Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN MATEMÁTICAS.

LEVANTAMIENTO DE ESTRUCTURAS, OPERADORES LÍMITE Y SUBCATEGORÍAS CORREFLEXIVAS EN CATEGORÍAS TOPOLÓGICAS.

TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
M.C. JESÚS GONZÁLEZ SANDOVAL

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. JOSÉ JUAN ANGOA AMADOR

CO-DIRECTOR DE TESIS:
Dr. AGUSTÍN CONTRERAS CARRETO

PUEBLA, PUEBLA. SEPTIEMBRE 2021

Índice general

Introducción

Horst Herrlich en Limit-Operators and Topological Coreflections [15] presenta tres métodos para obtener categorías correflexivas en la categoría de espacios topológicos y funciones continuas, $\mathfrak{Top}$, y estudia el retículo de todas las subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$; en dicho trabajo se consideran subcategorías $\mathcal{U}$ de $\mathfrak{Top}$ las cuales son plenas y repletas. Concretamente el tercer método que Herrlich presentó identifica todas las subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$, empleando operadores l que asocian a cada par (X, A), donde X es un espacio topológico y A es un subconjunto de X, con un subconjunto $l_X(A)$ de X, tales que:

1. Si A es subconjunto de X, entonces $A \subset l_X(A) \subset \overline{A}^X$;

2. Si A y B son subconjuntos de X, entonces $l_X(A \cup B) = l_X(A) \cup l_X(B)$;

3. Si $f : X \to Y$ es una función continua y A es un subconjunto de X, entonces
$$f(l_X(A)) \subset l_Y(f(A)).$$

A estos operadores les llama operadores límite. Herrlich muestra lo siguiente:

Proposición 0.1 (Herrlich [15]). *La subcategoría plena $\mathcal{U}(l)$ de $\mathfrak{Top}$ que tiene por objetos los espacios topológicos X tales que todo subconjunto A de X, con $l_X(A) = A$ es cerrado en X, es correflexiva en $\mathfrak{Top}$.*

La estrategia para la obtención de este resultado es demostrar que $\mathcal{U}(l)$ es cerrada bajo cocientes topológicos y uniones disjuntas, y así por el Teorema 6 de [17] o bien por el siguiente Teorema 0.2 [Teorema A, [21]], se tiene que:

Teorema 0.2 (Herrlich y Strecker [17], Kennison [21]). *$\mathcal{U}$ es correflexiva en $\mathfrak{Top}$ si y solo si $\mathcal{U}$ es cerrada bajo la formación de uniones disjuntas topológicas y cocientes topológicos.*

Se tiene que $\mathcal{U}(l)$ es una subcategoría coreflexiva de $\mathfrak{Top}$. A su vez cuando $\mathcal{U}$ es una subcategoría correflexiva, se cumple el siguiente resultado de [15]:

Proposición 0.3 (Herrlich [15])**.** *Si $\mathcal{U}$ es correflexiva en $\mathfrak{Top}$ y si $c_{\mathcal{U}} : X_{\mathcal{U}} \to X$ denota los morfismos coreflexión, entonces $l_X(A) = c_{\mathcal{U}}[cl_{X_{\mathcal{U}}}(c_{\mathcal{U}}^{-1}[A])]$ define un operador límite idempotente $l(\mathcal{U})$.*

La proposición anterior provee el proceso inverso a la Proposición 0.1, asignando a cada subcategoría correflexiva un operador límite idempotente. En la categoría $\mathfrak{Top}$ se tiene que las correflexiones resultan tener por función subyacente la función identidad; así, en la demostración de la proposición anterior resulta sencillo mostrar que el operador $l(\mathcal{U})$ es un operador aditivo, esto es que cumple 2 en la definición de operador límite. Dos observaciones importantes en el mismo artículo son:

Proposición 0.4 (Herrlich [15])**.** *Si l es un operador límite entonces para cada espacio X la familia*

$$\{A|A \subset X, l_X(A) = A\}$$

es la familia de conjuntos cerrados del espacio topológico $X_{\mathcal{U}}$ con el mismo conjunto subyacente de X y la función identidad i de $X_{\mathcal{U}}$ a X es la $\mathcal{U}(l)$-correflexión de X.

Teorema 0.5 (Herrlich [15])**.**

1. *Si l es un operador límite idempotente entonces $l(\mathcal{U}(l)) = l$.*
2. *Si $\mathcal{U}$ es correflexiva en $\mathfrak{Top}$ entonces $\mathcal{U}(l(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$.*

Concretamente los resultados aquí comentados son los que en este trabajo se pretenden extender a las categorías topológicas.

La teoría acerca de la topología categórica desarrollada por Ryosuke Nakagawa en [27] presenta el marco de trabajo ideal al cual transportar los resultados de Herrlich en la categoría $\mathfrak{Top}$ a categorías topológicas. Como se ha comentado, en el trabajo de Herrlich en [15]; un espacio topológico se denota por X, y sólo cuando es necesario denotar otra topología sobre el mismo espacio subyacente de X lo denota por un símbolo distinto, por ejemplo $X_{\mathcal{U}}$; en particular este espacio topológico depende de un parámetro $\mathcal{U}$. Se puede hablar de una asignación de $\mathfrak{Top}$ a $\mathcal{S}et$ mediante el conjunto subyacente, que puede definirse en los morfismos asignando, a cada función continua la misma función; esta asignación define un funtor, llamado el **funtor que olvida**, y tiene la propiedad de generar topologías iniciales y finales, y esta propiedad es la adecuada para hablar de categorías que imitan a la categoría $\mathfrak{Top}$.

Siendo el objetivo identificar las subcategorías correflexivas de una categoría topológica (χ, F) (Ver sección 1.3) donde χ hace el papel de la categoría $\mathfrak{Top}$ y F, un funtor de χ a $\mathcal{S}et$, hace el papel del funtor que olvida la estructura de espacio topológico y continuidad, haremos uso del teorema de caracterización de subcategorías correflexivas usado por Herrlich, pero en una versión general, el Teorema 1.29 de la sección 1.2, versión general del Teorema 0.2, que está fundamentado sobre la teoría de los sistemas de $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ factorización, como se puede ver en [27], [17], [3] y [20], siendo posible caracterizar las subcategorías $\mathcal{M}$-correflexivas de χ, para $\mathcal{M}$ una clase de monomorfismos de χ. A primera vista, el fijarnos sólo en las subcategorías $\mathcal{M}$-correflexivas de χ parecería reducir el alcance de las subcategorías correflexivas a identificar, pero como veremos, concentrarnos en una clase especifica $\mathcal{M}$ nos bastará para identificar las subcategorías bicorreflexivas de χ.

Al trabajar con sistemas de $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorización en una categoría χ, es posible trasladar los conceptos de subobjeto, orden en los subobjetos (contenciones de conjuntos), uniones de subobjetos, imágenes directas e inversas. Estos recursos en la categoría $\mathfrak{Top}$ están relacionados con las propiedades de levantamiento del funtor que olvida, como se puede ver en los dos siguientes resultados:

Proposición 0.6 (Ver 3.9 de [29]). *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función continua. Entonces existe (e, i) factorización de f tal que i es encaje y e es epimorfismo. Si además existe (e', i') otra factorización de f con i' encaje y e epimorfismo entonces existe h homeomorfismo, tal que $h \circ e = e'$.*

Teorema 0.7 (Ver 5.10 de [29]). *Toda función continua $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ posee una factorización (p, m) única, salvo por un homeomorfismo, donde p es identificación y m es continua e inyectiva ($\mathfrak{Top}$-monomorfismo).*

Estos dos resultados se basan en la factorización de f mediante factorizaciones que son realizadas en $\mathcal{S}et$ y que, mediante las topologías iniciales o finales, se pueden ver como funciones continuas, y el factor restante es continuo por las propiedades de dichas topologías. Esta forma de generar factorizaciones en $\mathfrak{Top}$ se puede trasladar de forma natural a las categorías topológicas, gracias a las propiedades de levantamientos iniciales y finales que tiene el funtor F; este proceso de dotar de una estructura de factorización a toda categoría topológica χ, es el que provee la suficiente estructura para establecer el teorema de caracterización de subcategorías $\mathcal{M}$-correflexivas; esto es expuesto en la Sección 2.1. Toda la estructura categórica que tienen las categorías topológicas sobre sus subobjetos permite establecer la teoría de operadores clausura de Dikranjan, Tholen y Giuli, [8] y [9], sobre las categorías topológicas y así definir los operadores límite, en el sentido de Herrlich, sobre los subobjetos $\mathcal{M}$.

Con estas herramientas en mente hemos procedido a revisar minuciosamente las formas de prueba de los resultados en [15] pero, al trasladar las pruebas a la teoría general, nos hemos encontrado con algunos aspectos que deben de ser aclarados y parecen importantes de resaltar ya que, propiedades particulares de la categoría $\mathfrak{Top}$ y el operador Kuratowski, son usadas para completar las pruebas; estas propiedades pueden ser contextualizadas en el lenguaje de las categorías topológicas y operadores clausura. Uno de los aspectos a aclarar es el comportamiento de los subobjetos sobre los cuales se definen los operadores límite con respecto a las imágenes inversas y uniones. La Sección 2.2 presenta una forma para obtener el comportamiento deseado de los subobjetos; para esto se estudian una clase de subobjetos caracterizada mediante el levantamiento de morfismos proyectivos y las nociones de ortogonalidad; de esta forma llegamos al Teorema 3.16 que generaliza la Proposición 0.3 a cualquier categoría topológica. Así mismo una propiedad del operador Kuratowski es que los subconjuntos cerrados en una topología final quedan determinados por los conjuntos cerrados en los espacios topológicos dominio de la estructura final, lo cual inspira lo que llamamos operador clausura definido por pozos finales, descrito en la Definición 3.28. De esta forma obtenemos la Proposición 3.11 que indica que la categoría $\mathcal{U}(l)$ es cerrada bajo la formación de coproductos e imágenes de elementos de una clase especial $\mathcal{E}$, contextualizando la estrategia usada por Herrlich en la Proposición 0.1; así, en 3.12 reproducimos la Proposición 0.1 en las categorías topológicas, logrando asociar a todo operador límite inferior una subcategoría bicorreflexiva de χ.

En las Secciones 3.3 y 3.4 presentamos ejemplos, en la categoría topológica de espacios de convergencia generalizada, de operadores límite inferior respecto al operador Katětov, mediante operadores definidos en $\mathcal{S}et$ y levantados a la categoría $\mathfrak{GConv}$ usando la propiedad de levantamiento del funtor topológico.

Para finalizar, en la categoría $\mathfrak{Top}$, para todo espacio topológico (X, τ), el tener definido el operador Kuratowski en (X, τ) es equivalente a tener definida la topología τ sobre el conjunto X, es decir todo objeto en $\mathfrak{Top}$ queda determinado completamente por el operador clausura Kuratowski; esta forma de ver a todo espacio topológico mediante su operador Kuratowski permite demostrar la Proposición 0.4 y el Teorema 0.5 de una forma muy natural. El presente trabajo ha avanzado en la parte inicial de describir una teoría para adecuar dichos resultados a las categorías topológicas, pero en particular para estos dos resultados nos limitamos a puntualizar las nociones que faltan para trasladar estos resultados a una forma general.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-Categorías

En 1964, J. R. Isbell en [18] desarrolló nociones y resultados en la teoría de las estructuras de categorías, relacionando la adecuación categórica (adequancy, left adequate subcategories) con las estructuras de ideales y completitud; dentro de ese artículo se muestra que, bajo ciertas hipótesis de completitud y de pequeñez (lo cual más tarde fue expresado en términos de categorías bien potenciadas respecto a una clase de subobjetos), la clase de $Mono$-subobjetos y de subobjetos extremales es cerrada bajo intersecciones, y que los subobjetos extremales forman una clase cerrada bajo composición [18, Teorema 2.1]. En la sección 3, "Adequate and Reflexive", Isbell se interesó por los funtores a $\mathcal{S}et$ dentro de la teoría de extensiones y la representabilidad, destacando el resultado:

Teorema (3.3 de [18])**.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría en la cual toda familia de objetos tiene sumas directas y productos directos, y donde todo morfismo tiene una factorización $m \circ e$ con m un monomorfismo y e un epimorfismo. Sea F un funtor reflexivo a una subcategoría plena $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}$. Entonces F es representable en $\mathcal{C}$, de hecho, para algún objeto X que es un epi-cociente de una suma y un mono-subobjeto de un producto de objetos de $\mathcal{A}$, F es naturalmente equivalente a $Map(\mathcal{A}, X)$ y F^* es naturalmente equivalente a $Map(X, \mathcal{A})$.*

En 1969 en el artículo "Monomorphism, epimorphisms, and pull-backs" [19], G. M. Kelly estudia diversos tipos de factorizaciones canónicas de morfismos arbitrarios mediante clases de monomorfismos y epimorfismos, estableciendo los resultados de Isbell en categorías más generales, evitando hipótesis sobre completitud en la categoría donde se factoriza; una de las factorizaciones canónicas que estudia es mediante las clases de epimorfismos regulares, los cuales tienen el comportamiento siguiente:

Proposición (2.7 de [19]). *Si $\mathcal{A}$ admite factorizaciones regulares, son equivalentes las siguientes proposiciones:*

1. *Los epimorfismos regulares son cerrados bajo composición;*

2. *En cada factorización regular $n \circ r$, n es un monomorfismo.*

Además la proposición 4.2 da una hipótesis suficiente para que todo objeto tenga sólo un conjunto de cocientes regulares. Una clase más de epimorfismos que estudia son los epimorfismos fuertes, los cuales son los epimorfismos que son ortogonales (izquierdos) a todo monomorfismo; esta clase de epimorfismos es cerrada bajo composición y cointersecciones, independientemente de la estructura categórica [19, Proposition 3.1]. Además, en el Corolario 3.5 muestra que las factorizaciones canónicas (a travéz de epimorfismos fuertes) son esencialmente únicas. Finalmente muestra que los epimorfismos, epimorfismos fuertes y epimorfismos regulares son preservados bajo push-outs. Todo esto, como veremos en el Capítulo 2, representan las propiedades duales a las de los subobjetos en las categorías topológicas.

En el artículo "Constructions of factorization systems in categories", [4], A. K. Bousfield recalca propiedades básicas de los sistemas de factorización para una categoría arbitraria; los sistemas de factorización $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ constan de dos clases de morfimos tales que cumplen las propiedades de levantamiento derecho (e izquierdo) único una respecto a la otra, esto es $\mathcal{E} = \mathcal{M}^{\perp}$ y $\mathcal{M} = \mathcal{E}_{\perp}$ y que existe la factorización $m \circ e$, cabe destacar el ejemplo siguiente de su teoría:

Ejemplo (5.1 de [4]). *En la categoría $\mathfrak{Top}$ de espacios topológicos, sea $\mathcal{E}_1$ la clase de funciones $X \to Y$ que inducen una biyección entre $\mathfrak{Top}(Y, I)$ y $\mathfrak{Top}(X, I)$, donde I es el intervalo cerrado. Entonces $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}(\mathcal{E}_1))$ es un sistema de factorizacíon en $\mathfrak{Top}$. Se puede mostrar que la $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}(\mathcal{E}_1))$-localización en $\mathfrak{Top}$ es la compatificación de Stone-Čech.*

En esta sección presentamos de forma rápida los sistemas de factorización en categorías, que de forma general abarca los términos de factorizaciónes estudiados por Isbell, Kelley, Bousfield y Herrlich. La notación, las definiciones y resultados expuestos en esta sección pueden verse en [27] y [8].

Sean $\mathcal{S}$ una categoría y $\mathcal{M}$ una clase fija de monomorfismos de $\mathcal{S}$; para cada $\mathcal{S}$-objeto X, un elemento m de $\mathcal{M}$, con codominio X, es llamado **$\mathcal{M}$-subobjeto de** X, o bien **subobjeto de** X, si no es necesario indicar la clase $\mathcal{M}$ correspondiente. La clase de $\mathcal{M}$-subobjetos de X es denotada por $\mathcal{M}|_X$. Cada familia de subobjetos $\mathcal{M}|_X$, es una clase preordenada donde $m \leq n$ si existe un $\mathcal{S}$-morfismo j que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "m"'] & & N \arrow[dl, "n"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Se denotará por $m \leq^j n$ si es necesario indicar al morfismo j; notar que el morfismo j tal que $m \leq^j n$ es único, pues n es monomorfismo.

Definición 1.1 (ver 1.1 de [8]). *Sea $\mathcal{S}$ una categoría; dos morfismos con codominio común X, $f : Y \to X$ y $g : Z \to X$ son* ***morfismos isomorfos*** *si existe un $\mathcal{S}$-isomorfismo $h : Y \to Z$ tal que $f = g \circ h$, esto se denotará por $f \cong^h g$ o bien $f \cong g$. A h se le llama* ***isomorfismo de morfismos****.*

Observación 1.2 (ver 1.1 de [8]). *Para $f : Y \to X$ y $g : Z \to X$, si $f \cong^h g$, entonces $g \cong^{h^{-1}} f$. Además para $m, n \in Mono(\mathcal{S})$, $m \cong n$ es equivalente a*

$$(m \leq n) \wedge (n \leq m).$$

Observación 1.3 (ver 1.1 [8]). *Para toda categoría $\mathcal{S}$, si $\mathcal{M} \subseteq Mono(\mathcal{S})$ es cerrada bajo composición con isomorfismos y contiene a todas las identidades, entonces $\mathcal{M}$ contiene a todos los isomorfismos de $\mathcal{S}$, ya que, para todo isomorfismo $\varphi : X \to Y$, se tiene que $I_Y \cong^{\varphi^{-1}} \varphi$.*

Definición 1.4 (ver 1.8 de [8]). *Sean $f : X \to Y$ y $g : Z \to W$ dos $\mathcal{S}$-morfismos; f* ***es ortogonal a*** *g , denotado por $f \perp g$, si para cualesquiera $\mathcal{S}$-morfismos $u : X \to Z$ y $v : Y \to W$ tales que $g \circ u = v \circ f$, existe un único morfismo $d : Y \to Z$ tal que $d \circ f = u$ y $g \circ d = v$, esto es, conmuta el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[ur, "d"] \arrow[r, "v"'] & W \end{tikzcd}$$

Definición 1.5 (ver 1.8 de [8]). *Sea $f : X \to Y$ un $\mathcal{S}$-morfismo; una* ***$\mathcal{M}$-factorización derecha de*** *f es una factorización en $\mathcal{S}$, $f = m \circ e$ tal que:*

(1) $m : M \to X$ es un elemento de $\mathcal{M}$, llamado $\mathcal{M}$-parte de la $\mathcal{M}$-factorización derecha de f;

(2) Para cualquier diagrama conmutativo en $\mathcal{S}$ de la forma

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dd, bend right=60, "f"'] & N \arrow[dd, "n"] \\
M \arrow[ur, dashed, "d"'] \arrow[d, "m"'] & \\
Y \arrow[r, "v"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

con $n \in \mathcal{M}$, existe un único morfismo d que hace conmutar el diagrama completo.

A la propiedad (2) se le llama ***propiedad de diagonalización de la factorización****.*

Observación 1.6. *La propiedad de diagonalización de la factorización derecha hace únicos salvo isomorfismos las partes $\mathcal{E}$ y $\mathcal{M}$ de una factorización derecha, esto es, si $f = m \circ e$ y $f = n \circ d$ son $\mathcal{M}$-factorizaciones derechas de f, se tiene que $m \cong n$ en $\mathcal{S}$ y $e \cong d$ en $\mathcal{S}^{Op}$.*

Teorema 1.7 (Ver 1.8 de [8])**.** *Sea $\mathcal{S}$ una categoría y $\mathcal{M} \subset Mor(\mathcal{S})$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) Todo $\mathcal{S}$-morfismo tiene una $\mathcal{M}$-factorización derecha y $\mathcal{M}$ es cerrada bajo composición;

(ii) Existe una clase $\mathcal{E}$ de morfismos de $\mathcal{S}$ tal que:

a*) Todo $\mathcal{S}$-morfismo f tiene una factorización $f = m \circ e$ con $m \in \mathcal{M}$ y $e \in \mathcal{E}$;*

b*) Todo elemento $e \in \mathcal{E}$ es ortogonal a todo elemento $m \in \mathcal{M}$.*

Definición 1.8 (Ver 1.8 de [8])**.** *Una categoría $\mathcal{S}$ tiene $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$**- factorizaciones** si las condiciones (a) y (b) del Teorema 1.7 se cumplen.*

Observación 1.9. *La clase $\mathcal{E}$ generada en el Teorema 1.7 no necesariamente es una subclase de los epimorfismos de $\mathcal{S}$ (ver 1.8 de [8]), pero las clases $\mathcal{E}$ y $\mathcal{M}$ se determinan una a otra unívocamente:*

$$\mathcal{E} = (\mathcal{M})^{\perp} := \{e \in Mor(\mathcal{S}) |\, (\forall m \in \mathcal{M})\, e \perp m\}$$

$$\mathcal{M} = (\mathcal{E})_{\perp} := \{m \in Mor(\mathcal{S}) |\, (\forall e \in \mathcal{E})\, e \perp m\}\,.$$

Definición 1.10 (ver 1.6 de [8]). *Sea $\mathcal{S}$ una categoría en la cual todo morfismo tiene una $\mathcal{M}$-factorización derecha. Para cada morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{S}$, se define el operador $f(\_) : \mathcal{M}|_X \to \mathcal{M}|_Y$ que asigna a cada subobjeto $m : M \to X$ de X la $\mathcal{M}$-parte de la $\mathcal{M}$-factorización derecha de la composición $f \circ m$. A $f(m) : f(M) \to Y$ se le llama la **imagen directa de** m **bajo** f.*

Observación 1.11. *Para todo morfismo $f : X \to Y$ y cada $m \in \mathcal{M}|_X$, $f(m)$ es único salvo isomorfismos, esto por la Observación 1.6.*

Definición 1.12 (ver 3.1 de [27]). *Un funtor $D : \mathcal{K} \to \mathcal{S}$, con $\mathcal{K}$ una categoría pequeña, es llamado **diagrama** D **en** $\mathcal{S}$ **sobre** $\mathcal{K}$.*

Definición 1.13 (ver 3.2 de [27]). *Sea $D : \mathcal{K} \to \mathcal{S}$ un diagrama en $\mathcal{S}$. Un par $(X, (\alpha_i)_{i \in \mathcal{O}bj(\mathcal{K})})$, donde X es un $\mathcal{S}$-objeto y para cada $i \in \mathcal{O}bj(\mathcal{K})$, $\alpha_i : X \to D(i)$ es un $\mathcal{S}$-morfismo, es llamado **fuente natural para** D si para cada $\mathcal{K}$-morfismo $a : i \to j$, $D(a) \circ \alpha_i = \alpha_j$.*

Definición 1.14 (ver 3.3 de [27]). *Una fuente natural $(X, (\alpha_i)_{i \in \mathcal{O}bj(\mathcal{K})})$ para el diagrama $D : \mathcal{K} \to \mathcal{S}$ es un **límite para** D, si para cualquier fuente natural $(Y, (\beta_i)_{i \in \mathcal{O}bj(\mathcal{K})})$ para D, existe un único morfismo $\varphi : Y \to X$ en $\mathcal{S}$ tal que para todo $i \in \mathcal{O}bj(\mathcal{K})$, $\beta_i = \alpha_i \circ \varphi$. A φ se le llama **morfismo conector de la fuente natural** $(Y, (\beta_i)_{i \in \mathcal{O}bj(\mathcal{K})})$ **al límite** $(X, (\alpha_i)_{i \in \mathcal{O}bj(\mathcal{K})})$.*

Dual 1.15. ***Pozo natural para** D, **co-límite para** D, **morfismo conector del pozo natural al co-límite**.*

Definición 1.16. *Sea $\mathcal{K}$ la categoría con $\mathcal{O}bj(\mathcal{K}) = \{1, 2, 3\}$ y $\mathcal{M}or(\mathcal{K}) = \{I_1, I_2, I_3, a : 1 \to 3, b : 2 \to 3\}$. Para un par de morfismos $f : X \to Y$ y $n : N \to Y$ en $\mathcal{S}$, sea $D : \mathcal{K} \to \mathcal{S}$ el funtor tal que $D(a) = f$ y $D(b) = g$. El límite $(W, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))$ para D es llamado **pullback** del par (f, g), ya que $\alpha_3 = f \circ \alpha_1 = g \circ \alpha_2$, usualmente α_3 es omitido. En otras palabras $(W, (\alpha_1, \alpha_2))$ es un pullback de (f, g) si:*

1. *$f \circ \alpha_1 = g \circ \alpha_2$;*

2. *Para cualquier tripleta $(V, (\beta_1, \beta_2))$ tal que $f \circ \beta_1 = g \circ \beta_2$, existe un único morfismo $\varphi : V \to W$ tal que $\beta_1 = \alpha_1 \circ \varphi$ y $\beta_2 = \alpha_2 \circ \varphi$.*

Proposición 1.17 (Ver 3.4 de [27]). *Para un diagrama D en una categoría $\mathcal{S}$ sobre una categoría pequeña $\mathcal{K}$, el límite $(X, (\alpha_i)_{i \in \mathcal{O}bj(\mathcal{K})})$ para D es único salvo isomorfismo (de objetos y morfismos).*

Definición 1.18 (Ver 1.2 de [8]). *La categoría $\mathcal{S}$ **tiene $\mathcal{M}$-pullbacks** si, para cada $\mathcal{S}$-morfismo $f : X \to Y$ y cada $n \in \mathcal{M}|_Y$, existe un pullback $(M, (m, f'))$ de (f, n) en $\mathcal{S}$ con $m \in \mathcal{M}|_X$.*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "m"'] & N \arrow[d, "n"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

*Por las propiedades de pullback, m es únicamente determinado hasta isomorfismos, Proposición 1.17, y es llamado **imagen inversa de** n **bajo** f; m es denotado por $f^{-1}(n) : f^{-1}(N) \to X$.*

Nota 1.19. *Dado que las definiciones de los operadores imagen directa e imagen inversa están definidos hasta isomorfismo, será suficiente enunciar hasta isomorfismo (de morfismos) las propiedades requeridas de estos operadores.*

Observación 1.20 (ver 1.8 de [8]). *Para todo morfismo $f : X \to Y$ los operadores $f(\_)$ y $f^{-1}(\_)$ preserva orden.*

Demostración. Sean $m : M \to Y$ y $n : N \to Y$ dos $\mathcal{M}$-subobjetos de Y con $m \leq^j n$, y sea $f : X \to Y$ un morfismo de $\mathcal{S}$, para $(f^{-1}(N), (f^{-1}(n), f'_n))$ y $(f^{-1}(M), (f^{-1}(m), f'_m))$ los pullbacks de (f, n) y (f, m) respectivamente, tenemos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(N) \arrow[rrr, "f'_n"] \arrow[ddd, "f^{-1}(n)"'] & & & N \arrow[ddd, "n"] \\
& & M \arrow[ur, "j"] \arrow[ddr, "m"'] & \\
& f^{-1}(M) \arrow[uul, dashed, "\varphi"'] \arrow[ur, "f'_m"] \arrow[dl, "f^{-1}(m)"'] & & \\
X \arrow[rrr, "f"'] & & & Y
\end{tikzcd}$$

de donde existe un único morfismo $\varphi : f^{-1}(M) \to f^{-1}(N)$ tal que $f^{-1}(n) \circ \varphi = f^{-1}(m)$ y $f'_n \circ \varphi = j \circ f'_m$, esto es $f^{-1}(m) \leq^\varphi f^{-1}(n)$.

Sean $m : M \to X$ y $n : N \to X$ dos $\mathcal{M}$-subobjetos de X con $m \leq^j n$, y sea $f : X \to Y$ un morfismo de $\mathcal{S}$, tenemos el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "e_m"'] \arrow[dd, bend right=60, "f\circ m"'] & N \arrow[r, "e_n"] & f(N) \arrow[dd, "f(n)"] \\
f(M) \arrow[urr, dashed, "d"'] \arrow[d, "f(m)"'] & & \\
Y \arrow[rr, "I_Y"'] & & Y
\end{tikzcd}
$$

de donde por propiedad de diagonalización de la factorización de $f \circ m$ existe $d : f(M) \to f(N)$ tal que conmuta el diagrama completo, esto hace que $f(m) \leq^d f(n)$. $\square$

Definición 1.21 (ver 1.3 de [8]). *Un par de operadores $\varphi : P \to Q$ y $\psi : Q \to P$ entre clases preordenadas son llamados **operadores adjuntos**, si para cada $m \in P$ y $n \in Q$*

$$m \leq_P \psi(n) \Leftrightarrow \varphi(m) \leq_Q n.$$

*Más precisamente diremos que φ es **adjunto izquierdo** de ψ o que ψ es **adjunto derecho** de φ, y este hecho lo denotaremos por $\varphi \dashv \psi$.*

En toda categoría χ la existencia de imágenes directas e imágenes inversas bajo un morfismo f guarda una relación con la existencia de los operadores adjuntos de $f(\_)$ y $f^{-1}(\_)$; el siguiente teorema caracteriza esta relación (ver 1.6 de [8]).

Teorema 1.22 (Ver 1.6 de [8]). *Son equivalentes:*

i) $\mathcal{S}$ tiene $\mathcal{M}$-pullbacks y todo morfismo tiene una $\mathcal{M}$-factorización derecha.

ii) $\mathcal{S}$ tiene $\mathcal{M}$-pullbacks y $f^{-1}(\_)$ tiene un adjunto izquierdo para todo morfismo f.

iii) Todo morfismo tiene una $\mathcal{M}$-factorización derecha y $f(\_)$ tiene un adjunto derecho para todo morfismo f.

Definición 1.23 (Ver 1.6 de [8]). *Una categoría $\mathcal{S}$ es **finitamente $\mathcal{M}$-completa** si cumple una (y entonces todas) de las propiedades del Teorema 1.22.*

Sean $H, K : \mathcal{D} \to \chi$ funtores, una ***transformación natural*** $\eta : H \to K$ es un operador que asocia a cada $\mathcal{D}$-objeto i un morfismo en χ, $\eta_i : H(i) \to K(i)$ tal que para todo $a : i \to j$ morfismo en $\mathcal{D}$, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} H(i) \arrow[r, "H(a)"] \arrow[d, "\eta_i"'] & H(j) \arrow[d, "\eta_j"] \\ K(i) \arrow[r, "K(a)"'] & K(j) \end{tikzcd} .$$

Sean $(H^*, (h_i : H^* \to H(i))_{i\in D})$ y $(K^*, (k_i : k^* \to K(i))_{i\in D})$ límites para H y K respectivamente, tenemos que $(H^*, (\eta_i \circ h_i : H^* \to K(i))_{i\in D})$ es fuente natural para K; así, existe un único morfismo $\gamma : H^* \to K^*$ en χ tal que para cada $i \in \mathcal{D}$, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} H^* \arrow[r, "h_i"] \arrow[d, "\gamma"'] & H(i) \arrow[d, "\eta_i"] \\ K^* \arrow[r, "k_i"'] & K(i) \end{tikzcd} .$$

al morfismo γ se le llama **límite de la transformación natural** η.

Proposición 1.24 (Ver 1.7 de [8])**.** *Sea χ una categoría con $\mathcal{M}$-factorización derecha para cada morfismo; entonces, para todo diagrama tipo $\mathcal{D}$, $\mathcal{M}$ es cerrada bajo $\mathcal{D}$-límites, esto es, para toda transformación natural $\eta : H \to K$, con $H, K : D \to \chi$ funtores, el límite de η pertenece a $\mathcal{M}$ si $\eta_i \in \mathcal{M}$ para todo $i \in \mathcal{O}bj(\mathcal{D})$.*

Corolario 1.25 (Ver 1.8 en [8])**.** *Si $\mathcal{S}$ tiene $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizaciones, entonces $\mathcal{M}$ es cerrada bajo $\mathcal{D}$-límites y $\mathcal{E}$ es cerrada bajo $\mathcal{D}$-colímites; ambas clases son cerradas bajo composición.*

1.2. Subcategorías Correflexivas

Dadas una categoría χ y una subcategoría plena $\mathcal{U}$ de χ, tenemos el funtor inclusión $i : \mathcal{U} \to \chi$; ciertas subcategorías $\mathcal{U}$ pueden dar gran información de la categoría χ, asociando a cada objeto X de χ un objeto proyección o modificación en $\mathcal{U}$ y un morfismo especial, con lo cual se puede definir un funtor $\mathcal{R} : \chi \to \mathcal{U}$; en los casos especiales donde este funtor tiene un comportamiento de adjunción respecto a i es cuando se tiene una categoría reflexiva o correflexiva. En esta sección exponemos los conceptos de correflexividad y uno de los teoremas de caracterización, que, como puede verse en [27], [17],

[20], un sistema de $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-factorización puede aportar información significativa.

Definición 1.26. *Una subcategoría $\mathcal{U}$ de una categoría χ es una* ***subcategoría correflexiva*** *si, para cada χ-objeto X, existen un $\mathcal{U}$-objeto $X_{\mathcal{U}}$ y un χ-morfismo $r_X : X_{\mathcal{U}} \to X$ tales que, para cada χ-morfismo $f : U \to X$, con U un $\mathcal{U}$-objeto, existe un único $\mathcal{U}$-morfismo $f^0 : U \to X_{\mathcal{U}}$, con $r_X \circ f^0 = f$. A $X_{\mathcal{U}}$ y a r_X se les llama* ***$\mathcal{U}$-correflector de** X y **$\mathcal{U}$-correflexión de** X, respectivamente. Así mismo el funtor definido en objetos por $R(X) := X_{\mathcal{U}}$ y definido en morfismos por $R(f) := (f \circ r_X)^0$, para cada $f : X \to Y$, es llamado* ***funtor correflector*** *.*

Definición 1.27. *Sean χ una categoría, $\mathcal{M}$ una sub-clase de morfismos de χ y $\mathcal{U}$ una subcategoría de χ; $\mathcal{U}$ es una* ***subcategoría $\mathcal{M}$-correflexiva de** χ, si $\mathcal{U}$ es una subcategoría correflexiva de χ y para cada χ-objeto X, la $\mathcal{U}$-correflexión de X es un elemento de $\mathcal{M}$. En particular si $\mathcal{M}$ es la clase de los bimorfismos de χ, una subcategoría $\mathcal{M}$-correflexiva será llamada subcategoría* ***bi-correflexiva****.*

Definición 1.28. *Sea χ una categoría y $\mathcal{M}$ una sub-clase de monomorfismos de χ. Diremos que χ es una* ***categoría $\mathcal{M}$-bien potenciada*** *si existe $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$ tal que para cada χ-objeto X, $\mathcal{M}_0|_X$ es un conjunto de representantes de $\mathcal{M}|_X$, esto es, para cada $X \in \mathcal{O}bj(\chi)$, $\mathcal{M}_0|_X$ es un conjunto y para cada $m \in \mathcal{M}|_X$ existe un $m_0 \in \mathcal{M}_0|_X$ tal que $m \cong m_0$. A $\mathcal{M}_0$ se le llama* ***esqueleto*** *de $\mathcal{M}$.*

La demostración del teorema dual al siguiente teorema se puede encontrar en 8.7 de [27], una versión para el caso particular de una categoría $(ExEpi, Mono)$-factorizable se puede encontrar en [17] , y una versión para subcategorías *Epi*-reflexivas se puede ver en, Teorema 4 de [3]; en [20] para estructuras en bicategorías con aplicaciones para una subcategoría generada mediante los espacios simplemente conexos en $\mathfrak{Top}$:

Teorema 1.29 (Caracterización de subcategorías $\mathcal{M}$-correflexivas)**.** *Si χ es una $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-categoría, $\mathcal{M}$-bien potenciada, $\mathcal{M} \subseteq Mono(\chi)$ y con coproductos, entonces, para toda subcategoría $\mathcal{U}$ de χ, plena y cerrada bajo isomorfismos, son equivalentes:*

1. *$\mathcal{U}$ es $\mathcal{M}$-correflexiva en χ.*

2. *$\mathcal{U}$ es cerrada bajo coproductos y satisface que si $f : X \to Y$ es un elemento de $\mathcal{E}$ y $X \in \mathcal{O}bj(\mathcal{U})$, entonces $Y \in \mathcal{O}bj(\mathcal{U})$.*

Corolario 1.30 (Ver 8.8 de [27]). *Si χ es una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-categoría, $\mathcal{M}$-bien potenciada, $\mathcal{M} \subseteq Mono(\chi)$ y con coproductos, entonces se tiene que:*

1. *La intersección de cualquier clase de subcategorías $\mathcal{M}$-correflexivas de χ es una subcategoría $\mathcal{M}$-correflexiva de χ.*

2. *Para cualquier subcategoría $\mathcal{U}$ de χ, existe una subcategoría $\mathcal{U}^*$ que es $\mathcal{M}$-correflexiva en χ, llamada **envolvente $\mathcal{M}$-correflexiva de $\mathcal{U}$**, tal que satisface:*

    a) *$\mathcal{U}$ es subcategoría de $\mathcal{U}^*$*

    b) *Si $\mathcal{U}'$ es una subcategoría $\mathcal{M}$-correflexiva de χ y $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$, entonces $\mathcal{U}^*$ es subcategoría de $\mathcal{U}'$.*

    c) *Un χ-objeto X pertenece a $\mathcal{U}^*$ si y solo si existen una clase $(X_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{U}$-objetos, indexada por un conjunto I, y un morfismo $f : \coprod X_i \to X$, elemento de $\mathcal{E}$.*

Definición 1.31. *Para $\mathcal{U}$ subcategoría de χ, la categoría $\mathcal{M}$-correflexiva $\mathcal{U}^*$ generada en el Corolario 1.30 es llamada **envolvente $\mathcal{M}$-correflexiva de $\mathcal{U}$**.*

Definición 1.32. *Un objeto S de una categoría χ es un **objeto separador de** χ si para cualesquiera dos χ-morfismos $f, g : X \to Y$ distintos, existe un χ-morfismo $x : S \to X$ tal que $f \circ x \neq g \circ x$.*

Proposición 1.33 (Ver 6.11 de [27]). *Sea χ una categoría con un objeto separador S, y $\mathcal{U}$ una subcategoría de χ tal que $S \in Obj(\mathcal{U})$. $\mathcal{U}$ es subcategoría bi-correflexiva de χ si y sólo si $\mathcal{U}$ es subcategoría correflexiva de χ.*

1.3. Categorías Topológicas

Sea I una clase, y sea $\{(X_i, \tau_i) | i \in I\}$ una familia de espacios topológicos; para toda familia de funciones $\{f_i : Y \to X_i | i \in I\}$, existe ρ, la topología más gruesa en Y que hace a cada $f_i : (Y, \rho) \to (X_i, \tau_i)$ continua. Esta construcción fundamental en la categoría $\mathfrak{Top}$ se puede generar en diversas categorías similares a $\mathfrak{Top}$. Las siguientes definiciones y resultados pueden revisarse en 12 de [27].

Definición 1.34. *Para una categoría $\mathcal{S}$, un par $(X, (f_\lambda : X \to X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$, donde X es un $\mathcal{S}$-objeto y $(X, (f_\lambda : X \to X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ es una familia de S-morfismos indicada por una clase, posiblemente propia, es llamado **$\mathcal{S}$- fuente**. Para un funtor $F : \chi \to \mathcal{S}$, una $\mathcal{S}$-fuente de la forma $(X, (f_\lambda : X \to F(X_\lambda))_{\lambda \in \Lambda})$ es llamada F**-fuente** .*

Definición 1.35. *Un funtor $F : \chi \to S$ es un **funtor topológico** si para toda F-fuente $(X, f_\lambda : X \to F(X_\lambda))_{\lambda\in\Lambda})$ existe una única χ-fuente $(\overline{X}, (\overline{f}_\lambda : \overline{X} \to X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$, llamada F**-levantamiento inicial de la fuente** $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, que cumple las propiedades:*

1. *F**-Levantamiento**: $F(\overline{X}) = X$ y para cada $\lambda \in \Lambda$, $F(\overline{f}_\lambda) = f_\lambda$;*

2. *F**-Inicialidad** : Para toda χ-fuente $(Y, (g_\lambda : Y \to X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ y para todo S-morfismo $h : F(Y) \to X$ tal que $f_\lambda \circ h = F(g_\lambda)$, para toda $\lambda \in \Lambda$, existe un único morfismo $g_\lambda \lhd^h \overline{f}_\lambda : Y \to \tilde{X}$ tal que: $F(g_\lambda \lhd^h \overline{f}_\lambda) = h$ y $\overline{f}_\lambda \circ (g_\lambda \lhd^h \overline{f}_\lambda) = g_\lambda$*

$$\begin{tikzcd}
& \arrow[rr, bend left, "F"] & & & \\
\overline{X} \arrow[r, "\overline{f}_\lambda"] & X_\lambda & & X \arrow[r, "f_\lambda"] & F(X_\lambda) \\
Y \arrow[u, dashed, "g_\lambda \lhd^h \overline{f}_\lambda"] \arrow[ur, "g_\lambda"'] & & & F(Y) \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "F(g_\lambda)"'] &
\end{tikzcd}$$

*Diremos que un χ-morfismo $f : X \to Y$ es un **morfismo F-inicial** en χ si la χ-fuente $(X, (f))$ es un F-levantamiento inicial de la fuente $(F(X), (F(f)))$.*

En “Topological Functors” de H. Herrlich, sección 2 de [16], para una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-categoría $\mathcal{S}$ se define lo que es un $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-funtor topológico; esta noción especifica que la existencia de levantamientos iniciales se restringe a fuentes de $\mathcal{M}$, esta definición permite ver a la categoría $Haus$ como una categoría $(EpiReg, Mono)$-categoría, la cual no es una categoría topológica, ver 1.2 de [16].

Definición 1.36. *Para una categoría $\mathcal{S}$, un par $(X, (f_\lambda : X_\lambda \to X)_{\lambda\in\Lambda})$, donde X es un $\mathcal{S}$-objeto y $(f_\lambda : X_\lambda \to X)_{\lambda\in\Lambda})$ es una familia de $\mathcal{S}$-morfismos indicada por una clase, posiblemente propia, es llamado **$\mathcal{S}$-pozo** . Para un funtor $F : \chi \to \mathcal{S}$, un $\mathcal{S}$-pozo $(X, f_\lambda : F(X_\lambda) \to X)_{\lambda\in\Lambda})$ es llamado F**-pozo**.*

Definición 1.37. *Un funtor $F : \chi \to \mathcal{S}$ es un **funtor co-topológico** si para todo F-pozo $(X, (f_\lambda : F(X_\lambda) \to X)_{\lambda\in\Lambda})$ existe un único χ-pozo $(\underline{X}, (\underline{f}_\lambda : X_\lambda \to \underline{X})_{\lambda\in\Lambda})$, llamado F**-levantamiento final** , que tiene las propiedades siguientes:*

1. *F**-Levantamiento**: $F(\underline{X}) = X$ y para cada $\lambda \in \Lambda$, $F(\underline{f}_\lambda) = f_\lambda$;*

2. F-***Finalidad***: *Para todo χ-pozo $(Y, (g_\lambda : X_\lambda \to Y)_{\lambda\in\Lambda})$ y para todo S-morfismo $h : Y \to F(X)$ tal que $h \circ f_\lambda = F(g_\lambda)$ para cada $\lambda \in \Lambda$; existe un único morfismo $\underline{f}_\lambda \lhd^h g_\lambda : \underline{X} \to Y$ tal que: $F(\underline{f}_\lambda \lhd^h g_\lambda) = h$ y $\underline{f}_\lambda \lhd^h g_\lambda \circ \underline{f}_\lambda = g_\lambda$*

$$\xmapsto{F}$$

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[r, "\underline{f}_\lambda"] \arrow[dr, "g_\lambda"'] & \underline{X} \arrow[d, dashed, "\underline{f}_\lambda \lhd^h g_\lambda"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X_\lambda) \arrow[r, "f_\lambda"] \arrow[dr, "F(g_\lambda)"'] & X \arrow[d, "h"] \\ & F(Y) \end{tikzcd}$$

*Diremos que un χ-morfismo $f : X \to Y$ es un **morfismo F-final** en χ si el χ-pozo $(X, (f))$ es un F-levantamiento final de $(F(X), (F(f)))$.*

Notación 1.38. *Para X, Y dos χ-objetos, denotamos por $[X, Y]_\chi$ a la clase $Hom_\chi(X, Y)$.*

Definición 1.39. *Una categoría $\mathcal{K}$ es una **categoría localmente pequeña** si $[X, Y]_{\mathcal{K}}$ es conjunto para cualesquiera $\mathcal{K}$-objetos X y Y.*

Definición 1.40. *Un funtor $F : \chi \to S$ es un **funtor fiel** si para cualesquiera χ-objetos Z y Y, se tiene que la función entre clases $F : [Z, Y]_\chi \to [F(Z), F(Y)]_S$ cumple que si f y g son elementos de $[X, Y]_\chi$ y $F(f) = F(g)$, entonces $f = g$.*

Proposición 1.41 (Ver 12 de [27])**.** *Todo funtor topológico $F : \chi \to S$, con χ una categoría localmente pequeña, es un funtor fiel.*

Definición 1.42. *Una categoría $\mathcal{K}$ es una **categoría pequeña** si la clase $Obj(\mathcal{K})$ es un conjunto.*

Observación 1.43. *Una categoría localmente pequeña $\mathcal{K}$ es una categoría pequeña si y sólo si $Mor(\mathcal{K})$ es conjunto.*

Definición 1.44. *Un funtor $D : \mathcal{J} \to \chi$, con $\mathcal{J}$ una categoría pequeña, es llamado **diagrama en χ de tipo $\mathcal{J}$**.*

Proposición 1.45 (ver 12.5 de [27])**.** *Si $F : \chi \to S$ es un funtor topológico y $D : \mathcal{K} \to \chi$ es un diagrama en χ, con $\mathcal{K}$ una categoría pequeña, son equivalentes:*

1. *$(X, (\alpha_j : X \to X_j)_{j\in Obj(\mathcal{K})})$ es límite para D.*

2. $(X, (\alpha_j : X \to X_j)_{j \in Obj(\mathcal{K})})$ *es* F*-inicial y* $(F(X), (F(\alpha_j))_{j \in Obj(\mathcal{K})})$ *es límite para* $F \circ D$.

Corolario 1.46 (Ver 12.6 de [27]). *Todo funtor topológico preserva límites y monofuentes.*

Corolario 1.47 (Ver 12.9 de [27]). *Si* $F : \chi \to \mathcal{S}$ *es funtor topológico y* $\mathcal{S}$ *es (co-)completa, entonces* χ *es (co-)completa.*

Teorema 1.48 (Ver 12.7 de [27]). *Un funtor* $F : \chi \to S$ *es topológico si y solo si* $F : \chi \to S$ *es un funtor cotopológico.*

Definición 1.49 (Ver 13 de [27]). *Sea* $F : \chi \to S$ *un funtor. Un par* (χ, F)*, con* χ *una categoría localmente pequeña, es una* ***categoría topológica*** *si:*

1. $\mathcal{S} = \mathcal{S}et$ *y* F *es un funtor topológico.*
2. *Para todo* $A \in Obj(\mathcal{S}et)$*, la clase* $F^{-1}(A) := \{X \in Obj(\chi) | F(X) = A\}$ *es un conjunto.*
3. *Para todo conjunto* $\{p\}$ *de un punto* p*,* $F^{-1}(\{p\})$ *consiste de un solo* χ*-objeto*
4. *Cualesquiera dos objetos en* $F^{-1}(\emptyset)$ *son isomorfos.*

La definición anterior de categoría topológica exige que todos los χ- objetos que son mandados al conjunto vacío mediante F sean isomorfos, algo que en la definición de categoría topológica dada por R. Nakagawa en [27] no es necesario; esto para que el subespacio asociado al conjunto vacío sea único salvo isomorfismo y esté presente como subespacio de todos los objetos de χ.

Observación 1.50. *Sea* (χ, F) *una categoría topológica , para cada morfismo de Set,* $f : A \to B$*, tenemos que*

$$F^{-1}(f) := \{g \in Mor(\chi) | F(g) = f\}$$

es conjunto pues

$$F^{-1}(f) \subseteq \bigcup_{X \in F^{-1}(A)} \bigcup_{Y \in F^{-1}(B)} [X, Y]\,.$$

Capítulo 2

Levantamientos de estructuras

En este capítulo se presentan los resultados de la investigación realizada, organizando y sistematizando dichos resultados en el contexto de nuestro trabajo. Las definiciones y resultados indicados con el símbolo $\wp$, han sido producto original de nuestro trabajo de investigación; algunos de ellos publicados en [2]. Sea $\mathcal{M}$ una colección de monomorfismos en $\mathcal{S}et$; si $\mathcal{S}et$ es una $(\mathcal{M}, \mathcal{E})$-categoría, toda categoría topológica hereda dos estructuras de factorización respecto a $\mathcal{M}$ y levantamientos, ya sea mediante la fibra de $\mathcal{M}$ bajo F o bien mediante levantamientos iniciales de $\mathcal{M}$; estas dos estructuras $\mathcal{M}_F$ y $\mathcal{M}_{\overline{F}}$, Definición 2.1, también heredan el buen comportamiento de $\mathcal{M}$; son subclases de monomorfismos de χ y son cerradas bajo composición, la existencia de uniones y pullbacks. Por otro lado las clases generadas mediante $\mathcal{E}$, su fibra bajo F y sus levantamientos finales, corresponden a las clases que completan las estructuras de factorización de χ, ver proposición 2.7. Es importante señalar que las propiedades de pequeñez y completez de las clases $\mathcal{M}_F$ y $\mathcal{M}_{\overline{F}}$ tambíen se heredan de $\mathcal{M}$, Proposición 2.5 y Corolario 2.9.

2.1. Levantamiento de $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-estructuras

Definición 2.1 (Ver [2]$\wp$). *Sean $F : \chi \to \mathcal{S}$ un funtor topológico y $\mathcal{M} \subseteq Mono(\mathcal{S})$, definimos*

$$\mathcal{M}_F := \{m \in Mor(\chi) | F(m) \in \mathcal{M}\} ;$$

$$\mathcal{M}_{\overline{F}} := \left\{m \in Mor(\chi) | F(m) \in \mathcal{M} \ \wedge \ m \cong \overline{F(m)}\right\} .$$

*Aquí $(\overline{M}, \overline{F(m)})$ es un F-levantamiento inicial de $(F(M), F(m))$ con $M = Cod(m)$. Sea X un χ-objeto, a cada elemento m de $\mathcal{M}_{\overline{F}}$ con codomino X le llamaremos **F-subespacio de** X.*

Proposición 2.2 (Ver [2]$\wp$). *Si $F : \chi \to \mathcal{S}$ es un funtor topológico y $\mathcal{M} \subseteq Mono(S)$, entonces:*

1. *$\mathcal{M}_F \subseteq Mono(\chi)$ y $\mathcal{M}_{\overline{F}} \subseteq Mono(\chi)$;*

2. *Si $\mathcal{M}$ contiene a todas las identidades de $\mathcal{S}$, $\mathcal{M}_F$ y $\mathcal{M}_{\overline{F}}$ tienen a todas las identidades de χ.*

3. *Si $\mathcal{M}$ es cerrada bajo composición con isomorfismos, entonces $\mathcal{M}_F$ y $\mathcal{M}_{\overline{F}}$ son cerradas bajo composición con isomorfismos.*

Demostración.

1) Sean $m \in \mathcal{M}_F$, $m : M \to X$, y $u, v : Z \to M$ tales que $m \circ u = m \circ v$; tenemos que $F(m \circ v) = F(m \circ u)$, de donde $F(m) \circ F(v) = F(m) \circ F(u)$, y $F(v) = F(u)$, pues $F(m)$ es monomorfismo; además, $u = v$ ya que F es fiel, por la Proposición 1.41. Así $\mathcal{M}_{\overline{F}} \subset \mathcal{M}_F \subset Mono(\chi)$.

2) Sea I_X una identidad en χ; $F(I_X) = I_{F(X)} \in \mathcal{M}$. Además es claro que $I_X \cong \overline{I}_{F(X)}$, de donde $I_X \in \mathcal{M}_{\overline{F}}$.

3) Sean $m : M \to X$ un elemento de $\mathcal{M}_F$ y $\phi : Z \to M$ un χ-isomorfismo; tenemos que $F(m \circ \phi) = F(m) \circ F(\phi) \in \mathcal{M}$, pues $F(\phi)$ es isomorfismo; además, si $m \in \mathcal{M}_{\overline{F}}$, entonces $m \circ \phi \cong \overline{F(m \circ \phi)}$. □

Definición 2.3 (Ver [2]$\wp$). *Sean $F : \chi \to \mathcal{S}$ un funtor topológico y $\mathcal{E} \subseteq Epi(\mathcal{S})$, definimos*

$$\mathcal{E}_F := \{e \in Mor(\chi) | F(e) \in \mathcal{E}\}.$$

$$\mathcal{E}_{\underline{F}} := \left\{e \in Mor(\chi) | F(e) \in \mathcal{E} \text{ y } e \cong \underline{F(e)}\right\}.$$

donde, para cada $e : X \to E$ tenemos que $(\underline{E}, \underline{F(e)})$ es un F-levantamiento final de $(F(E), F(e))$.

[Ver [2]$\wp$] Dualizando la Proposición 2.2, obtenemos:

Proposición 2.4. *Si $F : \chi \to \mathcal{S}$ es un funtor topológico y $\mathcal{E} \subseteq Epi(S)$, entonces:*

1. *$\mathcal{E}_F \subseteq Epi(\chi)$ y $\mathcal{E}_{\underline{F}} \subseteq Epi(\chi)$;*

2. *Si $\mathcal{E}$ contiene a todas las identidades de $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}_F$ y $\mathcal{E}_{\underline{F}}$ tienen a todas las identidades de χ.*

3. Si $\mathcal{E}$ es cerrada bajo composición con isomorfismos, entonces $\mathcal{E}_F$ y $\mathcal{E}_{\underline{F}}$ son cerradadas bajo composición con isomorfismos.

Proposición 2.5 ($\wp$)**.** *Si $(\chi, F : \chi \to \mathcal{S})$ es una categoría topológica, $\mathcal{S}$ es categoría $\mathcal{M}$-bien potenciada y $\mathcal{M}$ es cerrada bajo composición de isomorfismos, entonces χ es una categoría $\mathcal{M}_F$-bien potenciada.*

Demostración. Para cada χ-objeto X definimos:

$$Iso_S(F(X)) := \{h : F(X) \to F(X) | h\ es\ S - isomorfismo\}\,.$$

Sea $\mathcal{M}_0$ un esqueleto de $\mathcal{M}$, denotemos por $\mathcal{M}_{F,0,X}$ a la clase

$$\left\{m \circ h \in Mor(\chi) | F(m) \in \mathcal{M}_0|_{F(X)}, F(h) \in Iso_S(F(Dom(m))\right\}$$

Para cada X, $\mathcal{M}_{F,0,X}$ es conjunto pues

$$\mathcal{M}_{F,0,X} \subseteq \circ\Big(\bigcup_{m \in \mathcal{M}_0|_{F(X)}} \big(F^{-1}(m)\big) \times \bigcup_{M_1, M_2 \in F^{-1}(F(Dom(m)))} [M_1, M_2]\Big).$$

Sea $\mathcal{M}_{F0} = \bigcup_{X \in Obj(\chi)} \mathcal{M}_{F,0,X}$; entonces $\mathcal{M}_{F0} \subseteq \mathcal{M}_F$, pues, para cada $m \circ h \in \mathcal{M}_{F0}$, tenemos que $F(m \circ h) = F(m) \circ F(h) \in \mathcal{M}$.

Sea $m \in \mathcal{M}_F$, $m : M \to X$, tenemos que existe $m_0 \in \mathcal{M}_0|_{F(X)}$ tal que $F(m) \cong^{\phi} m_0$, esto es $\phi : M_0 \to F(M)$ es un isomorfismo con $m_0 = F(m) \circ \phi$, consideremos $\overline{\phi} : \overline{M}_0 \to M$ un F-levantamiento inicial de ϕ, tenemos que $\overline{\phi}$ es bimorfismo pues es levantamiento de un isomorfismo; tomando $\overline{m}_0 : \overline{M}_0' \to X$ un F-levantamiento de m_0, tenemos que conmutan los diagramas

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[rr, mapsto, bend left, "F"] & & {} \\
\overline{M}_0' \arrow[r, "\overline{m}_0"] & X & M_0 \arrow[r, "m_0"] & F(X) \\
\overline{M}_0 \arrow[u, dashed, "(m\circ\overline{\phi})\lhd^{I_{M_0}}\overline{m}_0"] \arrow[ur, "m\circ\overline{\phi}"'] & & M_0 \arrow[u, "I_{M_0}"] \arrow[ur, "F(m)\circ\phi"'] & \\
\overline{M}_0 \arrow[r, "\overline{\phi}"] & M & M_0 \arrow[r, "\phi"] & F(M) \\
M \arrow[u, dashed, "I_M\lhd^{\phi^{-1}}\overline{\phi}"] \arrow[ur, "I_M"'] & & F(M) \arrow[u, "\phi^{-1}"] \arrow[ur, "I_{F(M)}"'] &
\end{tikzcd},$$

de donde $\overline{\phi}$ es isomorfismo; finalmente,

$$m \cong^{\overline{\phi}^{-1}} \overline{m}_0 \circ (m \circ \overline{\phi}) \lhd^{I_{M_0}} \overline{m}_0 \in \mathcal{M}_{F,0}|_X.$$

$\square$

Proposición 2.6 (Ver 21.16 de [1]). *Sea (χ, F) una categoría topológica; todo elemento $P \in F^{-1}(\{p\})$ para cada conjunto unipuntual $\{p\}$ es un χ-separador.*

Demostración. Sean $f, g : X \to Y$ dos χ-morfismos diferentes, tenemos que $F(f), F(g) : F(X) \to F(Y)$ son funciones distintas, de donde existe $x : \{p\} \to F(X)$ función tal que $F(f) \circ x \neq F(g) \circ x$; consideremos $\overline{x} : \overline{\{p\}} \to X$ el F-levantamiento inicial de x; tenemos que $\overline{\{p\}} = P$ y $f \circ \overline{x} \neq g \circ \overline{x}$. $\square$

Una versión de la siguiente proposición para factorizaciones de fuentes iniviales o para morfismos iniciales y $(\mathcal{M}, \mathcal{E})$-funtores topológicos puede verse en 4.2 de [16] y 21.14 de [1]

Proposición 2.7 ($\wp$). *Sean $F : \chi \to \mathcal{S}$ un funtor topológico y $\mathcal{S}$ una categoría con $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizaciones. Entonces χ tiene $(\mathcal{E}_{\underline{F}}, \mathcal{M}_F)$-factorizaciones y $(\mathcal{E}_F, \mathcal{M}_{\overline{F}})$- factorizaciones.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ un χ-morfismo, consideremos $F(f) = m \circ e$ una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorización derecha de $F(f)$; tenemos que $f = \overline{m} \circ g$, donde $\overline{m}$ es un F-levantamiento inicial de $F(m)$ y $g = f \lhd^e \overline{m}$, es una $(\mathcal{E}_F, \mathcal{M}_{\overline{F}})$-factorización derecha, pues sean $n \in \mathcal{M}_{\overline{F}}$, u y v morfismos en χ tales que conmutan los siguientes diagramas, el de la izquierda en χ y el de la derecha en $\mathcal{S}et$:

$$\xrightarrow{F}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"] \arrow[dd, bend right=60, "f"'] & N \arrow[dd, "n"] \\
\overline{M} \arrow[d, "\overline{m}"] \arrow[ur, dashed, "d'"] & \\
Y \arrow[r, "v"'] & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(u)"] \arrow[d, "e"] \arrow[dd, bend right=60, "F(f)"'] & F(N) \arrow[dd, "F(n)"] \\
M \arrow[d, "m"] \arrow[ur, dashed, "d"] & \\
F(Y) \arrow[r, "F(v)"'] & F(Z)
\end{tikzcd}.$$

Entonces $d' = (v \circ \overline{m}) \lhd^d n$, entonces conmutan los diagrama completos.

Análogamente, para la $(\mathcal{E}_{\underline{F}}, \mathcal{M}_F)$-factorización derecha de f, consideremos $f = l \circ \underline{e}$, donde $\underline{e}$ es un F-levantamiento final de e y $l = \underline{e} \lhd^m f$, pues tenemos los diagramas

$$\overset{F}{\longmapsto}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\underline{e}"'] \arrow[dd, bend right=60, "f"'] & N \arrow[dd, "n"] \\
\underline{M} \arrow[d, "m"'] \arrow[ur, dashed, "t'"'] & \\
Y \arrow[r, "v"'] & Z
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(u)"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dd, bend right=60, "F(f)"'] & F(N) \arrow[dd, "F(n)"] \\
M \arrow[d, "m"'] \arrow[ur, dashed, "t"'] & \\
F(Y) \arrow[r, "F(v)"'] & F(Z)
\end{tikzcd}$$

donde $t' = \underline{e} \lhd^t u$. □

Proposición 2.8 (Ver [2]℘)**.** *Sean $F : \chi \to \mathcal{S}$ un funtor topológico y $\mathcal{S}$ una categoría con $\mathcal{M}$-pullbacks. Entonces χ tiene $\mathcal{M}_F$-pullbacks y $\mathcal{M}_{\overline{F}}$-pullbacks.*

Demostración. Sean $f : X \to Y$, $m : M \to Y$ y $k : K \to Y$ χ-morfismos con $m \in \mathcal{M}_F$ y $k \in \mathcal{M}_{\overline{F}}$, para (h, n) y (h, l) los $\mathcal{M}$-pullbacks de $(F(m), F(f))$ y

$(F(k), F(f)$, consideremos los diagramas:

$$\xmapsto{F}$$

$$\begin{tikzcd}
\overline{W} \arrow[rr, "\bar{h}"] \arrow[dd, "\bar{n}"'] & & M \arrow[dd, "m"] \\
& Q \arrow[ul, dashed, "\phi'"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[dl, "r"] & \\
X \arrow[rr, "f"'] & & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "h"] \arrow[dd, "n"'] & & F(M) \arrow[dd, "F(m)"] \\
& F(Q) \arrow[ul, "\phi"] \arrow[ur, "F(s)"'] \arrow[dl, "F(r)"] & \\
F(X) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(Y)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\overline{W} \arrow[rr, "h'"] \arrow[dd, "\bar{l}"'] & & K \arrow[dd, "k"] \\
& Q \arrow[ul, dashed, "\varphi'"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[dl, "r"] & \\
X \arrow[rr, "f"'] & & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "h"] \arrow[dd, "l"'] & & F(K) \arrow[dd, "F(k)"] \\
& F(Q) \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "F(s)"'] \arrow[dl, "F(r)"] & \\
F(X) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(Y)
\end{tikzcd}$$

donde $\phi' = g_i \lhd^{\phi} \overline{f}_i$, con $f_1 = n$, $f_2 = h$, $g_1 = r$, $g_2 = s$, $(f \circ \bar{l}) \lhd^{h} k$ y $\varphi' = r \lhd^{\varphi} \bar{l}$. $\square$

Corolario 2.9 (Ver [2]$\wp$)**.** *Sean $F : \chi \to \mathcal{S}$ un funtor topológico y $\mathcal{S}$ una categoría finitamente $\mathcal{M}$-completa, entonces χ es finitamente $\mathcal{M}_F$-completa y finitamente $\mathcal{M}_{\overline{F}}$-completa.*

La $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-situación generada por Herrlich en [16] es una construcción similar de $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-estructura para los conceptos de $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-categoría topológica y $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-funtor topológico.

2.2. Levantamiento de objetos proyectivos

Definición 2.10 (Ver [24])**.** *Sea $f : X \to Y$ un $\mathcal{S}$-morfismo, un $\mathcal{S}$-objeto P es **proyectivo respecto a** f si para todo $\mathcal{S}$-morfismo $y : P \to Y$ existe un $\mathcal{S}$-morfismo $x : P \to X$ tal que $f \circ x = y$. Para un $\mathcal{S}$- objeto P, definimos la clase de morfismos respecto a los cuales el objeto P es proyectivo por:*

$$\Pi_{\mathcal{S}}(P) := \{f \in Mor(\mathcal{S}) | P \text{ es proyectivo respecto a } f\}$$

Para un pozo en $\mathcal{S}$ $(f_\lambda : X_\lambda \to Y)_{\lambda\in\Lambda}$, P ***es proyectivo respecto al pozo*** *$(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ si para cada $\mathcal{S}$-morfismo $y : P \to Y$ existe un $\lambda_0 \in \Lambda$ y $x : P \to X_{\lambda_0}$ tal que: $f_{\lambda_0} \circ x = y$.*

Observación 2.11. *Si $\{p\}$ es un conjunto unipuntual, $\Pi_{\mathcal{S}et}(\{p\}) = Epi(\mathcal{S}et)$ y $(\Pi_{\mathcal{S}et}(\{p\}))_\perp = Mono(\mathcal{S}et)$.*

Proposición 2.12 (Ver [2]$\wp$)**.** *Sean (χ, F) una categoría topológica y $P \in F^{-1}(\{p\})$, entonces tenemos que:*

1. *$\Pi_\chi(P) \subset Epi(\chi)$ y es estable bajo pull-backs a lo largo de monomorfismos;*
2. *$(\Pi_\chi(P))_\perp = Mono(\mathcal{S}et)_{\overline{F}}$;*
3. *χ es una $(\Pi_\chi(P), (\Pi_\chi(P))_\perp)$-categoría.*

Demostración. 1. Si $e \in \Pi_\chi(P)$, tenemos que $F(e) \in \Pi_{\mathcal{S}et}(\{p\})$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dd, "e"] \\ P \arrow[ur, dashed, "x"] \arrow[dr, "\overline{y}"'] & \\ & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & F(E) \arrow[dd, "F(e)"] \\ \{p\} \arrow[ur, dashed, "F(x)"] \arrow[dr, "y"'] & \\ & F(X) \end{tikzcd}$$

Sean $u, v : X \to Z$ dos χ-morfimos tales que $u \circ e = v \circ e$, tenemos que $F(u) \circ F(e) = F(v) \circ F(e)$, de donde $F(u) = F(v)$ y así $u = v$.

2. Si $m \in (\Pi_\chi(P))_\perp$, entonces $F(m) \in (\Pi_{\mathcal{S}et}(\{p\}))_\perp$

$$\begin{tikzcd} & \overline{E} \arrow[r, "\overline{u}"] \arrow[dd, "(m\circ\overline{u})\lhd^e\overline{v}"'] & M \arrow[dd, "m"] \\ P \arrow[ur, "\overline{x}"] \arrow[dr, "y"'] & & \\ & \overline{X} \arrow[r, "\overline{v}"'] \arrow[uur, dashed, "d"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & E \arrow[r, "u"] \arrow[dd, "e"'] & F(M) \arrow[dd, "F(m)"] \\ \{p\} \arrow[ur, "x"] \arrow[dr, "F(y)"'] & & \\ & X \arrow[r, "v"'] \arrow[uur, dashed, "F(d)"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

Por lo que $F(m)$ es monomorfismo en $\mathcal{S}et$.

Sea $g : Y \to X$ un χ-morfismo tal que existe $\mathcal{S}et$-morfismo $h : F(Y) \to F(M)$ con $F(m) \circ h = F(g)$; tenemos que conmutan los diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{F(Y)} \arrow[r, "\overline{h}"] \arrow[dd, "\overline{Id}"'] & M \arrow[dd, "m"] \\
P \arrow[ur, "\overline{x}"] \arrow[dr, "y"'] & & \\
 & Y \arrow[r, "g"'] \arrow[uur, dashed, "d"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & F(Y) \arrow[r, "h"] \arrow[dd, "Id"'] & F(M) \arrow[dd, "F(m)"] \\
\{p\} \arrow[ur, "x"] \arrow[dr, "F(y)"'] & & \\
 & F(Y) \arrow[r, "F(g)"'] \arrow[uur, "h"] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

donde $(\overline{F(Y)}, (\overline{h}, \overline{Id}))$ es un F-levantamiento inicial para $(F(Y), (h, Id))$; como $g \lhd^h m := d$, tenemos que m es morfismo F-inicial.

Sean $m \in Mono(\mathcal{S}et)_{\overline{F}}$ y $e \in \Pi_\chi(P)$ tenemos que conmutan los diagramas

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "e"'] & M \arrow[d, "m"] \\
Y \arrow[r, "v"'] \arrow[ur, dashed, "d'"] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(E) \arrow[r, "F(u)"] \arrow[d, "F(e)"'] & F(M) \arrow[d, "F(m)"] \\
F(Y) \arrow[r, "F(v)"'] \arrow[ur, dashed, "d"] & F(X)
\end{tikzcd}$$

para $d' = v \lhd^d m$, de donde $m \in (\Pi_\chi(P))_\perp$.

3. Sea $f : X \to Y$ un χ-morfismo; consideremos la factorización de $F(f)$ en $\mathcal{S}et$ dada por la inclusión i del conjunto $A = F(f)(F(X))$ al conjunto F(Y) y e la restricción de $F(f)$ al codominio A, tenemos que $F(f) = i \circ e$ y conmutan los diagramas

$$\overset{F}{\longmapsto}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f \lhd^e \overline{i}"'] \arrow[dd, bend right=60, "f"'] & N \arrow[dd, "n"] \\
\overline{A} \arrow[d, "\overline{i}"'] \arrow[ur, dashed, "t'"] & \\
Y \arrow[r, "v"'] & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(u)"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dd, bend right=60, "F(f)"'] & F(N) \arrow[dd, "F(n)"] \\
A \arrow[d, "i"'] \arrow[ur, dashed, "t"] & \\
F(Y) \arrow[r, "F(v)"'] & F(Z)
\end{tikzcd}$$

donde $t' = (v \circ \overline{i}) \lhd^t n$, esto es, $f = \overline{i} \circ (f \lhd^e \overline{i})$ es una $(\Pi_\chi(P), (\Pi_\chi(P))_\perp)$-factorización derecha de f.

□

Definición 2.13 (Ver 1.9 de [8])**.** *Sea $(m_\lambda : M_\lambda \to X)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de elementos de $\mathcal{M}|_X$; un $\mathcal{M}$-subobjeto $m : M \to X$ es llamado **$\mathcal{M}$-unión** de la familia $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ si existe una familia de morfismos $(j_\lambda : M_\lambda \to M)_{\lambda\in\Lambda}$ tal que:*

1. *Para cada $\lambda \in \Lambda$, $m \circ j_\lambda = m_\lambda$;*

2. *Para todo diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
M_\lambda \arrow[r, "u_\lambda"] \arrow[d, "j_\lambda"'] \arrow[dd, bend right=60, "m_\lambda"'] & N \arrow[dd, "n"] \\
M \arrow[ur, dashed, "\omega"'] \arrow[d, "m"'] & \\
X \arrow[r, "v"'] & Z
\end{tikzcd}$$

   con $n \in \mathcal{M}$, existe un único morfismo $\omega : M \to N$ con $n \circ \omega = v \circ m$ y para cada $\lambda \in \Lambda$, $\omega \circ j_\lambda = u_\lambda$. Denotaremos a la $\mathcal{M}$-unión de la familia $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ por $\vee m_\lambda$, y a su dominio por $\vee M_\lambda$.

Lema 2.14 (Ver [2]$\wp$)**.** *Sean (χ, F) una categoría topológica, $P \in F^{-1}(\{p\})$ y $(m_\lambda : M_\lambda \to X)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de elementos de $(\Pi_\chi(P))_\perp$; tenemos que:*

1. *Para $N_\Lambda := \bigcup F(m_\lambda)(F(M_\lambda))$ e $i_0 : N_\Lambda \to F(X)$, la función inclusión*

$$\vee m_\lambda \cong \overline{i_0}$$

2. *P es proyectivo respecto al pozo $(j_\lambda : M_\lambda \to \vee M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de la $(\Pi_\chi(P))_\perp$-unión.*

Demostración. Sea $(m_\lambda : M_\lambda \to X)_{\lambda\in\Lambda}$ una clase de elementos de $(\Pi_\chi(P))_\perp$; consideremos, para cada $\lambda \in \Lambda$ los siguientes morfismos:

1. La biyección h_λ dada por la restricción de $F(m_\lambda)$ a su imagen, denotando por $N_\lambda = F(m_\lambda)(F(M_\lambda))$;

2. La inclusión $i_\lambda : F(m_\lambda)(F(M_\lambda)) \to \cup F(m_\lambda)(F(M_\lambda))$;

3. $k_\lambda : F(M_\lambda) \to \cup F(m_\lambda)(F(M_\lambda))$ definido por $k_\lambda := i_\lambda \circ h_\lambda$.

Ya que $\bar{i}_0$ es morfismo inicial, existe $j_\lambda := m_\lambda \lhd^{k_\lambda} \bar{i}_0$ con $m_\lambda = \bar{i}_0 \circ j_\lambda$,esto es, $m_\lambda \leq \bar{i}_0$.

$$\begin{tikzcd} M_\lambda \arrow[rr, "m_\lambda \lhd^{k_\lambda} \bar{i}_0 = j_\lambda"] \arrow[dr, "m_\lambda"'] & & \overline{N_\Lambda} \arrow[dl, "\bar{i}_0"] \\ & X & \end{tikzcd} \quad \overset{F}{\longmapsto} \quad \begin{tikzcd} F(M_\lambda) \arrow[r, "h_\lambda"] \arrow[rr, bend left, "k_\lambda"] \arrow[dr, "F(m_\lambda)"'] & N_\lambda \arrow[r, "i_\lambda"] & N_\Lambda \arrow[dl, "i_0"] \\ & F(X) & \end{tikzcd}$$

Supongamos que para cada $\lambda \in \Lambda$ conmuta un diagrama en χ de la forma

$$\begin{tikzcd} M_\lambda \arrow[r, "u_\lambda"] \arrow[d, "j_\lambda"] \arrow[dd, bend right=60, "m_\lambda"'] & N \arrow[dd, "n"] \\ \overline{N_\Lambda} \arrow[d, "\bar{i}_0"] & \\ X \arrow[r, "v"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(M_\lambda) \arrow[r, "F(u_\lambda)"] \arrow[d, "k_\lambda"] \arrow[dd, bend right=60, "F(m_\lambda)"'] & F(N) \arrow[dd, "F(n)"] \\ N_\Lambda \arrow[d, "i_0"] & \\ F(X) \arrow[r, "F(v)"'] & F(Y) \end{tikzcd}$$

Con $n \in (\Pi_\chi(P))_\perp$; entonces conmutan los diagramas

$$\begin{tikzcd} N_\lambda \arrow[r, "h_\lambda^{-1}"] \arrow[d, "i_\lambda"] & F(M_\lambda) \arrow[r, "F(u_\lambda)"] & F(N) \arrow[dd, "F(n)"] \\ N_\Lambda \arrow[urr, "\exists! \varphi"'] \arrow[d, "i_0"] & & \\ F(X) \arrow[rr, "F(v)"'] & & F(Y) \end{tikzcd}$$

Si $\varphi' = (v \circ \bar{i}_0) \lhd^\varphi n$, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} M_\lambda \arrow[r, "u_\lambda"] \arrow[d, "j_\lambda"] \arrow[dd, bend right=60, "m_\lambda"'] & N \arrow[dd, "n"] \\ \overline{N_\Lambda} \arrow[ur, "\varphi'"'] \arrow[d, "\bar{i}_0"] & \\ X \arrow[r, "v"'] & Y \end{tikzcd}$$

Así $\vee m_\lambda \cong \bar{i}_0$ y, para cada $\lambda \in \Lambda$, $j_\lambda = m_\lambda \lhd^{k_\lambda} \bar{i}_0$.
Sea $x : P \to \overline{N_\Lambda}$ un χ-morfismo, tenemos que conmutan los diagramas

$$\begin{tikzcd} & M_{\lambda_0} \arrow[dd, "j_{\lambda_0}"] \\ P \arrow[ur, "\overline{x}"] \arrow[dr, "y"'] & \\ & \overline{N_\Lambda} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & F(M_{\lambda_0}) \arrow[d, "h_{\lambda_0}"] \\ \{p\} \arrow[ur, dashed, "x"] \arrow[r, "z"] \arrow[dr, "F(y)"'] & N_{\lambda_0} \arrow[d, "i_{\lambda_0}"] \\ & N_\Lambda \end{tikzcd}$$

para algún $\lambda_0 \in \Lambda$.

□

El siguiente resultado se encuentra enunciado en 1 de [8].

Proposición 2.15. *Sea χ una categoría $\mathcal{M}$-completa (i.e. tiene $\mathcal{M}$- factorizaciones derechas y $\mathcal{M}$-uniones), $\mathcal{E} = (\mathcal{M})^\perp$ y P un χ-objeto tal que para cada χ-morfismo:*

$$e \in \mathcal{E} \Leftrightarrow P \text{ es proyectivo respecto a } e.$$

Para todo χ-morfismo $f : X \to Y$ y toda familia no vacía $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de elementos de $\mathcal{M}|_Y$, si P proyectivo respecto al pozo $(j_\lambda : M_\lambda \to M)_{\lambda\in\Lambda}$ de la unión $m = \vee m_\lambda$, entonces $f^{-1}(\vee m_\lambda) \cong \vee f^{-1}(m_\lambda)$

Demostración. Sea $\vee m_\lambda = m : M \to Y$, consideremos para cada $\lambda \in \Lambda$ el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & & & M_\lambda \arrow[rr, "j_\lambda"] \arrow[ddr, "m_\lambda"'] & & M \arrow[ddl, "m"] \\ f^{-1}(M_\lambda) \arrow[urrr, "f'_\lambda"] \arrow[rr, "h_\lambda"] \arrow[ddr, "f^{-1}(m_\lambda)"'] & & f^{-1}(M) \arrow[urrr, "f'"] \arrow[ddl, "f^{-1}(m)"] & & & \\ & & & & Y & \\ & X \arrow[urrr, "f"'] & & & & \end{tikzcd}$$

Veamos que $\coprod h_\lambda \in \mathcal{E}$; si $y : P \to f^{-1}(M)$ un χ-morfismo, tenemos que $f' \circ y : P \to M$ es un $\chi - morfismo$, así existe $\lambda_0 \in \Lambda$ y existe $x : P \to M_{\lambda_0}$ con $j_{\lambda_0} \circ x = f' \circ y$, de donde también existe $z : P \to f^{-1}(M_{\lambda_0})$ tal que conmuta el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
f^{-1}(M_{\lambda_0}) \arrow[rr, "f'_{\lambda_0}"] \arrow[dd, "h_{\lambda_0}"'] & & M_{\lambda_0} \arrow[dd, "j_{\lambda_0}"] \\
& P \arrow[ul, dashed, "z"] \arrow[ur, "x"'] \arrow[dl, "y"] & \\
f^{-1}(M) \arrow[rr, "f'"'] & & M
\end{tikzcd}
$$

así $\coprod h_\lambda \circ \coprod_{\lambda_0} \circ z = y$.
Además conmuta el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\coprod f^{-1}(M_\lambda) \arrow[r, "\coprod k_\lambda"] \arrow[d, "\coprod h_\lambda"'] & \vee f^{-1}(M_\lambda) \arrow[d, "\vee f^{-1}(m_\lambda)"] \\
f^{-1}(M) \arrow[r, "f^{-1}(m)"'] \arrow[ur, dashed, "d"'] & X
\end{tikzcd}
$$

donde k_λ son tales que $f^{-1}(m_\lambda) \leq^{k_\lambda} \vee f^{-1}(m_\lambda)$, y así $f^{-1}(m) \leq^{d} \vee f^{-1}(m_\lambda)$. Para la desigualdad contraria basta notar que el operador $f^{-1}(\_)$ preserva orden. $\square$

Corolario 2.16 (Ver [2]$\wp$). *Toda categoría topológica (χ, F), con $P \in F^{-1}(p)$, es una $(\Pi_\chi(P), (\Pi_\chi(P))_\perp)$-categoría tal que para todo χ-morfismo $f : X \to Y$ y para toda familia no vacía $(m_\alpha : M_\alpha \to Y)_{\alpha\in\Lambda}$ de elementos de $(\Pi_\chi(P))_\perp)$, se tiene que*

$$f^{-1}(\vee m_\alpha) \cong \vee f^{-1}(m_\alpha)$$

Corolario 2.17 (Ver [2]$\wp$). *Sea (χ, F) una categoría topológica y $P \in F^{-1}(\{p\})$ tenemos que:*

1. *χ es una $(\Pi_\chi(P), Mono(\mathcal{S}et)_{\overline{F}})$-categoría*
2. *$(Mono(\mathcal{S}et)_{\overline{F}})_\perp \subset Epi(\chi)$*
3. *Para cada χ-morfismo $f : X \to Y$ y cada clase $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de subespacios de Y se tiene que:*
$$f^{-1}(\vee m_\alpha) \cong \vee f^{-1}(m_\alpha).$$

Teorema 2.18 (Ver [2]$\wp$). *Sea (χ, F) una categoría topológica y sea $P \in F^{-1}(\{p\})$, para $\mathcal{M} = (\Pi_\chi(P))_\perp$ y $\mathcal{E} = \Pi_\chi(P)$:*

1. *χ cumple las hipótesis del Teorema de Caracterización de subcategorías $\mathcal{M}$-correflexivas (Teorema 1.29).*

2. *χ tiene por separador a cualquier objeto cuya imagen bajo F sea un conjunto unipuntual, de donde toda subcategoría $\mathcal{M}$-correflexiva con un objeto de imagen bajo F un conjunto unipuntual es Bi-correflexiva*

3. *Para todo χ-morfismo f, se tiene que el operador $f(\_)$ preserva $\mathcal{M}$-uniones.*

Capítulo 3

Operadores límite y subcategorías correflexivas

En 1972 en Aspects of Topoi, P. Freyd [13], pág 16, comenta lo siguiente:

En cualquier conjunto parcialmente ordenado, visto como una categoría, las subcategorías reflexivas plenas están en correspondencia uno a uno con los inflacionarios idempotentes que preservan orden, esto es, con las funciones f *tales que*

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$
$$x \leq f(x)$$
$$f(f(x)) = f(x)$$

Claramente, el reflector de una subcategoría plena y reflexiva es una de dichas funciones. A la inversa, dada una tal f*, entonces* $Imagen(f)$ *es reflexiva de la siguiente manera: Dado* $y \in Im(f)$ *entonces* $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) = y$ *y* $f(x) \leq y \Rightarrow x \leq f(x) \leq y$.

Enseguida, de la proposición 1.41 de [13], Freyd define los operadores clausura para las álgebras de Heyting como operadores unarios denotado por $\overline{x}$ tales que:

$$\overline{\overline{x}} = \overline{x}$$
$$x \leq \overline{x}$$
$$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$$

y hace notar que la imagen de un operador clausura es una subálgebra de Heyting reflexiva.

En Limit-Operators and Topological Coreflections de Horst Herrlich 1969, [15], provee ejemplos de correflexiones topológicas. En la primera parte de dicho artículo procede a presentar tres métodos para generar subcategorías correflexivas en $\mathfrak{Top}$; en particular el tercer método que presenta es relacionando las correflexiones topológicas y operadores límite inferior, que son operadores clausura más finos que el operador Kuratowski. Ryosuke Nakagawa en 1976 en [26] genera, mediante sistemas de factorización $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ en $\mathfrak{Top}$, un operador clausura monótono, anclado (en el espacio total), extensivo e idempotente y aditivo en el caso de que $\mathcal{M}$ sea cerrado bajo uniones, definido sobre los monomorfismos extremales; además logra establecer una correspondencia uno a uno entre adecuados sistemas de factorización y las subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$, ver Teorema 4 de [26].

Para una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-categoría arbitraria χ la noción de operador clausura, introducida en [9] en 1987 por Dikran Dikranjan y Eraldo Giuli, captura en una noción abstracta, los conceptos y propiedades de los operadores clausura utilizados por Herrlich y Nakagawa en la categoría $\mathfrak{Top}$, pero también permite incluir las nociones aparentemente distantes (que no tienen conexión intuitiva con los conjuntos cerrados en espacios topológicos) de los operadores clausura en Topos o álgebras de Heating (ver [25] y [13]).

En toda categoría arbitraria χ en la cual una clase de subobjetos $\mathcal{M}$ determinada tiene la suficiente estructura, un operador clausura (categórico) C está definido como una familia de operadores $(C_X)_{X\in\chi}$, que actúan sobre los subobjetos, tal que satisface las propiedades de extensión, monotonía y aditividad (ver [8]).

3.1. Operadores Clausura

Sea χ una categoría y $\mathcal{M}$ una clase fija de monomorfismos de χ que contiene a todos los isomorfismos de χ, cerrada bajo composición y para la cual χ es finitamente $\mathcal{M}$-completa.

Definición 3.1 (Ver 2.2 de [8])**.** *Un* ***operador clausura*** *en χ respecto a la clase $\mathcal{M}$ de subobjetos, es una clase de operadores $C = \{C_X : \mathcal{M}|_X \to \mathcal{M}|_X\}_{X\in Obj(\chi)}$ tal que cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Extensión: Para cada $m \in \mathcal{M}$, $m \leq^{j_m} C_X(m)$;*

2. *Monotonía: Si $m, n \in \mathcal{M}|_X$ con $m \leq n$, entonces $C_X(m) \leq C_X(n)$;*

3. *Continuidad: Para cada χ-morfismo $f : X \to Y$ y cada $m \in \mathcal{M}|_X$,*

$$f(C_X(m)) \leq C_Y(f(m)).$$

Definición 3.2. *Sea χ una categoría con $\mathcal{M}$-uniones. Un operador clausura C en χ respecto $\mathcal{M}$ es* ***anclado en*** *X si:*

$$C_X(o_x) \cong o_X.$$

donde $o_X : O_X \to X$ es el menor elemento de $\mathcal{M}|_X$. El operador C es llamado ***anclado*** *si es anclado en todos los objetos de χ. El operador C es* ***aditivo en*** *X si para cualesquiera $\mathcal{M}$-subobjetos m y n de X:*

$$C_X(m \vee n) \cong C_X(m) \vee C_X(n).$$

C es llamado ***aditivo*** *si es aditivo en todos los objetos de χ.*

Observación 3.3. *Por propiedad de monotonía de un operador clausura C tenemos que $m \cong m'$ implica $C_X(m) \cong C_X(m')$, de donde es suficiente definir al operador C en un esqueleto de $\mathcal{M}$.*

Si la propiedad de monotonía se cumple, la propiedad de continuidad es equivalente a que para cada χ-morfismo $f : X \to Y$, y cada $n \in \mathcal{M}|_Y$

$$C_X(f^{-1}(n)) \leq f^{-1}(C_Y(n)).$$

Lema 3.4 (Lema de diagonalización de clausuras, ver 2.4 de [8])**.** *Sea C un operador clausura en χ respecto a $\mathcal{M}$. Para todo diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "m"'] & N \arrow[d, "n"] \\ X \arrow[r, "v"'] & Y \end{tikzcd}$$

con m y n en $\mathcal{M}$, existe un único morfismo ω tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j_m"'] & N \arrow[d, "j_n"] \\ c_X(M) \arrow[r, dashed, "\omega"] \arrow[d, "c_X(m)"'] & C_Y(N) \arrow[d, "c_Y(n)"] \\ X \arrow[r, "v"'] & Y \end{tikzcd}$$

Definición 3.5. *Un $\mathcal{M}$-subobjeto $m : M \to X$ es un* ***sub-objeto C-cerrado*** *(en X) si es isomorfo a su C-clausura, esto es, si $j_m : M \to c_X(M)$ es isomorfismo. m es un* ***subobjeto C-denso*** *(en X) si su clausura es isomorfa a 1_X, esto es, si $c_X(m) : c_X(M) \to X$ es isomorfismo. El prefijo C puede ser omitido.*

En esta sección consideramos una categoría topológica (χ, F) y una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-estructura para la categoría $\mathcal{S}et$, i.e.;

1. La clase $\mathcal{M}$ es una clase de monomorfismos de $\mathcal{S}et$ cerrada bajo composición, que contiene a todos los isomorfismos de $\mathcal{S}et$; y, para cada conjunto A, la inclusión $i : \emptyset \to A$ es un elemento de $\mathcal{M}$.
2. La clase $\mathcal{E} := (\mathcal{M})^{\perp}$ es una clase de epimorfismos de $\mathcal{S}et$.
3. La categoría $\mathcal{S}et$ tiene $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorizaciones y es finitamente $\mathcal{M}$-completa.

De lo anterior se tiene que:

1. las clases $\mathcal{M}_F$ y $\mathcal{M}_{\overline{F}}$ son clases de monomorfismos de χ cerradas bajo composición, las cuales contienen a todos los isomorfismos de χ, Proposición 2.2 y Observación 1.3. Además para cada χ-objeto X existe $o_X \cong \wedge\mathcal{M}_{\overline{F}}|_X$ con $o_x := \overline{i} : \overline{\emptyset} \to X$.
2. La clases $\mathcal{E}_F$ y $\mathcal{E}_{\underline{F}}$ son clases de epimorfismos de χ, (1) de Proposición 2.4.
3. La categoría χ tiene $(\mathcal{E}_{\underline{F}}, \mathcal{M}_F)$ y $(\mathcal{E}_F, \mathcal{M}_{\overline{F}})$ factorizaciones y es tanto finitamente $\mathcal{M}_F$-completa como finitamente $\mathcal{M}_{\overline{F}}$-completa, Proposición 2.7 y Corolario 2.9.

3.2. Operadores límite inferior

Definición 3.6 (Ver [2]$\wp$)**.** *Sea C_0 un operador clausura en χ respecto a $\mathcal{M}$, un* ***operador límite inferior respecto a*** C_0 *, es una colección de operadores $l = \{l_X\}_{X\in\chi}$, donde $l_X : \mathcal{M}|_X \to \mathcal{M}|_X$ son tales que para cada $X \in \chi$ cumplen:*

1. *Extensión: $m \leq l_X(m) \leq C_{0X}(m)$ para cada $m \in \mathcal{M}$;*
2. *Aditividad: $l_X(m \vee n) \cong l_X(m) \vee l_X(n)$ para cada $m, n \in \mathcal{M}|_X$;*
3. *Continuidad: $f : X \to Y$, $f(l_X(m)) \leq l_Y(f(m))$ para cada $f : X \to Y$ y $m \in \mathcal{M}$.*

Observación 3.7. *La propiedad de aditividad de l implica la propiedad de monotonía de l (y así l está bien definido hasta isomorfismo, esto es, $l_X(m) \cong l_X(n)$ si $m \cong n$), de donde la propiedad de continuidad puede ser expresada como:*

$$l_X(f^{-1}(n)) \leq f^{-1}(l_Y(n)),$$

para cada $f : X \to Y$ y $n \in \mathcal{M}|_Y$.

Definición 3.8 (Ver [2]$\wp$). *Para cada operador límite inferior l respecto a C_0, denotamos por $\mathfrak{U}(l)$ la subcategoría plena de χ con clase de objetos:*

$$Obj(\mathfrak{U}(l)) := \{X \in Obj(\chi) : (\forall m \in \mathcal{M}|_X) l_X(m) \cong m \Leftrightarrow C_{0X}(m) \cong m\}.$$

Proposición 3.9 (Ver [2]$\wp$). *Para cada operador límite inferior l respecto a C_0, la subcategoría $\mathcal{U}(l)$ es repleta.*

Demostración. Sean $X \in \mathcal{U}(l)$ y $h : X \to Y$ un χ-isomorfismo, supongamos que $m \in \mathcal{M}|_Y$ con $l_Y(m) \cong m$, para $g := h^{-1} : Y \to X$, tenemos que $g(n) \cong h^{-1}(n)$ para cada $n \in \mathcal{M}|_Y$, así

$$l_X(g(m)) \cong l_X(h^{-1}(m)) \leq h^{-1}(l_Y(m)) \cong g(l_Y(m)) \cong g(m),$$

de donde $l_X(g(m)) \cong g(m)$. Como $X \in \mathcal{U}(l)$, tenemos que $C_{0X}(g(m)) \cong g(m)$, entonces

$$m \cong g^{-1}(g(m)) \cong g^{-1}(C_{0X}(g(m))) \geq C_{0Y}(g^{-1}(g(m)) \cong C_{0Y}(m).$$

Finalmente $m \cong C_{0Y}(m)$ y $Y \in \mathcal{U}(l)$. □

Proposición 3.10 (Ver [2]$\wp$). *Sean C_0 un operador clausura anclado y l un operador límite inferior respecto a C_0. Si P es un objeto tal que $F(P) = \{p\}$, entonces la subcategoría $\mathcal{U}(l)$ tiene a P como objeto.*

Demostración. Sea $m : M \to P$ un $\mathcal{M}$-subobjeto de P. Supongamos que $m = o_X$, tenemos que $C_{0X}(o_X) \cong o_X$ ya que C_0 es anclado. Por otro lado, si $F(m)$ es la función constante $\{q\} \to \{p\}$, entonces $F(C_{0X}(m))$ es la función constante $\{r\} \to \{p\}$. El levantamiento F-inicial de la función constante $\{r\} \to \{q\}$, y la unicidad de los levantamientos de conjuntos unipuntuales, muestran que $C_{0X}(m) \leq m$. □

Proposición 3.11 (Ver [2]$\wp$). *Sea C_0 un operador cerradura definido por pozos finales (Definición 3.28). Para todo operador límite inferior l respecto a C_0 se tiene que:*

1. *$\mathcal{U}(l)$ es cerrada bajo la formación de coproductos;*
2. *Si $f : X \to Y$ es un elemento de $\mathcal{E}_{\underline{F}}$ y $X \in \mathcal{O}bj(\mathcal{U}(l))$, entonces $Y \in \mathcal{O}bj(\mathcal{U}(l))$.*

Demostración.

1 Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una clase de χ-objetos indexada por un conjunto Λ. El levantamiento F-final $(\underline{X}, (\underline{i}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ del F-pozo $(\coprod F(X_\lambda), (i_\lambda : F(X_\lambda) \to \coprod F(X)_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ es el coproducto de $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en χ. Sea $m \in \mathcal{M}|_{\underline{X}}$ con $l_{\underline{X}}(m) \cong m$; para cada $\lambda \in \Lambda$, tenemos que:

$$l_{X_\lambda}(\underline{i}_\lambda^{-1}(m)) \leq \underline{i}_\lambda^{-1}(l_{\underline{X}}(m)) \cong \underline{i}_\lambda^{-1}(m)$$

así $l_{X_\lambda}(\underline{i}_\lambda^{-1}(m)) \cong \underline{i}_\lambda^{-1}(m)$; como cada X_λ es un $\mathcal{U}(l)$-objeto, tenemos que

$$C_{0X_\lambda}(\underline{i}_\lambda^{-1}(m)) \cong \underline{i}_\lambda^{-1}(m).$$

Finalmente $C_{0\underline{X}}(m) \cong m$.

2 Sean $f : X \to Y$ un elemento de $\mathcal{E}_{\underline{F}}$, $X \in \mathcal{O}bj(\mathcal{U}(l))$ y $m \in M_F|_Y$, con $l_Y(m) \cong m$; tenemos que

$$l_X(f^{-1}(m)) \leq f^{-1}(l_Y(m)) \cong f^{-1}(m);$$

así, $l_X(f^{-1}(m)) \cong f^{-1}(m)$ y, debido a que $X \in \mathcal{O}bj(\mathcal{U}(l)$, tenemos que $C_{0X}(f^{-1}(m)) \cong f^{-1}(m)$, finalmente $C_{0Y}(m) \cong m$ ya que C_0 es definido por pozos finales. □

De aquí en adelante, denotaremos por C_0 a un operador clausura aditivo, anclado y definido por pozos finales en χ respecto a $\mathcal{M}_F$.

Teorema 3.12 (Ver [2]$\wp$). *Para cada operador límite inferior l con respecto a C_0, la subcategoría plena $\mathcal{U}(l)$ es una subcategoría bicorreflexiva de χ.*

Demostración. Por la Proposición 3.3 de [2], χ es $\mathcal{M}_F$ bien potenciada; por la proposición 3.5 de [2], χ tiene $(\mathcal{E}_{\underline{F}}, \mathcal{M})$-factorizaciones; por el teorema 21.16 de [1], χ tiene colímites y en particular coproductos; así, el teorema de caracterización de subcategorías $\mathcal{M}$-correflexivas aplicado a la $(\mathcal{E}_{\underline{F}}, \mathcal{M}_F)$ estructura de χ, y la Proposición 3.11, muestran que $\mathcal{U}(l)$ es correflexiva en χ. Por la Proposición 3.10, tenemos que $\mathcal{U}(l)$ tiene un separador por objeto. Finalmente $\mathcal{U}(l)$ es bicorreflexiva en χ. □

Definición 3.13 ($\wp$). *Sea $BiCo(\chi)$ la clase preordenada de subcategorías bicorreflexivas de χ (con un separador o un espacio que no esté en la F-fibra del conjuto vacío), con $\mathcal{U}_1 \leq \mathcal{U}_2$ si $\mathcal{U}_1$ es una subcategoría plena de $\mathcal{U}_2$.*

Definición 3.14 ($\wp$). *La clase preordenada de operadores límite inferior en χ respecto a C_0, es denotada por $Lim(\chi, C_0)$, con $l_1 \leq l_2$ si para todo $X \in \mathcal{O}bj(\chi)$ y $m \in \mathcal{M}_F|_X$, $l_1(m) \leq l_2(m)$.*

Proposición 3.15 ($\wp$). *El operador $\mathcal{U}(\_) : Lim(\chi, C_0) \to BiCo(\chi)$ preserva orden.*

Demostración. Sean l_1 y l_2 en $Lim(\chi, C_0)$ con $l_1 \leq l_2$ y $X \in \mathcal{O}bj(\mathcal{U}(l_1))$. Para cada $\mathcal{M}_F$-subobjeto m con $l_{2X}(m) \cong m$ tenemos que $l_{1X}(m) \cong m$; así, $C_{0X}(m) \cong m$ y $X \in \mathcal{O}bj(\mathcal{U}(l_2))$. □

Para $\mathcal{M} = Mono(\mathcal{S}et)$ y una categoría topológica (χ, F) consideramos la $(\mathcal{E}_F, \mathcal{M}_{\overline{F}})$-estructura para χ inducida por F. Sea K_0 un operador clausura aditivo en χ respecto a $\mathcal{M}_{\overline{F}}$.

Teorema 3.16 (Ver [2]$\wp$)**.** *Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría bicorreflexiva χ, y sea $r_X : \mathcal{A}(X) \to X$ para cada χ-objeto X la $\mathcal{A}$-correflexión de X . El operador $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \left\{l_X^{\mathcal{A}}\right\}_{X \in Obj(\chi)}$ definido (hasta isomorfismos) por:*

$$l_X^{\mathcal{A}}(m) = m \vee r_X(K_{0\mathcal{A}(X)}(r_X^{-1}(m))),$$

para cada $m \in \mathcal{M}_{\overline{F}}|_X$, es un operador límite inferior en χ respecto a K_0. Además si K_0 es idempotente, y $\mathcal{A}$ es $\mathcal{M}_{\overline{F}}$-correflexiva, entonces $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ es idempotente.

Demostración. Si X un χ-objeto y $m \in \mathcal{M}_{\overline{F}}|_X$, $l_X^{\mathcal{A}}(m)$ es un elemento de $\mathcal{M}_{\overline{F}}$ (χ tiene $\mathcal{M}_{\overline{F}}$-intersecciones y $\mathcal{M}_{\overline{F}}$-pullbacks), y por definición, $m \leq l_X^{\mathcal{A}}(m)$. Como

$$r_X(K_{0\mathcal{A}(X)}(r_X^{-1}(m))) \leq r_X(r_X^{-1}(K_{0X}(m))) \leq K_{0X}(m),$$

tenemos que $l_X^{\mathcal{A}}(m) \leq K_{0X}(m)$. Como K_0 es un operador clausura, tenemos que:

$$r_X^{-1}(m) \leq K_{0\mathcal{A}(X)}(r_X^{-1}(m)),$$

de donde $r_X(r_X^{-1}(m)) \leq r_X(K_{0RX}(r_X^{-1}(m)))$; además, como r_X es bi-morfismo, tenemos que $m \cong r_X(r_X^{-1}(m))$, y así $m \leq l_X^{\mathcal{A}}(m)$. Para $m, n \in \mathcal{M}_F|_X$, se tiene que (por el Corolario 2.17):

$$r_X^{-1}(m \vee n) \cong r_X^{-1}(m) \vee r_X^{-1}(n).$$

Así $l_X^{\mathcal{A}}(m \vee n) \cong l_X^{\mathcal{A}}(m) \vee l_X^{\mathcal{A}}(n)$. Sean $f : X \to Y$ un χ-morfismo, $m \in \mathcal{M}_{\overline{F}}|_Y$ y Rf el χ-morfismo tal que $f \circ r_X = r_Y \circ Rf$, tenemos que:

$$\begin{gathered}
r_X(K_{0\mathcal{A}(X)}(r_X^{-1}(f^{-1}(m)))) \cong r_X(K_{0\mathcal{A}(X)}((f \circ r_X)^{-1}(m))) \cong \\
r_X(K_{0\mathcal{A}(X)}((r_Y \circ Rf)^{-1}(m))) \cong r_X(K_{0\mathcal{A}(X)}(Rf^{-1}(r_Y^{-1}(m)))) \leq \\
r_X(Rf^{-1}(K_{0\mathcal{A}(Y)}(r_Y^{-1}(m))) \leq f^{-1}(r_Y(K_{0\mathcal{A}(X)}(r_Y^{-1}(m)));
\end{gathered}$$

así, $l_X^{\mathcal{A}}(f^{-1}(m))) \leq f^{-1}(l_Y^{\mathcal{A}}(m))$. Si K_0 es idempotente, y cada r_X es un elemento de $\mathcal{M}_{\overline{F}}$, entonces

$$\begin{aligned}
r_X(K_{0RX}(r_X^{-1}(r_X(K_{0\mathcal{A}(X)}(r_X^{-1}(m)))))) &\cong r_X(K_{0\mathcal{A}(X)}(K_{0\mathcal{A}(X)}(r_X^{-1}(m)))) \\
&\cong r_X(K_{0\mathcal{A}(X)}(r_X^{-1}(m)));
\end{aligned}$$

así, $l(\mathcal{U})$ es idempotente □

Proposición 3.17 ($\wp$). *El operador $\mathcal{L} : BiCo(\chi) \to Lim(\chi, K_0)$ preserva orden.*

Demostración. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ elementos de $BiCo(\chi)$ con $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$; para cada χ-objeto X existe $h : \mathcal{A}(X) \to \mathcal{B}(X)$ tal que: $r_{\mathcal{A}X} = r_{\mathcal{B}X} \circ h$, de donde para cada $m \in \mathcal{M}_{\overline{F}|_X}$,

$$r_{\mathcal{A}X}(K_{0\mathcal{A}(X)}(r_{\mathcal{A}X}^{-1}(m))) \cong r_{\mathcal{A}X}(K_{0\mathcal{A}(X)}(h^{-1}r_{\mathcal{B}X}^{-1}(m)))$$
$$\leq r_{\mathcal{A}X}(h^{-1}(K_{0\mathcal{B}(X)}(r_{\mathcal{B}X}^{-1}(m)))) \leq Id_X^{-1}(r_{\mathcal{B}X}^{-1}(K_{0\mathcal{B}(X)}(r_{\mathcal{B}X}^{-1}(m))))$$
$$\cong r_{\mathcal{B}X}^{-1}(K_{0\mathcal{B}(X)}(r_{\mathcal{B}X}^{-1}(m))).$$

□

Observación 3.18 ($\wp$). *La forma en que se define el operador $\mathcal{L}$ es similar a la forma que Clementino define el operador discreto $fine_X(m) = m$ en [7]:*

$$fine_X(m) = m \vee \bigvee\{h(Coar_P(h^{-1}(m)))|h : P \to X, P \in \mathbb{P}\},$$

donde $\mathbb{P}$ denota la clase de objetos preterminales de χ, y $Coar$ es el operador

$$Coar_X(m) = \bigwedge\{f^{-1}(f(m))|f : X \to P, P \in \mathbb{P}\}.$$

Observación 3.19 ($\wp$). *Sea (χ, F) una categoría topológica. Para cada χ-morfismo $f : X \to Y$ y cada $\mathcal{M}_{\underline{F}}|_Y$-subobjeto m, $f_F^{-1}(m) \cong f_{\underline{F}}^{-1}(m)$.*

Proposición 3.20 ($\wp$). *Sea χ una categoría con $\mathcal{M}$-imágenes inversas y directas, para cada $m \in \mathcal{M}|_B$ y cada diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "r"'] & B \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

tenemos que: $r(g^{-1}(m)) \leq f^{-1}(s(m))$

Demostración. Ya que:

$$f(r(g^{-1}(m))) \cong (f \circ r)(g^{-1}(m)) \cong (s \circ g)(g^{-1}(m)) \cong s(g(g^{-1}(m))) \leq s(m),$$

por adjunción se tiene $r(g^{-1}(m)) \leq f^{-1}(s(m))$.

□

3.3. Levantamiento de operadores

Definición 3.21. *Sea (χ, F) una categoría topológica, un* ***operador clausura conjuntista*** *para (χ, F) es una familia de operadores $C = \{C_X : \mathbb{P}(F(X)) \to \mathbb{P}(F(X))\}_{X\in\mathcal{O}bj(\chi)}$, donde $\mathbb{P}(A)$ denota al conjunto potencia de A, tales que:*

1. *Para cada $M \in \mathbb{P}(F(X))$, $M \subset C_X(M)$;*
2. *Si $M \subset N \in \mathbb{P}(F(X))$, entonces $C_X(M) \subset C_X(N)$;*
3. *Para todo χ-morfismo $f : X \to Y$ y todo $M \in \mathbb{P}(F(Y))$,*

$$C_X(F(f)^{-1}(M)) \subset F(f)^{-1}(C_Y(M)).$$

Definición 3.22. *Sea C un operador clausura conjuntista para (χ, F); se define el operador $C' = \{C'_X : \mathcal{M}_F \to \mathcal{M}_F\}_{X\in\mathcal{O}bj(\chi)}$ donde, para cada χ-objeto X y cada $\mathcal{M}_F$-subobjeto m de X*

$$C'_X(m) = \overline{i_{C_X(F(m)(F(M)))}}$$

Proposición 3.23. *Sea C un operador cerradura conjuntista para (χ, F), el operador C' definido por C es un operador clausura en χ respecto a $\mathcal{M}_F$ (o bien $\mathcal{M}_{\overline{F}}$).*

Demostración.

1 Sea $X \in \mathcal{O}bj(\chi)$, y sea $m \in \mathcal{M}_F|_X$, ya que $F(m) \leq i_{C_X(F(m)(F(M)))}$, se tiene que $m \leq C'_X(m)$

2 Sean X un χ-objeto, y m, n dos $\mathcal{M}_F$-subobjetos de X tales que $m \leq n$, se tiene que $i_{C_X(F(m)(F(M)))} \leq i_{C_X(F(n)(F(N)))}$, de donde $C'_X(m) \leq C'_X(n)$.

3 Sea $f : X \to Y$ un χ-morfismo y sea m un $\mathcal{M}_F$-subobjeto de Y, notar que

$$\begin{aligned} C_X(F(f^{-1}(m))(F(f^{-1}(M)))) &= C_X(F(f)^{-1}(F(m))(F(f)^{-1}(F(M)))) \\ = C_X(i(F(f)^{-1}(f(m)(F(M))))) &= C_X(F(f)^{-1}(F(m)(F(M)))) \\ &\subset F(f)^{-1}(C_Y(F(m)(F(M)))) \end{aligned}$$

esto es, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} C_X(F(f^{-1}(m))(F(f^{-1}(M)))) \arrow[r, "F(f)|"] \arrow[d, "i"'] & C_Y(F(m)(F(M))) \arrow[d, "i"] \\ F(X) \arrow[r, "F(f)"'] & F(Y) \end{tikzcd}$$

y ya que $C'_Y(m)$ es un levantamiento inicial de $i : C_Y(F(m)(F(M))) \to f(Y)$, tenemos que existe χ-morfismo φ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(C'_Y(M)) \arrow[rr, "f'"] \arrow[dd, "f^{-1}(C'_Y(m))"'] & & C'_Y(M) \arrow[dd, "C'_Y(m)"] \\
& C'_X(f^{-1}(M) \arrow[ul, dashed, "t"'] \arrow[ur, "\varphi"'] \arrow[dl, "C'_X(f^{-1}(m))"] & \\
X \arrow[rr, "f"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

Finalmente por propiedad de $f^{-1}(C'_Y(m))$, existe χ-morfismo t tal que

$$C'_X(f^{-1}(m)) \leq^t f^{-1}(C'_Y(m))$$

$\square$

Definición 3.24. *Sea C un operador clausura conjuntista, C es* ***anclado en*** *X si $C_X(\emptyset) = \emptyset$. C es* ***anclado*** *si es anclado en todo χ-objeto.*

Proposición 3.25. *Sea C un operador cerradura conjuntista para (χ, F) respecto a $\mathcal{M}$. Si C es anclado en X y la función inclusión $i : \emptyset \to X$ es un elemento de $\mathcal{M}|_X$, entonces el operador C' definido por C es un operador clausura anclado en X.*

Demostración. Si C es un operador conjuntista anclado en X, para $o_X = \bar{i} : \overline{\emptyset} \to X$ se tiene que $F(o_X) = F(C'_X(o_X))$, de donde $o_X \cong C'_X(o_X)$. $\square$

Definición 3.26. *Sea C un operador clausura conjuntista, C es* ***aditivo en*** *X si para cualesquiera subconjuntos M y N de X, $C_X(M \cup N) = C_X(M) \cup C_X(N)$. C es* ***aditivo*** *si es aditivo en todo χ-objeto.*

Proposición 3.27. *Sea C un operador cerradura conjuntista para (χ, F). Si C es aditivo (en X), entonces el operador C' definido por C es un operador clausura aditivo (en X) para los $\mathcal{M}_{\overline{F}}$-subobjetos.*

Demostración. Si C es un operador conjuntista aditivo en X, sean m y n dos $\mathcal{M}_{\overline{F}}$-subobjetos de X, tenemos que (por el Lema 2.14):

$$F(C'_X(m \vee n)) = i : C_X(F(m)(F(M)) \cup F(n)(F(N))) \to X$$
$$F(C'_X(m) \vee C'_X(n)) = i : C_X(F(m)(F(M)) \cup C_X(F(n)(F(N))) \to X$$

y, dado que ambos morfismos son el mismo, por la aditividad de C, tenemos que:

$$C'_X(m \vee n) \cong F(C'_X(m) \vee C'_X(n)).$$

□

La siguiente propiedad de un operador clausura está relacionada con el comportamiento del operador clausura en los objetos que son levantamientos finales de F-pozos y los subobjetos C-cerrados en dicho objeto.

Definición 3.28 ($\wp$). *Un operador clausura C en χ respecto a $\mathcal{M}_{\overline{F}}$ es un* ***operador clausura definido por pozos finales*** *si, para todo pozo F-final $(f_\lambda : X_\lambda \to \underline{X})_{\lambda\in\lambda}$, y todo $\mathcal{M}_{\overline{F}}$-subobjeto m de $\underline{X}$, m es C-cerrado si y solo si $f_\lambda^{-1}(m)$ es C-cerrado para cada $\lambda \in \Lambda$.*

Definición 3.29 ($\wp$). *Un operador clausura conjuntista C para (χ, F) es un* ***operador clausura definido por pozos finales*** *si para todo pozo F-final $(f_\lambda : X_\lambda \to \underline{X})_{\lambda\in\lambda}$, y todo $M \subset F(X)$ se cumple que:*

$$C_{\underline{X}}(M) = M \Leftrightarrow C_{X_\lambda}(F(f_\lambda)^{-1}(M)) = F(f_\lambda)^{-1}(M) \textit{para cada} \lambda \in \Lambda.$$

Proposición 3.30 ($\wp$). *Sea C un operador clausura conjuntista para (χ, F). Si C es definido por pozos finales, entonces el operador C' definido por C es un operador clausura definido por pozos finales.*

Demostración. Sea $m \in \mathcal{M}_{\overline{F}}|_{\underline{X}}$ tal que para cada $\lambda \in \Lambda$, $C'_{X_\lambda}(f_\lambda^{-1}(m)) \cong f_\lambda^{-1}(m)$, se tiene que:

$$F(f_\lambda^{-1}(m)) = F(f_\lambda)^{-1}(F(m)) = i_1 : F(f_\lambda)^{-1}(F(m)F(M)) \to F(X_\lambda)$$

$$F(C'_{X_\lambda}(f_\lambda^{-1}(m))) = i_2 : C_{X_\lambda}(F(f_\lambda^{-1}(m))F(f_\lambda^{-1}(M))) \to F(X_\lambda),$$

así tenemos que $i_1 \cong i_2$, pues F preserva isomorfismo de monomorfismos, y ya que i_1 e i_2 son inclusiones, tenemos que $i_1 = i_2$, de donde

$$F(f_\lambda)^{-1}(F(m)F(M)) = C_{X_\lambda}(F(f_\lambda)^{-1}(F(m)F(M))),$$

así $F(f_\lambda)^{-1}(F(m)F(M))$ es C-cerrado en X_λ para cada $\lambda \in \Lambda$, de donde $C_{\underline{X}}(F(m)F(M)) = F(m)F(M)$, finalmente

$$C'_{\underline{X}}(m) = \overline{i^{F(\underline{X})}_{C_{\underline{X}}(F(m)F(m))}} = \overline{i^{F(\underline{X})}_{F(m)F(m)}} \cong m.$$

□

Ejemplo 3.31 ($\wp$). *1. El operador clausura Kuratowski $K = (k_X)_{X\in\mathfrak{Top}}$ en $\mathfrak{Top}$ es definido por pozos finales.*

2. *El operador clausura Čech* $K = (K_X)_{X\in\mathfrak{PrTop}}$ *en* $\mathfrak{PrTop}$ *es definido por pozos finales.*

$$K_{Xfin}(M) := \bigcup f_i(K_{X_i}(f_i^{-1}(M)))$$

3. *El operador clausura Katětov* $K = (k_X)_{X\in FC}$ *en* $\mathfrak{GConv}$ *es definido por pozos finales.*

$$K_{(X,q)}(M) := \{x \in X : (\exists \mathcal{F})\mathcal{F} \xrightarrow{q} x \ \wedge \ M \in \mathcal{F}\}$$

$$\mathcal{F} \xrightarrow{q_{fin}} x \Leftrightarrow (\exists j \in I)\mathcal{G} \xrightarrow{q_j} y \wedge f_j(y) = x \wedge f_j(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{F}$$

Definición 3.32 ($\wp$)**.** *Sea* C_0 *un operador clausura conjuntista para* (X, F), *un* ***operador conjuntista límite inferior*** *respecto a* C_0 *es una colección de operadores* $l = \{l_X : P(F(X)) \to (F(X))\}$, *tal que :*

1. *Para cada* $M \subset F(X)$, $M \subset l_X(M) \subset C_0X(M)$;

2. $l_X(M \cup N) = l_X(M) \cup l_X(N)$ *para cada* $M, N \in P(F(X))$;

3. *Para todo* χ*-morfismo* $f : X \to Y$ *y todo* $M \in P(F(Y))$,

$$C_X(F(f)^{-1}(M)) \subset F(f)^{-1}(C_Y(M)).$$

Proposición 3.33 ($\wp$)**.** *Sea* l *un operador conjuntista límite inferior respecto a* C_0 *para* (χ, F), *el operador* l' *definido por* l, *Definición 3.22, es un operador límite inferior respecto a* C_0'.

Demostración. Sean X un χ-objeto y m un $\mathcal{M}_{\overline{F}}$-subobjeto de X, tenemos que

$$i_{l_X(F(m)F(M))} \leq i_{C_X(F(m)F(M))}$$

de donde $l'_X(m) \leq C'_X(m)$. El resto es análogo a las demostraciones de las proposiciones 3.23 y 3.27. □

3.4. Ejemplos

3.4.1. Espacios de convergencia generalizada

En 1948 G. Choquet en [6] axiomatiza el concepto de pseudo-convergencia, impulsado por estudiar las relaciones multivaluadas entre dos espacios topoógicos, haciendo uso natural e indispensable de la noción de filtro, Fischer en [11], [12] y Kowalsky [23] presentaron los espacios de convergencia y estructuras de convergencia (Limesraum y Limitierung, respectivamente); axiomatizando el concepto de convergencia de un filtro con requerimientos más simples de los de Choquet, en 1964 Kent [22] presenta las funciones de convergencia y espacios de convergencia más generales que los de Kowalsky y Fischer, como una generalización de las topologías, y presentó los espacios topológicos, pretopologías, las pseudo-topologías, las estructuras de convergencia (Limitierung), como casos particulares de las funciones de convergencia. Los espacios de convergencia además de capturar a los espacios topológicos y las nociones de funciones continuas, es más completa con respecto a la existencia de funciones especiales, como la propiedad de ser una categoría cartesiana cerrada, de especial interés para las teorías de homotopía y análisis funcional.

Definición 3.34. *(Ver [22] y [28]) Un* ***espacio de convergencia generalizada***[1] *(X, q) es un conjunto X junto con una función q, llamada* ***convergencia en** X o **función de convergencia***[2]*, que asigna a cada $x \in X$ un conjunto $q(x)$ de filtros en X, donde $\mathcal{F} \xrightarrow{q} x$ denota que el filtro $\mathcal{F}$ de X es un elemento de $q(x)$, tal que:*

1. *Para todo $x \in X$, $\dot{x} := \{M \subset X | x \in M\} \xrightarrow{q} x$,*

2. *Para cualesquiera filtros en X, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, si $\mathcal{F} \xrightarrow{q} x$ y $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{G} \xrightarrow{q} x$.*

Dados dos espacios de convergencia generalizada (X, q) y (Y, r), una función $f : X \to Y$ es continua (de (X, q) a (Y, r)) si preserva la convergencia de filtros, esto es si para todo $x \in X$ y todo filtro $\mathcal{F}$ en X:

$$\mathcal{F} \xrightarrow{q} x \Rightarrow f\mathcal{F} \xrightarrow{r} f(x),$$

donde $f\mathcal{F}$ denota el filtro en Y con base $\{f(F) | F \in \mathcal{F}\}$. Los espacios de convergencia generalizada y las funciones continuas entre ellos definen la ***categoría de espacios de convergencia generalizada** $\mathfrak{GConv}$*.

Nota 3.35. *(Ver 3.2 de [28] y [22])*

Un espacio de convergencia generalizada (X, q) es llamado:

1. *Espacio de convergencia, si $\mathcal{F} \cap \dot{x} \in q(x)$, siempre que $\mathcal{F} \in q(x)$;*

[1] En [28] L. D. Nel los espacios de convergencia son aquellos para los cuales, si $\mathcal{F} \in q(x)$, entonces $\mathcal{F} \cap \dot{x} \in q(x)$.

[2] En [22] D. Kent define la función de convergencia como una función monótona del conjunto de filtros de X al conjunto potencia de X tal que $x \in q(\dot{x})$ para cada $x \in X$.

2. *Espacio límite,*[3] *si* $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\xrightarrow{q}x$*, siempre que* $\mathcal{F},\mathcal{G}\xrightarrow{q}x$*;*

3. *Pseudotopológico, si* $\mathcal{F}\xrightarrow{q}x$*, siempre que* $\mathcal{G}\xrightarrow{q}$ *para todo ultra filtro tal que* $\mathcal{F}\subset\mathcal{G}$*;*

4. *Pretopológico, si* $\mathcal{V}_x\xrightarrow{q}x$*, donde* $\mathcal{V}_x$ *es la intersección de todos los filtros en* $q(x)$*;*

5. *Topológico si es pretopológico y todo* $x,y\in X$*,* $\mathcal{V}_x$ *tiene un elemento* $V\in\mathcal{V}_y$ *con* $y\in V$*.*

Dando las categorías Con, Lim, $\mathfrak{PsTop}$*,* $\mathfrak{PrTop}$ *y* $\mathfrak{Top}$*, en cada caso los morfismos son las funciones continuas que preservan la convergencia de filtros, todas estas categorías son topológicas y cada una es birreflexiva en la categoría que le precede en la lista.*

Observación 3.36 (Ver IV.2 de [10] y 3.2 de [8])**.** *Para una fuente de funciones* $(f:X\to X_i)_{i\in I}$ *con* $(X_i,q_i)\in\mathfrak{GConv}$ *para cada* $i\in I$*, se define la estructura de convergencia inicial* q *en* X *de la siguiente forma, para cada filtro* $\mathcal{F}$ *en* X*:*

$$\mathcal{F}\xrightarrow{q}x\Leftrightarrow\forall i\in I(f_i\mathcal{F}\xrightarrow{q_i}f_i(x)).$$

Esto es, el funtor que olvida $|\_|:\mathfrak{GConv}\to\mathcal{S}et$ *es un funtor topológico y, debido a cómo se establecen las convergencias sobre un conjunto* X*, es fácil ver que* $(\mathfrak{GConv},|\_|)$ *es una categoría topológica.*

Ejemplo 3.37 (Las subcategorías $\mathfrak{PrTop}$ y $\mathfrak{Top}$ como subcategorías plenas de $\mathfrak{GConv}$, ver 3 de [8])**.** *La categoría de espacios pretopológicos* $\mathfrak{PrTop}$ *tiene por objetos pares* (X,k_X)*, donde* X *es un conjunto y* $k_X:P(X)\to P(X)$ *es una función, llamada* ***pretopología****, tal que:*

1. $k_X(\emptyset)=\emptyset$*;*

2. *Para todo* $M\subset X$*,* $M\subset k_X(M)$*;*

3. *Para cualesquiera* $M,N\subset X$*,* $k_X(M\cup N)=k_X(M)\cup k_X(N)$*.*

Una función $f:X\to Y$ *es continua (de* (X,k_X) *a* (Y,k_Y)*) si para todo* $M\subset X$ *se tiene que:*

$$f(k_X(M)\subset k_Y(f(M)).$$

Para $(f_i:X\to(Y_i,K_i))_{i\in I}$ *una F-fuente, tenemos que la pretopología definida por*

$$k_X(M):=\bigcap_{i\in I}f_i^{-1}(k_i(f_i(M))),$$

[3] En [11] llamados limitierung por H. R. Fischer.

hace a $(f_i : (X, k_X) \to (Y_i, k_i))_{i\in I}$ un levantamiento inicial de $(f_i)_{i\in I}$ para el funtor $|\_| : \mathfrak{PrTop} \to \mathcal{S}et$.

*Sea $x \in X$. Una **vecindad** de x en el espacio pretopológico (X, k_X) es un conjunto $M \subset X$ tal que $x \notin k_x(X\backslash M)$, para el espacio pretopológico (X, k_X) se denota el conjunto de vecindades de x por $\mathcal{V}_x$. Todo espacio pretopológico (X, k_X) puede ser visto como un espacio de convergencia generalizada donde la convergencia $q : X \to \mathbb{P}(\mathbb{F}(X))$ está dada por*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{q} x \Leftrightarrow \mathcal{V}_x \subset \mathcal{F}.$$

Esta identificación hace a $\mathfrak{PrTop}$ isomorfo a una subcategoría plena de $\mathfrak{GConv}$. A su vez la categoría $\mathfrak{Top}$ es isomorfa a una subcategoría plena de $\mathfrak{PrTop}$; esto, identificando cada espacio topológico (X, τ) con el espacio pretopológico (X, k_X), donde $k_X(M) = \overline{N}^{\tau}$.

3.4.2. Clases composables de filtros

Las siguientes definiciones que generalizan las nociones de compacidad hasta la categoría $\mathfrak{GConv}$ pueden verse en IX de [10]

Nota 3.38. *Para cada conjunto X, el filtro 2^X es llamado **filtro degenerado**.*

Convención 3.39. *Se asumirá que toda clase de filtros contiene el filtro degenerado para cada conjunto.*

Definición 3.40 (XIV.3.5 de [10])**.** *Una clase $\mathbb{D}$ de filtros es **no vacía**, si para todo conjunto X, la clase de filtros en X que son elementos de $\mathbb{D}$, denotada por $\mathbb{D}X$, contiene un filtro no degenerado.*

Definición 3.41 (II.2.9 de [10])**.** *Sean X un conjunto, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos subconjuntos del conjunto potencia de X, diremos que $\mathcal{A}$ se **mezcla** con $\mathcal{B}$, denotado por $\mathcal{A}\#\mathcal{B}$, si para todo $A \in \mathcal{A}$ y todo $B \in \mathcal{B}$ se tiene que $A \cap B \neq \emptyset$. Si $\mathcal{A} = \{A\}$, $A\#\mathcal{B}$ denotará $\mathcal{A}\#\mathcal{B}$. Dos clases que no se mezclan son llamadas **clases disociadas**.*

Nota 3.42. *Si $R \subset X \times Y$ es una relación binaria, $F \subset X, G \subset Y$ y $\mathcal{F}$ es un filtro en X, entonces*

$$R(F) := \{y \in Y| \underset{x\in F}{\exists} (x, y) \in R\},$$

de manera similar para la relación inversa $R^{-} = \{(y, x)|(x, y) \in R\}$ se tiene que:

$$R^{-}(G) := \{x \in X| \underset{y\in G}{\exists} (y, x) \in R^{-}\},$$

Las siguientes expresiones son equivalentes, ver $II.2.4$ *de [10]:*

$$(F \times G)\#R \Leftrightarrow R(F)\#G \Leftrightarrow F\#R^{-}(G).$$

De hecho $(x, y) \in R \Leftrightarrow y \in R(x) \Leftrightarrow x \in R^{-}(y)$.

Si $R \subset X \times Y$, *entonces*

$$R[\mathcal{F}] := \{R(F) | F \in \mathcal{F}\}$$

es una base de filtro (posiblemente degenerado) en Y.

Si $R \subset X \times Y$, $\mathcal{F} \in \mathbb{F}X$ *y* $\mathcal{G} \in \mathbb{F}Y$, *entonces*

$$(\mathcal{F} \times \mathcal{G})\#R \Leftrightarrow R[\mathcal{F}]\#\mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{F}\#R^{-}[\mathcal{G}].$$

Ahora si $\mathcal{R}$ *es un filtro sobre* $X \times Y$, *cada uno de sus elementos puede ser visto como una relación, y se puede considerar el filtro (posiblemente degenerado)*

$$\mathcal{R}[\mathcal{F}] := \{R(F) | R \in \mathcal{R}, F \in \mathcal{F}\}^{\uparrow 4}$$

Por supuesto, se puede definir de forma similar el filtro (posiblemente degenerado) $\mathcal{R}^{-}[\mathcal{G}]$ *sobre* Y, *y se sigue que*

$$(\mathcal{F} \times \mathcal{G})\#\mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}[\mathcal{F}]\#\mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{F}\#\mathcal{R}^{-}[\mathcal{G}].$$

Definición 3.43 (ver XIV.3.6 [10])**.** *Sean* $\mathbb{D}$ *y* $\mathbb{J}$ *dos clases de filtros. Diremos que* $\mathbb{D}$ *es* $\mathbb{J}$-***composable*** *si para cada par de conjuntos* X *y* Y *se tiene que*

$$\mathcal{D} \in \mathbb{D}X \wedge \mathcal{J} \in \mathbb{J}(X \times Y) \Rightarrow \mathcal{J}[\mathcal{D}] \in \mathbb{D}Y.$$

Una clase de filtros $\mathbb{D}$ *es llamada* ***composable*** *si es* $\mathbb{D}$*-composable.*

Notación 3.44. *Sea* X *un conjunto, denotaremos por* $\mathbb{F}_0 X$ *el conjunto de filtros* $\mathcal{F}$ *sobre* X *tales que existe* $\emptyset \neq A \subset X$ *tal que* $\mathcal{F} = A^{\uparrow}$. *Así* $\mathbb{F}_0$ *denotará la clase de filtros principales.*

En particular, una clase de filtros $\mathbb{D}$ es $\mathbb{F}_0$-composable si la imagen, $R[\mathcal{D}]$, de un $\mathbb{D}$-filtro $\mathcal{D}$ en X bajo una relación $R \subset X \times Y$ es un $\mathbb{D}$-filtro en Y, ya que si $R \subset X \times Y$ y $\mathcal{F} \in \mathbb{F}X$, entonces $R[\mathcal{F}] = \{R\}^{\uparrow}[\mathcal{F}]$.

[4] Para una colección $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(X)$, $\mathcal{A}^{\uparrow} := \{B \in \mathbb{P}(X) | (\exists A \in \mathcal{A}) A \subset B\}$.

3.4.3. Límite inferior compacto $\mathfrak{k}$ en $\mathfrak{GConv}$

En esta sección y en la siguiente desarollamos dos ejemplos de operadores límite inferior en la categoría topológica $\mathfrak{GConv}$. Para el primer ejemplo son necesarias definiciones y resultados de una generalización de los conjuntos compactos en $\mathfrak{GConv}$, la siguiente Proposición 3.46, la Proposición 3.47 y el corolario 3.48 pueden verse en XIV.3.3. de [10].

Definición 3.45 (Ver III.5 de [10])**.** *Para un espacio de convergencia generalizada (X, q), la **adherencia** de una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es definida por:*

$$adh_q\mathcal{A} = \bigcup_{\mathbb{F}X \ni \mathcal{H} \# \mathcal{A}} lim_q\mathcal{H}.$$

Definición 3.46 (Ver XIV.3.11. de [10])**.** *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos familias de subconjuntos de (X, q), y sea $\mathbb{D}$ una clase de filtros. Diremos que $\mathcal{A}$ es $\mathbb{D}$**-compacta en** $\mathcal{B}$ si:*

$$(D \in \mathbb{D}X \ \wedge \ D\#\mathcal{A}) \Rightarrow adh_qD\#\mathcal{B}.$$

En caso de que $\mathcal{B} = \{B\}$ o $\mathcal{B} = \{B\}^{\uparrow}$ entonces $\mathcal{B}$ puede ser remplazado por B y diremos que $\mathcal{A}$ es $\mathbb{D}$-compacta en B. Similarmente, si $\mathcal{A} = \{A\}$ o $\mathcal{A} = \{A\}^{\uparrow}$ entonces $\mathcal{A}$ puede ser remplazada por A, y diremos que A es $\mathbb{D}$-compacto en $\mathcal{B}$.

*Diremos que una familia $\mathcal{A}$ es **relativamente** $\mathbb{D}$**-compacta** si es $\mathbb{D}$-compacta en X, y diremos que $\mathcal{A}$ es $\mathbb{D}$**-compacta** si es $\mathbb{D}$-compacta en $\mathcal{A}$.*

Proposición 3.47 (Proposición XIV.3.17. de [10])**.** *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos familias de subconjuntos de (X, q) y sea $\mathbb{D}$ una clase $\mathbb{F}_0$-composable de filtros. Si $f : (X, q) \to (Y, p)$ es continua y $\mathcal{A}$ es $\mathbb{D}$-compacto en $\mathcal{B}$ entonces $f[\mathcal{A}]$ es $\mathbb{D}$-compacto en $f[\mathcal{B}]$.*

Corolario 3.48 (Corolario XIV.3.18. de [10])**.** *Sea $\mathbb{D}$ una clase de filtros $\mathbb{F}_0$-composable. Si $f : (X, q) \to (Y, p)$ es continua y $B \subset X$ es $\mathbb{D}$-compacto, entonces $f(B)$ es $\mathbb{D}$-compacto.*

La siguiente definición permite extender el concepto de la $\mathfrak{k}$-clausura en $\mathfrak{Top}$, definida en 3.3 de [8], hasta la categoría $\mathfrak{GConv}$.

Definición 3.49 ($\wp$)**.** *Sea $\mathbb{D}$ una clase de filtros $\mathbb{F}_0$-composable, y sea (X, q) un espacio de convergencia generalizada, para $M \subset X$ la $\mathbb{D}\mathfrak{k}-$clasura de un subconjunto M de X, denotada por $\mathbb{D}\mathfrak{k}_{(X,q)}(M)$, contiene todos los puntos $x \in X$ tales que existe un $\mathbb{D}$-compacto B de (X, q), con x en la clausura usual (Kuratowski) $k_{(X,q)}(M \cap B)$.*

Observación 3.50. *Sea $\mathbb{D}$ una clase de filtros $\mathbb{F}_0$-composable, para todo espacio de convergencia generalizada (X,q) y $x \in X$, $\{x\}$ es $\mathbb{D}$-compacto en (X,q).*

Demostración. Para ver que $\{x\}$ es compacto en (X,q) veamos que

$$(D \in \mathbb{D}X \text{ y } D\#\{x\}^{\uparrow}) \Rightarrow adh_q D\#\{x\}.$$

Pero

$$x \in lim_q\{x\}^{\uparrow} \subset \bigcup_{G\#D} lim_q G = adh_q D,$$

de donde $adh_q D\#\{x\}$. □

Definición 3.51. *Sea (X,q) un espacio de convergencia generalizada, para cada $M \subset X$ se define*

$$k_q(M) := \{x \in X|(\exists \mathcal{F})\mathcal{F} \xrightarrow{q} \wedge M \in \mathcal{F}\}.$$

La colección de operadores $k = \{k_q\}_{(X,q)\in \mathfrak{GConv}}$ es llamada ***operador clausura Katětov****.*

Proposición 3.52 ($\wp$)**.** *Sea $\mathbb{D}$ una clase de filtros $\mathbb{F}_0$-composable, el operador $\mathbb{D}\mathfrak{k} = \{\mathbb{D}\mathfrak{k}_{(X,q)}\}_{(X,q)\in \mathfrak{GConv}}$ es un operador límite inferior conjuntista en $\mathfrak{GConv}$ con respecto del operador Katětov k.*

Demostración. Sea (X,q) un espacio de convergencia generalizada, denotemos por $\mathbb{D}C_q$ al conjunto de subconjuntos de X que son $\mathbb{D}$-compactos en (X,q).

1) Para $M \subset X$, y para cada $x \in M$ tenemos que $\{x\} \in \mathbb{D}C_q$, Observación 3.50, y $x \in k_q(M \cap \{x\})$, de donde $M \subset \mathbb{D}\mathfrak{k}_q(M)$. Si $x \in \mathbb{D}\mathfrak{k}_q(M)$, existe $B \in \mathbb{D}C_q$, con $x \in k_q(M \cap B) \subset k_q(M)$.

2) Sean $M, N \subset X$; si $x \in \mathbb{D}\mathfrak{k}_q(M \cup N)$, existe $B \in \mathbb{D}C_q$, con

$$x \in k_q((M \cup N) \cap B) = k_q(M \cap B) \cup k_q(N \cap B),$$

de donde $x \in \mathbb{D}\mathfrak{k}_q(M) \cup \mathbb{D}\mathfrak{k}_q(N)$. Para $x \in \mathbb{D}\mathfrak{k}_q(M)$, existe $B \in \mathbb{D}C_q$ con $x \in k_q(M \cap B) \subset k_q((M \cup N) \cap B)$, de donde, $x \in \mathbb{D}\mathfrak{k}_q(M \cup N)$.

3) Sea $f : (X,q) \to (Y,p)$ un morfismo de espacios de convergencia generalizada y sea $N \subset Y$, si $x \in \mathbb{D}\mathfrak{k}_q(f^{-1}(N)$, existe $B \in \mathbb{D}C_q$ tal que $x \in k_q(f^{-1}(N) \cap B)$, de donde

$$\begin{aligned} f(x) \in f(k_q(f^{-1}(N) \cap B)) &\subset k_p(f(f^{-1}(N) \cap B)) \\ &\subset k_p(ff^{-1}(N) \cap f(B) \subset k_p(N \cap f(B)), \end{aligned}$$

y así $f(x)$ es un elemento de $\mathbb{D}\mathfrak{k}_p(N)$, pues $f(B)$ es $\mathbb{D}$-compacto en (Y,p) por el corolario 3.48; esto es $\mathbb{D}\mathfrak{k}_p(f^{-1}(N)) \subset f^{-1}(\mathbb{D}\mathfrak{k}_q(N))$. □

Nota 3.53. *La restricción del operador límite* $\mathbb{D}\mathfrak{k}$ *a la categoría* $\mathfrak{Top}$ *resulta ser el operador* $\mathfrak{k}$ *definido por D. Dikranjan y W. Tholen en [8] y así mismo, es no idempotente, anclado, aditivo.*

3.4.4. Límite inferior secuencial $\mathfrak{s}$ en $\mathfrak{GConv}$

Sean $(\mathbb{N}, \tau)$ el espacio topológico de los números naturales con la topología discreta y $(\hat{\mathbb{N}}, \hat{\tau})$ el espacio topológico generado de la compatificación a un punto de $(\mathbb{N}, \tau)$, denotaremos por $(\mathbb{N}, \mathfrak{q})$ y $(\hat{\mathbb{N}}, \hat{\mathfrak{q}})$ los espacios $(\mathbb{N}, \tau)$ y $(\hat{\mathbb{N}}, \hat{\tau})$, vistos correspondientemente como espacios de convergencia generalizados.

Definición 3.54 ($\wp$). *Una sucesión en un espacio de convergencia generalizada* (X, q) *es un morfismo en* $\mathfrak{GConv}$ $f : (\mathbb{N}, \tau) \to (X, q)$ *denotado por* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, donde para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* $f(n) = x_n$*.*

Definición 3.55 ($\wp$). *Sean* (X, q) *un espacio de convergencia generalizada y* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* (X, q)*; un punto* $x \in X$ *es un límite de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si existe un morfismo* $f : (\hat{\mathbb{N}}, \hat{\mathfrak{q}}) \to (X, q)$ *de* $\mathfrak{GConv}$ *tal que* $f|_{\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $f(\omega) = x$*.*

Proposición 3.56 ($\wp$). *Sea* (X, q) *un espacio de convergencia generalizada y* $(x_n = f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión con límite* x*; si* $z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *es una función tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$*,* $n < z(n)$*, entonces* x *es límite de* $(x_{z(n)} = f(z(n)))_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Demostración. Para $\langle [n, \omega] \rangle_{n\in\mathbb{N}}$[5] que converge a ω en $(\hat{\mathbb{N}}, \hat{\mathfrak{q}})$, tenemos que para cada $B \in f(\langle [n, \omega] \rangle_{n\in\mathbb{N}})$, existe $[n, \omega]$ tal que $f([n, \omega]) \subset B$, así

$$f \circ z([n, \omega]) \subset f([z(n), \omega] \subset f([n, \omega]) \subset B,$$

de donde $B \in f \circ z(\langle [n, \omega] \rangle_{n\in\mathbb{N}})$, así $f(\langle [n, \omega] \rangle_{n\in\mathbb{N}}) \subset f \circ z(\langle [n, \omega] \rangle_{n\in\mathbb{N}})$, y ya que f es morfismo en $\mathfrak{GConv}$, $f(\langle [n, \omega] \rangle_{n\in\mathbb{N}}) \to x$ de donde $f \circ z(\langle [n, \omega] \rangle_{n\in\mathbb{N}}) \to x$. □

Definición 3.57 ($\wp$). *Sea* (X, q) *un espacio de convergencia generalizada, para* $M \subset X$ *la* $\mathfrak{s}$*-clausura,* $\mathfrak{s}_q(M)$*, de* M *en* (X, q)*, contiene todos los puntos* $x \in X$ *tales que existe una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* $x_n \in M$ *y* x *es un punto límite de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Proposición 3.58 ($\wp$). *El operador* $\mathfrak{s} = \{\mathfrak{s}_q\}_{(X,q)\in\mathfrak{GConv}}$ *es un operador límite inferior en* $\mathfrak{GConv}$ *con respecto de* k*.*

[5] $\langle [n, \omega] \rangle_{n\in\mathbb{N}} := \{A \subset \hat{\mathbb{N}} | \exists (n \in \hat{\mathbb{N}})[n, \omega] \subset A\}$

Demostración. 1 Sea $M \subset X$, para $x \in M$, la sucesión constante $f(n) = x$ tiene a x como límite, de donde $M \subset \mathfrak{s}_q(M)$, para $x \in \mathfrak{s}_q(M)$, el filtro $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$[6] converge a x y $M \in \langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, de donde $x \in k_q(M)$.

2 Sea $x \in \mathfrak{s}_q(M \cup N)$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión tal que tiene a x por límite y $x_n \in M \cup N$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que x no es un elemento de $\mathfrak{s}_q(M)$ ni de $\mathfrak{s}_q(N)$.

a) Sin perdida de generalidad, supongamos que $|f^{-1}(M)| < \omega$, tenemos que $|f^{-1}(N)| = \omega$, sea $m = maxf^{-1}(M) + 1$, para $g : (\hat{\mathbb{N}}, \hat{\mathfrak{q}}) \to (X, q)$ definida por $g(n) = f(n+m)$ y $g(\omega) = x$, veamos que $(a_n = g(n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a x.

   Para $n \in \mathbb{N}$, ya que $\dot{n} \to n$, tenemos que $g(\dot{n}) = f(\dot{n+m}) \to f(n+m) = g(n)$. Para $G \to \omega$, tenemos que $\langle [n, \omega) \rangle_{n\in\mathbb{N}} \subset G$, de donde $f(\langle [n+m, \omega) \rangle_{n\in\mathbb{N}}) = g(\langle [n, \omega) \rangle_{n\in\mathbb{N}}) \subset g(G)$, con $\langle [n + m, \omega) \rangle_{n\in\mathbb{N}} \to \omega$ y ya que f es morfismo, $f(\langle [n+m, \omega) \rangle_{n\in\mathbb{N}}) \to x$, esto es g es morfismo en $\mathfrak{GConv}$, de donde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene a x como punto límite, y así $x \in \mathfrak{s}_q(N)$.

b) Si $|f^{-1}(N)| = \omega$ y $|f^{-1}(M)| = \omega$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $n_N \in \mathbb{N}$ tal que $n < n_N$ y $f(n_N) \in N$, sea $z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $z(n) = (n_M)_N$, tenemos que $\{a_n = f(z(n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en N tal que tiene a x por límite y así $x \in \mathfrak{s}_q(N)$.

De donde $x \in \mathfrak{s}_q(M) \cup \mathfrak{s}_q(N)$.

3) Sea $f : (X, q) \to (Y, r)$ un morfismo en $\mathfrak{GConv}$ y sea $y \in f(\mathfrak{s}_q(M))$; exite una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $x_n \in M$ y límite x tal que $f(x) = y$, de donde $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $f(M)$ con límite y, de donde $y \in \mathfrak{s}_r(f(M))$.

□

Proposición 3.59 ($\wp$)**.** *El operador secuencial* $\mathfrak{s}$ *y el operador Katětov* k *coinciden en* $(\hat{\mathbb{N}}, \hat{\mathfrak{q}})$.

Demostración. Notar que:

$$k_{\hat{\mathfrak{q}}}(A) = \begin{cases} A, & \text{si } A \text{ es acotado.} \\ \\ A \cup \{\omega\}, & \text{si } A \text{ no es acotado.} \end{cases}$$

Ya que $\mathfrak{s}$ es un operador límite inferior respecto a k, $\mathfrak{s}_{\hat{\mathfrak{q}}}(A) \subset k_{\hat{\mathfrak{q}}}(A)$. Sea $x \in k_{\hat{\mathfrak{q}}}(A)$; si $x = n \in \mathbb{N}$, con $\mathcal{F} \xrightarrow{\hat{\mathfrak{q}}} n$, tenemos que $\mathcal{F} = \dot{n}$, de donde $A \in \dot{n}$ y

[6] $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}} := \{A \subset X | \exists (n \in \mathbb{N})(\forall s \geq n, x_s \in A)\}$

$n \in \mathfrak{s}_{\hat{\mathfrak{q}}}(A)$. Si $x = \omega$, para $\mathcal{F} \xrightarrow{\hat{\mathfrak{q}}} x$, tenemos que $\mathcal{F} = \langle [n, \omega] \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, así para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in A \cap [n, \omega]$. Veamos que x es un límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: para $\dot{n} \xrightarrow{\hat{\mathfrak{q}}} n$, tenemos que $f(\dot{n}) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{q}}} f(n)$, pues $\dot{f(n)} \subset f(\dot{n})$. Si $G \xrightarrow{\hat{\mathfrak{q}}} \omega$, tenemos que $\langle [n, \omega] \rangle_{n\in\mathbb{N}} \subset G$; además, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$f([n, \omega]]) \subset [n, \omega]$$

así, $\langle [n, \omega] \rangle_{n\in\mathbb{N}} \subset f(G)$, de donde $f(G) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{q}}} \omega$. □

$$\mathfrak{r} : \mathbb{N} \to P(F(\mathbb{N}))$$

$$\mathfrak{r}(n) := \begin{cases} \{\dot{n}\}^{\uparrow} \text{ si } n \in \mathbb{N} \\ \\ \langle [n, \omega) \rangle_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} \cup \{\dot{\omega}\} \text{ si } n = \omega, \end{cases}$$

Observación 3.60 ($\wp$)**.** *Por la Proposición 3.59 tenemos que* $(\hat{\mathbb{N}}, \hat{\mathfrak{q}})$ *es un objeto de* $\mathcal{U}(\mathfrak{s})$*.*

Capítulo 4

Preguntas

En la categoría topológica $\mathfrak{Top}$, tenemos que el operador Kuratowski es un operador clausura aditivo, idempotente y definido por pozos finales; así mismo el operador clausura Katětov es un operador clausura aditivo y definido por pozos finales en la categoría $\mathfrak{GConv}$; estos operadores nos permiten asignar subcategorías bicorreflexivas a sus operadores límite inferior y viceversa en sus respectivas categorías.

Pregunta 4.1. *En general, para una categoría topológica (χ, F), ¿Es posible definir un operador clausura categorico sobre los subobjetos iniciales con propiedades que definan a toda la categoría χ y así defina las estructuras iniciales y correflexiones?*

En la Sección 3.3 se genera un método para definir, en cada categoría topológica, un operador cerradura categórico a partir de un operador conjuntista y levantamientos iniciales, pero no arroja información sobre si hay un operador clausura mediante el cual la estructura de los correflectores pueda ser descrita mediante dicho operador, de forma que se pueda imitar la Proposición 0.4; una forma sería lograr poner la topología en $X_{\mathcal{U}}$ en términos de una topología inicial o final respecto a una fuente o un pozo específicos.

Para toda categoría topológica (χ, F), para $\mathcal{M} = Mono(\mathcal{S}et)$ y K_0 un operador clausura aditivo en χ, la clase de subobjetos $\mathcal{M}_{\overline{F}}$ ofrece la estructura adecuada para hacer corresponder a cada subcategoría bicorreflexiva $\mathcal{U}$ de χ un operador límite inferior (ver Teorema 3.16). Es de principal importancia hacer notar que la clase $\mathcal{M}_{\overline{F}}$ está caracterizada como la clase ortogonal a la clase de morfismos proyectivos respecto del objeto singular (ver Corolario 2.17); esto permite mostrar la aditividad del operador $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.

Pregunta 4.2. *¿ Existe otra clase de subobjetos en χ para la cual las subcategorías bicorreflexivas de χ generan operadores límite inferior?*

Las asignaciones que Herrlich presenta en el Teorema 0.5 nos presentan una asignación biyectiva entre los operadores límite inferior idempotentes respecto al operador Kuratowski y las subcategorías correflexivas en $\mathfrak{Top}$, no triviales; para los operadores definidos en este trabajo, Definición 3.8 y Teorema 3.16, nos preguntamos

Pregunta 4.3. *¿Es posible generar una correspondencia entre operadores entre los distintos subobjetos seleccionados $\mathcal{M}_F$ y $\mathcal{M}_{\overline{F}}$ que permita componer los operadores $\mathcal{U}$ y $\mathcal{L}$ de forma que se generalice el Teorema 0.5?*

Bibliografía

[1] Adámek J., Herrlich H., Strecker G. E. "Abstract and Concrete Categories : The Joy of Cats", Dover Publications, [Wiley, 1990], (2004).

[2] Angoa J., Contreras A., González J. "Induced (E,M)-structures on Topological Categories", *Revista Integración, Temas de Matemáticas,* Aceptado (2021).

[3] Baron S., "Reflectors as Compositions of Epi-reflectors", *Transactions of the American Mathematical Society, Vol 136* (1969).

[4] Bousfield A.K., "Constructions of Factorization Systems in Categories", *Journal of Pure and Applied Algebra Vol. 9* (1977).

[5] Castellini G., "Connectedness with respect to a Closure Operator", *Applied Categorical Structures*, 9, (2001), 285–302.

[6] Choquet G., "Convergences", *Ann. Univ.Grenoble Sect. Sci. Math. Phys. 23*, (1947-1948), 57-112.

[7] Clementino M. M., "On Connectedness via Closure Operators",*Applied Categorical Structures*, 9, (2001), 539–556.

[8] Dikranjan D., Tholen W., *Categorical Structure of Closure Operators. With Applications to Topology, Algebra and Discrete Mathematics.* Mathematics and its Applications, 346, Kluwer, Dordrecht, 1995.

[9] Dikranjan D., Giuli E. "Closure Operators I" *Topology and its Applications*, 27, (1987), 129–143.

[10] Dolecki S., Mynard F. *Convergence Foundations Of Topology.* New Jersey: World Scientific Publishing Company, 2016.

[11] Fischer H. R., "Limesräume", *Math. Ann 137* (1959) 269-303.

[12] Fischer H. R., "On equicontinuity and continuous convergence", *Math. Ann 159* (1965) 94-104.

[13] Freyd P., "Aspects of Topoi", *Bull. Austral. Math. Soc.* , Vol.7, (1972), 1–76.

[14] Guili E., Tholen W., "Openness with Respect to a Closure Operator", *Applied Categorical Structures*, 8, (2000), 487–502.

[15] Herrlich H., "Limit-operators and topological coreflections", *American Mathematical Society* 146, (1969), 203–2010.

[16] Herrlich H., "Topological Functors", *General Topology and its Applications* 4, (1974), 125–142.

[17] Herrlich H., Strecker G.E., "Coreflective Subcategories", *American Mathematical Society* Vol 157, (1971).

[18] Isbell J. R., "Subobjects, adequacy, completeness and categories of algebras ", *Rozprawy Matematyczne 36* , (1964).

[19] Kelly G. M., "Monomorphism, epimorphisms, and pull-backs", *Journ. Aust. Math. Soc. 9* (1969).

[20] Kennison J. F., "Full Reflective subcategories and Generalized Covering Spaces", *Illinois J. Math. 12* (1968).

[21] Kennison J.F., "Reflective functors in general topology and elsewhere", *Trans. Amer. Math. Soc. 118* (1965), 303–315.

[22] Kent D. C. "Convergence functions and their related topologies", *Fund. Math. 54* (1964) 125-133.

[23] Kowalsky H., "Limesräume und Komplettierung", *Math. Nachr, 12* (1954) 301-340.

[24] Mac Lane S., "Categories for the Working Mathematician" *Graduate texts in mathematics, Springer*, (1971).

[25] Mac Lane S., Moerdik I., "Sheaves in Geometry and Logic, A First Introduction to Topos Theory" *Springer New York*, (1992).

[26] Nakagawa R., "Factorization Structure and Subcategories of the Category of Topological Spaces" *J. Austral Math. Soc. Ser. A 21* , (1976).

[27] Nakagawa R., *Topics in General Topology.* Chapter 14, Categorical Topology, Eds. Kiiti Morita and Jun-iti Nagata, 563–623, 1989.

[28] Nel L.D., "Initially structured categories and cartesian closedness" *Canad. J. Math.27* (1975) 1361-1377.

[29] Salicrup G. "Introducción a la topología" *Sociedad Matemática Mexicana* (1997).

Índice alfabético

Índice de símbolos