



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Análisis de gravedad topológicamente masiva linealizada

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

por

Jorge Hernández Aguilar

Asesorado por

Dr. Alberto Escalante Hernández

Puebla Pue.
03 de septiembre de 2021



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Análisis de gravedad topológicamente masiva linealizada

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

por

Jorge Hernández Aguilar

Asesorado por

Dr. Alberto Escalante Hernández

Puebla Pue.
03 de septiembre de 2021

Título: Análisis de gravedad topológicamente masiva linealizada

Estudiante: JORGE HERNÁNDEZ AGUILAR

COMITÉ

Dr. Gerardo Torres del
Castillo
Presidente

Dra. Mercedes Paulina
Velázquez Quesada
Secretario

Dr. Roberto Cartas
Fuentevilla
Vocal

Dr. Arturo Fernández
Téllez
Suplente

Dr. Cupatitzio Ramírez
Romero
Coasesor

Dr. Alberto Escalante
Hernández
Asesor

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
Publicaciones	V
Introducción	VII
1. Preliminares	1
1.1. Gravedad de Einstein en tres dimensiones	2
1.1.1. Gravedad topológicamente masiva	2
2. Algoritmo de Dirac-Bergmann	5
2.1. Sistemas singulares	5
2.2. Restricciones primarias	6
2.3. Ecuaciones débiles y fuertes	6
2.4. Hamiltoniana canónica y Hamiltoniana primaria	7
2.5. Condiciones de consistencia y restricciones secundarias	8
2.6. Reducibilidad	10
2.7. Hamiltoniana total y condiciones de consistencia sobre multiplicadores	10
2.8. Restricciones de primera y segunda clase	11
2.9. Transformaciones de norma	14
2.10. Grados de libertad	15
2.11. Hamiltoniana y acción extendidas	15
2.12. Paréntesis de Dirac	16
2.13. Observables	16
3. Sistemas con derivadas de orden superior	17
3.1. Teorema de Ostrogradski	17
3.2. Extensión del formalismo de Ostrogradski	19
3.3. Formalismo de Gitman-Lyakhovich-Tyutin	21
3.3.1. Formalismo de Gitman-Lyakhovich-Tyutin para sistemas de segundo orden	22
4. Análisis Hamiltoniano del invariante de Chern-Simons	25
4.1. Análisis Hamiltoniano del término de Chern-Simons linealizado	25
4.2. Restricciones de primera y segunda clase	29
4.3. Conteo de grados de libertad	31
4.4. Paréntesis de Dirac	31
4.5. Acción extendida y Hamiltoniana extendida	32

5. Análisis Hamiltoniano de Gravedad Topológicamente Masiva	35
5.1. Análisis Hamiltoniano de Gravedad Topológicamente Masiva linealizada	35
5.2. Restricciones de primera y segunda clase	38
5.3. Conteo de grados de libertad	40
5.4. Paréntesis de Dirac	41
5.5. Acción extendida y Hamiltoniana extendida	41
6. Conclusiones	45
A. Sobre las ecuaciones de movimiento	47
B. Propiedades del paréntesis de Poisson	51
Bibliografía	53

Agradecimientos

A mi familia, a quienes ofrezco mi más sincero agradecimiento, por su apoyo interminable, amor sincero y por animarme siempre a perseguir mis pasiones.

A mis amigos, con los que he disfrutado y participado en discusiones sobre diversos temas y con quienes compartí las vicisitudes de la vida cotidiana como estudiante.

A mi asesor, el Dr. Alberto Escalante Hernández, con quien estoy profundamente agradecido, por haberme dado la oportunidad de estudiar y trabajar en este apasionante y activo campo de investigación. Este trabajo de tesis no podría haberse completado sin su orientación científica y paciencia infinita, además de sus historias, humor y vasta experiencia.

Al CONACYT por el apoyo económico brindado a lo largo de mis estudios de maestría.

Resumen

En este trabajo de tesis, se realiza un análisis detallado de Gitman-Lyakhovich-Tyutin para gravedad topológicamente masiva con derivadas de orden superior. Se expone la estructura completa de las restricciones, se realiza el conteo de grados de libertad físicos y el álgebra de Dirac entre las restricciones. Además, este análisis presenta una nueva estructura de las restricciones y los resultados obtenidos se comparan con los reportados en la literatura donde se desarrolló un marco estándar a la Ostrogradski.

Publicaciones

- Alberto Escalante and Jorge Hernández-Aguilar, *New canonical analysis for higher order topologically massive gravity*, accepted in European Physical Journal C, (DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-09429-6) (2021). arXiv:2104.08722 [gr-qc].

Introducción

Una teoría de campo clásica puede describirse usando un principio variacional, para Relatividad General (RG) el tensor métrico $g^{\mu\nu}$ es considerado como la variable dinámica de campo fundamental y este describe el campo gravitacional. RG es la teoría que describe la relación entre la distribución local de materia-energía y la geometría del espacio-tiempo. El que RG se haya consolidado como una teoría del campo gravitacional, se debe principalmente a que las predicciones de ésta han sido probadas experimentalmente; como la precesión del perihelio de Mercurio, la deflexión de la luz por objetos masivos, el corrimiento al rojo gravitacional, y recientemente, las ondas gravitacionales provenientes de la colisión de dos agujeros negros, observadas por la colaboraciones LIGO y Virgo [1].

Por otro lado, es bien conocido que en la perspectiva de teoría cuántica de campos, RG está descrita por la propagación de una partícula sin masa de espín 2, llamada el gravitón. Sin embargo, se sabe bien que dentro de la descripción de teoría cuántica de campos RG, en el marco perturbativo, es una teoría que no es renormalizable. De esta manera, con el objetivo de tratar de obtener una descripción cuántica del campo gravitacional, ha sido de particular interés proponer nuevas formulaciones de RG, ya sea a nivel del espacio de configuración o del espacio fase. En efecto, es bien conocido que una manera de comprender la estructura dinámica de RG es por medio de la formulación de Arnowitt, Dessler y Misner, en la llamada formulación (ADM) [2]. La formulación ADM es una descripción canónica del campo gravitacional, donde la variable fundamental deja de ser la métrica y en su lugar se usan la tres-métrica de la foliación del espacio-tiempo y su momento canónico conjugado. En esta formulación, uno encuentra que RG tiene restricciones, y dichas restricciones al ser no polinomiales en los campos complica el proceso de cuantización que hasta ahora, cuantizar RG usando la formulación ADM es un problema abierto. Sin embargo, el panorama llegó a aclararse gracias a los trabajos realizados por Ashtekar en 1986 [3, 4, 5] donde introdujo unas nuevas variables para estudiar la formulación Hamiltoniana de RG. En esencia, Ashtekar encontró una transformación canónica compleja entre las variables ADM y una conexión valuada en el álgebra del grupo $SL(2, C)$. De esta manera, la nueva variable dinámica de la formulación Hamiltoniana de RG sería una conexión compleja, y así RG estaría representada por un campo de norma y se pondría al mismo nivel que una teoría de Yang-Mills. El uso de las variables de Ashtekar llevaría a significantes simplificaciones en las restricciones, pues ahora las restricciones son polinomiales con una estructura sencilla. Sin embargo, debido a que la conexión es compleja, la formulación de Ashtekar describe RG compleja y para extraer los grados de libertad reales es necesario introducir las llamadas condiciones de realidad [3, 4] y dichas condiciones junto con las restricciones complican nuevamente llevar a cabo el proceso de cuantización de RG a la Ashtekar. Por otra parte, en los años 90's F. Barbero encontró una formulación Hamiltoniana de RG expresada en términos de una conexión real. En efecto, la conexión ahora sería valuada en el álgebra del grupo $SO(3)$ [6], sin embargo, la estructura polinomial de las restricciones que se tenía en la formulación de Ashtekar se pierde, y nuevamente la estructura no polinomial de las restricciones, entre otras cosas, complicarían una vez más el proceso de cuantización. En el año 1996, S. Holst introduce un principio de acción el cual contiene un parámetro (llamado parámetro γ o de Barbero-Immirzi) que conecta tanto la formulación compleja de Ashtekar como la formulación real de Barbero [7]. La acción de Holst es muy interesante debido a que de su variación se obtienen

las mismas ecuaciones de movimiento de Einstein y no hay una contribución del parámetro γ , así, clásicamente y a nivel Lagrangiano RG y Holst son equivalentes. Sin embargo, a nivel Hamiltoniano en la estructura simpléctica el parámetro γ tiene una contribución y aún hoy en día, la presencia del parámetro γ es controversial [8]. Después de los trabajos de Ashtekar y Barbero, se han realizado varias formulaciones de RG [9, 10, 11], pero principalmente se han analizado formulaciones que han servido para el desarrollo de la Gravedad Cuántica por Lazos, como la llamada gravedad a la BF [12, 13].

Respecto a lo anterior, debido a la no linealidad que tienen las restricciones de RG, la comunidad ha optado por tratar de formular la versión linealizada o conocida como límite del campo débil de RG [14]. La versión linealizada tiene ciertas ventajas, por un lado las restricciones tienen una estructura menos complicada que la versión original. Por otro lado, el lenguaje perturbativo que se usa en gravedad linealizada es muy familiar al lenguaje que se emplea en teoría cuántica del campo, puesto que hay un espacio tiempo de fondo fijo y en este espacio de fondo, la perturbación gravitacional (gravitón), evoluciona dinámicamente. De esta manera, uno esperaría que las técnicas que se utilizan en teoría cuántica del campo podrían aplicarse a gravedad linealizada, sin embargo, es bien conocido que la teoría linealizada es no renormalizable [15]. En este marco, parece sensato proponer modificaciones a RG, en favor de eludir las patologías ya mencionadas. Respecto a estos puntos, se propone la primera teoría lineal consistente de gravedad masiva, introducida en 1939 por Fierz y Pauli [14], la llamada teoría de Fierz-Pauli [FP]. De forma general, en esta teoría se suma un término de masa de FP a la acción de Einstein-Hilbert con lo cual el gravitón adquiere masa. Con esta modificación, la teoría de FP posee cinco grados de libertad, mientras que como ya se ha mencionado, Einstein-Hilbert tiene dos. Una suposición natural sería que en el límite sin masa, la teoría de FP se redujera a RG, sin embargo, esto no es así. Este es el problema de discontinuidad de Van Dam-Veltman-Zakharov [vDVZ] [16, 17]. Para atender esta problemática, se mostró que la teoría de gravedad masiva en realidad posee un grado de libertad adicional, seis en lugar de cinco; este es el llamado fantasma de Boulware-Deser, lo que hace que la teoría no sea unitaria [18]. Sobre este punto, cabe mencionar que en la literatura se ha tratado de proponer modelos de juguete con el fin de entender y solucionar los problemas que se encuentran al tratar con este tipo de teorías y más aún al tratar de cuantizar gravedad sin perturbar, de tales modelos podemos citar a gravedad en dimensiones menores a cuatro. Por ejemplo, en gravedad bidimensional, es bien conocido que el tensor de Ricci es idénticamente cero y de esta manera es imposible tratar de acoplar campos de materia, por lo que su estudio no ha sido tan atractivo en esta dimensión. Respecto al caso en tres dimensiones [RG-3D], tenemos el inconveniente que gravedad es una teoría topológica, esto es, la teoría carece de grados de libertad físicos, y este hecho hace que también la teoría sea considerada como un modelo trivial. Sin embargo, esto no es del todo cierto debido a que la estructura de las restricciones es muy semejante a la estructura de las restricciones de gravedad real y además uno puede acoplar campos de materia de manera normal sin problemas, recordemos que el acoplamiento de materia es fundamental para tener una descripción general de la dinámica del Universo. Es preciso destacar, que en gravedad tridimensional existe una forma de dotar de grados de libertad a la teoría por medio de una teoría topológica. En analogía con FP, es bien conocido que si uno añade a RG-3D la acción de Chern-Simons, la teoría resultante tiene un grado de libertad físico y además el campo es masivo (por ello el nombre de gravedad topológicamente masiva, TMG por sus siglas en inglés), construyendo así un modelo más cercano a la realidad [19].

Al mismo tiempo, el análisis Hamiltoniano que se utiliza para estudiar teorías de campo que describan una interacción fundamental, se enfoca en el entendimiento de las simetrías presentes en las teorías singulares. El estudio de las llamadas teorías singulares se realiza bajo el formalismo de Dirac [20, 21, 22, 23], que permite estudiar la evolución dinámica tanto a nivel clásico como a nivel cuántico; este esquema de cuantización canónica ha sido la base de teoría cuántica de campos [24, 25, 26], por lo que al analizar nuevos modelos es necesario realizar de forma rigurosa y detallada el formalismo Hamiltoniano. Desafortunadamente, si bien, el algoritmo de Dirac representa un formalismo robusto para el análisis Hamiltoniano de una teoría, éste se desarrolla para Lagrangianas que dependen de sus coordenadas generalizadas y sus primeras derivadas espaciales y temporales,

sin embargo, RG en un contexto no perturbativo y Chern-Simons, dependen de derivadas de orden superior. Para sistemas de orden superior la formulación canónica de sistemas no singulares fue desarrollada por Ostrogradski [27] a mediados del siglo XIX, posteriormente surge el método de Dirac y consecuentemente extensiones de éste para sistemas de alto orden [28, 29]. Actualmente existe una generalización del método de Ostrogradski desarrollado por Gitman-Lyakhovich-Tyutin (GLT) [30, 31], que será el análisis a desarrollar en este trabajo de tesis. Como se verá, el formalismo de GLT consiste en introducir variables extra definidas en el espacio fase de tal manera que sea posible disminuir el orden de la derivación temporal en los campos. De esta manera, al bajar el orden en la derivación, la teoría se vuelve más familiar dentro del contexto de Dirac. Sin embargo, el precio a pagar por bajar el orden de las derivadas es que el método se extiende a realizar un análisis de restricciones que emergen hasta de cuarta generación y eso hace que el desarrollo sea muy extenso.

Motivados por lo anterior, en esta tesis se realiza el análisis Hamiltoniano bajo el enfoque GLT de la acción individual de Chern-Simons y posteriormente para TMG. Este trabajo de tesis se encuentra distribuido de la siguiente manera:

- **Capítulo 1. Preliminares:** se presentan brevemente detalles de Relatividad General en tres dimensiones y las principales características de la teoría de gravedad topológicamente masiva.
- **Capítulo 2. Algoritmo de Dirac-Bergmann:** se hace una revisión detallada del formalismo Hamiltoniano canónico de Dirac para sistemas singulares y el tratamiento de restricciones.
- **Capítulo 3. Sistemas con derivadas de orden superior:** se presenta de forma breve una descripción de la metodología de Ostrogradski para sistemas con derivadas de orden superior, para sistemas no degenerados. Posteriormente, se describen aspectos que permitirán abordar de forma general la formulación de Gitman-Lyakhovich-Tyutin y finalmente se presenta el desarrollo detallado del formalismo para el caso particular que atañe a este trabajo de tesis, que son sistemas con derivadas de hasta segundo orden en el tiempo.
- **Capítulo 4. Análisis Hamiltoniano del invariante de Chern-Simons:** se expone un estudio detallado en el marco de GLT, de la de la teoría de Chern-Simons linealizada, se presenta la estructura de las restricciones y su clasificación, se realiza el conteo de grados de libertad, se construyen los paréntesis de Dirac y se encuentra la Hamiltoniana extendida correspondiente a CS.
- **Capítulo 5. Análisis Hamiltoniano de gravedad topológicamente masiva:** siendo el capítulo que da conclusión a este trabajo de tesis, se presenta el análisis de la teoría TMG linealizada, en el contexto de GLT. Se exponen las restricciones y su clasificación, se realiza el conteo de grados de libertad, se construyen los paréntesis de Dirac y se encuentra la Hamiltoniana extendida correspondiente.

Capítulo 1

Preliminares

La teoría RG es una teoría clásica introducida para unificar los resultados de la relatividad especial con la gravedad Newtoniana, a partir de los conceptos de invariancia general y el principio de equivalencia. Probablemente, el mayor cambio de paradigma que dio Einstein al proponer su teoría fue la idea de interpretar al campo gravitacional como efecto de la curvatura del espacio-tiempo, conectando entonces la dinámica gravitacional con las propiedades de una variedad curva. En RG, el campo físico que describe el campo gravitacional es el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, un tensor simétrico de rango dos que satisface las ecuaciones de Einstein¹

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde Λ es la constante cosmológica, $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento asociado a los campos de materia y $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein definido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.2)$$

aquí, el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y la curvatura escalar R , están definidos por contracciones del tensor de Riemann como sigue

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} \quad \text{y} \quad R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

con el tensor de curvatura de Riemann dado por

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}, \quad (1.4)$$

y donde $\Gamma^\rho{}_{\nu\sigma}$ son conocidos como los símbolos de Christoffel, expresados como

$$\Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}g^{\rho\mu}(\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\sigma}). \quad (1.5)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales de segundo orden en la ecuación (1.1) permite determinar las configuraciones gravitacionales del espacio-tiempo. Aquí y en el resto de este trabajo de tesis, como éste se desarrolla en tres dimensiones se usarán letras griegas para indicar índices de espacio-tiempo, que van de 0 a 2, mientras que usaremos índices latinos que corren sobre 1, 2 para las coordenadas espaciales.

¹La derivación detallada puede encontrarse en el apéndice A

1.1. Gravedad de Einstein en tres dimensiones

Partiendo de la siguiente acción

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int [(R - 2\Lambda) + L_M] \sqrt{-g} d^3x, \quad (1.6)$$

que engloba a Einstein-Hilbert con constante cosmológica Λ y acoplamiento de materia representado por L_M y donde $g = \det(g_{\mu\nu})$ es el determinante del tensor métrico. A continuación, calculando la variación de la acción (1.6) respecto a la métrica uno obtiene las siguientes ecuaciones de movimiento

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

donde $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento asociado a los campos de materia y $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein definido anteriormente.

Ahora bien, aunque el tensor de Riemann, mediante el cual se define parte de las ecuaciones de campo, tenga n^4 componentes (donde n es la dimensión del espacio-tiempo donde esté definido), por las simetrías de éste solo hay $\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$ componentes independientes. Por otro lado, el tensor de Ricci al ser simétrico en sus dos índices tiene $\frac{1}{2}n(n+1)$ componentes independientes. Entonces, como caso especial en dimensión $n = 3$ habrá únicamente seis componentes independientes para ambos, de tal manera que por la relación en (1.3), el tensor de curvatura de Riemann queda enteramente determinado por el tensor de Ricci como sigue [32, 33]

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\mu}R_{\sigma\nu} + g_{\sigma\nu}R_{\rho\mu} - g_{\rho\nu}R_{\sigma\mu} - g_{\sigma\mu}R_{\rho\nu} - \frac{1}{2}R(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}), \quad (1.8)$$

aquí se observa la diferencia estructural entre gravedad en 3+1 y 2+1 dimensiones. Ahora considerando las ecuaciones de campo (1.7) en (1.8), podemos escribir el tensor de Riemann en términos del tensor de energía-momento y si además fijamos $\Lambda = 0$, se obtiene

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \kappa(g_{\rho\mu}T_{\sigma\nu} + g_{\sigma\nu}T_{\rho\mu} - g_{\rho\nu}T_{\sigma\mu} - g_{\sigma\mu}T_{\rho\nu}) + 2\kappa T(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}), \quad (1.9)$$

con T la traza del tensor de energía-momento. Así, en tres dimensiones en el espacio vacío, i.e., $T_{\mu\nu} = 0$, el tensor de Riemann se anula $R_{\rho\sigma\mu\nu} = 0$, por lo que el espacio tiempo es localmente plano. De este modo el espacio plano es solución a las ecuaciones de campo en el vacío ($G_{\mu\nu} = 0$) por lo que en ausencia de materia el espacio-tiempo siempre será plano. Esto convierte a gravedad en 2+1 dimensiones en una teoría topológica sin grados de libertad locales, la curvatura se concentra en regiones con materia y en consecuencia no hay ondas gravitacionales [24, 34].

1.1.1. Gravedad topológicamente masiva

Se ha mostrado que en el vacío gravedad pura no posee grados de libertad físicos, sin embargo, en [19] se propone la siguiente modificación a la acción de Einstein-Hilbert, sumando un término de Chern-Simons de tal manera que la teoría adquiera un grado de libertad (ver [35]),

$$\begin{aligned} S &= S_{EH} + S_{CS} \\ S_{EH} &= \frac{1}{2\kappa} \int R \sqrt{-g} d^3x \\ S_{CS} &= \frac{1}{2\kappa} \int \left[\frac{1}{\mu} \varepsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} (\partial_{\mu} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} + \frac{2}{3} \Gamma_{\mu\xi}^{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\xi}) \right] \sqrt{-g} d^3x, \end{aligned} \quad (1.10)$$

dicha modificación recibe el nombre de gravedad topológicamente masiva. Este término adicional a la acción de Einstein-Hilbert fue estudiada por primera vez en [36]. Aquí el tensor antisimétrico

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

1.1. GRAVEDAD DE EINSTEIN EN TRES DIMENSIONES

tridimensional $\varepsilon^{\lambda\mu\nu} = \frac{\epsilon^{\lambda\mu\nu}}{\sqrt{-g}}$ donde $\epsilon^{\lambda\mu\nu}$ es el símbolo de Levi-Civita y μ es un parámetro [37]. TMG es una teoría no invariante bajo paridad debido al término de Chern-Simons. Para finalizar, tomemos la variación respecto a la métrica de la acción (1.10) que conduce a las ecuaciones de campo²

$$G_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu}C_{\mu\nu} = 0, \quad (1.11)$$

donde

$$C_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu}^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}(R_{\beta\nu} - \frac{1}{4}g_{\beta\nu}R), \quad (1.12)$$

es el tensor de Cotton. El tensor de Cotton es simétrico, $C^{\mu\nu} = C^{\nu\mu}$; sin traza, $C_{\mu}^{\mu} = 0$; covariantemente conservado, $\nabla^{\mu}C_{\mu\nu} = 0$; y se anula si el tensor métrico es conformalmente plano. TMG es una teoría de alto orden en las derivadas de los campos, la acción (1.10) contiene derivadas de tercer orden. En esta dirección se busca un análisis Hamiltoniano en el contexto perturbativo.

²La derivación detallada puede encontrarse en el apéndice A

Capítulo 2

Algoritmo de Dirac-Bergmann

2.1. Sistemas singulares

En este capítulo, se abordarán generalidades de la teoría desarrollada para el estudio de los sistemas que llamaremos singulares, siguiendo [20, 21, 22, 23].

Una forma de exhibir la información sobre un sistema dinámico clásico es construir el funcional acción asociado, que típicamente se escribe

$$S[q^i] = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i(t), \dot{q}^i(t)) dt, \quad (2.1)$$

donde identificamos, q^i , como las coordenadas; \dot{q}^i , como las velocidades; $i = 1, 2, \dots, N$; t , un parámetro de evolución y $L = L(q^i(t), \dot{q}^i(t))$, la función Lagrangiana. Esta función L responde al principio de acción de Hamilton, que a nivel Lagrangiano afirma que: La trayectoria real que sigue un sistema dinámico, de entre las posibles, a través de las configuraciones $q^i(t_1)$ y $q^i(t_2)$, es tal que la acción (2.1) toma un valor extremal (valor estacionario). La condición bajo la cual la integral anterior es extremal, es que la variación respecto de q^i manteniendo los puntos inicial y final fijos, conduzca a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad (2.2)$$

siendo estas las ecuaciones de movimiento. Ahora bien, si se desarrollan las ecuaciones (2.2), las podemos escribir

$$\ddot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}; \quad (2.3)$$

inmediatamente de (2.3), puede verse que las aceleraciones \ddot{q}^i están determinadas de manera única por las posiciones y velocidades si y solo si la matriz $H_{ij} := \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}$ es invertible, esto implica que

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \right) \neq 0. \quad (2.4)$$

El cumplimiento de tal condición es la característica definitiva de los que llamaremos sistemas regulares; si dicha condición no se satisface, el sistema correspondiente se dirá singular.

La anterior construcción, inicialmente concebida para sistemas discretos de partículas se puede reescribir por mero formalismo para una teoría de campo, lo que lleva a la formulación Hamiltoniana para acciones del tipo $S[\varphi]$ o $S[g_{\mu\nu}]$, con φ un campo escalar.

2.2. Restricciones primarias

En dirección de desarrollar el formalismo Hamiltoniano, se definen los momentos canónicos

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad (2.5)$$

y como se ha mencionado, si L describe un sistema singular, ocurre que la matriz (2.4) no es invertible; lo que ahora implicará que las velocidades \dot{q}^i no pueden definirse unívocamente en términos de coordenadas q^i y momentos p_i . Establecido de otra forma, no todos los momentos p_i son independientes y algunos pueden expresarse como una combinación de coordenadas vía las relaciones

$$\phi_m(q^i, p_i) \approx 0, \quad \text{con } m = 1, \dots, M; \quad (2.6)$$

que son las llamadas restricciones primarias¹, y dependen de la naturaleza singular de la Lagrangiana correspondiente.

Ahora, consideremos que se tienen M' ecuaciones independientes de la forma (2.5), esto implica que una cantidad M de momentos p , no puede escribirse en términos de coordenadas q , por lo que M' renglones de la matriz H_{ij} deben ser nulos, a saber, la nulidad de la matriz H_{ij} . Así, si el rango de dicha matriz es $N - M'$, entonces corresponde que el número M' de restricciones primarias, está dado por

$$M' = N - \text{Rank}(H_{ij}). \quad (2.7)$$

Ahora bien, se considera que este rango sea constante en el espacio determinado por (q^i, \dot{q}^i) , esto es, el número de restricciones primarias no varía, con lo cual la superficie definida por las restricciones primarias corresponde a una subvariedad del espacio fase, de dimensión $2N - M'$. Adicionalmente, no existe condición tal que las restricciones (2.6) sean independientes entre sí, por este motivo, en general, $M' \leq M$.

Por otro lado, debe tenerse en cuenta que las restricciones independientes $\phi^{m'}$, no están garantizadas a provenir directamente de (2.5) como lo serán las ϕ^m , si no que pueden presentarse combinaciones de estas últimas, por lo cual es conveniente realizar el cálculo de los vectores nulos de la matriz Hessiana, los cuales por definición, forman una base de la nulidad de H_{ij} . Entonces, sean V^μ los vectores nulos, con V_μ^α sus componentes, y ϕ^α las restricciones primarias que se han encontrado, las restricciones primarias independientes estarán dadas por

$$\Phi_\mu = V_\mu^\alpha \phi^\alpha. \quad (2.8)$$

2.3. Ecuaciones débiles y fuertes

De forma general, en este contexto, el símbolo \approx se lee *débilmente igual* y significa que la anulación de las funciones ϕ_m está restringida a las soluciones reales de las ecuaciones de movimiento, y no en todo el espacio fase. En otras palabras, las funciones ϕ_m definen una subvariedad del espacio fase Γ , y su paréntesis de Poisson con las variables canónicas es, en general, diferente de cero. Como consecuencia, cualesquiera dos funciones $\mu(q, p)$, $\nu(q, p)$ definidas en el espacio fase que coinciden en la subvariedad de restricciones se dicen débilmente iguales, y se puede escribir $\mu \approx \nu$.

También, puede verse que, en general, una función G que sea débilmente cero, $G \approx 0$, puede escribirse como una combinación lineal de restricciones, esto es, $G = f_m \phi^m$, con f_m alguna función del espacio fase. Por otro lado, una igualdad que se satisface en todo el espacio fase y no

¹Se dicen primarias, por el hecho de que su existencia no depende de las soluciones a las ecuaciones de movimiento

sólo en la subvariedad $\phi \approx 0$, recibe el nombre de *fuerte*, y se utiliza el símbolo $=$ para representarla.

De manera formal, para definir igualdades débiles y fuertes, tenemos lo siguiente:

■ **Definición I**

Una funcional F del espacio fase, se dice *débilmente* cero si

$$F|_{\Sigma_1} = 0 \quad (2.9)$$

donde Σ_1 es la subvariedad definida por las restricciones primarias, en (2.6).

■ **Definición II**

Una funcional F del espacio fase, se dice *fuertemente* igual a cero si

$$F|_{\Sigma_1} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial F}{\partial q^i}, \frac{\partial F}{\partial p^i} \right) |_{\Sigma_1} = 0 \quad (2.10)$$

con $\left(\frac{\partial F}{\partial q^i}, \frac{\partial F}{\partial p^i} \right) |_{\Sigma_1} = 0$ el conjunto formado por todas las derivadas parciales de F con respecto a las variables canónicas, evaluadas en Σ_1 .

2.4. Hamiltoniana canónica y Hamiltoniana primaria

La transición a la formulación de la mecánica Hamiltoniana está mediada por la transformada de Legendre, y a pesar de estar tratando con sistemas singulares, podemos definir la Hamiltoniana canónica como es usual

$$H_C := \dot{q}^i p_i - L. \quad (2.11)$$

No obstante, si consideramos la variación de (2.11)

$$\delta H_C = \dot{q}^i \delta p_i + \delta \dot{q}^i p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i = \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i, \quad (2.12)$$

se pone de manifiesto que H_C es una función solamente de p y q , las cuales no son independientes entre sí debido a la existencia de restricciones primarias. Sin embargo, es deseable que el formalismo sea extendido para todo el espacio fase Γ , para esto, usando (2.11), puede escribirse la acción como

$$S[q^i] = \int_{t_1}^{t_1} [p_i(t) \dot{q}^i(t) - H(p_i(t), q^i(t))] dt. \quad (2.13)$$

Ahora bien, así como en el formalismo de Lagrange las restricciones son consideradas a través del acoplamiento de multiplicadores, esto también puede hacerse dentro de la formulación de Hamilton. De modo que, si tomamos la transformación de Legendre, (2.11), y acoplamos las restricciones primarias (2.6) en analogía al formalismo Lagrangiano, la acción en (2.13) toma la forma

$$S[q^i] = \int_{t_1}^{t_1} [p_i(t) \dot{q}^i(t) - H(p_i(t), q^i(t)) - u^m \phi_m(q^i(t), p_i(t))] dt. \quad (2.14)$$

Ahora, tomando la variación de la acción (2.14) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S[q^i] &= \int_{t_1}^{t_1} \delta [p_i(t) \dot{q}^i(t) - H(p_i(t), q^i(t)) - u^m \phi_m(q^i(t), p_i(t))] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_1} [\delta p_i \dot{q}^i + p_i \delta \dot{q}^i - \delta H - \delta u^m \phi_m - u^m \delta \phi_m] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_1} \left[\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i} \right) \delta q^i + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p^i} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p^i} \right) \delta p^i - \phi_m \delta u^m \right] dt, \end{aligned} \quad (2.15)$$

CAPÍTULO 2. ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN
2.5. CONDICIONES DE CONSISTENCIA Y RESTRICCIONES SECUNDARIAS

donde, si la trayectoria clásica es obtenida mediante el principio de mínima acción, para variaciones arbitrarias de δq^i , δp^i y δu^m , sujetas a las condiciones $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$, es posible obtener las ecuaciones de movimiento siguientes

$$\dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}, \quad (2.16)$$

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p^i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p^i}, \quad (2.17)$$

$$\phi_m = 0. \quad (2.18)$$

Las ecuaciones (2.16) y (2.17) corresponden a las ecuaciones de movimiento de Hamilton, mientras que (2.18) es el conjunto de restricciones primarias. Con base en lo anterior, salta a la vista que la teoría es invariante bajo la transformación $H_C \rightarrow H_C + u^m \phi_m$.

Por otro lado, si se definen los paréntesis de Poisson entre dos funciones F y G del espacio fase como

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad (2.19)$$

las ecuaciones de movimiento de Hamilton (2.16) y (2.18), pueden reescribirse como sigue

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} + u^m \{p_i, \phi_m\}, \quad (2.20)$$

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\} + u^m \{q^i, \phi_m\}. \quad (2.21)$$

Así, para una función del espacio fase F , es claro que la ecuación de movimiento puede expresarse como

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} \\ &= \frac{\partial F}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q^i} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i} \right) + \frac{\partial F}{\partial q^i} \left(\frac{\partial H}{\partial p^i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p^i} \right) \\ &= \{F, H\} + u^m \{F, \phi_m\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

De modo que en virtud de las propiedades del paréntesis de Poisson², si definimos a la Hamiltoniana primaria mediante

$$H_1 := H_C + u^m \phi_m, \quad (2.23)$$

las ecuaciones de movimiento para la función F se escriben como

$$\dot{F} \approx \{F, H_1\}, \quad (2.24)$$

donde H_1 posee toda la información que se tiene del sistema hasta el momento.

2.5. Condiciones de consistencia y restricciones secundarias

Es de esperarse que cuando el sistema evolucione en el tiempo, se necesite imponer algunas condiciones para evitar que este no salga de la subvariedad definida por las restricciones, dicho de otra manera, la evolución del sistema debe preservar las restricciones en el tiempo, esto es, $\dot{\phi}^m \approx 0$. Estas condiciones en lo sucesivo recibirán el nombre de *condiciones de consistencia*, las cuales pueden escribirse como

$$\dot{\phi}^m = \{\phi^m, H_1\} = \{\phi^m, H_C\} + u_n \{\phi^m, \phi^n\} \approx 0, \quad (2.25)$$

²Sírvase de visitar el apéndice B para las propiedades mencionadas

CAPÍTULO 2. ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN
2.5. CONDICIONES DE CONSISTENCIA Y RESTRICCIONES SECUNDARIAS

expresión que puede considerarse corresponde a un sistema de m ecuaciones lineales, no homogéneo, para los multiplicadores u^m , cuyo comportamiento determinará si será posible hallar todos o algunos multiplicadores. Para lo anterior, definimos

$$h^m := \{\phi^m, H_C\} \quad \text{y} \quad W^{mn} := \{\phi^m, \phi^n\}, \quad (2.26)$$

que permiten reescribir el sistema de ecuaciones (2.25) de manera compacta, como

$$h^m + u_n W^{mn} \approx 0, \quad (2.27)$$

o en forma matricial

$$h + Wu \approx 0, \quad (2.28)$$

donde h y u son los vectores columna cuyas entradas son h^m y u_n respectivamente, mientras que W es la matriz cuyas entradas son W^{mn} . De forma que se pueden resumir en los siguientes casos:

- **Caso I:** $h \neq 0$ (No todas $h^m \approx 0$), y $\det(W) \neq 0$.

Dado que $\det(W) \neq 0$, la inversa de W existe, por lo que todos los multiplicadores de Lagrange pueden ser hallados y quedarán determinados por

$$u = -W^{-1}h \quad \rightarrow \quad u_m = -W_{mn}^{-1} \{\phi^n, H_C\}. \quad (2.29)$$

De este modo, si se sustituye la expresión (2.29) en (2.24), las ecuaciones de movimiento quedan

$$\dot{F} = \{F, H_C\} - \{F, \phi_m\} W_{mn}^{-1} \{\phi^n, H_C\} := \{F, H_C\}_D, \quad (2.30)$$

que es la definición del *paréntesis de Dirac*, el cual se tratará en lo posterior.

- **Caso II:** $h \neq 0$ y $\det(W) = 0$.

En vista de que $\det(W) = 0$, sólo K (rango de W) multiplicadores podrán despejarse, mientras que M' (nulidad de W) multiplicadores quedarán indeterminados, por lo cual, la teoría aún contendrá funciones arbitrarias, lo cual es de interés en las teorías de norma. Por otra parte, sean V^i los vectores nulos de W ($i = 1, 2, \dots, M'$), que por definición satisfacen

$$WV^i \approx 0, \quad (2.31)$$

así, con (2.28) es posible obtener

$$hV^i \approx 0, \quad (2.32)$$

que, en general, son funciones del espacio fase independientes de los multiplicadores. Estas i relaciones conllevan la existencia de i restricciones adicionales, las cuales reciben el nombre de *restricciones secundarias*.

- **Caso III:** $h = 0$ y $\det(W) \neq 0$.

Si se observa la ecuación (2.28), se obtiene directamente

$$Wu \approx 0, \quad (2.33)$$

que de los teoremas de sistemas de ecuaciones lineales, es sabido que sólo posee solución trivial, esto es, todos los multiplicadores deben ser idénticamente cero y conlleva que $H_1 = H_C$. Además, si $h \approx 0$, se presentan dificultades para su tratamiento, para evitarlo, debe imponerse como restricción secundaria que $\det(W) \approx 0$.

- **Caso IV:** $h = 0$ y $\det(W) = 0$.

Para este último caso, de la ecuación (2.28), al igual que para el caso III, se tendrá

$$Wu \approx 0, \quad (2.34)$$

no obstante, dado que ahora $\det(W) = 0$, solamente M' multiplicadores podrán ser débilmente determinados. Cabe destacar que el hecho de que h sea cero pudiese provenir de una Hamiltoniana nula, esto es, $H_C = 0$, con lo cual se presentarían problemas para definir la evolución temporal del sistema.

Finalmente, puede concluirse que el número total de restricciones es igual a la nulidad de la matriz formada por los paréntesis de Poisson entre las restricciones primarias y el rango nos dirá cuántos multiplicadores se esperan encontrar. Entonces, ya agotada la información proveniente de las relaciones de consistencia sobre las restricciones primarias y con la adición de restricciones secundarias, puede construirse una Hamiltoniana secundaria, la cual contendrá información de todas las restrcciones halladas hasta ahora, tanto primarias como secundarias, esta será

$$H_2 := H_C + u_m \phi^m, \quad (2.35)$$

donde ϕ^i son todas las restricciones, y con esto las ecuaciones de movimiento deberán tomar la forma

$$\dot{F} = \{F, H_C + u_i \phi^i\} := \{F, H_2\}. \quad (2.36)$$

En virtud de las condiciones de consistencia, también se requiere que las restricciones secundarias sean preservadas en el tiempo, esto implicará iterar sobre los pasos anteriores ahora aplicados a las restricciones secundarias. Si terminado este proceso aparecen nuevas restricciones, que pueden llamarse *terciarias*, el proceso debe repetirse nuevamente, hasta el momento en que no aparezcan nuevas restricciones, este proceso termina después de un número finito de iteraciones.

2.6. Reductibilidad

Puede ocurrir que el conjunto de restricciones ϕ_i , no sean independientes entre sí, esto es, que algunas puedan expresarse mediante una transformación a partir de las otras, se dice que la teoría presenta *reductibilidad*, de otro modo, se dice que se tiene el caso *irreducible*.

2.7. Hamiltoniana total y condiciones de consistencia sobre multiplicadores

Teniendo el conjunto completo de restricciones ϕ_m (primarias, secundarias, terciarias,...), es posible definir a la Hamiltoniana total como

$$H_T := H_C + u_m \phi^m, \quad (2.37)$$

con la cual se procede a analizar las condiciones sobre los multiplicadores. Tomando las condiciones de consistencia (2.25)

$$\dot{\phi}^m = \{\phi^m, H_C\} + u_n \{\phi^m, \phi^n\} := \{\phi^m, H_T\} \approx 0, \quad (2.38)$$

donde $m, n = 1, \dots, j$, con j el número total de restricciones.

Como se ha mencionado en apartados anteriores, las relaciones de consistencia nos dan un sistema de ecuaciones lineales para los multiplicadores u , cuya solución general puede escribirse como sigue

$$u^n = U^n + V^n, \quad (2.39)$$

CAPÍTULO 2. ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN
2.8. RESTRICCIONES DE PRIMERA Y SEGUNDA CLASE

donde U^n es la solución particular a las ecuaciones inhomogéneas y V^n la solución general del sistema homogéneo, esto es

$$V^n \{ \phi_m, \phi_n \} \approx 0. \quad (2.40)$$

Asimismo V^n puede ser escrita como una combinación lineal de soluciones independientes del sistema homogéneo, es decir, $V^n = v^i V_i^n$, donde $i = 1, \dots, k$, con k el número de soluciones independientes del sistema homogéneo, con lo que es posible reescribir las soluciones (2.39) como

$$u^n = U^n + v^i V_i^n. \quad (2.41)$$

Ahora bien, tomando en cuenta que las funciones v^i son arbitrarias, entonces las u^n pueden separarse en una parte que se fije mediante las condiciones de consistencia y otra que permanezca indeterminada, lo cual debe verse reflejado en la Hamiltoniana total, y por supuesto en las ecuaciones de movimiento. Así, sustituyendo (2.41) en la Hamiltoniana total, tenemos

$$\begin{aligned} H_T &= H_C + u^n \phi_n \\ &= H_C + (U^n + v^i V_i^n) \phi_n \\ &= H_C + U^n \phi_n + v^i V_i^n \phi_n \\ &= H_C + U^n \phi_n + v^i \phi_i, \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde se definió $v^i V_i^n \phi_n = v^i \phi_i$. A continuación, introducimos (2.41) en las ecuaciones de movimiento, de forma que la evolución temporal para cualquier función F del espacio fase resulta

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \{F, H_T\} \\ &= \{F, H_C + U^n \phi_n + v^i \phi_i\} \\ &= \{F, H' + v^i \phi_i\} \\ &= \{F, H'\} + \{F, v^i \phi_i\} \\ &= \{F, H'\} + v^i \{F, \phi_i\}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde se ha definido $H' := H_C + U^n \phi_n$.

Estas ecuaciones contienen k funciones arbitrarias y por construcción son equivalentes a las ecuaciones de Lagrange. El hecho de que aparezcan funciones arbitrarias marca una diferencia fundamental, dado que las condiciones iniciales ya no tienen una evolución única, sino que permanecen indeterminadas hasta funciones arbitrarias.

2.8. Restricciones de primera y segunda clase

Hasta ahora, para la obtención de restricciones mediante la aplicación de condiciones de consistencia, no ha sido necesario marcar una diferencia sustancial entre restricciones primarias y secundarias, ya que se tratan al mismo nivel. No obstante, es posible, y resultará de gran utilidad, separar las restricciones entre de primera y segunda clase, bajo los siguientes términos:

- **Definición III:** Sea F una funcional del espacio fase, se dirá de *primera clase* si el paréntesis de Poisson con todas las restricciones es débilmente cero, esto es

$$\{F, \phi^m\} \approx 0, \quad (2.44)$$

donde $m = 1, \dots, j$, con j el número total de restricciones; en otro caso, se dice que F es de *segunda clase*.

CAPÍTULO 2. ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN
2.8. RESTRICCIONES DE PRIMERA Y SEGUNDA CLASE

Ahora bien, si F es de primera clase (bajo la definición anterior), entonces $\{F, \phi^m\}$ debe ser fuertemente igual a alguna combinación lineal de restricciones ϕ , puesto que las ϕ son las únicas cantidades independientes que son débilmente cero, por tanto

$$\{F, \phi^m\} = f_p^m \phi^p. \quad (2.45)$$

En el mismo espíritu, abordemos el siguiente teorema:

- **Teorema I:** El paréntesis de Poisson de dos cantidades de primera clase, es también de primera clase.

Prueba:

Sean F y G funcionales de primera clase, entonces $\{F, \phi^m\} = f_p^m \phi^p$ y $\{G, \phi^m\} = g_p^m \phi^p$, de tal forma que si tomamos $\{\{F, G\}, \phi^m\}$ tendremos

$$\begin{aligned} \{\{F, G\}, \phi^m\} &= \{\{F, \phi^m\}, G\} - \{\{G, \phi^m\}, F\} \\ &= \{f_p^m \phi^p, G\} - \{g_p^m \phi^p, F\} \\ &= f_p^m \{\phi^p, G\} + \{f_p^m \phi^p, G\} \phi^p - g_p^m \{\phi^p, F\} - \{g_p^m \phi^p, F\} \phi^p \\ &= (f_p^m g_a^p - g_p^m f_a^p) \phi^a + (\{f_p^m, G\} - \{g_p^m, F\}) \phi^p \\ &= h_p^m \phi^p \approx 0, \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde hemos utilizado la identidad de Jacobi (ver apéndice B). ■

En adición, podemos aplicar la definición III de funciones de primera y segunda clase a las restricciones que se han obtenido, entonces consideremos

$$\{\phi_l, \phi_n\} = \{V_l^i \phi_i, \phi_n\} = V_l^i \{\phi_i, \phi_n\} + \{V_l^i, \phi_n\} \phi_i \approx V_l^i \{\phi_i, \phi_n\}, \quad (2.47)$$

que recordando V_l^i es la solución al sistema homogéneo de ecuaciones para los multiplicadores u , esto conlleva

$$V_l^i \{\phi_i, \phi_n\} \approx 0 \rightarrow \{\phi_i, \phi_n\} \approx 0, \quad (2.48)$$

es decir, ϕ_i es una restricción de primera clase.

De la misma manera, se puede probar que H' , definida en la sección anterior, es de primera clase, para ello, consideremos el paréntesis de Poisson con todas las restricciones, esto es

$$\{H', \phi^m\} = \{H_C + U_n \phi^n, \phi^m\} = \{H_C, \phi^m\} + U_n \{\phi^n, \phi^m\} + \{U_n, \phi^m\} \phi^n, \quad (2.49)$$

donde el tercer término se anula, y de forma sutil, observamos que sumando la expresión (2.48), que equivale a un cero débil, obtenemos

$$\begin{aligned} \{H', \phi^m\} &= \{H_C, \phi^m\} + U_n \{\phi^n, \phi^m\} + v_n \{\phi^n, \phi^m\} \\ &= \{H_C + U_n \phi^n + v_n \phi^n, \phi^m\} \\ &= \{H_T, \phi^m\} \approx 0, \end{aligned} \quad (2.50)$$

que se satisface por condiciones de consistencia.

A las restricciones que cumplan la definición III, recibirán el nombre de restricciones de primera clase y se denotarán con γ ; entretanto, aquellas cuyo paréntesis de Poisson no sea débilmente cero con al menos una de las k restricciones se llamarán restricciones de segunda clase y se denotarán por χ . Esta clasificación no siempre es inmediata, es decir, las restricciones de primera clase no tiene por qué ser directamente alguna de las restricciones primarias o secundarias,

CAPÍTULO 2. ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN
2.8. RESTRICCIONES DE PRIMERA Y SEGUNDA CLASE

en general, pueden ser combinación de éstas. Para encontrarlas correctamente, habrá que fijarse en los vectores nulos de la matriz cuyas entradas son los paréntesis de Poisson entre las restricciones, para después contraerlos con las k restricciones y finalmente hallar las restricciones de primera clase correctas. Para lo anterior, atendamos la matriz

$$W'_{\alpha\beta} = \{\phi_\alpha, \phi_\beta\}, \quad (2.51)$$

de dimensión $k \times k$ y donde ϕ_α son todas las restricciones primarias y secundarias encontradas y k el número total de éstas.

- **Proposición 1:** Si $\det W' \approx 0$, entonces hay R restricciones de primera clase (con R el rango de la matriz W').

Prueba:

Si $\det W' = 0$, en la superficie de restricciones, entonces el rango de W' es $R < k$ y la nulidad de W' debera ser $k - R \neq 0$, con lo que pueden encontrarse $(k - R)$ vectores nulos, denotados por ω_i con $(i = 1, \dots, k - R)$, de forma que

$$\omega_i^\alpha \{\phi_\alpha, \phi_\beta\} \approx 0, \quad (2.52)$$

que a su vez, de la misma definición de vectores nulos, se tenga

$$\{\omega_i^\alpha \phi_\alpha, \phi_\beta\} \approx 0 \quad , \quad \forall \phi_\beta \in \Phi \quad (2.53)$$

donde $\Phi = \{\phi_\beta | \phi_\beta \text{ una restricción primaria o secundaria}\}$. De esta forma, es evidente que las restricciones $\omega_i^\alpha \phi_\alpha$ forman un conjunto de $(k - R)$ restricciones de primera clase. Por lo tanto, las restricciones de primera clase de la teoría resultan

$$\gamma_i := \omega_i^\alpha \phi_\alpha. \quad (2.54)$$

■

Ya probada la proposición, cabe destacar que al mismo tiempo se presenta una forma sistemática de hallar las restricciones de primera clase.

Ahora bien, la matriz cuyas entradas corresponden a los paréntesis de Poisson de las restricciones, puede arreglarse de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 W'^{\alpha\beta} &= \begin{matrix} & \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_k \\ \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_k \end{matrix} & \begin{pmatrix} \{\phi_1, \phi_1\} & \{\phi_1, \phi_2\} & \cdots & \{\phi_1, \phi_k\} \\ \{\phi_2, \phi_1\} & \{\phi_2, \phi_2\} & \cdots & \{\phi_2, \phi_k\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\phi_k, \phi_1\} & \{\phi_k, \phi_2\} & \cdots & \{\phi_k, \phi_k\} \end{pmatrix} \end{matrix} \\
 &= \begin{matrix} & \gamma_i & \chi_\beta \\ \begin{matrix} \gamma_i \\ \chi_\beta \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \end{matrix} \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

donde $C_{\alpha\beta}$ es una matriz de dimensión $R \times R$, antisimétrica e invertible sobre la superficie de restricciones, explícitamente dada por

$$C_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \chi_\beta\}. \quad (2.56)$$

Dado que C es una matriz $R \times R$, con R el número de restricciones de segunda clase, y además coincide con el rango de W' , éste debe ser par.

Prueba:

Como C es una matriz antisimétrica y utilizando las propiedades del determinante, se tiene

$$\det(C) = \det(C^t) = \det(-C) = (-1)^R \det(C), \quad (2.57)$$

si el rango R , fuese impar, se tendría

$$\det(C) = -\det(C) \rightarrow \det(C) = 0. \quad (2.58)$$

Por contradicción, R debe ser par. ■

2.9. Transformaciones de norma

Hasta este punto, se han abordado maneras de hallar los multiplicadores u asociados a la teoría, no obstante, la presencia de dichos multiplicadores arbitrarios ya sea en las ecuaciones de movimiento o en las soluciones, conlleva que las variables del espacio fase q^i y p_i no pueden ser determinadas de forma única partiendo de condiciones iniciales, por lo tanto, no tiene un significado físico. Sin embargo, a nivel clásico, se trata de teorías deterministas, por lo que dos estados que comparten mismas condiciones iniciales no deberían ser físicamente diferentes.

Para aterrizar este concepto, consideremos un sistema que posea restricciones de primera clase y funciones del espacio fase $F(t)$ y $F'(t)$ con multiplicadores distintos, pero bajo las mismas condiciones iniciales t_0 , y además se utilizará el desarrollo en serie de Taylor a primer orden, de tal forma que para ambos estados tenemos

$$\begin{aligned} F(t) &= F(t_0) + \dot{F} \delta t \\ &= F(t_0) + (\{F, H'\} + v_i \{F, \phi^i\}) \delta t, \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} F'(t) &= F(t_0) + \dot{F}' \delta t \\ &= F(t_0) + (\{F, H'\} + v'_i \{F, \phi^i\}) \delta t, \end{aligned} \quad (2.60)$$

respectivamente. Ahora bien, si se restan ambas ecuaciones, se tendrá

$$\delta F(t) = F(t) - F'(t) = (v_i - v'_i) \{F, \phi^i\} \delta t := \delta v_i \{F, \phi^i\}, \quad (2.61)$$

donde se ha definido $(v_i - v'_i) \delta t = \delta v_i$. Con lo anterior, salta a la vista que el estado físico del sistema se mantiene inalterado bajo estas transformaciones, dado que el estado de un sistema no puede depender de la elección arbitraria de los parámetros. Por tanto, se concluye que las restricciones de primera clase generan transformaciones que no afectan al estado físico del sistema, y son éstas a las que se les conoce como transformaciones de norma. Adicionalmente, si atendemos la aplicación sucesiva de dos transformaciones del tipo (2.61), con parámetros δv_i y $\delta v'_i$ se obtiene un resultado que dependerá del orden de las transformaciones, de tal forma que la diferencia entre los dos posibles resultados queda como

$$\begin{aligned} (\delta \delta' - \delta' \delta) F(t) &= \delta v_i \delta v'_j [\{ \{G, \gamma^j\}, \gamma^i \} - \{ \{G, \gamma^i\}, \gamma^j \}] \\ &= \delta v_i \delta v'_j \{ \{G, \gamma^i\}, \gamma^j \}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

donde se han utilizado propiedades del paréntesis de Poisson, en especial la identidad de Jacobi. Sin embargo, el paréntesis de dos restricciones de primera clase es fuertemente igual a una combinación lineal de restricciones de primera clase, esto es

$$\{ \gamma^i, \gamma^j \} = D_m^{ij} \gamma^m. \quad (2.63)$$

Estos resultados, permiten concluir que la cantidad $\{\gamma^i, \gamma^j\}$ es también el generador de una transformación de norma.

2.10. Grados de libertad

Ya que las restricciones se han clasificado en de primera y segunda clase, puede llevarse a cabo el conteo de grados de libertad, bajo la siguiente definición,

- **Definición IV:** los grados de libertad de un sistema dinámico son el número de variables físicas independientes necesarias y suficientes para describir dicho sistema.

El conteo se hace de la siguiente manera:

$$GL = \frac{1}{2} [(NVC) - (NRSC) - 2(NRPC)], \quad (2.64)$$

donde, NVC = Número de variables canónicas, $NRSC$ = Número de restricciones de segunda clase y $NRPC$ = Número de restricciones de primera clase. El factor $\frac{1}{2}$ es para compensar el hecho de que los grados de libertad se refieren a las coordenadas generalizadas q^i , mientras que en este enfoque al considerar todas las variables canónicas también se considera a los momentos generalizados p_i ; el 2 que acompaña al número de restricciones de primera clase es debido a su doble rol, tanto de restricciones como el ser generadoras de transformaciones de norma, dicho de otra manera, la teoría presenta restricciones y transformaciones de norma, que pueden verse como condiciones adicionales que cumple la teoría.

2.11. Hamiltoniana y acción extendidas

Si bien la Hamiltoniana total como se ha definido en secciones anteriores, contiene todas las restricciones, primarias y secundarias, en esta aún no se hace distinción entre restricciones de primera y segunda clase. Dirac conjeturó que todas las restricciones de primera clase son generadoras de transformaciones de norma, y propuso escribir las ecuaciones de movimiento recurriendo a una Hamiltoniana que contenga la información de las restricciones de primera y segunda clase, a la Hamiltoniana que permite llevar esta distinción se le conoce como Hamiltoniana extendida, y se encuentra definida como

$$H_E = H' + v_m \gamma^m, \quad (2.65)$$

donde H' mantiene la forma en que se ha definido anteriormente

$$H' = H_C + U_m \chi^m, \quad (2.66)$$

Por añadidura, usando esta Hamiltoniana, la ecuación de movimiento debe escribirse como

$$\dot{F} = \{F, H_E\}. \quad (2.67)$$

Con base en la sección anterior, salta a la vista que para las variables dinámicas invariantes de norma, la evolución dinámica dada ya sea por H_1 , H' o H_E es la misma. Para cualquier otra variable, es imperativo utilizar la Hamiltoniana extendida H_E , ya que ésta considera toda la libertad de norma del sistema. La introducción de una Hamiltoniana extendida es una característica única del formalismo Hamiltoniano que incluye de forma explícita la invariancia de norma. Por otra parte, puede construirse una acción de la forma

$$S_E = [q, p, v] = \int (p_n \dot{q}^n - H' - v_a \gamma^a) dt = \int (p_n \dot{q}^n - H_E) dt, \quad (2.68)$$

que recibe el nombre de *acción extendida* y contiene toda la información del sistema, además que de ésta se obtienen por ecuaciones de movimiento (2.67), en conjunto con

$$\phi^a = \gamma^a \approx 0. \quad (2.69)$$

2.12. Paréntesis de Dirac

Se definen los paréntesis de Dirac entre dos funciones del espacio fase F y G como

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \{F, \chi^\alpha\} C_{\alpha\beta}^{-1} \{\chi^\beta, G\}, \quad (2.70)$$

donde $\{, \}$ es el paréntesis de Poisson (ver apéndice B); $C_{\alpha\beta}^{-1}$ la inversa de la matriz (2.56) de modo que

$$C^{\alpha\beta} C_{\beta\gamma}^{-1} = \delta_\gamma^\alpha. \quad (2.71)$$

El paréntesis de Dirac cumple las siguientes propiedades: Sean F , G y K funciones arbitrarias del espacio fase

- Antisimetría: $\{F, G\}_D = -\{G, F\}_D$.
- Regla del producto o regla de Leibniz: $\{FG, K\}_D = F\{G, K\}_D + \{F, K\}_D G$.
- Existencia de elementos nulos: $\{c, F\}_D = 0$, $\forall c$ constante.
- Identidad de Jacobi: $\{F, \{G, K\}_D\}_D + \{K, \{F, G\}_D\}_D + \{G, \{K, F\}_D\}_D = 0$.
- Linealidad: $\{c_1 F + c_2 G, K\}_D = c_1 \{F, K\}_D + c_2 \{G, K\}_D$, con c_1 y c_2 constantes.
- Para F de primera clase y G arbitraria: $\{F, G\}_D = \{F, G\}$.
- $\{\chi^\alpha, F\}_D = 0$, $\forall F$.

La demostración del conjunto de propiedades anteriores no se tratará en este trabajo.

Cabe resaltar que las ecuaciones de movimiento (2.67) en virtud de la sexta propiedad listada, además del hecho que la Hamiltoniana extendida H_E es de primera clase, pueden reescribirse como

$$\dot{F} = \{F, H_E\}_D, \quad (2.72)$$

y por los mismos argumentos, el efecto de una transformación de norma se puede escribir como

$$\{F, \gamma^a\}_D \approx \{F, \gamma^a\}, \quad \forall F. \quad (2.73)$$

2.13. Observables

Una observable clásica es, por definición en este formalismo, una función en la subvariedad definida por las restricciones que es invariante de norma, o dicho de otra forma, una observable es una función O del espacio fase, cuyo paréntesis de Dirac es débilmente cero con las restricciones de primera clase y su evolución está completamente determinada, esto es

$$\{O, \gamma^\alpha\}_D \approx 0. \quad (2.74)$$

Para terminar, cabe mencionar que las observables clásicas no necesariamente lo serán a nivel cuántico, y finalmente que este trabajo no pretende dar un significado experimental a las observables, ya que se escapa del alcance de éste.

Capítulo 3

Sistemas con derivadas de orden superior

3.1. Teorema de Ostrogradski

En el estudio de sistemas dinámicos, figura el llamado teorema de Ostrogradski [27], que demuestra la existencia de una inestabilidad en la función Hamiltoniana, la cual consiste en que dicha función no se encontrará acotada inferiormente, pudiendo tomar entonces la energía valores arbitrariamente pequeños y negativos de forma que no pueda encontrarse un mínimo de energía. Para comenzar, siguiendo [38], se presenta la construcción de Ostrogradski, sin embargo, nos restringiremos al caso de una dimensión para fijar conceptos y notación.

Reduciendo al caso en una dimensión a la acción (2.1), se tendrá por Lagrangiana la función

$$L = L(q, \dot{q}), \quad (3.1)$$

donde q es la posición y \dot{q} la primera derivada temporal, en otras palabras, la velocidad. Por otro lado, las ecuaciones que describen la evolución del sistema serán las provenientes del principio de acción enunciado en el capítulo 1, a saber, las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (3.2)$$

En otro orden de ideas, cuando el sistema es no degenerado¹², la ecuación (3.2), puede tomar la forma

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q}), \quad (3.3)$$

que es expresamente una ecuación de segundo orden en derivadas temporales, lo que implica que la solución necesita dos condiciones iniciales, por ejemplo: el valor que toma la coordenada y el de su primera derivada en algún momento inicial; de forma complementaria, contar el número de condiciones iniciales necesarias para tener un problema de Cauchy bien definido proporciona la dimensión del espacio fase. Así, la evolución del sistema es descrita por una trayectoria en un espacio fase bidimensional en dos coordenadas canónicas Q y P definidas por

$$Q \equiv q, \quad P \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad (3.4)$$

¹En el sentido expuesto en el capítulo 1

²La condición de no degeneración no es necesaria para aplicar el teorema, no obstante, en aras de sencillez se supone aquí. Se puede encontrar un tratamiento general en las referencias dadas anteriormente.

CAPÍTULO 3. SISTEMAS CON DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR
3.1. TEOREMA DE OSTROGRADSKI

mismas que son invertibles debido a la no degeneración. La Hamiltoniana puede obtenerse de forma usual, vía transformada de Legendre, esto es

$$H(Q, P) \equiv P\dot{q}(Q, P) - L(q(Q, P), \dot{q}(Q, P)). \quad (3.5)$$

Con base en los puntos anteriores, ahora introducimos un sistema descrito por la Lagrangiana

$$L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}), \quad (3.6)$$

donde la tercera variable de la que depende la Lagrangiana, corresponde a la segunda derivada temporal, es decir, la aceleración. Si introducimos la Lagrangiana (3.6) al principio de acción enunciado en el capítulo 1, este conducirá a las ecuaciones

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) = 0, \quad (3.7)$$

que a su vez, al desarrollarse pueden verse como

$$q^{(4)} = F(q, \dot{q}, \ddot{q}, q^{(3)}). \quad (3.8)$$

Ahora, el número de condiciones iniciales necesarias habrá aumentado a cuatro, al igual que la dimensión del espacio fase. Continuando de forma análoga al caso anterior, el conjunto de variables canónicas será

$$Q_1 \equiv q \quad , \quad Q_2 \equiv \dot{q}, \quad (3.9)$$

$$P_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \quad , \quad P_2 \equiv \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}. \quad (3.10)$$

En este punto es importante señalar que aunque el espacio fase es de dimensión cuatro, la Lagrangiana solo depende de tres variables independientes, q , \dot{q} y \ddot{q} . Este hecho combinado con la no degeneración, nos permite encontrar las transformaciones inversas que permiten escribir a las variables del espacio de configuración en términos de tres variables del espacio de fase y usarlas para escribir la Hamiltoniana del sistema como

$$H(Q_1, Q_2, P_1, P_2) \equiv P_1 Q_2 + P_2 \ddot{q}(Q_1, Q_2, P_2) - L(q(Q_1, Q_2, P_2), \dot{q}(Q_1, Q_2, P_2), \ddot{q}(Q_1, Q_2, P_2)). \quad (3.11)$$

De la expresión anterior salta a la vista que la Hamiltoniana trae consigo algunas complicaciones; es lineal en el momento P_1 , lo que significa que ningún sistema de esta forma puede ser estable, ya que dicho momento puede ser infinitamente negativo, esto significa que algún grado de libertad del sistema puede tener arbitrariamente energía infinitamente negativa, por lo que no es posible hallar un estado mínimo de energía. Dado que observamos que todos los sistemas físicos tienen un estado estable o de mínima energía, modelos que presenten esta inestabilidad no pueden describir el mundo físico de manera consistente. No obstante, nótese lo robusto de la generalidad del resultado: se aplica a cualquier Lagrangiana $L(q, \dot{q}, \ddot{q})$ que no sea degenerada. La única suposición hasta ahora es la no degeneración, y eso significa que no es posible eliminar \ddot{q} por integración parcial. En este sentido, Newton tenía razón al suponer que las leyes de la física toman la forma (3.3) cuando se expresan en términos de variables dinámicas.

Asimismo, atendiendo el caso general de dependencia de un número arbitrario N de derivadas, esto es, $L = L(q, \dot{q}, \dots, q^{(N)})$; similarmente al par de casos anteriores, las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes serán

$$\sum_{i=0}^N \left(-\frac{d}{dt} \right)^i \frac{\partial L}{\partial q^{(i)}} = 0, \quad (3.12)$$

CAPÍTULO 3. SISTEMAS CON DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR
3.2. EXTENSIÓN DEL FORMALISMO DE OSTROGRADSKI

que en el caso de sistemas no degenerados tomarán la forma

$$q^{(2N)} = F\left(q, \dot{q}, \dots, q^{(2N-1)}\right). \quad (3.13)$$

En consecuencia, la solución demanda $2N$ condiciones iniciales y el espacio fase será $2N$ dimensional. Igualmente, se asignan las variables canónicas de Ostrogradski

$$Q_i \equiv q^{(i-1)}, \quad P_i \equiv \sum_{j=i}^N \left(-\frac{d}{dt}\right)^{j-i} \frac{\partial L}{\partial q^{(j)}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.14)$$

y así, es posible resolver para $q^{(N)}$ en términos de P_N y Q_i ; con lo anterior construimos la Hamiltoniana de forma usual como sigue

$$H(Q_i, P_i) = \sum_{i=1}^N P_i q^{(i)} - L. \quad (3.15)$$

Así como en el caso anterior, la Hamiltoniana es lineal en P_1, \dots, P_{N-1} , y solo con respecto a P_N podría estar acotada por abajo. Por lo tanto, la Hamiltoniana es necesariamente inestable.

Para resumir, el Teorema de Ostrogradski puede establecerse de la siguiente manera [38]: si una Lagrangiana no degenerada contiene derivadas en el tiempo de orden superior, hay al menos una inestabilidad lineal en la Hamiltoniana de este sistema.

De manera general, algunos comentarios pueden hacerse. Está claro que la construcción de Ostrogradski es aplicable solo a aquellas Lagrangianas con derivadas de orden superior no degeneradas, es decir, la Lagrangiana $L = L(q, \dot{q}, \dots, q^{(N)})$ no puede dar lugar a restricciones de ningún tipo; las Lagrangianas restringidas de orden superior están más allá del alcance del enfoque de Ostrogradski.

3.2. Extensión del formalismo de Ostrogradski

Para analizar sistemas singulares con derivadas de orden superior, es conveniente extender los resultados del desarrollo de Ostrogradski de la sección anterior para teorías de campo y aterrizar en la llamada generalización de Gitman-Lyakhovich-Tyutin [30, 31]. Entrando en materia, tomemos la Lagrangiana de una teoría de campo, para lo que es conveniente suponer que será una función de g^α , con $\alpha = 1, \dots, n$, y sus derivadas temporales hasta algunos órdenes N_α , de forma que $N_\alpha \geq \tilde{N}_\alpha$, $N_\alpha > 0$, donde \tilde{N}_α son los órdenes de las derivadas más altas de g que realmente entran en L . De esta forma, puede escribirse a la Lagrangiana como

$$L = L(g, \partial_\mu g, \partial_\mu \partial_\nu g, \dots), \quad (3.16)$$

la cual, bajo una variación de la acción correspondiente respecto de los campos g^α , conduce a las ecuaciones de movimiento

$$\frac{\delta S}{\delta g^\alpha} = \sum_{l=0}^{N_\alpha} (-1)^l \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_l} \frac{\partial L}{\partial g_{\mu_1, \dots, \mu_l}^\alpha}, \quad (3.17)$$

donde el orden más alto de derivación que pueden tener es igual a $N + N_\alpha$, con $N = \max N_\alpha$. Por lo tanto, es natural referirse a todas las ecuaciones que contienen solo $g^\alpha, g^{\alpha(1)}, \dots, g^{\alpha(N+N_\alpha-1)}$ como las restricciones en el formalismo Lagrangiano (para teorías con derivadas de hasta orden N_α). Por otra parte, consideremos la matriz

$$M_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial g^{\alpha(N_\alpha)} \partial g^{\beta(N_\beta)}}, \quad (3.18)$$

CAPÍTULO 3. SISTEMAS CON DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR
3.2. EXTENSIÓN DEL FORMALISMO DE OSTROGRADSKI

que en analogía con lo expuesto en capítulo 2, será la Hessiana para una teoría con derivadas de orden superior y cuyo determinante permitirá definir el carácter singular de una teoría. Una teoría con Lagrangiana L , que considere derivadas de hasta orden N_α recibe el nombre de singular si el determinante de la Hessiana (3.18) es cero, de otra forma la teoría se dice no singular. Ciertamente, para una teoría no singular $N_\alpha = \tilde{N}_\alpha$.

Si una teoría es singular, puede demostrarse [30] que de forma general, en el formalismo Lagrangiano existen restricciones, y las ecuaciones de movimiento pueden ser degeneradas. Si las ecuaciones de movimiento son degeneradas, éstas están relacionadas por identidades y el número de identidades corresponde al grado de degeneración. Esto último indica la invariancia de la acción bajo transformaciones de norma con un número correspondiente de parámetros. Sin embargo, cabe señalar que para las teorías no singulares con derivadas superiores, las ecuaciones de movimiento de Lagrange no son degeneradas y, por lo tanto, no se estará tratando con teorías de norma.

A fin de extender la formulación Hamiltoniana del capítulo 2 a sistemas con derivadas de orden superior, partimos de introducir las variables

$$q_s^\alpha = g^{\alpha(s-1)} \quad y \quad v^\alpha = g^{\alpha(N_\alpha)}, \quad s = 1, \dots, N_\alpha. \quad (3.19)$$

Ahora, denotaremos a la Lagrangiana en que aplicaremos los cambios de variables (3.19) por L^v y consideraremos la acción

$$S = \int \left[L^v + \sum_{s=0}^{N_\alpha-1} p_\alpha^s (\dot{q}_s^\alpha - q_{s+1}^\alpha) + (\dot{q}_{N_\alpha}^\alpha - v^\alpha) \right] dt, \quad (3.20)$$

con $\dot{q}_s^\alpha = q_{s+1}^\alpha$ y $\dot{q}_{N_\alpha}^\alpha = v^\alpha$. De manera que las ecuaciones de movimiento correspondientes tendrán la forma

$$\dot{p}_\alpha^1 = \frac{\partial L^v}{\partial q_1^\alpha}, \quad (3.21)$$

$$\dot{p}_\alpha^{s+1} = \frac{\partial L^v}{\partial q_{s+1}^\alpha} - p_\alpha^s, \quad s = 1, \dots, N_\alpha - 1, \quad (3.22)$$

$$\dot{q}_s^\alpha = q_{s+1}^\alpha, \quad \dot{q}_{N_\alpha}^\alpha = v^\alpha, \quad s = 1, \dots, N_\alpha - 1, \quad (3.23)$$

$$p_\alpha^{N_\alpha} = \frac{\partial L^v}{\partial v^\alpha}. \quad (3.24)$$

Las variables p_α^s corresponderán a los momentos canónicos conjugados a las coordenadas q_s^α , que desde el punto de vista variacional de la acción (3.20) son tratados como multiplicadores.

Las ecuaciones (3.21-3.24), en el sector, $q_1^\alpha \equiv g^\alpha$, son equivalentes a las ecuaciones de Lagrange (3.17). En efecto, combinando las ecuaciones (3.22) y (3.24), además de volver a las variables originales, se obtiene

$$p_\alpha^s = \sum_{l=s}^{N_\alpha} (-1)^{l-s} \frac{d^{l-s}}{dt^{l-s}} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha(l)}} \right), \quad s = 1, \dots, N_\alpha. \quad (3.25)$$

Ahora bien, si se introduce la función Hamiltoniana

$$H = \sum_{s=1}^{N_\alpha-1} p_\alpha^s q_{s+1}^\alpha + p_\alpha^{N_\alpha} v^\alpha - L^v, \quad (3.26)$$

las ecuaciones (3.21-3.24), pueden reescribirse como

$$\dot{q}_s^\alpha = \{q_s^\alpha, H\}, \quad (3.27)$$

CAPÍTULO 3. SISTEMAS CON DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR
3.3. FORMALISMO DE GITMAN-LYAKHOVICH-TYUTIN

$$\dot{p}_\alpha^s = \{p_\alpha^s, H\}, \quad s = 1, \dots, N_\alpha, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial H}{\partial v^\alpha} = 0. \quad (3.29)$$

Adicionalmente, la acción (3.20) con la introducción de la función H toma la forma

$$S = \int \left[\sum_{s=1}^{N_\alpha} p_\alpha^s \dot{q}_s^\alpha - H \right] dt. \quad (3.30)$$

3.3. Formalismo de Gitman-Lyakhovich-Tyutin

Hasta este punto tenemos los ingredientes necesarios para considerar una teoría singular. En este caso, las ecuaciones (3.29) no poseen solución para cada v , por tanto el marco de Ostrogradski no es aplicable directamente; sin embargo, al igual que en el capítulo 2, consideremos que el determinante de la Hessiana, definida en (3.18), es cero, y además definimos

$$\text{rango}(M_{\alpha\beta}) = R, \quad n - R = m > 0. \quad (3.31)$$

Ahora bien, se enumerarán las coordenadas de tal manera que el menor del rango máximo en la matriz se ubique en la esquina superior izquierda. Dado esto, las variables v^α y $p_\alpha^{N_\alpha}$ se dividen en dos grupos:

$$\begin{aligned} V^i &= v^i, & P_i &= p_i^{N_i}, & i &= 1, \dots, R, \\ \lambda^\alpha &= v^{R+\alpha}, & \pi_\alpha &= p_{R+\alpha}^{N_{R+\alpha}}, & \alpha &= 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial V^i \partial V^j} \right) \neq 0, \quad (3.33)$$

donde, la condición (3.33) permite escribir todas las V 's de las primeras R ecuaciones en (3.29) como

$$V^i = \tilde{V}^i(q, P, \lambda). \quad (3.34)$$

A continuación, sustituyendo (3.34) en las ecuaciones restantes de (3.29), e introduciendo la notación

$$f_a = \frac{\partial L^v}{\partial \lambda^a} \Big|_{V=\tilde{V}} = \frac{\partial \overline{L}^v}{\partial \lambda^a}, \quad (3.35)$$

$$\Phi_a^1 = \frac{\partial H}{\partial \lambda^a} \Big|_{V=\tilde{V}} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \lambda^a}, \quad (3.36)$$

se obtienen las relaciones

$$\Phi_a^1 = \pi_a - f(q, P), \quad (3.37)$$

que no contienen λ . Éstas resultan ser restricciones y corresponderán a las restricciones primarias, así como en el formalismo para teorías sin derivadas de orden superior desarrollado en el capítulo 2. Asimismo, si se sustituye (3.34) en las ecuaciones de movimiento (3.27) y (3.28), estas resultan

$$\dot{q}_s^\alpha = \{q_s^\alpha, H^1\}, \quad (3.38)$$

$$\dot{p}_\alpha^s = \{P_\alpha^s, H^1\}, \quad (3.39)$$

$$\Phi_a^1 = 0, \quad (3.40)$$

donde $H^1 = H + \lambda^a \Phi_a^1$, es la Hamiltoniana primaria.

De modo que, en virtud del capítulo 2, salta a la vista que hasta este punto, para teorías singulares con derivadas de orden superior, dado que se tienen las restricciones primarias y en consecuencia la Hamiltoniana primaria, es posible proceder de forma análoga a la formulación de Dirac para un análisis Hamiltoniano. Así, bastará extender los resultados del capítulo 2 a estas teorías una vez teniendo las restricciones primarias, como se realizará en los capítulos 4 y 5 para las teorías que son objeto de estudio en este trabajo de tesis.

3.3.1. Formalismo de Gitman-Lyakhovich-Tyutin para sistemas de segundo orden

De manera particular, las teorías a tratar en este trabajo, en el contexto perturbativo en que se hará el análisis, están descritas con a lo más derivadas temporales de segundo orden, por lo cual en esta subsección se desarrolla el formalismo GLT para la obtención de restricciones primarias y la información fundamental para proceder a la Dirac, específicamente para sistemas de segundo orden.

Partiendo de una lagrangiana L que depende de segundas derivadas de los campos

$$L = L(g_{\mu\nu}; g_{\mu\nu,\alpha}; g_{\mu\nu,\alpha\beta}), \quad (3.41)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica y $g_{\mu\nu,\alpha}$, $g_{\mu\nu,\alpha\beta}$ su primera y segunda derivada, respectivamente. La variación de la acción formada por la Lagrangiana (3.41) respecto a la métrica, conduce al equivalente de las ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas de segundo orden con la forma [39]

$$E^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha g_{\mu\nu})} \right) + \partial_\beta \partial_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\beta \partial_\alpha g_{\mu\nu})} \right) = 0. \quad (3.42)$$

Sin embargo, si se desarrollan las derivadas de las ecuaciones en (3.42) originan una ecuación de movimiento de hasta cuarto orden en derivadas de la métrica, por lo que trabajar con este tipo de sistemas complica el análisis Hamiltoniano. Es por esto, que un mejor enfoque consiste en introducir ciertas variables, a fin de obtener una reducción a primer orden en las derivadas temporales de los campos, que es donde encuentra su base la metodología de GLT [30]. Entonces, siguiendo [31, 40], la Lagrangiana (3.41) puede reexpresarse separando las derivadas espaciales de las temporales como

$$L = L(g_{\mu\nu}; g_{\mu\nu,0}; g_{\mu\nu,k}; g_{\mu\nu,00}; g_{\mu\nu,0k}; g_{\mu\nu,0}; g_{\mu\nu,km}), \quad (3.43)$$

ahora se introducen las siguientes variables

$$G_{\mu\nu} = \dot{g}_{\mu\nu} \quad \text{y} \quad v_{\mu\nu} = \dot{G}_{\mu\nu}, \quad (3.44)$$

con las que podemos representar a la Lagrangiana (3.43) como sigue

$$L^v = L^v(g_{\mu\nu}; G_{\mu\nu}; g_{\mu\nu,k}; v_{\mu\nu}; G_{\mu\nu,k}; g_{\mu\nu,km}). \quad (3.45)$$

La introducción de las variables en (3.44) a (3.43) obliga a introducir estas mismas como restricciones mediante multiplicadores de Lagrange en la acción, de forma que

$$S = \int \tilde{L} d^n x = \int \left[L^v + \pi^{\mu\nu} (\dot{g}_{\mu\nu} - G_{\mu\nu}) + P^{\mu\nu} (\dot{G}_{\mu\nu} - v_{\mu\nu}) \right] d^n x, \quad (3.46)$$

los multiplicadores $\pi^{\mu\nu}$ y $P^{\mu\nu}$ actúan como los momentos conjugados a $g_{\mu\nu}$ y $G_{\mu\nu}$ respectivamente. Entonces, variando la acción (3.46), podemos obtener las siguientes ecuaciones de movimiento exigiendo que las variaciones se anulen en la frontera

$$\frac{\delta \tilde{L}}{\delta \pi^{\mu\nu}} = \dot{g}_{\mu\nu} - G_{\mu\nu} = 0, \quad (3.47)$$

$$\frac{\delta \tilde{L}}{\delta P^{\mu\nu}} = \dot{G}_{\mu\nu} - v_{\mu\nu} = 0, \quad (3.48)$$

$$\frac{\delta \tilde{L}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial L^v}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_k \left(\frac{\partial L^v}{\partial (\partial_k g_{\mu\nu})} \right) + \partial_k \partial_m \left(\frac{\partial L^v}{\partial (\partial_k \partial_m g_{\mu\nu})} \right) - \dot{\pi}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.49)$$

CAPÍTULO 3. SISTEMAS CON DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR
3.3. FORMALISMO DE GITMAN-LYAKHOVICH-TYUTIN

$$\frac{\delta \tilde{L}}{\delta G_{\mu\nu}} = \frac{\partial L^v}{\partial G_{\mu\nu}} - \partial_k \left(\frac{\partial L^v}{\partial (\partial_k G_{\mu\nu})} \right) - \pi^{\mu\nu} - \dot{P}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.50)$$

$$\frac{\delta \tilde{L}}{\delta v^{\mu\nu}} = \frac{\partial L^v}{\partial v^{\mu\nu}} - P^{\mu\nu} = 0. \quad (3.51)$$

Estas ecuaciones son las equivalentes a las ecuaciones en (3.42). Ahora bien, al poder escribir un sistema de segundo orden en derivadas temporales como uno de primer orden, podemos escribir la Hamiltoniana de la forma usual

$$H = \pi^{\mu\nu} \dot{g}_{\mu\nu} + P^{\mu\nu} \dot{G}_{\mu\nu} - \tilde{L} = \pi^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + P^{\mu\nu} v_{\mu\nu} - L^v. \quad (3.52)$$

Una vez teniendo la Hamiltoniana, los paréntesis de Poisson fundamentales asociados a ésta son

$$\{g_{\alpha\beta}, \pi^{\mu\nu}\} = \{G_{\alpha\beta}, P^{\mu\nu}\} = \frac{1}{2} (\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta + \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha), \quad (3.53)$$

y el paréntesis de Poisson de cualesquiera dos funcionales A y B respecto de las variables canónicas serán

$$\{A, B\} = \frac{\delta A}{\delta g_{\mu\nu}} \frac{\delta B}{\delta \pi^{\mu\nu}} + \frac{\delta A}{\delta G_{\mu\nu}} \frac{\delta B}{\delta P^{\mu\nu}} - \frac{\delta B}{\delta g_{\mu\nu}} \frac{\delta A}{\delta \pi^{\mu\nu}} - \frac{\delta B}{\delta G_{\mu\nu}} \frac{\delta A}{\delta P^{\mu\nu}}, \quad (3.54)$$

de tal forma que las ecuaciones de movimiento asociadas a las variables canónicas siguiendo el formalismo Hamiltoniano usual resultan

$$\dot{g}_{\mu\nu} = \{g_{\mu\nu}, H\} = \frac{\delta H}{\delta \pi^{\mu\nu}} = G_{\mu\nu}, \quad (3.55)$$

$$\dot{G}_{\mu\nu} = \{G_{\mu\nu}, H\} = \frac{\delta H}{\delta P^{\mu\nu}} = v_{\mu\nu}, \quad (3.56)$$

$$\dot{\pi}^{\mu\nu} = \{\pi^{\mu\nu}, H\} = -\frac{\delta H}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\delta L^v}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (3.57)$$

$$\dot{P}^{\mu\nu} = \{P^{\mu\nu}, H\} = -\frac{\delta H}{\delta G_{\mu\nu}} = \frac{\delta L^v}{\delta G_{\mu\nu}}. \quad (3.58)$$

Si bien las ecuaciones (3.47-3.51) son equivalentes a las ecuaciones en (3.42), éstas no son equivalentes a las obtenidas mediante la formulación Hamiltoniana, ya que es claro que la ecuación (3.51) no se obtiene. Entonces si de (3.51) consideramos la expresión

$$\frac{\partial L^v}{\partial v^{\mu\nu}} - P^{\mu\nu} = 0, \quad (3.59)$$

y tratásemos con una Lagrangiana no singular (i.e., una Hessiana no nula), debería ser posible resolver (3.59) para $v_{\mu\nu}$ y de forma autoconsistente obtener la dinámica de los pares conjugados $(g_{\mu\nu}, \pi^{\mu\nu})$ y $(G_{\mu\nu}, P^{\mu\nu})$ sin ninguna restricción. Sin embargo, en el caso que se tratase con una Lagrangiana singular, es en (3.59) donde es expresa la singularidad de la Lagrangiana ya que lo anterior no sería posible, entonces deben tratarse como las restricciones de la teoría.

Capítulo 4

Análisis Hamiltoniano del invariante de Chern-Simons

En este capítulo, se analizará el término de Chern-Simons bajo la aproximación del campo débil, motivado por llevar a cabo el análisis de forma exhaustiva y posteriormente comprender el efecto que la adición de este término provoca a la acción de EH en este contexto.

4.1. Análisis Hamiltoniano del término de Chern-Simons linealizado

La Lagrangiana correspondiente para Chern-Simons es

$$L_{CS} = \frac{1}{\mu} \epsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} (\partial_{\mu} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} + \frac{2}{3} \Gamma_{\mu\xi}^{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\xi}), \quad (4.1)$$

donde $\epsilon^{\lambda\mu\nu}$ es el símbolo de Levi-Civita, μ es un parámetro y $\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho}$, los símbolos de Christoffel definidos anteriormente en el capítulo 1. Para dar principio al análisis, consideremos la aproximación del campo débil, tomando una expansión alrededor del espacio plano como ¹

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}; \quad (4.2)$$

sustituimos (4.2) en (4.1), y manteniendo términos de segundo orden, resulta

$$L_{CS} = \frac{1}{2\mu} \epsilon^{\lambda\mu\nu} (\partial_{\sigma} h^{\rho}_{\lambda} \partial_{\rho} \partial_{\mu} h^{\sigma}_{\nu} - \partial_{\sigma} h^{\rho}_{\lambda} \partial^{\sigma} \partial_{\mu} h_{\rho\nu}), \quad (4.3)$$

donde (4.3) es la versión en el régimen perturbativo de la acción de Chern-Simons (4.1). Si a continuación corremos los índices que se encuentran en suma y hacemos la descomposición 2 + 1 para la separación de las componentes espaciales y temporales de (4.3) y además, de momento por simplicidad se toma $\mu = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} L_{CS} = & -\epsilon^{ij} (\partial^k h_{0j} \ddot{h}_{ki} + \partial_j h^k_0 \ddot{h}_{ki} - \frac{1}{2} \dot{h}^k_j \ddot{h}_{ki} + \partial_j \partial^k h_{00} \dot{h}_{ki} + \partial^k \partial_i h_{0j} \dot{h}_{k0} \\ & + \frac{1}{2} \nabla^2 h_{0j} \dot{h}_{0i} - \frac{1}{2} \nabla^2 h^k_j \dot{h}_{ki} + \frac{1}{2} \partial_k \partial_l h^l_j \dot{h}^k_i + \nabla^2 h_{00} \partial_i h_{0j} \\ & - \nabla^2 h^k_0 \partial_i h_{kj} - \partial^l \partial_i h^k_j \partial_k h_{l0}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

¹Convenio: La métrica de Minkowski tendrá signatura $(-++)$

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS HAMILTONIANO DEL INVARIANTE DE CHERN-SIMONS

4.1. ANÁLISIS HAMILTONIANO DEL TÉRMINO DE CHERN-SIMONS LINEALIZADO

De (4.4) podemos ver explícitamente que el término de CS linealizado es un sistema de segundo orden en derivadas temporales; existen aceleraciones y velocidades, además de ser un sistema singular, por lo que no es posible despejar las aceleraciones en términos de velocidades y de la variable dinámica $h_{\mu\nu}$; es por esto que realizar un análisis Hamiltoniano usual de este sistema resulta complicado, sin embargo éste es realizable (ver [41]). No obstante, como contribución original de este trabajo se utilizará el enfoque GLT para el análisis de (4.3). Entonces en analogía con (3.43), tenemos

$$L_{CS} = L_{CS}(h_{\mu\nu}; h_{\mu\nu,0}; h_{\mu\nu,k}; h_{\mu\nu,00}; h_{\mu\nu,0k}; h_{\mu\nu,0}; h_{\mu\nu,km}), \quad (4.5)$$

ahora se introducen las siguientes variables

$$G_{\mu\nu} = \dot{h}_{\mu\nu} \quad \text{y} \quad v_{\mu\nu} = \dot{G}_{\mu\nu} = \ddot{h}_{\mu\nu}. \quad (4.6)$$

y tomando en cuenta el cambio de variables (4.6) en la Lagrangiana (4.4), se obtiene

$$\begin{aligned} L_{CS}^v = & -\epsilon^{ij}(\partial^k h_{0j} v_{ki} + \partial_j h^k{}_0 v_{ki} - \frac{1}{2} G^k{}_j v_{ki} + \partial_j \partial^k h_{00} G_{ki} + \partial^k \partial_i h_{0j} G_{k0}) \\ & + \frac{1}{2} \nabla^2 h_{0j} G_{0i} - \frac{1}{2} \nabla^2 h^k{}_j G_{ki} + \frac{1}{2} \partial^k \partial_i h^l{}_j G_{ki} + \nabla^2 h_{00} \partial_i h_{0j} \\ & - \nabla^2 h^k{}_0 \partial_i h_{kj} - \partial^l \partial_i h^k{}_j \partial_k h_{l0}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

De esta manera se puede ver la reducción de orden de las derivadas temporales en la dependencia de la Lagrangiana (4.7), recuperando una teoría de primer orden en las derivadas de la nueva variable G_{ij} de forma que será más sencillo trabajar con (4.7) (en el contexto de GLT y Dirac) que directamente con (4.4). Por lo anterior, la acción tomará la siguiente forma

$$S = \int \tilde{L}_{CS}^v d^3x = \int \left[L_{CS}^v + \pi^{\mu\nu}(\dot{h}_{\mu\nu} - G_{\mu\nu}) + P^{\mu\nu}(\dot{G}_{\mu\nu} - v_{\mu\nu}) \right] d^3x, \quad (4.8)$$

y considerando (3.52), la Hamiltoniana canónica resulta

$$\begin{aligned} H_{CS} = & \pi^{00} G_{00} + P^{00} v_{00} + (2\pi^{0k} + \frac{1}{2} \epsilon^{kj} \nabla^2 h_{0j} + \epsilon^{ij} \partial^k \partial_i h_{0j}) G_{0k} \\ & + [\pi^{ki} + \epsilon^{ij}(\partial_j \partial^k h_{00} - \frac{1}{2} \nabla^2 h^k{}_j + \frac{1}{2} \partial^k \partial_l h^l{}_j)] G_{ki} + 2P^{0i} v_{0i} \\ & + [P^{ki} + \epsilon^{ij}(\partial^k h_{0j} + \partial_j h^k{}_0 - \frac{1}{2} G^k{}_j)] v_{ki} \\ & + \epsilon^{ij}(\nabla^2 h_{00} \partial_i h_{0j} - \nabla^2 h^k{}_0 \partial_i h_{kj} - \partial^l \partial_i h^k{}_j \partial_k h_{l0}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

En seguida, si tomamos la expresión (3.59) se obtiene el siguiente conjunto de restricciones primarias

$$Q^{\mu\nu} : \frac{\partial L_{CS}^v}{\partial v_{\mu\nu}} - P^{\mu\nu} = 0, \quad (4.10)$$

$$Q^{00} : \frac{\partial L_{CS}^v}{\partial v_{00}} - P^{00} = 0 \Rightarrow P^{00} = 0, \quad (4.11)$$

$$Q^{0i} : \frac{\partial L_{CS}^v}{\partial v_{0i}} - P^{0i} = 0 \Rightarrow P^{0i} = 0, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} Q^{ki} : & \frac{\partial L_{CS}^v}{\partial v_{ki}} - P^{ki} \\ = & - \left\{ P^{ki} + \frac{1}{2} \left[\epsilon^{ij}(\partial^k h_{0j} + \partial_j h^k{}_0 - \frac{1}{2} G^k{}_j) + \epsilon^{kj}(\partial^i h_{0j} + \partial_j h^i{}_0 - \frac{1}{2} G^i{}_j) \right] \right\} = 0; \end{aligned} \quad (4.13)$$

se puede observar que (4.13) coincide con el tercer renglón de la Hamiltoniana (4.9) al ser simetrizado.

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS HAMILTONIANO DEL INVARIANTE DE
CHERN-SIMONS**

4.1. ANÁLISIS HAMILTONIANO DEL TÉRMINO DE CHERN-SIMONS LINEALIZADO

Por otro lado, teniendo la Hamiltoniana canónica y las restricciones primarias, es posible construir la Hamiltoniana primaria que, por definición, usando resultados del capítulo 2, es

$$H_{CS}^1 := H_{CS} + \Delta_{\mu\nu} Q^{\mu\nu}, \quad (4.14)$$

con $\Delta_{\mu\nu}$ siendo multiplicadores de Lagrange, además que a diferencia de (4.9), ésta contiene toda la información con la que hasta este punto tiene el sistema.

Ahora bien, tomaremos la evolución de las restricciones primarias $Q^{\alpha\beta}$ usando la Hamiltoniana (4.14) para hallar restricciones secundarias, además de exigir que éstas se preserven en el tiempo, de tal modo que

$$\dot{Q}^{\alpha\beta} = \{Q^{\alpha\beta}, H_{CS}^1\} = \{Q^{\alpha\beta}, H_{CS}\} + \Delta_{\mu\nu} \{Q^{\alpha\beta}, Q^{\mu\nu}\} \approx 0. \quad (4.15)$$

Para conseguir lo anterior, partiremos de las ecuaciones (4.11-4.13), y los paréntesis para cualesquiera dos funcionales dados en (3.54), calculamos los paréntesis de Poisson entre las restricciones, obteniendo

$$\{Q^{00}, Q^{00}\} = \{Q^{00}, Q^{0i}\} = \{Q^{0i}, Q^{0i}\} = 0, \quad (4.16)$$

$$\{Q^{ki}, Q^{lm}\} = \frac{1}{4} (\epsilon^{mi} \eta^{lk} + \epsilon^{li} \eta^{mk} + \epsilon^{lk} \eta^{mi} + \epsilon^{mk} \eta^{li}). \quad (4.17)$$

Por otro lado, para el término con la Hamiltoniana canónica tenemos

$$\{Q^{00}, H_{CS}\} = -\pi^{00}, \quad (4.18)$$

$$\{Q^{0i}, H_{CS}\} = - \left(2\pi^{0i} + \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \nabla^2 h_{0j} + \epsilon^{lj} \partial^i \partial_l h_{0j} \right), \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \{Q^{ki}, H_{CS}\} = & -\frac{1}{2} \left[\epsilon^{ij} \left(\partial_j \partial^k h_{00} - \frac{1}{2} \nabla^2 h^k{}_j + \frac{1}{2} \partial^k \partial_r h^r{}_j \right) + \epsilon^{kj} \left(\partial_j \partial^i h_{00} - \frac{1}{2} \nabla^2 h^i{}_j + \frac{1}{2} \partial^i \partial_r h^r{}_j \right) \right] \\ & - \pi^{ik} + \frac{1}{2} (\epsilon^{lk} v_l^i + \epsilon^{li} v_l^k) + \frac{1}{2} \left[\epsilon^{ij} (\partial^k G_{0j} + \partial_j G_0^k) + \epsilon^{kj} (\partial^i G_{0j} + \partial_j G_0^i) \right]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Conforme a los cálculos anteriores, identificamos el siguiente conjunto de restricciones secundarias

$$S^0 : \pi^{00} \approx 0, \quad (4.21)$$

$$S^i : \left(\pi^{0i} + \frac{1}{4} \epsilon^{ij} \nabla^2 h_{0j} + \frac{1}{2} \epsilon^{lj} \partial^i \partial_l h_{0j} \right) \approx 0, \quad (4.22)$$

y la evolución de Q^{ik} da las siguientes relaciones entre variables del espacio fase y los multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} S^{ik} : & \frac{1}{2} \left[\epsilon^{ij} \left(\partial_j \partial^k h_{00} - \frac{1}{2} \nabla^2 h^k{}_j + \frac{1}{2} \partial^k \partial_r h^r{}_j \right) + \epsilon^{kj} \left(\partial_j \partial^i h_{00} - \frac{1}{2} \nabla^2 h^i{}_j + \frac{1}{2} \partial^i \partial_r h^r{}_j \right) \right] \\ & + \pi^{ik} - \frac{1}{2} (\epsilon^{lk} v_l^i + \epsilon^{li} v_l^k) - \frac{1}{2} \left[\epsilon^{ij} (\partial^k G_{0j} + \partial_j G_0^k) + \epsilon^{kj} (\partial^i G_{0j} + \partial_j G_0^i) \right] \\ & - \frac{1}{2} (\epsilon^{mk} \Delta_m^i + \epsilon^{mi} \Delta_m^k) \approx 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

A continuación, para verificar la existencia de restricciones terciarias aplicamos nuevamente la relación de consistencia, pero ahora sobre las restricciones S^0 y S^i

$$\dot{S}^\alpha = \{S^\alpha, H_{CS}^1\} = \{S^\alpha, H_{CS}\} + \Delta_{\mu\nu} \{S^\alpha, Q^{\mu\nu}\}. \quad (4.24)$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS HAMILTONIANO DEL INVARIANTE DE
CHERN-SIMONS**

4.1. ANÁLISIS HAMILTONIANO DEL TÉRMINO DE CHERN-SIMONS LINEALIZADO

Además, calculamos los paréntesis de Poisson entre restricciones, de modo que se obtiene

$$\{S^0, S^0\} = \{S^\alpha, Q^{00}\} = \{S^\alpha, Q^{0i}\} = \{S^0, Q^{ik}\} = 0, \quad (4.25)$$

y de acuerdo con ello, para las restricciones terciarias identificamos

$$\dot{S}^0 \rightarrow \tilde{S}^0 : [\epsilon^{ij} \partial_j \partial^k G_{ki} + \epsilon^{ij} \nabla^2 (\partial_i h_{0j})] \approx 0, \quad (4.26)$$

y de la evolución de S^i obtenemos otras relaciones entre los multiplicadores de Lagrange y funciones del espacio fase

$$\begin{aligned} \dot{S}^i \rightarrow \tilde{S}^i : & \frac{\epsilon^{ik}}{2} (\nabla^2 G_{0k} + \partial^l \partial_k G_{0l} - \partial^l v_{lk} - \partial_k \nabla^2 h_{00}) \\ & + \frac{\epsilon^{kj}}{2} (\partial_j v^i_k + \nabla^2 \partial_k h^i_j - \partial_l \partial^i \partial_k h^l_j + \partial^i \partial_k G_{0j}) \\ & + \frac{1}{2} (\epsilon^{ki} \partial^l \Delta_{lk} + \epsilon^{kj} \partial_j \Delta^i_k) \approx 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Análogamente, aplicamos las relaciones de consistencia a la restricción \tilde{S}^0 , de forma que la evolución queda determinada por

$$\dot{\tilde{S}}^0 = \{\tilde{S}^0, H_{CS}^1\} = \{\tilde{S}^0, H_{CS}\} + \Delta_{\mu\nu} \{\tilde{S}^0, Q^{\mu\nu}\}, \quad (4.28)$$

$$\dot{\tilde{S}}^0 = \epsilon^{ij} (\partial_j \partial^k v_{ki} + \nabla^2 \partial_i G_{0j} + \partial_j \partial^k \Delta_{ki}), \quad (4.29)$$

de donde no se obtienen más restricciones. No obstante, es posible construir más restricciones a partir de las relaciones entre multiplicadores de Lagrange y funciones del espacio fase obtenidas anteriormente. Primero, al derivar (4.23) y sumar la expresión resultante con (4.27) se obtiene

$$\tilde{V}^i = \partial_k \pi^{ik} + \frac{\epsilon^{kl}}{4} \nabla^2 \partial_k h^i_l - \frac{\epsilon^{kj}}{4} \partial_k \partial^i \partial_l h^l_j \approx 0, \quad (4.30)$$

asimismo, tomando la traza de la relación (4.23) obtenemos la siguiente restricción

$$V = \pi^i_i + \frac{\epsilon^{ij}}{2} \partial_i \partial_l h^l_j \approx 0. \quad (4.31)$$

La evolución de las restricciones (4.30) y (4.31) no genera nuevas restricciones. De modo complementario, si se busca una restricción tal que se obtenga (4.31) de su evolución, se encuentra que la traza de (4.13) puede promoverse a restricción, cumpliendo lo siguiente

$$\begin{aligned} Q^{ik} \eta_{ik} &= P^i_i, \\ \dot{P}^i_i &= \{P^i_i, H_{CS}\} = \tilde{V} \approx 0; \end{aligned} \quad (4.32)$$

además, esta restricción conmuta con todas las demás. De esta manera, el conjunto completo de

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS HAMILTONIANO DEL INVARIANTE DE
CHERN-SIMONS**
4.2. RESTRICCIONES DE PRIMERA Y SEGUNDA CLASE

restricciones del sistema está dado por

$$\begin{aligned}
Q^{00} & : P^{00} \approx 0, \\
Q^{0i} & : P^{0i} \approx 0, \\
Q^{ik} & : P^{ki} + \frac{\epsilon^{ij}}{2} \partial^k h_{0j} + \frac{\epsilon^{ij}}{2} \partial_j h^k{}_0 - \frac{\epsilon^{ij}}{4} G^k{}_j + \frac{\epsilon^{kj}}{2} \partial^i h_{0j} + \frac{\epsilon^{kj}}{2} \partial_j h^i{}_0 - \frac{\epsilon^{kj}}{4} G^i{}_j \approx 0, \\
S^0 & : \pi^{00} \approx 0, \\
S^i & : \pi^{0i} + \frac{\epsilon^{ij}}{4} \nabla^2 h_{0j} + \frac{\epsilon^{lj}}{2} \partial^i \partial_l h_{0j} \approx 0, \\
\tilde{S}^0 & : \epsilon^{ij} \partial_j \partial^k G_{ki} + \epsilon^{ij} \nabla^2 \partial_i h_{0j} \approx 0, \\
\tilde{V}^i & : \partial_k \pi^{ik} + \frac{\epsilon^{kl}}{4} \nabla^2 \partial_k h^i{}_l - \frac{\epsilon^{kj}}{4} \partial_k \partial^i \partial_l h^l{}_j \approx 0, \\
\tilde{V} & : \pi^i{}_i + \frac{\epsilon^{ij}}{2} \partial_i \partial_l h^l{}_j \approx 0, \\
U & : P^i{}_i \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

4.2. Restricciones de primera y segunda clase

Una vez calculadas todas las restricciones de la teoría, para proseguir con el análisis, se necesita llevar a cabo la clasificación de restricciones, entre de primera clase (generadoras de las transformaciones de norma) y de segunda clase (que permitirán construir los paréntesis de Dirac), para ello es necesario construir la matriz $W^{\alpha\beta}$ formada por el álgebra de restricciones, como sigue

$$\begin{aligned}
\{Q^{ik}, Q^{lm}\} & = \frac{1}{4} (\epsilon^{mi} \eta^{lk} + \epsilon^{li} \eta^{mk} + \epsilon^{lk} \eta^{mi} + \epsilon^{mk} \eta^{li}) \delta^2(x-y), \\
\{Q^{ik}, S^l\} & = \frac{1}{4} (\epsilon^{il} \partial^k + \epsilon^{kl} \partial^i + \epsilon^{ij} \eta^{kl} \partial_j + \epsilon^{kj} \eta^{il} \partial_j) \delta^2(x-y), \\
\{Q^{ik}, \tilde{S}^0\} & = \frac{1}{2} (\epsilon^{ji} \partial_j \partial^k + \epsilon^{jk} \partial_j \partial^i) \delta^2(x-y), \\
\{S^i, S^l\} & = \frac{1}{4} (\epsilon^{il} \nabla^2 + \epsilon^{ij} \partial^l \partial_j + \epsilon^{jl} \partial^i \partial_j) \delta^2(x-y), \\
\{S^i, \tilde{S}^0\} & = \frac{1}{2} \epsilon^{li} \nabla^2 \partial_l \delta^2(x-y),
\end{aligned} \tag{4.34}$$

y con el resto de paréntesis iguales a cero. Así que, la matriz $W^{\alpha\beta}$ queda como

$$W = \begin{matrix} & Q^{00} & Q^{0l} & Q^{lm} & S^0 & S^l & \tilde{S}^0 & \tilde{V}^l & \tilde{V} & U \\ \begin{matrix} Q^{00} \\ Q^{0i} \\ Q^{ik} \\ S^0 \\ S^i \\ \tilde{S}^0 \\ \tilde{V}^i \\ \tilde{V} \\ U \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{Q^{ik}, Q^{lm}\} & 0 & \{Q^{ik}, S^l\} & \{Q^{ik}, \tilde{S}^0\} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{S^i, Q^{lm}\} & 0 & \{S^i, S^l\} & \{S^i, \tilde{S}^0\} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{\tilde{S}^0, Q^{lm}\} & 0 & \{\tilde{S}^0, S^l\} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \end{matrix} \tag{4.35}$$

Ahora bien, para obtener el mayor número de restricciones de primera clase, es necesario buscar los vectores nulos de la matriz (4.35). Una vez que se han calculado los vectores nulos, obtenemos

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS HAMILTONIANO DEL INVARIANTE DE
CHERN-SIMONS**
4.2. RESTRICCIONES DE PRIMERA Y SEGUNDA CLASE

el siguiente conjunto modificado de restricciones

$$\begin{aligned}
Q^{00} &: P^{00} \approx 0, \\
Q^{0i} &: P^{0i} \approx 0, \\
S^0 &: \pi^{00} \approx 0, \\
S^i &: \partial_k Q^{ki} - \pi^{0i} - \frac{\epsilon^{ij}}{4} \nabla^2 h_{0j} - \frac{\epsilon^{lj}}{2} \partial^i \partial_l h_{0j} \approx 0, \\
&: \partial_k P^{ki} - \pi^{0i} + \frac{\epsilon^{ij}}{2} \partial_k \partial_j h^k{}_0 + \frac{\epsilon^{ij}}{4} \nabla^2 h_{0j} - \frac{\epsilon^{ij}}{4} \partial^k G_{kj} - \frac{\epsilon^{kj}}{4} \partial_k G_j^i \approx 0 \\
\tilde{S}^0 &: \partial_i \partial_k Q^{ik} - \epsilon^{ij} \partial_j \partial^k G_{ki} - \epsilon^{ij} \nabla^2 \partial_i h_{0j} \approx 0, \\
&: \partial_i \partial_k P^{ik} + \frac{\epsilon^{ij}}{2} \partial_i \partial^k G_{kj}, \\
\tilde{V}^i &: \partial_k \pi^{ik} + \frac{\epsilon^{kl}}{4} \nabla^2 \partial_k h^i{}_l - \frac{\epsilon^{kj}}{4} \partial_k \partial^i \partial_l h^l{}_j \approx 0, \\
\tilde{V} &: \pi^i{}_i + \frac{\epsilon^{ij}}{2} \partial_i \partial_l h^l{}_j \approx 0, \\
U &: P^i{}_i \approx 0, \\
Q^{ik} &: P^{ki} + \frac{\epsilon^{ij}}{2} \partial^k h_{0j} + \frac{\epsilon^{ij}}{2} \partial_j h^k{}_0 - \frac{\epsilon^{ij}}{4} G^k{}_j + \frac{\epsilon^{kj}}{2} \partial^i h_{0j} + \frac{\epsilon^{kj}}{2} \partial_j h^i{}_0 - \frac{\epsilon^{kj}}{4} G^i{}_j \approx 0, \quad (4.36)
\end{aligned}$$

cuya álgebra permite escribir una nueva matriz $W^{\alpha\beta}$ como sigue

$$W^{\alpha\beta} = \begin{matrix} & Q^{00} & Q^{0l} & S^0 & S^l & \tilde{S}^0 & \tilde{V}^l & \tilde{V} & U & Q^{lm} \\ \begin{matrix} Q^{00} \\ Q^{0i} \\ S^0 \\ S^i \\ \tilde{S}^0 \\ \tilde{V}^i \\ \tilde{V} \\ U \\ Q^{ik} \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \{Q^{ik}, Q^{lm}\} \end{array} \right) & \end{matrix}. \quad (4.37)$$

De la matriz (4.37), podemos observar que en principio, las primeras ocho expresiones en (4.36), corresponden a las restricciones de primera clase, y las tres restricciones Q^{ik} corresponden a restricciones de segunda clase, sin embargo, el número de restricciones de segunda clase debe ser un número par. Esto sugiere dos posibles escenarios: *a*) Existe una restricción oculta (o más) en el desarrollo del formalismo, o *b*) una de las restricciones Q^{ik} no es independiente de las otras, es decir, el sistema aún presenta reductibilidad. Después de analizar y sopesar ambas situaciones, salta a la vista lo siguiente

$$\begin{aligned}
Q^{11} &= P^{11} + \partial^1 h_{02} + \partial_2 h^1{}_0 - \frac{1}{2} G^1{}_2, \\
Q^{22} &= P^{22} - \partial^2 h_{01} - \partial_1 h^2{}_0 + \frac{1}{2} G^2{}_1, \\
&\Rightarrow Q^{11} + Q^{22} = P^{11} + P^{22}, \quad (4.38)
\end{aligned}$$

que corresponde a la restricción $U = P^i{}_i$, por lo que es posible bajo este criterio descartar alguna de las restricciones Q^{11} o Q^{22} , de tal forma que las verdaderas restricciones de segunda clase solo serán Q^{11} y Q^{12} , un número par de restricciones secundarias como es de esperarse. Así, tenemos el conjunto completo de restricciones clasificado de la siguiente forma:

- Restricciones de primera clase

$$\begin{aligned}
Q^{00} &: P^{00} \approx 0, \\
Q^{0i} &: P^{0i} \approx 0, \\
S^0 &: \pi^{00} \approx 0, \\
S^i &: \partial_k Q^{ki} - \pi^{0i} - \frac{\epsilon^{ij}}{4} \nabla^2 h_{0j} - \frac{\epsilon^{lj}}{2} \partial^i \partial_l h_{0j} \approx 0, \\
&: \partial_k P^{ki} - \pi^{0i} + \frac{\epsilon^{ij}}{2} \partial_k \partial_j h^k{}_0 + \frac{\epsilon^{ij}}{4} \nabla^2 h_{0j} - \frac{\epsilon^{ij}}{4} \partial^k G_{kj} - \frac{\epsilon^{kj}}{4} \partial_k G_j^i \approx 0 \\
\tilde{V}^i &: \partial_k \pi^{ik} + \frac{\epsilon^{kl}}{4} \nabla^2 \partial_k h^i{}_l - \frac{\epsilon^{kj}}{4} \partial_k \partial^i \partial_l h^l{}_j \approx 0, \\
\tilde{V} &: \pi^i{}_i + \frac{\epsilon^{ij}}{2} \partial_i \partial_l h^l{}_j \approx 0, \\
U &: P^i{}_i \approx 0, \\
\tilde{S}^0 &: \partial_i \partial_k Q^{ik} - \epsilon^{ij} \partial_j \partial^k G_{ki} - \epsilon^{ij} \nabla^2 \partial_i h_{0j} \approx 0, \\
&: \partial_i \partial_k P^{ik} + \frac{\epsilon^{ij}}{2} \partial_i \partial^k G_{kj}, \tag{4.39}
\end{aligned}$$

- Restricciones de segunda clase

$$\begin{aligned}
Q^{11} &= P^{11} + \partial^1 h_{02} + \partial_2 h^1{}_0 - \frac{1}{2} G^1{}_2 \approx 0, \\
Q^{12} &= P^{12} + \partial^2 h_{02} - \partial^1 h_{01} + \frac{1}{4} G^1{}_1 - \frac{1}{4} G^2{}_2 \approx 0. \tag{4.40}
\end{aligned}$$

4.3. Conteo de grados de libertad

En consecuencia, conociendo la clasificación anterior, ya es posible realizar el conteo de grados de libertad, que por definición del capítulo 2 se calculan como

$$GL = \frac{1}{2} [(NVC) - (NRSC) - 2(NRPC)], \tag{4.41}$$

donde, NVC = Número de variables canónicas, $NRSC$ = Número de restricciones de segunda clase y $NRPC$ = Número de restricciones de primera clase. Por consiguiente, para Chern-Simons tenemos

$$GL = \frac{1}{2} [(24) - (2) - 2(11)] = 0, \tag{4.42}$$

siendo éste, un resultado conocido de la teoría.

4.4. Paréntesis de Dirac

Por otra parte, siendo ya identificadas las restricciones de segunda clase, y continuando con el análisis, construimos los paréntesis de Dirac, los cuales de forma general entre dos funcionales, A y B , del espacio de fase se definen como

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \int dudv \{A, \chi^\alpha(u)\} C_{\alpha\beta}^{-1} \{\chi^\beta(v), B\}, \tag{4.43}$$

donde χ^α y χ^β representan a las restricciones de segunda clase, $\{A, B\}$ son los paréntesis de Poisson, y $C_{\alpha\beta}^{-1}$ es la inversa de la matriz $C^{\alpha\beta}$ cuyas entradas están dadas por los paréntesis de Poisson

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS HAMILTONIANO DEL INVARIANTE DE
CHERN-SIMONS**

4.5. ACCIÓN EXTENDIDA Y HAMILTONIANA EXTENDIDA

entre restricciones de segunda clase. De tal manera que para este caso, de (4.37), identificamos

$$C^{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{cc} \{Q^{11}, Q^{11}\} & \{Q^{11}, Q^{12}\} \\ \{Q^{12}, Q^{11}\} & \{Q^{12}, Q^{12}\} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y), \quad (4.44)$$

con la inversa dada por

$$C_{\alpha\beta}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y). \quad (4.45)$$

De forma que, después de trabajo algebraico, los paréntesis de Dirac resultan en

$$\begin{aligned} \{h_{00}, \pi^{00}\}_D &= \delta^2(x-y), \\ \{h_{0i}, \pi^{0l}\}_D &= \frac{1}{2} \delta_l^i \delta^2(x-y), \\ \{h_{ij}, \pi^{lm}\}_D &= \frac{1}{2} (\delta_i^l \delta_j^m + \delta_i^m \delta_j^l) \delta^2(x-y), \\ \{\pi^{0i}, \pi^{0l}\}_D &= -\frac{1}{2} \epsilon^{il} \nabla^2 \delta^2(x-y), \\ \{\pi^{0i}, G_{lm}\}_D &= \frac{1}{2} (\delta_l^1 \delta_m^2 + \delta_l^2 \delta_m^1) (\epsilon^{1i} \partial^1 + \eta^{1i} \partial^2) \delta^2(x-y) \\ &\quad - \frac{1}{2} \delta_l^1 \delta_m^1 (\epsilon^{1i} \partial^2 + \epsilon^{2i} \partial^1 + \eta^{2i} \partial^2 - \eta^{1i} \partial^1) \delta^2(x-y), \\ \{\pi^{0i}, P^{lm}\}_D &= -\frac{1}{8} (\epsilon^{ln} \eta^{im} + \epsilon^{mn} \eta^{il} + \epsilon^{mi} \eta^{ln} + \epsilon^{li} \eta^{mn}) \partial_n \delta^2(x-y), \\ \{G_{00}, P^{00}\}_D &= \delta^2(x-y), \\ \{G_{0i}, P^{0l}\}_D &= \frac{1}{2} \delta_i^l \delta^2(x-y), \\ \{G_{ij}, G_{lm}\}_D &= \delta_i^1 \delta_j^1 (\delta_l^1 \delta_m^2 + \delta_l^2 \delta_m^1) \delta^2(x-y) - \delta_l^1 \delta_m^1 (\delta_i^1 \delta_j^2 + \delta_i^2 \delta_j^1) \delta^2(x-y), \\ \{G_{ij}, P^{lm}\}_D &= \frac{1}{4} \delta_i^1 \delta_j^1 (\epsilon^{1m} \eta^{2l} + \epsilon^{1l} \eta^{2m} + \epsilon^{2m} \eta^{1l} + \epsilon^{2l} \eta^{1m}) \delta^2(x-y) \\ &\quad - \frac{1}{4} (\delta_i^1 \delta_j^2 + \delta_i^2 \delta_j^1) (\epsilon^{1m} \eta^{1l} + \epsilon^{1l} \eta^{1m}) \delta^2(x-y) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\delta_i^l \delta_j^m + \delta_i^m \delta_j^l) \delta^2(x-y), \\ \{P^{ij}, P^{lm}\}_D &= \frac{1}{16} (\epsilon^{il} \eta^{mj} + \epsilon^{im} \eta^{jl} + \epsilon^{jl} \eta^{mi} + \epsilon^{jm} \eta^{il}) \delta^2(x-y). \end{aligned} \quad (4.46)$$

4.5. Acción extendida y Hamiltoniana extendida

Ahora, como siguiente paso, se procede a construir la acción extendida, usando las restricciones de primera clase, las restricciones de segunda clase, podemos determinar que la acción extendida tiene la siguiente estructura, que es consistente con el capítulo 2

$$S_{EXT} [h_{\mu\nu}, \pi^{\mu\nu}, G_{\mu\nu}, P^{\mu\nu}, \lambda_\alpha, U_\alpha] = \int \left(\pi^{\mu\nu} \dot{h}_{\mu\nu} + P^{\mu\nu} \dot{h}_{\mu\nu} - H_{CS} - \lambda_\alpha \gamma^\alpha - u_\alpha \chi^\alpha \right) d^3x, \quad (4.47)$$

donde, H_{CS} es la Hamiltoniana canónica dada anteriormente en (4.9), γ^α son las restricciones de primera clase, χ^α son las restricciones de segunda clase, λ_α y u_α son multiplicadores. En este marco, es necesario determinar las funciones u_α . Para encontrarlas, se utilizará la Hamiltoniana total que, de acuerdo con el capítulo 2, está dada por

$$H_{TCS} = H_{CS} + \gamma^\alpha \lambda_\alpha + \chi^\alpha u_\alpha; \quad (4.48)$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS HAMILTONIANO DEL INVARIANTE DE
CHERN-SIMONS**

4.5. ACCIÓN EXTENDIDA Y HAMILTONIANA EXTENDIDA

ahora bien, podemos implementar el siguiente paréntesis de Poisson entre la Hamiltoniana total y las restricciones de segunda clase

$$\{\chi^\alpha, H_{TCS}\} = \{\chi^\alpha, H_{CS}\} + \{\gamma^\alpha, \chi^\beta\}\lambda_\beta + \{\chi^\alpha, \chi^\beta\}u_\beta, \quad (4.49)$$

donde, el paréntesis mismo se anula, y el segundo término es igual a cero, de forma que solo permanece

$$\{\chi^\alpha, H_{TCS}\} = \{\chi^\alpha, H_{CS}\} + \{\chi^\alpha, \chi^\beta\}u_\beta = 0. \quad (4.50)$$

De la expresión (4.50), se obtiene una expresión para hallar las funciones u_α , a las que les corresponderá la siguiente estructura

$$u_\alpha = C_{\beta\alpha}^{-1}\{\chi^\beta, H_{CS}\}. \quad (4.51)$$

donde $\chi^\alpha = (\chi^1, \chi^2) = (Q^{11}, Q^{12})$; para esto, es posible dar una expresión general del paréntesis de Poisson con la Hamiltoniana canónica para las restricciones de segunda clase como sigue

$$\begin{aligned} \{Q^{ki}, H_{CS}\} = & -\frac{1}{2}\left[\epsilon^{ij}\left(\partial_j\partial^k h_{00} - \frac{1}{2}\nabla^2 h^k{}_j + \frac{1}{2}\partial^k\partial_r h^r{}_j\right) + \epsilon^{kj}\left(\partial_j\partial^i h_{00} - \frac{1}{2}\nabla^2 h^i{}_j + \frac{1}{2}\partial^i\partial_r h^r{}_j\right)\right] \\ & -\pi^{ik} + \frac{1}{2}(\epsilon^{lk}v_l^i + \epsilon^{li}v_l^k) + \frac{1}{2}\left[\epsilon^{ij}(\partial^k G_{0j} + \partial_j G_0^k) + \epsilon^{kj}(\partial^i G_{0j} + \partial_j G_0^i)\right]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Por tanto, con las expresiones anteriores, para los multiplicadores u_α que acompañan a las restricciones de segunda clase tendremos

$$u_1 = C_{21}^{-1}\{\chi^2, H_{CS}\} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} &= 2\pi^{12} + \partial_2\partial_2 h_{00} - \partial_1\partial_1 h_{00} + \frac{1}{2}\nabla^2 h^1{}_1 - \frac{1}{2}\nabla^2 h^2{}_2 + \frac{1}{2}\partial_1\partial_2 h^l{}_2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\partial_1\partial_1 h^l{}_1 - 2\partial_2 G_{02} + 2\partial_1 G_{01} + v_{22} - v_{11}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$u_2 = C_{12}^{-1}\{\chi^1, H_{CS}\} \quad (4.55)$$

$$= -2\pi^{11} - 2\left(\partial_2\partial_1 h_{00} - \frac{1}{2}\nabla^2 h_{12} + \frac{1}{2}\partial_1\partial_1 h^l{}_2\right) + 2\partial_1 G_{02} + 2\partial_2 G_{01} - 2v_{21}.$$

Conforme a lo obtenido, puede identificarse

$$H_{ECS} = H_{CS} + u_\alpha\chi^\alpha = H_{CS} + u_1 Q^{11} + u_2 Q^{12}, \quad (4.56)$$

como la Hamiltoniana extendida; no obstante, para verificar que H_{ECS} es de primera clase, se calcula el paréntesis de Dirac entre cada restricción de primera clase y la Hamiltoniana extendida, obteniendo lo siguiente

$$\{Q^{00}, H_{ECS}\}_D = -\pi^{00} = -S^0, \quad (4.57)$$

$$\{Q^{0i}, H_{ECS}\}_D = -\delta^i{}_2\partial_2 Q^{11} + \delta^i{}_1\partial_1 Q^{11} + \delta^i{}_2\partial_1 Q^{12} + \delta^i{}_1\partial_2 Q^{12} \quad (4.58)$$

$$-\pi^{0i} - \frac{1}{4}\epsilon^{ij}\nabla^2 h_{0j} - \frac{1}{2}\epsilon^{kj}\partial^i\partial_k h_{0j} = S^i,$$

$$\{S^0, H_{ECS}\}_D = \partial_1\partial_1 Q^{11} - \partial_2\partial_2 Q^{11} + 2\partial_1\partial_2 Q^{12} - \epsilon^{ij}\partial_j\partial^k G_{ki} - \epsilon^{ij}\nabla^2\partial_i h_{0j} = \tilde{S}^0, \quad (4.59)$$

$$\{U, H_{ECS}\}_D = -\tilde{V}, \quad (4.60)$$

$$\{\tilde{V}^i, H_{ECS}\}_D = 0, \quad (4.61)$$

$$\{\tilde{V}, H_{ECS}\}_D = \partial_1\partial_1 Q^{11} - \partial_2\partial_2 Q^{11} + 2\partial_1\partial_2 Q^{12} - \epsilon^{ij}\partial_j\partial^k G_{ki} - \epsilon^{ij}\nabla^2\partial_i h_{0j} = \tilde{S}^0, \quad (4.62)$$

$$\{\tilde{S}^0, H_{ECS}\}_D = 0, \quad (4.63)$$

$$\{S^i, H_{ECS}\}_D = \tilde{V}^i, \quad (4.64)$$

**CAPÍTULO 4. ANÁLISIS HAMILTONIANO DEL INVARIANTE DE
CHERN-SIMONS**
4.5. ACCIÓN EXTENDIDA Y HAMILTONIANA EXTENDIDA

de donde podemos concluir que el álgebra de restricciones bajo la Hamiltoniana extendida construida es autoconsistente, en otras palabras, se encuentra cerrada, lo que demuestra que las restricciones se obtienen con una estructura correcta a partir de los vectores nulos. Asimismo, se ha realizado un análisis GLT completo para el término de Chern-Simons linealizado, que hasta este trabajo, no se encuentra reportado en la literatura.

Capítulo 5

Análisis Hamiltoniano de Gravedad Topológicamente Masiva

En este capítulo se abordará el análisis integral de la teoría TMG, compuesta, como ya se ha mencionado, por el término de Einstein-Hilbert y el término de Chern-Simons, analizado en el capítulo anterior. Este análisis al igual que el anterior se realizará en el contexto de la aproximación del campo débil.

5.1. Análisis Hamiltoniano de Gravedad Topológicamente Masiva linealizada

Partimos de la acción (1.10), cuya Lagrangiana es

$$L_{TMG} = R\sqrt{-g} + \left[\frac{1}{\mu} \epsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} (\partial_{\mu} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} + \frac{2}{3} \Gamma_{\mu\xi}^{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\xi}) \right], \quad (5.1)$$

que con la aproximación del campo débil (4.2), misma que se utilizó en el capítulo 4, manteniendo términos hasta segundo orden se obtiene

$$\begin{aligned} L_{TMG} = & \frac{1}{4} \partial_{\lambda} h_{\mu\nu} \partial^{\lambda} h^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \partial_{\lambda} h^{\mu}{}_{\nu} \partial^{\lambda} h^{\nu}{}_{\mu} + \frac{1}{2} \partial_{\lambda} h^{\lambda}{}_{\mu} \partial^{\mu} h^{\nu}{}_{\nu} - \frac{1}{2} \partial_{\lambda} h^{\lambda}{}_{\mu} \partial_{\nu} h^{\nu\mu} \\ & + \frac{1}{2\mu} \epsilon^{\lambda\mu\nu} (\partial_{\sigma} h^{\rho}{}_{\lambda} \partial_{\rho} \partial_{\mu} h^{\sigma}{}_{\nu} - \partial_{\sigma} h^{\rho}{}_{\lambda} \partial^{\sigma} \partial_{\mu} h_{\rho\nu}), \end{aligned} \quad (5.2)$$

y realizando la descomposición 2 + 1 de (5.2) podemos escribir

$$\begin{aligned} L_{TMG} = & \frac{1}{4} \dot{h}_{ij} \dot{h}^{ij} - \frac{1}{4} \dot{h}^i{}_i \dot{h}^k{}_k + \dot{h}_{ij} \partial^i h^{0j} - \dot{h}^i{}_i \partial^k h^0{}_k - \frac{1}{2} \partial_i h_{0j} \partial^i h^{0j} \\ & - \frac{1}{4} \partial_i h_{jk} \partial^i h^{jk} + \frac{1}{2} \partial_i h^0{}_0 \partial^i h^j{}_j + \frac{1}{4} \partial_i h^j{}_j \partial^i h^k{}_k - \frac{1}{2} \partial_i h^{ij} \partial_j h^0{}_0 \\ & - \frac{1}{2} \partial_i h^{ij} \partial_j h^k{}_k + \frac{1}{2} \partial_i h_{j0} \partial^j h^{0i} + \frac{1}{2} \partial_i h_{jk} \partial^j h^{ik} \\ & - \frac{1}{\mu} \epsilon^{ij} (\partial^k h_{0j} \ddot{h}_{ki} + \partial_j h^k{}_0 \ddot{h}_{ki} - \frac{1}{2} \dot{h}^k{}_j \ddot{h}_{ki} + \partial_j \partial^k h_{00} \dot{h}_{ki} + \partial^k \partial_i h_{0j} \dot{h}_{k0} \\ & + \frac{1}{2} \nabla^2 h_{0j} \dot{h}_{0i} - \frac{1}{2} \nabla^2 h^k{}_j \dot{h}_{ki} + \frac{1}{2} \partial_k \partial_l h^l{}_j \dot{h}^k{}_i + \nabla^2 h_{00} \partial_i h_{0j} \\ & - \nabla^2 h^k{}_0 \partial_i h_{kj} - \partial^l \partial_i h^k{}_j \partial_k h_{l0}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

**CAPÍTULO 5. ANÁLISIS HAMILTONIANO DE GRAVEDAD
TOPOLÓGICAMENTE MASIVA**

5.1. ANÁLISIS HAMILTONIANO DE GRAVEDAD TOPOLÓGICAMENTE MASIVA
LINEALIZADA

de la misma forma que en el análisis a CS, se introducen las variables (4.6) en (5.3), a fin de reducir el orden de las derivadas temporales presentes, obtenemos

$$\begin{aligned}
L_{TMG}^v &= \frac{1}{4}G_{ij}G^{ij} - \frac{1}{4}G^i{}_iG^k{}_k + G_{ij}\partial^i h^{0j} - G^i{}_i\partial^k h^0{}_k - \frac{1}{2}\partial_i h_{0j}\partial^i h^{0j} \\
&\quad - \frac{1}{4}\partial_i h_{jk}\partial^i h^{jk} + \frac{1}{2}\partial_i h^0{}_0\partial^i h^j{}_j + \frac{1}{4}\partial_i h^j{}_j\partial^i h^k{}_k - \frac{1}{2}\partial_i h^{ij}\partial_j h^0{}_0 \\
&\quad - \frac{1}{2}\partial_i h^{ij}\partial_j h^k{}_k + \frac{1}{2}\partial_i h_{j0}\partial^j h^{0i} + \frac{1}{2}\partial_i h_{jk}\partial^j h^{ik} \\
&\quad - \frac{1}{\mu}\epsilon^{ij}(\partial^k h_{0j}v_{ki} + \partial_j h^k{}_0 v_{ki} - \frac{1}{2}G^k{}_j v_{ki} + \partial_j \partial^k h_{00}G_{ki} + \partial^k \partial_i h_{0j}G_{k0} \\
&\quad + \frac{1}{2}\nabla^2 h_{0j}G_{0i} - \frac{1}{2}\nabla^2 h^k{}_j G_{ki} + \frac{1}{2}\partial^k \partial_l h^l{}_j G_{ki} + \nabla^2 h_{00}\partial_i h_{0j} \\
&\quad - \nabla^2 h^k{}_0 \partial_i h_{kj} - \partial^l \partial_i h^k{}_j \partial_k h_{l0}).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Entonces, como en el capítulo previo, se construye la Hamiltoniana canónica, siguiendo la prescripción marcada en la expresión (3.52), de tal forma que queda

$$\begin{aligned}
H_{TMG} &= \pi^{00}G_{00} + P^{00}v_{00} + 2\pi^{0k}G_{0k} + 2P^{0k}v_{0k} + \pi^{ki}G_{ki} + P^{ki}v_{ki} \\
&\quad - \frac{1}{4}G_{ij}G^{ij} + \frac{1}{4}G^i{}_iG^k{}_k - G_{ij}\partial^i h^{0j} + G^i{}_i\partial^k h^0{}_k + \frac{1}{2}\partial_i h_{0j}\partial^i h^{0j} \\
&\quad + \frac{1}{4}\partial_i h_{jk}\partial^i h^{jk} - \frac{1}{2}\partial_i h^0{}_0\partial^i h^j{}_j - \frac{1}{4}\partial_i h^j{}_j\partial^i h^k{}_k + \frac{1}{2}\partial_i h^{ij}\partial_j h^0{}_0 \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial_i h^{ij}\partial_j h^k{}_k - \frac{1}{2}\partial_i h_{j0}\partial^j h^{0i} - \frac{1}{2}\partial_i h_{jk}\partial^j h^{ik} \\
&\quad + \frac{1}{\mu}\epsilon^{ij}(\partial^k h_{0j}v_{ki} + \partial_j h^k{}_0 v_{ki} - \frac{1}{2}G^k{}_j v_{ki} + \partial_j \partial^k h_{00}G_{ki} + \partial^k \partial_i h_{0j}G_{k0} \\
&\quad + \frac{1}{2}\nabla^2 h_{0j}G_{0i} - \frac{1}{2}\nabla^2 h^k{}_j G_{ki} + \frac{1}{2}\partial^k \partial_l h^l{}_j G_{ki} + \nabla^2 h_{00}\partial_i h_{0j} \\
&\quad - \nabla^2 h^k{}_0 \partial_i h_{kj} - \partial^l \partial_i h^k{}_j \partial_k h_{l0}).
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Si ahora se toma la ecuación (3.59) para las restricciones primarias, se obtiene el conjunto de restricciones siguiente

$$Q^{00} : \frac{\partial L_{TMG}^v}{\partial v_{00}} - P^{00} = 0 \Rightarrow P^{00} \approx 0, \tag{5.6}$$

$$Q^{0i} : \frac{\partial L_{TMG}^v}{\partial v_{0i}} - P^{0i} = 0 \Rightarrow P^{0i} \approx 0, \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
Q^{ki} &: \frac{\partial L_{TMG}^v}{\partial v_{ki}} - P^{ki} \\
&= - \left\{ P^{ki} + \frac{1}{2\mu} \left[\epsilon^{ij}(\partial^k h_{0j} + \partial_j h^k{}_0 - \frac{1}{2}G^k{}_j) + \epsilon^{kj}(\partial^i h_{0j} + \partial_j h^i{}_0 - \frac{1}{2}G^i{}_j) \right] \right\} \approx 0,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

de donde cabe destacar, que es el mismo conjunto obtenido anteriormente para el término individual de Chern-Simons linealizado (ver ecuaciones 4.11-4.13). Entonces, teniendo las restricciones primarias, construimos la Hamiltoniana primaria, definida por

$$H_{TMG}^1 := H_{TMG} + \Delta_{\mu\nu}Q^{\mu\nu}, \tag{5.9}$$

con $\Delta_{\mu\nu}$ siendo multiplicadores de Lagrange. A continuación se calcula la evolución de las restricciones primarias con respecto de la Hamiltoniana primaria en (5.9) para hallar restricciones secundarias, como sigue

$$\dot{Q}^{\alpha\beta} = \{Q^{\alpha\beta}, H_{TMG}^1\} = \{Q^{\alpha\beta}, H_{TMG}\} + \Delta_{\mu\nu} \{Q^{\alpha\beta}, Q^{\mu\nu}\} \approx 0. \tag{5.10}$$

**CAPÍTULO 5. ANÁLISIS HAMILTONIANO DE GRAVEDAD
TOPOLOGICAMENTE MASIVA**

5.1. ANÁLISIS HAMILTONIANO DE GRAVEDAD TOPOLOGICAMENTE MASIVA
LINEALIZADA

Lo cual, nos conduce a las siguientes expresiones

$$S^0 : \pi^{00} \approx 0, \quad (5.11)$$

$$S^i : \left(\pi^{0i} + \frac{1}{4\mu} \epsilon^{ij} \nabla^2 h_{0j} + \frac{1}{2\mu} \epsilon^{lj} \partial^i \partial_l h_{0j} \right) \approx 0, \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} S^{ik} : & \pi^{ik} - \frac{1}{2} G^{ik} + \frac{1}{2} \eta^{ik} G^j_j - \frac{1}{2} (\partial^i h^{0k} + \partial^k h^{0i}) + \eta^{ik} \partial^j h^0_j \\ & + \frac{1}{2\mu} \left[\epsilon^{ij} \left(\partial_j \partial^k h_{00} - \frac{1}{2} \nabla^2 h^k_j + \frac{1}{2} \partial^k \partial_r h^r_j \right) + \epsilon^{kj} \left(\partial_j \partial^i h_{00} - \frac{1}{2} \nabla^2 h^i_j + \frac{1}{2} \partial^i \partial_r h^r_j \right) \right] \\ & - \frac{1}{2\mu} (\epsilon^{lk} v_l^i + \epsilon^{li} v_l^k) - \frac{1}{2\mu} \left[\epsilon^{ij} (\partial^k G_{0j} + \partial_j G_0^k) + \epsilon^{kj} (\partial^i G_{0j} + \partial_j G_0^i) \right] \\ & - \frac{1}{2\mu} (\epsilon^{mk} \Delta_m^i + \epsilon^{mi} \Delta_m^k) \approx 0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde (5.11) y (5.12) se identifican como restricciones secundarias, mientras que (5.13) son relaciones entre variables del espacio fase y multiplicadores de Lagrange. Secuencialmente, se aplica la condición de consistencia sobre las restricciones S^0 y S^i obteniendo

$$\dot{S}^\alpha = \{S^\alpha, H_{TMG}^1\} = \{S^\alpha, H_{TMG}\} + \Delta_{\mu\nu} \{S^\alpha, Q^{\mu\nu}\}. \quad (5.14)$$

Así, para restricciones de tercera generación identificamos

$$\dot{S}^0 \rightarrow \tilde{S}^0 : \frac{1}{2} \nabla^2 h^i_i - \frac{1}{2} \partial_j \partial_i h^{ij} - \frac{1}{\mu} [\epsilon^{ij} \partial_j \partial^k G_{ki} + \epsilon^{ij} \nabla^2 (\partial_i h_{0j})] \approx 0, \quad (5.15)$$

y de la evolución de (5.12) obtenemos una relación más entre multiplicadores de Lagrange y funciones del espacio fase, con la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{S}^i \rightarrow \tilde{S}^i : & \frac{1}{2} \partial_k G^{ki} - \frac{1}{2} \partial^i G^j_j + \frac{1}{2} \nabla^2 h^{0i} - \frac{1}{2} \partial_j \partial^i h^{0j} \\ & + \frac{\epsilon^{ik}}{2\mu} (\nabla^2 G_{0k} + \partial^l \partial_k G_{0l} - \partial^l v_{lk} - \partial_k \nabla^2 h_{00}) \\ & + \frac{\epsilon^{kj}}{2\mu} (\partial_j v^i_k + \nabla^2 \partial_k h^i_j - \partial_l \partial^i \partial_k h^l_j + \partial^i \partial_k G_{0j}) + \frac{1}{2\mu} (\epsilon^{ki} \partial^l \Delta_{lk} + \epsilon^{kj} \partial_j \Delta^i_k) \approx 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Continuando con el análisis, se aplican condiciones de consistencia sobre la nueva restricción \tilde{S}^0 . De esta manera, la evolución de dicha restricción respecto de la Hamiltoniana primaria queda determinada por

$$\dot{\tilde{S}}^0 = \frac{1}{2} \nabla^2 G^i_i - \frac{1}{2} \partial^j \partial^i G_{ij} - \frac{1}{\mu} \epsilon^{ij} (\partial_j \partial^k v_{ki} + \nabla^2 \partial_i G_{0j} + \partial_j \partial^k \Delta_{ki}) \approx 0, \quad (5.17)$$

Con base en lo anterior, en este punto no es posible obtener más restricciones de la evolución de las otras, pero podemos construir otras restricciones operando las relaciones entre multiplicadores y funciones del espacio fase (5.13) y (5.16), de forma que se obtiene

$$\tilde{V}^i = \partial_k \pi^{ik} + \frac{\epsilon^{kl}}{4\mu} \nabla^2 \partial_k h^i_l - \frac{\epsilon^{kj}}{4\mu} \partial_k \partial^i \partial_l h^l_j \approx 0, \quad (5.18)$$

y adicionalmente, tomando la traza de la expresión (5.13), obtenemos la siguiente restricción

$$\tilde{V} = \pi^i_i + \frac{1}{2} G^j_j + \partial^i h^0_i + \frac{1}{2\mu} \epsilon^{ij} \partial_i \partial_l h^l_j \approx 0. \quad (5.19)$$

**CAPÍTULO 5. ANÁLISIS HAMILTONIANO DE GRAVEDAD
 TOPOLÓGICAMENTE MASIVA
 5.2. RESTRICCIONES DE PRIMERA Y SEGUNDA CLASE**

Así, como en el capítulo anterior, si se busca una restricción adicional tal que se obtenga \tilde{V} de su evolución, se encuentra que la traza de (5.8) puede promoverse como restricción nuevamente, dado lo siguiente

$$\begin{aligned} Q^{ik}\eta_{ik} &= P^i{}_i, \\ \dot{P}^i{}_i &= \{P^i{}_i, H_{CS}^1\} = \tilde{V} \approx 0, \end{aligned} \quad (5.20)$$

de esta forma, el conjunto completo de restricciones del sistema está determinado por

$$\begin{aligned} Q^{00} &: P^{00} \approx 0, \\ Q^{0i} &: P^{0i} \approx 0, \\ Q^{ik} &: P^{ki} + \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu} \partial^k h_{0j} + \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu} \partial_j h^k{}_0 - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu} G^k{}_j + \frac{\epsilon^{kj}}{2\mu} \partial^i h_{0j} + \frac{\epsilon^{kj}}{2\mu} \partial_j h^i{}_0 - \frac{\epsilon^{kj}}{4\mu} G^i{}_j \approx 0, \\ S^0 &: \pi^{00} \approx 0, \\ S^i &: \pi^{0i} + \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu} \nabla^2 h_{0j} + \frac{\epsilon^{lj}}{2\mu} \partial^i \partial_l h_{0j} \approx 0, \\ \tilde{S}^0 &: \frac{1}{2} \nabla^2 h^j{}_j - \frac{1}{2} \partial_i \partial_j h^{ij} - \frac{1}{\mu} \epsilon^{ij} \partial_j \partial^k G_{ki} - \frac{1}{\mu} \epsilon^{ij} \nabla^2 \partial_i h_{0j} \approx 0, \\ \tilde{V}^i &: \partial_k \pi^{ik} + \frac{\epsilon^{kl}}{4\mu} \nabla^2 \partial_k h^i{}_l - \frac{\epsilon^{kj}}{4\mu} \partial_k \partial^i \partial_l h^l{}_j \approx 0, \\ \tilde{V} &: \pi^i{}_i + \frac{1}{2} G^j{}_j + \partial_i h^{0i} + \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu} \partial_i \partial_l h^l{}_j \approx 0, \\ U &: P^i{}_i \approx 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.2. Restricciones de primera y segunda clase

Una vez calculadas todas las restricciones de la teoría, se procede a clasificarlas, recordando que la clasificación que destaca entre ellas es aquella que distingue las de primera clase (generadoras de las transformaciones de norma) de las de segunda clase (que permitirán construir el paréntesis de Dirac). Así, para clasificar las restricciones, construimos la matriz $W^{\alpha\beta}$ formada por el álgebra de restricciones

$$\begin{aligned} \{Q^{ik}, Q^{lm}\} &= \frac{1}{4\mu} (\epsilon^{mi} \eta^{lk} + \epsilon^{li} \eta^{mk} + \epsilon^{lk} \eta^{mi} + \epsilon^{mk} \eta^{li}) \delta^2(x-y), \\ \{Q^{ik}, S^l\} &= \frac{1}{4\mu} (\epsilon^{il} \partial^k + \epsilon^{kl} \partial^i + \epsilon^{ij} \eta^{kl} \partial_j + \epsilon^{kj} \eta^{il} \partial_j) \delta^2(x-y), \\ \{Q^{ik}, \tilde{S}^0\} &= \frac{1}{2\mu} (\epsilon^{ij} \partial_j \partial^k + \epsilon^{kj} \partial_j \partial^i) \delta^2(x-y), \\ \{Q^{ik}, \tilde{V}\} &= -\frac{1}{2} \eta^{ik} \delta^2(x-y), \\ \{S^i, S^l\} &= \frac{1}{4\mu} (\epsilon^{il} \nabla^2 + \epsilon^{ij} \partial^l \partial_j + \epsilon^{jl} \partial^i \partial_j) \delta^2(x-y), \\ \{S^i, \tilde{V}\} &= -\frac{1}{2} \partial^i \delta^2(x-y), \\ \{\tilde{S}^0, \tilde{V}\} &= \frac{1}{2} \nabla^2 \delta^2(x-y), \\ \{S^i, \tilde{S}^0\} &= \frac{1}{2\mu} \epsilon^{ji} \nabla^2 \partial_j \delta^2(x-y), \\ \{\tilde{V}, U\} &= \delta^2(x-y) \end{aligned} \quad (5.22)$$

**CAPÍTULO 5. ANÁLISIS HAMILTONIANO DE GRAVEDAD
 TOPOLÓGICAMENTE MASIVA
 5.2. RESTRICCIONES DE PRIMERA Y SEGUNDA CLASE**

con el resto de los paréntesis iguales a cero. Así, la matriz $W^{\alpha\beta}$ es igual a

$$W = \begin{matrix} & Q^{00} & Q^{0l} & Q^{lm} & S^0 & S^l & \tilde{S}^0 & \tilde{V}^l & \tilde{V} & U \\ \begin{matrix} Q^{00} \\ Q^{0i} \\ Q^{ik} \\ S^0 \\ S^i \\ \tilde{S}^0 \\ \tilde{V}^i \\ \tilde{V} \\ U \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{Q^{ik}, Q^{lm}\} & 0 & \{Q^{ik}, S^l\} & \{Q^{ik}, \tilde{S}^0\} & 0 & \{Q^{ik}, \tilde{V}\} & 0 & U \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{S^i, Q^{lm}\} & 0 & \{S^i, S^l\} & \{S^i, \tilde{S}^0\} & 0 & \{S^i, \tilde{V}\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{\tilde{S}^0, Q^{lm}\} & 0 & \{\tilde{S}^0, S^l\} & 0 & 0 & \{\tilde{S}^0, \tilde{V}\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{\tilde{V}, Q^{lm}\} & 0 & \{\tilde{V}, S^l\} & \{\tilde{V}, \tilde{S}^0\} & 0 & 0 & 0 & \{\tilde{V}, U\} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \{U, \tilde{V}\} & 0 \end{array} \right) & \end{matrix} \quad (5.23)$$

De la misma forma que en el capítulo anterior, para obtener el número de restricciones de primera clase, es necesario buscar los vectores nulos de la matriz (5.23). Una vez que se han calculado los vectores nulos, obtenemos el siguiente conjunto modificado de restricciones

$$\begin{aligned} Q^{00} & : P^{00} \approx 0, \\ Q^{0i} & : P^{0i} \approx 0, \\ S^0 & : \pi^{00} \approx 0, \\ S^i & : \partial_k Q^{ki} - \pi^{0i} - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu} \nabla^2 h_{0j} - \frac{\epsilon^{lj}}{2\mu} \partial^i \partial_l h_{0j} \approx 0, \\ & : \partial_k P^{ki} - \pi^{0i} + \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu} \nabla^2 h_{0j} + \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu} \partial_j \partial^k h_{k0} - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu} \partial^k G_{kj} - \frac{\epsilon^{kj}}{4\mu} \partial_k G_j^i \approx 0, \\ \tilde{S}^0 & : \partial_i \partial_k Q^{ik} + \frac{1}{2} \nabla^2 h^j_j - \frac{1}{2} \partial_i \partial_j h^{ij} - \frac{1}{\mu} \epsilon^{ij} \partial_j \partial^k G_{ki} - \frac{1}{\mu} \epsilon^{ij} \nabla^2 \partial_i h_{0j} \approx 0, \\ & : \partial_i \partial_k P^{ik} + \frac{1}{2} \nabla^2 h^j_j - \frac{1}{2} \partial_i \partial_j h^{ij} + \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu} \partial_i \partial_k G^k_j \approx 0, \\ \tilde{V}^i & : \partial_k \pi^{ik} + \frac{\epsilon^{kl}}{4\mu} \nabla^2 \partial_k h^i_l - \frac{\epsilon^{kj}}{4\mu} \partial_k \partial^i \partial_l h^l_j \approx 0, \\ Q^{ik} & : P^{ki} + \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu} \partial^k h_{0j} + \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu} \partial_j h^k_0 - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu} G^k_j + \frac{\epsilon^{kj}}{2\mu} \partial^i h_{0j} + \frac{\epsilon^{kj}}{2\mu} \partial_j h^i_0 - \frac{\epsilon^{kj}}{4\mu} G^i_j \approx 0, \\ \tilde{V} & : \pi^i_i + \frac{1}{2} G^j_j + \partial_i h^{0i} + \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu} \partial_i \partial_l h^l_j \approx 0, \\ U & : P^i_i \approx 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Con lo anterior, podemos escribir la matriz W para las nuevas restricciones como sigue

$$W'^{\alpha\beta} = \begin{matrix} & Q^{00} & Q^{0l} & S^0 & S^l & \tilde{S}^0 & \tilde{V}^l & Q^{lm} & \tilde{V} & U \\ \begin{matrix} Q^{00} \\ Q^{0i} \\ S^0 \\ S^i \\ \tilde{S}^0 \\ \tilde{V}^i \\ Q^{ik} \\ \tilde{V} \\ U \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \{Q^{ik}, Q^{lm}\} & \{Q^{ik}, \tilde{V}\} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \{\tilde{V}, Q^{lm}\} & 0 & \{\tilde{V}, U\} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \{U, \tilde{V}\} & 0 \end{array} \right) & \end{matrix} \quad (5.25)$$

**CAPÍTULO 5. ANÁLISIS HAMILTONIANO DE GRAVEDAD
 TOPOLÓGICAMENTE MASIVA
 5.3. CONTEO DE GRADOS DE LIBERTAD**

En correspondencia con la sección anterior, de la matriz (5.25), podemos observar que en principio las primeras seis expresiones en (5.24), corresponden a las restricciones de primera clase, y las tres expresiones restantes Q^{ik} , \tilde{V} y U corresponden a las restricciones de segunda clase, sin embargo, el número de restricciones de segunda clase debe ser un número par. A partir del análisis del término individual de Chern-Simons, es posible conjeturar que el sistema aún presenta reductibilidad. Después de analizar, surge la misma relación de la sección anterior, como sigue

$$\begin{aligned} Q^{11} &= P^{11} + \frac{1}{\mu}\partial^1 h_{02} + \frac{1}{\mu}\partial_2 h^1_0 - \frac{1}{2\mu}G^1_2, \\ Q^{22} &= P^{22} - \frac{1}{\mu}\partial^2 h_{01} - \frac{1}{\mu}\partial_1 h^2_0 + \frac{1}{2\mu}G^2_1, \\ &\Rightarrow Q^{11} + Q^{22} = P^{11} + P^{22}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

que corresponde a la restricción $U = P^i_i$, por lo que podemos descartar nuevamente alguna de las restricciones Q^{11} o Q^{22} , de tal forma que entre las verdaderas restricciones de segunda clase solo estarán Q^{11} y Q^{12} . Así, tenemos el conjunto completo de restricciones clasificado de la siguiente forma

- Restricciones de primera clase

$$\begin{aligned} Q^{00} &: P^{00} \approx 0, \\ Q^{0i} &: P^{0i} \approx 0, \\ S^0 &: \pi^{00} \approx 0, \\ S^i &: \partial_k Q^{ki} - \pi^{0i} - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\nabla^2 h_{0j} - \frac{\epsilon^{lj}}{2\mu}\partial^i \partial_l h_{0j} \approx 0, \\ &: \partial_k P^{ki} - \pi^{0i} + \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\nabla^2 h_{0j} + \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu}\partial_j \partial^k h_{k0} - \frac{\epsilon^{ij}}{4\mu}\partial^k G_{kj} - \frac{\epsilon^{kj}}{4\mu}\partial_k G^i_j \approx 0 \\ \tilde{S}^0 &: \partial_i \partial_k Q^{ik} + \frac{1}{2}\nabla^2 h^j_j - \frac{1}{2}\partial_i \partial_j h^{ij} - \frac{1}{\mu}\epsilon^{ij}\partial_j \partial^k G_{ki} - \frac{1}{\mu}\epsilon^{ij}\nabla^2 \partial_i h_{0j} \approx 0, \\ &: \partial_i \partial_k P^{ik} + \frac{1}{2}\nabla^2 h^j_j - \frac{1}{2}\partial_i \partial_j h^{ij} + \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu}\partial_i \partial_k G^k_j \approx 0 \\ \tilde{V}^i &: \partial_k \pi^{ik} + \frac{\epsilon^{kl}}{4\mu}\nabla^2 \partial_k h^i_l - \frac{\epsilon^{kj}}{4\mu}\partial_k \partial^i \partial_l h^l_j \approx 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

- Restricciones de segunda clase

$$\begin{aligned} Q^{11} &= P^{11} + \frac{1}{\mu}\partial^1 h_{02} + \frac{1}{\mu}\partial_2 h^1_0 - \frac{1}{2\mu}G^1_2 \approx 0, \\ Q^{12} &= P^{12} + \frac{1}{\mu}\partial^2 h_{02} - \frac{1}{\mu}\partial^1 h_{01} + \frac{1}{4\mu}G^1_1 - \frac{1}{4\mu}G^2_2 \approx 0, \\ \tilde{V} &: \pi^i_i + \frac{1}{2}G^j_j + \partial_i h^{0i} + \frac{\epsilon^{ij}}{2\mu}\partial_i \partial_l h^l_j \approx 0, \\ U &: P^i_i \approx 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

5.3. Conteo de grados de libertad

En consecuencia, conociendo la clasificación anterior, ya es posible realizar el conteo de grados de libertad, hay 24 variables canónicas ($h_{\mu\nu}, G_{\mu\nu}, \pi^{\mu\nu}, P^{\mu\nu}$), cuatro restricciones de segunda clase ($Q^{11}, Q^{12}, \tilde{V}, U$) y nueve restricciones de primera clase ($Q^{00}, Q^{0i}, S^0, S^i, \tilde{S}^0, \tilde{V}^i$); así, sustituyendo en (4.41), nos queda

$$GL = \frac{1}{2} [(24) - (4) - 2(9)] = 1, \quad (5.29)$$

siendo éste también un resultado conocido de la teoría.

5.4. Paréntesis de Dirac

En seguida, construimos la matriz correspondiente al álgebra de restricciones de segunda clase como sigue

$$C^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \{Q^{11}, Q^{11}\} & \{Q^{11}, Q^{12}\} & \{Q^{11}, \tilde{V}\} & \{Q^{11}, U\} \\ \{Q^{12}, Q^{11}\} & \{Q^{12}, Q^{12}\} & \{Q^{12}, \tilde{V}\} & \{Q^{12}, U\} \\ \{\tilde{V}, Q^{11}\} & \{\tilde{V}, Q^{12}\} & \{\tilde{V}, \tilde{V}\} & \{\tilde{V}, U\} \\ \{U, Q^{11}\} & \{U, Q^{12}\} & \{U, \tilde{V}\} & \{U, U\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2\mu} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y), \quad (5.30)$$

con la inversa dada por

$$C_{\alpha\beta}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ -2\mu & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\mu & 1 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y). \quad (5.31)$$

De tal forma que los paréntesis de Dirac, aplicando la expresión (4.43), resultan en

$$\begin{aligned} \{h_{00}, \pi^{00}\}_D &= \delta^2(x-y), \\ \{h_{0i}, \pi^{0l}\}_D &= \frac{1}{2} \delta_i^l \delta^2(x-y), \\ \{h_{ij}, \pi^{lm}\}_D &= \frac{1}{2} (\delta_i^l \delta_j^m + \delta_i^m \delta_j^l) \delta^2(x-y), \\ \{h_{ij}, G_{lm}\}_D &= -\eta_{ij} \eta_{lm} \delta^2(x-y), \\ \{\pi^{0i}, \pi^{0l}\}_D &= -\frac{1}{2\mu} \epsilon^{il} \nabla^2 \delta^2(x-y), \\ \{\pi^{0i}, G_{lm}\}_D &= \frac{1}{2} (\delta^i_m \partial_l + \delta^i_l \partial_m) \delta^2(x-y), \\ \{\pi^{0i}, P^{lm}\}_D &= -\frac{1}{8\mu} (\epsilon^{ln} \eta^{im} + \epsilon^{mn} \eta^{il} + \epsilon^{mi} \eta^{ln} + \epsilon^{li} \eta^{mn}) \partial_n \delta^2(x-y), \\ \{\pi^{ij}, G_{lm}\}_D &= \frac{1}{4\mu} \eta_{lm} (\epsilon^{nj} \partial_n \partial^i + \epsilon^{ni} \partial_n \partial^j) \delta^2(x-y), \\ \{G_{00}, P^{00}\}_D &= \delta^2(x-y), \\ \{G_{0i}, P^{0l}\}_D &= \frac{1}{2} \delta_i^l \delta^2(x-y), \\ \{G_{ij}, G_{lm}\}_D &= \frac{\mu}{4} (\epsilon_{il} \eta_{jm} + \epsilon_{im} \eta_{jl} + \epsilon_{jl} \eta_{im} + \epsilon_{jm} \eta_{il}) \delta^2(x-y), \\ \{G_{ij}, P^{lm}\}_D &= \frac{1}{4} (\delta^l_i \delta^m_j + \delta^l_j \delta^m_i - \eta^{lm} \eta_{ij}) \delta^2(x-y) \\ \{P^{ij}, P^{lm}\}_D &= \frac{1}{16\mu} (\epsilon^{il} \eta^{mj} + \epsilon^{im} \eta^{jl} + \epsilon^{jl} \eta^{mi} + \epsilon^{jm} \eta^{il}) \delta^2(x-y). \end{aligned} \quad (5.32)$$

5.5. Acción extendida y Hamiltoniana extendida

Continuando con el análisis, la siguiente etapa consiste en determinar la acción extendida, que análogamente al capítulo anterior será

$$S_{EXT} [h_{\mu\nu}, \pi^{\mu\nu}, G_{\mu\nu}, P^{\mu\nu}, \lambda_\alpha, U_\alpha] = \int \left(\pi^{\mu\nu} \dot{h}_{\mu\nu} + P^{\mu\nu} \dot{h}_{\mu\nu} - H_{TMG} - \lambda_\alpha \gamma^\alpha - u_\alpha \chi^\alpha \right) d^3x,$$

**CAPÍTULO 5. ANÁLISIS HAMILTONIANO DE GRAVEDAD
 TOPOLÓGICAMENTE MASIVA
 5.5. ACCIÓN EXTENDIDA Y HAMILTONIANA EXTENDIDA**

donde, H_{TMG} es la Hamiltoniana canónica dada en (5.5), γ^α son las restricciones de primera clase, χ^α son las restricciones de segunda clase, λ_α y u_α son multiplicadores. Para proseguir, es necesario se determinen las funciones u_α ; con el fin de encontrarlas, nos auxiliaremos en la Hamiltoniana total, que conforme al capítulo 2, está determinada por

$$H_{TTMG} = H_{TMG} + \gamma^\alpha \lambda_\alpha + \chi^\alpha u_\alpha; \quad (5.33)$$

misma que podemos usar para calcular el siguiente paréntesis de Poisson

$$\{\chi^\alpha, H_{TTMG}\} = \{\chi^\alpha, H_{TMG}\} + \{\gamma^\alpha, \chi^\beta\} \lambda_\beta + \{\chi^\alpha, \chi^\beta\} u_\beta, \quad (5.34)$$

donde, el paréntesis mismo se anula, y el segundo término es idénticamente cero. De esta forma, solo queda

$$\{\chi^\alpha, H_{TTMG}\} = \{\chi^\alpha, H_{TMG}\} + \{\chi^\alpha, \chi^\beta\} u_\beta = 0. \quad (5.35)$$

Inmediatamente, de la expresión (5.35), se identifica la expresión buscada para las funciones u_β , las cuales poseen la siguiente forma

$$u_\alpha = C_{\beta\alpha}^{-1} \{\chi^\beta, H_{TMG}\}, \quad (5.36)$$

donde $\chi^\alpha = (\chi^1, \chi^2, \chi^3, \chi^4) = (Q^{11}, Q^{12}, \tilde{V}, U)$. De esta forma, podemos construir una estructura general del paréntesis de Poisson de las restricciones de segunda clase con la Hamiltoniana canónica, resultando en

$$\begin{aligned} \{Q^{ik}, H_{TMG}\} &= -\pi^{ik} + \frac{1}{2} G^{ik} - \frac{1}{2} \eta^{ik} G^j_j + \frac{1}{2} (\partial^i h^{0k} + \partial^k h^{0i}) - \eta^{ik} \partial^j h^0_j \\ &\quad - \frac{1}{2\mu} \left[\epsilon^{ij} \left(\partial_j \partial^k h_{00} - \frac{1}{2} \nabla^2 h^k_j + \frac{1}{2} \partial^k \partial_r h^r_j \right) + \epsilon^{kj} \left(\partial_j \partial^i h_{00} - \frac{1}{2} \nabla^2 h^i_j + \frac{1}{2} \partial^i \partial_r h^r_j \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\mu} (\epsilon^{lk} v_l^i + \epsilon^{li} v_l^k) + \frac{1}{2\mu} \left[\epsilon^{ij} (\partial^k G_{0j} + \partial_j G_0^k) + \epsilon^{kj} (\partial^i G_{0j} + \partial_j G_0^i) \right], \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\{\tilde{V}, H_{TMG}\} = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} + \frac{1}{\mu} \epsilon^{ij} \partial_i \partial^l G_{lj} - \frac{1}{\mu} \epsilon^{ij} \partial_i \nabla^2 h_{j0} + \frac{1}{2} v_2^2 - \partial^i G_{0i}, \quad (5.38)$$

$$\{U, H_{TMG}\} = -\tilde{V}. \quad (5.39)$$

Así, para los multiplicadores u_α que acompañan a las restricciones de segunda clase dentro de la acción extendida tendremos

$$\begin{aligned} u_1 &= C_{21}^{-1} \{\chi^1, H_{TMG}\} \\ &= (2\mu\pi^{12} - \mu G^{12} - \mu \partial^1 h^{02} - \mu \partial^2 h^{01} + \partial^2 \partial_2 h_{00} - \partial^1 \partial_1 h_{00} + \frac{1}{2} \nabla^2 h^1_1 - \frac{1}{2} \nabla^2 h^2_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_l \partial^2 h^l_2 - \frac{1}{2} \partial_l \partial^1 h^l_1 - 2\partial^2 G_{02} + 2\partial^1 G_{01} + v_2^2 - v_1^2) \delta^2(x-y), \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= C_{12}^{-1} \{\chi^1, H_{TMG}\} + C_{42}^{-1} \{\chi^4, H_{TMG}\} \\ &= (-2\mu\pi^{11} - \mu G^{22} - 2\mu \partial^2 h^{02} - 2\partial_2 \partial^1 h_{00} + \nabla^2 h^1_2 - \partial^1 \partial_l h^l_2 \\ &\quad + 2\partial^1 G_{02} + 2\partial_2 G^1_0 - 2v_2^1 + \mu \tilde{V}) \delta^2(x-y), \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$u_3 = C_{43}^{-1} \{\chi^4, H_{TMG}\} = -\tilde{V} \delta^2(x-y), \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} u_4 &= C_{24}^{-1} \{\chi^2, H_{TMG}\} + C_{34}^{-1} \{\chi^3, H_{TMG}\} \\ &= (-\mu\pi^{12} + \frac{\mu}{2} G^{12} + \frac{\mu}{2} \partial^1 h^{02} + \frac{\mu}{2} \partial^2 h^{01} - v_2^2 - \partial_2 \partial^2 h_{00} - \frac{1}{4} \nabla^2 h^1_1 + \frac{1}{4} \nabla^2 h^2_2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \partial_l \partial^2 h^l_2 + \frac{1}{4} \partial_l \partial^1 h^l_1 + 2\partial^1 G_{01} - \frac{1}{\mu} \epsilon^{ij} \partial_i \partial^k G_{kj} + \frac{1}{\mu} \epsilon^{ij} \partial_i \nabla^2 h_{j0}) \delta^2(x-y). \end{aligned} \quad (5.43)$$

**CAPÍTULO 5. ANÁLISIS HAMILTONIANO DE GRAVEDAD
 TOPOLÓGICAMENTE MASIVA
 5.5. ACCIÓN EXTENDIDA Y HAMILTONIANA EXTENDIDA**

Por lo tanto, similarmente al capítulo anterior, identificamos la Hamiltoniana canónica con la siguiente expresión

$$H_{ETMG} = H_{TMG} + u_\alpha \chi^\alpha = H_{TMG} + u_1 Q^{11} + u_2 Q^{12} + u_3 \tilde{V} + u_4 U. \quad (5.44)$$

De la misma forma que con CS, para verificar que H_{ETMG} es de primera clase, y además con el fin de comprobar que el álgebra de restricciones se encuentre también cerrada, se calcularon los paréntesis de Dirac de cada una de las restricciones de primera clase con la Hamiltoniana extendida, resultando en

$$\{Q^{00}, H_{ETMG}\}_D = -S^0, \quad (5.45)$$

$$\{Q^{0i}, H_{ETMG}\}_D = S^i, \quad (5.46)$$

$$\{S^0, H_{ETMG}\}_D = \tilde{S}^0, \quad (5.47)$$

$$\{\tilde{V}^i, H_{ETMG}\}_D = 0, \quad (5.48)$$

$$\{\tilde{S}^0, H_{ETMG}\}_D = 0, \quad (5.49)$$

$$\{S^i, H_{ETMG}\}_D = \tilde{V}^i, \quad (5.50)$$

en consecuencia, con este resultado, hemos obtenido una Hamiltoniana extendida de primera clase como era esperado. Se puede observar que el conjunto de restricciones obtenidas en este trabajo de tesis no es igual al reportado en [41], sin embargo, los resultados son equivalentes. De esta forma, se ha presentado un análisis canónico alternativo para TMG que amplía los resultados reportados hasta ahora en la literatura.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo de tesis, se ha realizado un análisis detallado en el marco de Gitman-Lyakhovich-Tyutin, de las teorías de CS y TMG en el contexto perturbativo. Con respecto a la teoría de CS de orden superior linealizada, se reporta la estructura completa de las restricciones, que hasta donde sabemos, no se encuentra reportado un análisis completo de las restricciones de esta teoría en la literatura. Encontramos la Hamiltoniana extendida y se demostró ser de primera clase, vía el álgebra de Dirac entre restricciones de primera clase y dicha Hamiltoniana extendida. Por otro lado, del análisis de TMG se ha presentado una nueva estructura de las restricciones, se obtuvo el conjunto de restricciones mediante el cálculo de los vectores nulos y se demostró que el análisis es consistente; al igual que con el término de CS, se construyó una Hamiltoniana extendida de primera clase y el álgebra de Dirac entre dicha Hamiltoniana y las restricciones de primera clase es cerrada. Con base en lo anterior, se observa que el formalismo GLT es un esquema robusto para analizar teorías con derivadas de orden superior, sin mostrar ambigüedad al momento de hallar restricciones. Finalmente, cabe mencionar que los resultados de este trabajo han sido aceptados para su publicación en el *European Physical Journal C* [42].

Apéndice A

Sobre las ecuaciones de movimiento

Del capítulo 1, tomamos la acción que define a la teoría de TMG, que está dada por

$$\begin{aligned}
 S_{TMG} &= S_{EH} + S_{CS}, \\
 S_{EH} &= \frac{1}{\kappa} \int R\sqrt{-g}d^3x, \\
 S_{CS} &= \frac{1}{2\kappa} \int \left[\frac{1}{\mu} \epsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} (\partial_{\mu} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} + \frac{2}{3} \Gamma_{\mu\xi}^{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\xi}) \right] \sqrt{-g}d^3x,
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

la cual contiene los términos de Einstein-Hilbert y Chern-Simons, respectivamente; además, podemos identificar la densidad Lagrangiana, prescindiendo de la constante κ , como

$$L_{TMG} = \sqrt{-g} \left[R + \frac{1}{2\mu} \epsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} (\partial_{\mu} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} + \frac{2}{3} \Gamma_{\mu\xi}^{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\xi}) \right]. \tag{A.2}$$

Para las ecuaciones de campo, se requiere la variación de (A.2) respecto de la métrica, esto es

$$\delta L_{TMG} = \delta L_{EH} + \delta L_{CS}, \tag{A.3}$$

donde

$$\begin{aligned}
 L_{EH} &= R\sqrt{-g}, \\
 L_{CS} &= \left[\frac{1}{2\mu} \epsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} (\partial_{\mu} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} + \frac{2}{3} \Gamma_{\mu\xi}^{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\xi}) \right] \sqrt{-g}.
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Con base en lo anterior, es posible obtener la variación de cada término en (A.4) por separado, como se desarrolla a continuación.

- Lagrangiana de Einstein-Hilbert

La variación del término de Einstein-Hilbert respecto de la métrica $g^{\mu\nu}$ será

$$\delta L_{EH} = \delta R\sqrt{-g} + R\delta\sqrt{-g}, \tag{A.5}$$

que considerando que la curvatura escalar es $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ resulta en

$$\delta L_{EH} = \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R\delta\sqrt{-g}. \tag{A.6}$$

Analizando término a término (A.6), observamos lo siguiente: dado que la variación es respecto de la métrica, el primer término se encuentra ya en forma deseada; para el segundo término, haremos uso de las expresiones que en enseguida se escriben.

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \nabla_{\mu} \delta \Gamma_{\alpha\nu}^{\alpha}, \tag{A.7}$$

APÉNDICE A. SOBRE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

conocida como la identidad de Palatini, y además

$$\sqrt{-g}\nabla_\alpha V^\alpha = \partial_\alpha (\sqrt{-g}V^\alpha), \quad (\text{A.8})$$

con V^α un vector. Con lo anterior, puede reescribirse el segundo término de la variación (A.6) como sigue

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \partial_\alpha (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \sqrt{-g}g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\nu\mu}^\nu); \quad (\text{A.9})$$

para el tercer término se tiene

$$R\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.10})$$

Finalmente, sustituyendo (A.9) y (A.10) en la variación (A.6), es posible escribir

$$\delta L_{EH} = \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) + \partial_\alpha T_{EH}^\alpha, \quad (\text{A.11})$$

con T_{EH}^α el correspondiente término de frontera, definido por

$$T_{EH}^\alpha = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \sqrt{-g}g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\nu\mu}^\nu. \quad (\text{A.12})$$

■ Lagrangiana de Chern-Simons

Ahora bien, atendiendo la variación del término de CS con respecto del tensor métrico $g^{\mu\nu}$ tenemos

$$\begin{aligned} \delta L_{CS} = & \epsilon^{\lambda\mu\nu}\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho (\partial_\mu\Gamma_{\rho\nu}^\sigma + \frac{2}{3}\Gamma_{\mu\xi}^\sigma\Gamma_{\nu\rho}^\xi) \\ & + \epsilon^{\lambda\mu\nu}\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho (\partial_\mu\delta\Gamma_{\rho\nu}^\sigma + \frac{2}{3}\delta\Gamma_{\mu\xi}^\sigma\Gamma_{\nu\rho}^\xi + \frac{2}{3}\Gamma_{\mu\xi}^\sigma\delta\Gamma_{\nu\rho}^\xi). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

donde de momento, el término $\frac{1}{2\mu}$ se ha retirado con fines prácticos. Continuando con la variación, puede observarse que en el segundo y cuarto términos de la expresión (A.13) al reorganizar algunos índices se obtiene respectivamente

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\epsilon^{\lambda\mu\nu}\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho\delta\Gamma_{\mu\xi}^\sigma\Gamma_{\nu\rho}^\xi &= \frac{2}{3}\epsilon^{\lambda\mu\nu}\Gamma_{\mu\xi}^\sigma\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho\delta\Gamma_{\nu\rho}^\xi, \\ \frac{2}{3}\epsilon^{\lambda\mu\nu}\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho\Gamma_{\mu\xi}^\sigma\Gamma_{\nu\rho}^\xi &= \frac{2}{3}\epsilon^{\lambda\mu\nu}\Gamma_{\mu\xi}^\sigma\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho\delta\Gamma_{\nu\rho}^\xi, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

así, sustituyendo los dos términos obtenidos (A.14) en (A.13), puede reescribirse

$$\delta L_{CS} = \epsilon^{\lambda\mu\nu} (\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho\partial_\mu\Gamma_{\rho\nu}^\sigma + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho\partial_\mu\delta\Gamma_{\rho\nu}^\sigma + 2\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho\Gamma_{\mu\xi}^\sigma\delta\Gamma_{\nu\rho}^\xi). \quad (\text{A.15})$$

Continuando el desarrollo, si para el segundo término en (A.15) se realiza integración por partes, se puede obtener la siguiente expresión

$$\delta L_{CS} = \partial_\mu (\epsilon^{\lambda\mu\nu}\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho\delta\Gamma_{\rho\nu}^\sigma) + 2\epsilon^{\lambda\mu\nu}\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho (\partial_\mu\Gamma_{\rho\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\xi}^\sigma\Gamma_{\nu\rho}^\xi); \quad (\text{A.16})$$

ahora, en virtud de la definición del tensor de Riemann dada en el capítulo 1 por (1.4), la expresión (A.16) se reduce a

$$\delta L_{CS} = \partial_\mu (\epsilon^{\lambda\mu\nu}\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho\delta\Gamma_{\rho\nu}^\sigma) + \epsilon^{\lambda\mu\nu}\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho R^\sigma{}_{\rho\mu\nu}. \quad (\text{A.17})$$

Por otro lado, del capítulo 1, para 2 + 1 dimensiones, retomamos la expresión (1.8),

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\mu}R_{\sigma\nu} + g_{\sigma\nu}R_{\rho\mu} - g_{\rho\nu}R_{\sigma\mu} - g_{\sigma\mu}R_{\rho\nu} - \frac{1}{2}R(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}), \quad (\text{A.18})$$

APÉNDICE A. SOBRE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

misma que al definir el tensor

$$S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R \quad (\text{A.19})$$

puede reescribirse como

$$R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} = \delta_\mu^\sigma S_{\rho\nu} + g_{\rho\nu} S^\sigma{}_\mu - \delta_\nu^\sigma S_{\rho\mu} - g_{\rho\mu} S^\sigma{}_\nu, \quad (\text{A.20})$$

de modo que, tomando la expresión anterior, el segundo término en la expresión (A.17) resulta en

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu} \delta\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} = 2\epsilon^{\lambda\mu\nu} S^\sigma{}_\mu \nabla_\lambda \delta g_{\nu\sigma}. \quad (\text{A.21})$$

De esta manera, sustituyendo (A.21) en (A.17) se tendrá

$$\delta L_{CS} = \partial_\mu (\epsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \delta\Gamma_{\rho\nu}^\sigma) + 2\epsilon^{\lambda\mu\nu} S^\sigma{}_\mu \nabla_\lambda \delta g_{\nu\sigma}, \quad (\text{A.22})$$

ahora bien, usando la definición de derivada covariante y reorganizando índices mudos, la expresión (A.22) puede reescribirse como

$$\delta L_{CS} = \partial_\mu (\epsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \delta\Gamma_{\rho\nu}^\sigma - 2\epsilon^{\lambda\mu\nu} S^\sigma{}_\lambda \delta g_{\nu\sigma}) + 2\delta g_{\nu\sigma} \epsilon^{\lambda\mu\nu} \nabla_\lambda S^\sigma{}_\mu. \quad (\text{A.23})$$

Con base en lo anterior, y teniendo en cuenta la definición del tensor de Cotton

$$C^{\mu\nu} = \frac{\epsilon^{\lambda\mu\nu}}{\sqrt{-g}} \nabla_\lambda S^\sigma{}_\mu = \epsilon^{\lambda\mu\nu} \nabla_\lambda S^\sigma{}_\mu, \quad (\text{A.24})$$

finalmente, reincorporando el factor $\frac{1}{2\mu}$, se obtiene

$$\delta L_{CS} = -\frac{1}{\mu} \sqrt{-g} \delta g_{\nu\sigma} C^{\nu\sigma} + \partial_\mu T_{CS}^\mu, \quad (\text{A.25})$$

donde T_{CS}^μ es el término de frontera de CS definido por

$$T_{CS}^\mu = \frac{1}{2\mu} (\epsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \delta\Gamma_{\rho\nu}^\sigma - 2\epsilon^{\lambda\mu\nu} S^\sigma{}_\lambda \delta g_{\nu\sigma}). \quad (\text{A.26})$$

Por último, considerando las dos variaciones obtenidas en (A.11) y (A.25) respecto de $g^{\mu\nu}$, tendremos para TMG

$$\delta L_{TMG} = \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{1}{\mu} C_{\mu\nu} \right) + \partial_\mu (T_{EH}^\mu + T_{CS}^\mu), \quad (\text{A.27})$$

y por consiguiente, hasta por un término de frontera, las ecuaciones de campo correspondientes para TMG en el vacío resultan

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{1}{\mu} C_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.28})$$

Adicionalmente, dado que en este trabajo de tesis realiza un análisis en el contexto perturbativo, es menester puntualizar, al menos de forma breve, las ecuaciones de movimiento linealizadas y hacer la distinción entre las teorías CS y TMG. Para CS, las ecuaciones de movimiento pueden ser obtenidas de la expresión (A.25), que de forma linealizada pueden escribirse como

$$C_{\mu\nu}^{(L)} = \epsilon_\mu{}^{\alpha\beta} \partial_\alpha R_{\beta\nu}^{(L)} + \epsilon_\nu{}^{\alpha\beta} \partial_\alpha R_{\beta\mu}^{(L)} = 0, \quad (\text{A.29})$$

donde $C_{\mu\nu}^{(L)}$ es el tensor de Cotton linealizado y $R_{\beta\nu}^{(L)}$ es el tensor de Ricci linealizado, dado por

$$R_{\mu\nu}^{(L)} = \frac{1}{2} (-\nabla^2 h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h + \partial^\sigma \partial_\nu h_{\sigma\mu} + \partial^\sigma \partial_\mu h_{\sigma\nu}). \quad (\text{A.30})$$

APÉNDICE A. SOBRE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Es sabido que el tensor de Cotton se anula si y solo si el tensor métrico es conformalmente plano, y aquí radica la diferencia fundamental entre la teoría de CS y TMG, además del hecho de que CS es una teoría sin grados de libertad. Por otra parte, las ecuaciones de movimiento (A.28), en su forma linealizada serán

$$G_{\alpha\nu}^{(L)} + \frac{1}{\mu} C_{\alpha\nu}^{(L)} = 0, \quad (\text{A.31})$$

donde $G_{\alpha\nu}^{(L)} = R_{\alpha\nu}^{(L)} - \frac{1}{2}g_{\alpha\nu}R^{(L)}$ es el tensor de Einstein linealizado. Ahora bien, usando la norma de Coulomb $\partial^\alpha h_{\alpha\beta} = 0$ y la condición sin traza $h^\alpha{}_\alpha = 0$, las ecuaciones en (A.31) toman la forma

$$\nabla^2 \left(h_{\nu\beta} + \epsilon_\nu{}^{\sigma\alpha} \partial_\sigma h_{\alpha\beta} \right) = 0, \quad (\text{A.32})$$

que además, si se contrae la ecuación (A.32) con $(\eta^\nu{}_\rho - \frac{1}{\mu}\epsilon_\rho{}^{\alpha\nu}\partial_\alpha)$ se obtiene

$$(\nabla^2 - \mu^2)h_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.33})$$

La ecuación (A.33) describe la propagación de un grado de libertad; dicho de otra forma, describe la propagación de un gravitón masivo de espín 2 con masa $m = \sqrt{\mu^2}$ [14]. Es importante recalcar que la contribución asociada a materia se refleja en los grados de libertad de la teoría y se manifiesta a través de las restricciones.

Apéndice B

Propiedades del paréntesis de Poisson

Sean F y G dos funciones arbitrarias del espacio fase, el paréntesis de Poisson entre ellas se define como

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i}. \quad (\text{B.1})$$

Y cumple las siguientes propiedades: Sean F , G y K funciones arbitrarias del espacio fase

- Antisimetría: $\{F, G\} = -\{G, F\}$.
- Linealidad: $\{c_1 F + c_2 G, K\} = c_1 \{F, K\} + c_2 \{G, K\}$, con c_1 y c_2 constantes.
- Regla del producto: $\{FG, K\} = F \{G, K\} + \{F, K\} G$.
- Existencia de elementos nulos: $\{c, F\} = 0$, $\forall c$ constante.
- Identidad de Jacobi: $\{F, \{G, K\}\} + \{K, \{F, G\}\} + \{G, \{K, F\}\} = 0$.
- Paréntesis fundamentales

$$\{q^i, q^k\} = \{p_i, p_k\} = 0,$$

$$\{q^i, p_k\} = \delta_k^i.$$

Bibliografía

- [1] B. P. Abbott et al. [LIGO Scientific and Virgo Collaborations], “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger,” *Phys. Rev. Lett.* 116, 6, 061102 (2016).
- [2] Arnowitt, R., Deser, R., Misner, C.: In: Witten, L. (ed.) *Gravitation: An Introduction to Current Research*. Wiley, New York (1962).
- [3] Ashtekar, A.: *Phys. Rev. Lett.* 77, 3288 (1986).
- [4] Ashtekar, A.: *Phys. Rev. D* 36, 1587 (1987).
- [5] Ashtekar, A.: *Lectures on Non-Perturbative Canonical Gravity*. World Scientific, Singapore (1991).
- [6] Barbero, J.F.: *Phys. Rev. D* 51, 5507 (1995).
- [7] Holts, S.: *Phys. Rev. D* 53, 5966 (1996).
- [8] Rovelli, C., Thieman, T.: *Phys.Rev. D*57 (1998) 1009–1014, arXiv:gr-qc/9705059 [gr-qc].
- [9] J. F. Plebanski, *J. Math. Phys.* 18 (1977) 2511.
- [10] Capovilla, R., Dell, J., Jacobson, T.: *Class. Quantum Gravity* 8, 59 (1991).
- [11] Capovilla, R., Jacobson, T., Dell, J.: *Phys. Rev. Lett.* 63, 2325 (1989)
- [12] Rovelli, C.: *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge (2004).
- [13] Thiemann, T.: *Modern Canonical Quantum General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge (2007).
- [14] Fierz, M., and W. Pauli, 1939, *Proc. R. Soc. A* 173, 211.
- [15] N. D. Birrel, P.C. W Davies, *Quantum fields in curved space*, Cambridge University Press, Cambridge, (1984)
- [16] H. van Dam and M. J. G. Veltman, *Nucl. Phys. B* 22, 397 (1970).
- [17] V. I. Zakharov, *JETP Lett.* 12, 312 (1970).
- [18] D. G. Boulware and S. Deser, *Phys. Rev. D* 6, 3368 (1972).
- [19] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.* 48 (1982) 975.
- [20] P. A. M. Dirac: *Can. J. Math.*, 2, 129 (1950)
- [21] P. A. M. Dirac: *Can. J. Math.*, 3, 1 (1951)
- [22] P. A. M. Dirac: *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, N.Y.,(1964)

- [23] Henneaux, M. and Teitelboim, C., *Quantization of Gauge Systems*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, (1991)
- [24] S. Carlip, *Quantum Gravity in 2+1 Dimensions*, Cambridge University Press, (1998)
- [25] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge University Press, (2004), ISBN 0-521-83733-2
- [26] Weinberg, S. *The Quantum theory of Fields*, Cambridge: Cambridge University Press, Three Volumes, (1995)
- [27] M. Ostrogradski: *Mem. Ac. St. Petersburg*, 1 (1850) 385
- [28] C. Battle, J. Gomis, J.M. Pons and N. Romána-Rioy. *J. Phys. A*21, (1988) 2693.
- [29] Pons, J.M. Ostrogradski's theorem for higher-order singular Lagrangians. *Lett. Math. Phys.* 17, 181.189 (1989). <https://doi.org/10.1007/BF00401583>
- [30] D. M. Gitman, S. L. Lyakhovich and I. V. Tyutin, *Izvestiya Vuz. Fiz.* 26, 61 (1983), *Sov.Phys. J.*, 730 (1984).
- [31] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints* (Nauka, 1986; Springer-Verlag, 1990).
- [32] L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, Princeton, (1949).
- [33] A. A. García-Díaz, *Exact Solutions in Three-Dimensional Gravity*. Cambridge: Cambridge University Press, (2017).
- [34] J. D. Brown, *Lower Dimensional Gravity*. World Scientific, (1988)
- [35] A. Escalante and O. Rodríguez-Tzompantzi, *Eur. Phys. J. C*, vol. 76, no. 10, pp. 27-29, (2016), doi: 10.1140/epjc/s10052-016-4425-x.
- [36] S.-S. Chern and J. Simons. Characteristic forms and geometric invariants. *Annals of Mathematics*, pages 48–69, 1974.
- [37] K. Hinterbichler, Theoretical Aspects of Massive Gravity. *Rev. Mod. Phys.* (2011); 84. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.84.671>
- [38] R. P. Woodard, *Lect. Notes Phys.* 720, 403 (2007), [astro-ph/0601672](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0601672)
- [39] D. Lovelock, David, H. Rund, *Tensors, Differential Forms, and Variational Principles*. Dover Publications Inc., (1975).
- [40] N. Ghalati, R. Natalia Kiriushcheva, S V. Kuzmin, *Modern Physics Letters A*, 22 (2011) <https://doi.org/10.1142/S0217732307022396>
- [41] Barcelos-Neto, J., Dargam, T.G., *Z. Phys. C - Particles and Fields* 67, 701-705 (1995). <https://doi.org/10.1007/BF01553998>
- [42] Alberto Escalante and Jorge Hernández-Aguilar, New canonical analysis for higher order topologically massive gravity, accepted in *European Physical Journal C*, (DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-09429-6) (2021). [arXiv:2104.08722](https://arxiv.org/abs/2104.08722) [gr-qc]