



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

**PROPIEDADES REVERSIBLES DE WHITNEY: CONTINUOS SIN PUNTOS
DE CORTE**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA

IDALIA GUADALUPE BAUTISTA CALLEJAS

ASESORES DE TESIS

DR. MAURICIO ESTEBAN CHACÓN TIRADO
DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE

PUEBLA, PUE.

JULIO DE 2020



DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el(la) C:

IDALIA GUADALUPE BAUTISTA CALLEJAS

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 30 de junio de 2020, con la tesis titulada:

Propiedades reversibles de Whitney: Continuos sin puntos de corte

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 1 de julio de 2020

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO
COORDINADORA DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.



Dedicado

A mis Padres:
Raymundo Bautista Chavarria
Gregoria Callejas Pérez

A mis hermanos:
Karina Zuzely Bautista Callejas
Roberto de Jesús Bautista Callejas

A mi sobrino:
Matín Emanuel Mejía Bautista

A mi novio:
Jorge Aguilar Guzmán

Agradecimientos

A menudo uno da por hecho las mismas cosas que más merecen gratitud, es por eso que en este espacio quiero agradecer a todos aquellos que me acompañaron en este largo camino.

Primeramente, quiero agradecer a Dios por darme la sabiduría y el entendimiento necesarios para poder llegar hasta este momento.

A ti mamá, porque cuando las cosas se ponían difíciles siempre tenías las palabras correctas que me hacían recuperar el rumbo, por todo lo que hiciste y que serías capaz de hacer si te lo pidiera. Sin ti no sería quien soy actualmente. A ti papá, porque sé que has hecho todo lo que está a tu alcance para darme siempre lo mejor, por ser un gran ejemplo a seguir y por sentirte orgulloso de todos mis logros. Aunque hoy soy mujer, siempre seré tu niña.

Agradezco a mis hermanos, que siempre serán una parte muy importante en mi vida, gracias por confiar en mí, por su apoyo incondicional en todo momento, por compartir conmigo grandes momentos de diversión y de tristeza también, no duden que como ahora están para mí, yo siempre estaré para ustedes.

A mis directores de tesis el Dr. Raúl Escobedo Conde y el Dr. Mauricio Esteban Chacón Tirado, por confiar en mí y en mi capacidad para desarrollar este trabajo, por toda su paciencia y sobre todo por transmitirme muchos de sus conocimientos.

A mis sinodales la Dra. María de Jesús López Toriz, la Dra. Paula Ivon Vidal Escobar, el Dr. David Herrera Carrasco y el Dr. Fernando Macías Romero, por tomarse el tiempo de leer mi tesis y por sus aportes a ésta.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el apoyo económico brindado para la realización de mis estudios de maestría.

Introducción

La presente tesis pertenece a la rama de la Matemática conocida como Topología, específicamente al área llamada Teoría de Continuos. Un continuo es un espacio métrico compacto y conexo con más de un punto. Dado un continuo X se consideran familias de subconjuntos de X que poseen alguna propiedad específica, a estas familias se les llama *hiperespacios*. Los hiperespacios que presentamos en este trabajo son el hiperespacio 2^X que consiste de los subconjuntos no vacíos y cerrados de X y el hiperespacio $C(X)$ que consiste de los elementos de 2^X que son conexos, a éste último se le conoce como el hiperespacio de los subcontinuos de X . Los hiperespacios son considerados con la *métrica de Hausdorff*.

A principios de la década de 1930, Hassler Whitney construyó tipos especiales de funciones en espacios de conjuntos con el propósito de estudiar familias de curvas, [8]. En 1942, J.L. Kelley hizo un uso significativo de las funciones de Whitney en el estudio de hiperespacios, [3], consecuentemente a comienzos de la década de 1970 numerosas personas investigaron exhaustivamente y sistemáticamente las conexiones entre las funciones de Whitney y la estructura de los hiperespacios.

Actualmente las funciones de Whitney establecen una manera de medir el tamaño de los elementos de 2^X y son una herramienta muy útil para estudiar la estructura para los hiperespacios.

En 1978, Sam B. Nadler dedica el capítulo XIV de su libro *Hyperspaces of sets* al estudio de las funciones de Whitney y de las propiedades de Whitney, más aún, en la sección E de ese mismo capítulo empieza con el estudio de las propiedades reversibles de Whitney. Dos años más tarde, en 1980, Nadler publica un artículo dedicado completamente a las propiedades de Whitney, [7].

Este trabajo de tesis está inspirado en el artículo de Eiichi Matsushashi titulado *Having cut-points is not a Whitney Reversible Property*, [4]. En los continuos existen varios tipos de puntos y en este trabajo solamente nos enfocaremos en tres, a saber, los puntos separantes, orilla y de corte, ya que estos puntos están estrechamente relacionados y en ciertos espacios son equivalentes. Daremos algunas propiedades que involucran a estos puntos y haremos un estudio para determinar cuáles son y cuáles no son propiedades de Whitney, reversibles, fuerte reversibles y secuencial fuerte reversibles de Whitney. En caso de no ser, se darán ejemplos sencillos donde se exhiba que no se cumple la propiedad.

En el primer capítulo se presentan algunas nociones generales y se da una introducción a la teoría de los continuos e hiperespacios. Se definen los tipos de puntos con los que estaremos trabajando y la relación que hay entre ellos.

El segundo capítulo está dedicado a introducir el concepto de función de Whitney y probar que existen para el hiperespacio de los subcontinuos de un continuo. También se presenta el concepto de nivel de Whitney y se prueba que éste conjunto es un continuo. Por último se define lo que es una Propiedad de Whitney, reversible, fuerte reversible y secuencial fuerte reversible de Whitney.

En el tercer capítulo se hace un estudio de las diferentes propiedades que involucran los tipos de puntos mencionados en el capítulo 2, se muestran cuáles de ellas son propiedades de Whitney,

II

reversibles, fuerte reversibles y secuencial fuerte reversibles de Whitney y para las que no lo son, se dan diferentes ejemplos

Índice general

Introducción	I
1. Preliminares	1
1.1. Espacios de descomposición	3
1.2. Funciones monótonas y atómicas	4
1.3. Tipos de puntos en un continuo	5
2. Funciones de Whitney	9
2.1. Niveles de Whitney	10
2.2. Arcos ordenados	11
2.3. Propiedades de Whitney y reversibles de Whitney	13
3. Puntos en un continuo y su relación con las propiedades de Whitney	15
Referencias	28

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Definición. Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Un **subcontinuo** de un continuo X es un continuo que es un subconjunto de X .

Para un continuo X los hiperespacios que se consideran en este trabajo son los siguientes:

$$2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$$

Como podemos observar, cada elemento de $C(X)$ es un subcontinuo de X , y además $C(X)$ es subconjunto de 2^X por lo que es suficiente dotar a 2^X de una métrica. La métrica es conocida como la métrica de Hausdorff.

1.2 Definición. Sea X un continuo con métrica d . Dados $\varepsilon > 0$, $x \in X$ y $A \in 2^X$, se definen:

- (1) La **bola abierta** de radio ε y centro en x como:

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

- (2) La **Nube** de radio ε y centro en A como:

$$N(A, \varepsilon) = \{q \in X : \text{existe } x \in A \text{ tal que } d(x, q) < \varepsilon\}$$

- (3) Dados $A, B \in 2^X$, se define la **métrica de Hausdorff** de A a B como la función $H : 2^X \times 2^X \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(B, \varepsilon) \text{ y } B \subseteq N(A, \varepsilon)\}$$

Observemos que si X es un continuo y $A, B \in X$, tales que $A \subseteq B$, entonces se tiene que $A \subseteq N(B, \varepsilon)$.

1.3 Teorema. Sean X un continuo, $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$.

- (i) Si U es un abierto en X tal que $A \subseteq U$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $N(A, \delta) \subseteq U$.
(ii) Para cualquier $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon$ se tiene que $N(A, \delta) \subseteq N(A, \varepsilon)$.

Demostración. Sean X un continuo y $\varepsilon > 0$.

- (i) Sean $A \in 2^X$ y U un abierto en X tal que $A \subseteq U$. Note que A y $X \setminus U$ son cerrados en X y así compactos. Además como $A \cap (X \setminus U) = \emptyset$, se tiene que $d(A, X \setminus U) > 0$. Se propone que $\delta = \frac{d(A, X \setminus U)}{2}$. Si $x \in N(A, \delta)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \delta$. Así, $x \in B(a, \delta)$. Suponga que $x \notin U$, así que $x \in X \setminus U$; luego $d(A, X \setminus U) \leq d(a, x)$. Así $d(A, X \setminus U) < \delta$, esto es una contradicción. Por lo tanto, $x \in U$.
- (ii) Si $x \in N(\delta, A)$, existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \delta$, luego $d(a, x) < \varepsilon$, es decir, $x \in N(A, \varepsilon)$. Por lo tanto, $N(A, \delta) \subseteq N(A, \varepsilon)$.

□

1.4 Teorema. [2, Teorema 2.2] La función H es una métrica en 2^X

1.5 Definición. Dado un subconjunto A de un continuo X . Consideremos las siguientes subcolecciones del hiperespacio 2^X .

$$\Lambda(A) = \{B \in 2^X : B \subseteq A\},$$

$$\Gamma(A) = \{B \in 2^X : A \cap B \neq \emptyset\}.$$

A las clases $\Lambda(A)$ y $\Gamma(A)$ les corresponden propiedades básicas como las siguientes.

1.6 Teorema. Sean X un continuo y A un subconjunto de X .

- (1) Si A es un abierto en X , entonces $\Lambda(A)$ y $\Gamma(A)$ son abiertos en 2^X .
- (2) Si A es un cerrado en X , entonces $\Lambda(A)$ y $\Gamma(A)$ son cerrados en 2^X .

Demostración. (1) Sean $B \in \Lambda(A)$ y $x \in B \cap A$, como A es abierto en X , existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_X(x, \varepsilon) \subseteq A$. A continuación se muestra que $B_{2^X}(B, \varepsilon) \subseteq \Lambda(A)$. Sea $C \in B_{2^X}(B, \varepsilon)$. Luego $H(B, C) < \varepsilon$, se tiene que $B \subseteq N(C, \varepsilon)$, luego existe $y \in C$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$, así, $y \in B_X(x, \varepsilon) \subseteq A$. Luego, $y \in C \cap A$ así, $C \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $C \in \Lambda(A)$. Así, $\Lambda(A)$ es abierto en 2^X .

Se prueba a continuación que $\Gamma(A)$ es abierto en 2^X . Sea $B \in \Gamma(A)$. Por el Teorema 1.3 inciso (i), existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(B, \varepsilon) \subseteq A$. Se probará que $B_{2^X}(B, \varepsilon) \subseteq \Gamma(A)$. Sea $C \in B_{2^X}(B, \varepsilon)$, entonces $H(B, C) < \varepsilon$. Se tiene que $C \subseteq N(B, \varepsilon)$. Luego $C \subseteq A$. Así $C \in \Gamma(A)$. Por lo tanto, para cada $B \in \Gamma(A)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{2^X}(B, \varepsilon) \subseteq \Gamma(A)$, es decir, $\Gamma(A)$ es abierto en 2^X .

- (2) Primero note que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- (a) $B \in \Gamma(A)$,
 (b) $B \cap (X \setminus A) = \emptyset$,
 (c) $B \notin \Lambda(X \setminus A)$,
 (d) $B \in 2^X \setminus \Lambda(X \setminus A)$.

De estas condiciones se obtiene la igualdad $\Gamma(A) = 2^X \setminus \Lambda(X \setminus A)$. Como A es cerrado en X , se tiene que $X \setminus A$ es abierto en X y por (1) se tiene que $\Lambda(X \setminus A)$ es abierto en 2^X y así, $\Gamma(A)$ es cerrado en 2^X .

Se ve a continuación que $\Lambda(A)$ es cerrado. Para esto se probará que $2^X = \Lambda(A) \cup \Gamma(X \setminus A)$. Sea $B \in 2^X$, luego $B \cap A = \emptyset$ o $B \cap A \neq \emptyset$. Si $B \cap A = \emptyset$, entonces $B \subseteq (X \setminus A)$. Luego, $B \in \Gamma(X \setminus A)$. Si $B \cap A \neq \emptyset$, entonces $B \in \Lambda(A)$. Así $2^X \subseteq \Lambda(A) \cup \Gamma(X \setminus A)$. La otra contención es trivial. Como $X \setminus A$ es abierto en X , por (1) de este teorema $\Gamma(X \setminus A)$ es abierto en 2^X y como $\Lambda(A) = 2^X \setminus \Gamma(X \setminus A)$, se sigue que $\Lambda(A)$ es cerrado en 2^X .

□

1.7 Proposición. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y abierta, entre los continuos X y Y , entonces $g : 2^Y \rightarrow 2^X$ dada por $g(A) = f^{-1}(A)$ es continua, para cada $A \in 2^Y$.

Demostración. Sea U abierto en X . Por demostrar que $g^{-1}(\Gamma(U))$ y $g^{-1}(\Lambda(U))$ son conjuntos abiertos en 2^Y .

Primero veamos que $g^{-1}(\Gamma(U))$ es abierto.

Sea $A \in g^{-1}(\Gamma(U))$, entonces $g(A) \in \Gamma(U)$, por lo que $f^{-1}(A) \in \Gamma(U)$, es decir, $f^{-1}(A) \subseteq U$. Denotemos $V = Y \setminus f(X \setminus U)$. Notemos que V es abierto en Y , pues como f es cerrada por ser función entre continuos, se tiene que $f(X \setminus U)$ es cerrado en Y , porque $X \setminus U$ es cerrado.

Afirmamos que $A \in \Gamma(V) \subseteq g^{-1}(\Gamma(U))$. Notemos que $f^{-1}(A) \subseteq U$, entonces $f(X \setminus U) \cap A = \emptyset$, así $A \subseteq V$, por lo que $A \in \Gamma(V)$.

Ahora, sea $B \in \Gamma(V)$, entonces $B \subseteq V$, por lo que $B \cap f(X \setminus U) = \emptyset$, así $f^{-1}(B) \subseteq U$, de ahí que $f^{-1}(B) \in \Gamma(U)$, por lo tanto, $g(B) \in \Gamma(U)$, luego $B \in g^{-1}(\Gamma(U))$.

Así $\Gamma(V)$ es un abierto en 2^X tal que $A \in \Gamma(V) \subseteq g^{-1}(\Gamma(U))$. Por lo tanto, $g^{-1}(\Gamma(U))$ es abierto en 2^X .

Para demostrar que $g^{-1}(\Lambda(U))$ es abierto, sea $A \in g^{-1}(\Lambda(U))$, entonces $g(A) \in \Lambda(U)$, es decir, $f^{-1}(A) \cap U \neq \emptyset$. Denotemos $V = f(U)$, observemos que V es abierto en Y ya que f es abierta. Afirmamos que $A \in \Lambda(V) \subseteq g^{-1}(\Lambda(U))$.

Sea $a \in f^{-1}(A) \cap U$, entonces $f(a) \in A$ y $a \in U$, así $A \cap f(U) \neq \emptyset$, es decir, $A \cap V \neq \emptyset$, por lo que $A \in \Lambda(V)$.

Por otro lado, sea $B \in \Lambda(V)$, entonces $B \cap V \neq \emptyset$, es decir, $B \cap f(U) \neq \emptyset$, por lo que existe $b \in B \cap f(U)$, así $b \in B$ y existe $u \in U$ tal que $f(u) = b$, por lo que $f(u) \in B$, luego $u \in f^{-1}(B)$, así $u \in U \cap f^{-1}(B)$, por lo tanto, $f^{-1}(B) \cap U \neq \emptyset$, es decir $g(B) \cap U \neq \emptyset$, por lo cual $g(B) \in \Lambda(U)$, lo cual implica que $B \in g^{-1}(\Lambda(U))$.

Así, $\Lambda(V)$ es un abierto en 2^X tal que $A \in \Lambda(V) \subseteq g^{-1}(\Lambda(U))$, por lo tanto, $g^{-1}(\Lambda(U))$ es abierto en 2^X .

Como la unión de los conjuntos $\Gamma(U)$ y $\Lambda(U)$ forman una subbase para la topología de Vietoris en 2^X , se tiene que g es una función continua. $\square$

El siguiente teorema es muy conocido en la teoría de continuos, en este trabajo no se dará una demostración, pero puede ser consultada en [5].

1.8 Teorema (Golpes en la frontera). Sean X un continuo y U un subconjunto propio de X abierto y no vacío. Si K es una componente de $Cl_X(U)$, entonces $K \cap fr_X(U) \neq \emptyset$.

Este resultado nos será útil para demostrar el siguiente lema.

1.9 Lema. Sean X un continuo y $B \subset X$ un subcontinuo propio. Si V es un abierto en X tal que $B \subseteq V$, entonces existe un subcontinuo K de X tal que $B \subsetneq K \subsetneq V$.

Demostración. Sea $p \in V \setminus B$. Note que X es un espacio normal por ser métrico y compacto, luego existe U abierto en X tal que $B \subsetneq U \subseteq Cl_X(U) \subseteq V \setminus \{p\} \subsetneq V$. Sea K la componente conexa de $Cl_X(U)$ que contiene a B . Obsérvese que K es un continuo, se sigue por Teorema 1.8 que $K \cap fr_X(U) \neq \emptyset$. Como $B \cap fr_X(U) = \emptyset$ ya que $B \subseteq Cl_X(U)$, se tiene que $B \subsetneq K \subsetneq V$. $\square$

1.10 Teorema. Sean X un continuo y A, B subcontinuos de X tales que $A \subsetneq B$. Entonces existe un subcontinuo C de X tal que $A \subsetneq C \subsetneq B$.

Demostración. Consideremos un punto $p \in B \setminus A$. Como A es un subcontinuo propio de B y $B \setminus \{p\}$ es un abierto de B que contiene a A , por el Lema 1.9 existe un subcontinuo C de B y así de X tal que $A \subsetneq C \subsetneq B$. $\square$

1.1. Espacios de descomposición

1.11 Definición. Sea X un espacio topológico, no vacío. Sea $\mathcal{D}$ una colección de subconjuntos de X , no vacíos, mutuamente disjuntos tales que $\bigcup \mathcal{D} = X$. Sea $\tau(\mathcal{D}) = \{U \subseteq \mathcal{D} : \bigcup U \text{ es un abierto en } X\}$.

El espacio $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es llamado **espacio de descomposición de X** .

Obsérvese que $\tau(\mathcal{D})$ es una topología y es llamada la topología de descomposición.

1.12 Definición. Sean $(X, \tau), (Y, \eta)$ espacios topológicos. Una función suprayectiva $f : X \rightarrow Y$ es llamada **función cociente** si η es la topología más grande para Y tal que f es continua.

La función $p : X \rightarrow \mathcal{D}$ que manda a un punto x al único miembro de $\mathcal{D}$ que contiene a x es una función cociente. Notemos que p es una función suprayectiva.

1.13 Ejemplo. (El espacio X/A). Sea X un espacio topológico, y sea A un subconjunto cerrado y no vacío de X . Sea $\mathcal{D}_A$ la partición de X dada por

$$\mathcal{D}_A = \{A\} \cup \{\{x\} : x \in X \setminus A\}.$$

Denotamos el espacio de descomposición como X/A . Intuitivamente pensamos en X/A como el espacio obtenido de X al reducir A a un punto. Si X es un continuo, entonces X/A es un continuo.

1.14 Proposición (Lema de la transgresión). Sean X, Y, Z espacios topológicos. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función cociente y sea $g : X \rightarrow Z$ una función continua. Si g es una función constante en cada fibra $f^{-1}(y)$, para cada $y \in Y$, entonces existe una función continua $l : Y \rightarrow Z$ tal que $l \circ f = g$.

Demostración. Definimos $l : Y \rightarrow Z$ como sigue: para cada punto $y \in Y$ fijamos un punto $x \in f^{-1}(y)$ y definimos $l(y) = g(x)$.

Obsérvese que para cada $y \in Y$, $l(y)$ está bien definida ya que g es constante en el conjunto $f^{-1}(y)$. Por otra parte observe que para todo $x \in X$, $l(f(x)) = g(x)$, es decir $l \circ f = g$.

Para ver que l es continua, sea U abierto en Z , se tiene que $(l \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(l^{-1}(U))$ es abierto en X , como f es una función cociente, entonces $l^{-1}(U)$ es abierto en Y . Por lo tanto, l es continua. $\square$

1.2. Funciones monótonas y atómicas

1.15 Definición. Una función continua y suprayectiva entre espacios topológicos, $f : X \rightarrow Y$, es **monótona** si, para cada punto $y \in Y$, se tiene que $f^{-1}(y)$ es conexo.

1.16 Teorema. Para una función continua y suprayectiva entre continuos, $f : X \rightarrow Y$, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) f es monótona;
- (2) Para cada subconjunto conexo, C de Y , $f^{-1}(C)$ es conexo; y
- (3) Para cada subcontinuo, C de Y , $f^{-1}(C)$ es un subcontinuo de X .

1.17 Definición. Una función $f : X \rightarrow Y$ entre continuos es una función **atómica** si $f^{-1}(f(A)) = A$, para cada $A \in C(X)$ tal que $f(A)$ no es degenerado.

1.18 Definición. Un subcontinuo T de un continuo X es **terminal** si cada subcontinuo de X el cual intersecta a T y su complemento debe contener a T .

1.19 Teorema. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces f es atómica si y sólo si, para cada $y \in Y$ $f^{-1}(y)$ es un subcontinuo terminal en X .

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que f es atómica. Sea $y \in Y$. Por demostrar que $f^{-1}(y)$ es un subcontinuo terminal.

Primero notemos que $f^{-1}(y)$ es cerrado no vacío, pues f es continua.

Ahora veamos que $f^{-1}(y)$ es conexo. Supongamos que $f^{-1}(y) = M \cup N$, donde M y N son subconjuntos de X cerrados, no vacíos y ajenos.

Como X es normal, existen U y V abiertos, ajenos en X , tales que $M \subseteq U$ y $N \subseteq V$. Sean $x \in M$ y K la componente de $\overline{U}$ tales que $x \in K$. Por el teorema 1.8 $K \cap fr(\overline{U}) \neq \emptyset$. Sea $z \in K \cap fr(\overline{U})$, notemos que $f(x) = y$. Supongamos que $f(z) = y$, entonces $z \in f^{-1}(y) = M \cup N$. Si $z \in M$, entonces $z \in M \cap fr(\overline{U})$, es decir, para todo W abierto que tenga a z se tiene que $W \cap \overline{U} \neq \emptyset$ y $W \cap (X \setminus \overline{U}) \neq \emptyset$. En particular, $U \cap \overline{U} \neq \emptyset$ y $U \cap (X \setminus \overline{U}) \neq \emptyset$, esto último es una contradicción. Ahora si $z \in N$, entonces $z \in N \cap fr(\overline{U})$, es decir, para todo W abierto en X que contenga a z , se tiene que $W \cap \overline{U} \neq \emptyset$ y $W \cap (X \setminus \overline{U}) \neq \emptyset$. En particular esto se cumple para V , lo cual es una contradicción pues $V \cap \overline{U} = \emptyset$. Por lo tanto, $f(z) \neq f(x)$, así $f(K)$ es no degenerado y por hipótesis se tiene que $f^{-1}(f(K)) = K$. Como $x \in K$, entonces $f(x) = y \in f(K)$, luego $y \in f(K)$, entonces $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(f(K)) = K$, es decir, $f^{-1}(y) = M \cup N \subseteq K \subseteq \overline{U}$, por lo que $N \subseteq K \subseteq \overline{U}$, entonces $N = K \cap N = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Esto demuestra que $f^{-1}(y)$ es conexo y por lo tanto un subcontinuo de X .

Ahora veamos que $f^{-1}(y)$ es terminal en X . Sea $W \in C(X)$ tal que $W \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$ y $W \cap (X \setminus f^{-1}(y)) \neq \emptyset$. Por demostrar que $f^{-1}(y) \subseteq W$.

Sea $x \in W \cap f^{-1}(y)$, entonces $f(x) \in f(W)$ y $f(x) = y$, por lo que $y \in f(W)$. Por otra parte, sea $z \in W \cap (X \setminus f^{-1}(y))$, entonces $f(z) \in f(W)$ y $f(z) \neq y$, por lo que $f(W)$ es no degenerado, luego $f^{-1}(f(W)) = W$, ya que f es atómica y como $y \in f(W)$, entonces $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(f(W)) = W$, así $f^{-1}(y) \subseteq W$. $\Leftarrow$ Supongamos que para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es un subcontinuo terminal. Por demostrar que f es atómica.

Sea $K \in C(X)$, tal que $f(K)$ es no degenerado. Por demostrar $f^{-1}(f(K)) = K$. Como f es suprayectiva, se tiene que $K \subseteq f^{-1}(f(K))$. Ahora, sea $x \in f^{-1}(f(K))$, entonces $f(x) \in f(K)$, por lo que existe $z \in K$ tal que $f(x) = f(z)$, luego $z \in f^{-1}(f(K))$, y como $f(K)$ es no degenerado existe $y \in K$ tal que $f(y) \neq f(x)$. Así, $z \in K \cap f^{-1}(f(K))$ y $y \in K \cap (X \setminus f^{-1}(f(K)))$, y por ser $f^{-1}(f(K))$ es terminal en X , entonces $f^{-1}(f(K)) \subseteq K$. Por lo tanto, $f^{-1}(f(K)) \subseteq K$. Así $f^{-1}(f(K)) = K$ y por lo tanto, f es atómica. $\square$

1.3. Tipos de puntos en un continuo

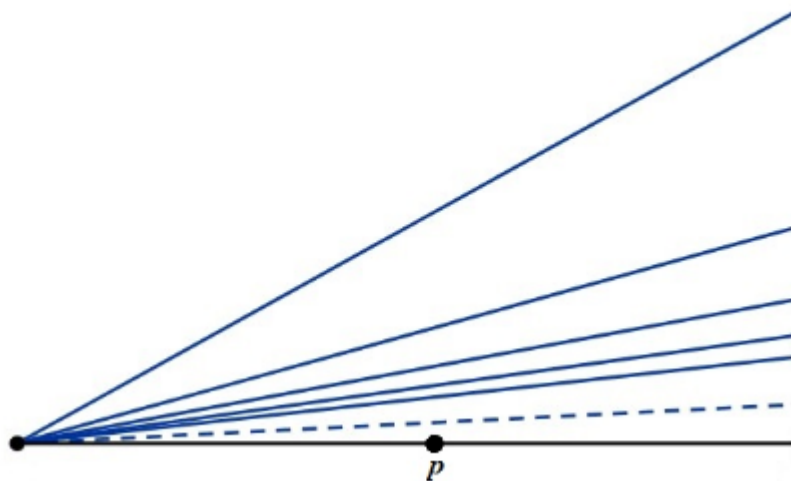
1.20 Definición. Sea X un continuo. Diremos que un punto $p \in X$ es:

- a) **no separante**, si para cualesquiera dos puntos $a, b \in X \setminus \{p\}$ existe un subcontinuo de $X \setminus \{p\}$ tal que $a, b \in K$.
- b) **orilla**, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subcontinuo K de X tal que $p \notin K$ y $H(X, K) < \varepsilon$;
- c) **de no corte**, si $X \setminus \{p\}$ es conexo.

1.21 Proposición. Sea X un continuo y p un punto en X . Si p es un punto no separante, entonces es un punto orilla.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, tomemos un conjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X \setminus \{p\}$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$ (esto se puede hacer pues la colección $\{B(x, \varepsilon) : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X y X es compacto y conexo). Ahora sea $q \in X \setminus \{p\}$ y para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tomemos $A_i \in C(X)$ tal que $q, x_i \in A_i \subseteq X \setminus \{p\}$. Sea $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, se tiene que $A \in C(X)$, $A \subseteq X \setminus \{p\}$ y $H(X, A) < \varepsilon$. Por lo tanto, p es un punto orilla de X . $\square$

En la Figura 1, el punto p es un punto orilla y no es un punto separante.



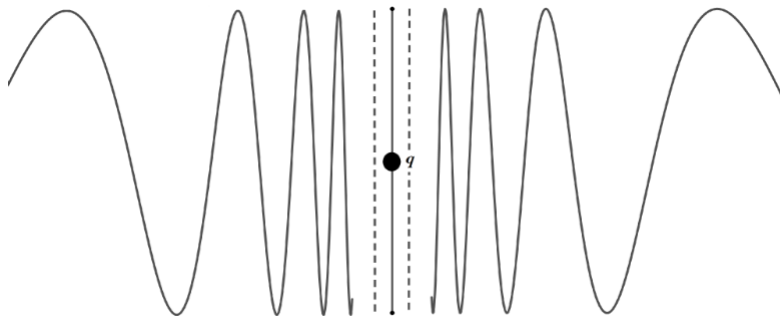
1.22 Proposición. Sea X un continuo y p un punto en X . Si p es un punto orilla, entonces es un punto de no corte.

Demostración. Si p es un punto de corte, entonces $X \setminus \{p\} = U \cup V$, donde U, V son abiertos, ajenos y no vacíos en X . Sean $x \in U$ y $y \in V$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \text{dist}(x, \overline{V})$ y $\varepsilon < \text{dist}(y, \overline{U})$. Si $A \in C(X)$ y $A \subseteq X \setminus \{p\}$ entonces $A \subseteq U$ o $A \subseteq V$.

Si $A \subseteq U$, entonces $\rho(y, a) > \varepsilon$, para todo $a \in A$.

Si $A \subseteq V$, entonces $\rho(x, a) > \varepsilon$, para todo $a \in A$. Por lo que p no es punto orilla de X y esto concluye la prueba. $\square$

En la Figura 2, el punto q no es un punto de corte y no es un punto orilla.



Consideremos los siguientes conjuntos:

$$nsep(X) = \{x \in X : x \text{ es un punto no separante}\}$$

$$ncut(X) = \{x \in X : x \text{ es un punto de no corte}\}$$

$$or(X) = \{x \in X : x \text{ es un punto orilla}\}$$

Así, de las proposiciones anteriores se tienen las siguientes contenciones:

$$nsep(X) \subseteq or(X) \subseteq ncut(X)$$

En general un punto orilla no es un punto no separante y un punto de no corte no es un punto orilla. Pero existen espacios en los que estos conceptos son equivalentes.

1.23 Definición. Un espacio X es semilocalmente conexo en un punto $p \in X$ si para cada abierto U de X con $p \in U$, existe una vecindad abierta de p , $V \subseteq U$ tal que $X \setminus V$ tiene un número finito de componentes.

Un continuo es semilocalmente conexo si lo es en todos sus puntos.

1.24 Teorema. Los continuos localmente conexos son semilocalmente conexos en todos sus puntos.

Demostración. Sean X un continuo localmente conexo y p un punto en X . Sea V un abierto en X tal que $p \in V$. Para cada $x \in X \setminus V$ tomemos un abierto y conexo V_x tal que $x \in V_x \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus \{p\}$. Por la compacidad de $X \setminus V$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \dots, x_n \in X \setminus V$ tales que $X \setminus X \subseteq V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$.

Sea $W = X \setminus (\overline{V_{x_1}} \cup \dots \cup \overline{V_{x_n}})$, entonces $p \in W \subseteq V$ y $X \setminus W = \overline{V_{x_1}} \cup \dots \cup \overline{V_{x_n}}$.

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ sea C_i la componente de $X \setminus W$ que contiene a $\overline{V_{x_i}}$, así $X \setminus W$ tiene a lo más n componentes. $\square$

1.25 Proposición. Si A es un subconjunto que tiene sólo un número finito de componentes, de un espacio X y $x \in \text{int}(A)$, entonces $x \in \text{int}(C)$, donde C es la componente de A que tiene a x .

Demostración. Sean $C_1, \dots, C_n$ las componentes de A . Supongamos que $x \in C_1$. Obsérvese que $\bigcup_{i=2}^n C_i$ es un subconjunto cerrado de X .

Denotemos $V = \text{int}(A) \cap (X \setminus \bigcup_{i=2}^n C_i)$, es claro que V es un subconjunto abierto de X tal que

$x \in V$ y $V \subseteq A$. Más aún, $V \subseteq \bigcup_{i=2}^n C_i$.

Se concluye que $x \in \text{int}(C_1)$. $\square$

1.26 Proposición. Sea X un continuo semilocalmente conexo. Si p es un punto de no corte de X , entonces p es un punto no separante de X .

Demostración. Sean $a, b \in X \setminus \{p\}$. Por demostrar que existe $H \in C(X)$ tal que $a, b \in H$ y $p \notin H$.

Definimos $C_a = \{y \in X : \text{existe } H_y \in C(X) \text{ tal que } a, y \in H_y \text{ y } p \notin H_y\}$. Note que $C_a \neq \emptyset$ pues $a \in C_a$. Veamos que C_a es abierto en X . Sea $z \in C_a$, entonces existe $H_z \in C(X)$ tal que $a, z \in H_z$ y $p \notin H_z$, por lo que $p \in X \setminus H_z$ que es un abierto, y dado que X es semilocalmente conexo, existe V abierto en X tal que $p \in V \subseteq X \setminus H_z$ y $X \setminus V$ tiene un número finito de componentes, digamos $C_1, \dots, C_n$.

Obsérvese que $V \subseteq X \setminus H_z$, entonces $H_z \subseteq X \setminus V$, y como H_z es conexo, entonces está contenido en alguna componente de $X \setminus V$, digamos C_i para algún $i \in \{1, \dots, n\}$.

Note que $z \notin V$, entonces $z \notin \overline{V}$, así $z \in X \setminus \overline{V} \subseteq X \setminus V$, así $z \in \text{int}(X \setminus V)$ y además $z \in C_i$, ya que $z \in H_z$, de la proposición 1.25 se sigue que $z \in \text{int}(C_i)$. Por demostrar que $\text{int}(C_i) \subseteq C_a$.

Sea $w \in \text{int}(C_i)$, entonces $w \in C_i$. Note que C_i es conexo y cerrado en $X \setminus V$, como $X \setminus V$ es cerrado en X , entonces C_i es cerrado en X y así compacto, por lo que $C_i \in C(X)$ con $a, w \in C_i$ y $p \notin C_i$, así $w \in C_a$. Por lo tanto, $\text{int}(C_i) \subseteq C_a$. Así $z \in \text{int}(C_i) \subseteq C_a$, luego C_a es abierto en X .

Ahora veamos que $(X \setminus \{p\}) \setminus C_a$ es abierto en X . Sea $z \in (X \setminus \{p\}) \setminus C_a$, notemos que C_z es abierto y $z \in C_z$. Por demostrar que $C_z \subseteq (X \setminus \{p\}) \setminus C_a$. Sea $w \in C_z$, supongamos que $w \notin (X \setminus \{p\}) \setminus C_a$, entonces $w = p$ o $w \in C_a$.

Si $w = p$, entonces $p \in C_z$ lo cual es una contradicción.

Si $w \in C_a$, entonces existen $H_w, H'_w \in C(X)$ tales que $z, w \in H_w$ y $a, w \in H'_w$ y $p \notin H_w$, $p \notin H'_w$. Observemos que $H_w \cup H'_w \in C(X)$ tal que $a, z \in H_w \cup H'_w$ y $p \notin H_w \cup H'_w$, por lo que $z \in C_a$, lo cual es una contradicción. Se concluye que $w \in (X \setminus \{p\}) \setminus C_a$, por lo tanto $C_z \subseteq (X \setminus \{p\}) \setminus C_a$.

Tenemos que C_a es abierto y cerrado en $X \setminus \{p\}$. Dado que $X \setminus \{p\}$ es conexo se tiene que $C_a = \emptyset$ o $C_a = X \setminus \{p\}$, pero $C_a \neq \emptyset$, entonces $C_a = X \setminus \{p\}$, por lo que $b \in C_a$, así existe $H \in C(X)$ tal que $a, b \in H$ y $p \notin H$. $\square$

En particular, en un continuo localmente conexo los puntos no separantes, puntos de no corte y puntos orilla son los mismos.

Capítulo 2

Funciones de Whitney

Las funciones de Whitney constituyen una herramienta muy importante para estudiar la estructura de los hiperespacios; uno de los resultados fundamentales en la teoría de hiperespacios garantiza la existencia de funciones de Whitney para el hiperespacio de los subcontinuos de un continuo, en este capítulo daremos una demostración de este resultado y con la ayuda de las funciones de Whitney demostraremos la existencia de arcos ordenados.

2.1 Definición. Sea X un continuo. Una **función de Whitney para el hiperespacio** 2^X es una función continua $\mu : 2^X \rightarrow [0, 1]$ tal que

- (1) para cada $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$ y;
- (2) para cada $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$, tenemos que $\mu(A) < \mu(B)$.

Una **función de Whitney para el hiperespacio** $C(X)$ es una función continua de $C(X)$ en $[0, 1]$ que satisface las condiciones

- (1) para cada $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$ y;
- (3) para cada $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$, tenemos que $\mu(A) < \mu(B)$.

Notemos que la restricción a $C(X)$ de una función de Whitney para 2^X es una función de Whitney para $C(X)$.

2.2 Teorema. Todo continuo admite funciones de Whitney para su hiperespacio de continuos.

Demostración. Sea X un continuo y consideremos un conjunto, $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$, denso en X . Para cada $n \in \mathbb{N}$, considérese la función continua $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ dada por $f_n(x) = \frac{1}{1+d(x, p_n)}$, para cada $x \in X$. Luego defínase $\mu_n(K) = \text{diám}_{[0,1]} f_n(K)$, para cada $K \in C(X)$. Note que ésta es una función continua. Aplicando el criterio M de Weiestrass es posible definir una función continua $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$, para cada $K \in C(X)$, como

$$\mu(K) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(K)}{2^n}.$$

Se afirma que μ es una función de Whitney.

- (i) Dado $x \in X$, tenemos que $\mu_n(\{x\}) = \text{diám}_{[0,1]} f_n(\{x\}) = \text{diám}_{[0,1]} \{f_n(x)\} = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como cada uno de los sumandos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(K)}{2^n}$ es nulo se sigue que $\mu(\{x\}) = 0$.

- (ii) Sean $K, L \in C(X)$, con $K \subseteq L$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ ocurre que $f_n(K) \subseteq f_n(L)$ y, por lo tanto $\mu_n(K) = \text{diám}_{[0,1]} f_n(K) \leq \text{diám}_{[0,1]} f_n(L) = \mu_n(L)$. Así, para ver que $\mu(K) < \mu(L)$ bastará demostrar que $\mu_m(K) < \mu_m(L)$ para algún $m \in \mathbb{N}$.

Escójase un punto $x \in L \setminus K$ y $\varepsilon > 0$ tales que $d(x, K) > \varepsilon$. Dado que el conjunto $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X , es posible hallar $m \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, p_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. De aquí que, $\frac{1}{1+\varepsilon/2} < \frac{1}{1+d(x, p_m)} = f_m(x)$. Luego, para todo $y \in K$ se tiene que $d(y, p_m) \geq d(y, x) - d(x, p_m) > \varepsilon - \varepsilon/2$. En consecuencia, $f_m(y) = \frac{1}{1+d(y, p_m)} < \frac{1}{1+\varepsilon/2} < f_m(x)$ y así, $\text{máx} f_m(K) < f_m(x) \leq \text{máx} f_m(L)$. Como $K \subseteq L$ implica $\text{mín} f_m(K) \geq \text{mín} f_m(L)$ se sigue que, $\text{diám}_{[0,1]} f_m(K) = \text{máx} f_m(K) - \text{mín} f_m(K) < \text{máx} f_m(L) - \text{mín} f_m(L) = \text{diám}_{[0,1]} f_m(L)$, esto es, $\mu_m(K) < \mu_m(L)$. De esta forma se verifica que $\mu(K) < \mu(L)$.

Con todo μ es una función de Whitney.

□

2.3 Proposición. Si A y B son subcontinuos de X tales que $A \subsetneq B$, $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ es una función de Whitney y $t \in [\mu(A), \mu(B)]$, entonces existe $E \in C(X)$ tal que $A \subseteq E \subseteq B$ y $\mu(E) = t$.

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}([t, 1]) \cap \{D \in C(X) : A \subseteq D \subseteq B\}$. Como μ es una función continua se tiene que $\mu^{-1}([t, 1])$ es cerrado en $C(X)$ y por la Proposición 1.6, $\{D \in C(X) : A \subseteq D \subseteq B\}$ es cerrado en $C(X)$, por lo tanto $\mathcal{A}$ es cerrado en $C(X)$ y en consecuencia compacto. Dado que $B \in \mathcal{A}$ se tiene que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, de manera que μ alcanza su mínimo en $\mathcal{A}$, es decir, existe $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) \leq \mu(D)$ para todo $D \in \mathcal{A}$.

Ahora, sea $\mathcal{B} = \mu^{-1}([0, t]) \cap \{D \in C(X) : A \subseteq D \subseteq E\}$ por el mismo argumento anterior $\mathcal{B}$ es compacto y como $A \in \mathcal{B}$ se tiene que $\mathcal{B} \neq \emptyset$, así μ alcanza su máximo en $\mathcal{B}$, es decir, existe $F \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(D) \leq \mu(F)$ para todo $D \in \mathcal{B}$.

Si $\mu(E) = t$ ó $\mu(F) = t$ podemos tomar a $C = E$ ó $C = F$ y terminamos. Supongamos entonces que $\mu(F) < t < \mu(E)$, como $F \subsetneq E$ (Por definición de $\mathcal{B}$) por el Teorema 1.10, existe $G \in C(X)$ tal que $A \subseteq F \subsetneq G \subsetneq E$ y por tanto $\mu(F) < \mu(G) < \mu(E)$. Si $\mu(G) > t$, entonces $G \in \mathcal{A}$ por lo que $\mu(G) < \mu(E)$ contradiciendo el hecho de que $\mu(E) \leq \mu(D)$ para todo $D \in \mathcal{A}$. Ahora, si $\mu(G) < t$ entonces $G \in \mathcal{B}$ y por tanto $\mu(G) < \mu(F)$ contradiciendo el hecho de que $\mu(D) \leq \mu(F)$ para todo $D \in \mathcal{B}$. Así, $\mu(G) = t$ y podemos considerar $C = G$.

□

2.1. Niveles de Whitney

2.4 Definición. Sean X un continuo, $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ una función de Whitney y $t \in [0, \mu(X)]$, el **nivel de Whitney para $C(X)$ en t** es el conjunto $\mu^{-1}(t)$.

2.5 Teorema. Si X es un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$, entonces los niveles de Whitney para $C(X)$ son continuos.

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$ un nivel de Whitney. De la definición 2.4 es claro que $\mathcal{A}$ es cerrado en $C(X)$ y por lo tanto compacto. Resta probar que $\mathcal{A}$ es un conjunto conexo. Supongamos que no lo es, entonces existen $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ conjuntos cerrados, ajenos y no vacíos en $\mathcal{A}$ tales que $\mathcal{A} = \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$.

Sean $H_0 = \bigcup \{H : H \in \mathcal{H}\}$ y $K_0 = \bigcup \{K : K \in \mathcal{K}\}$. Notemos que cualquier elemento de $\mathcal{H}$ está contenido en H_0 , por lo que H_0 no es vacío. Similarmente K_0 no es vacío. Además H_0 y K_0 pertenecen a 2^X .

Veamos que $X = H_0 \cup K_0$.

⊇] Dado que H_0 y K_0 son subconjuntos de X se tiene que su unión es un subconjunto de X .

⊆] Sea $x \in X$, entonces existe $A \in C(X)$ tal que $x \in A$ y $\mu(A) = t$, es decir $A \in \mathcal{A}$, así $A \in \mathcal{H}$

o $\mathcal{K}$. Se sigue que $x \in H_0 \cup K_0$. Por lo tanto, $X \subseteq H_0 \cup K_0$.

Veamos que $H_0 \cap K_0 = \emptyset$. Supongamos que $y \in H_0 \cap K_0$, entonces existen $H \in \mathcal{H}$ y $K \in \mathcal{K}$ tales que $y \in H \cap K$. Entonces existe $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}$ una función continua tal que $\alpha(0) = H$ y $\alpha(1) = K$. Observemos que $\alpha([0, 1])$ es conexo en $\mathcal{A}$ y además intersecta a $\mathcal{H}$ y a $\mathcal{K}$, lo cual es una contradicción ya que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son ajenos.

Así $H_0 \cap K_0 = \emptyset$. Entonces H_0 y K_0 es una separación de X , lo que contradice que X es un continuo. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es conexo.

Así, se tiene que $\mathcal{A}$ es un continuo. $\square$

2.2. Arcos ordenados

2.6 Definición. Sean X un continuo y $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow 2^X$ se llama **arco ordenado de A hasta B** si cumple lo siguiente:

- (1) $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$; y
- (2) Si $u, v \in [0, 1]$ tales que $u < v$, entonces $\alpha(u) \subsetneq \alpha(v)$.

Obsérvese que la condición (2) dice que la función α es inyectiva, así α es un homeomorfismo sobre su imagen.

Ahora podemos preguntarnos si dados $A, B \in 2^X$, tales que $A \subsetneq B$ ¿existe un arco ordenado en 2^X de A hasta B ?

La respuesta es no.

Por ejemplo sean $A = \{p\}$ y $B = \{p, q\}$. Note que $A \subseteq B$ y $A \neq B$. Supongamos que $\alpha : [0, 1] \rightarrow 2^X$ es un arco ordenado de A hasta B .

Podemos observar que para todo $t \in (0, 1)$, $\{p\} \subsetneq \alpha(t) \subsetneq \{p, q\}$, pero esto es una contradicción ya que $\alpha(t) \in \mathbb{P}(\{p, q\}) = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$.

Sin embargo si restringimos la función a $C(X)$ sí se puede garantizar la existencia de arcos ordenados, como lo dice el siguiente teorema.

2.7 Teorema. Para todo $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$ existe un arco ordenado en $C(X)$ de A hasta B .

Demostración.

Sea $\mu : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Whitney. Sea $D = \{t \in \mathbb{Q} : \mu(A) < t < \mu(B)\} \cup \{\mu(A), \mu(B)\}$. Se tiene que D es un conjunto numerable. Consideremos una numeración para D , digamos $D = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ donde $r_1 = \mu(A)$, $r_2 = \mu(B)$ y $r_i \neq r_j$ si $i \neq j$.

Afirmación 1: Existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ en $C(X)$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) = r_n$ y si $r_n < r_m$, entonces $A_n \subsetneq A_m$, además $A = A_1$ y $B = A_2$.

Prueba: Denotemos $A_1 = A$, $A_2 = B$, por la proposición 2.3 existe $A_3 \in C(X)$ tal que $A_1 \subsetneq A_3 \subsetneq A_2$ y $\mu(A_3) = r_3$.

Supongamos que hemos determinado n subcontinuos de X , $A_1, A_2, \dots, A_n$ con las propiedades mencionadas en la afirmación, es decir, $\mu(A_i) = r_i$ y si $r_i < r_j$, entonces $A_i \subsetneq A_j$. Existen únicos $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tales que $r_i < r_{n+1} < r_j$, luego tenemos que $A_i \subsetneq A_j$ y $r_{n+1} \in [\mu(A_i), \mu(A_j)]$, así, por la proposición 2.3 existe un subcontinuo A_{n+1} de X tal que $A_i \subsetneq A_{n+1} \subsetneq A_j$ y $\mu(A_{n+1}) = r_{n+1}$. Se sigue que $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ son $n+1$ subcontinuos de X con las propiedades mencionadas en la afirmación.

Esto demuestra por inducción la afirmación. Observe que, para cada $n \in \mathbb{N}$: $A \subseteq A_n \subseteq B$.

Denotemos $\mathcal{A} = Cl_{C(X)}\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Afirmación 2: Para todo $E, F \in \mathcal{A}$ tales que $E \subseteq F$ o $F \subseteq E$ y $A \subseteq E \subseteq B$.

Prueba: Sean $E, F \in \mathcal{A}$, entonces existen dos sucesiones de números naturales $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ y $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ tales que $\lim A_{n_k} = E$ y $\lim A_{m_k} = F$. Consideremos las sucesiones de números reales $\{r_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ y $\{r_{m_k}\}_{k=1}^\infty$. Note que para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $r_{n_k} \leq r_{m_k}$ o $r_{m_k} \leq r_{n_k}$ y dado que los naturales son un conjunto infinito, existe una sucesión $\{k_j\}_{j=1}^\infty$ tal que para todo $j \in \mathbb{N}$:

$r_{n_{k_j}} \leq r_{m_{k_j}}$ o para todo $j \in \mathbb{N} : r_{m_{k_j}} \leq r_{n_{k_j}}$.

Supongamos que para todo $j \in \mathbb{N} : r_{n_{k_j}} \leq r_{m_{k_j}}$, por cómo elegimos la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ se tiene que $A_{n_{k_j}} \subsetneq A_{m_{k_j}}$, luego $\lim A_{n_{k_j}} \subsetneq \lim A_{m_{k_j}}$, así $E \subsetneq F$.

Análogamente, si suponemos que para todo $j \in \mathbb{N} : r_{m_{k_j}} \leq r_{n_{k_j}}$, obtenemos que $F \subsetneq E$.

Para demostrar que $A \subseteq E \subseteq B$, nótese que para cada $k \in \mathbb{N} : r_1 \leq r_{n_k} \leq r_2$, por lo que $A_1 \subseteq A_{n_k} \subseteq A_2$, luego $\lim A_1 \subseteq \lim A_{n_k} \subseteq A_2$, así $A \subseteq E \subseteq B$.

Afirmación 3: Existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ tal que $\alpha([0, 1]) = \mathcal{A}$.

Prueba: Tenemos que $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ es una función de Whitney. Probaremos que la función $\mu|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow [r_1, r_2]$ es un homeomorfismo, donde $r_1 = \mu(A)$ y $r_2 = \mu(B)$.

Veamos que $\mu|_{\mathcal{A}}$ es una función inyectiva.

Sean $U, V \in \mathcal{A}$ tales que $U \neq V$, por Afirmación 2 se tiene que $U \subsetneq V$ o $V \subsetneq U$, luego por la definición de función de Whitney se tiene que $\mu|_{\mathcal{A}}(U) \subsetneq \mu|_{\mathcal{A}}(V)$ o $\mu|_{\mathcal{A}}(V) \subsetneq \mu|_{\mathcal{A}}(U)$, así $\mu|_{\mathcal{A}}(U) \neq \mu|_{\mathcal{A}}(V)$.

Por lo tanto $\mu|_{\mathcal{A}}$ es inyectiva.

Veamos que $\mu|_{\mathcal{A}}$ es sobreyectiva, es decir, veamos que $\mu(\mathcal{A}) = [r_1, r_2]$.

Como para todo $E \in \mathcal{A} : A \subseteq E \subseteq B$, se tiene que $\mu(\mathcal{A}) \subseteq [r_1, r_2]$. Ahora sea $t \in [r_1, r_2]$, entonces existe $\{r_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ sucesión en el conjunto $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\lim r_{n_k} = t$. Por la compacidad de $C(X)$ la sucesión $\{A_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ tiene una subsucesión convergente a $E \in C(X)$, digamos $\{A_{n_{k_j}}\}_{j=1}^\infty$, se tiene que $E \in \mathcal{A}$. Además $\mu(E) = \lim A_{n_{k_j}} = \lim r_{n_{k_j}} = t$. Por lo tanto, $\mu(\mathcal{A}) = [r_1, r_2]$.

Tenemos que $\mu|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow [r_1, r_2]$ es una biyección continua entre un espacio compacto y un espacio de Hausdorff, así $\mu|_{\mathcal{A}}$ es un homeomorfismo.

Consideremos un homeomorfismo creciente $\Phi : [0, 1] \rightarrow [r_1, r_2]$.

Definimos $\alpha = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1} \circ \Phi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}$, notemos que α es un homeomorfismo y además $\alpha(0) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(\Phi(0)) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(r_1) = A$ y $\alpha(1) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(\Phi(1)) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(r_2) = B$.

Ahora sean $s, t \in [0, 1]$ tales que $0 \leq s < t \leq 1$, entonces $\Phi(s) < \Phi(t)$, ya que Φ es creciente.

Sea $C = \mu|_{\mathcal{A}}^{-1}(\Phi(s))$ y $D = \mu|_{\mathcal{A}}^{-1}(\Phi(t))$, se tiene que $\mu(C) = \Phi(s)$ y $\mu(D) = \Phi(t)$, así que $\mu(C) < \mu(D)$.

Obsérvese que $C, D \in \mathcal{A}$, por lo que $C \subseteq D$ o $D \subseteq C$, pero $D \subseteq C$ no puede ocurrir ya que μ es función de Whitney y $\mu(C) < \mu(D)$. Por lo tanto, $C \subsetneq D$, es decir $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$.

Así, α es un arco ordenado de A hacia B tal que $\alpha([0, 1]) = \mathcal{A}$. $\square$

2.8 Teorema. Sean μ una función de Whitney para el hiperespacio $C(X)$ de un continuo X y $t > 0$. Si A y B son elementos del nivel $\mu^{-1}(t)$ tales que $A \neq B$ y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces para cada subcontinuo E de $A \cap B$ existe un arco γ en $\mu^{-1}(t)$ con puntos extremos A y B tal que para cada $K \in \gamma$ se tiene que $E \subseteq K$ y $K \subseteq A \cup B$.

Demostración. Sean $A, B \in \mu^{-1}(t)$ como en las hipótesis. Note que $A, B \in C(X)$ y $A \cap B \in 2^X$. Sea K un subcontinuo de $A \cap B$, por lo que $K \subseteq A \cap B \subseteq A$, así que, por el Teorema 2.7, existe un arco ordenado $\alpha_1 : [0, 1] \rightarrow C(X)$ de K hasta A . De hecho se tiene que $\alpha_1 : [0, 1] \rightarrow C(A)$. Análogamente existe un arco ordenado $\alpha_2 : [0, 1] \rightarrow C(B)$ de K hasta B .

Nótese que para todo $u, v \in [0, 1]$, $\alpha_1(u) \in C(A)$ y $\alpha_2(v) \in C(B)$, por lo que $\alpha_1(u) \cup \alpha_2(v) \subseteq A \cup B$ y entonces $\alpha_1(u) \cup \alpha_2(v) \in C(A \cup B)$.

Fijemos $r \in [0, 1]$ y consideremos $\alpha_1(r) \cup \alpha_2(w)$ para todo $w \in [0, 1]$, entonces $\alpha_1(r) \cup \alpha_2 : [0, 1] \rightarrow C(A \cup B)$, además

$$\alpha_1(r) \cup \alpha_2(0) = \alpha_1(r) \cup K \subseteq A \cup K = A$$

es decir, $\alpha_1(r) \cup \alpha_2(0) \subseteq A$, luego $\mu(\alpha_1(r) \cup \alpha_2(0)) \leq \mu(A) = t$. Por otra parte, $B \subseteq \alpha_1(r) \cup B = \alpha_1(r) \cup \alpha_2(1)$, así que $t = \mu(B) \leq \mu(\alpha_1(r) \cup \alpha_2(1))$. Sea $J = [\mu(\alpha_1(r) \cup \alpha_2(0)), \mu(\alpha_1(r) \cup \alpha_2(1))]$, entonces $t \in J$.

Obsérvese que $\mu \circ (\alpha_1(r) \cup \alpha_2) : [0, 1] \rightarrow J$ es una función continua y por el teorema del valor intermedio, existe $s \in [0, 1]$ tal que $\mu(\alpha_1(r) \cup \alpha_2(s)) = t$.

Notemos que s depende de r , así que en general, para cada $r \in [0, 1]$ existe $s_r \in [0, 1]$ tal que

$\mu(\alpha_1(r) \cup \alpha_2(s_r)) = t$ y por lo tanto $\alpha_1(r) \cup \alpha_2(s_r) \in \mu^{-1}(t) \cap C(A \cup B)$.

Afirmamos que la función $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mu^{-1}(t) \cap C(A \cup B)$ definida como

$$\gamma(r) = \alpha_1(r) \cup \alpha_2(s_r)$$

es un arco de B hasta A , cuya imagen está contenida en $\mu^{-1}(t) \cap C(A \cup B)$.

En efecto, $\gamma(0) = \alpha_1(0) \cup \alpha_2(s_0) \subseteq K \cup B = B$, luego $t = \mu(\gamma(0)) \leq \mu(B) = t$, de donde $\gamma(0) = B$. Por otro lado, $\gamma(1) = \alpha_1(1) \cup \alpha_2(s_1) = A \cup \alpha_2(s_1) \supset A$ así que $t = \mu(A) \leq \mu(\gamma(1)) = t$, entonces $\gamma(1) = A$.

Sólo falta verificar que γ es una función continua.

Sean $q \in [0, 1]$ y $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [0, 1]$ tales que $q_n \rightarrow q$.

Observe que para cada q_n existe $s_{q_n} \in [0, 1]$ tal que $\mu(\alpha_1(q_n) \cup \alpha_2(s_{q_n})) = t$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $s_{q_n} \rightarrow l$ para algún $l \in [0, 1]$. Tenemos entonces dos sucesiones convergentes, $q_n \rightarrow q$ y $s_{q_n} \rightarrow l$, en el intervalo $[0, 1]$. De la continuidad de α_1 y α_2 tenemos que $\alpha_1(q_n) \rightarrow \alpha_1(q)$ y $\alpha_2(s_{q_n}) \rightarrow \alpha_2(l)$. Por lo tanto, $\alpha_1(q_n) \cup \alpha_2(s_{q_n}) \rightarrow \alpha_1(q) \cup \alpha_2(l)$, de donde

$$\gamma(q_n) \rightarrow \alpha_1(q) \cup \alpha_2(l) \dots (*)$$

Como $t = \mu(\gamma(q_n))$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\mu(\gamma(q_n)) \rightarrow \mu(\alpha_1(q) \cup \alpha_2(l))$, entonces $\mu(\alpha_1(q) \cup \alpha_2(l)) = t$. Ahora si $l \leq s_q$, entonces $\alpha_1(q) \cup \alpha_2(l) \subseteq \alpha_1(q) \cup \alpha_2(s_q)$, ya que α_1 y α_2 son arcos ordenados, esto implica que $\alpha_1(q) \cup \alpha_2(l) \subseteq \gamma(q)$ y como $\mu(\alpha_1(q) \cup \alpha_2(l)) = \mu(\gamma(q))$, entonces $\alpha_1(q) \cup \alpha_2(l) = \gamma(q)$. Si $s_q \leq l$, de manera similar se concluye que $\alpha_1(q) \cup \alpha_2(l) = \gamma(q)$. Luego de (*) se concluye que $\gamma(q_n) \rightarrow \gamma(q)$. Por lo que γ es una función continua.

□

2.3. Propiedades de Whitney y reversibles de Whitney

2.9 Definición. Sea P una propiedad topológica. Decimos que P es una propiedad:

- (i) **de Whitney** si cada vez que el continuo X tiene la propiedad P , entonces para cada función de Whitney μ para $C(X)$ y para cada $t \in (0, \mu(X))$, tenemos que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad P .
- (ii) **reversible de Whitney** si para cada continuo X , para cada función de Whitney tal que para todo $t \in (0, \mu(X))$ se tiene que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad P , entonces X tiene la propiedad P .
- (iii) **fuerte reversible de Whitney** si para cada continuo X para el cual existe una función de Whitney tal que para todo $t \in (0, \mu(X))$, $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad P , entonces X tiene la propiedad P .
- (iv) **secuencial fuerte reversible de Whitney** si para cada continuo X para el cual existe una función de Whitney y existe una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(0, \mu(X))$ tal que $\lim t_n = 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu^{-1}(t_n)$ tiene la propiedad P , entonces X tiene la propiedad P .

De las definiciones anteriores se deduce que:

- (iv) implica (iii) y (iii) implica (ii).
- Si P es una propiedad de Whitney, entonces su negación, $\neg P$ es propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney.
- Si Q no es propiedad reversible de Whitney, entonces su negación, $\neg Q$ no es propiedad de Whitney.

2.10 Ejemplo.

- La arco conexidad es una propiedad de Whitney.
- La conexidad local es una propiedad de Whitney.

Capítulo 3

Puntos en un continuo y su relación con las propiedades de Whitney

En este capítulo haremos un estudio acerca de los tipos de puntos estudiados en el capítulo 2 y su relación con las propiedades de Whitney, las propiedades reversibles, fuerte reversibles y secuencial fuerte reversibles de Whitney.

Primero vamos a mostrar que la propiedad de tener puntos de corte no es una Propiedad Reversible de Whitney. Esto responde negativamente a la pregunta hecha por Illanes y Nadler en [2].

El siguiente teorema fue demostrado por Eiichi Matsushashi, en el año 2009. Véase [4].

3.1 Teorema. Existe un continuo Z tal que:

- (i) Z no tiene un punto de corte; y
- (ii) $\mu^{-1}(s)$ tiene un punto de corte para cada función de Whitney $\mu : C(Z) \longrightarrow [0, \mu(Z)]$ y para cada $s \in (0, \mu(Z))$.

Demostración. Tomemos el intervalo $[0, 1]$, entonces existe un continuo X y una función $f : X \longrightarrow [0, 1]$ continua, abierta y monótona tal que $f^{-1}(y)$ es un subcontinuo terminal de X no degenerado, para cada $y \in [0, 1]$.

Sea Z el espacio cociente obtenido de identificar $f^{-1}(1)$ a un punto, es decir

$Z = \{\{x\} : x \in X \setminus f^{-1}(1)\} \cup \{f^{-1}(1)\}$. Sea $p : X \longrightarrow Z$ la proyección natural dada por

$$p(x) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \in X \setminus f^{-1}(1) \\ f^{-1}(1) & \text{si } x \in f^{-1}(1) \end{cases}$$

Note que p es una función monótona y abierta.

Por el Lema de transgresión se tiene que existe una función continua $l : Z \longrightarrow [0, 1]$ tal que $l \circ p = f$.

Veamos que l es abierta y monótona.

Sea U un subconjunto de Z abierto, como p es continua se tiene que $p^{-1}(U)$ es abierto en X , luego como f es abierta $f(p^{-1}(U))$ es abierto en $[0, 1]$. Nótese que $f(p^{-1}(U)) = (l \circ p)(p^{-1}(U)) = l(U)$, ya que p es sobreyectiva, así $l(U)$ es abierto en $[0, 1]$, por lo que l es abierta.

Para ver que l es monótona, veamos que para cada $t \in [0, 1]$, $l^{-1}(t)$ es un subcontinuo de Z .

Sea $t \in [0, 1]$, como f es monótona se tiene que $f^{-1}(t)$ es un subcontinuo de X , luego como p es continua y suprayectiva se tiene que $p(f^{-1}(t))$ es un subcontinuo de Z . Obsérvese que $p(f^{-1}(t)) = p(p^{-1}(l^{-1}(t))) = l^{-1}(t)$, ya que p es sobreyectiva. Así $l^{-1}(t)$ es un subcontinuo de

Z , por lo que l es monótona.

Veamos que para cada $t \in [0, 1]$, $l^{-1}(t)$ es un subcontinuo terminal de Z , en consecuencia l es atómica.

Sea W un subcontinuo de Z tal que $W \cap l^{-1}(t) \neq \emptyset$ y $W \cap (Z \setminus l^{-1}(t)) \neq \emptyset$. Por demostrar que $l^{-1}(t) \subseteq W$.

Observe que $l^{-1}(t) = p(f^{-1}(1))$, así, lo que hay que demostrar es que $p(f^{-1}(t)) \subseteq W$.

Sea $w \in l^{-1}(t) \cap W$, entonces $w \in W$ y $w \in p(f^{-1}(t))$, por lo que existe $x \in f^{-1}(t)$ tal que $p(x) = w$, así $p(x) \in W$, luego $x \in p^{-1}(W)$, se sigue que $x \in f^{-1}(t) \cap p^{-1}(W)$.

Por otro lado, sea $z \in W \cap (Z \setminus l^{-1}(t))$, entonces $z \in W$ y $z \in Z \setminus p(f^{-1}(t))$, así existe $x \in X$ tal que $p(x) = z$ y $x \notin f^{-1}(t)$. Como $z \in W$, entonces $p(x) \in W$, luego $x \in p^{-1}(W)$, por lo que $x \in p^{-1}(W) \cap X \setminus f^{-1}(t)$.

Note que $f^{-1}(t)$ es un subcontinuo terminal de X y dado que $p^{-1}(W)$ es un subcontinuo de X , (ya que p es monótona), tal que $p^{-1}(W) \cap f^{-1}(t) \neq \emptyset$ y $p^{-1}(W) \cap X \setminus f^{-1}(t) \neq \emptyset$, entonces $f^{-1}(t) \subseteq p^{-1}(W)$, así $p(f^{-1}(t)) \subseteq W$. Por lo que $l^{-1}(t) \subseteq W$.

Por lo tanto $l^{-1}(t)$ es un subcontinuo terminal de Z .

Además si $t \in [0, 1)$, entonces $l^{-1}(t)$ es un conjunto no degenerado, ya que

$p|_{X \setminus f^{-1}(1)} : X \setminus f^{-1}(1) \rightarrow Z \setminus \{f^{-1}(1)\}$ definida por $p|_{X \setminus f^{-1}(1)}(x) = \{x\}$ es un homeomorfismo, por lo tanto es biyectiva.

Observe que $f^{-1}(t) \subseteq X \setminus f^{-1}(1)$, para cada $t \in [0, 1)$, así $|p(f^{-1}(t))| = |f^{-1}(t)|$ y dado que $f^{-1}(t)$ es no degenerado, se sigue que $p(f^{-1}(t))$ es no degenerado, es decir $l^{-1}(t)$ es no degenerado.

Ahora vamos a demostrar que Z no tiene un punto de corte.

Sea $z \in Z$, supongamos que $\{z\} = l^{-1}(1)$, se tiene que

$a \in Z \setminus \{z\}$ si y sólo si $a \neq z$ si y sólo si $a \notin l^{-1}(1)$ si y sólo si $l(a) \neq 1$ si y sólo si $l(a) \in [0, 1)$ si y sólo si $a \in l^{-1}([0, 1))$. Por lo tanto $Z \setminus \{z\} = l^{-1}([0, 1))$. Dado que l es monótona se tiene que $l^{-1}([0, 1))$ es conexo. En este caso, z no es un punto de corte.

Supongamos que $z \in l^{-1}(t)$ para algún $t \in [0, 1)$ y que z es un punto de corte de Z , entonces existen abiertos, ajenos, no vacíos $U, V \subseteq Z$ tales que $Z \setminus \{z\} = U \cup V$.

Tenemos que $U \cup \{z\}$ es un subcontinuo de Z , el cual cumple que $l^{-1}(t) \cap (U \cup \{z\}) \neq \emptyset$ ya que $z \in l^{-1}(t) \cap (U \cup \{z\})$ y $(U \cup \{z\}) \cap (Z \setminus l^{-1}(t)) \neq \emptyset$ ya que $l(U) \not\subseteq \{t\}$ porque $l(U)$ es abierto en $[0, 1]$, así existe $u \in U$ tal que $l(u) \neq t$, luego $u \notin l^{-1}(t)$.

Dado que $l^{-1}(t)$ es un subcontinuo terminal de Z , se tiene que $l^{-1}(t) \subseteq U \cup \{z\}$. Note que $l^{-1}(t) \setminus \{z\} \subseteq U$, ya que $l^{-1}(t)$ es no degenerado. Similarmente se prueba que $l^{-1}(t) \setminus \{z\} \subseteq V$, luego $U \cap V \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Esto prueba que Z no tiene punto de corte.

Ahora vamos a probar que $\mu^{-1}(s)$ tiene un punto de corte, para cada función de Whitney normalizada $\mu : C(Z) \rightarrow [0, 1]$ y para cada $s \in (0, 1)$.

Sea $\mu : C(Z) \rightarrow [0, 1]$ una función de Whitney normalizada.

Sea $g : C([0, 1]) \rightarrow C(Z)$ una función dada por $g(A) = l^{-1}(A)$, para cada $A \in C([0, 1])$.

Notemos que g está bien definida, ya que l es monótona y g es continua, ya que l es abierta.

Tomemos la composición $\mu \circ g : C([0, 1]) \rightarrow C(Z)$, la cual es una función continua.

Sea $\mathcal{A}$ un arco en $C([0, 1])$ dado por la función $h : [0, 1] \rightarrow C([0, 1])$ definida para cada $x \in [0, 1]$ como:

$$h(x) = \begin{cases} [1 - \frac{3x}{2}, 1 - \frac{x}{2}] & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ [\frac{1-x}{2}, \frac{1+x}{2}] & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Observe que $\mu(g(\mathcal{A})) = [0, 1]$, ya que $\mu(g(\{1\})) = \mu(l^{-1}(\{1\})) = 0$ y $\mu(g([0, 1])) = \mu(l^{-1}([0, 1])) = \mu(Z) = 1$ y dado que $\mathcal{A}$ es conexo, se tiene que $\mu(g(\mathcal{A})) = [0, 1]$.

Sea $s \in (0, 1)$ y $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(g(A)) = s$. Denotemos $A = [a, b]$, se tiene que $0 \leq a \leq b \leq 1$.

Por demostrar que $\mu^{-1}(s) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, donde $\mathcal{U} = \{C \in \mu^{-1}(s) : C \subseteq l^{-1}([0, b])\}$ y $\mathcal{V} = \{C \in \mu^{-1}(s) : C \subseteq l^{-1}([a, 1])\}$.

$\subseteq$] Notemos que $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mu^{-1}(s)$, entonces $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} \subseteq \mu^{-1}(s)$.

$\supseteq$] Sea $D \in \mu^{-1}(s)$, entonces $l(D) \in C([0, 1])$, es decir $l(D)$ es un intervalo.

1. (1) Si $\max(l(D)) \leq b$, entonces $l(D) \subseteq [0, b]$, esto implica que $D \in \mathcal{U}$.

2. (2) Si $a \leq \min(l(D))$, entonces $l(D) \subseteq [a, 1]$, por lo que $D \in \mathcal{V}$.
3. (3) Si no pasa (1) ni (2), es decir, si $b \leq \max(l(D))$ y $\min(l(D)) \leq a$, entonces $l(D) \cap l^{-1}([b, 1]) \neq \emptyset$ y $l(D) \cap l^{-1}([0, a]) \neq \emptyset$, por lo que $l(D)$ contiene a $[a, b]$ como subcontinuo, es decir $[a, b] \subseteq l(D)$, entonces $l^{-1}([a, b]) \subseteq l^{-1}(l(D))$, observe que $l(D)$ es no degenerado pues tiene al punto b y al menos un punto a la derecha de b . Dado que l es atómica, se tiene que $l^{-1}(l(D)) = D$, por lo que $l^{-1}([a, b]) \subseteq D$, entonces $l^{-1}([a, b]) = D$, ya que μ es función de Whitney, así $l(D) = l(l^{-1}([a, b])) = [a, b]$, por lo que $D \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

En cualquiera de los casos se tiene que $D \in \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.

Por lo tanto $\mu^{-1}(s) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.

Por demostrar que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{l^{-1}([a, b])\}$.

$\subseteq$ Sea $C \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, entonces $C \subseteq l^{-1}([0, b])$, $C \subseteq l^{-1}([a, 1])$ y $\mu(C) = s$, así $C \subseteq l^{-1}([0, b] \cap [a, 1]) = l^{-1}([a, b])$, es decir $C = l^{-1}([a, b])$.

$\supseteq$ Como $\mu(l^{-1}([a, b])) = s$ y $l^{-1}([a, b]) \subseteq l^{-1}([0, b])$ y $l^{-1}([a, b]) \subseteq l^{-1}([a, 1])$, se tiene que $l^{-1}([a, b]) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

Veamos que $g(A) = l^{-1}([a, b])$ es un punto de corte de $\mu^{-1}(s)$, para ello demostraremos que $\mu^{-1}(s) \setminus \{g(A)\}$ no es conexo.

Observe que $\mu^{-1}(s) \setminus \{g(A)\} = (\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) \setminus \{g(A)\} = (\mathcal{U} \setminus \{g(A)\}) \cup (\mathcal{V} \setminus \{g(A)\})$.

Recordemos que $\Lambda(E) = \{A \in C(X) : A \subseteq E\}$ y además si E es cerrado en X , entonces $\Lambda(E)$ es cerrado en $C(X)$. Notemos que $\mathcal{U} = \mu^{-1}(s) \cap \Lambda(l^{-1}([0, b]))$ y dado que $[0, b]$ es cerrado en $[0, 1]$, se tiene que $l^{-1}([0, b])$ es cerrado en Z , así $\Lambda(l^{-1}([0, b]))$ es cerrado en $C(Z)$, de ahí que $\mathcal{U}$ es cerrado en $\mu^{-1}(s)$.

Observe que $\overline{\mathcal{U} \setminus \{g(A)\}} \subseteq \overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$, así $\overline{\mathcal{U} \setminus \{g(A)\}} \cap (\mathcal{V} \setminus \{g(A)\}) \subseteq \mathcal{U} \cap (\mathcal{V} \setminus \{g(A)\}) = \emptyset$, por lo que $\mathcal{U} \setminus \{g(A)\} \cap (\mathcal{V} \setminus \{g(A)\}) = \emptyset$.

Similarmente se demuestra que $\mathcal{V} \setminus \{g(A)\} \cap (\mathcal{U} \setminus \{g(A)\}) = \emptyset$.

Mostraremos que $\mathcal{U} \setminus \{g(A)\} \neq \emptyset$ y $\mathcal{V} \setminus \{g(A)\} \neq \emptyset$.

Tomemos $x \in l^{-1}(0)$, como $\{x\}, l^{-1}([0, b]) \in C(Z)$, podemos tomar un arco ordenado desde $\{x\}$ hasta $l^{-1}([0, b])$, esto se puede ya que $\{x\} \subseteq l^{-1}([0, b])$.

Notemos que $s \in (\mu(\{x\}), \mu(l^{-1}([0, b])))$, ya que $\mu(\{x\}) = 0$ y como $l^{-1}([a, b]) \subseteq l^{-1}([0, b])$ se tiene que $s = \mu(l^{-1}([a, b])) \leq \mu(l^{-1}([0, b]))$. Como $\{x\} \subsetneq l^{-1}([0, b])$, entonces existe $M \in C(Z)$ tal que $\{x\} \subseteq M \subseteq l^{-1}([0, b])$ y $\mu(M) = s$. Observe que $M \in \mathcal{U}$ y además $M \neq g(A)$ ya que $\{x\} \not\subseteq g(A)$. Por lo que $\mathcal{U} \setminus \{g(A)\} \neq \emptyset$. Análogamente se prueba que $\mathcal{V} \setminus \{g(A)\} \neq \emptyset$.

Así $\mu^{-1}(s) \setminus \{g(A)\}$ se escribe como la unión de dos de sus subconjuntos separados y no vacíos, por lo tanto no es conexo. $\square$

Este teorema exhibe un continuo tal que todos sus niveles tienen puntos de corte, sin embargo el continuo no tienen puntos de corte, lo cual nos dice que la propiedad de tener puntos de corte no es una propiedad reversible de Whitney.

A continuación daremos un ejemplo para mostrar que tener puntos de corte no es propiedad de Whitney.

3.2 Ejemplo. Consideremos el triodo simple T . Este continuo está formado por la unión de tres arcos que coinciden exactamente en un punto en común llamado vértice, el cual es un extremo de cada uno de los arcos. El conjunto de puntos de corte de T es no vacío, por ejemplo, el vértice es un punto de corte de T . Para este continuo existe una función de Whitney μ y existe $t \in (0, \mu(X))$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a una 2-celda, el cual no tiene puntos de corte, así, el conjunto de puntos de corte de $\mu^{-1}(t)$ es vacío. Por lo que la propiedad de tener puntos de corte no es una propiedad de Whitney.

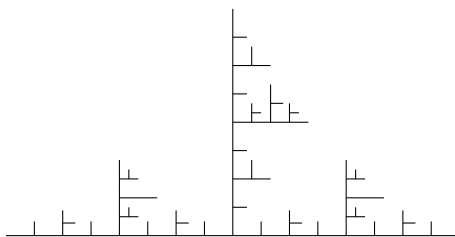


Figura 3.1: Triodo simple y niveles pequeños del triodo simple.

Para mostrar que la propiedad de no tener puntos de corte no es propiedad reversible de Whitney, y en consecuencia tampoco es propiedad fuerte reversible ni secuencial fuerte reversible de Whitney, ocuparemos el siguiente resultado, el cual no demostraremos, pero se puede consultar en [1].

3.3 Teorema. Si X es una dendrita, entonces existe una función de Whitney μ para 2^X tal que $\mu^{-1}(t)$ es un cubo de Hilbert para cualquier $t \in (0, \mu(X))$. Si X es una dendrita tal que los puntos de ramificación de X es un conjunto denso en X , entonces para cualquier función de Whitney μ para $C(X)$, $\mu^{-1}(t)$ es un cubo de Hilbert para cualquier $t \in (0, \mu(X))$.

3.4 Ejemplo. Consideremos la dendrita D_3 para la cual el conjunto de puntos de ramificación es denso. Notemos que D_3 tiene puntos de corte, a saber, los puntos de ramificación. Luego por el teorema 3.3 tenemos que para cualquier función de Whitney μ y para todo $t \in (0, \mu(X))$ $\mu^{-1}(t)$ es un cubo de Hilbert, por lo que el conjunto $\mu^{-1}(t)$ no tiene puntos de corte. Así la propiedad de no tener puntos de corte no es una propiedad reversible de Whitney.

Figura 3.2: Dendrita D_3

Ahora haremos un estudio, similar al anterior, para los puntos separantes.

3.5 Teorema. Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in (0, \mu(X))$. Si $p \in A \in \mu^{-1}(t)$ tal que no es un punto separante de X , entonces A no es punto separante de $\mu^{-1}(t)$.

Demostración. Lo que se va a demostrar es que $\mu^{-1}(t) \setminus \{A\}$ es conexo por continuos. Para esto, sean $B, C \in \mu^{-1}(t) \setminus \{A\}$ distintos, veamos que existe $\mathcal{P} \in C(\mu^{-1}(t) \setminus \{A\})$ tal que $B, C \in \mathcal{P}$. Analizamos los siguientes casos:

- (1) $B \cap C \not\subseteq A$;
- (2) $B \cap A \subseteq A$.

Para el caso (1) fijamos un punto $x \in (B \cap C) \setminus A$. Por el lema 2.8 existe un arco $\mathcal{L}$ en $\mu^{-1}(t)$ con puntos extremos B y C tal que para cada $E \in \mathcal{L}$ se tiene que $x \in E$. Note que $x \notin A$, así $A \neq E$, para todo $E \in \mathcal{L}$. Por lo tanto, $\mathcal{L} \in C(\mu^{-1}(t) \setminus \{A\})$ y $B, C \in \mathcal{L}$.

Para el caso (2) tomamos puntos $b \in B \setminus A$ y $c \in C \setminus A$. Notemos que $b \neq c$ pues los puntos de $B \cap C$ pertenecen a A .

Como $p \in A$ es un punto que no separa a X , entonces $b, c \in X \setminus \{p\}$ y $X \setminus \{p\}$ no es conexo por continuos. Sea $E \in C(X)$ tal que $b, c \in E \subseteq X \setminus \{p\}$. En lo que sigue analizaremos dos subcasos:

- (1.1) $t \leq \mu(E)$; en este caso denotamos $\mathcal{M} = C(E) \cap \mu^{-1}(t)$. Sabemos que $\mathcal{M} \in C(\mu^{-1}(t))$, pues $\mathcal{M} = \mu_{|C(E)}^{-1}(t)$, por lo que es un continuo y $\mathcal{M} \subseteq \mu^{-1}(t)$.
Tenemos que existen $H, K \in \mathcal{M}$ tales que $b \in H$ y $c \in K$. Notemos que $A \neq \mathcal{M}$, pues $p \in A$ y $p \neq E$, así $\mathcal{M} \in C(\mu^{-1}(t) \setminus \{A\})$. Por otra parte $B, H \in \mu^{-1}(t)$ y $b \in B \cap H$, por lo que existe un arco η en $\mu^{-1}(t)$ tal que $B, H \in \eta$ y para cada $J \in \eta$ se tiene que $b \in J$, de igual manera, como $C, K \in \mu^{-1}(t)$ y $c \in C \cap K$, entonces existe un arco η' en $\mu^{-1}(t)$ tal que $C, K \in \eta'$ y para cada $J' \in \eta'$ se tiene que $c \in J'$. Esto último implica que $A \notin \eta$ y $A \notin \eta'$. Así $\eta \cup \eta' \subseteq \mu^{-1}(t) \setminus \{A\}$.
Finalmente, denotemos por $\mathcal{P} = \eta \cup \mathcal{M} \cup \eta'$. Como $H \in \eta \cap \mathcal{M}$, entonces $\eta \cup \mathcal{M}$ es un continuo y dado que $K \in \mathcal{M} \cap \eta'$, entonces $\mathcal{M} \cup \eta'$ es un continuo.
Se concluye que $\mathcal{P}$ es un continuo tal que $B, C \in \mathcal{P} \in C(\mu^{-1}(t) \setminus \{A\})$.
- (1.2) $\mu(E) < t$; en este caso, notemos que $B \cup E$ es un continuo pues $b \in B \cap E$, además $E \subsetneq B \cup E$, así, considerando un arco ordenado en $C(X)$ de E hasta $B \cup E$ podemos tomar un subcontinuo H de X tal que $E \subseteq H \subseteq B \cup E$ y $\mu(H) = t$. Similarmente podemos tomar un subcontinuo K de X tal que $E \subseteq K \subseteq C \cup E$ y $\mu(K) = t$.
Notemos que $b \in B \cap H$ y $B, H \in \mu^{-1}(t)$, así existe un arco $\mathcal{L}$ en $\mu^{-1}(t)$ con puntos extremos B y H tal que para cada $L \in \mathcal{L}$ se tiene que $b \in L$. Dado que $b \notin A$, entonces $A \neq L$ para cada $L \in \mathcal{L}$, así $\mathcal{L} \in C(\mu^{-1}(t) \setminus \{A\})$. De igual forma, como $c \in C \cap K$ y $C, K \in \mu^{-1}(t)$ existe un arco $\mathcal{L}'$ en $\mu^{-1}(t)$ con puntos extremos C y K tal que para cada $L' \in \mathcal{L}'$ se tiene que $c \in L'$. Note que $A \neq L'$ para cada $L' \in \mathcal{L}'$, ya que $c \notin A$, así $\mathcal{L}' \in C(\mu^{-1}(t) \setminus \{A\})$.
Como $E \subseteq H \cap K$ y $H, K \in \mu^{-1}(t)$ existe un arco $\mathcal{R}$ en $\mu^{-1}(t)$ con puntos extremos H y K tal que $E \subseteq \mathcal{R}$ para todo $R \in \mathcal{R}$.
Denotemos $\mathcal{P} = \mathcal{L} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{L}'$. Por lo tanto, $\mathcal{P}$ es un continuo tal que $B, C \in \mathcal{P} \in C(\mu^{-1}(t) \setminus \{A\})$.

□

3.6 Corolario. No tener puntos separantes es una propiedad de Whitney.

Demostración. Sea X un continuo tal que $S(X) = \emptyset$ y sea $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ una función de Whitney. Sea $t \in (0, 1)$. Por demostrar que $S(\mu^{-1}(t)) = \emptyset$.

Sea $A \in \mu^{-1}(t)$, entonces $A \in C(X)$, por lo que existe $p \in A$ y como p no es un punto separante de X , se tiene que A no es punto separante de $\mu^{-1}(t)$. Así $S(\mu^{-1}(t)) = \emptyset$. □

A continuación damos un ejemplo para mostrar que tener puntos separantes no es propiedad de Whitney.

3.7 Ejemplo. Sea el continuo T como se describe en el ejemplo 3.2. El conjunto de puntos separantes de T es no vacío, por ejemplo, el vértice es un punto separante de T . Para este continuo existe una función de Whitney μ y existe $t \in (0, \mu(X))$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a una 2-celda, así el conjunto de puntos separantes de $\mu^{-1}(t)$ es vacío. Por lo que la propiedad de tener puntos separantes no es una propiedad de Whitney.

El siguiente ejemplo muestra que la propiedad de no tener puntos separantes no es propiedad reversible de Whitney, y en consecuencia, tampoco propiedad fuerte reversible ni secuencial fuerte reversible de Whitney.

3.8 Ejemplo. Consideremos la dendrita D_3 para la cual el conjunto de puntos de ramificación es denso. Notemos que D_3 tiene puntos separantes. Luego por el teorema 3.3 tenemos que para cualquier función de Whitney μ y para todo $t \in (0, \mu(X))$ $\mu^{-1}(t)$ es un cubo de Hilbert, por lo que el conjunto $\mu^{-1}(t)$ no tiene puntos separantes. Así la propiedad de no tener puntos separantes no es una propiedad reversible de Whitney.

Ahora consideremos la propiedad de que para cada continuo X , $o(X) = X$. En el siguiente ejemplo demostramos que esta propiedad no es reversible de Whitney, y en consecuencia tampoco es propiedad fuerte reversible ni secuencial fuerte reversible de Whitney.

3.9 Ejemplo. Consideremos la dendrita D_3 para la cual el conjunto de puntos de ramificación es denso. Notemos que el conjunto de puntos orilla no es D_3 , pues los puntos de ramificación no son puntos orilla. Luego por el teorema 3.3 tenemos que para cualquier función de Whitney μ y para todo $t \in (0, \mu(X))$ $\mu^{-1}(t)$ es un cubo de Hilbert, por lo que el conjunto de puntos de no corte coincide con el conjunto de puntos no separantes que coinciden con el conjunto $\mu^{-1}(t)$, por lo que el conjunto de puntos orilla de $\mu^{-1}(t)$ es $\mu^{-1}(t)$.

El siguiente ejemplo muestra que la propiedad de que un continuo tenga puntos que no son orilla, es decir, que el conjunto de puntos orilla no es todo el continuo, no es propiedad de Whitney.

3.10 Ejemplo. Sea el continuo T como se describe en el ejemplo 3.2. El conjunto de puntos orilla de T no es todo el continuo T , por ejemplo, el vértice no es un punto orilla de T . Para este continuo existe una función de Whitney μ y existe $t \in (0, \mu(X))$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a una 2-celda, así el conjunto de puntos orilla de $\mu^{-1}(t)$ es todo el nivel. Por lo que la propiedad de que un continuo tenga puntos que no son puntos orilla no es una propiedad de Whitney.

Ahora daremos un ejemplo para el cual la propiedad de que todos los puntos en un continuo son puntos orilla no es una propiedad de Whitney. Cabe resaltar que este ejemplo no se encuentra en la literatura, por lo que trataremos de explicarlo lo mejor posible para que el lector lo pueda entender.

3.11 Ejemplo. Consideremos los siguientes conjuntos

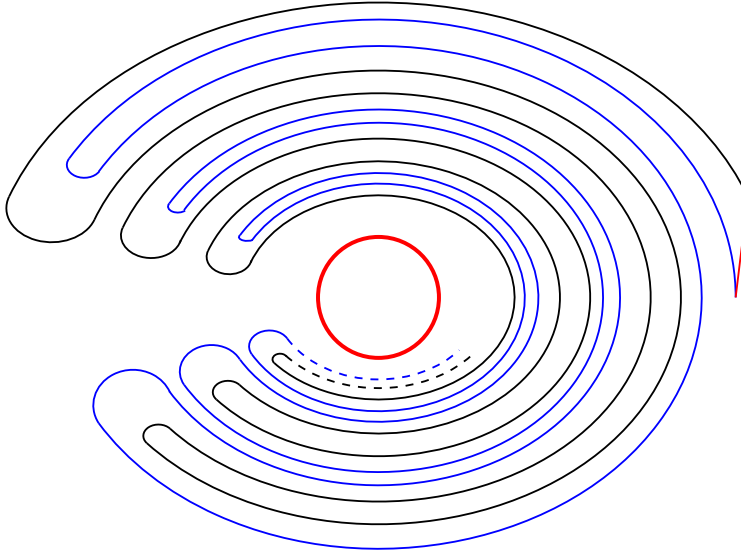
$$E_1 = \left\{ \left(1 + \frac{1}{1+t}\right) (\cos(\pi \sin t), \sin(\pi \sin t), 0) \in \mathbb{R}^3 : t \geq 0 \right\}$$

$$E_2 = \left\{ \left(\left(1 + \frac{1}{1+t}\right) \cos(\pi \sin t), \left(1 + \frac{1}{1+t}\right) \sin(\pi \sin t), \frac{1}{1+t} \right) \in \mathbb{R}^3 : t \geq 0 \right\}$$

$$A = \{(2, 0, t) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq t \leq 1\}$$

$$S^1 = \{(\cos t, \sin t, 0) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq t < 2\pi\}$$

$$\text{Definimos } X = E_1 \cup E_2 \cup A \cup S^1$$



Vamos a demostrar que $o(X) = X$.

Sea $p \in X$ tal que $p \in S^1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$E_n^1 = \{(1 + \frac{1}{1+t})(\cos(\pi \sin t), \sin(\pi \sin t), 0) : 0 \leq t \leq n\} \subseteq E_1$$

$$E_n^2 = \{((1 + \frac{1}{1+t}) \cos(\pi \sin t), (1 + \frac{1}{1+t}) \sin(\pi \sin t), \frac{1}{1+t}) : 0 \leq t \leq n\} \subseteq E_2$$

$$W_n = E_n^1 \cup A \cup E_n^2.$$

Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$, W_n es un subcontinuo de X ya que E_n^1 es un arco en E_1 con puntos extremos $(2, 0, 0)$ y $(1 + \frac{1}{1+n})(\cos(\pi \sin n), \sin(\pi \sin n), 0)$, así un subcontinuo, además $E_n^1 \cap A = \{(2, 0, 0)\}$, por lo que $E_n^1 \cup A$ es un subcontinuo de X . Por otro lado, E_n^2 es un arco en E_2 con putnos extremos $(2, 0, 1)$ y $((1 + \frac{1}{1+n}) \cos(\pi \sin n), (1 + \frac{1}{1+n}) \sin(\pi \sin n), \frac{1}{1+n})$ y $(E_n^1 \cup A) \cap E_n^2 = \{(2, 0, 1)\}$, por lo tanto, $E_n^1 \cup A \cup E_n^2$ es un subcontinuo de X .

Note también que $W_n \subseteq W_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Vamos a mostrar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n = E_1 \cup A \cup E_2$.

$\subseteq$] Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$, $W_n \subseteq E_1 \cup A \cup E_2$, así $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n \subseteq E_1 \cup A \cup E_2$. $\supseteq$] Sea $q \in E_1 \cup A \cup E_2$. Si $q \in A$, entonces $q \in W_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si $q \in E_1$, entonces $q = ((1 + \frac{1}{1+t}) \cos(\pi \sin t), (1 + \frac{1}{1+t}) \sin(\pi \sin t), 0)$ para algún $t \geq 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq t$, entonces $q \in E_n^1$, así $q \in W_n$.

Si $q \in E_2$, entonces $q = ((1 + \frac{1}{1+t}) \cos(\pi \sin t), (1 + \frac{1}{1+t}) \sin(\pi \sin t), \frac{1}{1+t})$ para algún $t \geq 0$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq t$, entonces $q \in E_n^2$, así $q \in W_n$.

Por lo tanto $q \in \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$. Por lo que $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n = E_1 \cup A \cup E_2$.

Ahora veamos que $\overline{E_1 \cup A \cup E_2} = X$.

Obsérvese que $E_1 \cup A \cup E_2 \subseteq X$, por lo que $\overline{E_1 \cup A \cup E_2} \subseteq X$.

Sea $x \in X$.

Si $x \in E_1 \cup A \cup E_2$ no hay nada que mostrar.

Si $x \in S^1$. Por demostrar que existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $E_1 \cup A \cup E_2$ tal que x_n converge a x .

Sea $t \in [-\pi, \pi]$ tal que $x = (\cos t, \sin t, 0)$. Sea $r \in [0, 2\pi)$ tal que $\sin r = \frac{t}{\pi}$.

Denotamos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = (1 + \frac{1}{r+2n\pi+1})(\cos(\pi \sin(r + 2n\pi)), \sin(\pi \sin(r + 2n\pi)), 0).$$

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in E_1$, por lo que $x_n \in E_1 \cup A \cup E_2$.

Observe que

$$x_n = (1 + \frac{1}{r + 2n\pi + 1})(\cos(\pi \sin r), \sin(\pi \sin r), 0)$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + \frac{1}{r + 2n\pi + 1})(\cos t, \sin t, 0) \\
&= (1 + \frac{1}{r + 2n\pi + 1})x.
\end{aligned}$$

Así x_n converge a x . Por lo tanto, $x \in \overline{E_1 \cup A \cup E_2}$.

Se tiene que $\overline{E_1 \cup A \cup E_2} = X$, así $\lim W_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n = \overline{E_1 \cup A \cup E_2} = X$.

Ahora vamos a mostrar que $p \in S^1$ es un punto orilla de X .

Sea $\varepsilon > 0$, como $\lim W_n = X$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $H(X, W_k) < \varepsilon$. Notemos que $W_k \subseteq E_1 \cup A \cup E_2 = X \setminus S^1$, así $p \notin W_k$, por lo que $W_k \subseteq X \setminus \{p\}$. Por lo tanto, p es un punto orilla de X .

Ahora sea $p \in E_1$, entonces $p = (1 + \frac{1}{r+1})(\cos(\pi \sin r), \sin(\pi \sin r), 0)$ para algún $r \geq 0$.

Supongamos que $r > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$E_1^n = \{(1 + \frac{1}{t+1})(\cos(\pi \sin t), \sin(\pi \sin t), 0) : 0 \leq t \leq \max\{0, r - \frac{1}{n}\}\}$$

$$G_1^n = \{(1 + \frac{1}{t+1})(\cos(\pi \sin t), \sin(\pi \sin t), 0) : t \geq r + \frac{1}{n}\}.$$

Sea $W_n = E_1^n \cup G_1^n \cup S^1 \cup E_2 \cup A$.

Obsérvese que para cada $n \in \mathbb{N}$, W_n es un subcontinuo de X .

Sea $n \in \mathbb{N}$, demostraremos que $W_n \subseteq W_{n+1}$. Para esto basta demostrar que $E_1^n \subseteq E_1^{n+1}$ y $G_1^n \subseteq G_1^{n+1}$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$, sea $q \in E_1^n$, entonces $q = (1 + \frac{1}{t+1})(\cos(\pi \sin t), \sin(\pi \sin t), 0)$ con $0 \leq t \leq \max\{0, r - \frac{1}{n}\}$.

Obsérvese que $n \leq n+1$, entonces $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$, así $-\frac{1}{n} \leq -\frac{1}{n+1}$, por lo que $r - \frac{1}{n} \leq r - \frac{1}{n+1}$, luego $\max\{0, r - \frac{1}{n}\} \leq \max\{0, r - \frac{1}{n+1}\}$, así $0 \leq t \leq \max\{0, r - \frac{1}{n+1}\}$, de ahí que $q \in E_1^{n+1}$. Por lo tanto, $E_1^n \subseteq E_1^{n+1}$.

Sea $q \in G_1^n$, entonces $q = (1 + \frac{1}{t+1})(\cos(\pi \sin t), \sin(\pi \sin t), 0)$ con $t \geq r + \frac{1}{n}$.

Nótese que $n \leq n+1$, entonces $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$, así $r + \frac{1}{n+1} \leq r + \frac{1}{n}$. Dado que $t \geq r + \frac{1}{n} \geq r + \frac{1}{n+1}$, por lo que $t \geq r + \frac{1}{n+1}$, se tiene que $q \in G_1^{n+1}$. Así $G_1^n \subseteq G_1^{n+1}$.

Con esto se tiene que $W_n \subseteq W_{n+1}$.

Además $p \notin W_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que $r > 0$ y $\frac{1}{n} > 0$.

Ahora veamos que $\bigcup_n W_n = X \setminus \{p\}$.

$\subseteq$] Note que para cada $n \in \mathbb{N}$ $W_n \subseteq X \setminus \{p\}$, así $\bigcup_n W_n \subseteq X \setminus \{p\}$.

$\supseteq$] Sea $q \in X$ tal que $q \neq p$, entonces $q = (1 + \frac{1}{s+1})(\cos(\pi \sin s), \sin(\pi \sin s), 0)$ con $s \geq 0$.

Caso 1: $r < s$ vamos a demostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s \geq r + \frac{1}{n}$.

Como $r < s$ entonces $0 < s - r$, por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < s - r$, luego $s > r + \frac{1}{n}$, por lo que $q \in G_1^n$.

Caso 2: $s < r$ vamos a demostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq s \leq \max\{0, r - \frac{1}{n}\}$.

Obsérvese que $0 < r - s$, por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r - s$, entonces $s < r - \frac{1}{n} \leq \max\{0, r - \frac{1}{n}\}$, por lo que $q \in E_1^n$.

Así $q \in \bigcup_n W_n$.

Por lo tanto, $\bigcup_n W_n = X \setminus \{p\}$.

En lo que sigue demostraremos que $\overline{\bigcup_n W_n} = X$.

Note que $\overline{X \setminus \{p\}} = X \setminus \{p\}$ o $\overline{X \setminus \{p\}} = X$. Si $\overline{X \setminus \{p\}} = X \setminus \{p\}$ entonces $X \setminus \{p\}$ es cerrado, por lo que $\{p\}$ es abierto y también es cerrado en X , así X no es conexo, lo cual no es cierto. Por lo tanto, $\overline{X \setminus \{p\}} = X$.

Como $\bigcup_n W_n = X \setminus \{p\}$, entonces $\overline{\bigcup_n W_n} = \overline{X \setminus \{p\}} = X$, así $\overline{\bigcup_n W_n} = X$.

Por último veamos que p es un punto orilla de X . Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim W_n = X$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $H(W_k, X) < \varepsilon$. Notemos que $p \notin W_k$, así $W_k \subseteq X \setminus \{p\}$ por lo que p es un punto orilla de X .

Ahora sea $p \in E_2$, entonces $p = ((1 + \frac{1}{r+1})(\cos(\pi \sin r), (1 + \frac{1}{r+1}) \sin(\pi \sin r), \frac{1}{r+1}))$ para algún $r \geq 0$.

Supongamos que $r > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$E_2^n = \{((1 + \frac{1}{t+1})(\cos(\pi \sin t), (1 + \frac{1}{t+1}) \sin(\pi \sin t), \frac{1}{t+1})) : 0 \leq t \leq \max\{0, r - \frac{1}{n}\}\}$$

$$G_2^n = \{((1 + \frac{1}{t+1})(\cos(\pi \sin t), (1 + \frac{1}{t+1}) \sin(\pi \sin t), \frac{1}{t+1})) : t \geq r + \frac{1}{n}\}.$$

$$\text{Sea } W_n = E_2^n \cup A \cup E_1 \cup S^1 \cup G_2^n.$$

Obsérvese que para cada $n \in \mathbb{N}$, W_n es un subcontinuo de X .

Sea $n \in \mathbb{N}$, demostraremos que $W_n \subseteq W_{n+1}$. Para esto basta demostrar que $E_2^n \subseteq E_2^{n+1}$ y $G_2^n \subseteq G_2^{n+1}$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$, sea $q \in E_2^n$, entonces $q = ((1 + \frac{1}{t+1})(\cos(\pi \sin t), (1 + \frac{1}{t+1}) \sin(\pi \sin t), \frac{1}{t+1}))$ con $0 \leq t \leq \max\{0, r - \frac{1}{n}\}$.

Obsérvese que $n \leq n+1$, entonces $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$, así $-\frac{1}{n} \leq -\frac{1}{n+1}$, por lo que $r - \frac{1}{n} \leq r - \frac{1}{n+1}$, luego $\max\{0, r - \frac{1}{n}\} \leq \max\{0, r - \frac{1}{n+1}\}$, así $0 \leq t \leq \max\{0, r - \frac{1}{n+1}\}$, de ahí que $q \in E_2^{n+1}$. Por lo tanto, $E_2^n \subseteq E_2^{n+1}$.

Sea $q \in G_2^n$, entonces $q = ((1 + \frac{1}{t+1})(\cos(\pi \sin t), (1 + \frac{1}{t+1}) \sin(\pi \sin t), \frac{1}{t+1}))$ con $t \geq r + \frac{1}{n}$.

Nótese que $n \leq n+1$, entonces $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$, así $r + \frac{1}{n+1} \leq r + \frac{1}{n}$. Dado que $t \geq r + \frac{1}{n} \geq r + \frac{1}{n+1}$, por lo que $t \geq r + \frac{1}{n+1}$, se tiene que $q \in G_2^{n+1}$. Así $G_2^n \subseteq G_2^{n+1}$.

Con esto se tiene que $W_n \subseteq W_{n+1}$.

Además $p \notin W_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que $r > 0$ y $\frac{1}{n} > 0$.

Ahora veamos que $\bigcup_n W_n = X \setminus \{p\}$.

$\subseteq$] Note que para cada $n \in \mathbb{N}$ $W_n \subseteq X \setminus \{p\}$, así $\bigcup_n W_n \subseteq X \setminus \{p\}$.

$\supseteq$] Sea $q \in X$ tal que $q \neq p$, entonces $q = ((1 + \frac{1}{s+1})(\cos(\pi \sin s), (1 + \frac{1}{s+1}) \sin(\pi \sin s), \frac{1}{s+1}))$ con $s \geq 0$.

Caso 1: $r < s$ vamos a demostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s \geq r + \frac{1}{n}$.

Como $r < s$ entonces $0 < s - r$, por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < s - r$, luego $s > r + \frac{1}{n}$, por lo que $q \in G_2^n$.

Caso 2: $s < r$ vamos a demostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq s \leq \max\{0, r - \frac{1}{n}\}$.

Obsérvese que $0 < r - s$, por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r - s$, entonces $s < r - \frac{1}{n} \leq \max\{0, r - \frac{1}{n}\}$, por lo que $q \in E_1^n$.

Así $q \in \bigcup_n W_n$.

Por lo tanto, $\bigcup_n W_n = X \setminus \{p\}$.

En lo que sigue demostraremos que $\overline{\bigcup_n W_n} = X$.

Note que $\overline{X \setminus \{p\}} = X \setminus \{p\}$ o $\overline{X \setminus \{p\}} = X$. Si $\overline{X \setminus \{p\}} = X \setminus \{p\}$ entonces $X \setminus \{p\}$ es cerrado, por lo que $\{p\}$ es abierto y también es cerrado en X , así X no es conexo, lo cual no es cierto. Por lo tanto, $\overline{X \setminus \{p\}} = X$.

Como $\bigcup_n W_n = X \setminus \{p\}$, entonces $\overline{\bigcup_n W_n} = \overline{X \setminus \{p\}} = X$, así $\overline{\bigcup_n W_n} = X$.

Por último veamos que p es un punto orilla de X . Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim W_n = X$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $H(W_k, X) < \varepsilon$. Notemos que $p \notin W_k$, así $W_k \subseteq X \setminus \{p\}$ por lo que p es un punto orilla de X .

Sea $p \in A$, entonces $p = (2, 0, r)$ para algún $r \in [0, 1]$. Note que si $r = 0$, entonces $p \in E_1$ y si $r = 1$, entonces $p \in E_2$.

Supongamos que $r \in (0, 1)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$A_1^n = \{(2, 0, t) : 0 \leq t \leq \max\{0, r - \frac{1}{n}\}\}$$

$$A_2^n = \{(2, 0, t) : \min\{1, r + \frac{1}{n}\} \leq t \leq 1\}$$

$$\text{Sea } W_n = A_1^n \cup A_2^n \cup E_2 \cup S^1 \cup E_1.$$

Obsérvese que para cada $n \in \mathbb{N}$, W_n es un subcontinuo de X .

Sea $n \in \mathbb{N}$, demostraremos que $W_n \subseteq W_{n+1}$. Para esto basta demostrar que $A_1^n \subseteq A_1^{n+1}$ y $A_2^n \subseteq A_2^{n+1}$.

Sea $q \in A_1^n$, entonces $q = (2, 0, t)$ con $0 \leq t \leq \max\{0, r - \frac{1}{n}\}$.

Obsérvese que $n \leq n+1$, entonces $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$, así $-\frac{1}{n} \leq -\frac{1}{n+1}$, por lo que $r - \frac{1}{n} \leq r - \frac{1}{n+1}$, luego $\max\{0, r - \frac{1}{n}\} \leq \max\{0, r - \frac{1}{n+1}\}$, así $0 \leq t \leq \max\{0, r - \frac{1}{n+1}\}$, por lo que $q \in A_1^{n+1}$.

Sea $q \in A_2^n$, entonces $q = (2, 0, t)$ con $\min\{1, r + \frac{1}{n}\} \leq t \leq 1$.

Nótese que $n \leq n+1$, entonces $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$, así $r + \frac{1}{n+1} \leq r + \frac{1}{n}$, por lo que $\min\{1, r + \frac{1}{n+1}\} \leq \min\{1, r + \frac{1}{n}\}$, así $\min\{1, r + \frac{1}{n+1}\} \leq t \leq 1$, de ahí que $q \in A_2^{n+1}$. Con esto se tiene que $W_n \subseteq W_{n+1}$.

Además $p \notin W_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que $r > 0$ y $\frac{1}{n} > 0$.

Ahora veamos que $\bigcup_n^\infty W_n = X \setminus \{p\}$.

⊆] Note que para cada $n \in \mathbb{N}$ $W_n \subseteq X \setminus \{p\}$, así $\bigcup_n^\infty W_n \subseteq X \setminus \{p\}$.

⊇] Sea $q \in X$ tal que $q \neq p$, entonces $q = (2, 0, s)$ con $0 \leq s \leq 1$.

Caso 1: $r < s$, vamos a demostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\min\{1, r + \frac{1}{n}\} \leq s \leq 1$.

Observe que $0 < s - r$, por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < s - r$, entonces $\frac{1}{n} + r < s$, además $\min\{1, r + \frac{1}{n}\} \leq r + \frac{1}{n}$, por lo que $\min\{1, r + \frac{1}{n}\} \leq s \leq 1$. Así $q \in A_2^n$.

Caso 2: $s < r$, vamos a mostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq s \leq \max\{0, r - \frac{1}{n}\}$.

Observe que $0 < r - s$, por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r - s$, entonces $s < r - \frac{1}{n} \leq \max\{0, r - \frac{1}{n}\}$, así $0 \leq s \leq \max\{0, r - \frac{1}{n}\}$, por lo que $q \in A_1^n$.

Así $q \in \bigcup_n^\infty W_n$, por lo tanto $X \setminus \{p\} \subseteq \bigcup_n^\infty W_n$.

En lo que sigue demostraremos que $\overline{\bigcup_n^\infty W_n} = X$.

Note que $\overline{X \setminus \{p\}} = X \setminus \{p\}$ o $\overline{X \setminus \{p\}} = X$. Si $\overline{X \setminus \{p\}} = X \setminus \{p\}$ entonces $X \setminus \{p\}$ es cerrado, por lo que $\{p\}$ es abierto y también es cerrado en X , así X no es conexo, lo cual no es cierto. Por lo tanto, $\overline{X \setminus \{p\}} = X$.

Como $\bigcup_n^\infty W_n = X \setminus \{p\}$, entonces $\overline{\bigcup_n^\infty W_n} = \overline{X \setminus \{p\}} = X$, así $\overline{\bigcup_n^\infty W_n} = X$.

Por último veamos que p es un punto orilla de X . Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim W_n = X$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $H(W_k, X) < \varepsilon$. Notemos que $p \notin W_k$, así $W_k \subseteq X \setminus \{p\}$ por lo que p es un punto orilla de X .

Sea $p \in A \cap E_1$, entonces $p = (1 + \frac{1}{r+1})(\cos(\pi \sin r), \sin(\pi \sin r), 0)$ con $r = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean

$$E_1^n = \{(1 + \frac{1}{t+1})(\cos(\pi \sin t), \sin(\pi \sin t), 0) : \frac{1}{n} \leq t\} \subseteq E_1$$

$$A^n = \{(2, 0, t) : \frac{1}{n} \leq t \leq 1\} \subseteq A$$

$$\text{Sea } W_n = A_1^n \cup E_2 \cup S^1 \cup E_1^n.$$

Obsérvese que para cada $n \in \mathbb{N}$, W_n es un subcontinuo de X .

Sea $n \in \mathbb{N}$, demostraremos que $W_n \subseteq W_{n+1}$. Para esto basta demostrar que $A^n \subseteq A^{n+1}$ y $E_1^n \subseteq E_1^{n+1}$.

Sea $q \in A^n$, entonces $q = (2, 0, t)$ con $\frac{1}{n} \leq t \leq 1$.

Obsérvese que $n \leq n+1$, entonces $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$, así $\frac{1}{n+1} \leq t \leq 1$, por lo que $q \in A^{n+1}$.

Sea $q \in E_1^n$, entonces $q = (1 + \frac{1}{t+1})(\cos(\pi \sin t), \sin(\pi \sin t), 0)$ con $\frac{1}{n} \leq t$.

Obsérvese que $n \leq n+1$, entonces $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$, así $\frac{1}{n+1} \leq t$, por lo que $q \in E_1^{n+1}$. Así $W_n \subseteq W_{n+1}$.

Note que $p \notin W_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora veamos que $\bigcup_n^\infty W_n = X \setminus \{p\}$.

⊆] Note que para cada $n \in \mathbb{N}$ $W_n \subseteq X \setminus \{p\}$, así $\bigcup_n^\infty W_n \subseteq X \setminus \{p\}$.

⊇] Sea $q \in X$ tal que $q \neq p$.

Caso 1: $q \in E_1$, entonces $q = (1 + \frac{1}{s+1})(\cos(\pi \sin s), \sin(\pi \sin s), 0)$ con $s > 0$. Vamos a mostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s \geq \frac{1}{n}$. Como $s > 0$, entonces por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s \geq \frac{1}{n}$, así $q \in E_1^n$.

Caso 2: $q \in A$, entonces $q = (2, 0, s)$ con $0 < s \leq 1$. Vamos a demostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s \geq \frac{1}{n}$. Como $s > 0$, entonces por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \leq s$, así $\frac{1}{n} \leq s \leq 1$, por lo que $q \in A^n$. Así $q \in \bigcup_n^\infty W_n$. Por lo tanto, $X \setminus \{p\} \subseteq \bigcup_n^\infty W_n$.

En lo que sigue demostraremos que $\overline{\bigcup_n^\infty W_n} = X$.
 Note que $\overline{X \setminus \{p\}} = X \setminus \{p\}$ o $\overline{X \setminus \{p\}} = X$. Si $\overline{X \setminus \{p\}} = X \setminus \{p\}$ entonces $X \setminus \{p\}$ es cerrado, por lo que $\{p\}$ es abierto y también es cerrado en X , así X no es conexo, lo cual no es cierto. Por lo tanto, $\overline{X \setminus \{p\}} = X$.

Como $\bigcup_n^\infty W_n = X \setminus \{p\}$, entonces $\overline{\bigcup_n^\infty W_n} = \overline{X \setminus \{p\}} = X$, así $\overline{\bigcup_n^\infty W_n} = X$.

Por último veamos que p es un punto orilla de X . Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim W_n = X$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $H(W_k, X) < \varepsilon$. Notemos que $p \notin W_k$, así $W_k \subseteq X \setminus \{p\}$ por lo que p es un punto orilla de X .

Sea $p \in A \cap E_2$, entonces $p = ((1 + \frac{1}{r+1}) \cos(\pi \sin r), (1 + \frac{1}{r+1}) \cos(\pi \sin r), \frac{1}{r+1})$ con $r = 0$.
 Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean
 $E_2^n = \{((1 + \frac{1}{t+1}) \cos(\pi \sin t), (1 + \frac{1}{t+1}) \cos(\pi \sin t), \frac{1}{t+1}) : \frac{1}{n} \leq t\} \subseteq E_2$
 $A^n = \{(2, 0, t) : 0 \leq t \leq 1 - \frac{1}{n}\} \subseteq A$.
 Sea $W_n = A^n \cup E_1 \cup S^1 \cup E_2^n$.
 Obsérvese que para cada $n \in \mathbb{N}$, W_n es un subcontinuo de X .
 Sea $n \in \mathbb{N}$, demostraremos que $W_n \subseteq W_{n+1}$. Para esto basta demostrar que $A^n \subseteq A^{n+1}$ y $E_2^n \subseteq E_2^{n+1}$.
 Sea $q \in A^n$, entonces $q = (2, 0, t)$ con $0 \leq t \leq 1 - \frac{1}{n}$.
 Obsérvese que $n \leq n+1$, entonces $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$, así $-\frac{1}{n} \leq -\frac{1}{n+1}$, luego $1 - \frac{1}{n} \leq 1 - \frac{1}{n+1}$, así $0 \leq t \leq 1 - \frac{1}{n+1}$ por lo que $p \in A^{n+1}$.
 Sea $q \in E_2^n$, entonces $q = ((1 + \frac{1}{t+1}) \cos(\pi \sin t), (1 + \frac{1}{t+1}) \cos(\pi \sin t), \frac{1}{t+1})$ con $\frac{1}{n} \leq t$. Obsérvese que $n \leq n+1$, entonces $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$, así $\frac{1}{n+1} \leq t$, por lo que $q \in E_2^{n+1}$. Así $W_n \subseteq W_{n+1}$.
 Note que $p \notin W_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora veamos que $\bigcup_n^\infty W_n = X \setminus \{p\}$.
 $\subseteq$ Note que para cada $n \in \mathbb{N}$ $W_n \subseteq X \setminus \{p\}$, así $\bigcup_n^\infty W_n \subseteq X \setminus \{p\}$.
 $\supseteq$ Sea $q \in X$ tal que $q \neq p$.

Caso 1: $q \in E_2$, entonces $q = ((1 + \frac{1}{s+1}) \cos(\pi \sin s), (1 + \frac{1}{s+1}) \cos(\pi \sin s), \frac{1}{s+1})$ con $s > 0$.
 Vamos a mostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \leq s$. Como $s > 0$, entonces por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \leq s$, así $q \in E_2^n$.

Caso 2: $q \in A$, entonces $q = (2, 0, s)$ con $0 \leq s < 1$. Vamos a demostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq s < 1 - \frac{1}{n}$. Como $s < 1$, entonces $0 < 1 - s$ por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \leq 1 - s$, luego $s \leq 1 - \frac{1}{n}$, así $0 \leq s \leq 1 - \frac{1}{n}$ por lo que $q \in A^n$. Así $q \in \bigcup_n^\infty W_n$. Por lo tanto, $X \setminus \{p\} \subseteq \bigcup_n^\infty W_n$.

En lo que sigue demostraremos que $\overline{\bigcup_n^\infty W_n} = X$.
 Note que $\overline{X \setminus \{p\}} = X \setminus \{p\}$ o $\overline{X \setminus \{p\}} = X$. Si $\overline{X \setminus \{p\}} = X \setminus \{p\}$ entonces $X \setminus \{p\}$ es cerrado, por lo que $\{p\}$ es abierto y también es cerrado en X , así X no es conexo, lo cual no es cierto. Por lo tanto, $\overline{X \setminus \{p\}} = X$.
 Como $\bigcup_n^\infty W_n = X \setminus \{p\}$, entonces $\overline{\bigcup_n^\infty W_n} = \overline{X \setminus \{p\}} = X$, así $\overline{\bigcup_n^\infty W_n} = X$.

Por último veamos que p es un punto orilla de X . Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim W_n = X$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $H(W_k, X) < \varepsilon$. Notemos que $p \notin W_k$, así $W_k \subseteq X \setminus \{p\}$ por lo que p es un

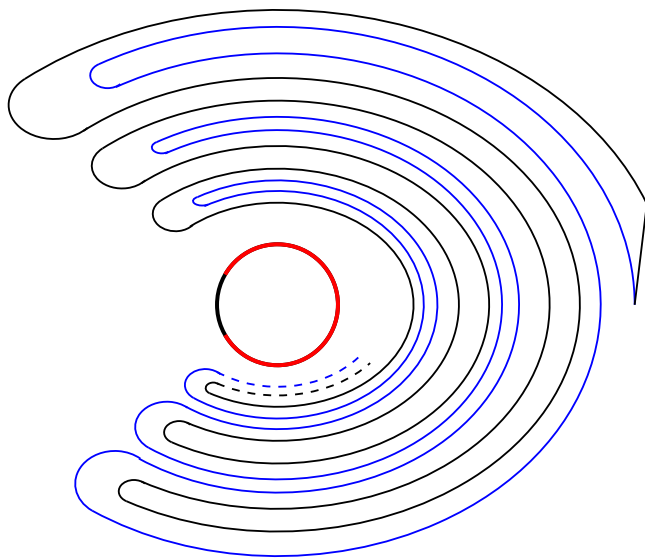
punto orilla de X .

Así, hemos demostrado que todo punto en X es un punto orilla, por lo que todos los puntos en el continuo son orilla.

En lo que sigue, vamos a demostrar que X tiene niveles en los cuales no todos sus puntos son orilla.

Sea $p \in X$, donde $p = (\cos \pi, \sin \pi, 0)$. Sea $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ una función de Whitney para $C(X)$. Sea $t \in (0, 1)$ tal que $t < \mu(S^1)$, se tiene que $\mu^{-1}(t) = \mathcal{C} \cup \mathcal{R}$, donde $\mathcal{C} = \{C \in \mu^{-1}(t) : C \subseteq S^1\}$ y $\mathcal{R} = \{B \in \mu^{-1}(t) : B \subseteq R\}$.

Se tiene que el nivel de Whitney en t es de la siguiente manera:



3.12 Observación.

Observe que $\mathcal{D} \cup \mathcal{R}$ es una compactación de la recta real $\mathbb{R}$, es decir, existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R}$ tal que $\overline{h(\mathbb{R})} = \mathcal{D} \cup \mathcal{R}$, con residuo $\mathcal{D}$, donde $\mathcal{D} = \{D \in \mathcal{C} : p \notin D \text{ o } p \text{ es un punto extremo de } D\}$.

Además, para cada $x \in \mathbb{R}$; $\mathcal{D} \subseteq \overline{h([x, \infty))}$ o $\mathcal{D} \subseteq \overline{h((-\infty, x])}$.

3.13 Lema. Si $\mathcal{L}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$ tal que $\mathcal{L} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ y $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}$.

Demostración. Recordemos que existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R}$ tal que $\overline{h(\mathbb{R})} = \mathcal{D} \cup \mathcal{R}$.

Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$.

Afirmación: $h((-\infty, a]) \subseteq \mathcal{L}$ o $h([a, \infty)) \subseteq \mathcal{L}$.

Para demostrar esto, supongamos que $h((-\infty, a]) \not\subseteq \mathcal{L}$. Demostraremos que $h([a, \infty)) \subseteq \mathcal{L}$.

Fijemos un punto $b \in (-\infty, a]$ tal que $h(b) \notin \mathcal{L}$. Ahora, sea $x \in [a, \infty)$; veremos que $h(x) \in \mathcal{L}$.

Para ésto, denotemos

$$\mathcal{U} = h((b, x))$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{C} \cup h((-\infty, b) \cup (x, \infty))$$

Notemos que $\mu^{-1}(t) \setminus \{h(b), h(x)\} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, también note que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son abiertos ajenos en $\mu^{-1}(t)$ y ambos intersectan a $\mathcal{L}$. Como $\mathcal{L}$ es conexo, se sigue que $\mathcal{L} \cap \{h(b), h(x)\} \neq \emptyset$, pero $h(b) \notin \mathcal{L}$, por lo que $h(x) \in \mathcal{L}$, esto demuestra que $h([a, \infty)) \subseteq \mathcal{L}$, con lo cual se demuestra la afirmación.

Por la Observación 3.12 se tiene que $\mathcal{D} \subseteq \overline{h((-\infty, a])}$ y $\mathcal{D} \subseteq \overline{h([a, \infty))}$, con lo que se concluye que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}$. $\square$

Ahora demostraremos que para todo $D \in \mathcal{D}$ se cumple que D no es un punto orilla de $\mu^{-1}(t)$. Sea $D \in \mathcal{D}$. Fijemos elementos $P \in \mu^{-1}(t) \setminus (\mathcal{D} \cup \mathcal{R})$ y $Q \in \mathcal{R}$. Note que $\mathcal{D} \cup \mathcal{R}$ es un conjunto cerrado en $\mu^{-1}(t)$ por lo que $\mu^{-1}(t) \setminus (\mathcal{D} \cup \mathcal{R})$ es abierto, así, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $B(P, \varepsilon_1) \cap (\mathcal{D} \cup \mathcal{R}) = \emptyset$.

Note también que $\mathcal{R}$ es abierto en $\mu^{-1}(t)$, así, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $B(Q, \varepsilon_2) \cap \mathcal{C} = \emptyset$.

Sea $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, así $B(P, \varepsilon) \cap (\mathcal{D} \cup \mathcal{R}) = \emptyset$ y $B(Q, \varepsilon) \cap \mathcal{C} = \emptyset$.

Veremos que este $\varepsilon > 0$ nos sirve para demostrar que D no es punto orilla de $\mu^{-1}(t)$.

Sea $\mathcal{G}$ un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$ tal que $H(\mu^{-1}(t), \mathcal{G}) < \varepsilon$, entonces para todo $M \in \mu^{-1}(t)$ se tiene que $B(M, \varepsilon) \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, en particular se cumple que $B(P, \varepsilon) \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ y $B(Q, \varepsilon) \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, se sigue que $\mathcal{G} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ y $\mathcal{G} \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$, luego, por el Lema 3.13 se concluye que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{G}$, por lo que $D \in \mathcal{G}$. Esto demuestra que D no es un punto orilla de $\mu^{-1}(t)$.

De esta manera hemos probado que no todos los puntos en el nivel $\mu^{-1}(t)$ son puntos orilla, por lo que la propiedad de que en un continuo todos sus puntos son orilla no es una propiedad de Whitney.

Todo el análisis acerca de los tipos de puntos definidos en el capítulo 2 y su relación con las propiedades de Whitney se puede resumir en la siguiente tabla:

PROPIEDAD	WHITNEY	RW	FRW	SFRW
$ncut(X) \neq X$	NO Ejemplo 3.2	NO Teorema 3.1	NO Corolario del Teorema 3.1	NO Corolario del Teorema 3.1
$ncut(X) = X$	NO Corolario del Teorema 3.1	NO ejemplo 3.4	NO Corolario del ejemplo 3.4	NO Corolario del ejemplo 3.4
$nsep(X) \neq X$	NO Ejemplo 3.7	SÍ Corolario del corolario 3.6	SÍ Corolario del corolario 3.6	SÍ Corolario del corolario 3.6
$nsep(X) = X$	SÍ Corolario 3.6	NO Ejemplo 3.8	NO Corolario del ejemplo 3.8	NO Corolario del ejemplo 3.8
$or(X) \neq X$	NO Ejemplo 3.10			Corolario del ejemplo 3.11
$or(X) = X$	Ejemplo 3.11	NO Ejemplo 3.9	NO Corolario del ejemplo 3.9	NO Corolario del ejemplo 3.9

Bibliografía

- [1] J. T. Goodykoontz, S. B. Nadler, Jr., *Whitney levels in Hyperspaces of certain peano continua*, Transactions of the American Mathematical Society, 1982.
- [2] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1999.
- [3] J. Kelley, *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc. 52 (1942), 22-36.
- [4] E. Matsushashi, *Having cut-points is not a Whitney Reversible Property*, Proceedings of the American Mathematical Society (2009) pgs. 3543-3545.
- [5] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory. An introduction*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.
- [6] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, N. Y., 1978.
- [7] S. B. Nadler, Jr., *Whitney-reversible properties*, Fund. Math. (1980) pgs. 235-248.
- [8] H. Whitney, *Regular families of curves* Annals Math. (1933) pgs. 244-270.
- [9] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading MA, 1970.