

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA



FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA

Diseño de Integradores de Orden Fraccionario Usando
Topologías Activas para su Aplicación en Osciladores Caóticos.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Electrónica

PRESENTA:

Luis Carlos Lujano Hernández

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Jesus Manuel Muñoz Pacheco - BUAP

Dr. Carlos Muñoz Montero - UPPUE

PUEBLA, PUEBLA, JULIO DEL 2019

Agradecimientos

Agradezco a mi madre Graciela Hernández Teutle, mi padre J. Jesús Lujano Delgado y a mi tía Margarita Hernández Teutle, por ser mis principales motivadores y apoyarme en cada decisión. Sabemos que no ha sido sencillo el camino hasta ahora, pero gracias a su aporte y principalmente a su amor, lo complicado se ha notado menos.

Agradezco a mis asesores, por su paciencia para guiarme durante todo el desarrollo de la tesis, por su tiempo invertido para transmitirme sus conocimientos y experiencias. Al Dr. Jesús Manuel Muñoz Pacheco por brindarme incontables oportunidades y al Dr. Carlos Muñoz Montero por su profundo interés en el tema de tesis. A los dos por su amabilidad e incluirme en su equipo de trabajo. Muchas gracias.

A mi jurado, el Dr. Richard Torrealba Melendez, M.C. Jose Francisco Portillo Robledo y al Dr. Victor Rodolfo González Díaz, que por sus observaciones han servido para mejorar esta tesis.

Agradezco al Dr. Richard Torrealba Melendez, por el espacio de trabajo brindado todos los días, que me han servido para el término de esta tesis. Agradezco al Dr. Luis Abraham Sánchez Gaspariano por su aportación en el análisis de Monte Carlo.

Agradezco a CONACYT por la beca que se me otorgó del programa de **Ciencia Básica** para el desarrollo y término de la tesis de licenciatura mediante el proyecto con No. de Ref. **258880** con Título: **Diseño Electrónico de Sistemas Dinámicos de Orden Fraccional y Entero Considerando No Idealidades.**

Agradezco a la Facultad de Ciencias de la Electrónica de la BUAP por mis formadores, personas con gran experiencia quienes se han esforzado por ayudarme a llegar al punto en el que me encuentro.

Agradezco a los amigos conocidos en esta etapa formadora de mi vida. A Gregorio Blancas Ramón, por acompañarme todos estos años, con dificultades y buenos momentos, superándonos cada día por un objetivo en común.

Dedicatoria

Se la dedico con todo mi amor, al forjador de mi camino, al que me acompaña siempre y me levanta de los tropiezos, a mi abuelo Carlos Hernández Reyez. Descanse En Paz.

Índice general

Resumen	I
1. Introducción	1
1.1. Cálculo fraccionario	1
1.1.1. Formula de Cauchy para la integral de orden fraccionario	1
1.1.2. Definición de Grünwald-Letnikov	1
1.1.3. Definición de Riemann-Liouville	2
1.1.4. Definición de Caputo	2
1.2. Sistemas caóticos de orden fraccionario	2
1.3. Aplicaciones de osciladores caóticos fraccionarios	4
1.4. Justificación	7
1.5. Objetivos	7
1.5.1. Objetivo General	7
1.5.2. Objetivos Específicos	7
2. Diseño electrónico de integradores pasivos de orden fraccionario	9
2.1. Diseño de operadores de orden fraccionario	9
2.1.1. Método de Charef	10
2.1.2. Método de Carlson	11
2.1.3. Método de Oustaloup	12
2.2. Aproximaciones de la función de transferencia	12
2.3. Realización pasiva de un integrador de orden fraccionario.	15
3. Diseño electrónico de integradores activos de orden fraccionario	16
3.1. Propuesta de un integrador de orden fraccionario activo con base en el operador Laplaciano fraccionario	16
3.2. Diseño de integradores fraccionarios usando OPAMPS	17
3.2.1. Amplificador diferencial ponderado (WDA)	17
3.2.2. Amplificador sumador ponderado (WAA)	18
3.2.3. Integrador inversor de orden entero (IInv)	18
3.3. Implementación de integradores fraccionarios activos	18
3.3.1. Simulación con SPICE	20
3.3.2. Experimental con NI ELVIS II+	21
3.4. Ajuste	22
3.4.1. Simulación con SPICE	24
3.4.2. Experimental con NI ELVIS II+	24
3.4.3. Fase del integrador fraccionario activo	25
3.5. Análisis de Monte Carlo	25
3.6. Análisis de Sensitividad	30

4. Implementación experimental de un oscilador caótico Multi-Scroll de orden fraccionario	40
4.1. Simulación en SPICE y resultados experimentales	44
5. Conclusión	46
5.1. Trabajo futuro	47
A. Simulaciones en SPICE	48
A.1. Integrador fraccionario de orden 0.1	48
A.2. Integrador fraccionario de orden 0.2	49
A.3. Integrador fraccionario de orden 0.3	50
A.4. Integrador fraccionario de orden 0.4	51
A.5. Integrador fraccionario de orden 0.5	52
A.6. Integrador fraccionario de orden 0.6	53
A.7. Integrador fraccionario de orden 0.7	54
A.8. Integrador fraccionario de orden 0.8	55
A.9. Integrador fraccionario de orden 0.85	56
A.10. Integrador fraccionario de orden 0.9	57
A.11. Integrador fraccionario de orden 0.95	58
B. Resultados Experimentales	59
B.1. Integrador fraccionario de orden 0.1	60
B.2. Integrador fraccionario de orden 0.2	61
B.3. Integrador fraccionario de orden 0.3	62
B.4. Integrador fraccionario de orden 0.4	63
B.5. Integrador fraccionario de orden 0.5	64
B.6. Integrador fraccionario de orden 0.6	65
B.7. Integrador fraccionario de orden 0.7	66
B.8. Integrador fraccionario de orden 0.8	67
B.9. Integrador fraccionario de orden 0.85	68
B.10. Integrador fraccionario de orden 0.9	69
B.11. Integrador fraccionario de orden 0.95	70
C. Diagrama y PCB en ALTIUM DESIGNER	71
C.1. Oscilador caótico de Lü con 2 enrollamientos	72
C.2. Oscilador caótico de Lü con 4 enrollamientos	74
C.3. Evidencia experimental	76
Bibliografía	78

Índice de figuras

2.1. Diagrama de Bode con pendiente de -20α dB/dec y su aproximación con líneas zigzag con pendientes individuales de 0dB/dec y -20 dB/dec.	11
2.2. Esquema de integrador fraccionario pasivo de orden $\alpha=0.95$. Parámetros: $C_1=86.20\mu F$, $C_2=29.85\mu F$, $C_3=23.56\mu F$, $R_1=6.28M\Omega$, $R_2=0.2966M\Omega$, $R_3=2.945K\Omega$, $R_{g1}=R=10K\Omega$	15
3.1. Diagrama de bloques del integrador de orden fraccionario con topología activa.	17
3.2. Bloques para el diseño del integrador fraccionario activo: (a) Amplificador Diferencial Ponderado (WDA). (b) Amplificador Sumador Ponderado (WAA). (c) Integrador Inversor (IInv).	17
3.3. Diagrama eléctrico del integrador de orden fraccionario realizado con OpAmps.	18
3.4. Simulación del integrador de orden fraccionario.	20
3.5. Resultados experimentales del integrador de orden fraccionario.	21
3.6. Aproximación exponencial sobre el ajuste A.	23
3.7. Simulación del integrador con ajuste.	24
3.8. Datos del integrador con ajuste.	24
3.9. Distribución de probabilidad Gaussiana.	26
3.10. Histogramas de la variación de la pendiente de la respuesta en frecuencia del integrador fraccionario considerando ajuste.	27
3.11. Media de Monte Carlo con y sin ajuste.	28
3.12. Valores Máximos y Mínimos en la pendiente con y sin Ajuste.	28
3.13. Diagrama circuital del integrador activo de orden fraccionario.	31
3.14. Análisis de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.1 con y sin ajuste.	31
3.15. Análisis de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.2 con y sin ajuste.	32
3.16. Análisis de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.3 con y sin ajuste.	33
3.17. Análisis de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.4 con y sin ajuste.	33
3.18. Análisis de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.5 con y sin ajuste.	34
3.19. Análisis de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.6 con y sin ajuste.	35
3.20. Análisis de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.7 con y sin ajuste.	35
3.21. Análisis de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.8 con y sin ajuste.	36
3.22. Análisis de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.85 con y sin ajuste.	37
3.23. Análisis de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.9 con y sin ajuste.	37
3.24. Análisis de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.95 con y sin ajuste.	38
3.25. Sensitividad normalizada del capacitor del integrador fraccionario	39
4.1. Diagrama de Bloques del sistema caótico de Lü.	41
4.2. Respuesta modificada del integrador activo de orden 0.90.	41
4.3. Respuesta modificada del integrador activo (Rojo) con el fractal de orden 0.95 (Azul).	41
4.4. Oscilador fraccionario de Lü.	42
4.5. Montaje físico del oscilador caótico de Lü de orden fraccionario.	43
4.6. Sistema Caótico de Lü con 2 atractores $\alpha = 0.90$	44
4.7. Sistema Caótico de Lü con 4 atractores $\alpha = 0.90$	44

4.8. Sistema Caótico de Lü con 2 atractores $\alpha = 0.95$	45
4.9. Sistema Caótico de Lü con 4 atractores $\alpha = 0.95$	45
A.1. Integrador fraccionario de orden 0.1 con $C_x = 1nF$	48
A.2. Integrador fraccionario de orden 0.2 con $C_x = 1nF$	49
A.3. Integrador fraccionario de orden 0.3 con $C_x = 1nF$	50
A.4. Integrador fraccionario de orden 0.4 con $C_x = 1nF$	51
A.5. Integrador fraccionario de orden 0.5 con $C_x = 1nF$	52
A.6. Integrador fraccionario de orden 0.6 con $C_x = 1nF$	53
A.7. Integrador fraccionario de orden 0.7 con $C_x = 1nF$	54
A.8. Integrador fraccionario de orden 0.8 con $C_x = 1nF$	55
A.9. Integrador fraccionario de orden 0.85 con $C_x = 1nF$	56
A.10. Integrador fraccionario de orden 0.9 con $C_x = 1nF$	57
A.11. Integrador fraccionario de orden 0.95 con $C_x = 1nF$	58
B.1. Diagrama del montaje experimental.	59
B.2. Integrador fraccionario de orden 0.1 con $C_x = 1nF$	60
B.3. Integrador fraccionario de orden 0.2 con $C_x = 1nF$	61
B.4. Integrador fraccionario de orden 0.3 con $C_x = 1nF$	62
B.5. Integrador fraccionario de orden 0.4 con $C_x = 1nF$	63
B.6. Integrador fraccionario de orden 0.5 con $C_x = 1nF$	64
B.7. Integrador fraccionario de orden 0.6 con $C_x = 1nF$	65
B.8. Integrador fraccionario de orden 0.7 con $C_x = 1nF$	66
B.9. Integrador fraccionario de orden 0.8 con $C_x = 1nF$	67
B.10. Integrador fraccionario de orden 0.85 con $C_x = 1nF$	68
B.11. Integrador fraccionario de orden 0.9 con $C_x = 1nF$	69
B.12. Integrador fraccionario de orden 0.95 con $C_x = 1nF$	70
C.1. Diagrama del circuito para un oscilador caótico fraccionario de Lü con 2 enrollamientos.	72
C.2. Diseño PCB para un oscilador caótico fraccionario de Lü con 2 enrollamientos.	73
C.3. Diagrama del circuito para un oscilador caótico fraccionario de Lü con 4 enrollamientos.	74
C.4. Diseño PCB para un oscilador caótico fraccionario de Lü con 4 enrollamientos.	75
C.5. Tarjeta PCB del oscilador caótico fraccionario de Lü	76
C.6. Transiente del oscilador caótico fraccionario de Lü	76
C.7. Transiente del oscilador caótico fraccionario de Lü	77
C.8. Atractor del oscilador caótico fraccionario de Lü	77

Índice de tablas

2.1. Las funciones de transferencia de órdenes enteras son aproximaciones a operadores fraccionarios, con error de discrepancia máxima de 2dB y ancho de banda del sistema de $\omega_{max}=10^3$ rad/s.	14
3.1. Valores de resistencia	19
3.2. Valores de resistencias para orden de 0.1–0.95 con $R_g = 100\Omega$	19
3.3. Detalles de los integradores para frecuencia de cruce por cero de 15.91KHz.	19
3.4. Error en cada orden	21
3.5. Ajuste en A para cada orden	22
3.6. Error de la ecuación de ajuste 3.14.	23
3.7. Fase en frecuencia de corte del integrador fraccionario activo con ajuste.	25
3.8. Análisis de Monte Carlo sin Ajuste	29
3.9. Análisis de Monte Carlo con Ajuste	29
3.10. Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.1	31
3.11. Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.2	32
3.12. Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.3	33
3.13. Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.4	34
3.14. Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.5	34
3.15. Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.6	35
3.16. Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.7	36
3.17. Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.8	36
3.18. Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.85	37
3.19. Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.90	38
3.20. Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.95	38
4.1. Tabla de valores para el estado X, Y y Z para $\alpha = 0.9$	43
4.2. Tabla de valores para el estado X, Y y Z para $\alpha = 0.95$	43
4.3. Tabla de valores para el PWL.	43

Resumen

Esta tesis está orientada al diseño e implementación de filtros activos fraccionarios con topología activa. A partir de la definición de Riemann-Liouville, el operador Laplaciano fraccionario y bloques básicos de implementación con Opamps, se obtienen sistemas cuyo comportamiento en el dominio de la frecuencia se asemeja al de sistemas con orden fraccionario de entre 0.1 y 0.95. Después de simular y comprobar físicamente éstos diseños, se obtiene una ecuación de ajuste de un solo parámetro para disminuir el error que existe entre el orden esperado y el orden experimental observado. Se realiza la construcción de filtros de orden 0.9 y 0.95 para su inclusión en un circuito caótico de Lü. Posteriormente se iguala el diagrama de fase del filtro activo fraccionario con el del filtro pasivo, partiendo del conocimiento de que el integrador fraccionario pasivo puede integrarse a sistemas caóticos. Así, se sustituyen los integradores fraccionarios activos en el sistema caótico de Lü para obtener comportamientos caóticos de tipo fraccionario.

1 | Introducción

1.1. Cálculo fraccionario

El cálculo fraccionario es una generalización de la diferenciación e integración de funciones en un orden no entero. El operador diferencial no entero se denota por ${}_a D_t^\alpha$, donde a y t son los límites de la operación y $\alpha \in \mathbb{R}$. El operador se define como

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^\alpha & \alpha < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Diferentes definiciones de integración y diferenciación de orden fraccionario han surgido durante el desarrollo de la teoría del cálculo fraccionario. Algunas de las definiciones se extienden directamente desde el cálculo de orden entero. Las definiciones más comunes son las siguientes. [1]

1.1.1. Formula de Cauchy para la integral de orden fraccionario

La formula se extiende desde el cálculo de orden entero

$$D^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{j2\pi} \int_C \frac{f(\tau)}{(\tau - t)^{\alpha+1}} d\tau \quad (1.2)$$

donde C es el camino encerrado por los polos de la función $f(t)$. La integral y derivada de funciones coseno y seno puede ser expresado por

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k}(\cos(at)) &= a^k \cos\left(at + \frac{k\pi}{2}\right) \\ \frac{d^k}{dt^k}(\sin(at)) &= a^k \sin\left(at + \frac{k\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

También se puede mostrar con la fórmula de Cauchy que, si k no es un número entero, entonces (1.3) sigue siendo válida [1].

1.1.2. Definición de Grünwald-Letnikov

La integración y diferenciación de orden fraccionario pueden definirse como

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{t-a}{h} \right\rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \quad (1.4)$$

donde $\binom{\alpha}{j}$ son coeficientes binomiales y los subíndices a la izquierda y derecha de D son los límites inferior y superior en la integral. El valor de α es no entero, positivo para diferenciación y negativo para integración [1].

1.1.3. Definición de Riemann-Liouville

La definición de Riemann-Liouville es ampliamente utilizada para la diferenciación e integración de orden fraccionario. La integral de orden fraccionario está dado por

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad (1.5)$$

donde $0 < \alpha < 1$ y a es el valor inicial. Si $a=0$ la notación se simplifica como $D_t^\alpha f(t)$. De forma similar, la diferenciación de orden fraccionario se define como

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left({}_a D_t^{-(n-\alpha)} f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (1.6)$$

donde $n = [\alpha]$ [1].

1.1.4. Definición de Caputo

La diferenciación de orden fraccionario de Caputo puede ser escrita como

$${}_0 D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^n(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (1.7)$$

para $n = [\alpha]$. De forma similar, la integral se describe por

$${}_0 D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad (1.8)$$

con $\alpha > 0$. $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma, definida como

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (1.9)$$

Se puede apreciar que para diversas funciones, las derivadas e integrales de Riemann-Liouville y Caputo son equivalentes [1].

1.2. Sistemas caóticos de orden fraccionario

Los sistemas caóticos se conocen desde hace tiempo pero solo recientemente se demostró que el caos puede ser controlado y, por tanto, sincronizado. Así, estos sistemas pueden impactar en muchas áreas: aplicaciones críticas de tiempo y energía, circuitos y dispositivos de alto rendimiento (p. ej. moduladores delta-sigma y convertidores de potencia), mezclas líquidas, reacciones químicas, sistemas biológicos (p. ej. en el cerebro humano, corazón y proceso perceptivo), gestión de crisis (p. ej. en electrónicos de potencia), procesamiento de información segura, y toma de decisiones críticas en política y economía. Esta nueva y desafiante área de investigación y desarrollo se ha convertido en una disciplina científica, que involucra ingeniería en sistemas y control, teoría y experimentos físicos, matemáticas aplicadas, fisiólogos y, sobre todo, especialistas en circuitos y dispositivos [2].

El caos se refiere a un tipo de comportamiento dinámico complejo que posee algunas características muy especiales, como una extrema sensibilidad a pequeñas variaciones de condiciones iniciales, trayectorias encerradas en el espacio de fase pero con exponentes positivos de Lyapunov, una finita entropía de Kolmogorov-Sinai, un espectro de potencia continuo, y/o dimensión topográfica fraccionaria, etc. En otras palabras, el caos es simplemente un comportamiento impredecible de un sistema determinista a largo plazo. De acuerdo a [2], existen tres identificadores del caos:

- El caos es un "sistema determinista", es decir, su condición actual es consecuencia de estados previos del sistema.
- El caos es un sistema que exhibe un comportamiento que es "difícil de distinguir de un comportamiento aleatorio". En otras palabras, un sistema puede ser caótico si se observa aleatorio. Esto no significa que el sistema sea aleatorio, más bien el sistema puede ser difícil sino imposible de predecir.
- El caos es un sistema que es "sensible a las condiciones iniciales".

Debido a que estas características son no lineales, su comportamiento es mucho más complicado que los sistemas lineales. De hecho, incluso los sistemas caóticos más simples exhiben una gran cantidad de comportamientos diferentes, que solo se pueden analizar completamente con la ayuda de poderosos recursos de software [2]. El objetivo de la investigación de sistemas caóticos es, en consecuencia, entender cómo un sistema dinámico determinista puede exhibir comportamiento caótico, el tipo de sistemas capaces de este comportamiento, las formas disponibles para controlarlos, las formas de implementarlos con dispositivos electrónicos y las implicaciones prácticas y teóricas. Recientemente, el diseño teórico y la implementación en hardware de diferentes tipos de osciladores caóticos han atraído cada vez más la atención, centrándose en aplicaciones del mundo real de muchas tecnologías basadas en el caos y sistemas de información. Existe actualmente amplio interés por la creación de diversos atractores caóticos complejos de multi-scroll mediante el uso de dispositivos y circuitos electrónicos simples, esto a partir de métodos con funciones piecewise-linear (PWL), redes neuronales, funciones moduladoras no lineales, diseño de componentes de circuitos, colectores de conmutaciones, etc. Muchos de estos atractores caóticos multi-scroll han sido verificados con simulaciones numéricas o pruebas teóricas. Se ha identificado que es difícil diseñar atractores caóticos multi-scroll mediante el uso de dispositivos electrónicos. Por ejemplo, es difícil diseñar un resistor no lineal con una característica apropiada con muchos segmentos. La realización de una resistencia no lineal con múltiples segmentos es la base para la implementación en hardware de atractores caóticos con orientación multidireccional y con un gran número de scrolls. Además, la implementación del circuito de muchos scrolls necesita un rango dinámico grande que requiere un mayor suministro de voltaje y amplificadores diferenciales apropiados, o bien un escalamiento apropiado de voltajes. Sin embargo, las condiciones físicas a veces limitan o incluso prohíben dicha realización del circuito [2].

Aunque existen enfoques para diseñar sistemas caóticos multi-scroll que usan dispositivos, estos son diseños personalizados. Esto indica que es necesaria una comprensión más profunda de la dinámica caótica del sistema. Además, estos diseños solo son válidos para un cierto rango de valores para parámetros del circuito. Si uno necesita modificar el comportamiento del sistema caótico, debería ser necesario re-evaluar el diseño.

Considerando las dificultades antes mencionadas, se debe proponer una metodología sistemática para la automatización del diseño de circuitos multidireccional de sistemas caóticos multi-scroll. La idea es proponer un enfoque de síntesis integrado en una herramienta EDA para generar automáticamente un sistema caótico usando dispositivos electrónicos cuyas características pueden ser adaptadas mediante el uso de modelos de comportamiento y simulación [2].

1.3. Aplicaciones de osciladores caóticos fraccionarios

Los sistemas caóticos se conocen desde hace mucho tiempo, tratando de exportar conceptos de la física y las matemáticas a las aplicaciones de ingeniería del mundo real. Recientemente se demostró que el caos puede ser controlado y sincronizado entre dos sistemas caóticos idénticos. El caos ha sido considerado para uso en sistemas de comunicación. Esto fue motivado por la extrema sensibilidad del caos a parámetros y condiciones iniciales, así como sus propiedades similares a la aleatoriedad. Estos sistemas están en estado de desarrollo, por lo que ya se han identificado y caracterizado posibles esquemas. En las primeras investigaciones en este tópico se argumentaba que solo algunos circuitos y conceptos con base en caos tienen relevancia para las comunicaciones. En la última década la comunicación caótica ha madurado al punto en que estos argumentos ya no están justificados. Las posibles aplicaciones se describen a continuación [2].

- **Técnicas de Modulación con Base en Caos:** Varias técnicas de modulación con base en caos se han propuesto en la literatura. Por ejemplo, una generalización de la modulación de frecuencia en la que las trayectorias de estado de los sistemas dinámicos se utilizan como ondas portadoras [2].
- **Sistemas Coherentes de Comunicación con Base en Caos:** La posibilidad de explotar las propiedades de autosincronización de sistemas caóticos para propósitos de comunicación han atraído la atención de varios investigadores internacionales sobre la última década. Por ejemplo, una derivación analítica de las tasas de errores de bit para sistemas de comunicación coherentes de chaos-shift-keying (CSK) multiusuario [2].
- **Sistemas No Coherentes de Comunicación con Base en Caos:** Las comunicaciones caóticas no coherentes han evolucionado desde esquemas elementales como COOK (chaotic on-off keying) y CSK (Chaos-shift-keying) a la más sofisticada detección diferencial coherente DCSK (CSK diferencial) y a el moderno FM-DCSK (Modulación de frecuencia DCSK) [2].
- **Modulación Caótica de Posición de Pulso:** En los últimos años ha habido un interés cada vez mayor hacia los sistemas de comunicación por impulso de radio (IR) con ancho de banda ultra ancho (UWB). En un sistema UWB el cual utiliza la modulación caótica de posición de pulsos con base en mapas (CPPM) [2].
- **Comunicaciones de Espectro Expandido Usando Caos:** En los últimos años la teoría del caos ha sido aplicada a el diseño de secuencias de espectro expandido para mejorar el enlace de sistemas DS-CDMA (acceso múltiple por división de código de secuencia directa). Donde se introduce un sistema DS-CDMA utilizando secuencias de expansión caótica [2].
- **Filtrado de Señales Caóticas:** El filtrado de ruido en señales caóticas que explota su determinismo ha recibido interés considerable en el contexto de los sistemas de comunicaciones. Por ejemplo en un filtro Kalman (UKF) para filtrar ruido de señales caóticas [2].
- **Las Comunicaciones Ópticas que Explotan el Caos:** Recientemente, investigadores de diferentes grupos al rededor del mundo han intentado desarrollar sistemas de comunicación óptica explotando el caos. Por ejemplo, en la dinámica, sincronización, y codificación / decodificación de mensajes para láseres semiconductores monomodo inyectados ópticamente y láseres semiconductores monomodo con retroalimentación optoelectrónica retardada [2].
- **Encriptación de Datos Usando Caos:** La naturaleza altamente impredecible y de apariencia aleatoria de las señales caóticas es la característica más atractiva de los sistemas caóticos deterministas que pueden conducir a esquemas de cifrado de datos. La sincronización de

atractores caóticos multi-scrolls con aplicaciones de comunicación privada. Esta demostrado que los sistemas caóticos son ricos en significado y en consecuencia debido a la sensibilidad a cambios de las condiciones iniciales, parámetros de control, comportamiento aleatorio y las propiedades de difusión y confusión muy alta que son muy deseables para el cifrado de datos [2].

- **Sistema de Memoria de Orden Fraccionario Ubicuo.** Los estados futuros de un sistema de orden entero depende del actual (sin memoria). Sin embargo, para un sistema de orden fraccionario, el estado actual depende de todo el historial (memoria larga). Esta memoria larga es una característica de varios sistemas de orden fraccionario. Por ejemplo, viscoelasticidad de orden fraccionario y la mecánica cuántica de orden fraccionario [3].
- **Aplicaciones de Control de Orden Fraccionario para un Sistema de Posicionamiento de Precisión con Base en Aire:** Precisión, ancho de banda y estabilidad de movimientos son los más importantes funcionamientos para cualquier sistema de movimiento. PID de orden fraccionario ha probado ser muy eficaz para mejorar el rendimiento. Un reciente trabajo, utiliza el cálculo de orden fraccionario para controlar una etapa de posicionamiento de precisión [4].
- **Aplicación del Cálculo de Orden Fraccionario en Amortiguación Activa de Estructuras Flexibles:** En la década pasada, investigaciones sobre el Control de Vibraciones Activas (AVC) ha encontrado un reciente interés en el control de enlaces flexibles de robots y estructuras de paredes delgadas, principalmente hechas de nuevos materiales, como los compuestos de fibra de carbono. El control de velocidad directo (DVC), el control de fuerza integral (IRC), la retroalimentación de posición positiva (PPF) y el control de resonancia integral (IRC) son los métodos que se han desarrollado y utilizado para controlar activamente estas estructuras. Recientemente, han demostrado que el cálculo de orden fraccionario es una herramienta eficaz para mejorar los controladores de amortiguación activos en comparación con el orden entero [5] [6].
- **Control a Largo Plazo para Sistemas fraccionarios Discretos:** Muchos problemas de la ingeniería tienen la característica de tiempo discreto o estructuras espaciales, por ejemplo, imágenes, series económicas, señales, etc. Se han dedicado algunos esfuerzos a las aplicaciones del cálculo fraccionario continuo en estos temas, y los investigadores adoptaron principalmente la discretización numérica del cálculo fraccionario. Pero puede fácilmente resultar en información tediosa o errores numéricos debido al efecto de memoria. El cálculo fraccionario discreto puede evitar esto y es una herramienta sencilla para sistemas de tiempo discreto. Existe la teoría de la estabilidad para ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. El control a largo plazo para sistemas fraccionarios es posible [7] [8] [9].
- **Cálculo de Parámetros de Supercapacitores Usando Modelado Eléctrico de Orden Fraccionario:** Los supercapacitores son dispositivos de almacenamiento de energía electroquímica conocidos por su alto rendimiento de potencia, excelente reversibilidad, ciclabilidad a largo plazo, bajo mantenimiento y fácil integración en sistemas electrónicos. Debido a la estructura y al material de sus electrodos nanoarticulados y su diseño electroquímico, la impedancia espectral de los supercapacitores muestran una clara desviación del ángulo de fase de -90° o de un condensador ideal. No obstante, la evaluación de su comportamiento eléctrico generalmente se describe utilizando fórmulas de condensadores convencionales clásicas. Los supercapacitores se han modelado como la colección de muchos elementos resistivos y capacitivos discretos que representan la distribución de constantes de tiempo en el dispositivo similar a una línea de transmisión. Sin embargo, esta es una visión artificial de

la forma en que funcionan estos dispositivos y no es del todo satisfactoria cuando se ajustan los datos experimentales. Con el cálculo de orden fraccionario, se estima la capacitancia efectiva y la energía almacenada en supercapacitores, que son muy importantes para el despliegue exitoso de estos dispositivos en sus aplicaciones cada vez mayores [10] [11] [12].

- **Enmascaramiento Caótico:** La modulación ampliamente utilizada y explorada en el dominio analógico es el enmascaramiento caótico. La señal analógica o información se agrega a la señal caótica transmitida. En el lado del receptor, gracias a la sincronización de caos, el receptor reconstruye la señal caótica original y la información analógica se recupera restando la señal caótica producida de la señal entrante [13] [14] [15].
- **Modulación Caótica:** Contrario a lo que pasa en el enmascaramiento caótico, la información analógica se inyecta directamente en el sistema caótico para alternar su modelo dinámico. Por lo tanto, la señal caótica generada contiene la información analógica. El receptor, detecta el cambio en el comportamiento dinámico de la señal caótica y recupera la información analógica [16] [17].
- **Chaos Shift Keying:** La idea principal de esta modulación es codificar la información en dos generadores caóticos. El transmisor, utiliza dos sistemas caóticos diferentes. Hay dos tipos de receptor, el primero recibe la señal de entrada y sincroniza uno de los dos sistemas caóticos, el cual se puede estimar el símbolo transmitido con la resta de la señal de entrada con la señal producida por el sistema caótico sincronizado [18] [19].
- **Caos con Base en DS-CDMA:** Esta modulación es llamada como CSK. Las dos modulaciones son equivalentes y la idea principal es que el receptor puede generar una réplica de la señal caótica recibida y usarla para desglosar el dato [20].
- **Caos con Base en ON-OFF KEYING:** En esta modulación, la señal caótica es transmitida por un periodo de tiempo cuando es 1 y deja de transmitir cuando el bit es 0 en el lado del receptor, se utiliza un detector con un umbral para recuperar los datos [21] [22] [23] [24].
- **Modulación de Parámetros Caóticos:** Este enfoque se basa en la ergodicidad de las señales caóticas como una técnica simple para recuperar los datos transmitidos mediante la estimación de los parámetros caóticos, como la función de valor medio en un entorno ruidoso [25].
- **Implementación de Esquemas de Modulación no Coherente:** La implementación de sistemas de comunicación basados en el caos recibió una atención en la última década. Por un lado, la mayoría de las demostraciones experimentales de sistemas de comunicación basados en caos con receptores coherentes han empleado enlaces cableados como canales de transmisión para demostrar la posibilidad de usar el caos en el contexto de la transmisión de datos para evitar el problema de los complejos procedimientos de sincronización que existen en los canales inalámbricos. Por otro lado, la implementación y la prueba de concepto de sistemas de comunicación no coherentes recibieron más atención debido a los caóticos procedimientos de sincronización en el lado del receptor [26] [27] [28].
- **Comunicaciones Cooperativas y Codificaciones de Redes:** La aplicación de esquemas no coherentes en redes cooperativas también ha recibido una atención particular. Es un sistema de comunicación cooperativa de codificación de cambio de caos diferencial (DCSK-CC) con dos usuarios. La cooperación se logra a través de un relé de decodificación y avance [29] [30].
- **Comunicaciones de Línea de Potencia:** Se aplica la técnica de modulación basadas en caos no coherente para las comunicaciones por línea de potencia (PLC). El cambio de clave por

cambio de caos (DCSK) es un candidato potencial para redes de comunicación de red inteligente ya que esta clase de modulación no coherente es muy robusta contra las distorsiones de canales lineales y no lineales [31] [32].

Las aplicaciones futuras de los sistemas de comunicaciones sustentados en caos dependen fuertemente del desarrollo y la implementación confiable en hardware de circuitos no lineales para la generación y procesamiento de señales caóticas [2]. En particular, es esencial desarrollar generadores caóticos eficientes y controlables que utilicen dispositivos electrónicos simples.

1.4. Justificación

Se ha demostrado que el orden fraccionario puede representar más fielmente los diferentes fenómenos de la naturaleza que su contraparte de orden entero. Esto debido a que el orden fraccionario tiene propiedades hereditarias y de memoria del fenómeno que modela. Sin embargo, para aprovechar estas ventajas en aplicaciones de ingeniería se requiere su implementación física. En la literatura, existen varios métodos de aproximación para sistemas de orden fraccionario en el dominio de la frecuencia. Los métodos de dominio de la frecuencia se han utilizado para simular el comportamiento de los sistemas caóticos de orden fraccionario. Los elementos de orden fraccionario se pueden racionalizar mediante varias técnicas iterativas, como son: el método de Charef y el método de Oustaloup, entre otros. Estos métodos se utilizan para la realización de integradores fraccionarios pasivos. El principal problema en el uso de estos integradores fraccionarios es la realización física puesto que los valores en los elementos que componen la red pasiva son valores no disponibles comercialmente. Por lo tanto, tratar de aproximar los valores de estos elementos puede provocar una desviación en el orden fraccionario buscado. Dada esta problemática, al utilizar una topología activa se espera que los elementos que la componen se aproximen a valores comerciales. Además, las realizaciones activas incorporarán grados de libertad, por lo que se podrán elegir dispositivos con valores comerciales, con resistores en el rango de los kilo-ohmios. También se espera que en una realización activa sea más fácil ajustar el orden del integrador fraccionario a nivel experimental, lo cual es importante para la realización de osciladores caóticos, ya que estos son muy sensibles a las condiciones iniciales. Se espera que el orden del integrador implementado sea lo más preciso y parecido posible al orden teórico con el que se diseña.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo General

Diseñar e implementar osciladores caóticos de múltiples arrollamientos usando integradores analógicos de orden fraccionario de topología activa.

1.5.2. Objetivos Específicos

- Diseñar y caracterizar el integrador analógico de orden fraccionario de topología activa usando Spice.
- Validar experimentalmente los resultados del integrador analógico de orden fraccionario de topología activa.
- Analizar el impacto de las variaciones de los dispositivos electrónicos que conforman el integrador de orden fraccionario usando análisis de Montecarlo.

- Diseño e implementación de un oscilador caótico de orden fraccionario de múltiples enro-llamientos utilizando los integradores analógicos de orden fraccionario de topología activa.

2 | Diseño electrónico de integradores pasivos de orden fraccionario

A partir del modelo matemático de un sistema no lineal de orden fraccionario, el diseño de un circuito electrónico, el cual es equivalente a el modelo matemático, en el sentido de que sigue al mismo conjunto de ecuaciones. Esta sección describe el diseño y simulación de un circuito electrónico analógico que realiza el orden fraccionario del sistema disparativo inestable con bajo órdenes, es decir, la sección proporciona los bloques básicos necesarios para la realización de un circuito electrónico equivalente a un sistema no lineal de orden fraccionario. Cuando se logra un enfoque de síntesis para diseñar la función no lineal mediante el uso de funciones saturadas, se logra una aproximación racional del operador de orden fraccionario, la aproximación racional obtenida se sintetiza como una red de escalera electrónica llamada dispositivo de fractancia, que exhibe propiedades de impedancia de orden fraccionario [1].

2.1. Diseño de operadores de orden fraccionario

En la literatura acerca de los sistemas de orden fraccionario aproximan dos métodos, en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia, para calcular numéricamente la respuesta de un sistema de orden fraccionario. Los métodos del dominio del tiempo son basados en la discretización de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. Uno de los mejores métodos en esta rama es una versión mejorada del algoritmo de Adams Bashforth Moulton y se propone en base al esquema predictor-corrector. Los métodos de dominio de frecuencia se basan en la aproximación del operador fraccionario. Los métodos de dominio de frecuencia se han utilizado para simular el comportamiento de los sistemas de orden fraccionario caótico. Los elementos de orden fraccionario generalmente muestran una curva de fase constante, por esa razón también se conocen como elementos de fase constante. En la práctica, un elemento de orden fraccionario se puede aproximar como un sistema de orden entero más alto que mantiene una fase constante dentro de una banda de frecuencia elegida. Para calcular una solución de un sistema de orden fraccionario considerando aproximaciones racionales de los operadores fraccionarios, primero se consideran las ecuaciones de orden fraccionario del sistema en el dominio de frecuencia, y luego la transformación de Laplace del operador de integral fraccionario es reemplazada por su aproximación de orden entero [1].

Los elementos de orden fraccionario se pueden racionalizar mediante varias técnicas iterativas, a saber, el método de Charef, el método de Carlson, el método de Oustaloup, entre otros. Pero uno de los métodos más comunes para encontrar la aproximación de los operadores fraccionarios es el método Charef, debido a la robustez que proporciona una excelente relación entre complejidad y precisión en la aproximación. Es importante resaltar el compromiso entre el error y la complejidad. La idea principal es encontrar ceros y polos de una función de transferencia que un diagrama de amplitud similar a $1/s^\alpha$ en un rango de frecuencia dado. El operador fraccionario $1/s^\alpha$ tiene un diagrama de Bode en amplitud caracterizado por una pendiente de -20α dB/década. Por

lo tanto en este método, el -20α dB/década aproxima un numero por una serie de líneas rectas en zigzag conectadas con pendientes individuales de 0dB/década y -20α dB/década. De acuerdo con este método, podemos obtener una aproximación lineal del integrador fraccionario con cualquier precisión deseada sobre cualquier banda de frecuencia. El orden de este sistema de aproximación lineal depende del ancho de banda y la precisión deseados [1].

2.1.1. Método de Charef

Los sistemas fraccionarios pueden ser considerados como una generalización de los sistemas de orden entero. La instancia más común de una función de transferencia de sistema fraccionario se representa en el dominio de frecuencia mediante la siguiente función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{s^\alpha}, \alpha \in \mathfrak{R}^+ \quad (2.1)$$

el cual se llama integrador fraccionario y se puede encontrar en muchos fenómenos físicos, donde $s = j\omega$ es la frecuencia compleja y α es un número positivo real tal que $0 < \alpha < 1$. El integrador fraccionario puede abordarse considerando la formulación básica del método de aproximación de Charef [1].

Un sistema puede ser modelado en el dominio de la frecuencia mediante la función de transferencia de un solo polo de potencia fraccionario de la siguiente manera

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^\alpha} \quad (2.2)$$

donde P_T es el polo del sistema de orden fraccionario y α es el orden fraccionario del sistema.

Como se muestra en la Figura 2.1, la pendiente con -20α dB/dec es estimado por un numero de líneas rectas en zigzag conectadas con pendientes individuales de 0dB/dec y -20α dB/dec. La expresión (2.2) se puede racionalizar mediante la siguiente fórmula recursiva [1]:

$$H(s) = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.3)$$

si se especifica un rango de frecuencia ω_{max} , se especifica una frecuencia de esquina P_T y el error y dado en dB entre la línea real y la aproximada. Además, los ceros y los polos se pueden calcular recursivamente como

$$\begin{aligned} Z_{N-1} &= P_{N-1} \left[\frac{y}{10(1-\alpha)} \right] \\ P_N &= Z_{N-1} \left[\frac{y}{10\alpha} \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

La primera aproximación del polo y zero se obtiene mediante

$$\begin{aligned} P_0 &= P_T \left[\frac{y}{20\alpha} \right] \\ Z_0 &= P_0 \left[\frac{y}{10(1-\alpha)} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

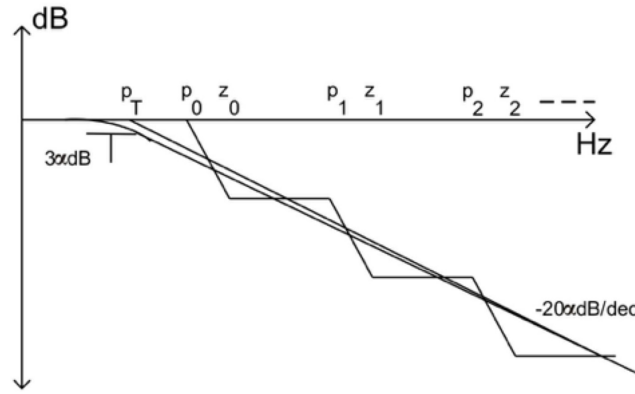


Figura 2.1: Diagrama de Bode con pendiente de -20α dB/dec y su aproximación con líneas zigzag con pendientes individuales de 0dB/dec y -20 dB/dec.

El siguiente paso es determinar el valor de N para que se pueda obtener una precisión especificada de la función de transferencia racional aproximada en la frecuencia de esquina. La frecuencia de esquina P_T se determina en -3α dB, P_0 se determina mediante el error especificado, y P_N se determina mediante N . Las cantidades a y b se obtienen por

$$a = 10 \left[\frac{y}{10(1-\alpha)} \right] = \frac{Z_{N-1}}{P_{N-1}} \tag{2.6}$$

$$b = 10 \left[\frac{y}{10\alpha} \right] = \frac{P_N}{Z_{N-1}}$$

donde la relación de ubicación de un polo a un polo anterior es igual a la relación de un polo a un cero anterior, respectivamente, y es igual a

$$ab = 10 \frac{y}{10\alpha(1-\alpha)} = \frac{Z_{N-1}}{Z_{N-2}} = \frac{P_N}{P_{N-1}} \tag{2.7}$$

N se determina mediante la siguiente expresión

$$N = \left[\frac{\log \left(\frac{\omega_{max}}{P_0} \right)}{\log(ab)} \right] + 1 \tag{2.8}$$

2.1.2. Método de Carlson

Los elementos de orden fraccionario o funciones de transferencia se pueden aproximar recursivamente considerando la formulación conocida como método de Carlson, la idea es considerar el proceso newton para aproximar $1/s$, para cualquier entero $n < 1$. La aproximación tiene como base la expresión algebraica $f(x) = x^n - a = 0$. La aproximación resultante en variables reales tienen la propiedad única de preservar la aproximación superior e inferior a la n -ésima raíz del número real a [1].

Si $G(s)$ es una función de transferencia racional y $H(s)$ es una función de transferencia de orden fraccionario tal que $H(s) = [G(s)]^q$ donde $q = m/p$ es una función de transferencia de orden fraccionario, entonces $H(s)$ puede ser aproximado como

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(p-m)[H_{i-1}(s)]^2 + (p+m)G(s)}{(p+m)[H_{i-1}(s)]^2 + (p-m)G(s)} \tag{2.9}$$

con un valor inicial de $H_0=1$.

La formula recursiva (2.9) puede ser escrita como

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{G(s) + \alpha [H_{i-1}(s)]^2}{\alpha G(s) + [H_{i-1}(s)]^2} \quad (2.10)$$

donde

$$\alpha = \frac{p-m}{p+m} = \left[\frac{1 - \left(\frac{m}{p}\right)}{1 + \left(\frac{m}{p}\right)} \right] \text{ con } q = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (2.11)$$

Por lo tanto, para el caso simple, por ejemplo, $H(s) = s^q$, se representará un diferenciador para $q < 0$ en consecuencia $\alpha < 1$. Además, actuará como un integrador para $q > 0$, implicando $\alpha > 1$.

2.1.3. Método de Oustaloup

El filtro recursivo de Oustaloup da un ajuste a los elementos de orden fraccionarios s^γ dentro de la banda de frecuencia elegida. Supongamos que el rango de adaptación es (ω_b, ω_h) [1]. El filtro puede ser escrito como

$$s^\gamma = K \prod_{n=1}^N \frac{1 + (s/\omega_{b,n})}{1 + (s/\omega_{h,n})} \quad (2.12)$$

donde los polos, ceros y ganancia del filtro puede ser evaluado como

$$\omega_k = \omega_b \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{k + N + \frac{1}{2}(1+\gamma)}{2N+1}}, \quad \omega'_k = \omega_b \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{k + N + \frac{1}{2}(1-\gamma)}{2N+1}}, \quad K = \omega_h^\gamma \quad (2.13)$$

donde N es el orden de la aproximación de la función de transferencia finita.

La aproximación obtenida por el Método de Charef muestra que el proceso global consiste en una combinación descrita por una sola estructura de polo-cero par, esto da el factor de orden fraccionario en el diagrama log-log del proceso general de la función de transferencia [1].

2.2. Aproximaciones de la función de transferencia

Empleando el método dado en la sección 2.1.1, donde el propósito es aproximar el comportamiento del sistema en el dominio de la frecuencia. Esto se hace para un dado $0 < \alpha < 1$, por ejemplo, para establecer una aproximación con la gráfica de Bode de la respuesta en magnitud sobre la banda de frecuencia. La aproximación se crea eligiendo un punto de corte inicial, un error en dB, y el número de polos en la aproximación. El límite de la frecuencia alta del ancho de banda se puede variar cambiando el valor del error y el número de polos. Por lo tanto, se puede lograr una aproximación de cualquier precisión deseada sobre cualquier banda de frecuencia. La Tabla 2.1 da las aproximaciones resultantes para las funciones de transferencia $H(s)=1/s^\alpha$ para diferentes ordenes fraccionarios, en incremento de 0.1, asumiendo que $\omega_{max} = 10^3 \text{ rad/s}$ y $P_T=1$. El máximo error γ , considerado en el cálculo un error de discrepancia de 2dB. De acuerdo a este enfoque, es posible obtener una aproximación lineal de el integrador de orden fraccionario con cualquier precisión y cualquier banda de frecuencia. El orden de este sistema de aproximación lineal depende del ancho de banda y la precisión deseados [1].

Se puede considerar al capacitor con respecto a la permitividad del material dieléctrico. Sin embargo, otra posibilidad es tratar el dispositivo como un sistema integrado que consiste en el dieléctrico y los terminales, y además considerar únicamente la relación entre el sistema de cruce de corriente y el de caída de tensión. Esta idea lleva a la consideración de la Ley Curie. Curie supone que la tensión $v(t) = Vu(t)$ se aplica a un condensador que no posee carga almacenada inicial. Es decir, no hay energía almacenada antes de aplicar el voltaje de corriente directa V . La corriente a través del dispositivo tendrá la forma general

$$i(t) = \frac{V}{ht^\alpha} \quad \text{para } t > 0, \text{ y } 0 < \alpha < 1, \quad (2.14)$$

donde h es una constante relacionada con la capacitancia y el tipo de dieléctrico, y α es una constante relacionada a la pérdida de capacitancia. Esta es una dependencia de la ley de potencia del terminal de corriente sobre el voltaje de entrada. La transformada de Laplace del voltaje de entrada es

$$v(s) = \frac{V}{s}, \quad (2.15)$$

y la transformada de Laplace de $i(t)$ es

$$i(s) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{hs^{1-\alpha}} V, \quad (2.16)$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma. Comúnmente, la impedancia de un elemento de circuito lineal invariante en el tiempo (LIT) de dos terminales se define como

$$Z(s) = \frac{v(s)}{i(s)} \quad (2.17)$$

Mientras que la admitancia se define como $Y(s) = 1/Z(s)$. De la ley de Curie (2.16) y (2.17) se obtiene

$$Z(s) = \frac{h}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{s^\alpha}, \quad (2.18)$$

Por lo tanto, el condensador presenta idealmente una impedancia dada por

$$Z(s) = \frac{1}{sC} \quad (2.19)$$

La ecuación (2.18) es considerada la impedancia de orden fraccional, o "fractancia" para abreviar. Es un elemento eléctrico que exhibe propiedades de impedancia de orden fraccionario. La impedancia del dispositivo fractal en el dominio de la frecuencia está dada por

$$Z(s) = as^\alpha \Rightarrow Z(j\omega) = a\omega^\alpha e^{j\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \quad (2.20)$$

donde ω es la frecuencia angular y α el orden de la fractancia. Para el caso especial de $\alpha=1$ este elemento representa el inductor, para $\alpha=-1$ representa un condensador mientras que $\alpha=0$ representa una resistencia. En el rango de $-2 < \alpha < 0$ este elemento generalmente se considera que representa un condensador de orden fraccionario. En el rango de $0 < \alpha < 2$ este elemento se considera que representa un inductor de orden fraccionario. Además, $\alpha=-2$ representa la resistencia negativa dependiente de la frecuencia [1].

Un dispositivo de fractancia física aún no esta disponible en la forma de un único dispositivo comercial. El dispositivo de fractancia se puede emular a través de arboles pasivos RC o RLC de orden superior, cadenas o incluso redes de tipo retícula [1].

La fractancia posee muchas propiedades de interés. El ángulo de fase es constante independiente de la frecuencia, su magnitud frente a la frecuencia no es lineal, lo que puede aumentar o disminuir el efecto de la frecuencia para $\alpha > 1$ y $\alpha < 1$, eso significa que depende únicamente del valor del orden fraccionario α . La fractancia es llamada como un dispositivo con un factor de ángulo de fase constante. Por otra parte, el parámetro adicional α agregado al diseño del circuito puede utilizar una mayor optimización o control de diseño. Además, al hacer uso de un amplificador operacional, se puede lograr una diferenciación e integración de orden fraccionario.

El aspecto importante en la realización del dispositivo de fractancia es encontrar la aproximación racional del operador de orden fraccionario. Es decir, el diseño de fractancias con orden α se puede realizar considerando las aproximaciones racionales, luego los valores de los elementos eléctricos, que son necesarios para construir una fractancia, se determinan a partir de las funciones de transferencia obtenidas a partir del enfoque de Charef [1].

Tabla 2.1: Las funciones de transferencia de órdenes enteras son aproximaciones a operadores fraccionarios, con error de discrepancia máxima de 2dB y ancho de banda del sistema de $\omega_{max}=10^3$ rad/s.

$H(s)$
$\frac{1}{s^{0.1}} \approx \frac{100(s + 16.6810)}{(s + 10)(s + 1.6681e3)}$
$\frac{1}{s^{0.2}} \approx \frac{3162(s + 5.6234)(s + 100)(s + 1.7782e3)}{(s + 3.1622)(s + 56.2341)(s + 1e3)(s + 1.7782e4)}$
$\frac{1}{s^{0.3}} \approx \frac{1000(s + 4.1595)(s + 37.2759)(s + 3.3404e2)(s + 2.9935e3)}{(s + 2.1544)(s + 19.3069)(s + 1.7301e2)(s + 1.5505e3)(s + 1.3894e4)}$
$\frac{1}{s^{0.4}} \approx \frac{177.82(s + 3.8312)(s + 26.1016)(s + 177.8279)(s + 1.2115e3)}{(s + 1.7783)(s + 12.1153)(s + 82.5404)(s + 562.3413)(s + 3.8311e3)}$
$\frac{1}{s^{0.5}} \approx \frac{158.4893(s + 3.9811)(s + 25.1189)(s + 158.4893)(s + 1000)(s + 6.3095e3)}{(s + 1.5849)(s + 10)(s + 63.0957)(s + 398.1072)(s + 2.5119e3)(s + 1.5849e4)}$
$\frac{1}{s^{0.6}} \approx \frac{31.6228(s + 4.6416)(s + 31.6228)(s + 215.4435)(s + 1.4678e3)}{(s + 1.4678)(s + 10)(s + 68.1292)(s + 464.1589)(s + 3.1623e3)}$
$\frac{1}{s^{0.7}} \approx \frac{19.3070(s + 6.4495)(s + 57.7969)(s + 517.9475)(s + 4.6416e3)}{(s + 1.3895)(s + 12.4520)(s + 111.5884)(s + 1000)(s + 8.9615e3)}$
$\frac{1}{s^{0.8}} \approx \frac{13.3352(s + 13.335)(s + 237.137)(s + 4.217e3)(s + 7.4989e4)}{(s + 1.3335)(s + 23.7137)(s + 421.6965)(s + 7.4989e3)(s + 1.3335e5)}$
$\frac{1}{s^{0.9}} \approx \frac{3.5938(s + 129.1550)(s + 2.1544e4)}{(s + 1.2915)(s + 215.4435)(s + 3.5938e4)}$

2.3. Realización pasiva de un integrador de orden fraccionario.

En esta sección, el diseño de un integrador de orden fraccionario es sintetizado por el arreglo de elementos pasivos presentado en la Figura 2.2. De acuerdo a la teoría de circuitos en el dominio del Laplace, se puede obtener la aproximación de $\frac{1}{s^\alpha}$ en los nodos $n1$ y $n2$ con $\alpha = 0.95$. [1]

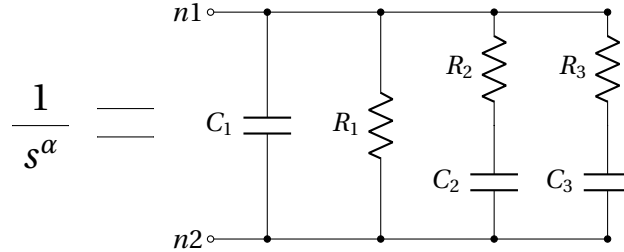


Figura 2.2: Esquema de integrador fraccionario pasivo de orden $\alpha=0.95$. Parámetros: $C_1=86.20\mu F$, $C_2=29.85\mu F$, $C_3=23.56\mu F$, $R_1=6.28M\Omega$, $R_2=0.2966M\Omega$, $R_3=2.945K\Omega$, $R_{g1}=R=10K\Omega$.

La aproximación de la función de transferencia de $s^{-0.95}$ con un error de aproximadamente de 1dB y con un ancho de banda de 0.1rad/s a 1000rad/s es dada por:

$$\frac{1}{s^{0.95}} \approx \frac{1.16s^2 + 16.82s + 1.884}{s^3 + 18.4738s^2 + 2.6574s + 0.002976} \tag{2.21}$$

La función de transferencia de $H(s)$ entre los nodos $n1$ y $n2$ es la siguiente:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{C_1} \left(s + \frac{1}{R_2 C_2} \right) \left(s + \frac{1}{R_3 C_3} \right)}{s^3 + \frac{(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) R_3 C_3 + R_1 R_2 C_2 (C_1 + C_3)}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 C_3} s^2 + \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2 + R_1 C_3 + R_3 C_3}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 C_3} s + \frac{1}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 C_3}} \tag{2.22}$$

El principal problema en el uso de estos integradores fraccionarios es la realización física puesto que los valores en los elementos que componen la red pasiva son valores no disponibles comercialmente (Figura 2.2). El tratar de aproximar los valores de los elementos puede provocar una desviación en el orden fraccionario buscado y aumentar el error de aproximación de 1dB que el diseño dispone. Esto puede no representar un problema al diseñar controladores de orden fraccionario, sin embargo, para su aplicación en osciladores caóticos esto significa un problema, debido a que los osciladores caóticos son muy sensibles a las variaciones en sus condiciones iniciales.

3 | Diseño electrónico de integradores activos de orden fraccionario

Dada la problemática al utilizar una topología pasiva, en este capítulo se propone un integrador fraccionario de topología activa. Una vez propuesta una implementación se procede a estudiar el efecto de las tolerancias mediante análisis de Monte Carlo y la sensibilidad. El integrador es validado con simulaciones y resultados experimentales.

3.1. Propuesta de un integrador de orden fraccionario activo con base en el operador Laplaciano fraccionario

Conforme a la definición de Riemann-Louville, la derivada fraccionaria de una función $f(t)$ está dada por:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} d\tau \quad (3.1)$$

donde $\alpha \in (0, 1)$ y Γ es la función gama. La transformada de Laplace de (3.1) con condiciones iniciales cero es

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} f(t) \right\} = s^\alpha F(s) \quad (3.2)$$

donde $F(s) = \mathcal{L} \{f(t)\}$ y s^α es el orden fraccionario del operador Laplaciano, definido como:

$$s^\alpha = (j\omega)^\alpha = \omega^\alpha \left[\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] \quad (3.3)$$

Este operador no puede ser físicamente realizado pero puede ser aproximado por [33]:

$$s^\alpha \approx \frac{(1+\alpha)s + (1-\alpha)}{(1-\alpha)s + (1+\alpha)} = \frac{As + 1}{s + A} \quad (3.4)$$

con A definida por

$$A = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \quad (3.5)$$

De forma similar, el integrador fraccionario resulta

$$\frac{1}{s^\alpha} \approx \frac{(1-\alpha)s + (1+\alpha)}{(1+\alpha)s + (1-\alpha)} = \frac{s + A}{sA + 1} \quad (3.6)$$

El desarrollo algebraico de la función de transferencia (3.6) se expresa en (3.7), la cual conduce a una representación en diagrama de bloques del integrador de orden fraccionario (Figura 3.1) y necesaria para su implementación con OpAmps.

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^\alpha} &\approx \frac{V_o}{V_i} = \frac{s + A}{sA + 1} \\ V_o(sA + 1) &= V_i(s + A) \\ sAV_o &= sV_i + AV_i - V_o \\ V_o &= \frac{V_i}{A} + \left(-\frac{1}{s}\right) \left(\frac{V_o}{A} - V_i\right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

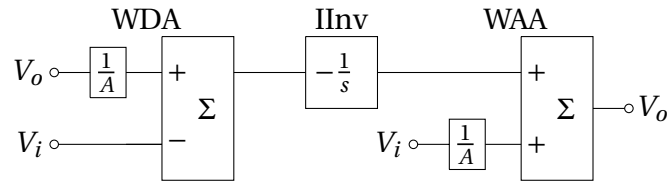


Figura 3.1: Diagrama de bloques del integrador de orden fraccionario con topología activa.

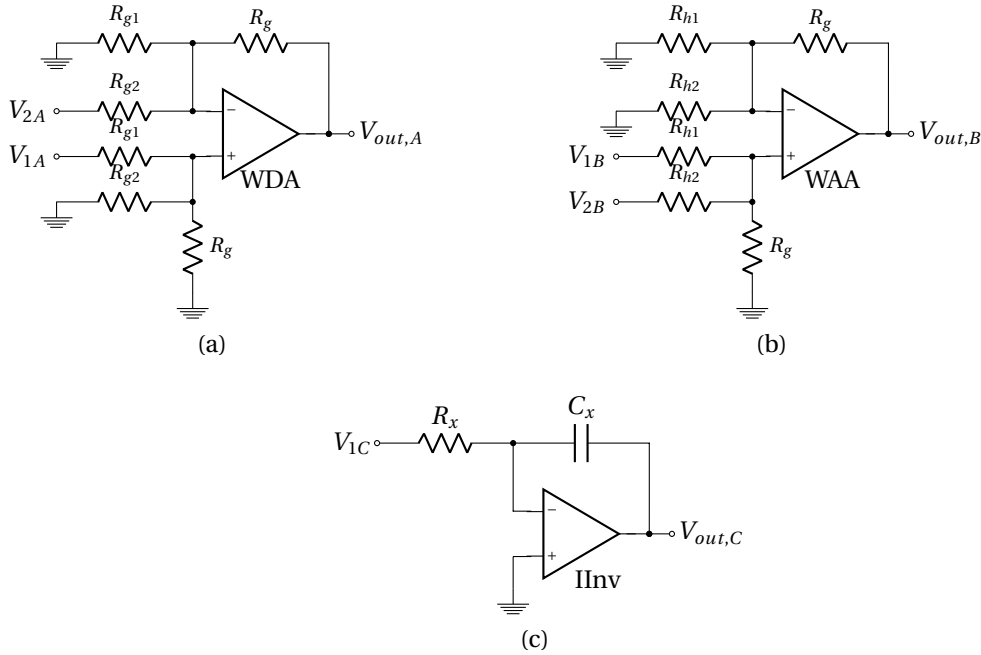


Figura 3.2: Bloques para el diseño del integrador fraccionario activo: (a) Amplificador Diferencial Ponderado (WDA). (b) Amplificador Sumador Ponderado (WAA). (c) Integrador Inversor (IInv).

3.2. Diseño de integradores fraccionarios usando OPAMPS

Con el apoyo del diagrama de bloques de la Figura 3.1, se identifica un amplificador diferencial ponderado (WDA por sus siglas en inglés), un amplificador sumador ponderado (WAA por sus siglas en inglés) y un integrador inversor de orden entero. La realización (diagrama eléctrico) de cada uno de estos bloques se muestra en la Figura 3.2. [33]

3.2.1. Amplificador diferencial ponderado (WDA)

Amplifica la diferencia entre dos voltajes. La Figura 3.2a muestra una posible implementación con un Amplificador Operacional. Por análisis nodal de este circuito se calcula el voltaje de salida $V_{out,A}$ como

$$V_{out,A} = \frac{R_g}{R_{g1}} V_{1A} - \frac{R_g}{R_{g2}} V_{2A} \tag{3.8}$$

donde R_g puede ser usado como grado de libertad para establecer los factores de ponderación de V_{1A} y V_{2A} por medio de las resistencias R_{g1} y R_{g2} .

3.2.2. Amplificador sumador ponderado (WAA)

Este amplificador produce una salida de voltaje $V_{out,B}$ igual a la suma ponderada de los voltajes de entrada V_{1B} y V_{2B} . La realización con OpAmps de la Figura 3.2b usa a R_g como grado de libertad y R_{h1} y R_{h2} para controlar los factores de ponderación. El voltaje de salida se expresa como

$$V_{out,B} = \frac{R_g}{R_{h1}} V_{1B} + \frac{R_g}{R_{h2}} V_{2B} \quad (3.9)$$

3.2.3. Integrador inversor de orden entero (IInv)

El integrador con base en amplificadores operacionales es representado en la Figura 3.2c. Este circuito usa una retroalimentación capacitiva para integrar la señal aplicada. La función de transferencia resulta

$$\frac{V_{out,C}}{V_{1C}} = -\frac{1}{R_x C_x s} = -\frac{1}{s} \quad (3.10)$$

con C_x como grado de libertad y $R_x = 1/C_x$. Para trasladar en frecuencia ω_n por un factor Ω se utiliza la siguiente denormalización en los capacitores de todos los inversores empleados:

$$C = \frac{C_x}{\Omega} \quad (3.11)$$

3.3. Implementación de integradores fraccionarios activos

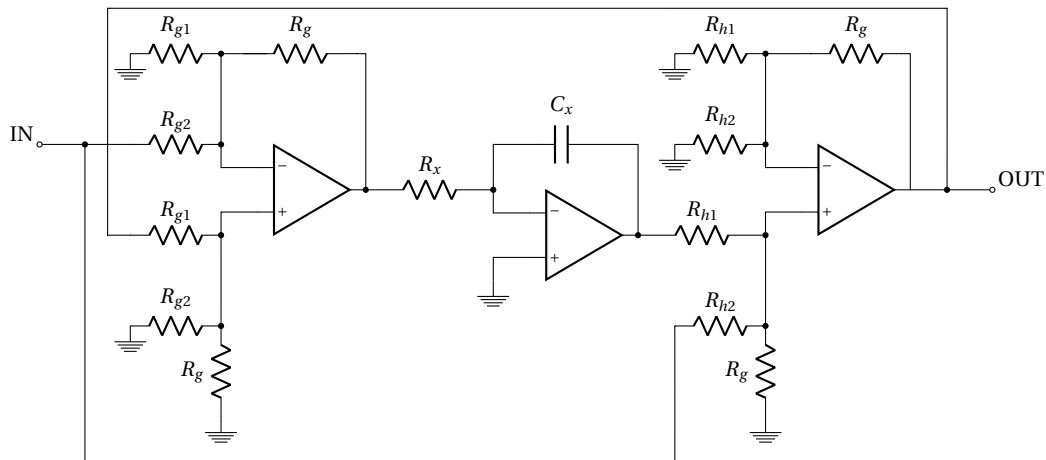


Figura 3.3: Diagrama eléctrico del integrador de orden fraccionario realizado con OpAmps.

La Figura 3.3 presenta la realización con OpAmps del diagrama de bloques de la Figura 3.1. Las resistencias de los bloques WDA y WAA se calculan a partir del Cuadro 3.1, proponiendo la resistencia R_g (grado de libertad) y utilizando (3.5). La ecuación para mover la frecuencia de cruce por cero es la siguiente:

$$R_x = \frac{1}{C_x} \quad (3.12)$$

en la cual C se obtiene mediante

$$C_x = C\Omega \quad (3.13)$$

Donde:

C es un capacitor comercial propuesto.

Ω es la frecuencia de corte por cero en radianes.

Tabla 3.1: Valores de resistencia

WDA	WAA
$R_{g1} = AR_g$	$R_{h1} = R_g$
$R_{g2} = R_g$	$R_{h2} = AR_g$

Los detalles diseño de integradores fraccionarios de orden 0.1 hasta 0.95 se muestran en la Tabla 3.2, con una resistencia R_g propuesta de 100Ω y con una frecuencia de cruce por cero de 15.91kHz (Tabla 3.3).

Tabla 3.2: Valores de resistencias para orden de 0.1–0.95 con $R_g = 100\Omega$.

α	WDA3	WAA1
0.1	$R_{g1} = 120\Omega$	$R_{h2} = 120\Omega$
0.2	$R_{g1} = 150\Omega$	$R_{h2} = 150\Omega$
0.3	$R_{g1} = 185\Omega$	$R_{h2} = 185\Omega$
0.4	$R_{g1} = 233\Omega$	$R_{h2} = 233\Omega$
0.5	$R_{g1} = 300\Omega$	$R_{h2} = 300\Omega$
0.6	$R_{g1} = 400\Omega$	$R_{h2} = 400\Omega$
0.7	$R_{g1} = 566\Omega$	$R_{h2} = 566\Omega$
0.8	$R_{g1} = 900\Omega$	$R_{h2} = 900\Omega$
0.85	$R_{g1} = 1.23\text{k}\Omega$	$R_{h2} = 1.23\text{k}\Omega$
0.9	$R_{g1} = 1.9\text{k}\Omega$	$R_{h2} = 1.9\text{k}\Omega$
0.95	$R_{g1} = 3.9\text{k}\Omega$	$R_{h2} = 3.9\text{k}\Omega$

Tabla 3.3: Detalles de los integradores para frecuencia de cruce por cero de 15.91KHz .

C_x	R_x	f
1nF	10K Ω	15.91KHz

3.3.1. Simulación con SPICE

Con el simulador SPICE y con el modelo del Amplificador Operacional TL081 de Texas Instruments se simula el integrador fraccionario activo. Del archivo de salida de la simulación se obtienen los resultados de la Figura 3.4. La Figura 3.4 muestra la simulación del integrador de orden fraccionario activo. Tiene un aumento en la ganancia conforme mayor es el orden.

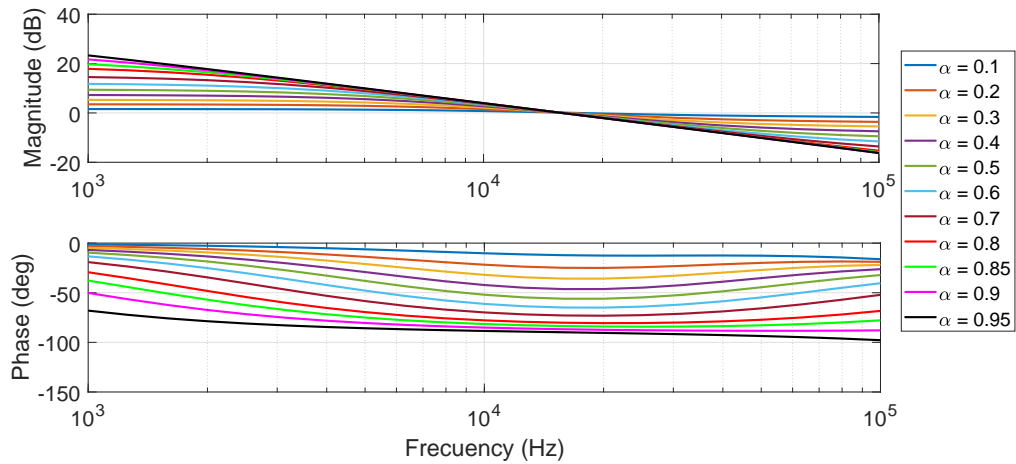


Figura 3.4: Simulación del integrador de orden fraccionario.

3.3.2. Experimental con NI ELVIS II+

Se implementan los integradores de orden fraccionario activos para comparar los resultados de simulación con los resultados experimentales. Se obtuvieron los resultados con el instrumento de medición NI ELVIS II+ de NATIONAL INSTRUMENTS. En la Figura 3.5 se muestran los datos experimentales del integrador fraccionario activo. Se observa que a mayor orden en el integrador fraccionario mayor es su ganancia, el mismo comportamiento que en los resultados de simulación.

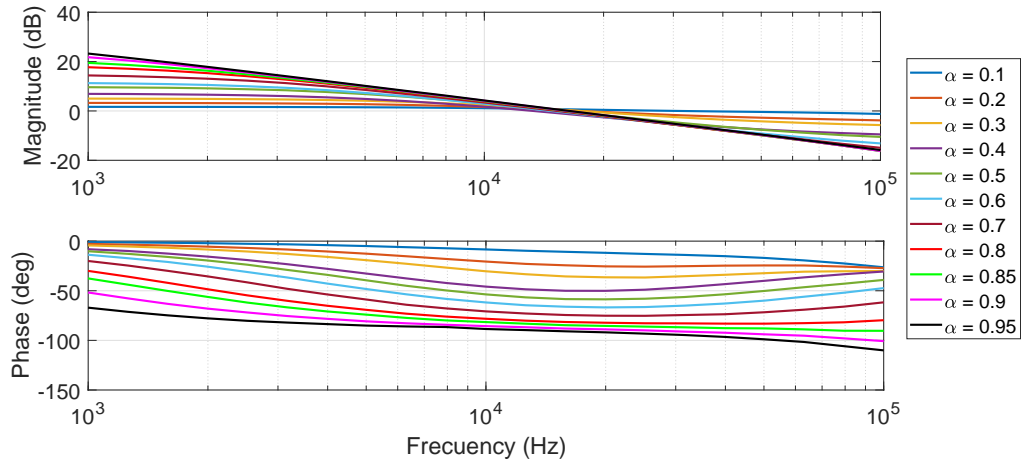


Figura 3.5: Resultados experimentales del integrador de orden fraccionario.

La Tabla 3.4 presenta el error en la pendiente del integrador fraccionario activo. Se aprecia que este error es muy significativo a excepción de los órdenes 0.9 y 0.95. Es posible que en ciertas aplicaciones de control estos errores no comprometan la funcionalidad, pero no es el caso en osciladores caóticos que son extremadamente sensibles a las condiciones iniciales. En consecuencia, es imperativo realizar un ajuste empírico al integrador fraccionario para aproximar la pendiente en la respuesta en frecuencia a la del integrador fraccionario ideal.

Tabla 3.4: Error en cada orden

Orden	Datos Experimentales			
α	A	$R_{g1} = R_{h2}$	Pendiente	Error
0.1	1.2	120Ω	2.96dB	0.96dB
0.2	1.5	150Ω	6.3dB	2.3dB
0.3	1.85	185Ω	8.9dB	2.9dB
0.4	2.33	233Ω	11.84dB	3.84dB
0.5	3	300Ω	14.53dB	4.53dB
0.6	4	400Ω	16.73dB	4.73dB
0.7	5.66	566Ω	18.38dB	4.38dB
0.8	9	900Ω	20dB	4dB
0.85	12.33	1.23kΩ	20.24dB	3.24dB
0.90	19	1.9kΩ	19.15dB	1.15dB
0.95	39	3.9kΩ	19.09dB	0.09dB

3.4. Ajuste

En la Tabla 3.5 se muestran los resultados de la pendiente experimental de la respuesta en frecuencia de cada integrador diseñado con la ecuación (3.5) y la Tabla 3.1. Se presenta un desvío considerable en la pendiente respecto al valor ideal, lo cual obliga a corregir este error. El ajuste empírico al integrador fraccionario se realizó experimentalmente modificando el parámetro $A=(1+\alpha)/(1-\alpha)$, ya que este depende directamente del orden α del integrador fraccionario activo. El ajuste se realizó para los órdenes $\alpha=(0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95)$, tal y como se muestra en la Figura 3.6. A partir de este gráfico se obtuvo, mediante interpolación con funciones exponenciales, la siguiente ecuación de ajuste

$$A(\alpha) = 1.014e^{1.241\alpha} + 0.002697e^{7.48\alpha} \quad (3.14)$$

la cual corrige la pendiente y permite obtener un orden α muy aproximado al teórico, como se aprecia en la Tabla 3.5. La Ecuación (3.14) se obtuvo por medio de la herramienta de ajuste de curva (cftool) de MATLAB, la cual al ingresar los valores de ajuste para cada orden ofrece la aproximación exponencial.

Tabla 3.5: Ajuste en A para cada orden

Orden α	Pendiente (ideal)	Sin Ajuste			Con Ajuste			
		A	$R_{g1} = R_{h2}$	Pendiente	A	$R_{g1} = R_{h2}$	Pendiente	α Experimental
0.1	2dB	1.2	120 Ω	2.96dB	1.1	110 Ω	2.14dB	0.107
0.2	4dB	1.5	150 Ω	6.3dB	1.3	130 Ω	4.17dB	0.2085
0.3	6dB	1.85	185 Ω	8.9dB	1.6	160 Ω	6.6dB	0.33
0.4	8dB	2.33	233 Ω	11.84dB	1.7	170 Ω	7.91dB	0.3955
0.5	10dB	3	300 Ω	14.53dB	2	200 Ω	10.14dB	0.507
0.6	12dB	4	400 Ω	16.73dB	2.4	240 Ω	12.4dB	0.62
0.7	14dB	5.66	566 Ω	18.38dB	2.8	280 Ω	13.94dB	0.697
0.8	16dB	9	900 Ω	20dB	3.9	390 Ω	16.46dB	0.823
0.85	17dB	12.33	1.23k Ω	20.24dB	4.5	450 Ω	17.01dB	0.8505
0.90	18dB	19	1.9k Ω	19.15dB	5.3	530 Ω	18.1dB	0.905
0.95	19dB	39	3.9k Ω	19.09dB	6.6	660 Ω	19.02dB	0.951

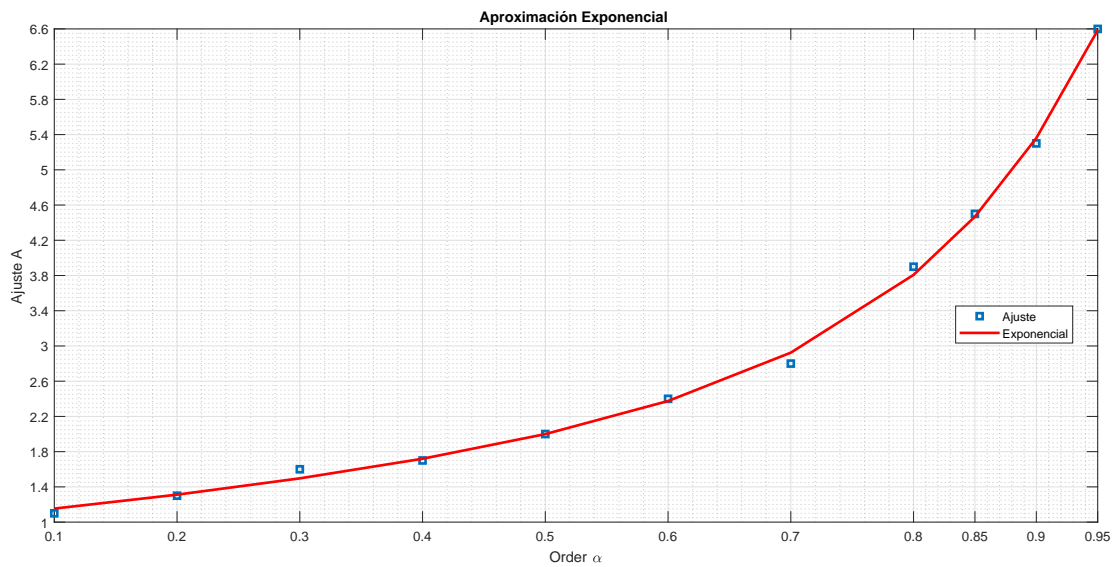


Figura 3.6: Aproximación exponencial sobre el ajuste A.

En la Tabla 3.6 se muestra el error entre el ajuste experimental de A y el ajuste obtenido por la ecuación exponencial (3.14).

Tabla 3.6: Error de la ecuación de ajuste 3.14.

α	A	Ecuación de ajuste	Error
0.1	1.1	1.1537	-0.053677
0.2	1.3	1.3117	-0.011699
0.3	1.6	1.4968	0.10318
0.4	1.7	1.7195	-0.019535
0.5	2	1.9994	0.00056597
0.6	2.4	2.375	0.025042
0.7	2.8	2.924	-0.124
0.8	3.9	3.8073	0.092659
0.85	4.5	4.4682	0.03184
0.9	5.3	5.3604	-0.060449
0.95	6.6	6.5848	0.015181

3.4.1. Simulación con SPICE

La Figura 3.7 presenta los resultados de la simulación con SPICE del integrador de orden fraccionario activo con ajuste. Se manifiestan las mismas características que el integrador de orden fraccionario activo sin ajuste, con la diferencia de que las ganancias para cada orden se reducen, provocando que los límites de frecuencia de la pendiente se reduzca también.

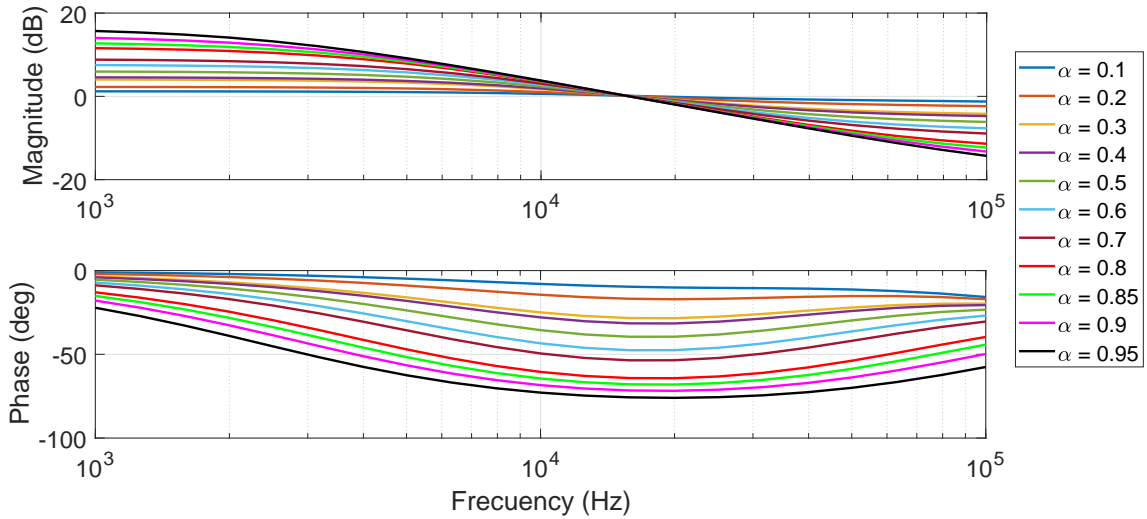


Figura 3.7: Simulación del integrador con ajuste.

3.4.2. Experimental con NI ELVIS II+

Los resultados experimentales del integrador de orden fraccionario activo con ajuste (Figura 3.8) muestran que el ajuste reduce la ganancia, confirmando el comportamiento observado en simulación.

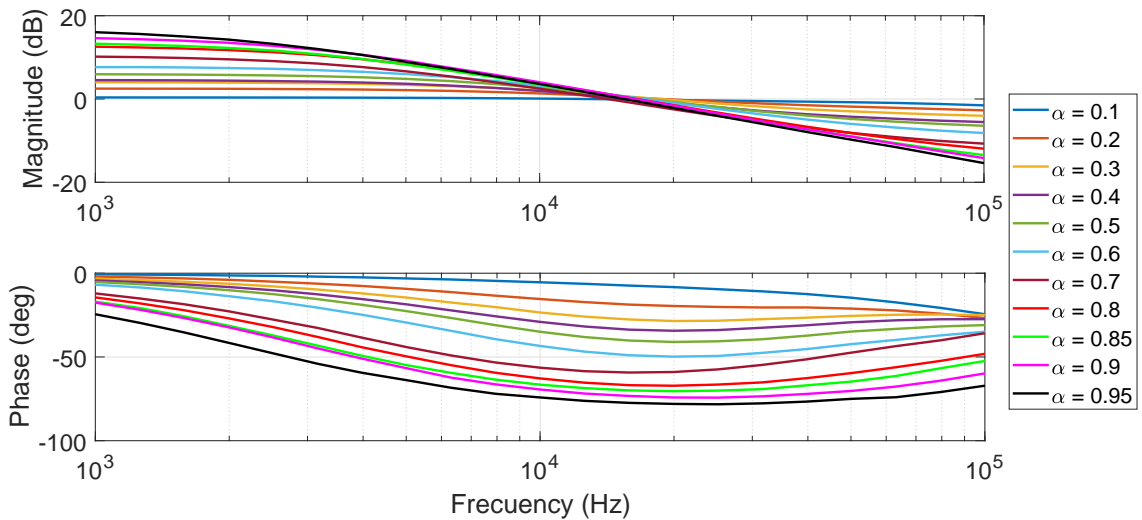


Figura 3.8: Datos del integrador con ajuste.

3.4.3. Fase del integrador fraccionario activo

La Ecuación (3.15) calcula la ganancia a la frecuencia de corte del integrador fraccionario. Ubicando la ganancia en la gráfica 3.8 y obtenemos la frecuencia de corte f_c , con la frecuencia de corte recuperamos la fase del integrador la cual se compara con la fase ideal en la Tabla 3.7 ocupando la Ecuación 3.16.

$$Gain_{f_c} = M_{max} - 3\alpha \quad (3.15)$$

Donde M_{max} es la magnitud máxima del integrador.

$$P = -45^\circ \alpha \quad (3.16)$$

Donde α es el orden del filtro fraccionario.

Tabla 3.7: Fase en frecuencia de corte del integrador fraccionario activo con ajuste.

α	Magnitud (dB) a 100Hz	Frecuencia de corte (Hz)	Fase experimental (Deg)	Fase de (3.16) (Deg)	Error (Deg)
0.95	16.93	2085	-42.77	-42.7	-0.07
0.9	15.08	2761	-41.07	-40.5	-0.57
0.85	13.55	2968	-41.57	-38.25	-3.32
0.8	12.88	3185	-38.27	-36	-2.27
0.7	10.42	3336	-34.04	-31.5	-2.54
0.6	7.72	5119	-29.95	-27	-2.95
0.5	6.022	5716	-24.98	-22.5	-2.48
0.4	4.595	5768	-20.79	-18	-2.79
0.3	4.069	5913	-16.66	-13.5	-3.16
0.2	2.517	6505	-11.57	-9	-2.57
0.1	0.38	10550	-5.625	-4.5	-1.125

3.5. Análisis de Monte Carlo

Este tipo de análisis data de 1940 y se le atribuye a John von Neumann y Stanislaw Ulam. Su nombre hace homenaje al Casino de Monte Carlo. Es un análisis estadístico por medio de algoritmos computacionales que realiza una repetición de muestreos aleatorios para determinar las propiedades de un fenómeno. Es importante comprender los efectos de la tolerancia de los valores físicos reales que presentan los componentes en el trabajo en laboratorio, siendo decisivo con ello entender los conflictos que hay entre el diseño y el rendimiento para comprobar la fiabilidad y el cumplimiento de normativas. Algunos conceptos importantes para el análisis de Monte Carlo son los siguientes.

Desviación estándar: es la raíz cuadrada de la varianza, definida por

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} \quad (3.17)$$

donde X_i es el valor de cada uno de los n eventos y \bar{X} es el valor medio de estos.

Valor medio: es una medida de tendencia central, también conocido como promedio, que se calcula mediante

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (3.18)$$

donde \bar{X} representa el valor máximo de la distribución Gaussiana.

En una distribución de probabilidad Gaussiana, en el intervalo $\pm\sigma$ se concentran el 68.26% de los casos, mientras que en el intervalo $\pm 3\sigma$ se concentran más del 99.74% de los casos, como se muestra en la Figura 3.9.

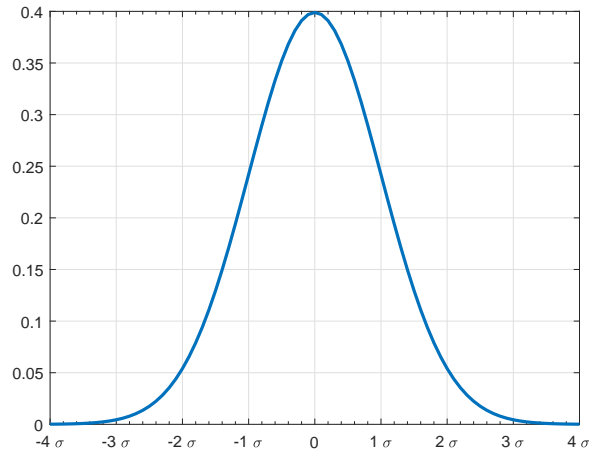


Figura 3.9: Distribución de probabilidad Gaussiana.

Resultados del análisis de Monte Carlo: Para verificar que el ajuste funcione en la mayoría de los casos experimentales se realiza un análisis de Monte Carlo con 100 casos y una distribución Gaussiana con $\sigma = \pm 3$. Las resistencias del circuito tienen una tolerancia del 5%, mientras que los capacitores tienen una tolerancia en el peor de los casos de 20%. Los histogramas de la Figura 3.10 muestran la variación de la pendiente de la respuesta en frecuencia del integrador fraccionario para $\alpha = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95)$.

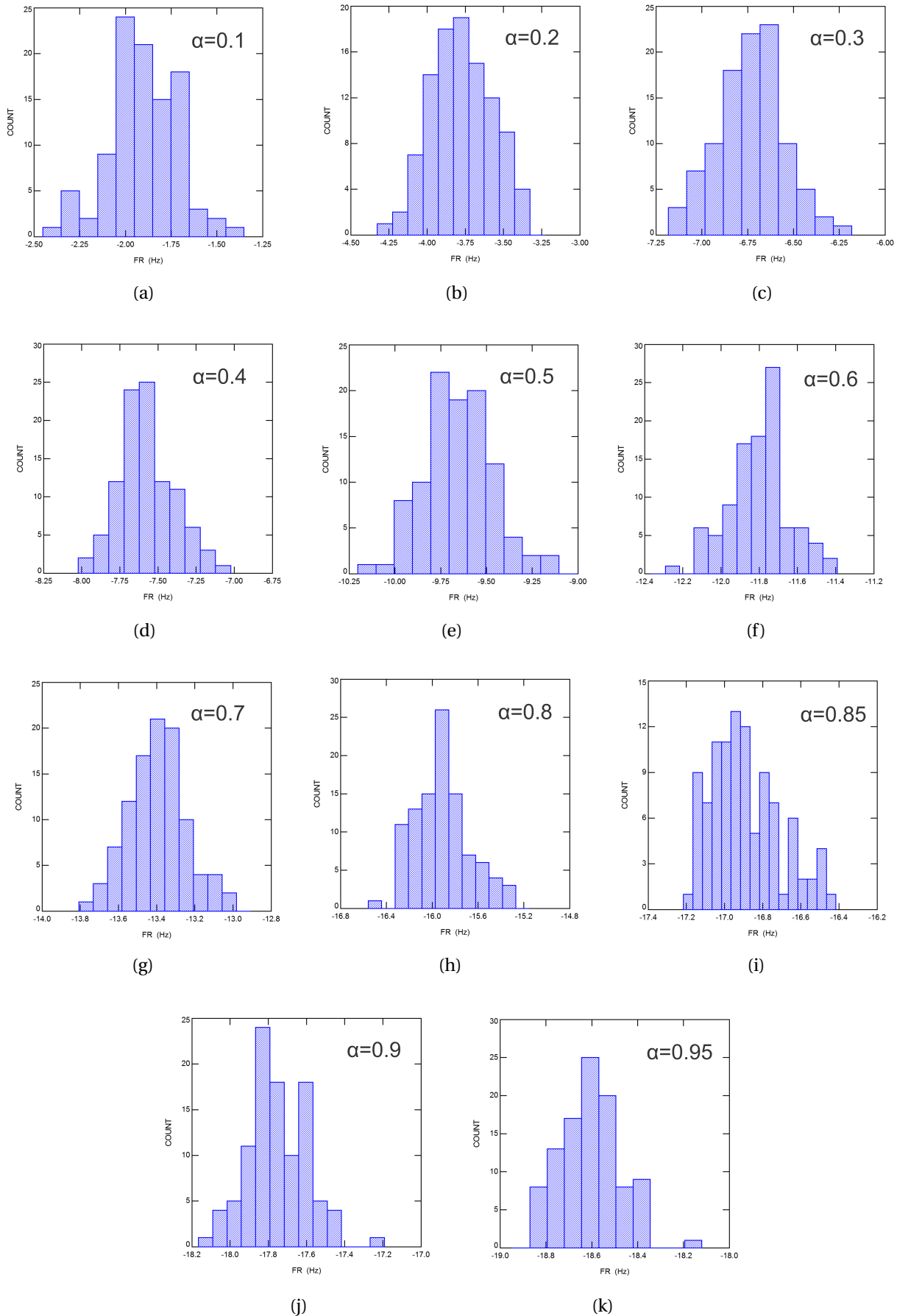


Figura 3.10: Histogramas de la variación de la pendiente de la respuesta en frecuencia del integrador fraccionario considerando ajuste.

La media calculada con los 100 casos del análisis de Monte Carlo para cada orden se muestra en la Figura 3.11. Se observa que los casos sin ajuste se alejan de la línea ideal mucho más que los casos con ajuste. Esto se corrobora también en la Figura 3.12a, la cual muestra los valores máximos y mínimos que toma la pendiente sin utilizar el ajuste. El error es de aproximadamente 2dB para los ordenes desde 0.2 hasta 0.8, mientras que para los ordenes 0.85, 0.9 y 0.95 el error es menor. Ningún orden, a excepción de 0.1, encierra a la curva de la pendiente ideal. Por el contrario, los valores máximos y mínimos de la pendiente con ajuste (Figura 3.12b) son mucho más cercanos a la línea ideal, encerrándola en todos los casos.

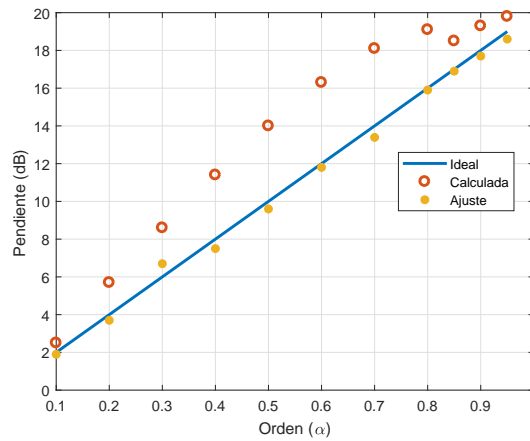


Figura 3.11: Media de Monte Carlo con y sin ajuste.

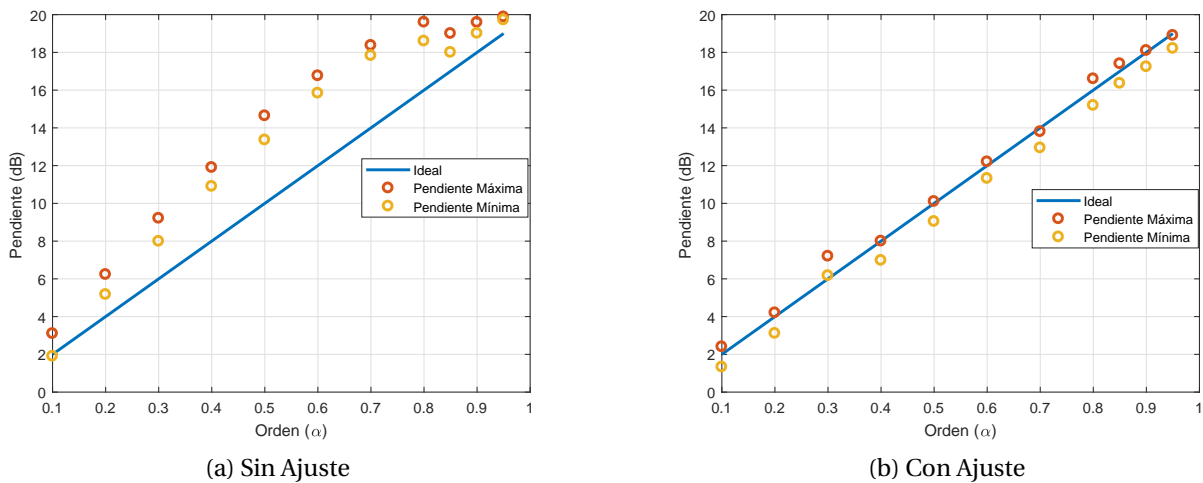


Figura 3.12: Valores Máximos y Mínimos en la pendiente con y sin Ajuste.

Las Tablas 3.8 y 3.9 muestran los datos completos del análisis de Monte Carlo. En la Tabla 3.8 se observa que la media de la pendiente del integrador de orden fraccionario sin ajuste se aleja 0.54dB para el orden 0.1, 1.77dB para el orden de 0.2, 2.65dB para el orden de 0.3, 3.45dB para el orden de 0.4, 4dB para el orden de 0.5, 4.29dB para el orden de 0.6, 4.13dB para el orden de 0.7, 3.17dB para el orden de 0.8, 1.5dB para el orden de 0.85, 1.3dB para el orden de 0.9 y 0.83dB para el orden de 0.95. Se confirma que 3.5 necesita del ajuste para aproximar la pendiente a la ideal.

Tabla 3.8: Análisis de Monte Carlo sin Ajuste

α	Media de la pendiente (dB)	Desviación Estandar	Mínimo (dB)	Máximo (dB)
0.10	-2.54	200.62m	-3.04	-1.94
0.20	-5.77	177.18m	-6.12	-5.30
0.30	-8.65	204.31m	-9.18	-8.23
0.40	-11.45	167.15m	-11.92	-11.03
0.50	-14.00	213.91m	-14.55	-13.53
0.60	-16.29	153.06m	-16.56	-15.86
0.70	-18.13	90.907m	-18.28	-17.76
0.80	-19.17	167.37m	-19.54	-18.64
0.85	-18.50	167.71m	-18.92	-18.08
0.90	-19.30	97.381m	-19.50	-18.97
0.95	-19.83	27.705m	-19.89	-19.73

La Tabla 3.9 presenta una media en la pendiente más próxima a la pendiente ideal y su error es de $0.1dB$ para un orden de 0.1, $0.23dB$ para un orden de 0.2, $0.73dB$ para un orden de 0.3, $0.43dB$ para un orden de 0.4, $0.35dB$ para un orden de 0.5, $0.2dB$ para un orden de 0.6, $0.61dB$ para un orden de 0.7, $0.09dB$ para un orden de 0.8, $0.11dB$ para un orden de 0.85, $0.25dB$ para un orden de 0.9 y $0.4dB$ para un orden de 0.95.

Tabla 3.9: Análisis de Monte Carlo con Ajuste

α	Media de la pendiente (dB)	Desviación Estandar	Mínimo (dB)	Máximo (dB)
0.10	-1.90	189.72m	-2.35	-1.41
0.20	-3.77	197.33m	-4.24	-3.33
0.30	-6.73	177.47m	-7.13	-6.24
0.40	-7.57	175.89m	-7.95	-7.09
0.50	-9.65	187.33m	-10.10	-9.11
0.60	-11.8	159.39m	-12.28	-11.43
0.70	-13.39	151.61m	-13.74	-13.00
0.80	-15.91	238.89m	-16.49	-15.30
0.85	-16.89	180.43m	-17.16	-16.44
0.90	-17.75	153.82m	-18.00	-17.26
0.95	-18.60	129.53m	-18.85	-18.17

3.6. Análisis de Sensitividad

El análisis de sensibilidad de una red eléctrica permite determinar cuál de las diferentes soluciones mediante las cuales se obtiene una función de transferencia en particular es la más robusta a las variaciones en los valores de sus elementos, lo cual es igual de importante que el bajo costo y compactibilidad de la implementación [34].

Al seleccionar una red en particular de una serie de circuitos disponibles, se pueden usar diferentes criterios para tomar la decisión final. Normalmente, la selección se basa en los aspectos económicos de la construcción del circuito de filtro. Por ejemplo, en los filtros pasivos, el factor determinante puede ser el número de inductores o la inductancia total necesaria. Esto se debe a que los inductores suelen ser el tipo de componente más caro, se desvían más del modelo idealizado y son más difíciles de calibrar. A veces, incluso los factores económicos no son la consideración más importante. La decisión final puede ser enteramente subjetiva. Por ejemplo, qué tamaño y tipo de componentes están en existencia determinará qué red elegir. Otro factor que puede determinar cuál de los circuitos usar es la sensibilidad. Si todos los componentes no son precisos, sino que también permanecen constantes a lo largo de su vida útil y bajo diferentes condiciones ambientales, habrá poca diferencia en su rendimiento. Sin embargo, en la práctica, los componentes reales se desvían de sus valores nominales debido a la imprecisión inicial en la fabricación, los factores ambientales, como la temperatura y la humedad, y los cambios químicos y mecánicos debidos al envejecimiento. Como resultado, los valores de los componentes pueden desviarse de sus valores nominales. Los efectos de estas desviaciones alterarán el rendimiento de diferentes redes en diferentes cantidades [34].

Hay dos enfoques diferentes para reducir estos efectos indeseables. Una es hacer que los valores iniciales de los componentes sean muy precisos y, posteriormente, tratar de evitar que estos valores fluctúen. Este enfoque generalmente no solo es innecesariamente costoso, sino también poco práctico. El otro enfoque es seleccionar las redes cuyos rendimientos se ven menos afectados por los cambios en los valores de sus elementos. Este segundo enfoque es algo manejable matemáticamente al comparar las sensibilidades de varias medidas de rendimiento de red con respecto a diferentes cambios de valor de componente.

La sensibilidad se define como una medida de rendimiento y respecto a un elemento x y se calcula como [34]

$$S_x^y = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (3.19)$$

Resultados del análisis de Sensitividad: Para realizar el análisis de sensibilidad normalizada del integrador fraccionario con topología activa en SPICE se necesita el comando `.SENS`, el cual requiere una fuente en corriente directa (el análisis de sensibilidad es en corriente directa), además de indicarle al comando el nodo de salida del integrador quedando como `.SENS V(OUT)`. Los resultados del análisis se muestran en el archivo de salida (`.out`) producto de la simulación, los cuales se proceden a graficar. Para diferenciar cada uno de los elementos del integrador activo de orden fraccionario se renombran como se muestra en la Figura 3.13.

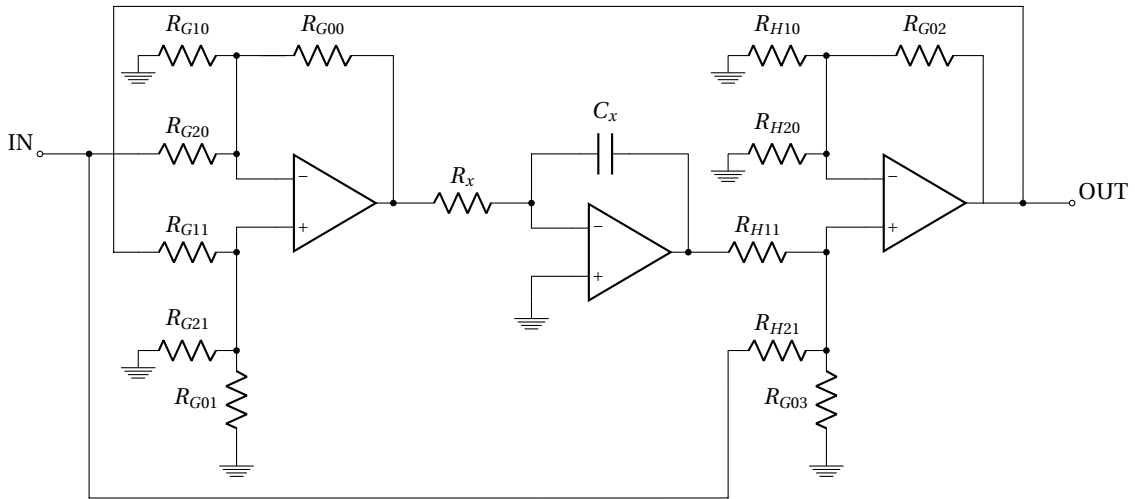


Figura 3.13: Diagrama circuital del integrador activo de orden fraccionario.

En la Figura 3.14 se aprecia los resultados del análisis con el orden $\alpha = 0.1$, donde la sensibilidad recae principalmente sobre dos resistores, R_{G11} y R_{G20} , pero siendo en el ajuste con R_{G11} que por cada ohmio incrementa la salida en un 0.0075% mientras que sin ajuste lo sobrepasa, tal y como se muestra en la Tabla 3.10, y para R_{G20} por cada ohmio de aumento, disminuye la salida aproximadamente en un -0.008% sin ajuste, mientras que con ajuste es de aproximadamente -0.007%.

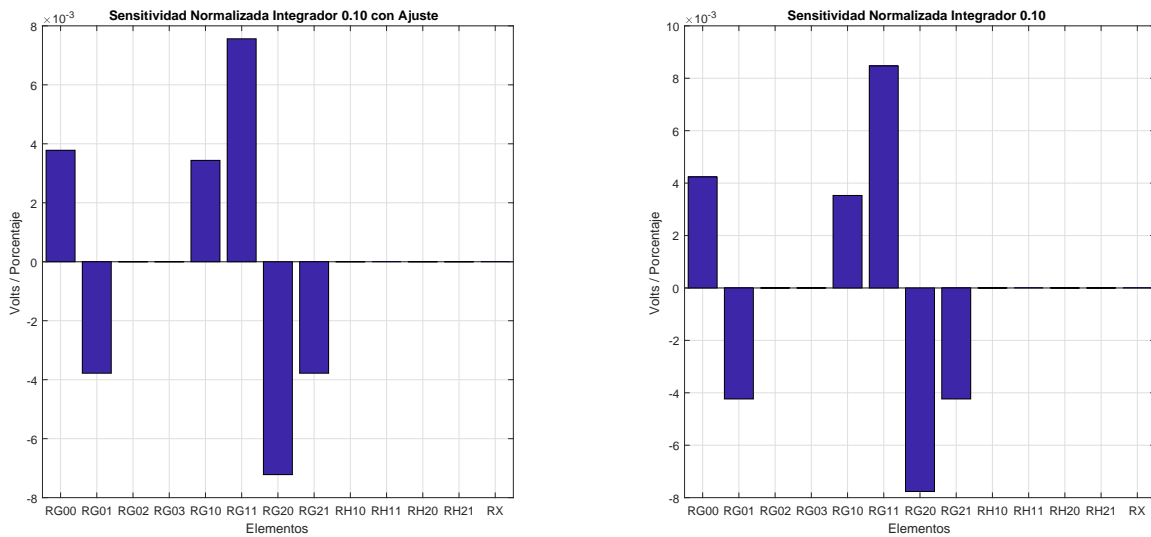


Figura 3.14: Análisis de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.1 con y sin ajuste.

Tabla 3.10: Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.1

$\alpha = 0.1$	$R_{G11} (\Omega)$	$R_{G20} (\Omega)$	Sensibilidad en $R_{G11} (V/\%)$	Sensibilidad en $R_{G20} (V/\%)$
Con Ajuste	110	100	$7.56e-3$	$-7.22e-3$
Sin Ajuste	120	100	$8.47e-3$	$-7.77e-3$

La Figura 3.15 presenta los resultados del análisis con el orden de 0.2, donde la sensibilidad recae principalmente sobre dos resistencias, R_{G11} y R_{G20} , pero siendo en el ajuste con R_{G11} que por cada ohmio incrementa la salida en un 0.009% mientras que sin ajuste llega a alcanzar hasta un 0.01%, tal y como se muestra en la Tabla 3.11, y para R_{G20} por cada ohmio de aumento, disminuye

la salida aproximadamente en un -0.0093 % sin ajuste, mientras que con ajuste es de aproximadamente 0.0083 %.

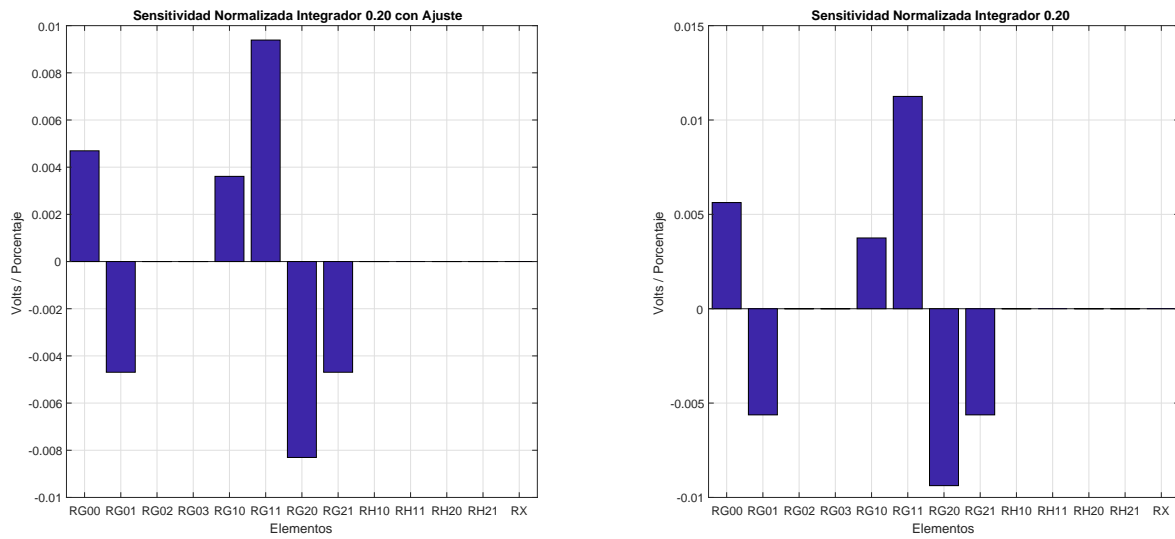


Figura 3.15: Análisis de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.2 con y sin ajuste.

Tabla 3.11: Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.2

$\alpha = 0.2$	$R_{G11} (\Omega)$	$R_{G20} (\Omega)$	Sensibilidad en $R_{G11} (V/\%)$	Sensibilidad en $R_{G20} (V/\%)$
Con Ajuste	130	100	$9.39e-3$	$-8.31e-3$
Sin Ajuste	150	100	$1.13e-2$	$-9.38e-3$

La Figura 3.16 presenta los resultados del análisis con el orden de 0.3, donde la sensibilidad recae principalmente sobre dos resistores, R_{G11} y R_{G20} pero siendo en el ajuste con R_{G11} que por cada ohmio incrementa la salida en un 0.012 % mientras que sin ajuste es de aproximadamente un 0.015 %, tal y como se muestra en la Tabla 3.12, y para R_{G20} por cada ohmio de aumento, disminuye la salida aproximadamente en un -0.01 % sin ajuste, mientras que con ajuste es de aproximadamente 0.009 %.

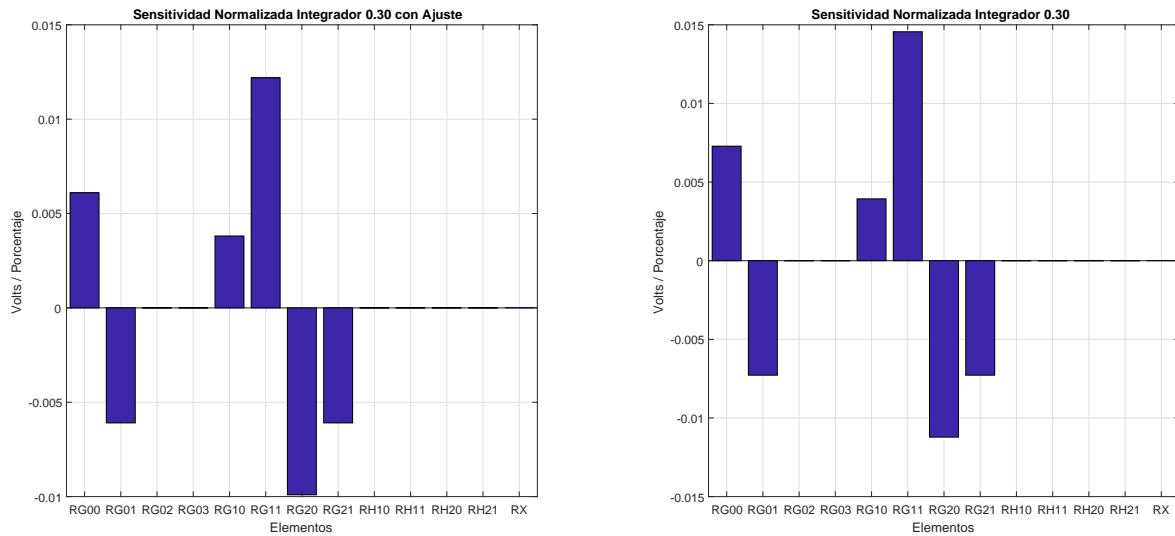


Figura 3.16: Análisis de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.3 con y sin ajuste.

Tabla 3.12: Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.3

$\alpha = 0.3$	$R_{G11} (\Omega)$	$R_{G20} (\Omega)$	Sensibilidad en R_{G11} (V/%)	Sensibilidad en R_{G20} (V/%)
Con Ajuste	160	100	$1.22e-2$	$-9.91e-3$
Sin Ajuste	185	100	$1.46e-2$	$-1.12e-2$

La Figura 3.17 presenta los resultados del análisis con el orden de 0.4, donde la sensibilidad recae principalmente sobre dos resistencias, R_{G11} y R_{G20} , pero siendo en el ajuste con R_{G11} que por cada ohmio incrementa la salida en un 0.013% mientras que sin ajuste llega a alcanzar hasta un 0.02%, tal y como se muestra en la Tabla 3.13, y para R_{G20} por cada ohmio de aumento, disminuye la salida aproximadamente en un -0.013% sin ajuste, mientras que con ajuste es de aproximadamente 0.01%.

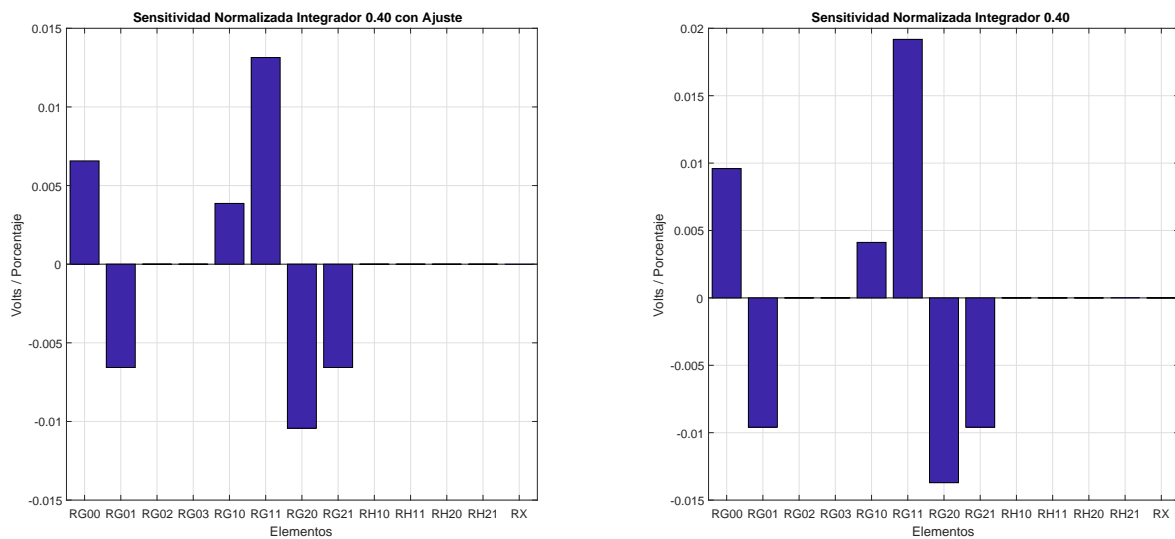


Figura 3.17: Análisis de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.4 con y sin ajuste.

Tabla 3.13: Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.4

$\alpha = 0.4$	$R_{G11} (\Omega)$	$R_{G20} (\Omega)$	Sensitividad en $R_{G11} (V/\%)$	Sensitividad en $R_{G20} (V/\%)$
Con Ajuste	170	100	$1.31e-2$	$-1.04e-2$
Sin Ajuste	233	100	$1.92e-2$	$-1.37e-2$

En la Figura 3.18 se aprecia los resultados del análisis con el orden de 0.5, donde la sensibilidad recae principalmente sobre R_{G11} y R_{G20} con ajuste y en R_{G02} , R_{G11} y R_{H10} sin ajuste, pero siendo en sin ajuste con la resistencia R_{G11} que por cada ohmio incrementa la salida en un 0.008 % mientras que con ajuste lo sobrepasa, tal y como se muestra en la Tabla 3.14, y para R_{G20} con ajuste, por cada ohmio de aumento, disminuye la salida aproximadamente en un -0.01 % mientras que sin ajuste es casi nulo, y finalmente la resistencia sin ajuste R_{G02} y R_{H10} tiene una sensibilidad de aproximadamente 0.01 % y 0.006 % respectivamente, mientras que con ajuste es casi nulo en ambas resistencias.

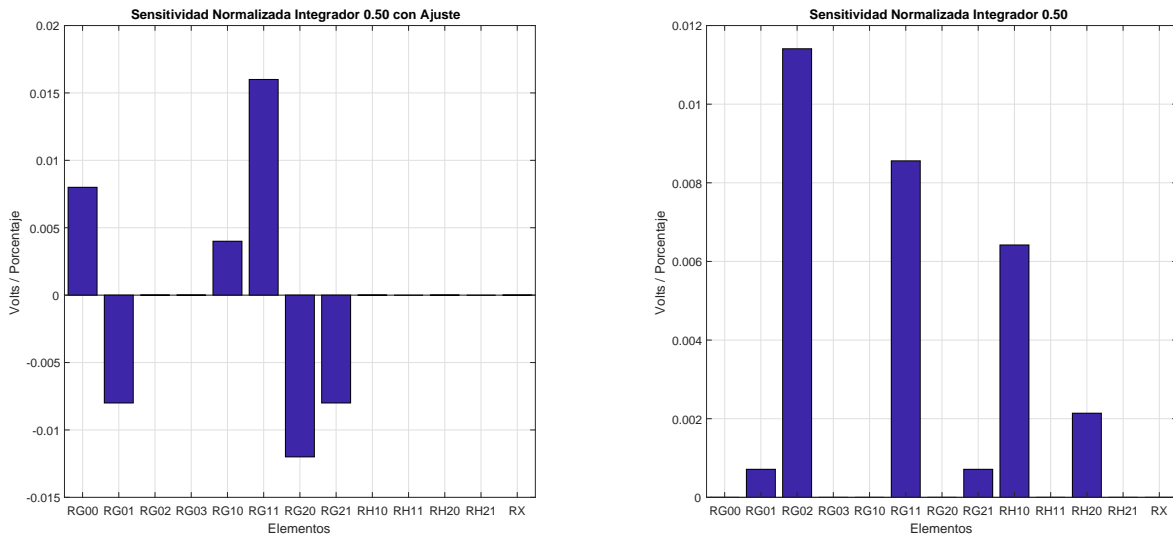


Figura 3.18: Análisis de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.5 con y sin ajuste.

Tabla 3.14: Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.5

$\alpha = 0.5$	$R_{G11} (\Omega)$	$R_{G20} (\Omega)$	$R_{G02} (\Omega)$	$R_{H10} (\Omega)$	Sensitividad en $R_{G11} (V/\%)$	Sensitividad en $R_{G20} (V/\%)$	Sensitividad en $R_{G02} (V/\%)$	Sensitividad en $R_{H10} (V/\%)$
Con Ajuste	200	100	100	100	$1.6e-2$	$-1.2e-2$	$2.95e-7$	$-1.96e-7$
Sin Ajuste	300	100	100	100	$8.56e-3$	$2.6e-16$	$1.14e-2$	$6.42e-3$

En la Figura 3.19 se aprecia los resultados del análisis con el orden de 0.6, donde la sensibilidad recae principalmente sobre R_{G11} y R_{G20} con ajuste y en R_{G02} , R_{G11} y R_{H10} sin ajuste, pero siendo en sin ajuste con la resistencia R_{G11} que por cada ohmio incrementa la salida en un 0.008 % mientras que con ajuste lo sobrepasa, tal y como se muestra en la Tabla 3.15, y para R_{G20} por cada ohmio de aumento, disminuye la salida aproximadamente en un -0.015 % con ajuste, mientras que sin ajuste es casi nulo, y finalmente la resistencia sin ajuste R_{G02} y R_{H10} tiene una sensibilidad de aproximadamente 0.013 % y 0.008 % respectivamente, mientras que con ajuste es casi nulo en ambas resistencias.

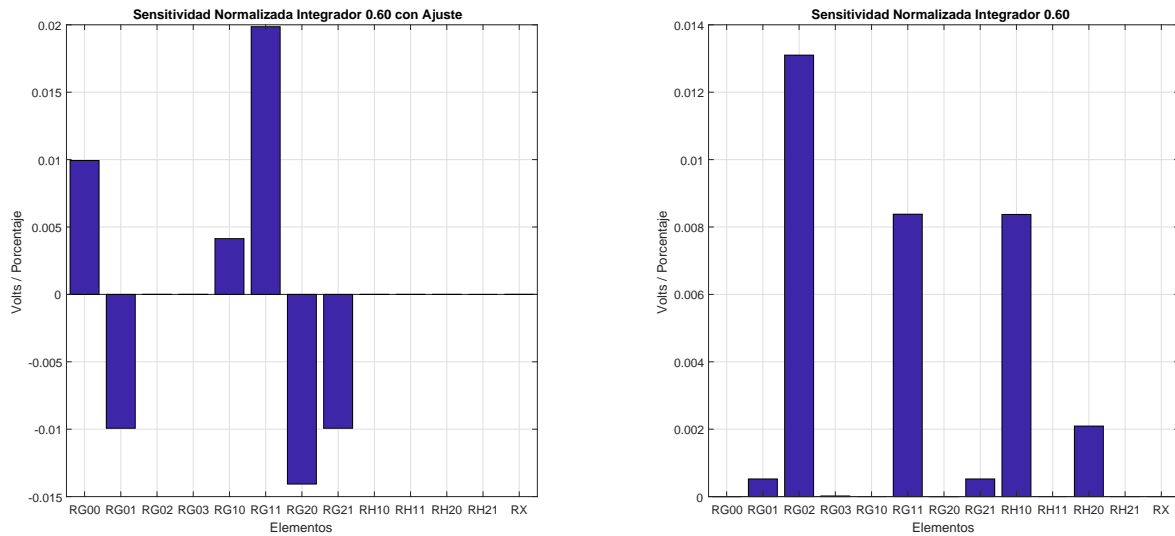


Figura 3.19: Análisis de sensibilidad del integrador fraccional de orden 0.6 con y sin ajuste.

Tabla 3.15: Resultados de sensibilidad del integrador fraccional de orden 0.6

$\alpha = 0.6$	$R_{G11} (\Omega)$	$R_{G20} (\Omega)$	$R_{G02} (\Omega)$	$R_{H10} (\Omega)$	Sensibilidad en $R_{G11} (V/\%)$	Sensibilidad en $R_{G20} (V/\%)$	Sensibilidad en $R_{G02} (V/\%)$	Sensibilidad en $R_{H10} (V/\%)$
Con Ajuste	240	100	100	100	$1.99e-2$	$-1.41e-2$	$4.08e-7$	$-2.88e-7$
Sin Ajuste	400	100	100	100	$8.38e-3$	$-7.75e-8$	$1.31e-2$	$8.37e-3$

En la Figura 3.20 se aprecia los resultados del análisis con el orden de 0.7, donde la sensibilidad recae principalmente sobre R_{G11} y R_{G20} con ajuste y en R_{G02} , R_{G11} y R_{H10} sin ajuste, pero siendo en sin ajuste con la resistencia R_{G11} que por cada ohmio incrementa la salida en un 0.0077% mientras que con ajuste lo sobrepasa, tal y como se muestra en la Tabla 3.16, y para R_{G20} por cada ohmio de aumento, disminuye la salida aproximadamente en un -0.016% con ajuste, mientras que sin ajuste es casi nulo, y finalmente las resistencias sin ajuste R_{G02} y R_{H10} tiene una sensibilidad de aproximadamente 0.015% y 0.01% respectivamente, mientras que con ajuste es casi nulo en ambas resistencias.

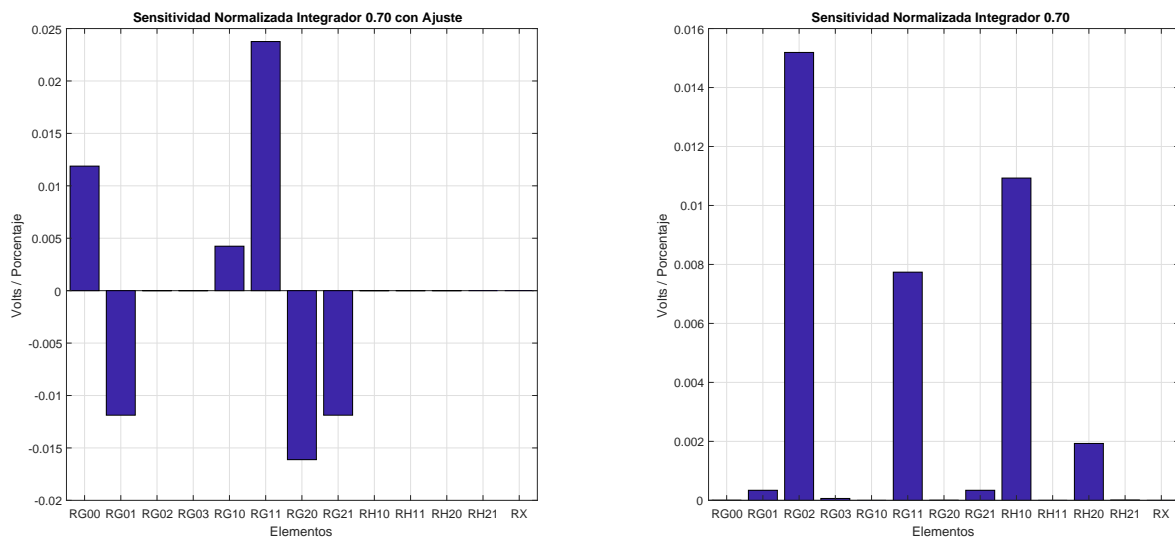


Figura 3.20: Análisis de sensibilidad del integrador fraccional de orden 0.7 con y sin ajuste.

Tabla 3.16: Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.7

$\alpha = 0.7$	$R_{G11} (\Omega)$	$R_{G20} (\Omega)$	$R_{G02} (\Omega)$	$R_{H10} (\Omega)$	Sensitividad en $R_{G11} (V/\%)$	Sensitividad en $R_{G20} (V/\%)$	Sensitividad en $R_{G02} (V/\%)$	Sensitividad en $R_{H10} (V/\%)$
Con Ajuste	280	100	100	100	$2.38e-2$	$-1.61e-2$	$5.40e-7$	$-3.98e-7$
Sin Ajuste	566	100	100	100	$7.74e-3$	$-1.28e-7$	$1.52e-2$	$1.09e-2$

En la Figura 3.21 se aprecia los resultados del análisis con el orden de 0.8, donde la sensibilidad recae principalmente sobre tres resistores, R_{G02} , R_{G11} y R_{H10} , pero siendo en el ajuste con R_{G02} donde por cada ohmio de aumento, incrementa la salida en un 0.013% mientras que sin ajuste lo sobrepasa, tal y como se muestra en la Tabla 3.17, para R_{G11} por cada ohmio de aumento, incrementa la salida aproximadamente en un 0.008% con ajuste, mientras que sin ajuste es menor, y finalmente la sensibilidad de R_{H10} , por cada ohmio incrementa la salida en un 0.008% con ajuste, mientras que para el integrador sin ajuste es mayor.

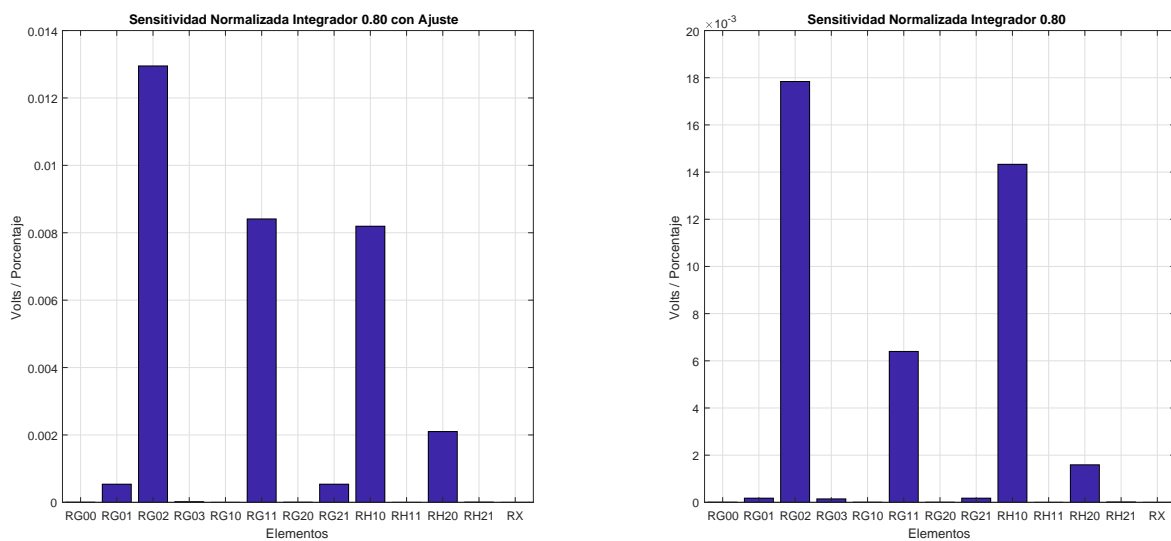


Figura 3.21: Análisis de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.8 con y sin ajuste.

Tabla 3.17: Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.8

$\alpha = 0.8$	$R_{G02} (\Omega)$	$R_{G11} (\Omega)$	$R_{H10} (\Omega)$	Sensitividad en $R_{G02} (V/\%)$	Sensitividad en $R_{G11} (V/\%)$	Sensitividad en $R_{H10} (V/\%)$
Con Ajuste	100	390	100	$1.3e-2$	$8.41e-3$	$8.19e-3$
Sin Ajuste	100	900	100	$1.78e-2$	$6.40e-3$	$1.43e-2$

En la Figura 3.22 se aprecia los resultados del análisis con el orden de 0.85, donde la sensibilidad recae principalmente sobre tres resistores, R_{G02} , R_{G11} y R_{H10} , pero siendo en el ajuste con R_{G02} donde por cada ohmio de aumento, incrementa la salida en un 0.0138% mientras que sin ajuste lo sobrepasa, tal y como se muestra en la Tabla 3.18, para R_{G11} por cada ohmio de aumento, incrementa la salida aproximadamente en un 0.008% con ajuste, mientras que sin ajuste es menor, y finalmente la sensibilidad de R_{H10} , por cada ohmio incrementa la salida en un 0.009% con ajuste, mientras que para el integrador sin ajuste es mayor.

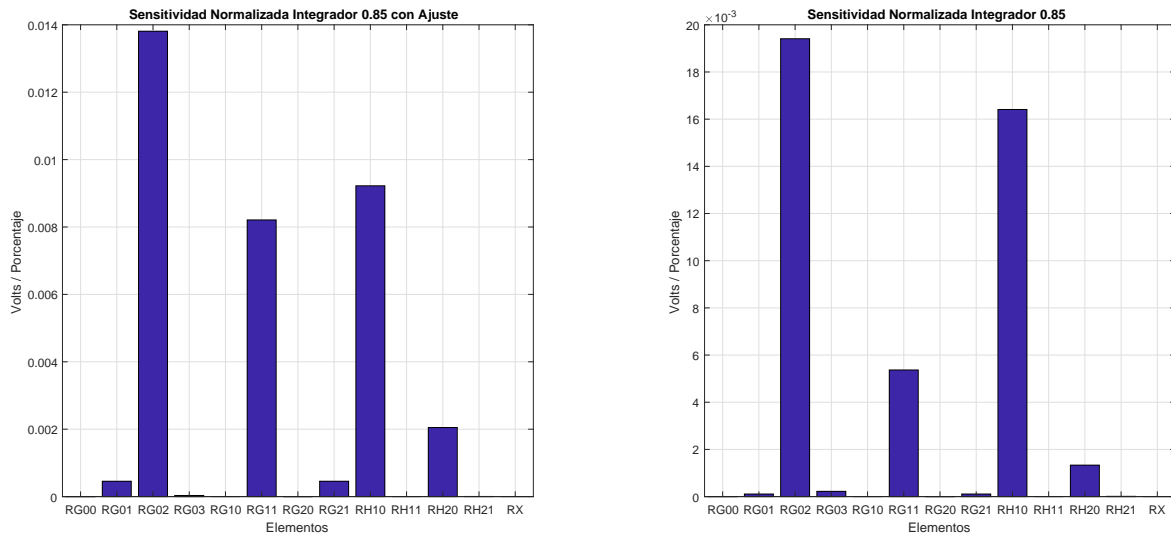


Figura 3.22: Análisis de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.85 con y sin ajuste.

Tabla 3.18: Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.85

$\alpha = 0.85$	$R_{G02} (\Omega)$	$R_{G11} (\Omega)$	$R_{H10} (\Omega)$	Sensibilidad en $R_{G02} (V/\%)$	Sensibilidad en $R_{G11} (V/\%)$	Sensibilidad en $R_{H10} (V/\%)$
Con Ajuste	100	450	100	$1.38e-2$	$8.21e-3$	$9.22e-3$
Sin Ajuste	100	1230	100	$1.94e-2$	$5.37e-3$	$1.64e-2$

En la Figura 3.23 se aprecia los resultados del análisis con el orden de 0.90, donde la sensibilidad recae principalmente sobre tres resistores, R_{G02} , R_{G11} y R_{H10} , pero siendo en el ajuste con R_{G02} donde por cada ohmio de aumento, incrementa la salida en un 0.0148% mientras que sin ajuste lo sobrepasa, tal y como se muestra en la Tabla 3.19, para R_{G11} por cada ohmio de aumento, incrementa la salida aproximadamente en un 0.0078% con ajuste, mientras que sin ajuste es mucho menor, y finalmente la sensibilidad de R_{H10} , por cada ohmio incrementa la salida en un 0.001% con ajuste, mientras que para el integrador sin ajuste es mayor.

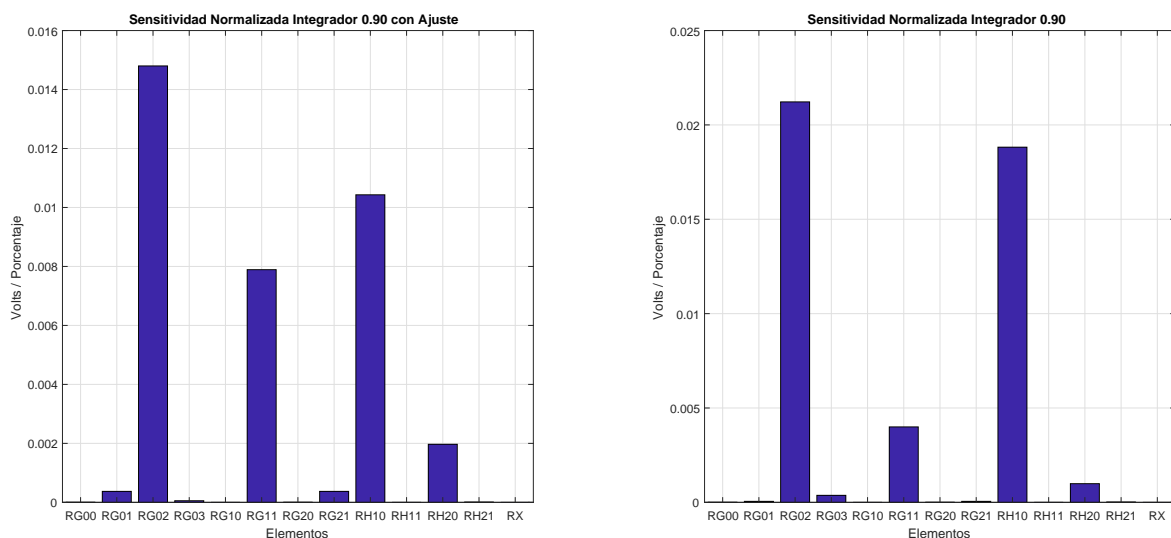


Figura 3.23: Análisis de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.9 con y sin ajuste.

Tabla 3.19: Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.90

$\alpha = 0.90$	$R_{G02} (\Omega)$	$R_{G11} (\Omega)$	$R_{H10} (\Omega)$	Sensitividad en $R_{G02} (V/\%)$	Sensitividad en $R_{G11} (V/\%)$	Sensitividad en $R_{H10} (V/\%)$
Con Ajuste	100	530	100	$1.48e-2$	$7.89e-3$	$1.04e-2$
Sin Ajuste	100	1900	100	$2.12e-2$	$4.00e-3$	$1.88e-2$

En la Figura 3.24 se aprecia los resultados del análisis con el orden de 0.95, donde la sensibilidad recae principalmente sobre tres resistores, R_{G02} , R_{G11} y R_{H10} , pero siendo en el ajuste con R_{G02} donde por cada ohmio de aumento, incrementa la salida en un 0.016% mientras que sin ajuste es mayor, tal y como se muestra en la Tabla 3.20, para R_{G11} por cada ohmio de aumento, incrementa la salida aproximadamente en un 0.0073% con ajuste, mientras que sin ajuste es menor, y finalmente la sensibilidad de R_{H10} , por cada ohmio incrementa la salida en un 0.0012% con ajuste, mientras que para el integrador sin ajuste es mayor.

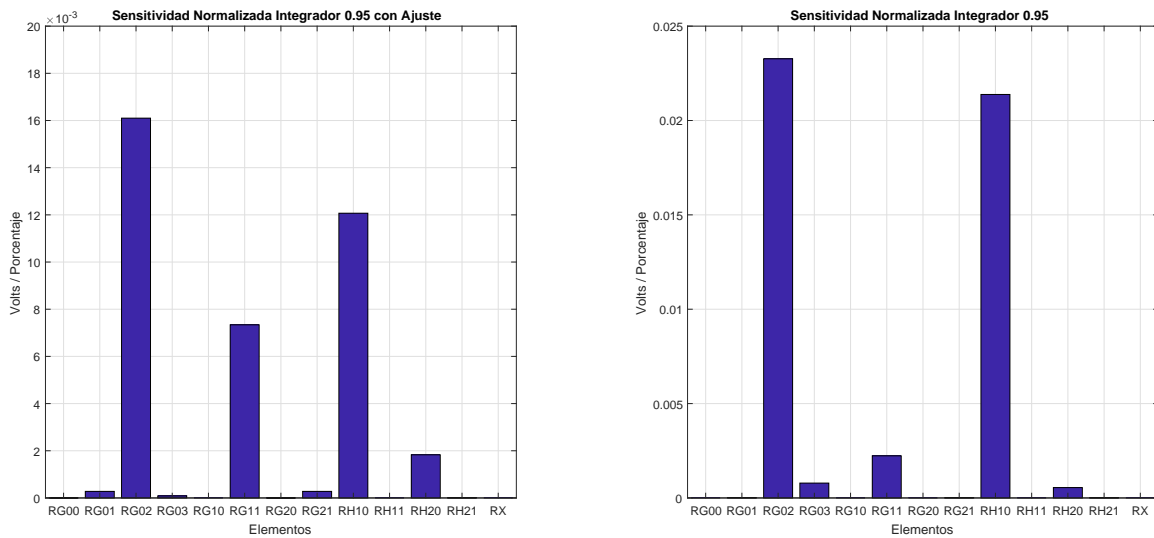


Figura 3.24: Análisis de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.95 con y sin ajuste.

Tabla 3.20: Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario de orden 0.95

$\alpha = 0.95$	$R_{G02} (\Omega)$	$R_{G11} (\Omega)$	$R_{H10} (\Omega)$	Sensitividad en $R_{G02} (V/\%)$	Sensitividad en $R_{G11} (V/\%)$	Sensitividad en $R_{H10} (V/\%)$
Con Ajuste	100	660	100	$1.61e-2$	$7.34e-3$	$1.21e-2$
Sin Ajuste	100	3900	100	$2.33e-2$	$2.23e-3$	$2.14e-2$

El análisis de sensibilidad para el capacitor C_x , se obtiene empleando la definición de sensibilidad de la ecuación 3.19. Donde y es la función de transferencia del integrador fraccionario activo y x representa el capacitor C_x , quedando de la siguiente forma:

$$S_{C_x}^{F(s)} = \frac{C_x}{F(s)} \cdot \frac{dF(s)}{dC_x} \tag{3.20}$$

Donde los valores $F(s)$, s y C_x se indican en la Ecuación 3.21.

$$F(s) = \frac{s + A}{As + 1}$$

$$s = 2\pi(15.91\text{KHz})j \tag{3.21}$$

$$C_x = 1\text{nF}$$

La sensibilidad de los capacitores, es ligeramente menor con el integrador fraccionario con ajuste en comparación al integrador fraccionario sin ajuste, aunque tienden al mismo comportamiento de elevar su sensibilidad con el aumento del orden α , como se muestra en la Figura 3.25. En el caso de los ordenes de 0.9 y 0.95, por cada farad que aumente el capacitor C_x incrementa el voltaje de salida un 0.963 % con ajuste y un 0.997 % sin ajuste para un orden $\alpha = 0.9$ y para $\alpha = 0.95$, incrementa el voltaje de salida un 0.975 % con ajuste y un 0.999 % sin ajuste.

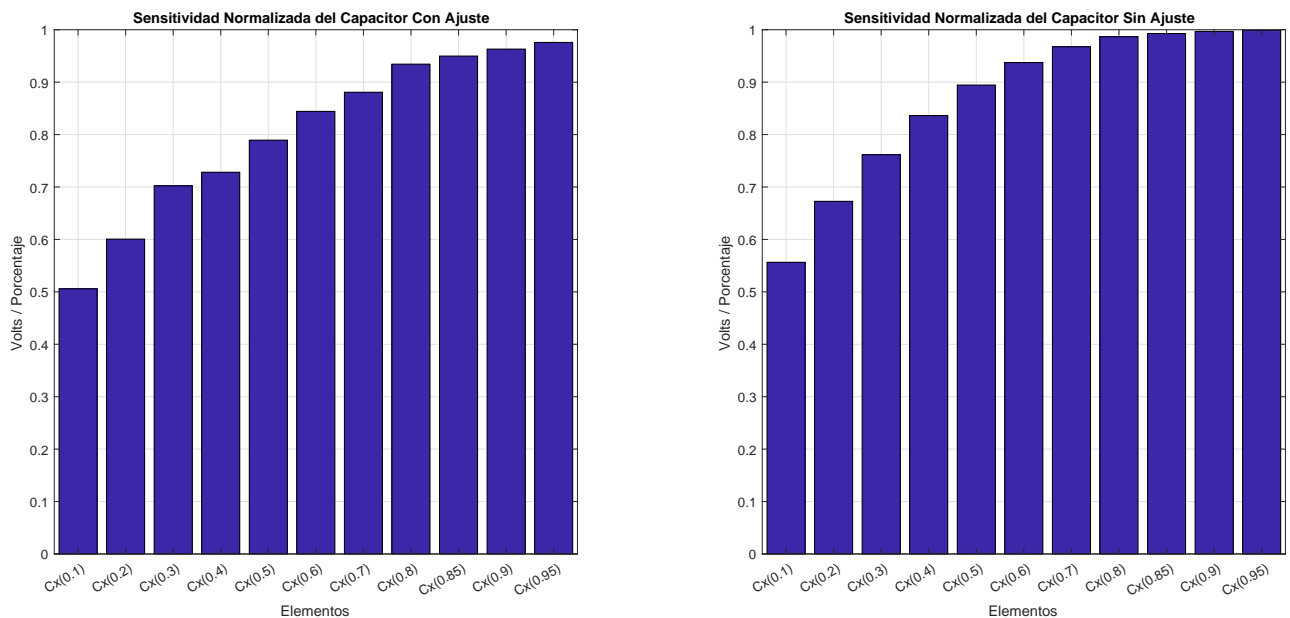


Figura 3.25: Sensibilidad normalizada del capacitor del integrador fraccionario

De acuerdo a los resultados obtenidos del análisis de sensibilidad, es evidente la baja sensibilidad de los componentes que forman parte del integrador fraccionario activo, tanto sin ajuste como con ajuste, siendo éste último ligeramente menos sensible a las variaciones de sus elementos. Por lo tanto se le puede considerar al integrador fraccionario activo como un sistema robusto, por su baja sensibilidad tanto con la ecuación de ajuste o con la ecuación de diseño obtenida por el diagrama de bloques.

4 | Implementación experimental de un oscilador caótico Multi-Scroll de orden fraccionario

Se realizó el sistema caótico de Lü dado por las siguientes tres ecuaciones diferenciales de orden fraccionario:

$$\begin{aligned} D^\alpha x &= y \\ D^\alpha y &= z \\ D^\alpha z &= -ax - by - cz + d_1 \overbrace{f(x)}^{PWL} \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde $f(x)$ es la función no lineal, $a = 2$, $b = 1$, $c = 0.6$ y $d = 2$. El diagrama a bloques para la realización de este sistema se muestra en la Figura 4.1. En este diagrama se sustituyen los integradores de orden entero por integradores fraccionarios de orden 0.9 y 0.95.

Para que el sistema caótico oscile se mueve la frecuencia de cruce por cero modificando el diagrama de bode del integrador fraccionario activo comparado con el integrador fraccionario pasivo y se aumenta su ganancia. El diagrama de bode del integrador activo de orden 0.90 modificado se muestra en la Figura 4.2, con una ganancia de 3. Además, se modificar la resistencia $R_x = 18K\Omega$ para mover la frecuencia de corte por cero, con un capacitor $C_x = 1\mu F$.

Con integradores de orden $\alpha = 0.95$ se compara el diagrama de Bode del integrador fraccionario pasivo del mismo orden y se aproxima la respuesta del integrador activo (Figura 4.3). Además de modificar la resistencia $R_x = 20K\Omega$ se mueve la frecuencia de corte por cero, con un capacitor $C_x = 1\mu F$ y la ganancia de 3.5 con un amplificador inversor.

El diagrama de bloques 4.1 se representa en la Figura 4.4 con los amplificadores inversores al final de cada integrador fraccionario activo.

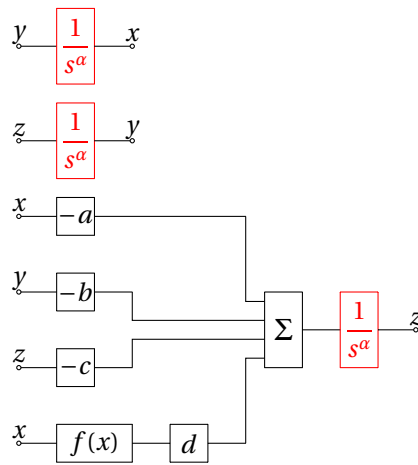


Figura 4.1: Diagrama de Bloques del sistema caótico de Lü.

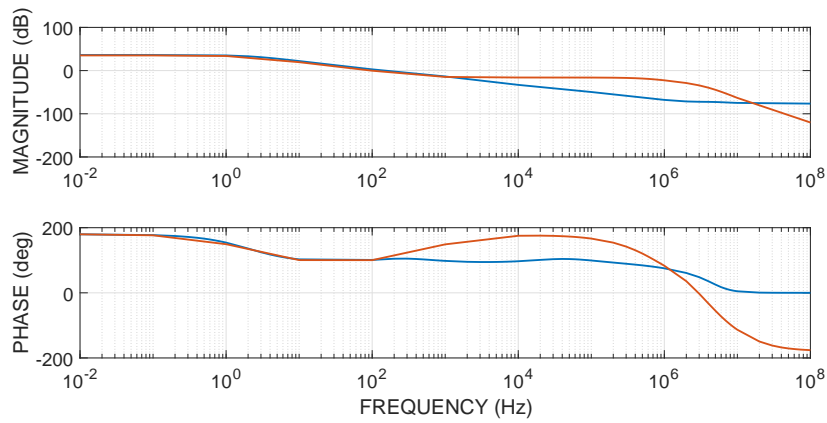


Figura 4.2: Respuesta modificada del integrador activo de orden 0.90.

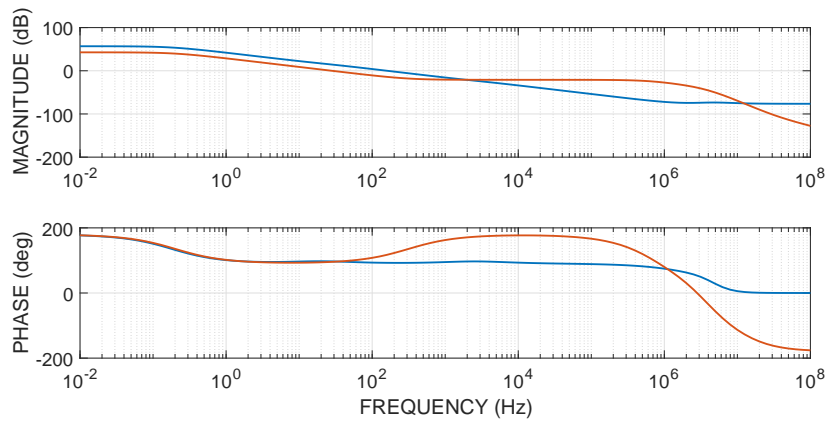


Figura 4.3: Respuesta modificada del integrador activo (Rojo) con el fractal de orden 0.95 (Azul).

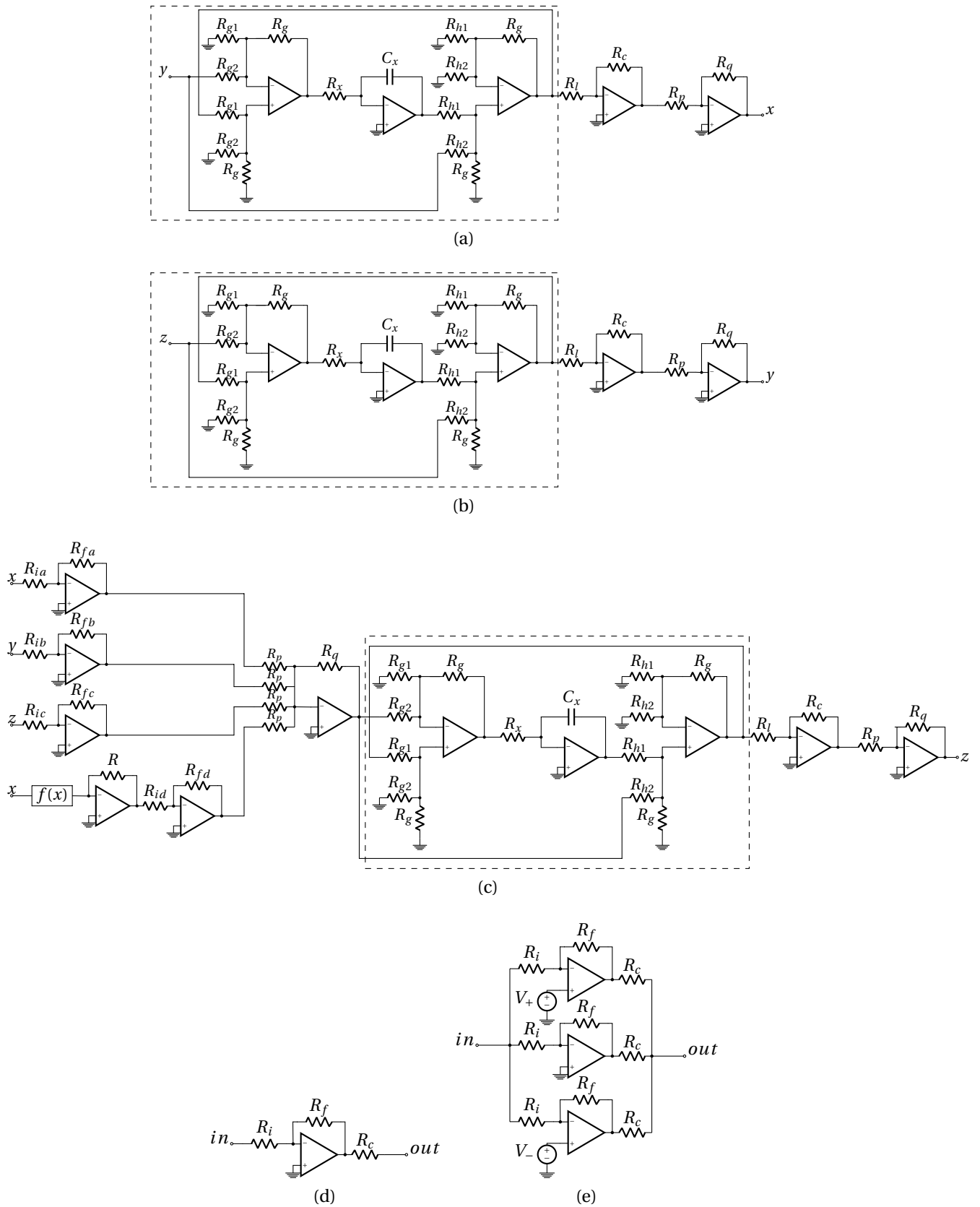


Figura 4.4: Oscilador fraccionario de Lü.

Las Tablas 4.1, 4.2 y 4.3 muestran los valores de los elementos que integran el circuito de la Figura 4.4. Los elementos que cambian entre el orden 0.9 y 0.95 son: R_{g1} , R_{h2} , R_x y R_c .

Tabla 4.1: Tabla de valores para el estado X, Y y Z para $\alpha = 0.9$.

Elemento	R_g	R_{g1}	R_{g2}	R_{h1}	R_{h2}	R_x	C_x	R_l	R_c	R_p
Valor	100 Ω	536 Ω	100 Ω	100 Ω	536K Ω	5K Ω	1 μF	2K Ω	6K Ω	10K Ω
Elemento	R_q	R_{ia}	R_{fa}	R_{ib}	R_{fb}	R_{ic}	R_{fc}	R_{id}	R_{fd}	R
Valor	10K Ω	10K Ω	20K Ω	10K Ω	10K Ω	10K Ω	6K Ω	10K Ω	20K Ω	10K Ω

Tabla 4.2: Tabla de valores para el estado X, Y y Z para $\alpha = 0.95$.

Elemento	R_g	R_{g1}	R_{g2}	R_{h1}	R_{h2}	R_x	C_x	R_l	R_c	R_p
Valor	100 Ω	658 Ω	100 Ω	100 Ω	658 Ω	22K Ω	1 μF	2K Ω	7K Ω	10K Ω
Elemento	R_q	R_{ia}	R_{fa}	R_{ib}	R_{fb}	R_{ic}	R_{fc}	R_{id}	R_{fd}	R
Valor	10K Ω	10K Ω	20K Ω	10K Ω	10K Ω	10K Ω	6K Ω	10K Ω	20K Ω	10K Ω

La Tabla 4.3 muestra los valores de los elementos para el PWL. Los voltajes V_{CC} y V_{EE} son los voltajes que alimentan los amplificadores operacionales (TL081) de todo el circuito, mientras que los voltajes V_+ y V_- son las fuentes para la función $f(x)$ para un voltaje de $V_{sat} = 13.5V$.

Tabla 4.3: Tabla de valores para el PWL.

Elemento	R_i	R_f	R_c	V_+	V_-	V_{CC}	V_{EE}	V_{sat}
Valor	1K Ω	1M Ω	150K Ω	1.9V	-1.9V	14.51V	-14.29V	$\pm 13.5V$

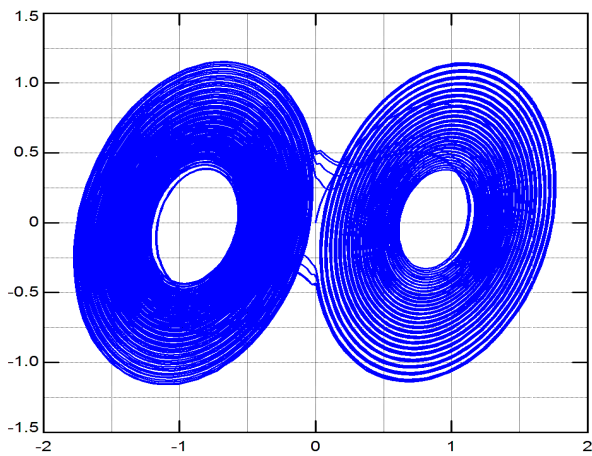
En la Figura 4.5 se muestra el montaje del Oscilador Caótico de Lü de orden fraccionario (en el caso de la Figura 4.5 $\alpha = 0.9$), el cual se ha implementado sobre una placa PCB. Las especificaciones y el diseño de la placa PCB se especifican en el Apéndice C.



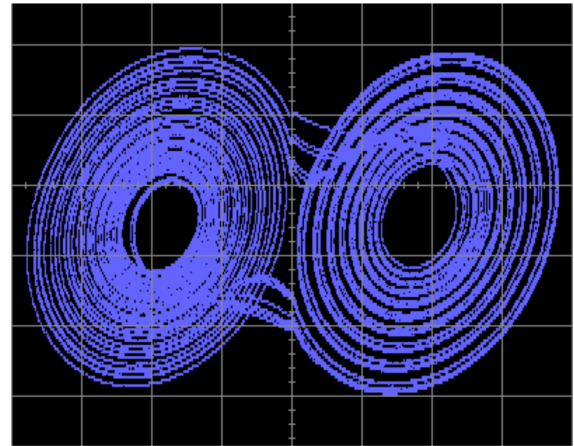
Figura 4.5: Montaje físico del oscilador caótico de Lü de orden fraccionario.

4.1. Simulación en SPICE y resultados experimentales

Se comparan los resultados experimentales con los resultados de simulación del sistema caótico de Lü fraccionario de orden 0.9 y 0.95.

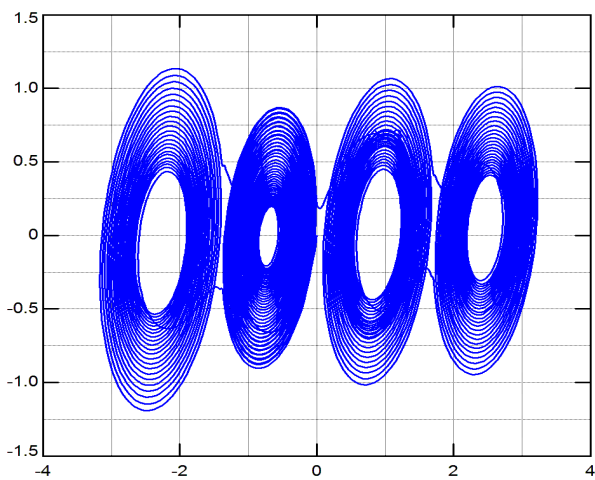


(a) Simulación

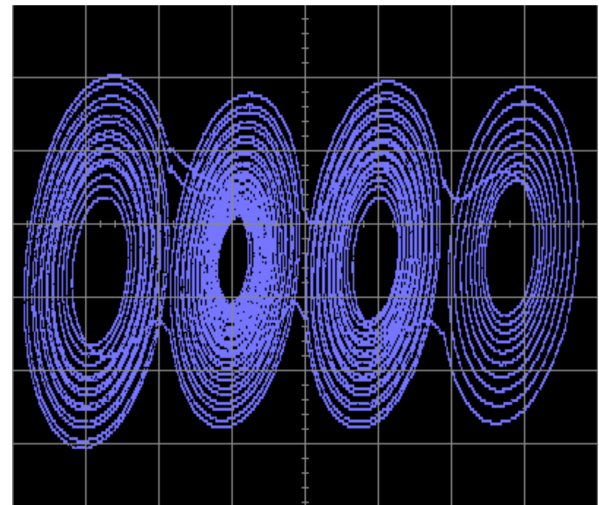


(b) Experimentales

Figura 4.6: Sistema Caótico de Lü con 2 atractores $\alpha = 0.90$

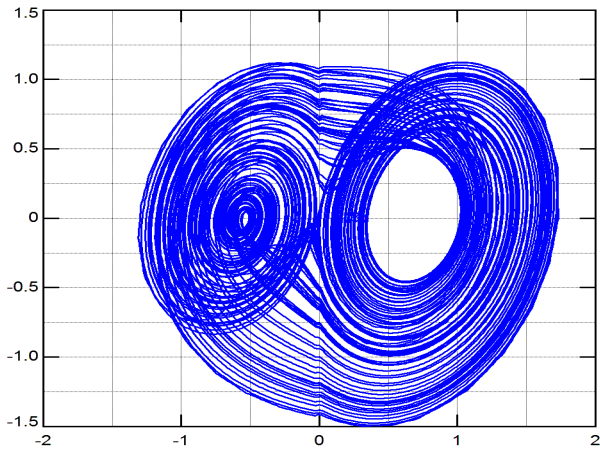


(a) Simulación

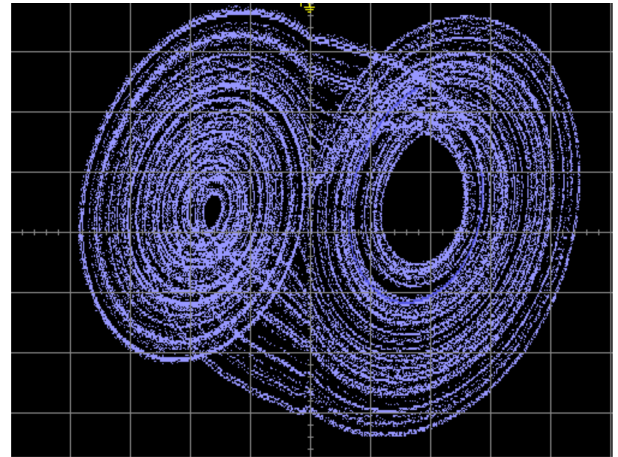


(b) Experimentales

Figura 4.7: Sistema Caótico de Lü con 4 atractores $\alpha = 0.90$.

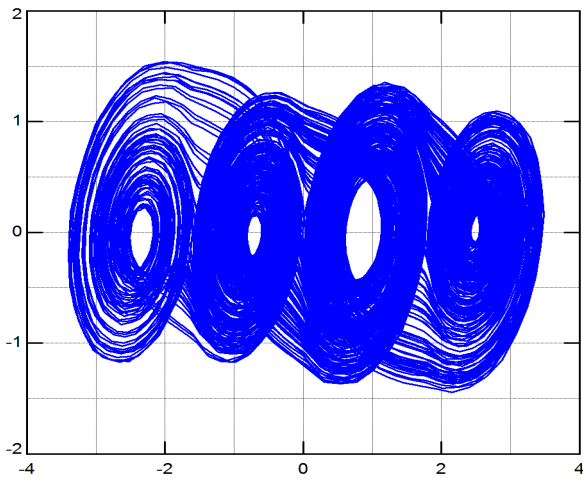


(a) Simulación

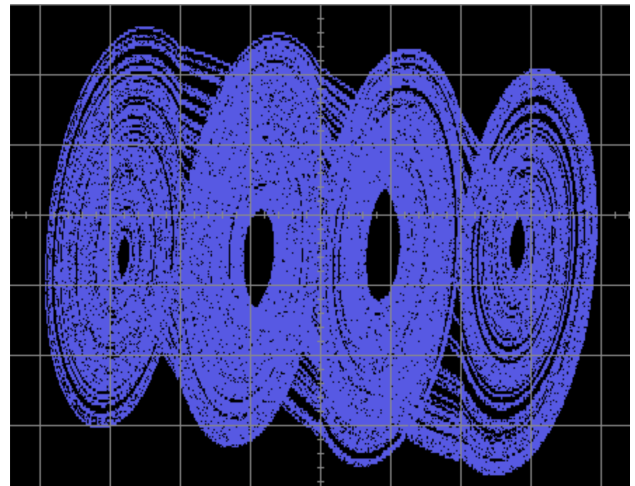


(b) Experimental

Figura 4.8: Sistema Caótico de Lü con 2 atractores $\alpha = 0.95$.



(a) Simulación



(b) Experimental

Figura 4.9: Sistema Caótico de Lü con 4 atractores $\alpha = 0.95$.

5 | Conclusión

El integrador de orden fraccionario activo propuesto presenta un error en su pendiente de hasta 4dB con la ecuación de diseño (3.5). Con ayuda del ajuste empírico sobre el parámetro de diseño **A**, el integrador de orden fraccionario activo mejora en su respuesta en frecuencia, entregando errores de simulación y experimentales de hasta 0.6dB en su pendiente en el peor de los casos y manteniendo su fase en la frecuencia de corte correspondiente.

Para asegurar que el integrador de orden fraccionario activo con ajuste funciona en la mayoría de los casos experimentales, se realiza un análisis de Monte Carlo con 100 casos para obtener una medida porcentual de los resultados. Tomando las tolerancias comerciales de resistencia y la tolerancia del peor de los casos en el capacitor se obtienen efectos favorables. Donde la máxima probabilidad de implementar el integrador fraccionario activo con ajuste tiene un error en promedio de 0.2dB, haciendo más precisa la pendiente del integrador fraccionario activo.

Para identificar los elementos del integrador fraccionario activo que puedan afectar directamente al implementar el integrador fraccionario, se realizó un análisis de sensibilidad. El análisis presenta resultados con sensibilidades mínimas en todos los elementos, demostrando que el integrador fraccionario activo con y sin ajuste es robusto a las sensibilidades de los elementos que lo conforman.

Dado que el integrador de orden fraccionario activo con ajuste tiene un mejor comportamiento en el dominio de la frecuencia, es el que se implementa sobre el sistema caótico fraccionario de Lü. Solo con modificar la ganancia y la frecuencia de cruce por cero del integrador fraccionario activo, el sistema caótico de Lü presenta caos, mostrando comportamientos (atractores) diferentes en el plano de fase para órdenes de 0.9 y 0.95. Ofreciendo la posibilidad de utilizar estos integradores fraccionarios activos en proyectos futuros, por su fácil implementación, mayor precisión y corta función de transferencia, siendo una mejor opción que su contraparte pasiva, llegando a emplearse en aplicaciones como controladores de orden fraccionario con mayor precisión y osciladores caóticos fraccionarios más complejos.

5.1. Trabajo futuro

Considerar los efectos de segundo orden de los Amplificadores Operacionales. Efectos como las capacitancias e impedancias, además de la sensibilidad de los elementos que forman parte del OPAMP y observar su relación con el voltaje de salida en relación con la variación de sus parámetros. Obtener una idea específica sobre las condiciones en las que el Oscilador Caótico de Lü de Orden Fraccionario funciona, incluyendo los parámetros de los integradores de orden fraccionario y físicos.

Implementar otros osciladores caóticos usando la metodología propuesta en esta tesis.

A | Simulaciones en SPICE

A.1. Integrador fraccionario de orden 0.1

2dB Decada (20dBx0.1)

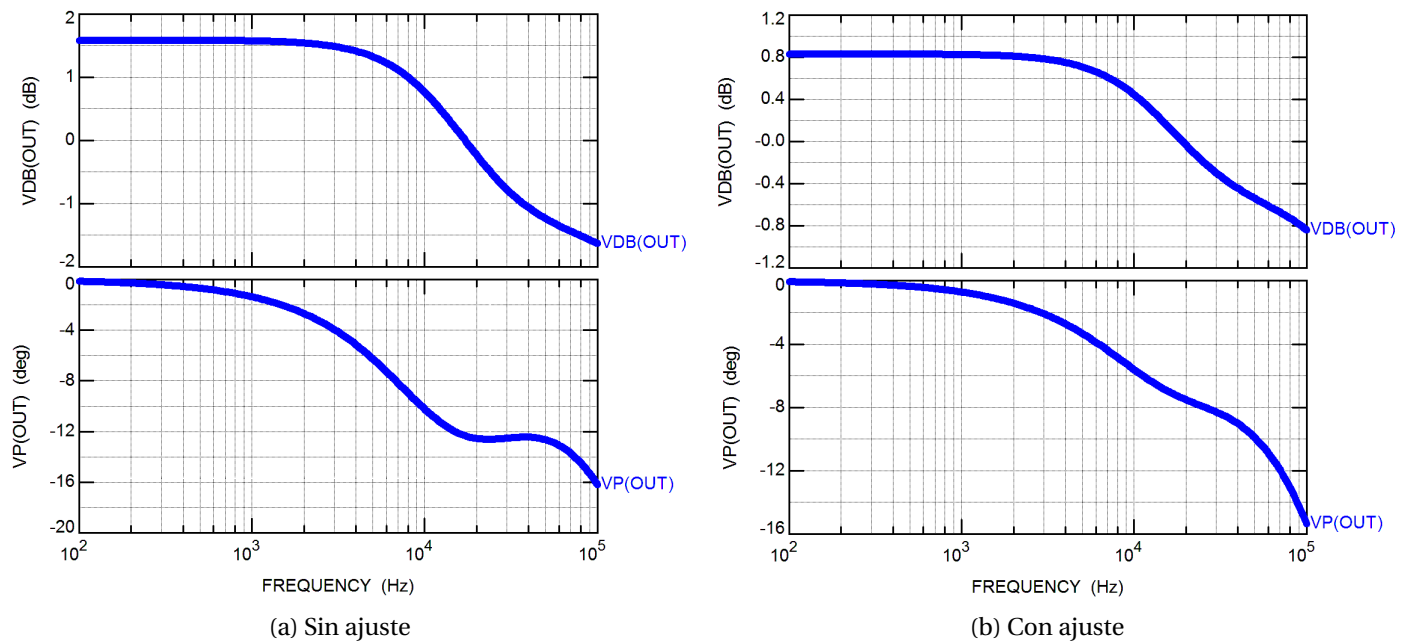


Figura A.1: Integrador fraccionario de orden 0.1 con $C_x = 1nF$

A.2. Integrador fraccionario de orden 0.2

4dB Decada (20dBx0.2)

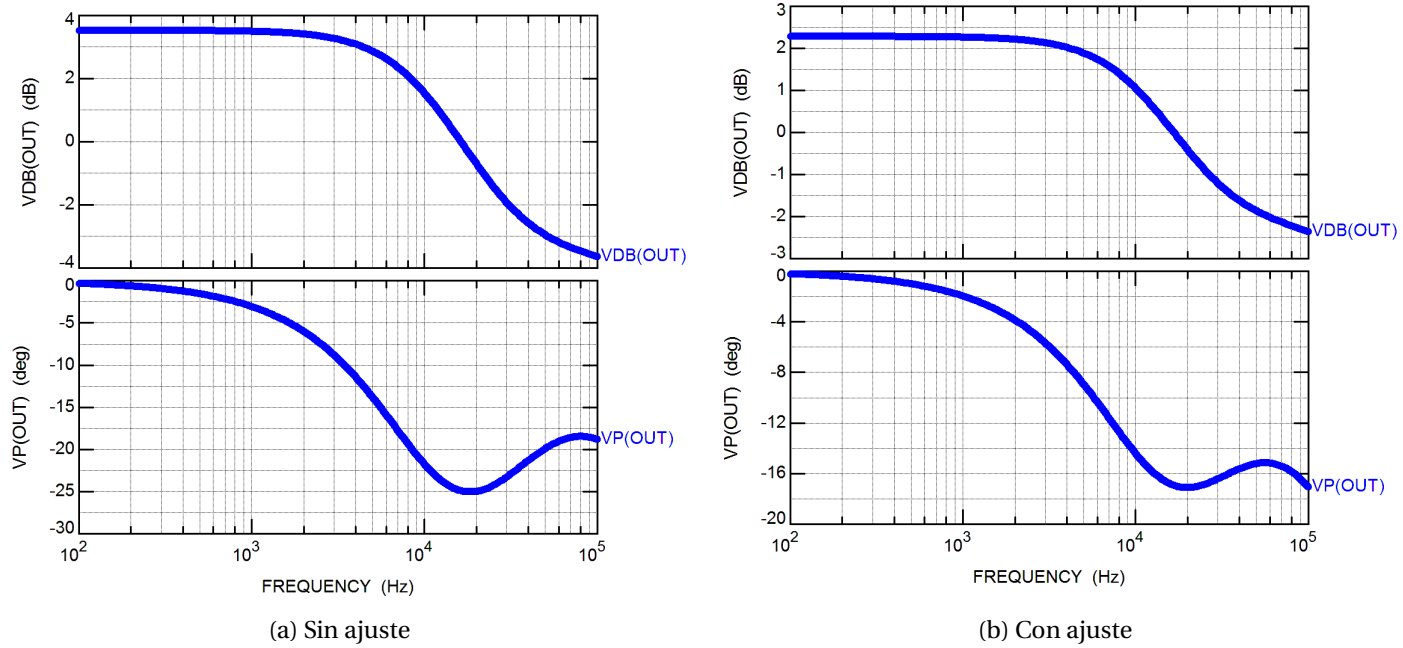


Figura A.2: Integrador fraccionario de orden 0.2 con $C_x = 1nF$

A.3. Integrador fraccionario de orden 0.3

6dB Decada (20dBx0.3)

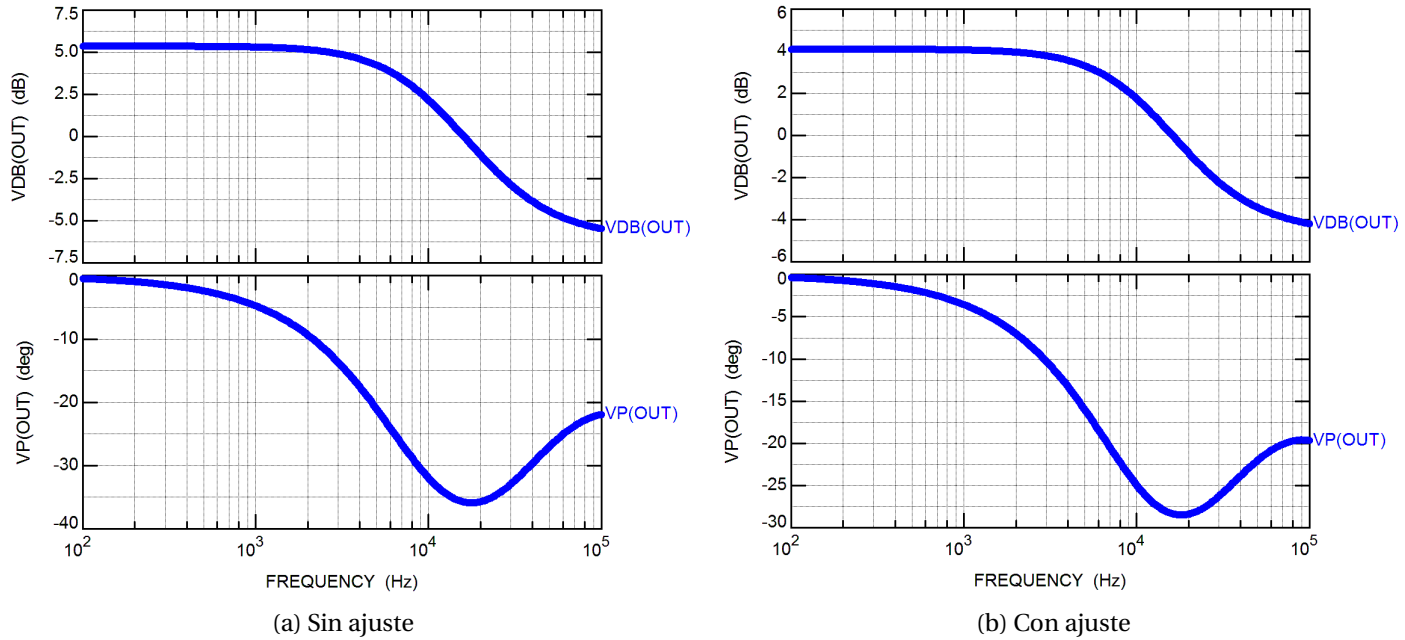


Figura A.3: Integrador fraccionario de orden 0.3 con $C_x = 1nF$

A.4. Integrador fraccionario de orden 0.4

8dB Decada (20dBx0.4)

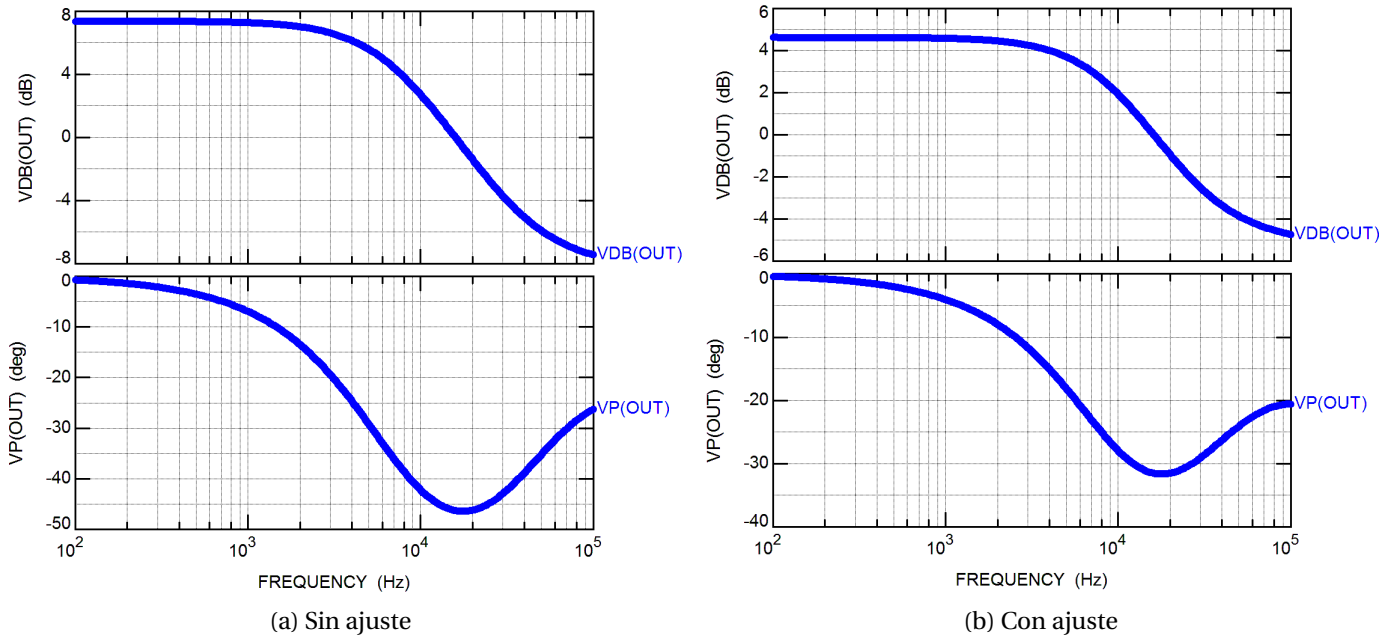


Figura A.4: Integrador fraccionario de orden 0.4 con $C_x = 1 nF$

A.5. Integrador fraccionario de orden 0.5

10dB Decada (20dBx0.5)

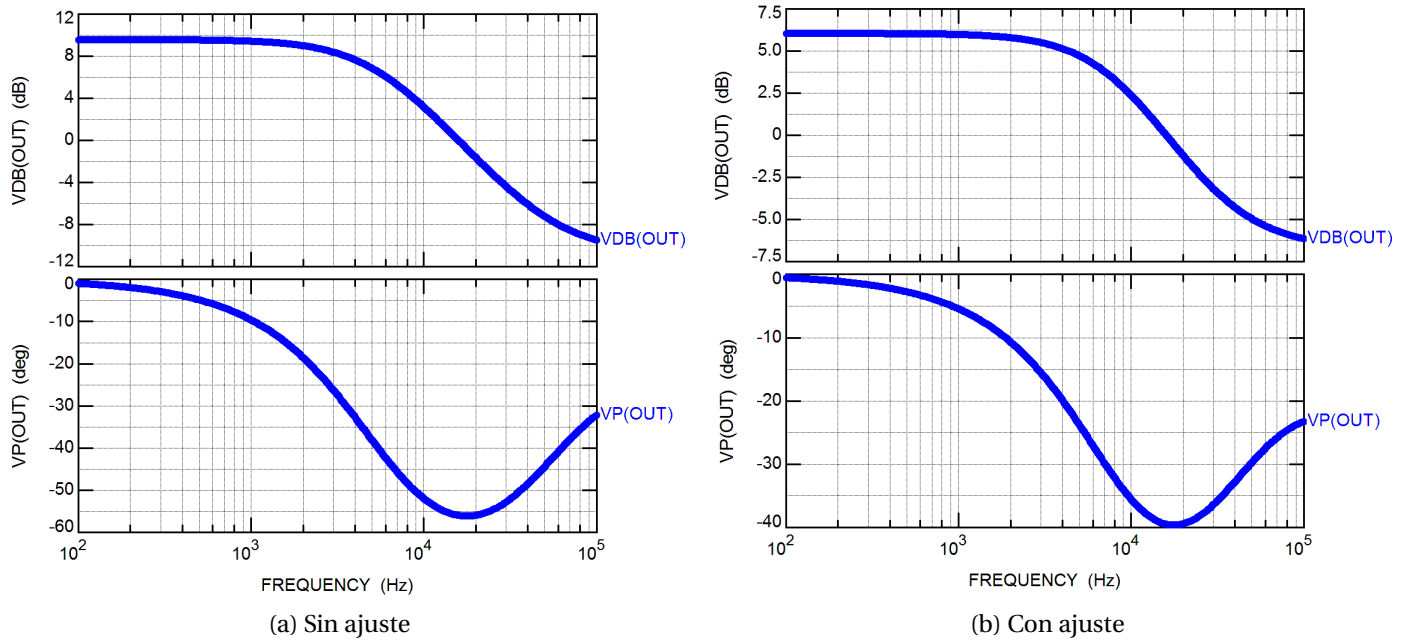


Figura A.5: Integrador fraccionario de orden 0.5 con $C_x = 1 nF$

A.6. Integrador fraccionario de orden 0.6

12dB Decada (20dBx0.6)

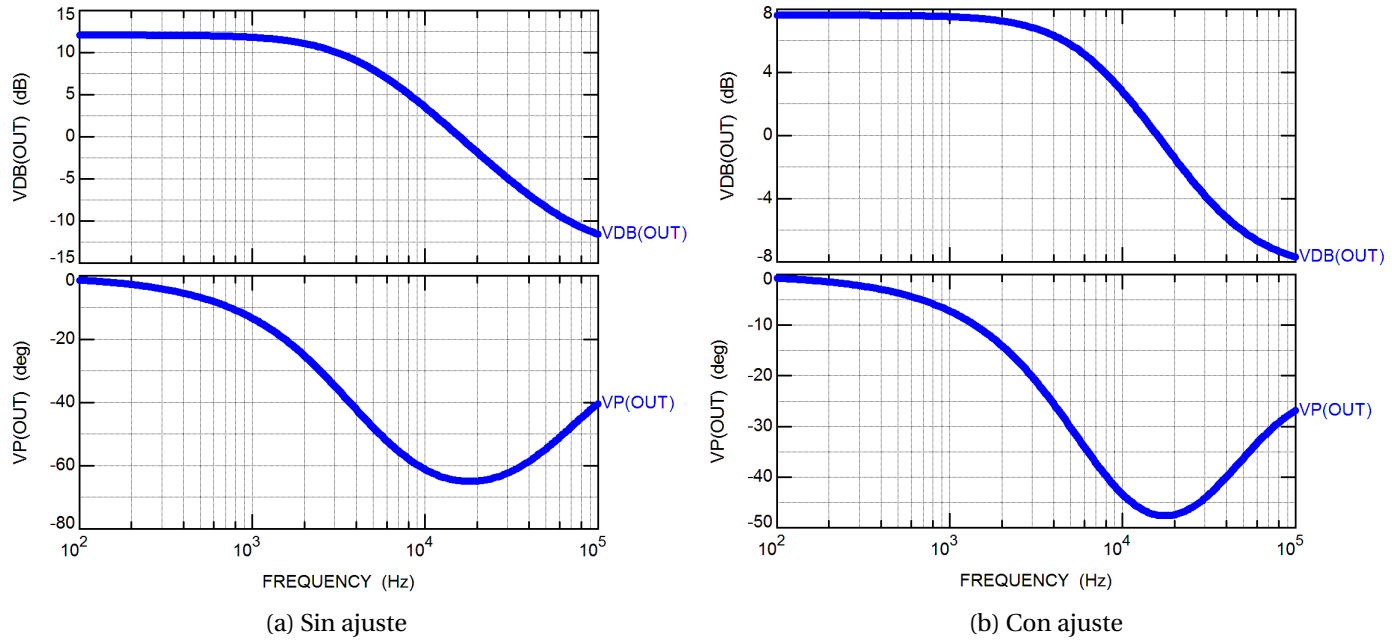


Figura A.6: Integrador fraccionario de orden 0.6 con $C_x = 1nF$

A.7. Integrador fraccionario de orden 0.7

14dB Decada (20dBx0.7)

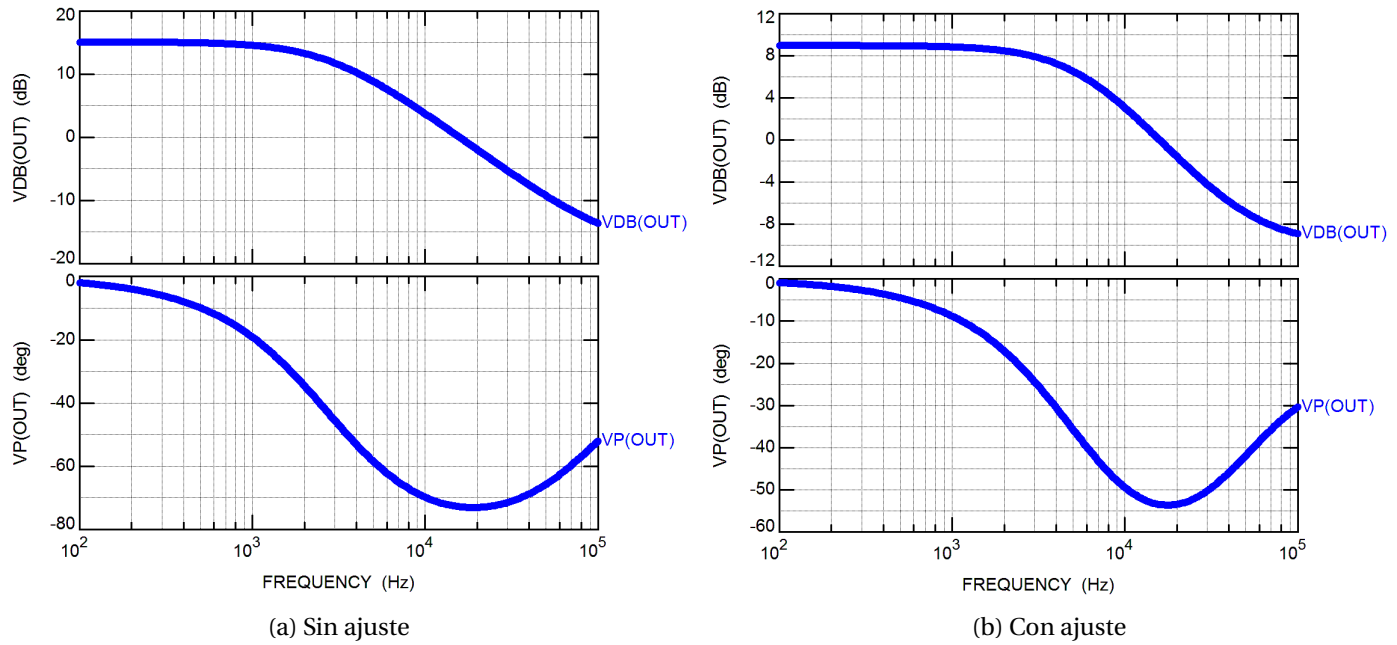


Figura A.7: Integrador fraccionario de orden 0.7 con $C_x = 1nF$

A.8. Integrador fraccionario de orden 0.8

16dB Decada (20dBx0.8)

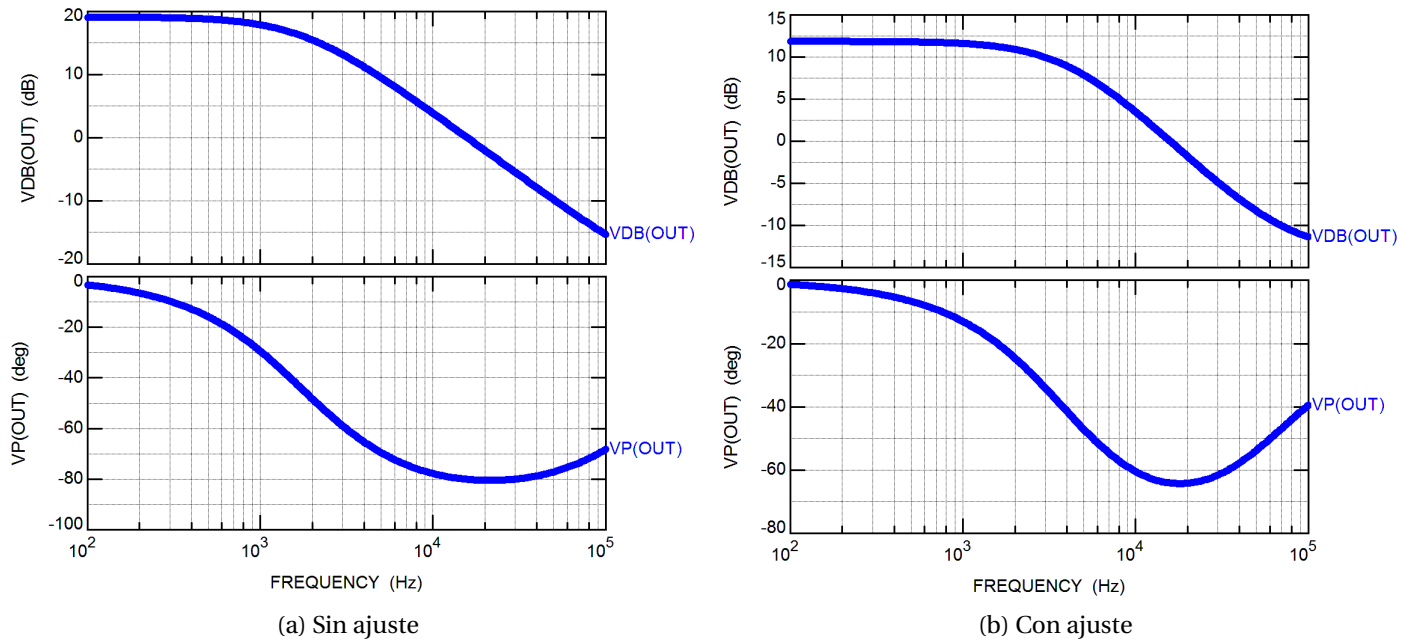


Figura A.8: Integrador fraccionario de orden 0.8 con $C_x = 1nF$

A.9. Integrador fraccionario de orden 0.85

17dB Decada (20dBx0.85)

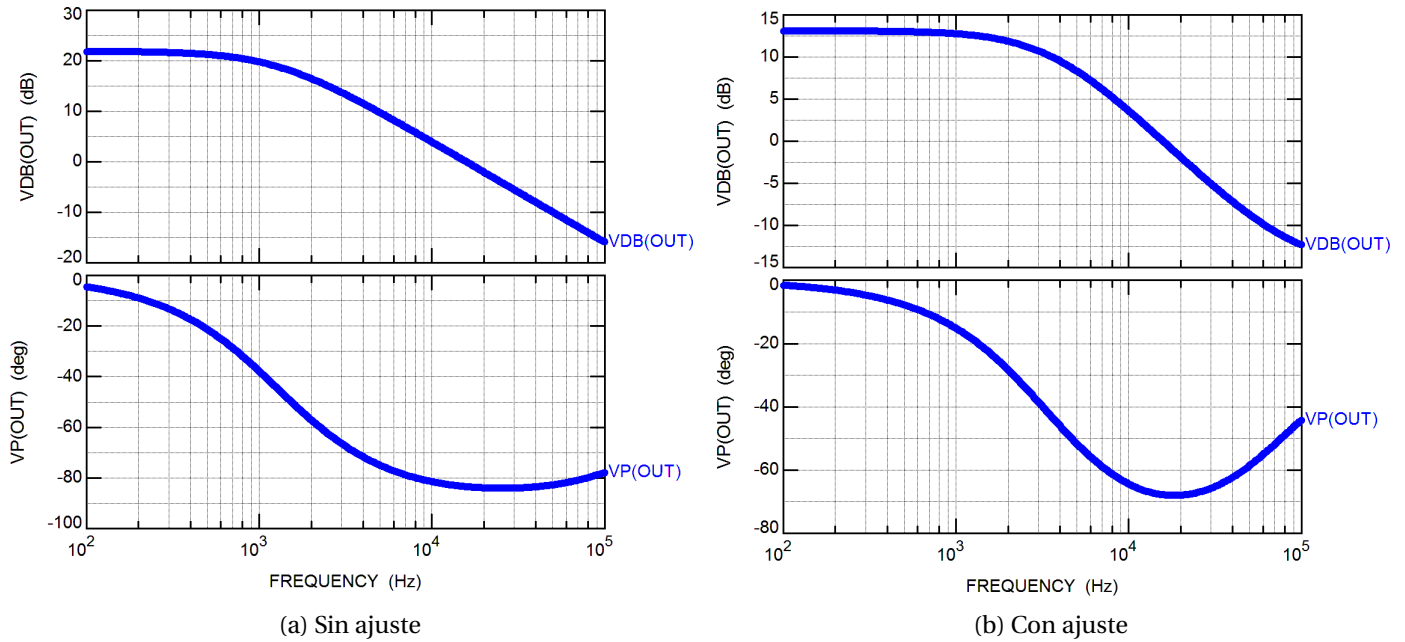


Figura A.9: Integrador fraccionario de orden 0.85 con $C_x = 1nF$

A.10. Integrador fraccionario de orden 0.9

18dB Decada (20dBx0.9)

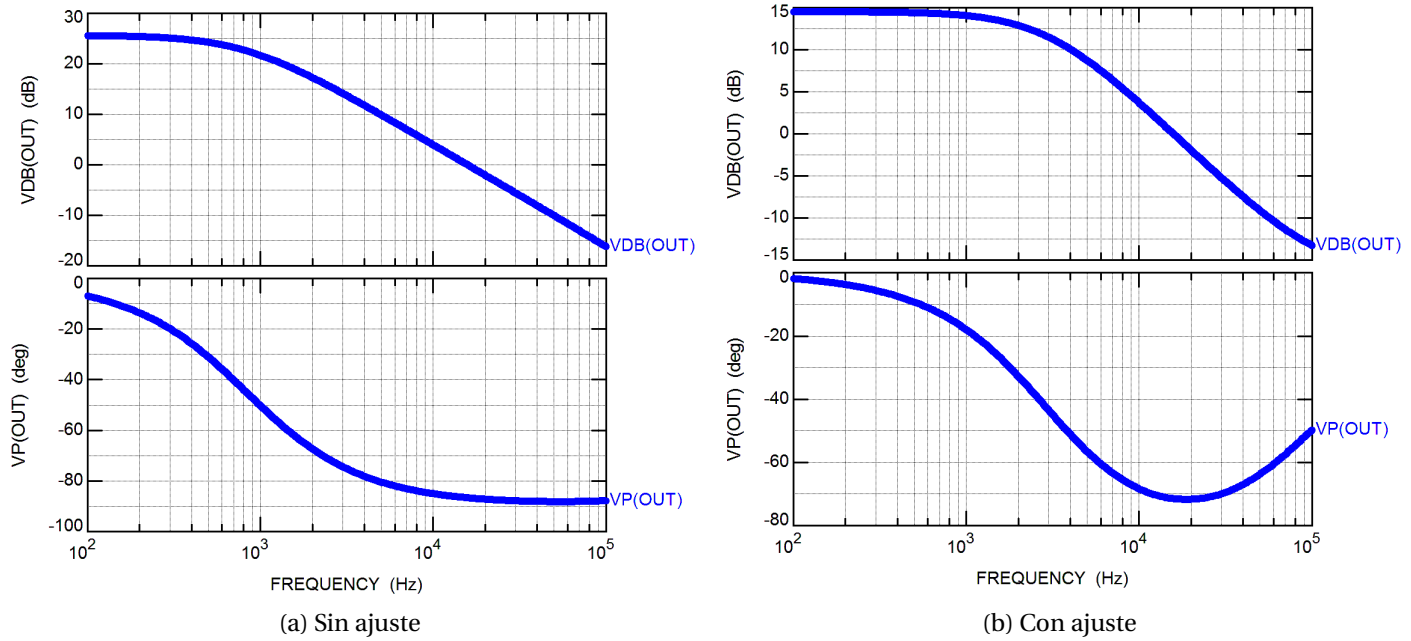


Figura A.10: Integrador fraccionario de orden 0.9 con $C_x = 1nF$

A.11. Integrador fraccionario de orden 0.95

19dB Decada (20dBx0.95)

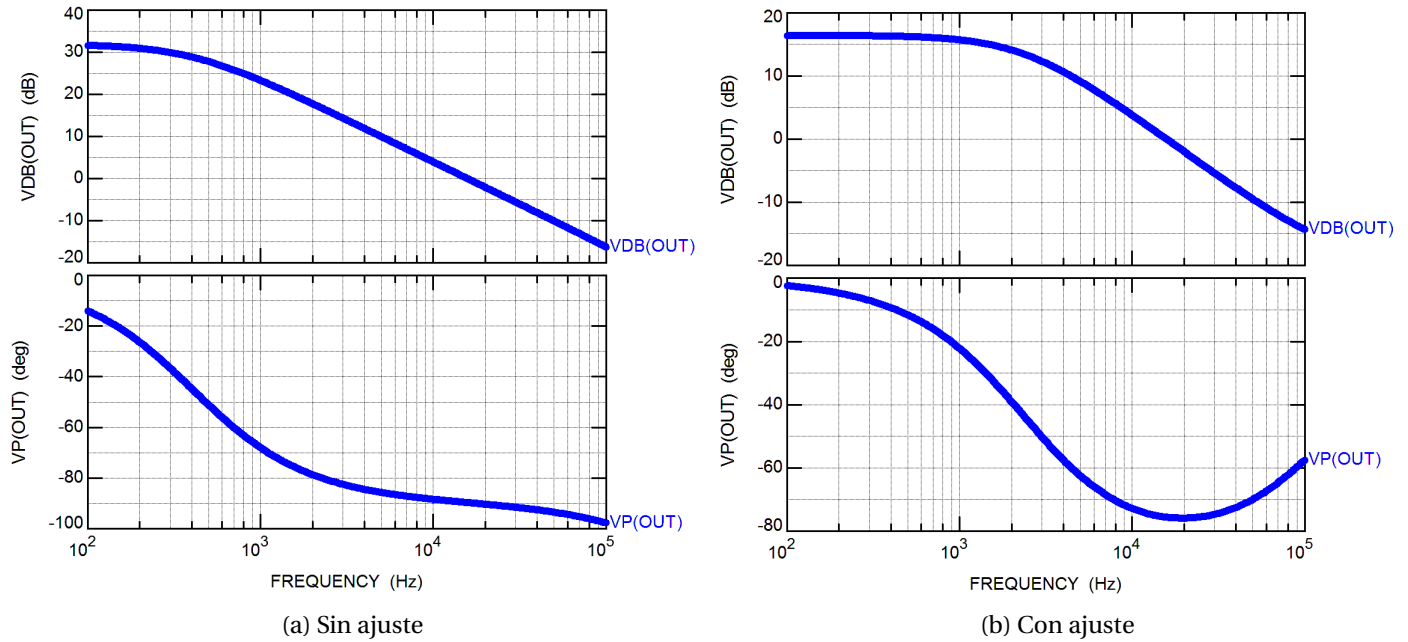


Figura A.11: Integrador fraccionario de orden 0.95 con $C_x = 1\text{ nF}$

B | Resultados Experimentales

En la implementación se utilizó un instrumento de laboratorio educativo llamado NI ELVIS (EDUCATIONAL LABORATORY VIRTUAL INSTRUMENTATION SUITE) desarrollado específicamente para la academia. NI ELVIS incluye un osciloscopio, multímetro digital, generador de funciones, fuentes de alimentación variable y lo más importante un analizador de Bode que nos permitirá obtener de manera rápida la respuesta en frecuencia de un integrador o derivador. La Figura B.1 muestra un diagrama del montaje experimental.

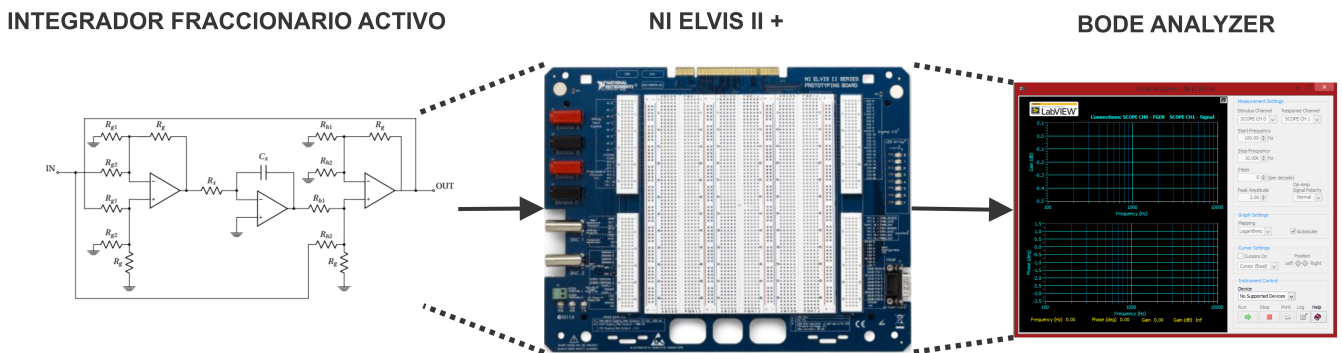
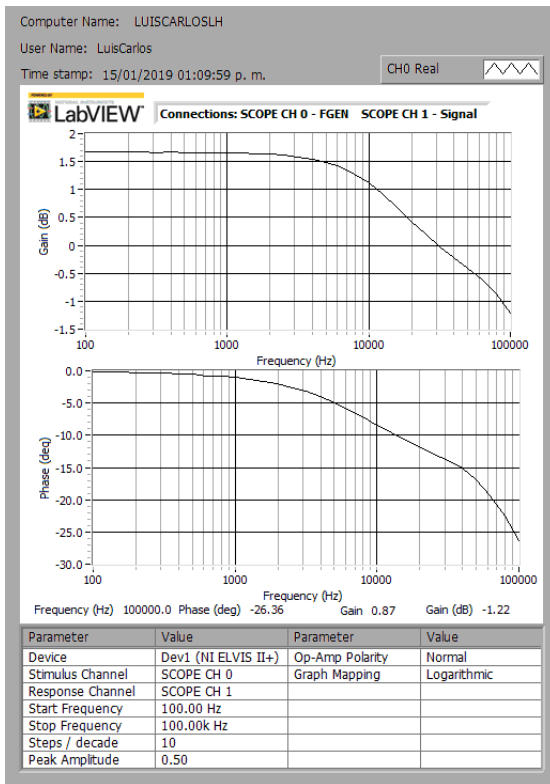


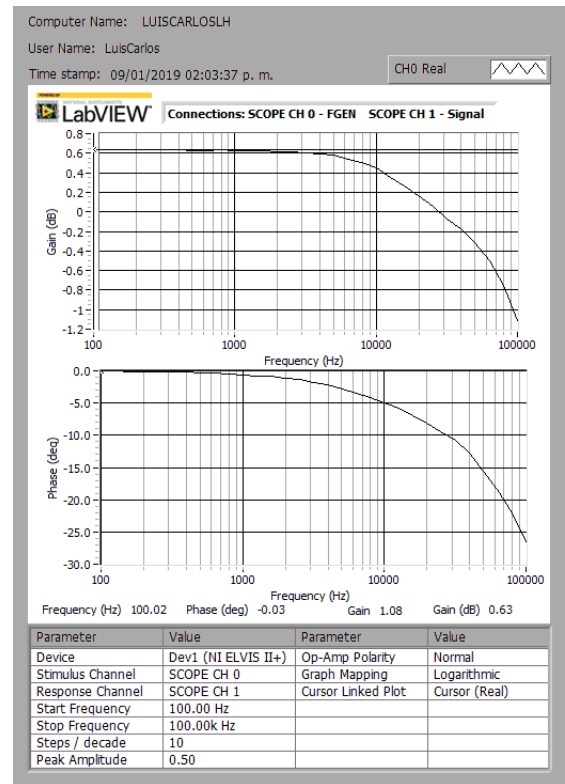
Figura B.1: Diagrama del montaje experimental.

B.1. Integrador fraccionario de orden 0.1

2dB Decada (20dBx0.1)



(a) Sin ajuste

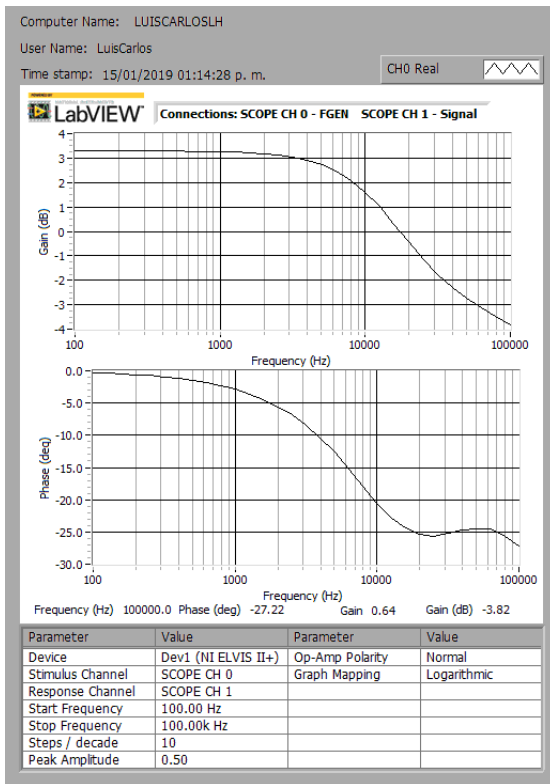


(b) Con ajuste

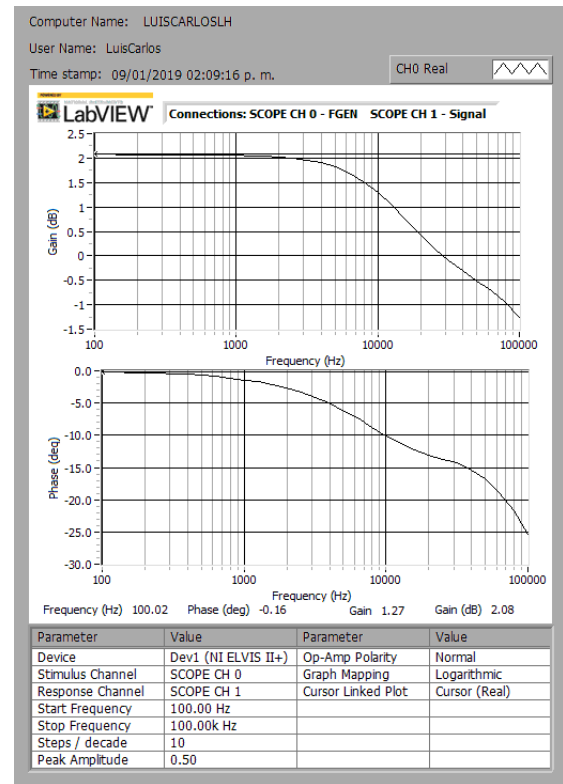
Figura B.2: Integrador fraccionario de orden 0.1 con $C_x = 1nF$

B.2. Integrador fraccionario de orden 0.2

4dB Decada (20dBx0.2)



(a) Sin ajuste

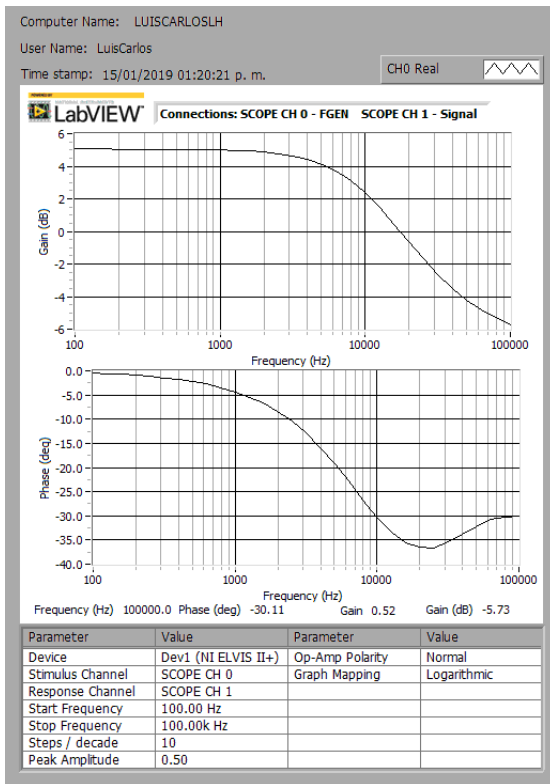


(b) Con ajuste

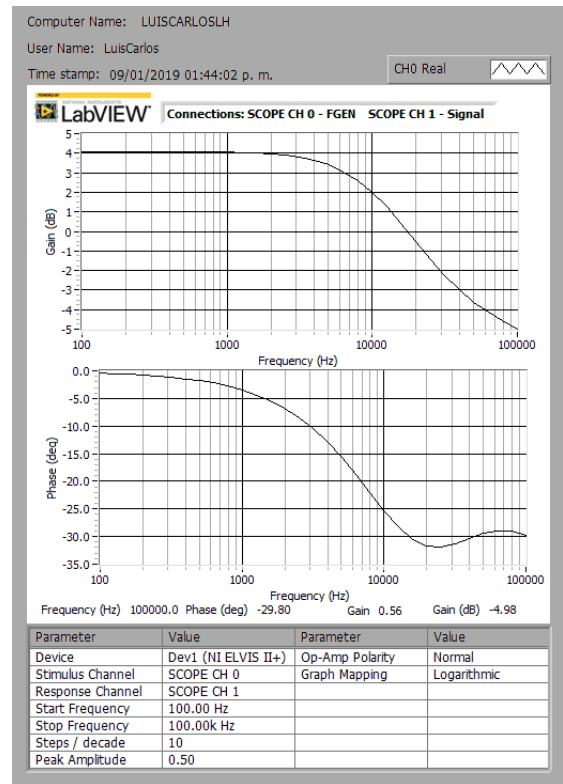
Figura B.3: Integrador fraccionario de orden 0.2 con $C_x = 1nF$

B.3. Integrador fraccionario de orden 0.3

6dB Decada (20dBx0.3)



(a) Sin ajuste

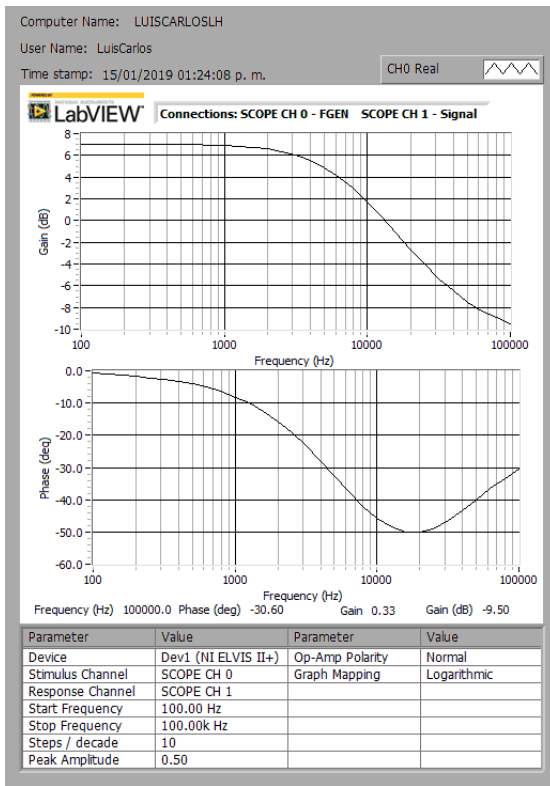


(b) Con ajuste

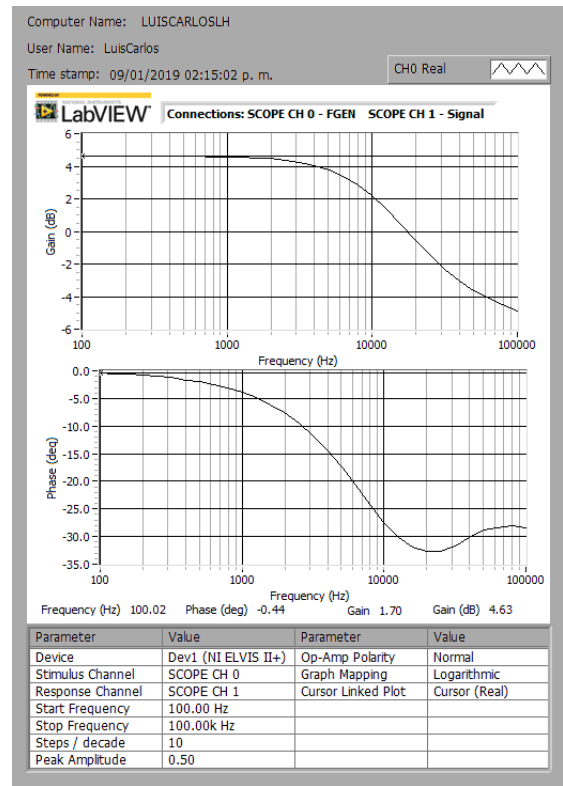
Figura B.4: Integrador fraccionario de orden 0.3 con $C_x = 1nF$

B.4. Integrador fraccionario de orden 0.4

8dB Decada (20dBx0.4)



(a) Sin ajuste

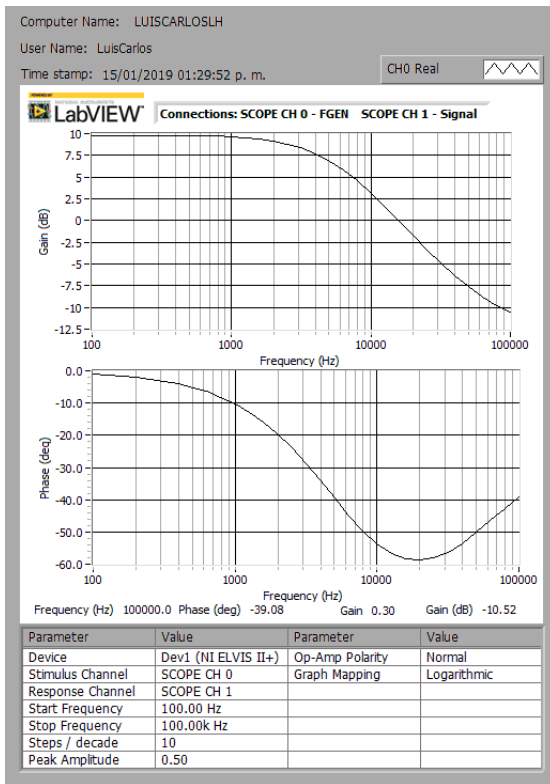


(b) Con ajuste

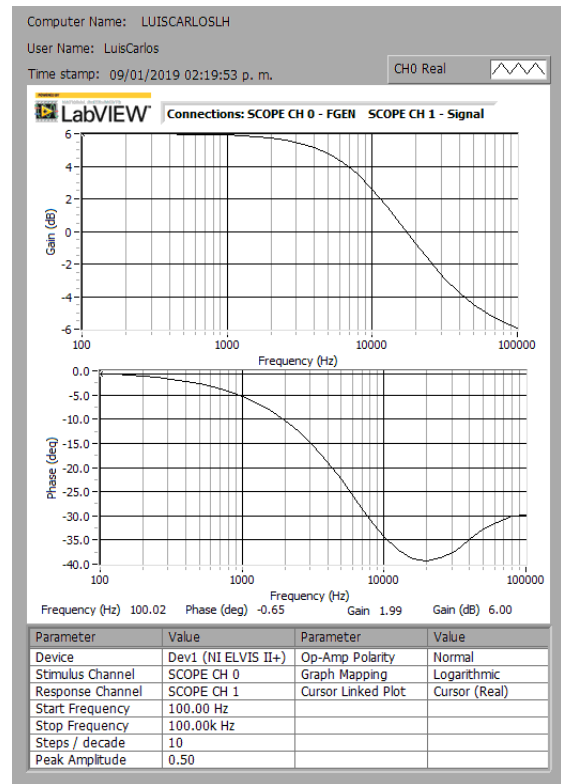
Figura B.5: Integrador fraccionario de orden 0.4 con $C_x = 1nF$

B.5. Integrador fraccionario de orden 0.5

10dB Decada (20dBx0.5)



(a) Sin ajuste

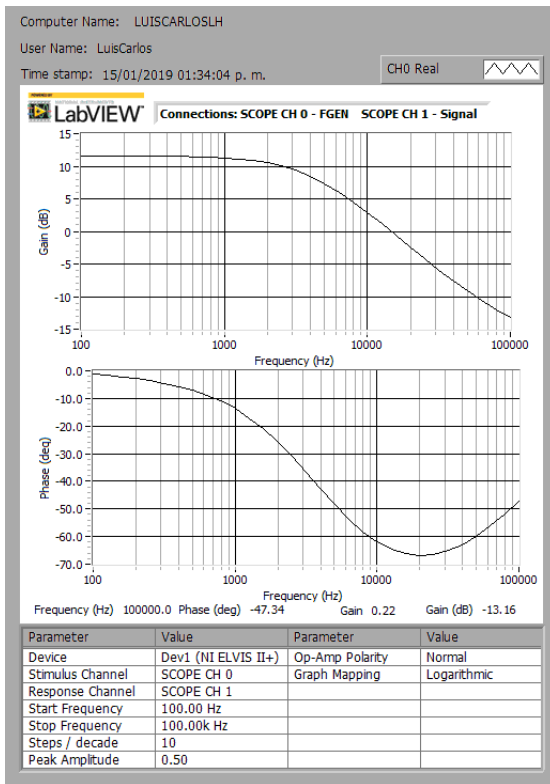


(b) Con ajuste

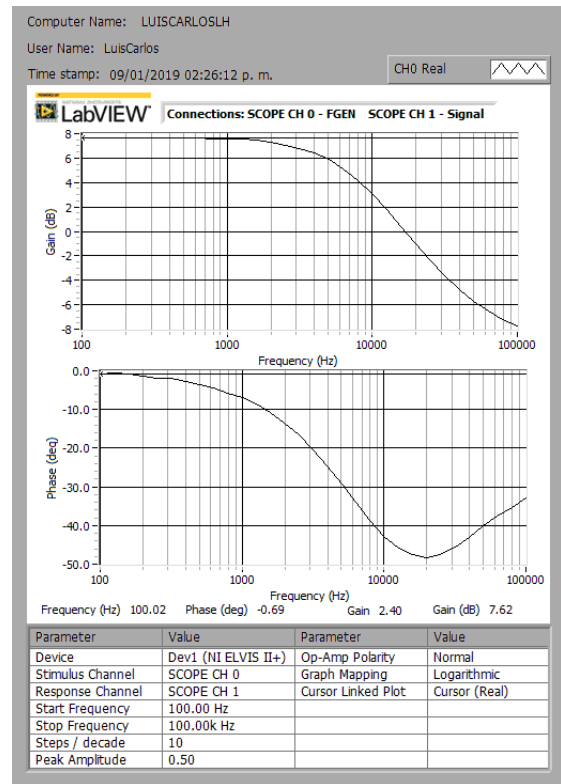
Figura B.6: Integrador fraccionario de orden 0.5 con $C_x = 1nF$

B.6. Integrador fraccionario de orden 0.6

12dB Decada (20dBx0.6)



(a) Sin ajuste

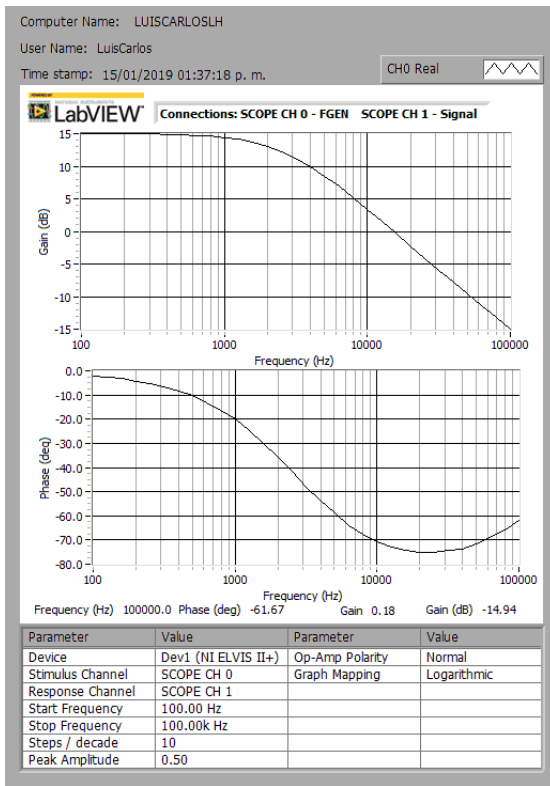


(b) Con ajuste

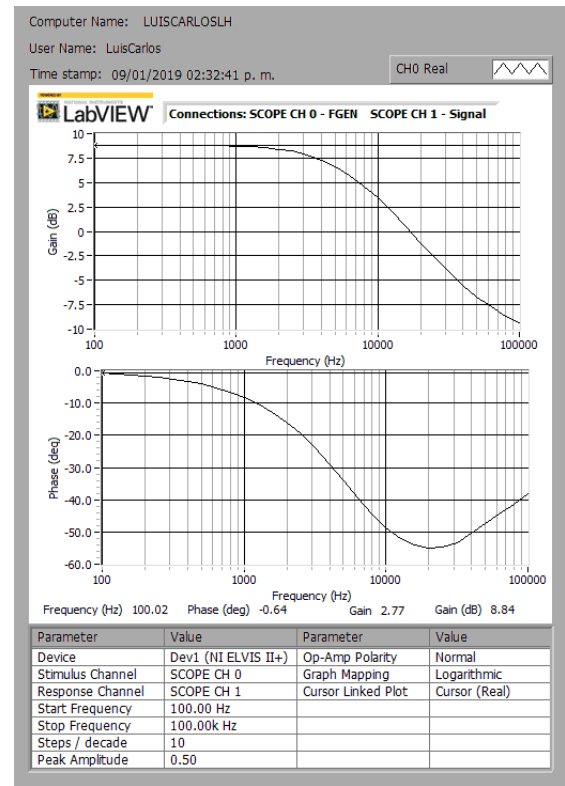
Figura B.7: Integrador fraccionario de orden 0.6 con $C_x = 1nF$

B.7. Integrador fraccionario de orden 0.7

14dB Decada (20dBx0.7)



(a) Sin ajuste

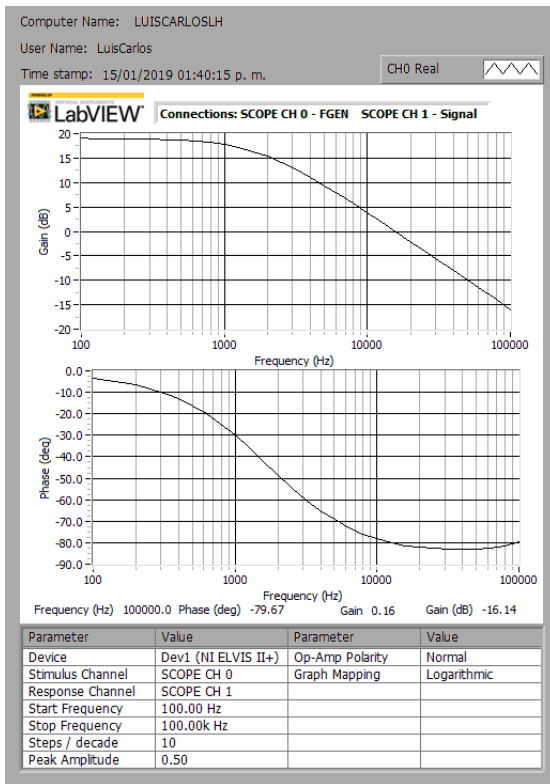


(b) Con ajuste

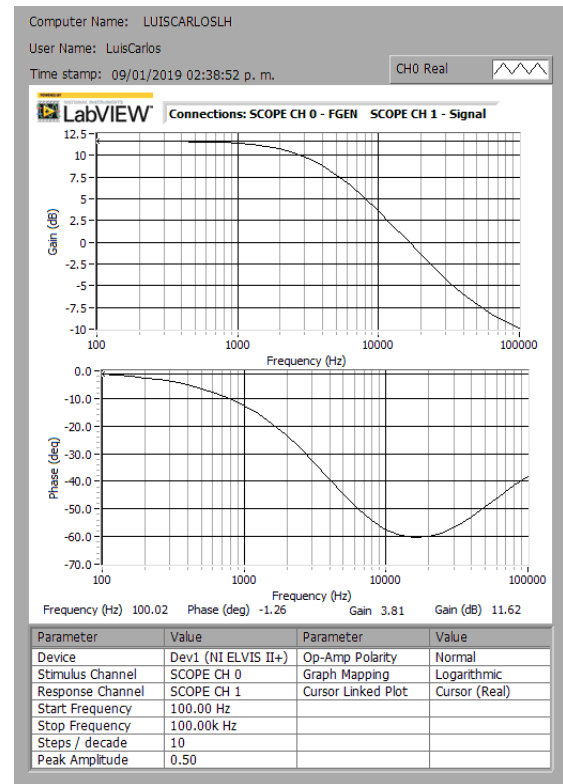
Figura B.8: Integrador fraccionario de orden 0.7 con $C_x = 1nF$

B.8. Integrador fraccionario de orden 0.8

16dB Decada (20dBx0.8)



(a) Sin ajuste

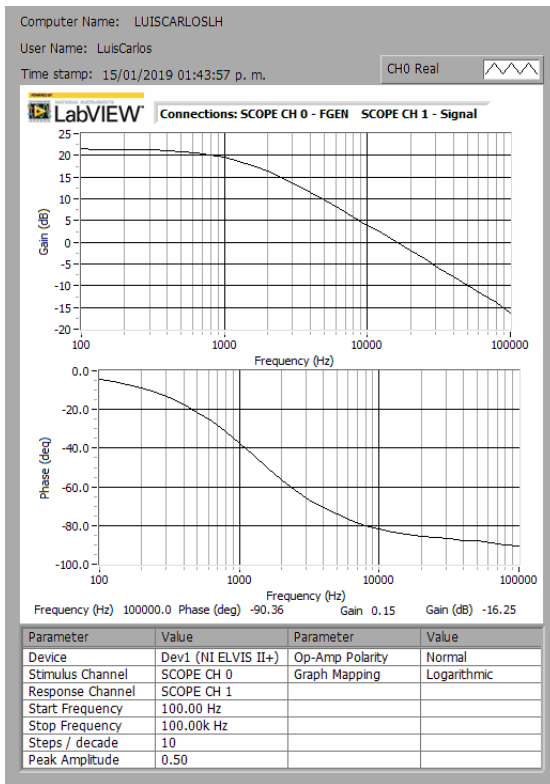


(b) Con ajuste

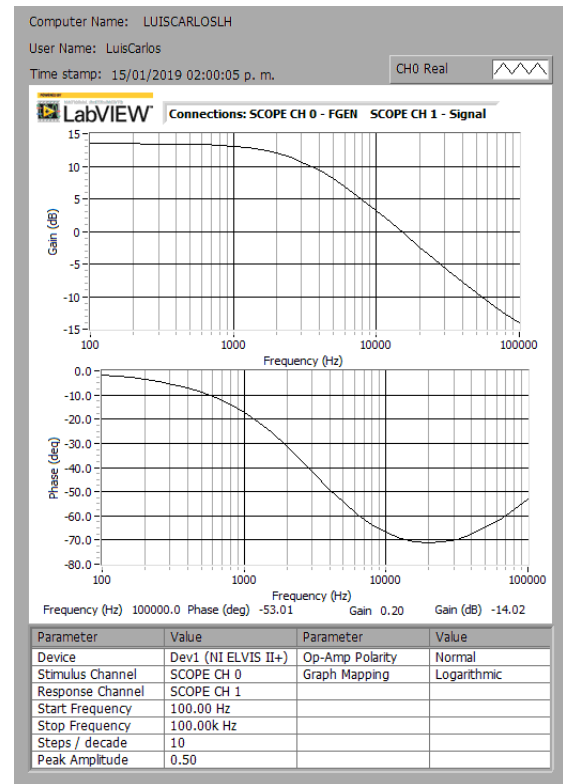
Figura B.9: Integrador fraccionario de orden 0.8 con $C_x = 1nF$

B.9. Integrador fraccionario de orden 0.85

17dB Decada (20dBx0.85)



(a) Sin ajuste

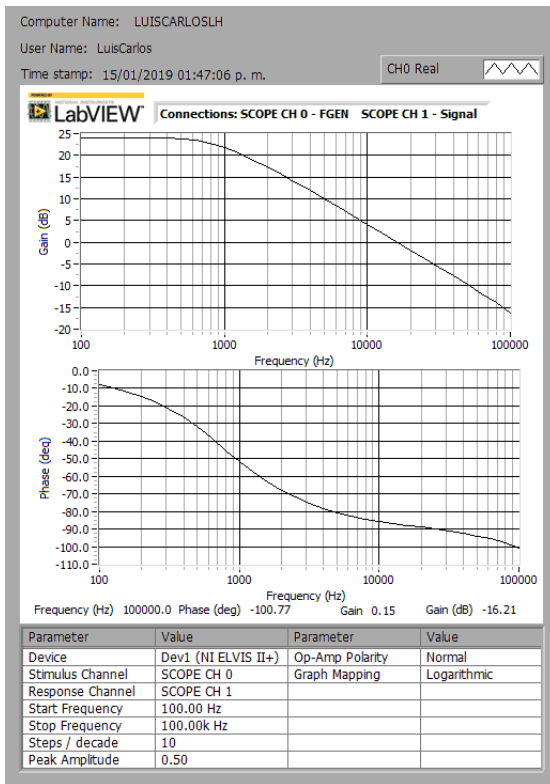


(b) Con ajuste

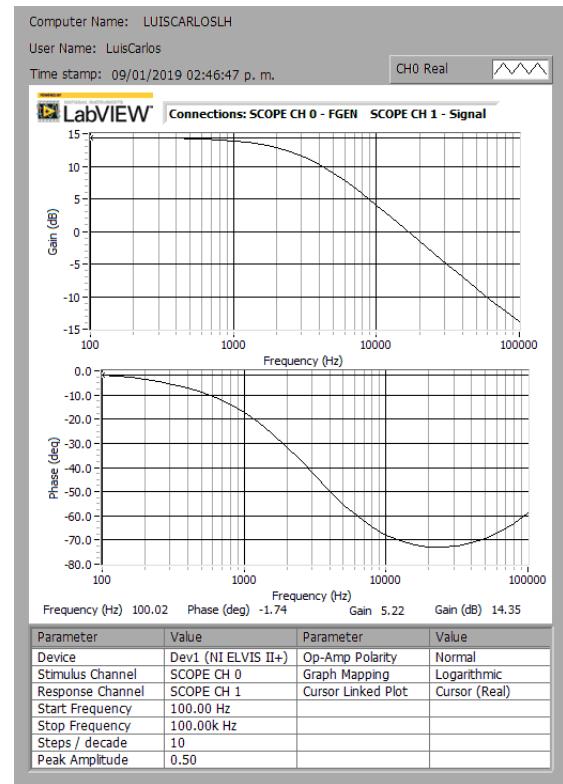
Figura B.10: Integrador fraccionario de orden 0.85 con $C_x = 1nF$

B.10. Integrador fraccionario de orden 0.9

18dB Decada (20dBx0.9)



(a) Sin ajuste

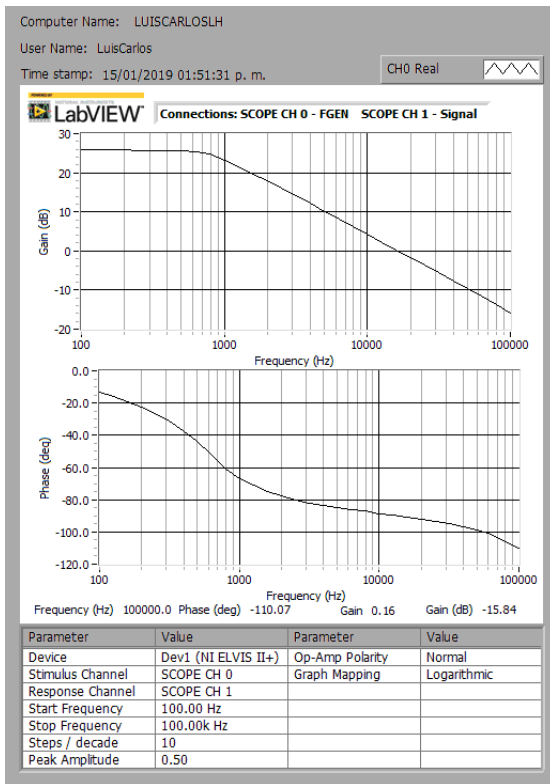


(b) Con ajuste

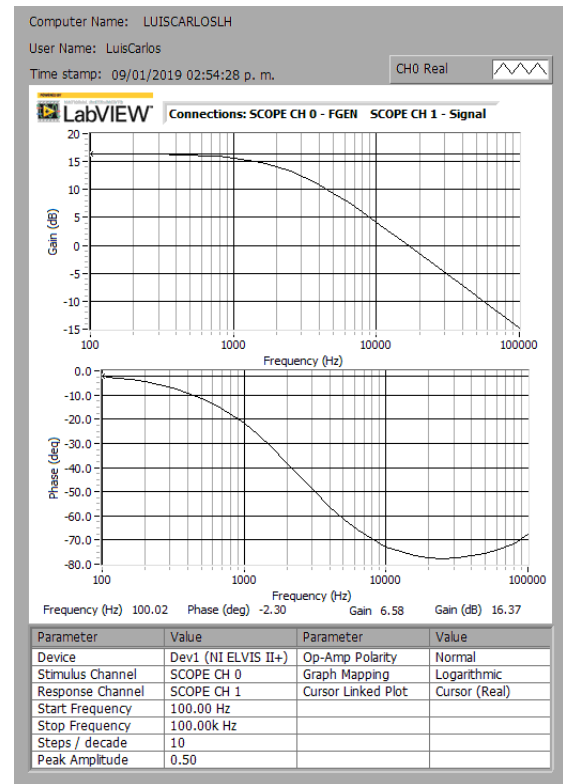
Figura B.11: Integrador fraccionario de orden 0.9 con $C_x = 1nF$

B.11. Integrador fraccionario de orden 0.95

19dB Decada (20dBx0.95)



(a) Sin ajuste



(b) Con ajuste

Figura B.12: Integrador fraccionario de orden 0.95 con $C_x = 1nF$

C | Diagrama y PCB en ALTIUM DESIGNER

La reglas de diseño para la placa PCB del oscilador caótico fraccionario de Lü son las siguientes:

- Tarjeta con **2 capas**.
- **Material:** FR4-TG con reblandecimiento del material de 130°C a 140°C .
- **Espesor:** 1.6mm.
- **Ancho y separación de pistas:** 0.153mm.
- **Diámetro de perforación:** Los agujeros no pueden tener un diámetro mayor a 0.3mm.
- **Acabado de la superficie:** Revestimiento de PADS es con estaño y plomo. (HASL with lead).
- **Acabado de las vías:** Recubrimiento con mascarilla anti-soldante.
- **Acabado de cobre:** 1 onza por pie cuadrado.
- **Tipo de borde:** Rectangular.
- **Dimensiones:** 150mm x 100mm.

C.1. Oscilador caótico de Lü con 2 enrollamientos

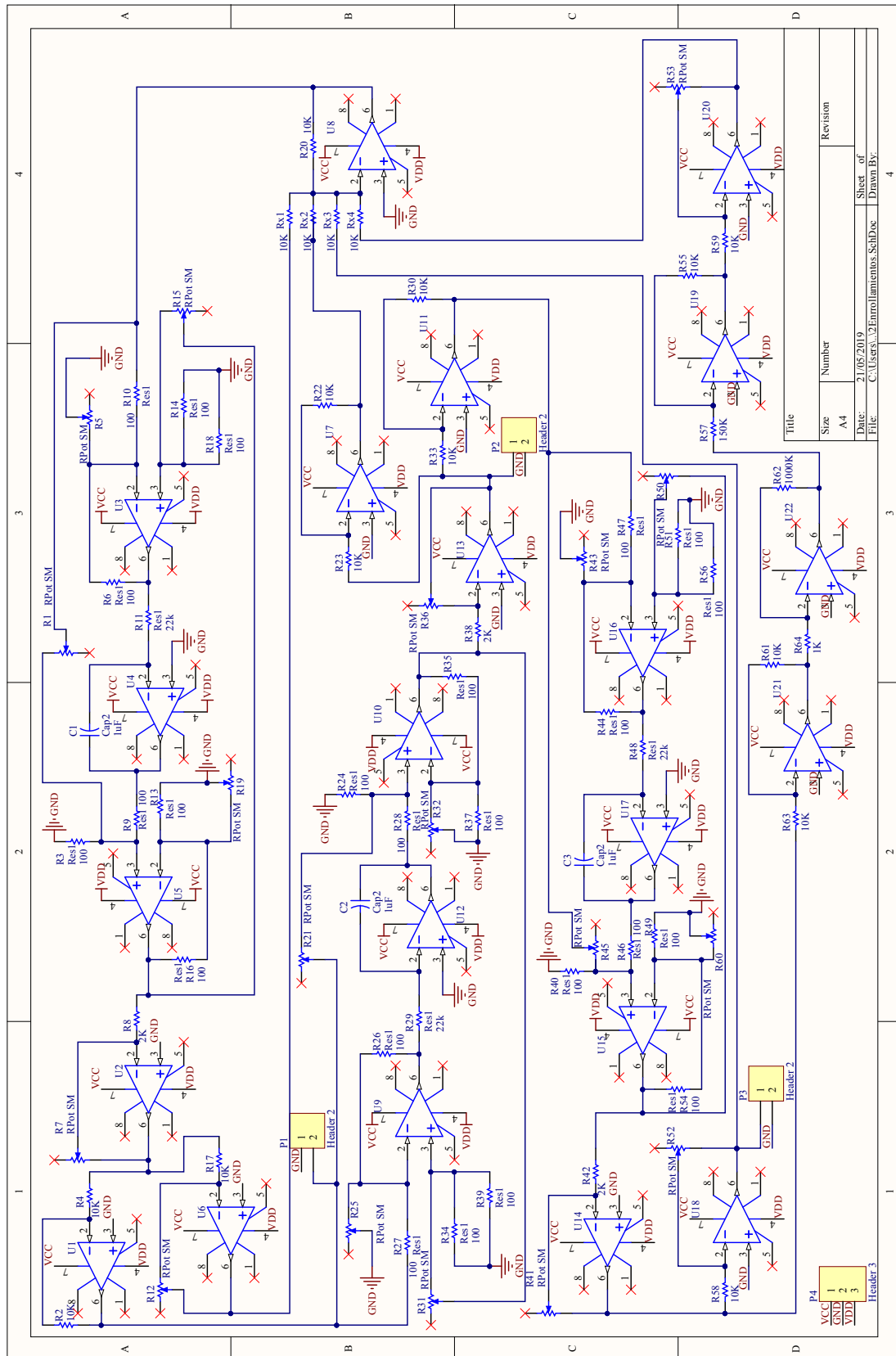


Figura C.1: Diagrama del circuito para un oscilador caótico fraccionario de Lü con 2 enrollamientos.

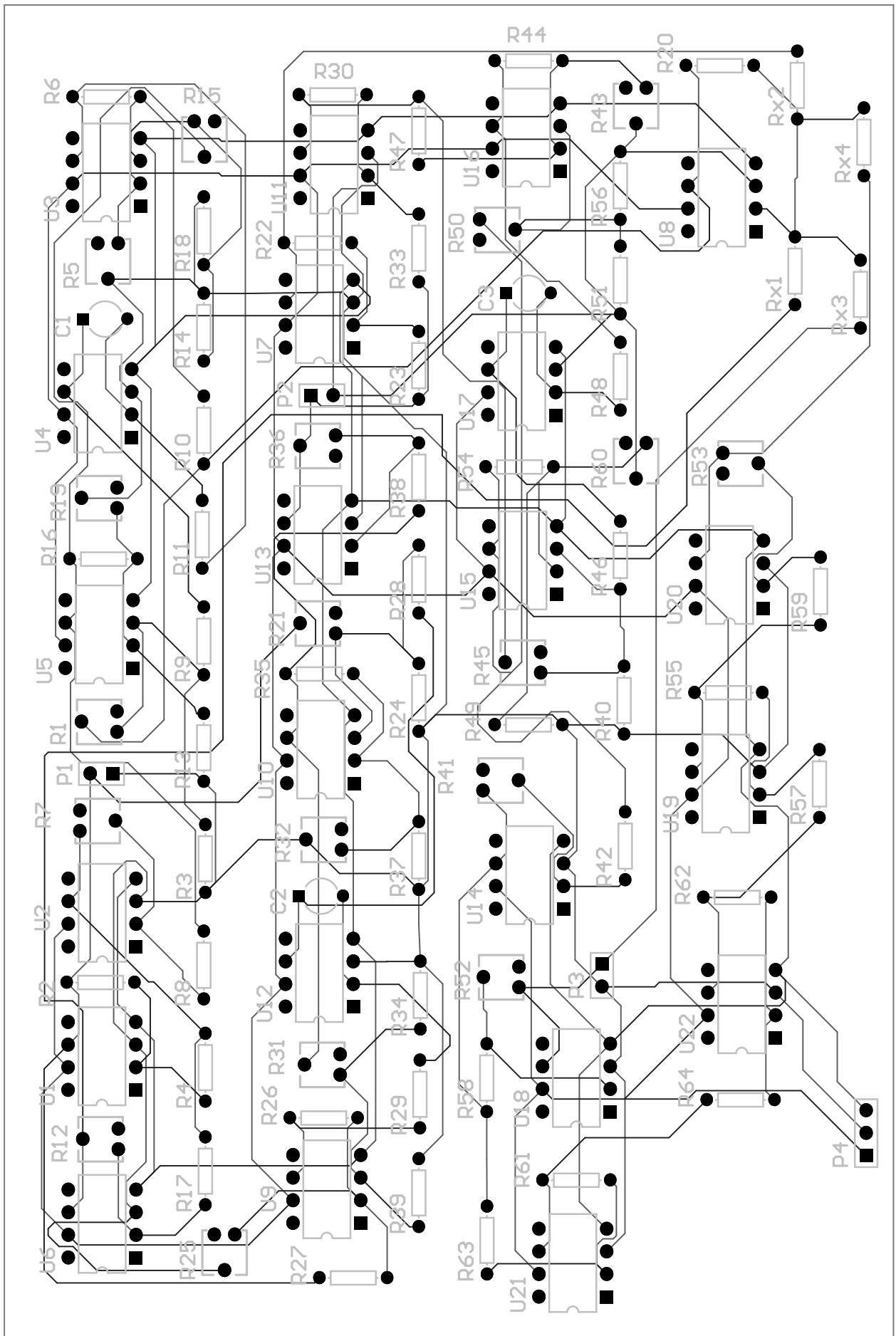


Figura C.2: Diseño PCB para un oscilador caótico fraccionario de Lü con 2 enrollamientos.

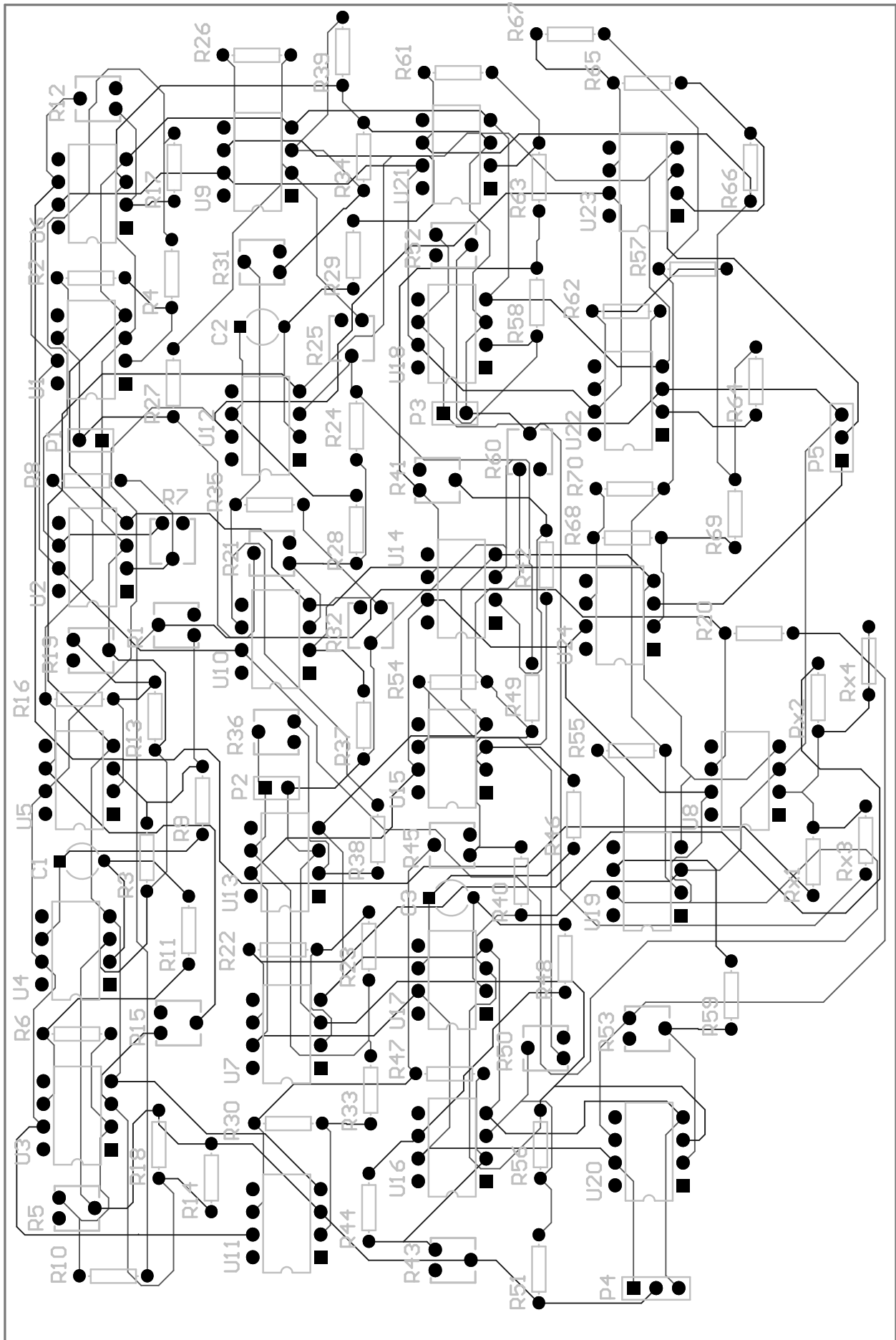


Figura C.4: Diseño PCB para un oscilador caótico fraccionario de Lü con 4 enrollamientos.

C.3. Evidencia experimental

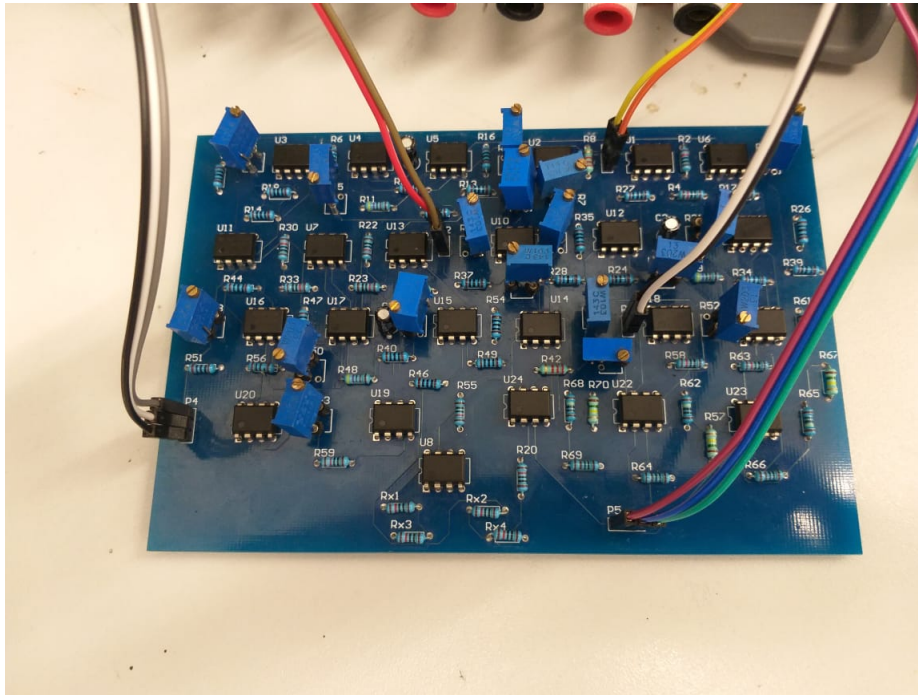


Figura C.5: Tarjeta PCB del oscilador caótico fraccionario de Lü

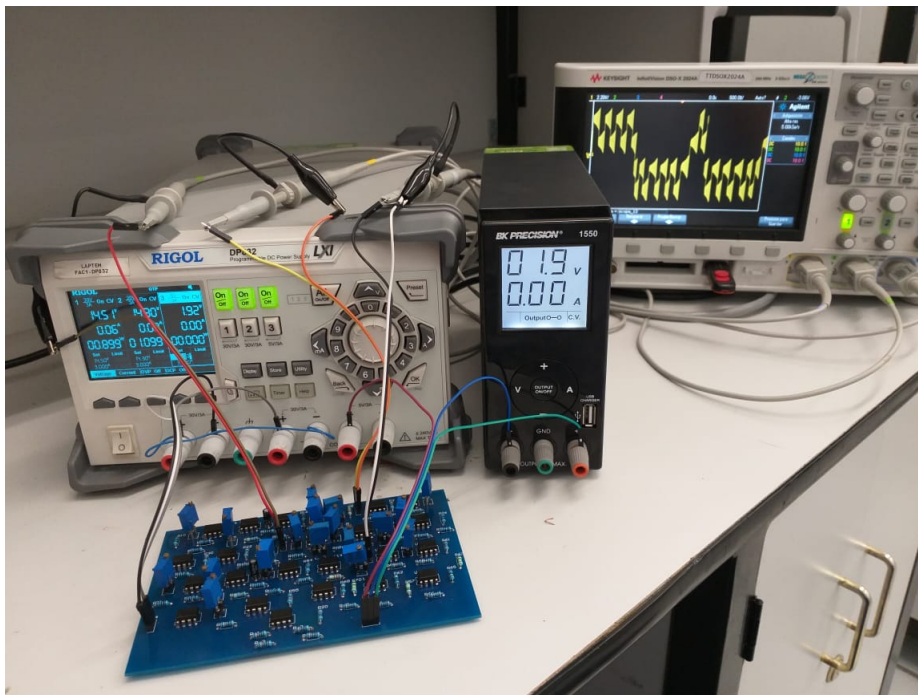


Figura C.6: Transiente del oscilador caótico fraccionario de Lü

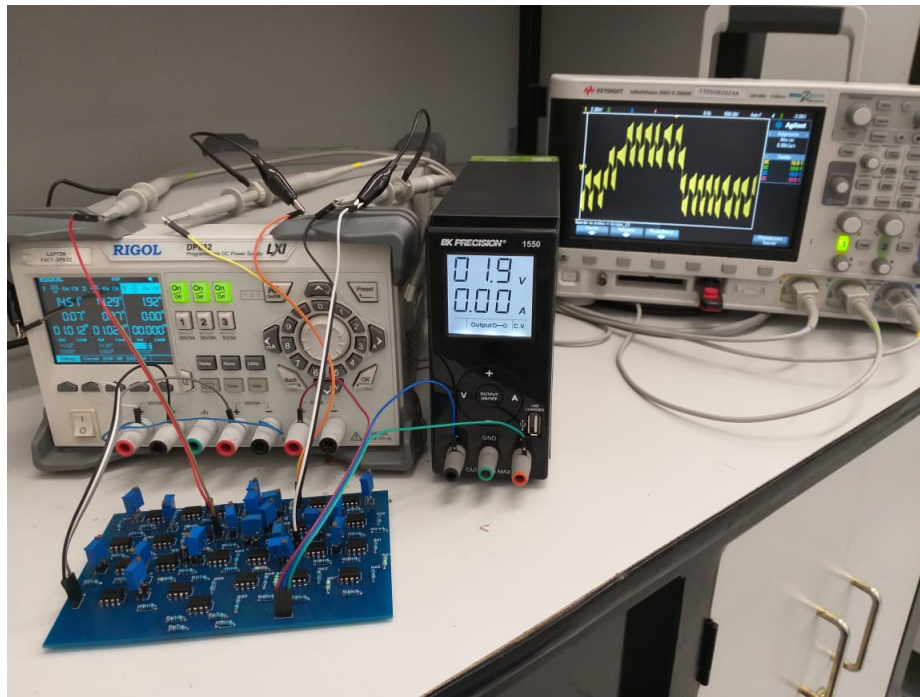


Figura C.7: Transiente del oscilador caótico fraccionario de Lü

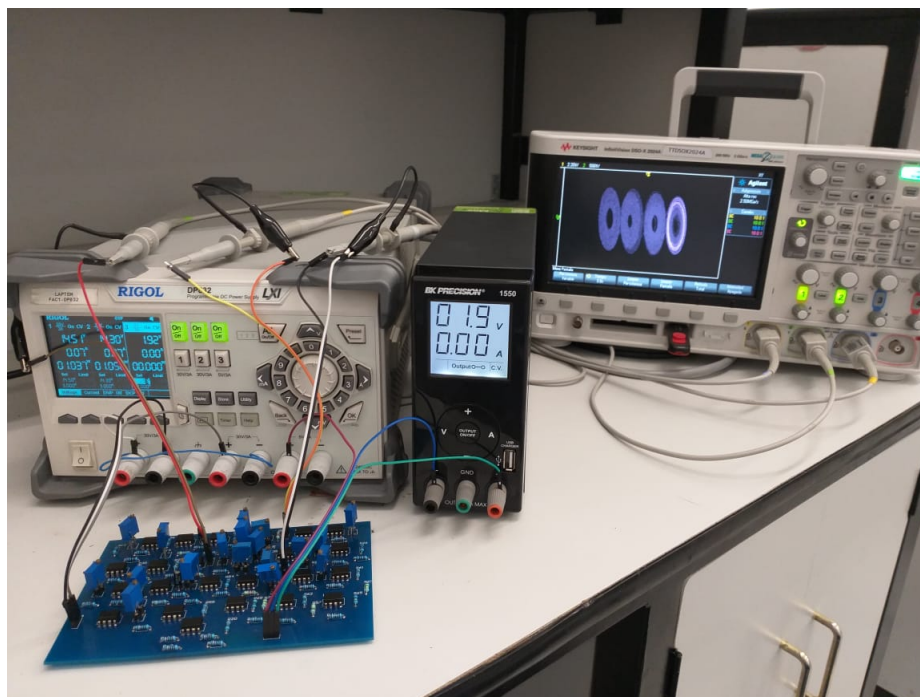


Figura C.8: Atractor del oscilador caótico fraccionario de Lü

Bibliografía

- [1] Ernesto Zambrano Serrano. " Fractional Order Chaotic Systems and Their Electronic Design." Tesis Doctoral. IPICYT, México, 2017.
- [2] Jesus Manuel Muñoz Pacheco, Esteban Tlelo Cuautle. *Electronic Design Automation of Multi-scroll Chaos Generators*. México: Bentham, 2010, pp. 1-4.
- [3] Du, Maolin and Wang, Zaihua and Hu, Haiyan. " Measuring memory with the order of fractional derivative". *Scientific Reports*, vol. 3, pp. 3431, Diciembre, 2013.
- [4] Martijn E. Krijnen, Ron A.j. van Ostayen, Hassan HosseinNia. " The application of fractional order control for an air-based contactless actuation system." *ISA Transactions*, vol. 82, pp. 172-183, Noviembre, 2017.
- [5] Marinangeli L. , Alijani E , HosseinNia SH. " Fractional-order positive position feedback compensator for active vibration control of a smart composite plate." *Journal of Sound and Vibration*, vol. 412, pp. 1-16, Enero, 2018.
- [6] Feliu-Talegon D. , San-Millan A. , Feliu-Battle V. " Fractional-order integral resonant control of collocated smart structures." *Control Engineering Practice*, vol. 56, pp. 210-223, Noviembre, 2016.
- [7] Baleanu D. , Wu Guo-Cheng , Bai Yun-Ru , Chen Fu-Lai. " Stability analysis of Caputo-like discrete fractional systems." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 48, pp. 520-530, Julio, 2017.
- [8] Guo-Cheng Wu, Dumitru Baleanu, Wei-HuaLuo. " Lyapunov functions for Riemann-Liouville-like fractional difference equations." *Applied Mathematics and Computation*, vol. 314, pp. 228-236, Diciembre, 2017.
- [9] Guo-Cheng Wu, Dumitru Baleanu, Sheng-Da Zeng. " Finite-time stability of discrete fractional delay systems: Gronwall inequality and stability criterion." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 57, pp. 299-308, Abril, 2018.
- [10] M. E. Fouda, A. S. Elwakil, A. G. Radwan, A. Allagui. " Power and energy analysis of fractional-order electrical energy storage devices." *Energy*, vol. 111, pp. 785-792, Septiembre, 2016.
- [11] Anis Allagui, Ahmed S. Elwakil, Brent J. Maundy, Todd J. Freeborn. " Spectral Capacitance of Series and Parallel Combinations of Supercapacitors." *CHEMELECTROCHEM*, vol. 3, pp. 1429-1436, Septiembre, 2016.
- [12] Anis Allagui, Todd J. Freeborn, Ahmed S. Elwakil, Brent J. Maundy. " Reevaluation of Performance of Electric Double-layer Capacitors from Constant-current Charge/Discharge and Cyclic Voltammetry." *Scientific Reports*, vol. 6, Diciembre, 2016.

- [13] K. M. Cuomo, A. V. Oppenheim. " Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications." *Phys. Rev. Lett.*, vol. 71, pp. 65-68, Julio, 1993.
- [14] V. Milanovic, M. E. Zaghloul. " Improved masking algorithm for chaotic communications systems." *Electron. Lett.*, vol. 32, pp. 11-12, Enero, 1996.
- [15] T.-L. Liao, N.-S. Huang. " An observer-based approach for chaotic synchronization with applications to secure communications." *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 46, pp. 1144-1150, Septiembre, 1999.
- [16] J.-C. Feng, C. K. Tse. " On-line adaptive chaotic demodulator based on radial-basis-function neural networks." *Phys. Rev. E.*, vol. 63, Enero, 2001.
- [17] S. Y. Chen, F. Xi, Z. Liu. " Chaotic analogue-to-information conversion with chaotic state modulation." *IET Signal Process.*, vol. 8, pp. 373-380, Enero, 2014.
- [18] U. Parlitz, L. O. Chua, L. Kocarev, K. S. Halle, A. Shang. " Transmission of digital signals by chaotic synchronization." *Int. J. Bifurcation Chaos*, vol. 2, pp. 973-977, 1992.
- [19] G. Kolumbán, M. P. Kennedy, L. O. Chua. " The role of synchronization in digital communications using chaos. I. Fundamentals of digital communications." *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 44, pp. 927-936, Octubre, 1997.
- [20] W. M. Tam, F. C. M. Lau, C. K. Tse, A. J. Lawrance. " Exact analytical bit error rates for multiple access chaos-based communication systems." *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 51, pp. 473-481, Septiembre, 2004.
- [21] G. Kolumbán, M. P. Kennedy, G. Kis. " Performance improvement of chaotic communications systems." *Proc. IEEE Eur. Conf. Circuit Theory Design (ECCTD)*, Agosto 1997, pp. 284-289.
- [22] S.-K. Yong, C.-C. Chong, G. Kolumbán. " Non-coherent UWB radio for low-rate WPAN applications: A chaotic approach." *Int. J. Wireless Inf. Netw.*, vol. 14, pp. 121-131, 2007.
- [23] C.-C. Chong, S. K. Yong. " UWB direct chaotic communication technology for low-rate WPAN applications." *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 57, pp. 1527-1536, Mayo, 2008.
- [24] C.-C. Chong, S. K. Yong, S. S. Lee. " UWB direct chaotic communication technology." *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.*, vol. 4, pp. 316-319, 2005.
- [25] H. Leung, H. Yu, K. Murali. " Ergodic chaos-based communication schemes." *Phys. Rev. E.*, vol. 66, Septiembre, 2002.
- [26] M. Delgado-Restituto, R. Lóbpez-Ahumada, A. Rodríguez-Vázquez. " Secure communication using CMOS current-mode sampled-data circuits." *Proc. Int. Workshop Non-Linear Dyn. Electron. Syst. (NDES)*, pp. 241-244, Julio, 1995.
- [27] M. Delgado-Restituto, M. Liñán, J. Ceballos, A. Rodríguez-Vázquez. " Bifurcations and synchronization using an integrated programmable chaotic circuit." *Int. J. Bifurcation Chaos.*, vol. 7, pp. 1737-1773, 1997.
- [28] M. Delgado-Restituto, A. Rodríguez-Vázquez, V. Porra. " Integrated circuit blocks for a DCSK chaos radio." *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst. (ISCAS)*, vol. 4, pp. 473-476, Mayo, 1998.

- [29] W. Xu, L. Wang, G. Chen. " Performance of DCSK cooperative communication systems over multipath fading channels." *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers.*, vol. 58, pp. 196-204, Enero, 2011.
- [30] Y. Fang, L. Wang, X. Jing, P. Chen, G. Chen, W. Xu. " Design and analysis of a DCSK-ARQ/CARQ system over multipath fading channels." *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers.*, vol. 62, pp. 1637-1647, Junio, 2015.
- [31] G. Kaddoum, N. Tadayon. " Differential chaos shift keying: A robust modulation scheme for power-line communications." *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp. Briefs*, 2016.
- [32] G. Kaddoum, N. Tadayon, E. Soujeri. " Performance of DCSK system with blanking circuit for power-line communications." *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst. (ISCAS)*, pp. 1-4, 2016.
- [33] Carlos Muñoz Montero, Luis Abraham Sánchez Gaspariano, Carlos Sánchez López, Jesus Manuel Muñoz Pacheco, Luz del Carmen Gómez Pavón, Esteban Tlelo Cuautle. " On the electronic realization of fractional order filters with OpAmps and Field Programmable Analog Arrays". *Springer*, Octubre, 2016.
- [34] Kendall Su. *Analog Filters*. New York: Kluwer Academic Publishers, 2003, pp. 171-182.