede observar que se tiene una función de acoplamiento de forma exponencial que es el típico en un modelo Einstein-Maxwell-Dilatón [3, 7, 28, 29], además de la ecuación (3.48) se observa que cuando $z = D(\tilde{\theta}-1)$ el acoplamiento se reduce a una constante finita. Ahora se procede a encontrar el campo vectorial que soporta la geometría, para esto se hace $f(r) = 1$ en la ecuación de Maxwell (3.30),

$$A_+{}'(r) = \frac{\rho}{\chi(\phi) r^{(1+\tilde{\theta})+D(1-\tilde{\theta})}}, \tag{3.49}$$

el campo vectorial es función solo de la coordenada r, por lo que se inserta la función $\chi(\phi)$ como función explícita de r (3.37) en la ecuación de Maxwell (3.49), al simplificar se tiene que

$$A_+{}'(r) = \frac{2b^2(z-1)\left[D+2z-\tilde{\theta}(D+1)\right] r^{\left[D-1+2z-\tilde{\theta}(D+1)\right]}}{\rho}, \tag{3.50}$$

al integrar ambos miembros de (3.50) se obtiene el campo vectorial que soporta la geometría

$$A_+(r) = \frac{2b^2(z-1)}{\rho} r^{\left[D+2z-\tilde{\theta}(D+1)\right]} + A_0, \tag{3.51}$$

donde A_0 es una constante de integración arbitraria. Es importante notar que la existencia de un campo vectorial no trivial es consecuencia directa de romper la simetría de reescalamiento isótropa del espaciotiempo. Debido a que el espaciotiempo de Schrödinger es descrito por una métrica no diagonal (2.6), la geometría admite una componente contravariante $A^-(r)$ que se calcula como

$$A^-(r) = g^{+-}A_+(r) = r^{2(\tilde{\theta}-1)}\left\{\frac{2b^2(z-1)}{\rho} r^{\left[D+2z-\tilde{\theta}(D+1)\right]} + A_0\right\}.$$

El campo vectorial (3.51), junto al campo escalar (3.40) sujeto al potencial (3.43) y a la función de acoplamiento (3.44) resuelven de forma exacta el sistema de ecuaciones diferenciales (3.21)-(3.25) para una función métrica $f(r) = 1$. Falta por analizar la ecuación del campo escalar (3.26), la cual al insertar ϕ', ϕ'' y $\partial_\phi V(\phi)$ en (3.26) impone la siguiente restricción algebraica sobre el exponente $\tilde{\theta}$

$$\left[(D+2) - \tilde{\theta}(D+1)\right]\delta^2 - 2\tilde{\theta}V_0 = 0, \tag{3.52}$$

pero al insertar (3.42) y (3.45) en la ecuación (3.52) se puede observar que se satisface como una identidad para todo valor de $\tilde{\theta}$, por lo que no hay ninguna restricción sobre los parámetros de la teoría. En conclusión, en esta sección se reporta una solución exacta a las ecuaciones de campo (3.21)-(3.26), donde el tensor métrico que describe el campo gravitatorio se lee como

$$ds^2_{D+3} = r^{-2\tilde{\theta}}\left[-b^2r^{2z}(dx^+)^2 + \frac{1}{r^2}dr^2 + r^2(dx^j dx_j + 2dx^+dx^-)\right], \tag{3.53}$$

con un campo escalar real dado por

$$\phi(r) = \sqrt{2\tilde{\theta}(D+1)(\tilde{\theta}-1)}\,\log(r) + \phi_0, \tag{3.54}$$

y un campo vectorial de tipo eléctrico, el cual se puede expresar en su forma covariante y contravariante como

$$A_+(r) = \frac{2b^2(z-1)}{\rho} r^{\left[D+2z-\tilde{\theta}(D+1)\right]} + A_0, \tag{3.55}$$

$$A^-(r) = r^{2(\tilde{\theta}-1)} \left\{ \frac{2b^2(z-1)}{\rho} r^{\left[D+2z-\tilde{\theta}(D+1)\right]} + A_0 \right\}, \tag{3.56}$$

con el campo escalar sujeto al potencial y a la función de acoplamiento

$$V(\phi) = V_0 e^{\lambda_0(\phi-\phi_0)}, \tag{3.57}$$

$$\chi(\phi) = \chi_0 e^{\lambda(\phi-\phi_0)}, \tag{3.58}$$

donde se definen las constantes

$$V_0 = -\left[\tilde{\theta}(D+1) - (D+2)\right](D+1)(\tilde{\theta}-1),$$

$$\chi_0 = \frac{\rho^2}{2(z-1)\left[D+2z-\tilde{\theta}(D+1)\right] b^2},$$

y con las constantes de acoplamiento dilatónicas

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2\tilde{\theta}}{(D+1)(\tilde{\theta}-1)}},$$

$$\lambda = \frac{2[D(\tilde{\theta}-1)-z]}{\sqrt{2\tilde{\theta}(D+1)(\tilde{\theta}-1)}}.$$

En resumen, en este capítulo se analizaron de forma exhaustiva las ecuaciones de campo para el caso en que los campos vectoriales no tienen masa, lo cual condujo a una teoría que únicamente permite la existencia de campos vectoriales puramente eléctricos. La configuración de campos (3.53)-(3.58) representa una solución que soporta la geometría de Schrödinger con violación de hiperescala en un modelo Einstein-Maxwell-Dilatón generalizado a temperatura cero con exponente z y θ arbitrarios; para obtener esta solución se necesita al menos un campo vectorial, el cual es consecuencia directa de romper la simetría de reescalamiento isótropa del espaciotiempo, es decir $z \neq 1$. También se encontró que la presencia del exponente de violación de hiperescala para $\tilde{\theta} \neq 0$ y $\tilde{\theta} \neq 1$ es crucial para la existencia de un campo escalar no trivial.

Capítulo 4

Solución gravitatoria para Einstein-Proca

En este capítulo se construye una solución exacta a las ecuaciones de campo en el marco de la teoría Einstein-Proca para un campo vectorial acoplado a gravedad con constante cosmológica negativa, la solución soporta la geometría de Schrödinger sin violación de hiperescala[1] para un espaciotiempo a temperatura cero en $D = 2$ y exponente dinámico $z = 1$. Además se encuentra que para que el campo vectorial sea real debe tener un espectro con masa cuadrada negativa. Permanece pendiente calcular la cota Breitenlohner-Freedman [30] y determinar si esta solución es estable y puede ser usada dentro del marco de la dualidad holográfica gravedad-materia condensada.

4.1 Ecuaciones de campo con ϕ constante

Para poder construir esta solución se inicia con el estudio de las ecuaciones de campo de una teoría de gravedad con constante cosmológica acoplada a n campos vectoriales masivos con componentes[2] A^i_+ y A^i_-, esto se traduce en escribir las ecuaciones de campo (2.31)-(2.40), (2.49)-(2.51) y (2.58) para el caso $\phi = cte$, $V(\phi) = 2\Lambda$ y $\chi_i(\phi) = k_i$, donde k_i son n constantes de acoplamiento ; en consecuencia se tienen las siguientes ecuaciones de

[1] Significa que $\theta = 0$.

[2] En este capítulo se utiliza el *ansatz* de campos vectoriales sin componente transversal, es decir $A^i_a = 0$.

Einstein no triviales

$$\mathcal{E}_{++}: \quad r^2 f'' + \frac{1}{2}\frac{r^2 f'^2}{f} + \beta_1 r f' + \alpha_1 f = f k_i r^{2\tilde{\theta}} \left\{ \frac{r^{2(1-z)}}{f b^2} \left({A^i_+}'\right)^2 + {A^i_+}'{A^i_-}' \right\} + \frac{2\Lambda}{r^{2\tilde{\theta}}} + \frac{M_i^2}{r^2} \left[\frac{{A^i_+}^2}{f b^2 r^{2(z-1)}} + A^i_+ A^i_- \right], \quad (4.1)$$

$$\mathcal{E}_{rr}: \quad \alpha_2 f = \frac{1}{2} f k_i r^{2\tilde{\theta}} \left\{ \frac{f b^2}{r^{2(1-z)}} \left({A^i_-}'\right)^2 + {A^i_+}'{A^i_-}' \right\} - \frac{\Lambda}{r^{2\tilde{\theta}}} - \frac{M_i^2}{2r^2} A^i_+ A^i_-, \quad (4.2)$$

$$\mathcal{E}_{+-}: \quad \beta_2 r f' + \alpha_3 f = -\frac{\Lambda}{r^{2\tilde{\theta}}}, \quad (4.3)$$

$$\mathcal{E}_{ab}: \quad \delta_{ab} \left\{ \beta_2 r f' + \alpha_3 f \right\} = -\delta_{ab} \left\{ \frac{1}{2} f k_i r^{2\tilde{\theta}} {A^i_+}'{A^i_-}' + \frac{\Lambda}{r^{2\tilde{\theta}}} + \frac{M_i^2}{2r^2} A^i_+ A^i_- \right\}, \quad (4.4)$$

$$\mathcal{E}_{--}: \quad \left({A^i_-}'\right)^2 + \frac{\left(M_i A^i_-\right)^2}{f k_i r^{2(1+\tilde{\theta})}} = 0, \quad (4.5)$$

donde se tienen las constantes

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 4z^2 - 2z(1+2\tilde{\theta}) - 2\left[4 + \tilde{\theta}(\tilde{\theta} - 6)\right], \\
\alpha_2 &= \frac{1}{2}(D+1)(D+2)(\tilde{\theta}-1)^2, \\
\alpha_3 &= -\frac{1}{2}(\tilde{\theta}-1)(D+1)\left\{ D(1-\tilde{\theta}) + 2 \right\}, \\
\beta_1 &= 5z - 3, \\
\beta_2 &= -\frac{1}{2}(\tilde{\theta}-1)(D+1), \\
\tilde{\theta} &= \theta/D;
\end{aligned}$$

mientras las ecuaciones de Proca[3] para las componentes A^i_+ y A^i_- son

$$ {A^i_-}'' + \left\{ \frac{f'}{2f} + \frac{(1+\tilde{\theta}) + D(1-\tilde{\theta})}{r} \right\} {A^i_+}' - \frac{M_i^2 A^i_-}{f k_i r^{2(1+\tilde{\theta})}} = 0, \quad (4.6)$$

$$ {A^i_+}'' + \left\{ \frac{f'}{2f} + \frac{(1+\tilde{\theta}) + D(1-\tilde{\theta})}{r} \right\} {A^i_+}' - \frac{M_i^2 A^i_+}{f k_i r^{2(1+\tilde{\theta})}} = -b^2 \left[f r^{2(z-1)} \right]' {A^i_+}'; \quad (4.7)$$

al trabajar con un campo escalar constante implica que la ecuación asociada al campo escalar (2.58) se satisface de forma trivial. Para poder resolver el sistema de ecuaciones de campo dado por (4.1)-(4.7) se sigue el mismo enfoque de los capítulos anteriores, es decir

[3]Como en los capítulos anteriores, el índice repetido ii en las ecuaciones de Proca no indica suma ímplicita.

realizar combinaciones lineales de las ecuaciones para resolver las que son verdaderamente independientes. Por ejemplo si se realiza[4] $\mathcal{E}_{+-} - \mathcal{E}_{aa}$, se tiene

$$A_+^i{}' A_-^i{}' + \frac{M_i^2 A_+^i A_-^i}{f k_i r^{2(1+\tilde{\theta})}} = 0, \tag{4.8}$$

la ecuación (4.8) impone una restricción sobre las componentes de los campos vectoriales que se puede resolver de forma particular si se escoge que A_+^i y A_-^i sean proporcionales, ya que de esta forma (4.8) se reduce a la ecuación para $\mathcal{E}_{--}$, por lo que (4.8) tiene por solución

$$A_+^i = \gamma_{(i)} A_-^{(i)},$$

donde γ_i son las n constantes de proporcionalidad; al escoger esta relación entre las componentes de los campos vectoriales simplifica el resto de ecuaciones de Einstein

$$\mathcal{E}_{++}: \quad r^2 f'' + \frac{1}{2}\frac{r^2 f'^2}{f} + \beta_1 r f' + \alpha_1 f = \frac{2\Lambda}{r^{2\tilde{\theta}}}, \tag{4.9}$$

$$\mathcal{E}_{rr}: \quad \alpha_2 f = \frac{1}{2} f k_i r^{2\tilde{\theta}} \left\{ \frac{f b^2}{r^{2(1-z)}} + \gamma_i \right\} \left(A_-^i{}'\right)^2 - \frac{\Lambda}{r^{2\tilde{\theta}}} - \frac{M_i^2 \gamma_i}{2r^2} (A_-^i)^2, \tag{4.10}$$

$$\mathcal{E}_{+-}: \quad \beta_2 r f' + \alpha_3 f = -\frac{\Lambda}{r^{2\tilde{\theta}}}, \tag{4.11}$$

$$\mathcal{E}_{--}: \quad \left(A_-^i{}'\right)^2 + \frac{\left(M_i A_-^i\right)^2}{f k_i r^{2(1+\tilde{\theta})}} = 0; \tag{4.12}$$

para desacoplar la función métrica $f(r)$ se realiza $\mathcal{E}_{++} + 2\mathcal{E}_{+-}$, con lo que se obtiene la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$r^2 f'' + \frac{1}{2}\frac{r^2 f'^2}{f} + \tilde{\beta}_1 r f' + \tilde{\alpha}_1 f = 0, \tag{4.13}$$

con las constantes

$$\tilde{\alpha_1} = 2(z-1)\big[D + 2z - \tilde{\theta}(D+1)\big] \quad y \quad \tilde{\beta_1} = 5z - \tilde{\theta}(D+1) + (D-2);$$

la ecuación (4.13) tiene por solución general

$$f(r) = \left\{ c_1 r^{-3(z-1)} + c_2 r^{-2z+\tilde{\theta}(D+1)-D} \right\}^{2/3}, \tag{4.14}$$

[4]El doble índice aa no indica suma implícita en $\mathcal{E}_{aa}$.

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias; de la función (4.14) se pueden construir soluciones de agujero negro si se fijan adecuadamente las constantes de la solución y los exponentes $\tilde{\theta}$ y z de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f(r) &= \left\{1 + c_1 r^{-3(z-1)}\right\}^{2/3}, \qquad \text{para} \quad \tilde{\theta} = \frac{2z+D}{D+1} \quad y \quad c_2 = 1, \\ f(r) &= \left\{1 + c_2 r^{-2+\tilde{\theta}(D+1)-D}\right\}^{2/3}, \quad \text{para} \quad z = 1 \quad y \quad c_1 = 1. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Con la función métrica (4.15) se procede a encontrar la constante cosmológica Λ a partir de la ecuación para $\mathcal{E}_{+-}$, tal que

$$\Lambda = -r^{2\tilde{\theta}} \left\{\beta_2 r f' + \alpha_3 f\right\}, \tag{4.16}$$

se puede comprobar que al insertar los coeficientes β_2, α_3 y (4.15) en (4.16), se obtiene

$$\Lambda = \frac{(\tilde{\theta}-1)(D+1)}{2\left\{1+cr^k\right\}^{1/3}} r^{2\tilde{\theta}} \left\{ \left[D(1-\tilde{\theta}) + 2 + \frac{2}{3}ck)\right] + \left[D(1-\tilde{\theta})+2\right] cr^k \right\}, \tag{4.17}$$

donde c es una constante arbitraria y la constante k resume las dos posibilidades de solución de agujero negro (4.15), tal que

$$\begin{aligned} k &= -3(z-1) \quad \text{para} \quad \tilde{\theta} = \frac{2z+D}{D+1}, \\ k &= -2 + \tilde{\theta}(D+1) - D \quad \text{para} \quad z = 1; \end{aligned}$$

por lo que la ecuación para $\mathcal{E}_{+-}$ impone que el segundo miembro de (4.17) deber ser igual a una constante, pero la única forma de satisfacer esta ecuación es si se fijan de forma simultánea

$$c = 0 \quad \text{y} \quad \tilde{\theta} = 0,$$

esto significa que las ecuaciones de campo soportan un espaciotiempo sin violación de hiperescala a temperatura cero y con constante cosmológica negativa dada por

$$\Lambda = -\frac{(D+1)(D+2)}{2}; \tag{4.18}$$

por lo que las ecuaciones de campo restantes se analiza para $f(r) = 1$.

4.2 Solución a temperatura cero

Se procede a encontrar a partir de las ecuaciones de Proca (4.6) y (4.7) el campo vectorial que soporta la teoría, para obtener A^i_- se resuelve

$$A^i_-{}'' + \left\{ \frac{(1+\tilde{\theta}) + D(1-\tilde{\theta})}{r} \right\} A^i_+{}' - \frac{M_i^2 A^i_-}{f k_i r^{2(1+\tilde{\theta})}} = 0, \tag{4.19}$$

Se observa que al hacer $f(r) = 1$ las ecuaciones de Proca para las componentes A^i_- se reducen a ecuaciones diferenciales de Euler homogéneas que tienen por solución general

$$A^i_-(r) = \rho_{1i} r^{\frac{D+\sqrt{D^2+4M_i^2/k_i}}{2}} + \rho_{2i} r^{\frac{D-\sqrt{D^2+4M_i^2/k_i}}{2}}, \tag{4.20}$$

donde ρ_{1i} y ρ_{2i} son constantes arbitrarias; una vez encontrados las componentes A^i_- se procede a encontrar las componentes A^i_+, pero para poder resolver la restricción impuesta por $\mathcal{E}_{++} - \mathcal{E}_{aa}$ se fijó que A^i_+ sean proporcionales a A^i_-, esto implica que la ecuación de Proca (4.7) debe cumplir que

$$b^2 \left[r^{2(z-1)} \right]' A^i_-{}' = 0,$$

pero como $b \neq 0$ y A^i_- es no trivial entonces necesariamente se tiene que $z = 1$. La siguiente ecuación de campo que se analiza es $\mathcal{E}_{--}$ para $f(r) = 1$, que adopta la siguiente forma

$$\left(A^i_-{}'\right)^2 + \frac{\left(M_i A^i_-\right)^2}{k_i r^2} = 0, \tag{4.21}$$

al insertar (4.20) y su correspondiente derivada en (4.21) se tiene la siguiente restricción algebraica

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ k_i \left[\rho_{1i} \frac{D+\delta}{2} + \rho_{2i} \frac{D-\delta}{2} r^{-\delta} \right]^2 + M_i^2 \left[\rho_{1i} + \rho_{2i} r^{-\delta} \right]^2 \right\} = 0, \tag{4.22}$$

donde se ha escrito explícitamente la suma sobre el índice i, además se define

$$\delta = \sqrt{D^2 + 4M_i^2/k_i};$$

se encuentra que (4.22) se puede resolver de forma particular si se escoge trabajar solo con un campo vectorial con una constante de acoplamiento dada por

$$k = -4\frac{M^2}{D^2}; \tag{4.23}$$

al fijar la constante de acoplamiento de la forma dada en (4.23), el campo vectorial se escribe como

$$A_-(r) = \rho r^{D/2}. \tag{4.24}$$

Por último se analiza la ecuación de campo para $\mathcal{E}_{rr}$ con todas las restricciones que se han encontrado hasta el momento[5], por lo que

$$\alpha_2 = \frac{k(b^2+\gamma)}{2}(A'_-)^2 - \frac{\Lambda}{2} - \frac{M^2\gamma}{2r^2}A_-^2, \tag{4.25}$$

al insertar α_2, (4.18), (4.23) y (4.24) en (4.25) se encuentra que

$$\frac{-(D+1)(D+2)}{2}r^2 + M^2\rho^2 r^D(b^2+2\gamma) = 0, \tag{4.26}$$

donde (4.26) es una restricción que solo se puede resolver para $D = 2$ y fija de forma particular la constate de integración del campo vectorial como

$$\rho = \pm\sqrt{\frac{-(D+1)(D+2)}{2M^2(b^2+2\gamma)}}, \tag{4.27}$$

se observa que para que el campo vectorial sea real se necesita que

$$M^2(b^2+2\gamma) < 0.$$

En conclusión, en este capítulo se presenta una solución exacta a las ecuaciones de campo (4.1)-(4.7) para el caso de una teoría Einstein-Proca, la solución es soportada por un espaciotiempo AdS con $D = 2$ a temperatura cero, donde el campo gravitatorio es

$$ds^2 = \left[-b^2r^2(dx^+)^2 + \frac{1}{r^2}dr^2 + r^2(dx^1dx_1 + dx^2dx_2 + 2dx^+dx^-)\right], \tag{4.28}$$

con una constante cosmológica negativa que en $D = 2$ toma el valor[6]

$$\Lambda = -\frac{7}{2}, \tag{4.29}$$

mientras las componentes del campo vectorial que soporta la geometría son

$$A_-(r) = \pm\sqrt{\frac{-7}{2M^2(b^2+2\gamma)}}r, \tag{4.30}$$

$$A_+(r) = \pm\gamma\sqrt{\frac{-7}{2M^2(b^2+2\gamma)}}r, \tag{4.31}$$

[5] Es decir, $\tilde{\theta} = 0$, $z = 1$, $f(r) = 1$ y un campo vectorial con componentes $A_+ = \gamma A_-$.

[6] Recordar que se trabaja en unidades donde el radio de curvatura se fija a $l = 1$.

con una constante de acoplamiento de

$$k = -M^2. \tag{4.32}$$

En conclusión, en este capítulo se construyó una solución particular a temperatura cero en el marco de la teoría Einstein-Proca para un campo vectorial con espectro de masa cuadrada negativa, esta solución soporta la simetría de Schrödinger en $D = 2$ para el caso $\tilde{\theta} = 0$ y $z = 1$, es decir la solución solo es válida en un espaciotiempo puramente AdS.

Capítulo 5

Agujeros negros de Schrödinger con violación de hiperescala

En este capítulo se construye la primera familia de agujeros negros que asintóticamente corresponde a un espaciotiempo de Schrödinger con violación de hiperescala para cualquier valor de z y D. Mediante el estudio de los invariantes de curvatura se discute como la frontera asintótica del espaciotiempo queda determinada por el signo de $\tilde{\theta}$, además se encuentra que la solución es asintóticamente regular ya sea para $\tilde{\theta} > \frac{5z+D-3}{D+1}$ o para el caso $\tilde{\theta} < 0$.

5.1 Agujeros negros asintóticamente Schrödinger

Para poder construir esta solución lo primero que se necesita conocer es la función métrica, para esto se parte de la ecuación diferencial (3.31)

$$r^2 f'' + \frac{1}{2}\frac{r^2 f'^2}{f} + \tilde{\beta}_1 r f' + \tilde{\alpha}_1 f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i^2 r^{2\left[D(\tilde{\theta}-1)-z\right]}}{f b^2 \chi_i(\phi)}, \tag{5.1}$$

donde

$$\tilde{\alpha}_1 = 2(z-1)\left[D+2z-\tilde{\theta}(D+1)\right] \quad y \quad \tilde{\beta}_1 = 5z - \tilde{\theta}(D+1) + (D-2).$$

Se puede observar que si se escogen diferentes formas funcionales para $\chi_i(\phi)$ entonces $f(r)$ se puede desacoplar de diferentes maneras. Particularmente se encuentra una solución tipo agujero negro si se trabaja con una función de acoplamiento tal que el lado derecho de (5.1) sea igual al término $\tilde{\alpha_1} f$, esto significa que

$$\chi(\phi) = \frac{\rho^2 r^{2\left[D(\tilde{\theta}-1)-z\right]}}{\tilde{\alpha_1} b^2 f^2}; \tag{5.2}$$

por lo que la ecuación diferencial resultante para la función $f(r)$ es la siguiente

$$r^2 f'' + \frac{1}{2}\frac{r^2 f'^2}{f} + \left[5z - \tilde{\theta}(D+1) + (D-2)\right] r f' = 0, \tag{5.3}$$

la ecuación (5.3) tiene por solución general

$$f(r) = \left[1 - m r^{3+\tilde{\theta}(D+1)-(5z+D)}\right]^{2/3}, \tag{5.4}$$

donde m debe ser una constante positiva para asegurar la existencia de un horizonte de eventos. A partir de (5.4) se encuentra que el horizonte de eventos está dado por

$$r_h = \left[\frac{1}{m}\right]^{\frac{1}{3+\tilde{\theta}(D+1)-(5z+D)}}, \tag{5.5}$$

por lo que se puede reescribir la función métrica como

$$f(r) = \left[1 - \left(\frac{r}{r_h}\right)^{3+\tilde{\theta}(D+1)-(5z+D)}\right]^{2/3}; \tag{5.6}$$

es importante notar que (5.6) debe preservar la signatura de la métrica (2.6), esto implica que de acuerdo al signo de la potencia $3+\tilde{\theta}(D+1)-(5z+D)$, la región del espaciotiempo físicamente válida es diferente, en concreto se tiene que

$$3+\tilde{\theta}(D+1)-(5z+D) > 0 \implies r \leq r_h, \quad \text{frontera asintótica en} \quad r \to 0,$$
$$3+\tilde{\theta}(D+1)-(5z+D) < 0 \implies r \geq r_h, \quad \text{frontera asintótica en} \quad r \to \infty.$$

Ya que se conoce la función métrica, basta con insertar (5.6) en (5.2) para encontrar la función de acoplamiento

$$\chi(\phi) = \frac{\rho^2 r^{2\left[D(\tilde{\theta}-1)-z\right]}}{2b^2(z-1)\left[D+2z-\tilde{\theta}(D+1)\right]\left[1-\left(\frac{r}{r_h}\right)^{3+\tilde{\theta}(D+1)-(5z+D)}\right]^{4/3}}. \tag{5.7}$$

Ahora se procede a encontrar el campo escalar, por lo que al insertar (5.6) en (3.34) se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\phi' = \sqrt{\frac{2(D+1)(\tilde{\theta}-1)}{\tilde{\theta}}}\sqrt{\frac{1-\alpha\left(\frac{r}{r_h}\right)^{3+\tilde{\theta}(D+1)-(5z+D)}}{r^2\left[1-\left(\frac{r}{r_h}\right)^{3+\tilde{\theta}(D+1)-(5z+D)}\right]}}, \tag{5.8}$$

donde para facilitar los cálculos se define

$$\alpha = \frac{3 + \tilde{\theta}(D+4) - (5z+D)}{3\tilde{\theta}}.$$

Al integrar ambos miembros de (5.8) se obtiene el siguiente campo escalar

$$\phi(r) = \kappa\sqrt{\alpha}\log\left[\sqrt{\alpha}\sqrt{1-\left(\frac{r}{r_h}\right)^{3\tilde{\theta}(\alpha-1)}} + \sqrt{1-\alpha\left(\frac{r}{r_h}\right)^{3\tilde{\theta}(\alpha-1)}}\right] - \kappa\,\mathrm{arctanh}\left[\sqrt{\frac{1-\alpha\left(\frac{r}{r_h}\right)^{3\tilde{\theta}(\alpha-1)}}{1-\left(\frac{r}{r_h}\right)^{3\tilde{\theta}(\alpha-1)}}}\right] + \phi_0, \quad (5.9)$$

donde ϕ_0 es una constante de integración arbitraria, además se define

$$\kappa = \frac{2}{3\tilde{\theta}(\alpha-1)}\sqrt{\frac{2(D+1)(\tilde{\theta}-1)}{\tilde{\theta}}}.$$

A partir de la ecuación (5.9) se puede observar que se debe imponer que $\alpha > 0$ para que el campo escalar sea real, además como la función *arctanh* está definida entre (-1,1) necesariamente se tiene que $\alpha > 1$, esto significa que

$$\frac{3 + \tilde{\theta}(D+4) - (5z+D)}{3\tilde{\theta}} > 1. \quad (5.10)$$

Es importante analizar la desigualdad (5.10) para los casos en que $\tilde{\theta} > 0$ y $\tilde{\theta} < 0$.
Se observa que si $\tilde{\theta} < 0$ la desigualdad (5.10) se cumple para

$$\tilde{\theta} < \frac{5z+D-3}{D+1}.$$

Ahora si $\tilde{\theta} > 0$, para poder satisfacer (5.10) se debe cumplir que

$$\tilde{\theta} > \frac{5z+D-3}{D+1}.$$

Este pequeño análisis es importante porque en la sección 5.2 se va a demostrar a partir del estudio de los invariantes de curvatura que el signo de $\tilde{\theta}$ determina la frontera asintótica del espaciotiempo.

Ahora al insertar la función métrica (5.6) en (3.35), se obtiene el potencial del campo escalar

$$V(\phi) = \frac{(D+1)(\tilde{\theta}-1)r^{2\tilde{\theta}}}{3\left[1-\left(\frac{r}{r_h}\right)^{3+\tilde{\theta}(D+1)-(5z+D)}\right]^{2/3}}\Bigg\{-3\left[\tilde{\theta}(D+1)-(D+2)\right] + \left[5z+2\tilde{\theta}(D+1)-(2D+9)\right]\left(\frac{r}{r_h}\right)^{3+\tilde{\theta}(D+1)-(5z+D)}\Bigg\}. \quad (5.11)$$

Por último, para determinar el campo vectorial se inserta (5.6) y (5.7) en la ecuación de Maxwell (3.30)

$$A'_+(r) = \frac{2b^2(z-1)\left[D+2z-\tilde{\theta}(D+1)\right]\left[1-\left(\frac{r}{r_h}\right)^{3+\tilde{\theta}(D+1)-(5z+D)}\right]r^{2z-\tilde{\theta}(D+1)+D-1}}{3\rho}, \quad (5.12)$$

al integrar ambos miembros de (5.12) se obtiene el siguiente campo vectorial

$$A_+(r) = \frac{2b^2 r^{D+5-\tilde{\theta}(D+1)-3z}}{3\rho}\left\{3(z-1)-\left[\tilde{\theta}(D+1)-(2z+D)\right]\left(\frac{r}{r_h}\right)^{3+\tilde{\theta}(D+1)-(5z+D)}\right\}. \quad (5.13)$$

En la siguiente sección se estudia el comportamiento asintótico de los invariantes de curvatura para saber si realmente se está tratando con una solución de agujero negro.

5.2 Invariantes de Curvatura

Cuando se estudia cualquier espaciotiempo, es importante saber si éste es regular ó no, es decir si los invariantes de curvatura son finitos en todos los puntos del espaciotiempo [31]; los invariantes de curvatura son un conjunto de cantidades escalares formados a partir del tensor de Riemann, tensor de Ricci ó el tensor de Weyl[1] y permiten estudiar la geometría de una forma mas profunda ya que son cantidades independientes del sistema coordenado. En particular cuando se está trabajando con agujeros negros es importante identificar las singularidades físicas del espaciotiempo, por lo que en este trabajo de tesis se analizan el escalar de curvatura R, el cuadrado del tensor de Ricci $\mathfrak{R} := R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ y el escalar de Kretschmann $\mathcal{K} := R_{abcd}R^{abcd}$ para identificar genuinas singularidades físicas de la solución de agujero negro (5.6).

[1]El tensor de Weyl básicamente es el tensor de Riemann con todas sus contracciones removidas, es decir captura la parte sin traza del tensor de Riemann [21, 26].

El escalar de curvatura ya se calculó en el capítulo 2 para obtener las ecuaciones de campo,

$$R = (D+2)(\tilde{\theta}-1)r^{2\tilde{\theta}}\left\{rf' + \Big[2-(\tilde{\theta}-1)(D+1)\Big]f\right\}, \tag{5.14}$$

para calcular el tensor de Ricci al cuadrado se tiene que

$$\mathfrak{R} = R_{++}R^{++} + 2R_{+-}R^{+-} + R_{rr}R^{rr} + R_{ab}R^{ab}, \tag{5.15}$$

pero se puede comprobar de forma sencilla que $R^{++}=0$, por lo que los cálculos se simplifican obteniendo el siguiente resultado

$$\mathfrak{R} = (D+2)(\tilde{\theta}-1)^2 r^{4\tilde{\theta}}\left\{\gamma_1 f^2 + rf'\left[\gamma_2 f + \frac{D+3}{4}rf'\right]\right\}, \tag{5.16}$$

donde se tienen las constantes

$$\gamma_1 = (D+2) + \Big[\tilde{\theta}(D+1)-(D+2)\Big]^2 \quad \text{y} \quad \gamma_2 = (D+3)-(D+1)(\tilde{\theta}-1).$$

Analizar el escalar de curvatura y el cuadrado del tensor de Ricci no es suficiente para poder estudiar singularidades de la curvatura del espaciotiempo, esto se debe a que estos invariantes se obtienen a partir del tensor de Ricci, pero este no determina completamente la curvatura de la geometría, por lo que surge la necesidad de analizar el escalar de Kretschmann $\mathcal{K}$, el cual es un invariante que se construye a partir del tensor de Riemann. En el capítulo 2 se presentaron las componentes no nulas del tensor de Riemann, al realizar con mucho cuidado los cálculos se obtiene que

$$\mathcal{K} = (\tilde{\theta}-1)^2 r^{4\tilde{\theta}}\left\{\gamma_3 f^2 + (D+2)rf'\Big[4f + rf'\Big]\right\}, \tag{5.17}$$

donde se tiene la constante

$$\gamma_3 = -2D^2(\tilde{\theta}-1)^2 + D^3(\tilde{\theta}-1)^2 + 2\left[3+\tilde{\theta}(\tilde{\theta}-2)\right] + D\left[7+5\tilde{\theta}(\tilde{\theta}-2)\right];$$

nótese que ningún invariante de curvatura depende del exponente z, únicamente dependen del exponente $\tilde{\theta}$ y del número de dimensiones D. Resulta conveniente usar la cantidad que se definió en la sección anterior

$$\alpha = \frac{3+\tilde{\theta}(D+4)-(5z+D)}{3\tilde{\theta}} > 1;$$

al reescribir (5.6) obtenemos

$$f(r) = \left[1-\left(\frac{r}{r_h}\right)^{3\tilde{\theta}(\alpha-1)}\right]^{2/3}. \tag{5.18}$$

Al insertar (5.18) en (5.14)-(5.17) se obtienen las siguientes expresiones para los invariantes de curvatura

$$R = \frac{(D+2)(\tilde{\theta}-1)r^{2\tilde{\theta}}}{\left[1-\left(\frac{r}{r_h}\right)^{3\tilde{\theta}(\alpha-1)}\right]^{1/3}}\left\{\widetilde{\gamma}_0+\widetilde{\gamma}_1\left(\frac{r}{r_h}\right)^{3\tilde{\theta}(\alpha-1)}\right\}, \tag{5.19}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{(D+2)(\tilde{\theta}-1)^2r^{4\tilde{\theta}}}{\left[1-\left(\frac{r}{r_h}\right)^{3\tilde{\theta}(\alpha-1)}\right]^{2/3}}\left\{\widetilde{\gamma}_2+\widetilde{\gamma}_3\left(\frac{r}{r_h}\right)^{3\tilde{\theta}(\alpha-1)}+\widetilde{\gamma}_4\left(\frac{r}{r_h}\right)^{6\tilde{\theta}(\alpha-1)}\right\}, \tag{5.20}$$

$$\mathcal{K} = \frac{2(\tilde{\theta}-1)^2r^{4\tilde{\theta}}}{\left[1-\left(\frac{r}{r_h}\right)^{3\tilde{\theta}(\alpha-1)}\right]^{2/3}}\left\{\widetilde{\gamma}_5+\widetilde{\gamma}_6\left(\frac{r}{r_h}\right)^{3\tilde{\theta}(\alpha-1)}+\widetilde{\gamma}_7\left(\frac{r}{r_h}\right)^{6\tilde{\theta}(\alpha-1)}\right\}; \tag{5.21}$$

donde se tienen las siguientes constantes que dependen de z, $\tilde{\theta}$ y D.

$$\widetilde{\gamma}_0 = D+3-\tilde{\theta}(D+1), \quad \widetilde{\gamma}_1 = -\frac{1}{3}\left[15+D-10z-\tilde{\theta}(D+1)\right],$$

$$\widetilde{\gamma}_2 = D+2+\left[\tilde{\theta}(D+1)-(D+2)\right]^2,$$

$$\widetilde{\gamma}_3 = \frac{1}{3}\left\{-2(D+2)(15D+D-10z)+2(D+1)(11+3D-5z)\tilde{\theta}-4\tilde{\theta}^2(D+1)^2\right\},$$

$$\widetilde{\gamma}_4 = \frac{1}{9}\left\{153+48D-6D^2+D^3-210z-60Dz+10D^2z+25z^2(D+3)\right.$$
$$\left.-2(D+1)(6+D^2+6Dz)\tilde{\theta}+\tilde{\theta}^2(D+1)^2(D+6)\right\},$$

$$\widetilde{\gamma}_5 = \left\{4+2D+(\tilde{\tilde{\theta}}-1)^2\left[2+5D+D^2(D-2)\right]\right\}$$

$$\widetilde{\gamma}_6 = \frac{2}{3}\left\{-30+20z+D\left[-23+(8-3D)D+10z\right]8\tilde{\theta}\right.$$
$$\left.+2D\left[12+\tilde{\theta}D(3D-7)\right]-3\tilde{\theta}^2\left[2+D(5+D^2-2D)\right]\right\},$$

$$\widetilde{\gamma}_7 = (\tilde{\theta}-1)^2\left[4D+2+D(D-1)^2\right]+\frac{2}{9}\left[6-5z+D(\tilde{\theta}-1)+\tilde{\theta}\right]^2(D+2).$$

Es importante observar que claramente el signo $\tilde{\theta}$ define la frontera asintótica del espaciotiempo; es decir de (5.19)-(5.21) se puede concluir que cuando $\tilde{\theta} < 0$ los invariantes de curvatura tienden asintóticamente a una constante[2] cuando $r \to \infty$, y estos divergen en $r \to 0$, por lo que allí habita una verdadera singularidad del espaciotiempo. Ahora para el caso en que $\tilde{\theta} > \frac{5z+D-3}{D+1}$ sucede lo contrario, en $r \to 0$ los invariantes tienden a una constante y en $r \to \infty$ divergen, por lo que la singularidad ahora habita en $r \to \infty$. Lo importante es que este análisis asintótico es congruente en ambos casos con el sector físicamente válido dado por la función métrica (5.6), de forma que se tiene una solución asintóticamente regular ya que la singularidad del espaciotiempo siempre queda escondida detrás del horizonte de eventos.

En conclusión, en este capítulo se obtuvo una solución exacta a las ecuaciones de campo (3.21)-(3.26), donde se tiene la función métrica (5.6), un campo vectorial dado por (5.13) y un campo escalar real (5.9) sujeto a un potencial de autointeracción (5.11) y con una función de acoplamiento entre los úlitmos campos (5.7). Mediante el estudio de los invariantes de curvatura se puede concluir que la solución es asintóticamente regular y la singularidad del espaciotiempo queda escondida detrás del horizonte de eventos, por lo que esta solución representa una familia de agujeros negros con violación de hiperescala asintóticamente Schrödinger para cualquier valor de z y un número arbitrario de dimensiones D.

[2]El espaciotiempo asintóticamente tiene una curvatura positiva, negativa o nula dependiendo de los valores de las constantes $\widetilde{\gamma}_0 - \widetilde{\gamma}_7$.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo de tesis se ha realizado un estudio detallado de un sistema de gravedad acoplada a un campo escalar real y n campos vectoriales masivos descritos por la acción (2.1), se desarrollaron las ecuaciones de campo en un espaciotiempo de Schrödinger con violación de hiperescala en $D+3$ dimensiones. Para poder resolver las ecuaciones de campo se estudiaron diferentes *ansätze* para los campos de materia, recordando que la existencia de estos últimos es un requisito fundamental para obtener soluciones que soporten la simetría de Schrödinger. Se obtuvieron diferentes soluciones que pueden servir de posibles duales gravitatorios a teorías de campos con simetría de Schrödinger tanto a temperatura cero y a temperatura finita. El resultado más importante de este trabajo de tesis es que se obtuvo la primera familia de agujeros negros con violación de hiperescala asintóticamente Schrödinger para cualquier valor de z y un número arbitrario de dimensiones D.

Hay muchos caminos futuros que se pueden seguir como extensión del presente trabajo, el más inmediato puede ser el cálculo de la temperatura y la entropía de la familia de agujeros negros que se presentó en el capítulo 5, también permanece pendiente el cálculo de la masa de estos agujeros negros, el cual no es un cálculo trivial porque el concepto de masa es algo difícil definir en relatividad general, por lo que existen diferentes métodos para calcularla. Uno de ellos es el método cuasi-local [32] que proporciona una formulación muy conveniente para calcular las cargas conservadas de agujeros negros. Todo esto con el fin de analizar bajo que condiciones se puede definir una termodinámica consistente de las soluciones tipo agujeros negros que se han construido en este trabajo.

Apéndice A

Derivación de las ecuaciones de campo

En este apéndice se presenta en completo detalle la deducción de todas las ecuaciones de campo del sistema de gravedad acoplada a campos de materia bajo estudio, se parte de la acción de la teoría

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^{D+3}x\sqrt{-g}\left[R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) - \frac{1}{4}\chi_i(\phi)F_i^2 - \frac{1}{2}M_i^2A_i^2\right], \tag{A.1}$$

donde la densidad lagrangiana de materia es $\mathscr{L}_m = -\left[\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + V(\phi) + \frac{1}{4}\chi_i(\phi)F_i^2 + \frac{(M_iA_i)^2}{2}\right]$.

A.1 Variación con respecto al campo escalar ϕ

Para obtener la ecuación asociada al campo escalar se procede a variar la acción (A.1) con respecto al campo escalar

$$\delta S \sim \int d^{D+3}x\sqrt{-g}\left[-g^{\mu\nu}(\delta\partial_\mu\phi)\partial_\nu\phi - \partial_\phi V(\phi)\delta\phi - \frac{1}{4}\partial_\phi\chi_i(\phi)\delta\phi F_i^2\right], \tag{A.2}$$

al usar la regla de Leibniz en el primer término de (A.2) y se promueven las derivadas parciales a derivadas covariantes[1], se reescribe δS

$$\delta S \sim \int d^{D+3}x\sqrt{-g}\left\{-g^{\mu\nu}\left[\nabla_\mu(\delta\phi\nabla_\nu\phi) - \delta\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\right] - \left[\partial_\phi V(\phi) + \frac{1}{4}\partial_\phi\chi_i(\phi)F_i^2\right]\delta\phi\right\}, \tag{A.3}$$

[1]Esto debido a que $\partial_\nu\phi$ es un vector.

el primer término en (A.3) es una divergencia covariante y por el teorema de la divergencia representa un término de frontera que se anula [21, 26], por lo que al evaluar la variación *on-shell* se obtiene la ecuación asociada al campo escalar[2]

$$\Box\phi = \partial_\phi V(\phi) + \frac{1}{4}\partial_\phi \chi_i(\phi) F_i^2, \tag{A.4}$$

donde $\Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ es el operador D'Alambertiano que es la generalización del laplaciano para un espacio de dimensión y métrica arbitraria [33].

A.2 Variación con respecto a los campos vectoriales A_i

Para obtener las ecuaciones de Proca de los campos vectoriales se aplican las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange[3] a la acción (A.1)

$$\nabla_\rho\left(\frac{\delta\mathscr{L}_m}{\delta(\partial_\rho A^i_\sigma)}\right) = \frac{\delta\mathscr{L}_m}{\delta A^i_\sigma}, \tag{A.5}$$

donde $\partial_\rho A^i_\sigma$ solo aparece en el invariante de Maxwell F_i^2, que se construye de la siguiente manera

$$F_i^2 = g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}(\partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu)(\partial_{\mu'} A^i_{\nu'} - \partial_{\nu'} A^i_{\mu'}),$$

por lo que esto implica que

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathscr{L}_m}{\delta(\partial_\rho A^i_\sigma)} &= -\frac{1}{4}\chi_i(\phi)g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}[(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\nu_\rho\delta^\mu_\sigma)(\partial_{\mu'}A^i_{\nu'} - \partial_{\nu'}A^i_{\mu'}) + (\partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu)(\delta^{\mu'}_\rho\delta^{\nu'}_\sigma - \delta^{\nu'}_\rho\delta^{\mu'}_\sigma)] \\
&= -\frac{1}{4}\chi_i(\phi)[(g^{\rho\mu'}g^{\sigma\nu'} - g^{\sigma\mu'}g^{\rho\nu'})(\partial_{\mu'}A^i_{\nu'} - \partial_{\nu'}A^i_{\mu'}) + (\partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu)(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})] \\
&= -\frac{1}{4}\chi_i(\phi)[\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho_i - \partial^\sigma A^\rho_i + \partial^\rho A^\sigma_i + \partial^\rho A^\sigma_i - \partial^\sigma A^\rho_i - \partial^\sigma A^\rho_i + \partial^\rho A^\sigma_i] \\
\frac{\delta\mathscr{L}_m}{\delta(\partial_\rho A^i_\sigma)} &= -\frac{1}{4}\chi_i(\phi)[4\partial^\rho A^\sigma_i - 4\partial^\sigma A^\rho_i] = -\frac{1}{4}\chi_i(\phi)4F_i^{\rho\sigma} = -\chi_i(\phi)F_i^{\rho\sigma};
\end{aligned} \tag{A.6}$$

---

[2] ∂_ϕ significa derivada con respecto al campo escalar.

[3] La variación es con respecto al i-ésimo campo vectorial, por lo que en esta sección el doble índice ii no indica suma implícita.

ahora al variar $\mathscr{L}_m$ con respecto a A^i_σ, el cual solo aparece en el término A_i^2 se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\delta \mathscr{L}_m}{\delta A^i_\sigma} &= -\frac{1}{2}M_i^2\delta\left[g^{\rho\alpha}A^i_\alpha A^i_\rho\right] \\ &= -\frac{1}{2}M_i^2 g^{\rho\alpha}\left[\delta^\alpha_\sigma A^i_\rho + \delta^\rho_\sigma A^i_\alpha\right] \\ &= -\frac{1}{2}M_i^2\left[\delta^\alpha_\sigma A^\alpha_i + \delta^\rho_\sigma A^\rho_i\right] \\ \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta A^i_\sigma} &= -M_i^2 A_i^\sigma. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Por último se procede a insertar (A.6) y (A.7) en la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange (A.5) para obtener las ecuaciones de Proca

$$\nabla_\rho\left[\chi_{(i)}(\phi)F^{\rho\sigma}_{(i)}\right] = M^2_{(i)}A^\sigma_{(i)}, \tag{A.8}$$

estas ecuaciones se pueden pensar como una generalización de la ecuaciones de Maxwell para campos vectoriales masivos [30].

A.3 Variación con respecto a la métrica

Nuevamente se da la acción del sistema gravedad-campos de materia

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^{D+3}x\sqrt{-g}\left[R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) - \frac{1}{4}\chi_i(\phi)F_i^2 - \frac{1}{2}M_i^2A_i^2\right], \tag{A.9}$$

para obtener las famosas ecuaciones de campo de Einstein se debe variar la acción (A.9) con respecto al tensor métrico y evaluar la variación *on-shell*

$$\delta S \sim \int d^{D+3}x\delta\sqrt{-g}\mathscr{L}_m + \sqrt{-g}\left[\delta R - \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{4}\chi_i(\phi)\delta F_i^2 - \frac{1}{2}M_i^2\delta A_i^2\right], \tag{A.10}$$

al usar la muy conocida variación del determinante de la métrica para una variedad lorentziana [21, 26]

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{A.11}$$

y se aplica la regla de Leibniz a δR

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}; \tag{A.12}$$

a continuación se va a demostrar que $\delta R_{\mu\nu}$ es igual a una derivada total, por lo que se puede ignorar al evaluar la acción *on shell*; para realizar esta pequeña demostración se parte del tensor de Riemann

$$R^\sigma_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \partial_\nu\Gamma^\sigma_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}. \tag{A.13}$$

La forma mas sencilla de realizar este cálculo consiste en trabajar en coordenadas normales [34], ya que en cualquier punto $p \in \mathcal{M}$ se puede encontrar un sistema coordenado tal que $\partial_\rho g_{\mu\nu}(p) = 0$ y por lo tanto $\Gamma^\rho_{\mu\nu}(p) = 0$, por lo que el tensor de Riemann en coordenadas normales tiene la siguiente forma[4] [26, 34]

$$R^\sigma_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho}, \tag{A.14}$$

como se están usando coordenadas normales se pueden cambiar las derivadas parciales por derivadas covariantes[5], por lo que al aplicar la variación con respecto a la métrica al tensor de Riemann (A.14) se tiene

$$R^\sigma_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \delta\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \partial_\nu \delta\Gamma^\sigma_{\mu\rho} = \nabla_\mu \delta\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\sigma_{\mu\rho}; \tag{A.15}$$

se puede observar que (A.15) es una igualdad entre dos expresiones tensoriales ya que la variación de los símbolos de Chistoffel es un tensor debido a que involucra la resta de dos conexiones, una usando $g_{\mu\nu}$ y otra usando $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, pero la derivada extra que aparece en la transformación de $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ es independiente de la métrica por lo que se cancela al realizar la resta, dejando un objeto que transforma como un tensor, por lo que la expresión (A.15) es una ecuación tensorial que aunque se derivó en coordenadas normales debe ser válida para cualquier sistema coordenado [26]; por último, se contraen índices en (A.15) para obtener el tensor de Ricci

$$\delta R_{\rho\nu} = \nabla_\mu \delta\Gamma^\mu_{\nu\rho} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\mu_{\mu\rho} \tag{A.16}$$

y posteriormente se contrae (A.16) con la métrica

$$\begin{aligned} g^{\rho\nu}\delta R_{\rho\nu} &= \nabla_\mu g^{\rho\nu} \delta\Gamma^\mu_{\nu\rho} - \nabla_\nu g^{\rho\nu} \delta\Gamma^\mu_{\mu\rho} \\ g^{\rho\nu}\delta R_{\rho\nu} &= \nabla_\mu g^{\rho\nu} \delta\Gamma^\mu_{\nu\rho} - \nabla_\mu g^{\rho\mu} \delta\Gamma^\rho_{\rho\nu} \\ g^{\rho\nu}\delta R_{\rho\nu} &= \nabla_\mu X^\mu, \quad \textit{donde} \quad X^\mu = g^{\rho\nu}\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho} - g^{\rho\mu}\delta\Gamma^\rho_{\rho\nu}; \end{aligned} \tag{A.17}$$

de la expresión (A.17) claramente se observa que $g^{\rho\nu}\delta R_{\rho\nu}$ es igual a una divergencia covariante y por lo tanto se puede usar el teorema de la divergencia para convertirlo en un término de frontera que al evaluar la acción *on-shell* se puede ignorar [21]; por lo que como se había anticipado en la variación del escalar de curvatura (A.12) solo se considera el primer término $R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$.

[4] $\mathcal{M}$ es la notación usada en la literatura para una variedad n-diferenciable [26, 35].

[5] La derivada parcial y la derivada covariante solo difieren por los símbolos de Christoffel que son cero en coordenadas normales.

Ahora se procede a realizar las variaciones de $\mathscr{L}_m$ con respecto al tensor métrico, esto se traduce en obtener la variación del invariante de Maxwell $F_i{}^2$

$$\begin{aligned}\delta F_i^2 &= \delta\left[g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}F^{(i)}_{\mu\rho}F^{(i)}_{\nu\sigma}\right]\\ \delta F_i^2 &= 2\delta g^{\mu\nu}F^{(i)}_{\rho\mu}F^{\rho}_{\nu(i)}\end{aligned} \tag{A.18}$$

y la variación del invariante A_i^2

$$\delta A_i^2 = \delta g^{\mu\nu}A^{(i)}_{\mu}A^{(i)}_{\nu}; \tag{A.19}$$

ya que se tienen todas las variaciones con respecto a la métrica se procede a insertar $R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$, δF_i^2 y δA_i^2 en (A.10)

$$\begin{aligned}\delta S \sim \int d^{D+3}x\ &\Big[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\Big]\mathscr{L}_m\\ &+\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left[R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-\frac{1}{2}\chi_i(\phi)F^{(i)}_{\mu\rho}F^{\rho}_{\nu(i)}-\frac{1}{2}M_i^2A^{(i)}_{\mu}A^{(i)}_{\nu}\right],\end{aligned} \tag{A.20}$$

se inserta $\mathscr{L}_m$ en (A.20)

$$\begin{aligned}\delta S &\sim \int d^{D+3}x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left\{R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\frac{1}{4}g_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}V(\phi)\right\}\\ &+\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left\{-\frac{1}{2}\chi_i(\phi)\left[F^{(i)}_{\alpha\mu}F^{\alpha}_{(i)\nu}-\frac{1}{4}F_i^2g_{\mu\nu}\right]-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-\frac{1}{2}M_i^2A^{(i)}_{\mu}A^{(i)}_{\nu}+\frac{1}{4}M_i^2A_i^2g_{\mu\nu}\right\}\end{aligned} \tag{A.21}$$

y el último paso corresponde a evaluar (A.21) *on shell* para obtener las ecuaciones de campo de Einsten[6]

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}, \tag{A.22}$$

donde el tensor energía-momento de la teoría está dado por

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}g_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}V(\phi)+\frac{1}{2}\chi_i(\phi)&\left[F^{(i)}_{\alpha\mu}F^{\alpha}_{(i)\nu}-\frac{1}{4}F_i^2g_{\mu\nu}\right]\\ &+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi+\frac{1}{2}M_i^2A^{(i)}_{\mu}A^{(i)}_{\nu}-\frac{1}{4}M_i^2A_i^2g_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{A.23}$$

[6] Cabe mencionar que a lo largo de esta tesis se usan unidades naturales, por lo que la constante de acoplamiento en las ecuaciones de Einstein es la unidad.

Apéndice B

Divergencia del tensor energía-momento

En este apéndice se demuestra que la ecuación asociada al campo escalar (2.2) se puede deducir[1] a partir de $\nabla^{\mu}T_{\mu\nu} = 0$, para esto basta considerar el caso de campos vectoriales sin masa, ya que esta no aparece explícitamente en (2.2), con esto el tensor energía-momento adopta la siguiente forma

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}g_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}V(\phi) + \frac{1}{2}\chi_i(\phi)\left[F^{(i)}_{\rho\mu}F^{\rho}_{(i)\nu} - \frac{1}{4}F_i^2 g_{\mu\nu}\right] + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi; \tag{B.1}$$

al aplicar la divergencia covariante a (B.1) e igualando a cero se tiene que

$$-\frac{1}{4}\nabla_{\nu}\left[\partial_{\alpha}\phi\partial^{\alpha}\phi\right] - \frac{\nabla_{\nu}V(\phi)}{2} + \frac{\nabla^{\mu}}{2}\left[\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi\right] + \frac{\nabla^{\mu}}{2}\left[\chi_i(\phi)F^{(i)}_{\rho\mu}F^{\rho}_{(i)\nu}\right] - \frac{\nabla_{\nu}}{8}\left[\chi_i(\phi)F_i^2\right] = 0, \tag{B.2}$$

al desarrollar las derivadas covariantes de los 3 primeros términos de (B.2) se tiene que

$$\nabla_{\nu}\left[\partial_{\alpha}\phi\partial^{\alpha}\phi\right] = 2g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\phi\left[\partial_{\nu}\partial_{\beta}\phi - \Gamma^{\lambda}_{\nu\beta}\partial_{\lambda}\phi\right], \tag{B.3}$$

$$\nabla_{\nu}V(\phi) = \partial_{\phi}V(\phi)\partial_{\nu}\phi, \tag{B.4}$$

$$\nabla^{\mu}\left[\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi\right] = g^{\alpha\mu}\left\{\partial_{\nu}\phi\left[\partial_{\alpha}\partial_{\mu}\phi - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}\partial_{\lambda}\phi\right] + \partial_{\mu}\phi\left[\partial_{\alpha}\partial_{\nu}\phi - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}\partial_{\lambda}\phi\right]\right\}, \tag{B.5}$$

[1]La identidad de Bianchi [21,26] asegura que $\nabla^{\mu}G_{\mu\nu} = 0$, por lo que necesariamente se debe cumplir que $\nabla^{\mu}T_{\mu\nu} = 0$.

se procede a insertar (B.3), (B.4) y (B.5) en (B.2)

$$-g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\left[\partial_\nu\partial_\beta\phi-\Gamma^\lambda_{\nu\beta}\partial_\lambda\phi\right]-\partial_\phi V(\phi)\partial_\nu\phi+g^{\alpha\mu}\left\{\partial_\nu\phi\left[\partial_\alpha\partial_\mu\phi-\Gamma^\lambda_{\alpha\mu}\partial_\lambda\phi\right]+\partial_\mu\phi\left[\partial_\alpha\partial_\nu\phi-\Gamma^\lambda_{\alpha\nu}\partial_\lambda\phi\right]\right\}$$
$$+\nabla^\mu\left[\chi_i(\phi)F^{(i)}_{\rho\mu}F^\rho_{(i)\nu}\right]-\frac{\nabla_\nu}{4}\left[\chi_i(\phi)F_i^2\right]=0, \quad \text{(B.6)}$$

donde el primer y cuarto término de (B.6) se cancelan, esto se puede ver si se intercambian los índices mudos $\alpha\to\mu$ y $\beta\to\alpha$ en el primero término y recordando que los símbolos de Christoffel son símetricos ante el intercambio de sus índices covariantes, por lo que la expresión (B.6) se simplifica a la siguiente ecuación

$$-\partial_\phi V(\phi)\partial_\nu\phi+g^{\alpha\mu}\partial_\nu\phi\left[\partial_\alpha\partial_\mu\phi-\Gamma^\lambda_{\alpha\mu}\partial_\lambda\phi\right]+\nabla^\mu\left[\chi_i(\phi)F^{(i)}_{\rho\mu}F^\rho_{(i)\nu}\right]-\frac{\nabla_\nu}{4}\left[\chi_i(\phi)F_i^2\right]=0, \quad \text{(B.7)}$$

el siguiente paso es desarrollar la derivada covariante del tercer término en (B.7)

$$\nabla^\mu\left[\chi_i(\phi)F^{(i)}_{\rho\mu}F^\rho_{(i)\nu}\right]=\nabla^\mu\left[\chi_i(\phi)F^i_{\rho\mu}\right]+\chi_i(\phi)F^{(i)}_{\rho\mu}\nabla^\mu F^\rho_{(i)\nu}, \quad \text{(B.8)}$$

pero en consecuencia de las ecuaciones de Maxwell (2.3) se tiene que $\nabla^\mu\left[\chi_{(i)}(\phi)F^{(i)}_{\rho\mu}\right]=0$, por lo que

$$\nabla^\mu\left[\chi_i(\phi)F^{(i)}_{\rho\mu}F^\rho_{(i)\nu}\right]=\chi_i(\phi)F^{(i)}_{\rho\mu}g^{\alpha\mu}g^{\beta\rho}\nabla_\alpha F^{(i)}_{\beta\nu}=\chi_i(\phi)F^{\beta\alpha}_{(i)}\nabla_\alpha F^{(i)}_{\beta\nu}, \quad \text{(B.9)}$$

recordando que el tensor de campo electromagnético es antisimétrico, la parte no nula de la ecuación (B.9) se escribe como

$$\nabla^\mu\left[\chi_i(\phi)F^{(i)}_{\rho\mu}F^\rho_{(i)\nu}\right]=\frac{1}{2}\chi_i(\phi)F^{\beta\alpha}_{(i)}\left[\nabla_\alpha F^{(i)}_{\beta\nu}-\nabla_\beta F^{(i)}_{\alpha\nu}\right], \quad \text{(B.10)}$$

al expresar $F^{(i)}_{\beta\nu}$ y $F^{(i)}_{\alpha\nu}$ en función de las respectivas derivadas parciales de los campos vectoriales y desarrollando las derivadas covariantes, se obtiene el siguiente resultado

$$\nabla^\mu\left[\chi_i(\phi)F^{(i)}_{\rho\mu}F^\rho_{(i)\nu}\right]=\frac{1}{2}\chi_i(\phi)F^{\beta\alpha}_{(i)}\left[\partial_\nu\big(\partial_\beta A^{(i)}_\alpha-\partial_\alpha A^{(i)}_\beta\big)-\Gamma^\lambda_{\alpha\nu}F^{(i)}_{\beta\lambda}-\Gamma^\lambda_{\beta\nu}F^{(i)}_{\lambda\alpha}\right], \quad \text{(B.11)}$$

donde el término entre corchetes en (B.11) se puede volver a expresar como una derivada covariante, con lo que finalmente se obtiene

$$\nabla^\mu\left[\chi_i(\phi)F^{(i)}_{\rho\mu}F^\rho_{(i)\nu}\right]=\frac{1}{2}\chi_i(\phi)F^{\beta\alpha}_{(i)}\nabla_\nu F^{(i)}_{\beta\alpha}. \quad \text{(B.12)}$$

Ahora se procede a desarrollar el último término en (B.7)

$$-\frac{\nabla_\nu}{4}\left[\chi_i(\phi)F_i^2\right]=\frac{-1}{4}\partial_\phi\chi_i(\phi)F_i^2\partial_\nu\phi-\frac{1}{4}\chi_i(\phi)\nabla_\nu F_i^2, \quad \text{(B.13)}$$

recordando que $F_i^2 = F_{\alpha\beta}^{(i)} F_{(i)}^{\alpha\beta}$ y aplicando la regla de Leibniz se tiene

$$-\frac{\nabla_\nu}{4}\left[\chi_i(\phi)F_i^2\right] = \frac{-1}{4}\partial_\phi\chi_i(\phi)F_i^2\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\chi_i(\phi)F_{(i)}^{\rho\sigma}\nabla_\nu F_{\rho\sigma}^{(i)}. \tag{B.14}$$

Por último, para poder encontrar la ecuación del campo escalar se insertan las expresiones (B.12) y (B.14) en (B.7)

$$\begin{aligned} - \partial_\phi V(\phi)\partial_\nu\phi + g^{\alpha\mu}\partial_\nu\phi\left[\partial_\alpha\partial_\mu\phi - \Gamma^\lambda_{\alpha\mu}\partial_\lambda\phi\right] + \frac{1}{2}\chi_i(\phi)F_{(i)}^{\beta\alpha}\nabla_\nu F_{\beta\alpha}^{(i)} - \\ \frac{-1}{4}\partial_\phi\chi_i(\phi)F_i^2\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\chi_i(\phi)F_{(i)}^{\rho\sigma}\nabla_\nu F_{\rho\sigma}^{(i)} = 0, \end{aligned} \tag{B.15}$$

donde se observa que el tercer y quinto término en (B.15) se cancelan, resultando en

$$-\partial_\phi V(\phi) + g^{\alpha\mu}\left[\partial_\alpha\partial_\mu\phi - \Gamma^\lambda_{\alpha\mu}\partial_\lambda\phi\right] - \frac{-1}{4}\partial_\phi\chi_i(\phi)F_i^2 = 0, \tag{B.16}$$

donde el término entre corchetes en (B.16) se puede volver a escribir como $\nabla_\alpha\partial_\mu\phi$ y al contraer con la métrica se obtiene el D'Alambertiano para un campo escalar $\Box = \nabla^\mu\partial_\mu$; por lo que se demuestra que a partir de $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ se obtiene la misma ecuación (2.2) que se dedujo mediante el principio variacional en el apéndice A.

$$\Box\phi = \partial_\phi V(\phi) + \frac{1}{4}\partial_\phi\chi_i(\phi)F_i^2. \tag{B.17}$$

Bibliografía

[1] Juan Maldacena, *The large-N limit of superconformal field theories and supergravity*, International journal of theoretical physics. 38(4):1113–1133, 1999.

[2] Shamit Kachru, Xiao Liu and Michael Mulligan, *Gravity duals of Lifshitz-like fixed points*, Physical Review D. 78(10):106005, 2008.

[3] Juan Pedraza, Watse Sybesma and Manus Visser, *Hyperscaling violating black holes with spherical and hyperbolic horizons*, Classical and Quantum Gravity. 36(5):054002, 2019.

[4] Matthias Blau, Hartong Jelle and Blaise Rollier, *Geometry of Schrödinger space-times, global coordinates, and harmonic trapping*, Journal of High Energy Physics. 2009(07):027, 2009.

[5] Javier Tarrio and Stefan Vandoren, *Black holes and black branes in Lifshitz spacetimes*, Journal of High Energy Physics. 2011(9):17, 2011.

[6] Koushik Balasubramanian and John Mcgreevy, *An analytic Lifshitz black hole*, Physical Review D. 80(10):104039, 2009.

[7] Marika Taylor, *Lifshitz holography*, Classical and Quantum Gravity. 33(3):033001, 2016.

[8] Xi Dong, Sarah Harrison, Shamit Kachru, Gonzalo Torroba and Huajia Wang, *Aspects of holography for theories with hyperscaling violation*, Journal of High Energy Physics. 2012(6):41, 2012.

[9] Monica Guica, Kostas Skenderis, Marika Taylor and Balt van Rees, *Holography for Schrödinger backgrounds*, Journal of High Energy Physics. 2011(2):56, 2011.

[10] Dam Son, *Toward an AdS/cold atoms correspondence: a geometric realization of the Schrödinger symmetry*, Physical Review D. 78(4):046003, 2008.

[11] Subir Sachdev, *Quantum phase transitions*, Handbook of Magnetism and Advanced Magnetic Materials, Wiley Online Library. 2007.

[12] Bom Kim, *Schrödinger holography with and without hyperscaling violation*, Journal of High Energy Physics. 2012(6):116, 2012.

[13] Jafar Sadeghi, B. Pourhassan and F. Pourasadollah, *Thermodynamics of Schrödinger black holes with hyperscaling violation*, Physics Letters B. 720(1-3):244–249, 2013.

[14] Mohsen Alishahiha, Eoin Colgáin and Hossein Yavartanoo, *Charged black branes with hyperscaling violating factor*, Journal of High Energy Physics. 2012(11):137, 2012.

[15] Xing-Hui Feng and Wei-Jian, *Non-abelian (hyperscaling violating) Lifshitz black holes in general dimensions*, Physics Letters B Geng. 747:395–399, 2015.

[16] Yegor Korovin, Kostas Skenderis and Marika Taylor, *Lifshitz from AdS at finite temperature and top down models*, Journal of High Energy Physics. 2013(11):127, 2013.

[17] Gaetano Bertoldi, Benjamin Burrington and Amanda Peet, *Black Holes in asymptotically Lifshitz spacetimes with arbitrary critical exponent*, Physical Review D. 80(12):126003, 2009.

[18] Marika Taylor, *Non-relativistic holography*, arXiv preprint arXiv:0812.0530. 2008.

[19] Da-Wei Pang, *A note on black holes in asymptotically Lifshitz spacetime*, Communications in Theoretical Physics. 62(2):265, 2014.

[20] Tomas Andrade, Cynthia Keeler and Peach Simon, *Schrödinger holography with z= 2*, Classical and Quantum Gravity. 32(8):085006, 2015.

[21] Sean Carroll, *Spacetime and Geometry: an introduction to General Relativity*, Addison Wesley. 2004.

[22] Alfredo Herrera-Aguilar, Daniel Higuita-Borja and Julio Méndez-Zavaleta, *Black hole scalarization through spacetime anisotropic scaling symmetry*, arXiv preprint arXiv:2012.13412. 2020.

[23] Sean Hartnoll, Andrew Lucas and Subir Sachdev, *Holographic quantum matter*, MIT press. 2018.

[24] Jaan Zannen, Ya-Wen Sun, Yan Liu and Koenraad Schalm, *Holographic duality in condensed matter physics*, Cambridge University Press. 2015.

[25] Emil Have, *On Charged Lifshitz Holography*, Niels Bohr Institute, Copenhagen University. 2017.

[26] David Tong, *General Relativity lecture notes*, University of Cambridge Part III Mathematical Tripos. 2019.

[27] Yongwan Gim, Wontae Kim and Sang Heon, *The first law of thermodynamics in Lifshitz black holes revisited*, Journal of High Energy Physics. 2014(7):2, 2014.

[28] Elian Kiritsis and Yoshinori Matsuo, *Charge-hyperscaling violating Lifshitz hydrodynamics from black-holes*, Journal of High Energy Physics. 2015(12):1–51, 2015.

[29] Carlos Hoyos, Bom Kim and Yaron Oz, *Lifshitz field theories at non-zero temperature, hydrodynamics and gravity*, Journal of High Energy Physics. 2014(3):29, 2014.

[30] Roberto Cartas-Fuentevilla, Alfredo Herrera-Aguilar, Viridiana Matlalcuatzi-Zamora, Uriel Noriega and Juan M. Romero, *Anisotropic Lifshitz holography in Einstein–Proca theory with stable negative mass spectrum*, The European Physical Journal Plus. 135(2):155, 2020.

[31] Ioannis Gkigkitzis, Ioannis Haranas and Omigos Ragos, *Kretschmann Invariant and Relations between Spacetime Singularities, Entropy and Information*, arXiv preprint arXiv:1406.1581. 2014.

[32] Wontae Kim, Shailesh Kulkarni and Sang-Heon Yi, *Quasilocal conserved charges in a covariant theory of gravity,* Physical review letters. 111(8):081101, 2013.

[33] Graciela Birman and Graciela Desideri, *Relationship between Laplacian operator and D'Alembertian operator*, Divulgaciones Matemáticas. 12(1):35–52, 2004.

[34] Eric Poisson, *A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*, Cambridge University Press. 2004.

[35] Mikio Nakahara, *Geometry, topology and physics*, Cambridge University Press. 2003.