



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Neutrinos de Majorana y el operador de Weinberg

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA**

por

Humberto Vázquez Castro

Asesorado por

Dr. Héctor Novales Sánchez

Puebla Pue.  
13 de octubre de 2021





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Neutrinos de Majorana y el operador de Weinberg

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA**

por

Humberto Vázquez Castro

Asesorado por

Dr. Héctor Novales Sánchez

Puebla Pue.  
13 de octubre de 2021



**Título:** Neutrinos de Majorana y el operador de Weinberg  
**Estudiante:** HUMBERTO VÁZQUEZ CASTRO

COMITÉ

---

Dr. J. Jesús Toscano Chávez  
Presidente

---

Dr. Gerardo F. Torres del Castillo  
Secretario

---

Dr. Javier Montaña Domínguez  
Vocal

---

Dr. Mario Rodríguez Cahuantzi  
Vocal

---

Dr. Héctor Novales Sánchez  
Asesor



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>XI</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Modelo Estándar Electrodébil</b>	<b>3</b>
1.1. Simetrías	3
1.1.1. Grupo $U(1)$	3
1.1.2. Grupo $SU(2)$	3
1.2. El rompimiento espontáneo de simetría y el teorema de Goldstone	4
1.2.1. Teorema de Goldstone	4
1.3. Mecanismo de Higgs	5
1.4. Modelo Estándar Electrodébil	7
1.4.1. Partículas fundamentales	7
1.4.2. El sector escalar	8
1.4.3. El sector Yang-Mills	9
1.4.4. El sector de Yukawa	10
1.4.5. El sector de las corrientes	13
1.4.6. La relación de Gell-Mann-Nishijima	14
1.5. Física más allá del Modelo Estándar	15
1.5.1. Neutrinos de Dirac	15
1.5.2. Neutrinos de Majorana	16
<b>2. Teorías Efectivas</b>	<b>19</b>
2.1. Construcción de lagrangianos efectivos	20
2.1.1. Integración de los modos pesados	20
2.1.2. Expansión de la acción a baja energía	21
2.2. Lagrangianos efectivos para procesos con corrientes a bajas energías	21
2.3. Características generales de lagrangianos efectivos	23
<b>3. El operador de Weinberg</b>	<b>25</b>
3.1. El operador de Weinberg	25
3.2. Decaimiento $h \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$	27
3.2.1. Amplitud al cuadrado	29
3.2.2. Tasa de decaimiento	30
<b>4. Decaimiento <math>h \rightarrow \ell_\alpha \ell_\beta</math></b>	<b>31</b>
4.1. Suma de los diagramas de Feynman	36
4.2. Amplitud al cuadrado	37
4.3. Cálculo numérico	37
4.3.1. Proceso de renormalización	39
4.3.2. Implementación del Mecanismo GIM(Glashow-Iliopoulos-Maiani)	45

<b>5. Conclusiones</b>	<b>51</b>
<b>A. Álgebra de Dirac</b>	<b>53</b>
A.1. Matrices de Dirac . . . . .	53
A.2. Matriz de conjugación de carga . . . . .	55
<b>B. Tasa de decaimiento</b>	<b>57</b>
<b>C. Reglas de Feynman</b>	<b>61</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>63</b>

# Índice de figuras

1.1. Partículas elementales del Modelo estándar. . . . .	8
2.1. Contracción del propagador bosónico $W$ en un proceso con corriente cargada a bajas energías. . . . .	22
2.2. Contracción del propagador bosónico $Z$ en un proceso con corriente neutra a bajas energías. . . . .	23
3.1. Diagrama de Feynman para el decaimiento $h \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$ . . . . .	28
3.2. Diagramas de Feynman que contribuyen a la amplitud del decaimiento $h \rightarrow \nu_\alpha \nu_\alpha$ . . . . .	28
3.3. Diagrama de Feynman que contribuye a la amplitud del decaimiento $h \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$ . . . . .	29
4.1. Diagramas de Feynman para el proceso de decaimiento $h \rightarrow \ell_\alpha \ell_\beta$ . . . . .	31
4.2. Diagramas de Feynman que contribuye a la amplitud del decaimiento $h \rightarrow \ell_\alpha \ell_\beta$ . . . . .	34
4.3. Diagramas de Feynman extendidos que contribuye a la amplitud del decaimiento $h \rightarrow \ell_\alpha \ell_\beta$ . . . . .	35
4.4. Reglas de Feynman para la lagrangina no-renormalizable $\mathcal{L}_6^{NR}$ . . . . .	43
4.5. Diagramas de Feynman que contribuyen a la amplitud final. . . . .	44
4.6. Valores para la matriz PMNS, tomados del artículo Neutrino Mass Hierarchy. . . . .	48



# Índice de tablas

1.1. Valores de $I_3, Y, Q$ para los campos fermiónicos del MEE . . . . .	15
---	----



# Agradecimientos

A mi familia por todo el apoyo que me han brindado. En particular, gracias mamá por los sacrificios hechos, por ser mi motor para siempre intentar ser mejor persona, y porque en mis momentos más oscuros siempre estuvo tu hombro para llorar. A mi padre le agradezo el apoyo económico brindado, ya que sin eso habría sido muy difícil seguir estudiando. A mis hermanos que pese a la diferencias que existen entre nosotros siempre han sabido aconsejarme.

Al Dr. Héctor Novales Sánchez, por aceptar dirigir mi trabajo de tesis. Siempre estaré agradecido con usted por el apoyo, dedicación y tiempo que me otorgó. Gracias por las lecciones de vida, es usted para mí un ejemplo a seguir.

A los grandes amigos que conocí en la facultad, quienes creyeron en mí y me impulsaron a seguir adelante, gracias por los momentos de risa, con su compañía hicieron que mi estancia en la universidad fuese aún mejor.

Finalmente, quisiera hacer una mención especial, a ti B.O.O. porque durante mucho tiempo fuiste la persona que más estuvo a mi lado, me brindaste tu apoyo y cariño, y aunque ahora estamos por distintos caminos eres una parte importante en mi vida y este logro también es tuyo. Los consejos que me diste los atesoro en mi corazón. Gracias, por ti hoy soy mejor persona.



# Resumen

En el presente trabajo se demuestra cómo el operador de Weinberg después del rompimiento de simetría permite dotar con masa de Majorana a los neutrinos. Posteriormente se calcularon las contribuciones a la amplitud para un proceso de decaimiento de un bosón de Higgs en un par de leptones con cambio de sabor a orden de un lazo, en la norma unitaria, donde los propagadores internos involucran neutrinos masivos. Expandiendo en serie a primer orden las tasas de decaimiento, encontramos que los *Branching ratios* calculados, se encuentran en el orden  $\mathcal{O}(10^{-43})$ , estas magnitudes se encuentran alejadas de las cotas experimentales reportadas, que son de orden  $\mathcal{O}(10^{-3})$  hasta  $\mathcal{O}(10^{-5})$ .



# Introducción

La mayor parte de los fenómenos físicos que ocurren en la naturaleza, a nivel de los elementos que constituyen la materia pueden ser explicados por cuatro interacciones fundamentales, dichas interacciones son el electromagnetismo, la interacción débil, la interacción fuerte y la interacción gravitacional. Individualmente cada una de las anteriores interacciones pueden ser bien explicadas conforme a los experimentos realizados durante el siglo pasado y el actual, sin embargo, durante años la comunidad científica ha buscado explicar por qué los fenómenos relacionados a las interacciones anteriores ocurren a escalas tan diversas de longitud, tiempo, energía y masa.

Actualmente, un sueño de la física moderna es obtener una teoría fundamental que unifique las cuatro interacciones y que además sea capaz de describir todos los fenómenos observados. Así pues, nace la llamada teoría del Modelo Estándar (ME) de partículas elementales, que describe las interacciones electrodébiles y fuertes y que además, es la descripción fundamental más exitosa con la que contamos actualmente[1–5]. Pese a que el ME es la teoría más aceptada hoy en día, no es una teoría completa, ya que no explica la interacción gravitacional, y fenómenos físicos como la existencia de materia oscura y neutrinos masivos quedan fuera del alcance la teoría del ME[6–8].

Sin embargo, el ME describe extremadamente bien los resultados experimentales, y más aún, las predicciones descritas en la teoría, como lo son la existencia de los bosones mediadores de las interacciones electrodébiles, y la estrecha relación entre sus masas, han sido corroboradas en los grandes laboratorios de física de partículas, con precisión de varias cifras significativas, tal como ocurrió en el año 2012 con el descubrimiento del bosón de Higgs, partícula cuya masa está alrededor de 125 GeV[9].

Que el ME sea una buena aproximación a una descripción de fenómenos físicos de la naturaleza a cierta escala de energía nos permite concluir que no necesariamente se trata una teoría incorrecta, sino que es una teoría con limitaciones, por ello, es natural que en la busca de una teoría más completa que el ME, existan extensiones del ME, donde estas formulaciones han agregado nuevos elementos a la teoría y abren una ventana a la existencia de nueva física. Tal es el caso de los neutrinos, que originalmente en el ME son propuestos como partículas no masivas, sin embargo, los experimentos realizados en 1998 y en 2002, sobre oscilaciones de neutrinos, garantizan la existencia de neutrinos masivos; gracias a este hecho, en 2015, Takaaki Kajita y Arthur B. McDonald fueron galardonados con el Premio Nobel de Física[10, 11].

Desde la propuesta de la existencia de neutrinos por Wolfgang Pauli en 1930, han surgido diversas formulaciones con el fin de explicar la naturaleza de estas partículas, donde destacan las propuestas de neutrinos de Dirac y neutrinos de Majorana, donde estos últimos son bastante aceptados por los trabajos de Maria Goeppert-Mayer en 1935, sobre doble desintegración beta[12–14].

En los primeros capítulos de este trabajo, presentaremos una breve descripción del Modelo estándar electodébil y una introducción a teorías efectivas, sin embargo, la idea principal y vista en los capítulos posteriores de este trabajo de tesis, es presentar una descripción sobre el mecanismo por el cual los neutrinos adquieren masa de Majorana y cómo estos neutrinos masivos permiten estudiar procesos de decaimiento interesantes. Dicho lo anterior, se presenta un término de lagrangiano efectivo llamado "operador de Weinberg" que permite obtener neutrinos de Majorana.

Con esto en mente, centraremos este trabajo en estudiar el proceso de decaimiento de un bosón de Higgs en un par de leptones cargados con cambio de sabor,  $h \rightarrow \ell_\alpha \ell_\beta$ , y que desde el punto de vista diagramático, contempla la suma de diagramas de Feynman, de orden de un lazo, donde los propagadores involucran neutrinos masivos.

Durante el cálculo analítico resultó que aparecieron divergencias ultravioletas, de modo que, una sección del capítulo final se basa en renormalizar la teoría con el fin de encontrar contratérminos que permitan eliminar dichas divergencias.

Además, con el software Wolfram Mathematica y la paquetería FeynCalc se calcularon las integrales involucradas en las expresiones analíticas de los diagramas de Feynman involucrados, lo que permitió obtener valores numéricos para las tasas de decaimiento de los diferentes casos para el proceso  $h \rightarrow \ell_\alpha \ell_\beta$ .

# Capítulo 1

## Modelo Estándar Electrodébil

### 1.1. Simetrías

El concepto de simetría es muy importante en la física, de manera simplificada, decimos que hay simetrías en un sistema si existen transformaciones que dejan invariantes a ciertas propiedades que caracterizan al sistema.

En la naturaleza existen diversos tipos de simetrías, las cuales se pueden clasificar en dos principales grupos, simetrías continuas y simetrías discretas. Las simetrías continuas son de dos clases, simetrías globales donde los parámetros de la transformación no dependen de las coordenadas espacio-tiempo, es decir, la transformación es idéntica en todos los puntos del espacio-tiempo. La otra clase de simetrías continuas, son las simetrías locales, donde los parámetros de la transformación son distintos en cada punto del espacio-tiempo, es decir, dependen de las coordenadas del punto en cuestión. La importancia de las simetrías se ve reflejada en el Teorema de Noether[15–17], donde por cada simetría existe una cantidad conservada.

Las transformaciones de simetría, son meramente matemáticas y son abordadas desde la teoría de grupos, en esta sección nos centraremos en los grupos especiales  $U(1)$  y  $SU(2)$  ya que son esenciales en la teoría electrodébil, donde las matrices de transformación  $\mathbf{U}$  son unitarias y satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned}\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger &= \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbb{1}, \\ \text{Det}(\mathbf{U}) &= 1.\end{aligned}\tag{1.1}$$

#### 1.1.1. Grupo $U(1)$

Este es un grupo abeliano, donde se satisfacen las condiciones de la ec. (1.1) y cuya matriz de transformación es

$$\mathbf{U} = e^{ir\theta},\tag{1.2}$$

donde  $r$  es un número real arbitrario,  $\theta$  es un parámetro de evolución real asociado al grupo y puede ser constante o variable del espacio-tiempo.

#### 1.1.2. Grupo $SU(2)$

Satisfacen la ec. (1.1) y sus matrices de transformación pueden escribirse de la forma

$$\mathbf{U} = e^{iT_a\theta^a},\tag{1.3}$$

## CAPÍTULO 1. MODELO ESTÁNDAR ELECTRODÉBIL

### 1.2. EL ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE SIMETRÍA Y EL TEOREMA DE GOLDSTONE

donde  $\theta^a$  son los parámetros de transformación que pueden ser variables o constantes del espacio-tiempo, y  $T_a$  son las matrices generadoras del grupo que cumplen con el álgebra de Lie como

$$\begin{aligned} T_a &= \frac{\sigma^j}{2}, \\ [\sigma_j, \sigma_k] &= 2i\epsilon^{jkl}\sigma^l, \end{aligned} \tag{1.4}$$

y  $\sigma^j$  son las matrices de Pauli.

## 1.2. El rompimiento espontáneo de simetría y el teorema de Goldstone

Si a un sistema físico definido por una Lagrangiana se le realizan transformaciones de simetría respecto al grupo que caracteriza al sistema, y la Lagrangiana resulta no invariante, se dice que el sistema sufrió un rompimiento espontáneo de simetría. La definición anterior tiene repercusiones sobre la dinámica del sistema, una consecuencia directa está descrita por el teorema de Goldstone.

### 1.2.1. Teorema de Goldstone

Consideremos la siguiente densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \tag{1.5}$$

donde  $\Phi$  es un campo escalar complejo y  $\lambda > 0$ , es fácil probar que, la expresión anterior es invariante bajo transformaciones de fase global del grupo  $U(1)$ . Si escribimos a  $\Phi$  como

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \tag{1.6}$$

de tal forma que

$$|\Phi|^2 = \Phi^\dagger \Phi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) = \frac{1}{2}(\phi_j \phi_j), j = 1, 2. \tag{1.7}$$

Podemos identificar al potencial como

$$\begin{aligned} V(\Phi, \Phi^\dagger) &= -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ &= -\frac{\mu^2}{2}(\phi_j \phi_j) + \frac{\lambda}{4}(\phi_j \phi_j)^2. \end{aligned}$$

Si calculamos el mínimo de potencial, se tiene que

$$\phi_k(-\mu^2 + 2\lambda|\Phi|^2) = 0, \tag{1.8}$$

lo cual se satisface si,  $\Phi = 0$  ó  $-\mu^2 + 2\lambda|\Phi|^2 = 0$ . El segundo caso es interesante, ya que, el mínimo del potencial ocurre en el plano complejo de  $\Phi$  sobre una circunferencia de radio

$$|\Phi| = \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}}. \tag{1.9}$$

Si además, suponemos que,  $\mu^2 > 0$ , entonces se tiene un número infinito de estados base degenerados. Si elegimos como estado base el punto sobre el eje real de  $\Phi$ , de tal forma que:  $Re(\Phi) = \frac{v}{\sqrt{2}}$  y  $Im(\Phi) = 0$  entonces

$$v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}, \tag{1.10}$$

donde  $v = 246 \text{ GeV}$ [18, 19].

Haciendo una expansión de  $\Phi$  alrededor del estado base, se puede ver que

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + (\Phi - v)), \quad (1.11)$$

donde  $\Phi - v$  es un campo escalar complejo, entonces puede ser escrito como

$$\zeta(x) = \Phi(x) - v = \zeta_1(x) + i\zeta_2(x). \quad (1.12)$$

Si hacemos el cambio anterior, se puede probar que la densidad Lagrangiana descrita anteriormente puede escribirse como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \zeta_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \zeta_2)^2 + \left(\frac{\mu^2}{2} - \lambda v^2 - \frac{\lambda v^2}{2}\right)\zeta_1^2 + \left(\frac{\mu^2}{2} - \frac{\lambda v^2}{2}\right)\zeta_2^2 + \mathcal{O}((\zeta_1, \zeta_2)^3), \quad (1.13)$$

donde la densidad Lagrangiana depende de los campos  $\zeta_1, \zeta_2$ , si además, sustituimos la ec. (1.10) en la ec. (1.13) se puede concluir que el campo  $\zeta_2$  carece de masa, pero el campo  $\zeta_1$  tiene una masa

$$m_{\zeta_1} = \sqrt{2\lambda v^2}. \quad (1.14)$$

Entonces, podemos afirmar que el campo  $\zeta_1$  ha adquirido su masa espontáneamente. El hecho de que aparezcan campos escalares carentes de masa es consecuencia del rompimiento espontáneo de simetría global, lo que da lugar al siguiente teorema:

**Teorema de Goldstone:** "Si el Lagrangiano de un sistema con simetría global continua sufre un rompimiento espontáneo, a cada generador roto del grupo le corresponde una partícula escalar sin masa"[20, 21].

A las partículas sin masa se les denominan como bosones de Goldstone. Un tratamiento similar deberá ocurrir en una Lagrangiana con  $n$  campos escalares reales  $\phi_i$ , donde las simetrías no rotas residuales tienen  $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$  generadores y además habrá  $n-1$  bosones de Goldstone sin masa.

### 1.3. Mecanismo de Higgs

El mecanismo de Higgs es una extensión del rompimiento espontáneo de una simetría global llevado al rompimiento espontáneo de una simetría local, que muestra que existe relación entre los campos de norma sin masa y los bosones de Goldstone, además permite que los bosones de norma adquieran masa mediante la absorción de bosones de los Goldstone[22, 23].

Vamos a mostrar de manera simplificada el Mecanismo de Higgs mediante una teoría invariante de norma definida sobre el grupo  $U(1)$ .

Consideremos la siguiente densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (1.15)$$

donde  $\lambda$  es una constante adimensional positiva, y además

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad (1.16)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad (1.17)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.18)$$

donde  $F_{\mu\nu}$  es el tensor electromagnético y  $A_\mu$  es el campo de norma asociado al potencial electromagnético.

**CAPÍTULO 1. MODELO ESTÁNDAR ELECTRODÉBIL**  
1.3. MECANISMO DE HIGGS

---

Es fácil probar que la Lagrangiana anterior es invariante bajo transformaciones de norma, es decir, bajo transformaciones del tipo

$$\Phi(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x)}\Phi(x), \quad (1.19)$$

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x). \quad (1.20)$$

Si escribimos al potencial  $V$  en términos de los campos escalares  $\phi_i$  y calculamos los mínimos de potencial, se tiene que

$$\phi_k(-\mu^2 + 2\lambda|\Phi|^2) = 0, \quad (1.21)$$

donde nuevamente se pueden distinguir dos casos: si  $\mu^2 < 0$  el potencial tiene un mínimo único en  $\Phi = 0$ . Por otro lado, si  $\mu^2 > 0$  se produce rompimiento espontáneo de simetría local, y se tiene un número infinito de estados base degenerados. Elegimos nuevamente al estado base como  $\Phi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}}$  con  $v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$ .

Si ahora empleamos  $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta(x)]e^{i\xi(x)/v}$  y expandimos hasta primer orden, se tiene que

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta(x) + i\xi(x)], \quad (1.22)$$

realizando este cambio, la Lagrangina puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)(\partial^\mu\xi) + qvA^\mu(\partial_\mu\xi) \\ & + \frac{q^2v^2}{2}A_\mu A^\mu + \frac{\mu^2v^2}{2} + \frac{\mu^2}{2}\eta^2 + \frac{\mu^2}{2}\xi^2 - \frac{3\lambda v^2}{2}\eta^2 - \frac{\lambda v^2}{2}\xi^2 + \mathcal{O}((\eta, \xi)^3), \end{aligned} \quad (1.23)$$

de la Lagrangiana anterior se puede concluir que el campo escalar  $\xi$  no tiene masa, mientras que el campo  $\eta$  adquirió masa igual a

$$m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2}, \quad (1.24)$$

y sorpresivamente el campo  $A_\mu$  adquirió masa igual a

$$m_A = qv. \quad (1.25)$$

A primera instancia todo lo anterior es correcto, pese a ello, la transformación anterior nos lleva a tener términos extraños que no son fáciles de interpretar, por ejemplo,  $qvA_\mu(\partial_\mu\xi)$ .

Sin embargo, podemos remover este término aplicando transformaciones de norma locales, es decir

$$\begin{aligned} \Phi & \longrightarrow e^{-i\xi/v}\Phi = e^{-i\xi/v}\frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta(x) + i\xi(x)] \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\xi/v}[v + \eta(x)]e^{i\xi(x)/v} = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + h(x)], \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \frac{1}{qv}\partial_\mu\xi(x), \quad (1.27)$$

esto es un caso específico de la ec. (1.20), donde  $\alpha(x) = -\frac{\xi(x)}{v}$ , y  $h$  es un campo escalar real y se le llama campo de Higgs.

Con lo anterior, la Lagrangiana puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) + \frac{1}{2}q^2v^2A_\mu A^\mu - \lambda v^2h^2 + q^2vA_\mu A^\mu h \\ & + \frac{1}{2}q^2A_\mu A^\mu h^2 + \lambda v h^3 + \frac{1}{4}\lambda h^4 + \dots \end{aligned} \quad (1.28)$$

**CAPÍTULO 1. MODELO ESTÁNDAR ELECTRODÉBIL**  
**1.4. MODELO ESTÁNDAR ELECTRODÉBIL**

---

donde ahora aparece una partícula escalar  $h$  con masa  $m_H = \sqrt{2\lambda v^2}$ , conocida como el bosón de Higgs, y un campo vectorial  $A_\mu$  con masa  $m_A = qv$ .

La nueva Lagrangiana contiene términos producto de las interacciones entre el campo de norma  $A_\mu$  y el campo de Higgs  $h$ , además, una interpretación de que haya desaparecido el campo  $\xi$  es que, el campo de norma absorbió a un bosón de Goldstone y adquirió masa.

El rompimiento espontáneo de simetría es una consecuencia directa de escoger un solo estado base de las infinitas posibilidades que se tienen.

El análisis anterior puede ser adaptado a teorías de norma no abelianas, como lo es el Modelo Estándar Electro débil (MEE), la cual se analiza alrededor del estado base  $\Phi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}}$ , e implementando la transformación de la forma

$$\Phi(x) = \Phi_0 + \xi(x), \tag{1.29}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_W^+(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(h(x) + iG_Z(x)) \end{pmatrix}, \tag{1.30}$$

donde  $G_W^+$  y  $G_Z$  son pseudo-bosones de Goldstone asociados a los bosones  $W^\pm$ ,  $Z$  mientras que  $h(x)$  es el campo de Higgs, además se satisface que

$$(G_W^+)^* = G_W^-, \tag{1.31}$$

$$h(x) = h^*(x), \tag{1.32}$$

$$G_Z(x) = G_Z^*(x). \tag{1.33}$$

A continuación se presenta una descripción más detallada de la implementación del Mecanismo de Higgs en el MEE.

## 1.4. Modelo Estándar Electro débil

El ME es una teoría de norma basada en el grupo  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ , el hecho de que sea una teoría de norma es porque es invariante bajo transformaciones locales del grupo de simetría ya mencionado.

Cada grupo involucrado en la teoría describe las interacciones entre las partículas fundamentales, es decir, el grupo  $SU(3)_C$  describe la interacción fuerte, mientras que el grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  describe la interacción electro débil, que es el resultado de la combinación de las interacciones electromagnética y la interacción débil.

El propósito de esta sección es presentar la descripción del MEE.

### 1.4.1. Partículas fundamentales

El ME clasifica a las partículas fundamentales en dos principales conjuntos; partículas de materia (fermiones) y partículas portadoras de fuerza (bosones), la principal diferencia es el espín. Los bosones, tienen espín  $s = 1$  y son las partículas mediadoras de interacción, para la interacción electromagnética existe el fotón  $\gamma$ , para la interacción débil están los bosones  $W^-, W^+, Z$ , mientras que para la interacción fuerte los ocho gluones  $g_i$ .

Por otro lado, los fermiones, tienen espín  $s = 1/2$ , y se dividen a su vez en dos subconjuntos: leptones y quarks. Los leptones, son seis, el electrón, el muón, el tau y sus correspondientes neutrinos, mientras que los primeros tres son masivos y poseen carga eléctrica, los neutrinos son eléctricamente neutros y de masa nula. El otro subconjunto son los quarks, formado por seis partículas, up, down, charm, strange, top y bottom, tienen cargas eléctricas fraccionarias, y experimentalmente no ha sido posible encontrar quarks en estados aproximadamente libres, es decir, se encuentran siempre en estados ligados llamados hadrones, y que a su vez se clasifican en mesones formados por un par quark-antiquark y bariones que son partículas formadas por la combinación de tres quarks.

La parte fermiónica del MEE se puede agrupar en seis familias o generaciones, tres familias corresponden a los leptones y tres familias a los quarks, todo lo anterior se puede resumir en la Fig. (1.1):

## ELEMENTARY PARTICLES

LEPTONS	$\nu_e$ <small>electron neutrino</small>	$\nu_\mu$ <small>muon neutrino</small>	$\nu_\tau$ <small>tau neutrino</small>	$W$ <small>W boson</small>	FORCE CARRIERS
	$e$ <small>electron</small>	$\mu$ <small>muon</small>	$\tau$ <small>tau</small>		
QUARKS	$u$ <small>up</small>	$c$ <small>charm</small>	$t$ <small>top</small>	$\gamma$ <small>photon</small>	FORCE CARRIERS
	$d$ <small>down</small>	$s$ <small>strange</small>	$b$ <small>bottom</small>		
<div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> <span>I</span> <span>II</span> <span>III</span> </div> <p style="text-align: center; margin-top: 5px;">Three Generations of Matter</p>					

Figura 1.1: Partículas elementales del Modelo estándar.

El MEE está definido bajo el grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , donde el grupo  $SU(2)_L$  introduce los campos de norma  $W_\mu^j$ , mientras que el campo  $B_\mu$  es el campo del grupo  $U(1)_Y$ . La teoría del MEE esta caracterizada por una acción  $S_{ME}$ , definida por una densidad Lagrangiana,  $\mathcal{L}_{ME}$  que tiene la forma

$$S_{ME} = \int d^4x \mathcal{L}_{ME}, \quad (1.34)$$

donde

$$\mathcal{L}_{ME} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_C + \mathcal{L}_Y, \quad (1.35)$$

y los términos  $\mathcal{L}_{YM}$ ,  $\mathcal{L}_E$ ,  $\mathcal{L}_C$  y  $\mathcal{L}_Y$ , reciben los nombres de sector de Yang-Mills, sector escalar, sector de las corrientes y sector de Yukawa, respectivamente.

### 1.4.2. El sector escalar

El Lagrangiano de este sector se escribe como

$$\mathcal{L}_E = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger, \Phi), \quad (1.36)$$

donde

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

es el doblete de Higgs con hipercarga  $y_\phi$ , y  $\phi_a$ ,  $\phi_b$  son campos escalares complejos, entonces el doblete  $\Phi$  puede ser escrito como

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

**CAPÍTULO 1. MODELO ESTÁNDAR ELECTRODÉBIL**  
1.4. MODELO ESTÁNDAR ELECTRODÉBIL

---

además,  $D_\mu$  representa la derivada covariante del grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  y tiene la forma

$$D_\mu = \partial_\mu \cdot \mathbb{1}_2 - ig_2 \frac{\sigma^j}{2} W_\mu^j - i \frac{g_1}{2} (y_\phi \cdot \mathbb{1}_2) B_\mu, \quad (1.39)$$

siendo  $g_1$  la constante de acoplamiento del grupo  $U(1)_Y$ , y  $y_\phi$  es el generador del grupo de hipercarga. El Lagrangiano anterior incluye un potencial  $V(\Phi, \Phi^\dagger)$ , conocido como el potencial de Higgs y tiene la forma

$$V(\Phi, \Phi^\dagger) = -\mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (1.40)$$

donde  $\lambda$  es una constante adimensional positiva.

Si al Lagrangiano anterior aplicamos nuestro cambio de base dado por la ec. (1.30), en la norma unitaria se tiene que

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2} (\partial_\mu h) (\partial^\mu h) - \lambda v^2 h^2 + \frac{g_2^2 v^2}{4} W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{g_2^2 v^2}{8} W_\mu^3 W^{3\mu} + \frac{g_1^2 v^2 y_\phi^2}{8} B_\mu B^\mu - \frac{v^2 g_2 g_1 y_\phi}{4} W_\mu^3 B^\mu, \quad (1.41)$$

de donde se concluye que  $h$  es un campo físico con masa  $m_H = \sqrt{2\lambda v}$  y  $W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp i W_\mu^2)$  cuya masa es igual a  $m_W = \frac{g_2 v}{2}$ . Por otro lado, los términos

$$\frac{g_2^2 v^2}{8} W_\mu^3 W^{3\mu} + \frac{g_1^2 v^2 y_\phi^2}{8} B_\mu B^\mu - \frac{v^2 g_2 g_1 y_\phi}{4} W_\mu^3 B^\mu = \frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_2 g_1 \\ -g_2 g_1 & g_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}, \quad (1.42)$$

donde se ha tomado el valor de la hipercarga  $y_\phi = 1$ . Además, la matriz presente en la ecuación anterior, es real y hermitiana, por tanto existe una matriz ortogonal  $R$  que diagonaliza a la misma, dicha matriz tiene la forma

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix}, \quad (1.43)$$

donde  $\theta_W$  es el ángulo de mezcla débil definido por  $\tan \theta_W = \frac{g_1}{g_2}$ , lo cual induce los cambios

$$W_\mu^3 = \cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu, \quad (1.44)$$

$$B_\mu = -\sin \theta_W Z_\mu + \cos \theta_W A_\mu, \quad (1.45)$$

donde se obtiene que la masa del bosón  $Z$  es  $m_Z = m_W / \cos \theta_W$  y  $A_\mu$  es el campo vectorial asociado al campo electromagnético cuya masa es igual a cero y la partícula asociada es el fotón.

### 1.4.3. El sector Yang-Mills

El sector de Yang-Mills describe la estructura no Abeliana del grupo electrodébil, donde los invariantes no se pueden construir directamente a partir de los campos de norma, sino que requieren los tensores de campo del grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , que tienen la forma

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (1.46)$$

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + g_2 [W_\mu, W_\nu], \quad (1.47)$$

donde  $g_2$  es una constante de acoplamiento del grupo  $SU(2)_L$  y  $W_\mu = W_\mu^j \frac{\sigma^j}{2}$ , aquí  $\sigma^j$  representan a las matrices de Pauli, entonces la ec. (1.47) se transforma en

$$W_{\mu\nu} = (\partial_\mu W_\nu^j - \partial_\nu W_\mu^j + g_2 \epsilon^{jkl} W_\mu^k W_\nu^l) \frac{\sigma^j}{2}, \quad (1.48)$$

donde  $\epsilon^{jkl}$  es el tensor de Levi-Civita. Con los términos anteriores es posible construir el Lagrangiano de Yang-Mills, dado de la forma

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{2} \text{tr} \{ W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad (1.49)$$

**CAPÍTULO 1. MODELO ESTÁNDAR ELECTRODÉBIL**  
1.4. MODELO ESTÁNDAR ELECTRODÉBIL

---

donde  $W_{\mu\nu}$  es conocido como el tensor de curvatura de Yang-Mills, que también puede ser escrito como  $W_{\mu\nu} = W_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2}$ . Comparando la expresión anterior con la ec. (1.47) y eliminando a los generadores se tiene que

$$W_{\mu\nu}^j = \partial_\mu W_\nu^j - \partial_\nu W_\mu^j + ig_2 \epsilon^{jkl} W_\mu^k W_\nu^l. \quad (1.50)$$

Si recordamos que las matrices de Pauli satisfacen las relaciones

$$[\sigma^j, \sigma^k] = 2i\epsilon^{jkl} \sigma^l, \quad (1.51)$$

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta_{ij} \cdot \mathbb{1}_2, \quad (1.52)$$

y usando que  $W_{\mu\nu} = W_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2}$ , el Lagrangiano de Yang-Mills se escribe como

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^j W^{j\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}. \quad (1.53)$$

Hay que mencionar que, bajo el grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  los tensores de campo se transforman de forma covariante como

$$W_{\mu\nu} = U W'_{\mu\nu} U^\dagger, U \in SU(2)_L, \quad (1.54)$$

$$B_{\mu\nu} = B'_{\mu\nu}, \quad (1.55)$$

lo cual trae como consecuencia que el Lagrangiano de Yang-Mills sea invariante de norma.

La implementación del rompimiento espontáneo de simetría sobre el grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  conlleva que nuestra teoría se defina sobre el grupo de la teoría electromagnética  $U(1)_e$ , entonces el Lagrangiano anterior debe reescribirse en términos de los campos  $W_\mu^\pm$ ,  $Z_\mu$  y  $A_\mu$ , sin embargo, conviene recordar que los primeros dos campos se transforman mediante representaciones tensoriales bajo el grupo  $U(1)_e$ , y  $A_\mu$  con su respectivo campo de norma, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{YM}} = & -\frac{1}{2} \widehat{W}_{\mu\nu}^+ \widehat{W}^{-\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - ig_2 \cos \theta_W Z_{\mu\nu} W^{-\mu} W^{+\mu} \\ & - ie F_{\mu\nu} W^{-\mu} W^{+\mu} + \frac{g_2^2}{4} (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-) (W^{-\mu} W^{+\nu} - W^{+\mu} W^{-\nu}), \end{aligned} \quad (1.56)$$

con

$$\widehat{W}_{\mu\nu}^\pm = D_\mu^e W_\nu^\pm - D_\nu^e W_\mu^\pm + ig_2 \cos \theta_W (W_\mu^\pm Z_\nu - W_\nu^\pm Z_\mu), \quad (1.57)$$

$$Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu, \quad (1.58)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.59)$$

donde  $D_\mu^e = \partial_\mu + ieA_\mu$  es la derivada covariante del grupo  $U(1)_e$  y  $e = g_2 \sin \theta_W$  es la carga elemental.

#### 1.4.4. El sector de Yukawa

El sector de Yukawa explica la parte fermiónica del MEE, el propósito de este sector es generar las masas de los leptones y quarks cargados mediante la implementación del rompimiento espontáneo de simetría.

Como se mencionó al principio de este capítulo, los fermiones se dividen en dos subconjuntos, por lo que conviene expresar al sector de Yukawa de la forma siguiente

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_Y^l + \mathcal{L}_Y^q, \quad (1.60)$$

donde  $\mathcal{L}_Y^l$  y  $\mathcal{L}_Y^q$  representan a los leptones y quarks respectivamente.

La parte correspondiente a los leptones en el sector de Yukawa, se escribe como

$$\mathcal{L}_Y^l = -y_{jk}^l \overline{L_{j,L}} \Phi \ell_{k,R} - y_{kj}^{l*} \overline{\ell_{k,R}} \Phi^\dagger L_{j,L}, \quad (1.61)$$

**CAPÍTULO 1. MODELO ESTÁNDAR ELECTRODÉBIL**  
1.4. MODELO ESTÁNDAR ELECTRODÉBIL

---

donde los coeficientes  $y_{jk}^l$ , son adimensionales y arbitrarios, y se conocen como constantes de Yukawa, además,  $\Phi$  es el doblete de Higgs, y el objeto  $L_{j,L}$  es un doblete con quiralidad izquierda y que está definido como

$$L_{j,L} = \begin{pmatrix} \nu_{j,L} \\ \ell_{j,L} \end{pmatrix}, \quad (1.62)$$

y  $\ell_{j,R}$  es un singlete con quiralidad derecha, donde el índice  $j$  corre sobre los sabores de leptones  $e, \mu, \tau$ . Una suposición extra del MEE nos dice que no existen neutrinos con quiralidad derecha, y bajo el grupo de norma  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  estos objetos se transforman de la forma

$$L_{j,L} \longrightarrow e^{iy_L \alpha(x)} U(x) L_{j,L}, \quad (1.63)$$

$$\ell_{j,R} \longrightarrow e^{iy_R \alpha(x)} \ell_{j,R}, \quad (1.64)$$

donde  $y_L$  y  $y_R$  son las hipercargas de  $L_{j,L}$  y  $\ell_{j,R}$  respectivamente, si se satisface que

$$-y_L + y_R + y_\phi = 0, \quad (1.65)$$

resulta que, bajo estas transformaciones la Lagrangiana  $\mathcal{L}_Y^l$  es invariante.

Si implementamos el rompimiento de simetría a través del cambio de base descrito por la ec. (1.30), podemos reescribir el Lagrangiano anterior, en la norma unitaria como

$$\mathcal{L}_Y^l = -y_{jk}^l \left( \frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{h}{\sqrt{2}} \right) \overline{\ell_{j,L}} \ell_{k,R} + \text{h.c.} \quad (1.66)$$

$$= -(1 + \frac{h}{v}) \overline{\ell_L} M^l \ell_R + \text{h.c.} \quad (1.67)$$

donde  $M^l$  es una matriz  $3 \times 3$  con coeficientes  $M_{jk}^l = y_{jk}^l \frac{v}{\sqrt{2}}$  y además

$$\ell = \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

Un resultado importante en álgebra lineal nos garantiza que, dada una matriz  $M$  cuadrada  $n \times n$  y compleja, existen matrices  $A$  Y  $B$  unitarias de tamaño  $n \times n$ , tales que  $AMB$  es una matriz diagonal con coeficientes reales. Entonces, definimos las siguientes transformaciones unitarias en el espacio de sabor

$$\ell'_L = V_L^\dagger \ell_L, \quad (1.69)$$

$$\ell'_R = V_R^\dagger \ell_R, \quad (1.70)$$

$$\mathcal{M}^l = V_L^\dagger M V_R, \quad (1.71)$$

donde  $\mathcal{M}^l = \text{Diag}(m_e \ m_\mu \ m_\tau)$ , las entradas de la matriz  $\mathcal{M}^l$  son las masa de los leptones. Si usamos las propiedades de los proyectores quirales, el sector de Yukawa para los leptones es

$$\mathcal{L}_Y^l = -(1 + \frac{h}{v}) \overline{\ell'} \mathcal{M}^l \ell', \quad (1.72)$$

con  $\ell' = \begin{pmatrix} e' \\ \mu' \\ \tau' \end{pmatrix}$ .

Para los quarks, se considera que existen estados de quiralidad derecha para ambos miembros del doblete izquierdo, es decir, el sector de Yukawa correspondiente se escribe como

$$\mathcal{L}_Y^q = -y_{jk}^d \overline{Q_{j,L}} \Phi d_{k,R} - y_{kj}^{d*} \overline{d_{k,R}} \Phi^\dagger Q_{j,L} - y_{jk}^u \overline{Q_{j,L}} \tilde{\Phi} u_{k,R} - y_{kj}^{u*} \overline{u_{k,R}} \tilde{\Phi}^\dagger Q_{j,L}, \quad (1.73)$$

**CAPÍTULO 1. MODELO ESTÁNDAR ELECTRODÉBIL**  
1.4. MODELO ESTÁNDAR ELECTRODÉBIL

---

donde los coeficientes  $y_{jk}^u$  y  $y_{jk}^d$  son también, constantes de Yukawa, y  $Q_{j,L}$  es un doblete quiral izquierdo definido por

$$Q_{j,L} = \begin{pmatrix} u_{j,L} \\ d_{j,L} \end{pmatrix}, \quad (1.74)$$

mientras que,  $u_{j,R}$  y  $d_{j,R}$  son singletes derechos, además, se ha introducido un nuevo objeto  $\tilde{\Phi}$  que se define como

$$\tilde{\Phi} = i\sigma^2\Phi^*, \quad (1.75)$$

donde  $\sigma^2$  es matriz de Pauli. Bajo el grupo de norma  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  estos objetos se transforman de la forma

$$Q_{j,L} \longrightarrow e^{iH_L\alpha(x)}U(x)Q_{j,L}, \quad (1.76)$$

$$d_{j,R} \longrightarrow e^{iH_R^d\alpha(x)}d_{j,R}, \quad (1.77)$$

$$u_{j,R} \longrightarrow e^{iH_R^u\alpha(x)}u_{j,R}, \quad (1.78)$$

$$\tilde{\Phi} \longrightarrow e^{-iy_\phi\alpha(x)}U(x)\tilde{\Phi}, \quad (1.79)$$

donde  $H_L$ ,  $H_R^d$  y  $H_R^u$  son las hipercargas de  $Q_{j,L}$ ,  $d_{j,R}$  y  $u_{j,R}$  respectivamente, si además se satisfacen las relaciones siguientes

$$y_\phi - H_L + H_R^d = 0, \quad (1.80)$$

$$-y_\phi - H_L + H_R^u = 0, \quad (1.81)$$

resulta que la Lagrangiana del sector de Yukawa para los quarks es invariante.

Si implementamos el rompimiento de simetría, se tiene que

$$\mathcal{L}_Y^q = -y_{jk}^u \left(\frac{v+h}{\sqrt{2}}\right) \overline{u_{j,L}} u_{k,R} - y_{jk}^d \left(\frac{v+h}{\sqrt{2}}\right) \overline{d_{j,L}} d_{k,R} + \text{h.c.} \quad (1.82)$$

$$= -D_L M^d D_R - U_L M^u U_R - \frac{h}{v} (D_L M^d D_R + U_L M^u U_R) + \text{h.c.} \quad (1.83)$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}, \quad M^{u,d} = y^{u,d} \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (1.84)$$

Podemos definir en el espacio de sabor las transformaciones

$$D_L = V_L^d D'_L, \quad D_R = V_R^d D'_R, \quad \mathcal{M}^d = V_L^d M^d V_R^d, \quad (1.85)$$

$$U_L = V_L^u U'_L, \quad U_R = V_R^u U'_R, \quad \mathcal{M}^u = V_L^u M^u V_R^u, \quad (1.86)$$

donde las matrices  $\mathcal{M}^d = \text{Diag}(m_d \ m_s \ m_b)$  y  $\mathcal{M}^u = \text{Diag}(m_u \ m_c \ m_t)$  contienen las masas de los quarks. Entonces, el sector de Yukawa para los quarks se escribe como

$$\mathcal{L}_Y^q = -(1 + \frac{h}{v})(\overline{D'} \mathcal{M}^d D' + \overline{U'} \mathcal{M}^u U'), \quad (1.87)$$

con  $D' = \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}$  y  $U' = \begin{pmatrix} u' \\ c' \\ t' \end{pmatrix}$ .

### 1.4.5. El sector de las corrientes

Este sector representa la parte cinética de los fermiones quirales y generan además, interacciones entre fermiones y los bosones de norma, y como consecuencia aparecen corrientes cargadas y neutras.

Tal y como sucede con el sector de Yukawa, conviene definir al sector de las corrientes como la suma de dos términos, es decir

$$\mathcal{L}_C = \mathcal{L}_C^l + \mathcal{L}_C^q, \quad (1.88)$$

donde  $\mathcal{L}_C^l$  y  $\mathcal{L}_C^q$  representan a los sectores de leptones y quarks respectivamente.

La parte correspondiente a los leptones en el sector de las corrientes, se escribe como

$$\mathcal{L}_C^l = \overline{L_{j,L}} i\gamma^\mu D_\mu L_{j,L} + \overline{\ell_{j,R}} i\gamma^\mu D_\mu \ell_{j,R}. \quad (1.89)$$

Conviene mencionar que, las derivadas covariantes que aparecen en el término anterior no son las mismas ya que involucran a objetos que pertenecen a espacios distintos, es decir, la primera derivada covariante actúa sobre dobletes y por tanto debe estar definida sobre el grupo completo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  y tiene la forma

$$D_\mu = \partial_\mu \cdot \mathbb{1}_2 - ig_2 W_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} - ig_1 B_\mu (y_L \cdot \mathbb{1}_2), \quad (1.90)$$

mientras que, la segunda derivada covariante actúa sobre singletes y esta definida sobre el grupo  $U(1)_Y$  y tiene la forma

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_1 y_R B_\mu. \quad (1.91)$$

Implementar el rompimiento de simetría conlleva reescribir el Lagrangiano en términos de los vectores definidos en el espacio de sabor, es decir, el Lagrangiano puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C^l &= \overline{\ell'_L} i\gamma^\mu \partial_\mu \ell'_L + \overline{\ell'_R} i\gamma^\mu \partial_\mu \ell'_R + \overline{\nu'_L} i\gamma^\mu \partial_\mu \nu'_L \\ &+ \frac{g_2}{\sqrt{2}} J_\mu^+ W^{-\mu} + h.c. \\ &+ [g_L^l \overline{\ell'_L} \gamma_\mu \ell'_L + g_R^l \overline{\ell'_R} \gamma_\mu \ell'_R + g_L^\nu \overline{\nu'_L} \gamma_\mu \nu'_L] V^\mu, \end{aligned}$$

donde  $J_\mu^+ = \overline{\nu'_{j,L}} \gamma_\mu \tau^+ \ell'_{j,L}$ ,  $V = \gamma, Z$  y  $\tau^+$  es el operador de subida. Además, se usaron las transformaciones unitarias

$$\ell_L = V_L \ell'_L, \quad \ell_R = V_R \ell'_R, \quad \nu_L = V_L \nu'_L, \quad (1.92)$$

donde se han transformado a los neutrinos con la matriz  $V_L$ , dicha transformación se ha elegido de forma conveniente, de tal manera que elimine los efectos de violación de sabor en las corrientes cargadas. Con la elección anterior, para este caso, el doblete izquierdo se transforma como

$$L_{i,L} = V_{i,j,L} L'_{j,L}. \quad (1.93)$$

Utilizando la definición de  $J_\mu^+$  y las ecuaciones anteriores, se tiene

$$J_\mu^+ = \overline{L'_{i,L}} \gamma_\mu \tau^+ L'_{i,L} = \overline{L_{j,L}} \gamma_\mu V_{ji,L} V_{ik}^\dagger \tau^+ L_{k,L} \quad (1.94)$$

$$= \delta_{jk} \overline{L_{j,L}} \gamma_\mu \tau^+ L_{k,L} = \overline{L_{j,L}} \gamma_\mu \tau^+ L_{j,L}, \quad (1.95)$$

lo cual nos permite concluir que no existe cambio de sabor.

**CAPÍTULO 1. MODELO ESTÁNDAR ELECTRODÉBIL**  
1.4. MODELO ESTÁNDAR ELECTRODÉBIL

---

De manera análoga, para los quarks debemos recordar que existen estados de quiralidad derechos para ambos miembros del doblete quiral izquierdo y por tanto, se puede definir el sector de las corrientes como

$$\mathcal{L}_C^q = \overline{Q_{j,L}} i\gamma^\mu D_\mu Q_{j,L} + \overline{u_{j,R}} i\gamma^\mu D_\mu u_{j,R} + \overline{d_{j,R}} i\gamma^\mu D_\mu d_{j,R}, \quad (1.96)$$

donde las derivadas covariantes que aparecen están definidas como

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu \cdot \mathbb{1}_2 - ig_2 W_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} - ig_1 B_\mu (H_L \cdot \mathbb{1}_2), \\ D_\mu &= \partial_\mu - ig_1 H_R^u B_\mu, \\ D_\mu &= \partial_\mu - ig_1 H_R^d B_\mu. \end{aligned}$$

Usando las transformaciones definidas en el espacio de sabor, el Lagrangiano se escribe

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C^q &= \overline{U'_L} i\gamma^\mu \partial_\mu U'_L + \overline{U'_R} i\gamma^\mu \partial_\mu U'_R + \overline{D'_L} i\gamma^\mu \partial_\mu D'_L + \overline{D'_R} i\gamma^\mu \partial_\mu D'_R \\ &+ \frac{g_2}{\sqrt{2}} J_\mu^+ W^{-\mu} + h.c. \\ &+ [g_L^u \overline{U'_L} \gamma_\mu U'_L + g_R^u \overline{U'_R} \gamma_\mu U'_R + g_L^d \overline{D'_L} \gamma_\mu D'_L + g_R^d \overline{D'_R} \gamma_\mu D'_R] V^\mu, \end{aligned}$$

donde  $J_\mu^+ = \overline{u'_{j,L}} \gamma_\mu \tau^+ d'_{j,L}$ ,  $V = \gamma, Z$ .

Implementar las transformaciones en el espacio de sabor, nos permite concluir:

- Las corrientes neutras conservan el sabor, por ejemplo

$$\overline{U}_L \gamma_\mu U_L = \overline{U'_L} V_L^{u\dagger} \gamma_\mu V_L^u U'_L = \overline{U'_L} \gamma_\mu U'_L, \quad (1.97)$$

algo análogo sucede con los términos

$$\overline{U'_R} \gamma_\mu U'_R, \quad \overline{D'_L} \gamma_\mu D'_L, \quad \overline{D'_R} \gamma_\mu D'_R, \quad (1.98)$$

- Las corrientes cargadas no preservan el sabor de quarks, es decir

$$J_\mu^+ = \overline{u'_{j,L}} \gamma_\mu \tau^+ d'_{j,L} = \overline{U'_L} \gamma_\mu D'_L \quad (1.99)$$

$$= \overline{U}_L \gamma_\mu V_L^u V_L^{d\dagger} D_L = \overline{U}_L \gamma_\mu K D_L, \quad (1.100)$$

donde  $K = V_L^u V_L^{d\dagger}$  es la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)[24–26].

### 1.4.6. La relación de Gell-Mann-Nishijima

Desde el punto de vista de la teoría de grupos, implementar el rompimiento de simetría permite que una teoría que en principio está definida sobre un grupo más grande sea trasladada a un subgrupo del grupo original.

En el caso del MEE, la teoría se define sobre el grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , y después del rompimiento espontáneo de simetría la teoría se define sobre el grupo de la teoría electromagnética  $U(1)_e$ , de modo que aparecen nuevos tensores de campo que establecen la relación entre los grupos mencionados.

La conexión que existe sobre los generadores del grupo completo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  con el generador del grupo  $U(1)_e$  se traduce en la relación de Gell-Mann-Nishijima[27]

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}, \quad (1.101)$$

**CAPÍTULO 1. MODELO ESTÁNDAR ELECTRODÉBIL**  
**1.5. FÍSICA MÁS ALLÁ DEL MODELO ESTÁNDAR**

---

donde  $Y$  es el operador de hipercarga del campo de los fermiones,  $I_3 = \frac{\sigma^3}{2}$  con  $\sigma^3$  la tercera matriz de Pauli y a  $Q$  se le conoce como el operador de carga eléctrica. En la Tabla 1.1 se muestran los valores para la relación de Gell-Mann-Nishijima de los campos quirales fermiónicos:

	$I_3$	$Y$	$Q$
$L_{j,L}^T = (\nu_{j,L} \quad \ell_{j,L})$	$(\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2})$	$y_L = -1$	$(0 \quad -1)$
$\ell_{j,R}$	0	$y_R = -2$	-1
$Q_{j,L}^T = (u_{j,L} \quad d_{j,L})$	$(\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2})$	$H_L = \frac{1}{3}$	$(\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3})$
$u_{j,R}$	0	$H_R^u = \frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
$d_{j,R}$	0	$H_R^d = -\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Tabla 1.1: Valores de  $I_3, Y, Q$  para los campos fermiónicos del MEE

## 1.5. Física más allá del Modelo Estándar

La física de neutrinos es uno de los temas más estudiados actualmente dentro del área de física de partículas, son sumamente reelevantes ya que su entendimiento nos permitiría comprender fenómenos ocurridos dentro de agujeros negros y en explosiones estelares. En el momento en que se propuso la existencia de dichas partículas, se consideró que la masa de los neutrinos era del orden de la masa del electrón o incluso carentes de masa.

Pese a que el ME propone neutrinos no masivos, los descubrimientos acerca de las oscilaciones de neutrinos demuestran que los neutrinos poseen masa[10, 11].

El origen de neutrinos masivos es uno de los problemas más fundamentales en la física de neutrinos, y se han propuesto diversos modelos que explican el mecanismo mediante el cual los neutrinos adquieren masa, en esta sección se analiza brevemente los casos en que los neutrinos son partículas de Dirac o de Majorana y sus principales diferencias.

### 1.5.1. Neutrinos de Dirac

Los neutrinos de Dirac pueden ser generados mediante el mecanismo de Higgs dentro del sector de Yukawa del MEE, para ello es necesario introducir en el sector de leptones un singlete quiral derecho  $\nu_{j,R}$ , de esta manera, la asimetría en el MEE entre los leptones y quarks es eliminada. Este nuevo objeto permite escribir a la Lagrangiana del sector de Yukawa como[27, 28]

$$\mathcal{L}_Y^l = -y_{jk}^l \overline{L_{j,L}} \Phi \ell_{k,R} - y_{jk}^{\nu} \overline{L_{j,L}} \tilde{\Phi} \nu_{j,R} + \text{h.c.} \quad (1.102)$$

donde  $y_{j,k}^l, y_{j,k}^{\nu}$  son nuevas constantes de Yukawa. Mediante la implementación del Mecanismo de Higgs, se tiene que

$$\mathcal{L}_Y^l = -y_{jk}^l \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{\ell_{j,L}} \ell_{k,R} - y_{kj}^{\nu} \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{\nu_{j,R}} \nu_{k,L} + \dots \quad (1.103)$$

$$= -\overline{\ell}_L M^l \ell_R - \overline{\nu}_L M^{\nu} \nu_R + \text{h.c} + \dots \quad (1.104)$$

donde  $M^{l,\nu}$  son matrices  $3 \times 3$  con coeficientes  $M_{jk}^{l,\nu} = y_{jk}^{l,\nu} \frac{v}{\sqrt{2}}$  y además

$$\ell = \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}, \quad \nu = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_{\mu} \\ \nu_{\tau} \end{pmatrix}, \quad (1.105)$$

$$(1.106)$$

**CAPÍTULO 1. MODELO ESTÁNDAR ELECTRODÉBIL**  
1.5. FÍSICA MÁS ALLÁ DEL MODELO ESTÁNDAR

---

si definimos las transformaciones

$$\ell_L = V_L^l \ell'_L, \quad \ell_R = V_R^l \ell'_R, \quad \mathcal{M}^l = V_L^l M^l V_R^l, \quad (1.107)$$

$$\nu_L = V_L^\nu \nu'_L, \quad \nu_R = V_R^\nu \nu'_R, \quad \mathcal{M}^\nu = V_L^\nu M^\nu V_R^\nu, \quad (1.108)$$

donde las matrices  $\mathcal{M}^l = \text{Diag}(m_e \ m_\mu \ m_\tau)$  y  $\mathcal{M}^\nu = \text{Diag}(m_{\nu_e} \ m_{\nu_\mu} \ m_{\nu_\tau})$  contienen las masas de los leptones cargados y neutrinos respectivamente. Si usamos las propiedades de los proyectores quirales, entonces, el sector de Yukawa para los leptones se escribe en la norma unitaria como

$$\mathcal{L}_Y^l = -(1 + \frac{h}{v})(\bar{\ell}' \mathcal{M}^l \ell' + \bar{\nu}' \mathcal{M}^\nu \nu'), \quad (1.109)$$

con  $\ell' = \begin{pmatrix} e' \\ \mu' \\ \tau' \end{pmatrix}$  y  $\nu' = \begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu'_\mu \\ \nu'_\tau \end{pmatrix}$ .

La introducción de neutrinos quirales derechos induce mezclas en el sector de las corrientes, estas mezclas involucran a tres sabores de neutrinos ligeros que experimentan interacciones débiles con los bosones  $Z$  y  $W$ , y las corrientes cargadas dependen del producto

$$U = V_L^{l\dagger} V_L^\nu, \quad (1.110)$$

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix}, \quad (1.111)$$

donde tal y como ocurre en el sector de los quarks con la matriz CKM,  $U$  es la matriz de mezcla en el sector de los leptones, usualmente llamada Matriz PMNS (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata). La matriz anterior permite establecer una relación entre los eigenestados de sabor  $\nu_\alpha$  y los eigenestados de masa  $\nu_i$  como

$$\nu_\alpha = U \nu_i, \quad (1.112)$$

donde  $\nu_\alpha = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$  y  $\nu_i = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$ .

La matriz PMNS involucra parámetros fundamentales del sector leptónico del MEE, y debido a que  $U$  es una matriz unitaria puede ser descrita por cuatro variables independientes, tres ángulos de mezcla  $\theta_{ij}$  y una fase de Dirac  $\delta$  que caracteriza una posible violación CP. La parametrización de la matriz PMNS es diferente para partículas de Dirac o de Majorana, en el caso de neutrinos de Dirac, la parametrización conveniente es[27]

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (1.113)$$

donde  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$  y  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ . Los valores de los ángulos de mezcla y la fase de Dirac se encuentran en los rangos  $0 \leq \theta_{ij} \leq \frac{\pi}{2}$  y  $0 \leq \delta \leq 2\pi$ .

### 1.5.2. Neutrinos de Majorana

La teoría de Dirac está caracterizada por la ecuación

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (1.114)$$

donde  $\psi$  es un espinor de Dirac, si escribimos al espinor en términos de los proyectores quirales se obtienen las ecuaciones

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R = m\psi_L, \quad (1.115)$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = m\psi_R, \quad (1.116)$$

**CAPÍTULO 1. MODELO ESTÁNDAR ELECTRODÉBIL**  
**1.5. FÍSICA MÁS ALLÁ DEL MODELO ESTÁNDAR**

---

donde  $\psi_L$  y  $\psi_R$  son campos espinoriales, comúnmente llamados espinores de Weyl. Usando las propiedades de las matrices de Dirac, se puede probar que se satisface la relación

$$-i\partial_\mu \bar{\psi}_R \gamma^\mu = m\bar{\psi}_L. \quad (1.117)$$

Si ahora, usamos la matriz de conjugación de carga  $C$  y sus propiedades<sup>1</sup>, la ecuación anterior puede ser reescrita como

$$i\gamma^\mu \partial_\mu C \bar{\psi}_R^{-T} = mC \bar{\psi}_L^{-T}. \quad (1.118)$$

Si suponemos además que se satisface la relación entre los campos quirales  $\psi_L$  y  $\psi_R$  como  $\psi_R = \xi C \bar{\psi}_L^{-T}$  comúnmente llamada relación de Majorana, donde  $\xi$  es alguna fase compleja y por simplicidad se elige  $\xi = 1$  entonces las ecuaciones (1.115) y (1.116) son equivalentes. Con la relación de Majorana es posible escribir al espinor  $\psi$  como

$$\begin{aligned} \psi &= C \bar{\psi}^T \\ &= \psi^C, \end{aligned} \quad (1.119)$$

donde  $\psi^C$  es el campo de carga conjugada.

La ec. (1.119) es también llamada relación de Majorana y nos establece de manera clara que en el contexto considerado, la partícula fermiónica caracterizada por  $\psi$  coincide con su antipartícula. Bajo tales circunstancias se dice que  $\psi$  es un campo de Majorana.

Con las conclusiones anteriores podemos definir a la Lagrangiana de Majorana como[27, 29]

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}(\bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi), \quad (1.120)$$

donde  $\psi$  es un campo de Majorana, y el segundo término de la Lagrangiana representa un término de masa.

Para neutrinos de Majorana, contrariamente a los neutrinos de Dirac, la parametrización de la matriz PMNS requiere de dos fases complejas adicionales, entonces la matriz  $U$  se escribe como

$$U = U^D D^M, \quad (1.121)$$

donde  $U^D$  es la parametrización de la matriz  $U$  para el caso de neutrinos de Dirac, y  $D^M = \text{diag}(e^{i\alpha} \quad e^{i\beta} \quad 1)$ , y  $\alpha, \beta$  son las fases adicionales necesarias, llamadas fases de Majorana.

---

<sup>1</sup>Algunas propiedades importantes de la matriz de conjugación de carga se encuentran en el Apéndice A.



## Capítulo 2

# Teorías Efectivas

Estudiar un sistema físico consiste en proponer un modelo que permita describir correctamente las propiedades del sistema, para ello, es importante también determinar las limitaciones que presenta nuestro modelo. Algunas características que debe incluir nuestro modelo de descripción son la cantidad de cuerpos interactuantes, la intensidad de interacción, las escalas de energía, entre otras.

El propósito de una teoría efectiva es describir la dinámica de un sistema para energías inferiores a una escala dada  $\Lambda$  en donde los efectos que se presentan a energías superiores de esta escala se encuentran incluidos a través de constantes de acoplamiento, términos de interacción, constricciones de simetría o en algún otro parámetro de la teoría efectiva y no de manera explícita dentro de la misma.

La interacción débil a bajas energías, por ejemplo, está descrita por interacciones puntuales caracterizadas por la constante de Fermi  $G_F$ , y que para procesos con energías mayores a 100 GeV es necesario incluir en la teoría los campos  $W$  y  $Z$ . Dicho de otra forma, si tenemos una teoría cuyos procesos involucrados están caracterizados por una escala de energía  $\Lambda$ , si incrementamos la energía deberá ocurrir que nuevos grados de libertad serán relevantes y han de incluirse en la teoría. Si por el contrario, disminuyéramos la energía, deberá ocurrir que algunos grados de libertad dejan de ser relevantes en el espectro de estados accesibles.

Es posible construir una teoría efectiva a partir de una teoría más fundamental caracterizada por algún grupo de simetría; definimos el *Lagrangiano efectivo* [30, 31] como

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \sum_i \alpha_i(\Lambda) \mathcal{O}_i, \quad (2.1)$$

donde  $\alpha_i$  son constantes de acoplamiento dependientes de la escala de energía, y  $\mathcal{O}_i$  son operadores construidos a partir de los campos asociados al grupo de simetría de baja energía.

Con respecto a las constantes de acoplamiento, estas se determinan ajustando las predicciones de nuestra teoría con los resultados experimentales, y en ellas se encuentran contenidos todos los efectos asociados a partículas cuya masa es mayor a la escala de energía  $\Lambda$ . Construir una teoría efectiva conlleva determinar estas cantidades y sus correcciones; en la siguiente sección se mostrará de manera simplificada como construir un término de lagrangiano efectivo.

## 2.1. Construcción de lagrangianos efectivos

### 2.1.1. Integración de los modos pesados

Dada una teoría subyacente es posible construir un término de lagrangiano efectivo por medio de la integración explícita de los modos pesados en la funcional generatriz.

Consideremos una teoría de campo, arbitraria, donde es posible distinguir los campos ligeros y pesados<sup>2</sup>, definimos a  $\Phi_l$  y  $\Phi_h$  como los campos ligeros y pesados, respectivamente; la funcional generatriz que describe a la teoría completa es[32]:

$$\int [d\Phi_l][d\Phi_h] e^{iS[\Phi_l, \Phi_h]}, \quad (2.2)$$

con  $S[\Phi_l, \Phi_h]$  la acción clásica de nuestra teoría.

Podemos hacer uso de la formulación de integrales de trayectoria, de modo que nuestra acción efectiva  $\Gamma_{\text{eff}}$  es

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[\Phi_l]} = \int [d\Phi_h] e^{iS[\Phi_l, \Phi_h]}, \quad (2.3)$$

y el lagrangiano efectivo se define por

$$\Gamma_{\text{eff}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}. \quad (2.4)$$

Lo anterior permite calcular las observables físicas a bajas energías mediante la integración de los campos ligeros. Es posible, en principio, calcular la acción efectiva, desarrollando una expansión en serie de Taylor de la acción clásica con respecto de los campos pesados alrededor de una configuración de los campos  $\bar{\Phi}_h$ :

$$\begin{aligned} S[\Phi_l, \Phi_h] = & S[\Phi_l, \bar{\Phi}_h] + \int dx \frac{\delta S}{\delta \Phi_h(x)} \Big|_{\Phi_h = \bar{\Phi}_h} (\Phi_h(x) - \bar{\Phi}_h(x)) \\ & + \frac{1}{2} \int dx dy \frac{\delta^2 S}{\delta \Phi_h(x) \delta \Phi_h(y)} \Big|_{\Phi_h = \bar{\Phi}_h} \\ & \times (\Phi_h(x) - \bar{\Phi}_h(x)) (\Phi_h(y) - \bar{\Phi}_h(y)) + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

En particular, supóngase que se satisface el principio de Hamilton, es decir

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi_h(x)} \Big|_{\Phi_h = \bar{\Phi}_h} = 0. \quad (2.6)$$

Observe que en este caso  $\bar{\Phi}_h$  es una funcional de  $\Phi_l$ , y se puede escribir como  $\bar{\Phi}_h = \bar{\Phi}_h(x, \Phi_l)$ . Empleando estos resultados tenemos que

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[\Phi_l]} = e^{iS[\Phi_l, \bar{\Phi}_h]} \int [d\Phi_h] e^{i \int dx dy \left\{ \frac{1}{2} (\Phi_h(x) - \bar{\Phi}_h(x)) A(x, y) (\Phi_h(y) - \bar{\Phi}_h(y)) + \dots \right\}}, \quad (2.7)$$

con  $A(x, y) = \frac{\delta^2 S}{\delta \Phi_h(x) \delta \Phi_h(y)} \Big|_{\Phi_h = \bar{\Phi}_h}$ .

La integral anterior es una integral gaussiana y su solución es bien conocida, si además, por simplicidad, suponemos que los campos pesados son bosónicos, tenemos que

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[\Phi_l, \Phi_h]} = e^{iS[\Phi_l, \bar{\Phi}_h]} \text{Det}^{-\frac{1}{2}} A. \quad (2.8)$$

---

<sup>2</sup>En el espacio de los momentos, definimos a campos pesados como aquellos que satisfacen  $p^2 + m^2 > \Lambda^2$ , donde  $\Lambda$  es la escala de energía elegida, y  $m$  la masa asociada al campo. Por otro lado, los campos ligeros son aquellos que no satisfacen la condición anterior.

Resulta que se satisface la siguiente identidad

$$\text{Det}^{-\frac{1}{2}} A = e^{-\frac{1}{2}\text{Tr}(\text{Log}A)}, \quad (2.9)$$

finalmente se tiene que la acción efectiva es

$$\Gamma_{\text{eff}} = S[\Phi_l, \bar{\Phi}_h] + \frac{i}{2}\text{Tr}(\text{Log}A[\Phi_l]) + \dots \quad (2.10)$$

Conviene observar que la expansión en serie de Taylor anterior no es más que una expansión en el número de lazos (*loops*) o en otras palabras, en potencias de la constante de Planck, y que el primer término de la ec. anterior corresponde a una integración a nivel de árbol del campo pesado  $\Phi_h$ .

### 2.1.2. Expansión de la acción a baja energía

Pese a que hemos encontrado una expresión general para la acción efectiva, en la práctica, realizar el cálculo para los campos ligeros después de haber integrado los campos pesados no es una tarea sencilla, para ello, dado una teoría, consistiría en calcular la traza del logaritmo del operador  $A(x, y)$ .

Sin embargo, existe un método muy general, en el cual en muchos casos es posible encontrar  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  como una expansión en el número de derivadas de los campos ligeros sobre algún parámetro dimensional  $M$ . Si consideramos funciones de Green en el espacio de los momentos, esto correspondería a una expansión en potencias de  $p/M$ , donde  $p$  es algún momento externo. De manera que, si estamos interesados sólo en la dinámica a bajas energías de los modos ligeros, la expansión de derivadas nos ofrece una manera sistemática y eficaz de obtener  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ . Con el fin de ilustrar el uso de lagrangianos efectivos, mostraremos en la próxima sección algunos ejemplos simples de lo anterior.

## 2.2. Lagrangianos efectivos para procesos con corrientes a bajas energías

La energía involucrada en muchos fenómenos en la física de altas energías es mucho más pequeña que las masas de los bosones  $W$  y  $Z$ , por ejemplo, la energía involucrada en decaimientos de partículas, con excepción de los procesos que involucran a quarks del tipo top, tienen masas menores a 100 GeV. Los procesos anteriores son considerados procesos a bajas energías, consideremos por ejemplo, en el espacio de los momentos, las expresiones analíticas para los propagadores de los bosones, son aproximadamente[27]:

$$G_{\mu\nu}^{(W)}(p) \xrightarrow{|k|^2 \ll m_W^2} i \frac{g_{\mu\nu}}{m_W^2}, \quad G_{\mu\nu}^{(Z)}(p) \xrightarrow{|k|^2 \ll m_Z^2} i \frac{g_{\mu\nu}}{m_Z^2}. \quad (2.11)$$

Entonces, las líneas bosónicas interiores en los diagramas de Feynman representan procesos a bajas energías que se pueden contraer en un punto. En el caso de procesos con corrientes cargadas, esta contracción conduce a una interacción efectiva de cuatro fermiones descrita por el lagrangiano

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{CC}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_{W\mu}^\dagger J_W^\mu, \quad (2.12)$$

con  $G_F = 1,16637 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ . Por otro lado, la contracción del propagador bosónico  $W$  conduce a un vértice de cuatro fermiones cuya expresión analítica dada por las reglas de Feynman es

$$-i \frac{g_2^2}{8m_W^2} V_{f_2 f_1} V_{f_4 f_3} \dots \gamma^\mu (\mathbb{1}_4 - \gamma^5) \dots \gamma^\mu (\mathbb{1}_4 - \gamma^5) \dots \quad (2.13)$$

## CAPÍTULO 2. TEORÍAS EFECTIVAS

### 2.2. LAGRANGIANOS EFECTIVOS PARA PROCESOS CON CORRIENTES A BAJAS ENERGÍAS

donde los factores  $V_{f_2 f_1}, V_{f_4 f_3}$  son elementos de la matriz de mezcla en el caso de los quarks. La Fig. (2.1) muestra la contracción del proceso anterior.

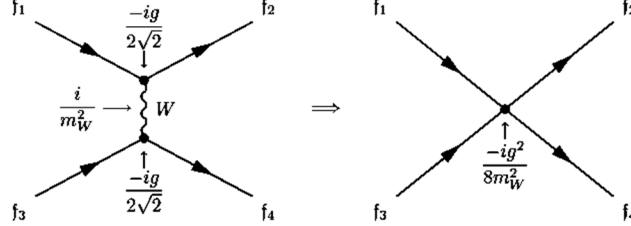


Figura 2.1: Contracción del propagador bosónico  $W$  en un proceso con corriente cargada a bajas energías.

Para una lagrangiana de interacción, las reglas de Feynman, nos permiten asociar expresiones analíticas para cada elemento que constituye un diagrama. La regla de Feynman asociada a un vértice de cuatro fermiones está dada por

$$-i \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{f_2 f_1} V_{f_4 f_3} \dots \gamma^\mu (\mathbb{1}_4 - \gamma^5) \dots \gamma^\mu (\mathbb{1}_4 - \gamma^5) \dots \quad (2.14)$$

Podemos comparar las ec's. (2.13) y (2.14), de modo que obtenemos la siguiente relación

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_2^2}{8m_W^2}, \quad (2.15)$$

además, se tiene que se cumple  $m_W = \frac{g_2 v}{2}$ , por tanto, tenemos la relación

$$v = (\sqrt{2}G_F)^{-\frac{1}{2}} = 246\text{GeV}. \quad (2.16)$$

Pensemos ahora, en un proceso con corriente neutra a bajas energías. La contracción del propagador bosónico  $Z$  conduce a una interacción efectiva de cuatro fermiones descrita por el lagrangiano efectivo

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{NC}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_Z^\mu J_{Z\mu}. \quad (2.17)$$

La contracción del proceso anterior se ilustra en la Fig. (2.2), usando la ec. (2.15) se tiene que

$$\frac{g_2^2}{4\cos^2\theta_W m_Z^2} = \frac{2G_F}{\sqrt{2}} \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2\theta_W}. \quad (2.18)$$

Resulta además que  $m_Z = \frac{m_W}{\cos\theta_W}$ , de modo que la ec. anterior se reduce a

$$\frac{2G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_2^2}{4\cos^2\theta_W m_Z^2}. \quad (2.19)$$

Por otro lado, la regla de Feynman asociada este proceso es

$$-i \frac{g_2}{2\cos\theta_W} \dots \gamma_\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5) \dots \gamma_\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5) \dots \quad (2.20)$$

que puede ser reescrita como

$$-2i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \dots \gamma^\mu (g_V^{f_1} - g_A^{f_1} \gamma^5) \dots \gamma^\mu (g_V^{f_2} - g_A^{f_2} \gamma^5) \dots \quad (2.21)$$

donde  $g_V^f, g_A^f$  son coeficientes para los campos fermiónicos.

Recordemos que se satisface la relación  $e = g_2 \sin \theta_W$ , donde  $e$  es la carga elemental, y si definimos el parámetro  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ , sustituyendo todo lo anterior se cumple que

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{\pi\alpha}{2\sin^2\theta_W \cos^2\theta_W m_Z^2}. \quad (2.22)$$

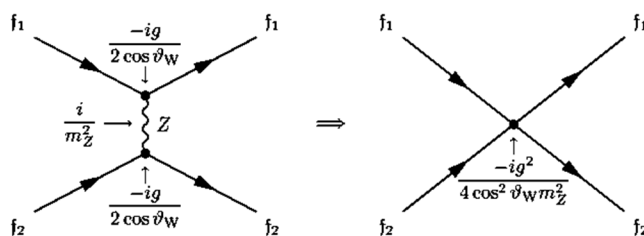


Figura 2.2: Contracción del propagador bosónico  $Z$  en un proceso con corriente neutra a bajas energías.

Con los ejemplos anteriores podemos observar unas características importantes de los lagrangianos efectivos.

### 2.3. Características generales de lagrangianos efectivos

1. Dada una teoría subyacente es posible obtener un término de lagrangiano efectivo a bajas energías, mediante la integración funcional de los modos pesados.
2. Si no se conociese una teoría fundamental, el lagrangiano efectivo podría obtenerse a partir de consideraciones de simetría, y los parámetros a obtener se deben ajustar a los resultados experimentales.
3. La acción efectiva puede ser expandida en una serie infinita de operadores que sólo dependen de los campos ligeros.
4. Si se emplean diagramas de Feynman y sus respectivas expresiones analíticas, la integración de lazos (*loops*) podría contener divergencias que en principio, no pueden ser absorbidas por los parámetros del lagrangiano ni por renormalización. Si se deseara remover estas divergencias, se tendrían que introducir términos de mayor dimensión.
5. La naturaleza de un lagrangiano efectivo es incorporar los efectos virtuales de partículas pesadas en los procesos de partículas ligeras, teniendo una expansión en potencias de  $\frac{1}{M}$ .



## Capítulo 3

# El operador de Weinberg

Al final del capítulo anterior se mencionó que inicialmente el modelo estándar postula que los neutrinos carecen de masa, y que los experimentos recientes sobre las oscilaciones de neutrinos nos permitieron establecer que los neutrinos poseen masa distinta de cero, y la forma en que adquieren masa establece si se trata de neutrinos de Dirac o neutrinos de Majorana.

A pesar de que definimos una lagrangiana de Majorana no esclarecimos cómo los neutrinos adquieren masa de Majorana, el motivo del capítulo siguiente es mostrar un término de lagrangiano efectivo que permita dotar de masa de Majorana a los neutrinos.

### 3.1. El operador de Weinberg

Los neutrinos son dotados con masa de Majorana a través del término de lagrangiano efectivo

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{2}c_{\alpha\beta}^5 \left( \overline{L_{\alpha,L}^c} \tilde{\phi}^* \right) \left( \tilde{\phi}^\dagger L_{\beta,L} \right) + \text{h.c.} \quad (3.1)$$

comunmente llamado operador de Weinberg[33, 34].

El producto de campos involucrados en el operador de Weinberg tiene unidades  $(\text{masa})^5$ , por lo que debe ocurrir que los coeficientes  $c_{\alpha\beta}^5$  tengan unidades de  $(\text{masa})^{-1}$ , lo cual es coherente, ya que una lagrangiana definida en cuatro dimensiones de espacio-tiempo debería tener unidades de  $(\text{masa})^4$ .

La lagrangiana definida anteriormente involucra a un doblete leptónico de  $SU(2)_L$

$$L_{\alpha,L} = \begin{pmatrix} \nu_{\alpha,L} \\ \ell_{\alpha,L} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

con quiralidad izquierda, así como el doblete de carga conjugada

$$L_{\alpha,L}^c = C \overline{L_{\alpha,L}}^T, \quad (3.3)$$

donde  $C$  es la matriz de conjugación de carga. Además, tenemos al doblete de Higgs

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

y al objeto  $\tilde{\phi} = i\sigma^2\phi^*$ , donde  $\sigma^2$  es la matriz de Pauli imaginaria.

Recordemos que el doblete de Higgs tiene un mínimo de potencial en el punto  $\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ , donde  $v = 246$  GeV es el valor de expectación del vacío.

**CAPÍTULO 3. EL OPERADOR DE WEINBERG**  
3.1. EL OPERADOR DE WEINBERG

---

Si al operador de Weinberg le implementamos el rompimiento de simetría a través del cambio de base

$$\phi(x) = \phi_0 + \xi(x), \quad (3.5)$$

con

$$\xi(x) = \left( \begin{array}{c} G_W^+(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(h(x) + iG_Z(x)) \end{array} \right), \quad (3.6)$$

y omitiendo los términos que involucran a pseudo-bosones de Goldstone, entonces el operador de Weinberg se ve como

$$\mathcal{L}_W = -\frac{v^2}{4}c_{\alpha\beta}^5\overline{\nu_{\alpha,L}^c}\nu_{\beta,L} - \frac{v}{2}c_{\alpha\beta}^5h\overline{\nu_{\alpha,L}^c}\nu_{\beta,L} - \frac{1}{4}c_{\alpha\beta}^5h^2\overline{\nu_{\alpha,L}^c}\nu_{\beta,L} + \text{h.c.} + \dots \quad (3.7)$$

si escribimos de manera explícita los términos hermitianos adjuntos, el operador de Weinberg se escribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W = & -\frac{v^2}{4}c_{\alpha\beta}^5\overline{\nu_{\alpha,L}^c}\nu_{\beta,L} + \left(-\frac{v^2}{4}c_{\alpha\beta}^5\overline{\nu_{\alpha,L}^c}\nu_{\beta,L}\right)^\dagger - \frac{v}{2}c_{\alpha\beta}^5h\overline{\nu_{\alpha,L}^c}\nu_{\beta,L} \\ & + \left(-\frac{v}{2}c_{\alpha\beta}^5h\overline{\nu_{\alpha,L}^c}\nu_{\beta,L}\right)^\dagger - \frac{1}{4}c_{\alpha\beta}^5h^2\overline{\nu_{\alpha,L}^c}\nu_{\beta,L} + \left(-\frac{1}{4}c_{\alpha\beta}^5h^2\overline{\nu_{\alpha,L}^c}\nu_{\beta,L}\right)^\dagger. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dados dos espinores de Dirac  $\psi_1$  y  $\psi_2$  y usando las propiedades de la matriz de conjugación de carga  $C$ , es fácil probar que

$$(\overline{\psi_1^c}\psi_2)^\dagger = \overline{\psi_2}\psi_1^c. \quad (3.9)$$

Si hacemos uso de la expresión anterior, el operador de Weinberg se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W = & -\frac{v^2}{4}c_{\alpha\beta}^5\overline{\nu_{\alpha,L}^c}\nu_{\beta,L} - \frac{v^2}{4}c_{\alpha\beta}^{5*}\overline{\nu_{\beta,L}}\nu_{\alpha,L}^c - \frac{v}{2}c_{\alpha\beta}^5h\overline{\nu_{\alpha,L}^c}\nu_{\beta,L} \\ & - \frac{v}{2}c_{\alpha\beta}^{5*}h\overline{\nu_{\beta,L}}\nu_{\alpha,L}^c - \frac{1}{4}c_{\alpha\beta}^5h^2\overline{\nu_{\alpha,L}^c}\nu_{\beta,L} - \frac{1}{4}c_{\alpha\beta}^{5*}h^2\overline{\nu_{\beta,L}}\nu_{\alpha,L}^c. \end{aligned} \quad (3.10)$$

No se probará de manera explícita, pero se satisface que los coeficientes  $c_{\alpha\beta}^5$  son objetos simétricos, es decir, se cumple que  $c_{\alpha\beta}^5 = c_{\beta\alpha}^5$ .

Sobre la ec. (3.10), se observa que después del rompimiento espontáneo de simetría, los dos primeros términos del lado derecho de la ecuación son, para el caso  $\alpha = \beta$ , muy parecidos a los términos de masa de Majorana vistos en la ec. (1.120). Explícitamente,

$$-\frac{v^2}{4}c_{\alpha\alpha}^5\overline{\nu_{\alpha,L}^c}\nu_{\alpha,L} - \frac{v^2}{4}c_{\alpha\alpha}^{5*}\overline{\nu_{\alpha,L}}\nu_{\alpha,L}^c = -\frac{v^2}{4}(c_{\alpha\alpha}^5\overline{\nu_{\alpha,L}^c}\nu_{\alpha,L} - c_{\alpha\alpha}^{5*}\overline{\nu_{\alpha,L}}\nu_{\alpha,L}^c).$$

Si  $c_{\alpha\alpha}^5$  es una cantidad real, entonces se encuentra un término de masa de Majorana

$$-\frac{m_{\nu_\alpha}}{2}(\overline{\nu_{\alpha,L}^c}\nu_{\alpha,L} + \overline{\nu_{\alpha,L}}\nu_{\alpha,L}^c), \quad (3.11)$$

con  $m_{\nu_\alpha} = \frac{v^2 c_{\alpha\alpha}^5}{2}$ .

Sin embargo, es importante no perder de vista que los factores  $c_{\alpha\beta}^5$  no tienen por qué ser reales. Para definir correctamente los términos de masa, se tiene que llevar a cabo un proceso de diagonalización para así definir la base de los eigenneutrinos de masa, este proceso de diagonalización se hará más adelante.

### 3.2. Decaimiento $h \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$

Usando los acoplamientos hallados tras la implementación del mecanismo de Higgs, podemos, por ejemplo, estudiar decaimientos del boson de Higgs en pares de neutrinos con y sin cambio de sabor. Para hacerlo, nos fijamos en los campos de Majorana

$$\nu_\alpha = \nu_{\alpha,L} + \nu_{\alpha,L}^c, \quad (3.12)$$

sin quiralidad definida y los cuales satisfacen la condición de Majorana

$$\nu_\alpha^c = \nu_\alpha \quad (3.13)$$

, que también se escribe como

$$C\overline{\nu_\alpha}^T = \nu_\alpha, \quad (3.14)$$

donde  $\nu_{\alpha,L}$  es un campo quiral izquierdo, es decir, se satisface que

$$P_L \nu_{\alpha,L} = \nu_{\alpha,L}, \quad (3.15)$$

$$P_R \nu_{\alpha,L} = 0, \quad (3.16)$$

con  $P_L$  y  $P_R$ , matrices de proyección quiral, definidas como

$$P_L = \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 - \gamma_5), \quad (3.17)$$

$$P_R = \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 + \gamma_5), \quad (3.18)$$

con  $\gamma_5$  matriz hermitiana definida como  $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ .

La definición de la matriz  $\gamma_5$  permite establecer que las matrices  $P_L$  y  $P_R$  son matrices hermitianas<sup>3</sup>, y además ha de satisfacerse

$$C(\gamma_5)^T C^{-1} = \gamma_5. \quad (3.19)$$

Si hacemos uso de la relación anterior puede probarse que

$$P_L \nu_{\alpha,L}^c = 0, \quad (3.20)$$

$$P_R \nu_{\alpha,L}^c = \nu_{\alpha,L}^c, \quad (3.21)$$

es decir, si  $\nu_{\alpha,L}$  es un campo quiral izquierdo, entonces  $\nu_{\alpha,L}^c$  es un campo quiral derecho. Entonces, han de satisfacerse también

$$P_L \nu_\alpha = \nu_{\alpha,L}, \quad (3.22)$$

$$P_R \nu_\alpha = \nu_{\alpha,L}^c. \quad (3.23)$$

Consideremos ahora los acoplamientos

$$-\frac{v}{2}c_{\alpha\beta}^5 h \overline{\nu_{\alpha,L}^c} \nu_{\beta,L} - \frac{v}{2}c_{\alpha\beta}^{5*} h \overline{\nu_{\beta,L}} \nu_{\alpha,L}^c, \quad (3.24)$$

si empleamos el álgebra de Dirac, puede probarse que

$$\overline{\nu_{\beta,L}} = \overline{\nu_\beta} P_R, \quad (3.25)$$

de modo que, si usamos la relación anterior, la definición de campo quiral y la condición de Majorana, entonces

$$-\frac{v}{2}c_{\alpha\beta}^{5*} h \overline{\nu_{\beta,L}} \nu_{\alpha,L}^c = -\frac{v}{2}c_{\alpha\beta}^{5*} h \overline{\nu_\beta} P_R \nu_\alpha. \quad (3.26)$$

<sup>3</sup>Más propiedades de las matrices de proyección quiral se encuentran en el Apéndice A.

### CAPÍTULO 3. EL OPERADOR DE WEINBERG

#### 3.2. DECAIMIENTO $H \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$

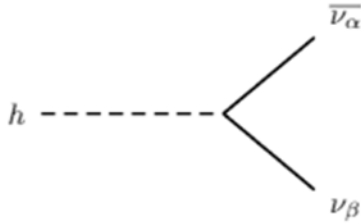
Siguiendo un proceso análogo es posible demostrar que

$$-\frac{v}{2}c_{\alpha\beta}^5 h \overline{\nu_{\alpha,L}^c} \nu_{\beta,L} = -\frac{v}{2}c_{\alpha\beta}^5 h \overline{\nu_\alpha} P_L \nu_\beta. \quad (3.27)$$

Sumando las dos expresiones anteriores, entonces

$$\begin{aligned} -\frac{v}{2}c_{\alpha\beta}^5 h \overline{\nu_{\alpha,L}^c} \nu_{\beta,L} - \frac{v}{2}c_{\alpha\beta}^{5*} h \overline{\nu_{\beta,L}^c} \nu_{\alpha,L} &= -\frac{v}{2}c_{\alpha\beta}^5 h \overline{\nu_\alpha} P_L \nu_\beta - \frac{v}{2}c_{\alpha\beta}^{5*} h \overline{\nu_\beta} P_R \nu_\alpha \\ &= -\frac{v}{2}c_{\alpha\beta}^5 h \overline{\nu_\alpha} P_L \nu_\beta - \frac{v}{2}c_{\alpha\beta}^{5*} h \overline{\nu_\alpha} P_R \nu_\beta \\ &= -\frac{v}{2}h \overline{\nu_\alpha} (c_{\alpha\beta}^5 P_L + c_{\alpha\beta}^{5*} P_R) \nu_\beta. \end{aligned}$$

A partir de este término Lagrangiano se deduce la regla de Feynman siguiente



$$= -\frac{iv}{2} (c_{\alpha\beta}^5 P_L + c_{\alpha\beta}^{5*} P_R)$$

Figura 3.1: Diagrama de Feynman para el decaimiento  $h \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$ .

Consideremos el decaimiento del bosón de Higgs en pares de neutrinos, es decir,  $h \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$ , donde conviene distinguir dos casos: (1)  $\alpha = \beta$ ; (2)  $\alpha \neq \beta$ . A nivel de árbol, el elemento invariante de matriz para este proceso, denotado con  $\mathcal{M}(h(p_1) \rightarrow \nu_\alpha(p_2) \nu_\beta(p_3))$ , se expresa diagramáticamente en el caso (1) como la suma de los diagramas:

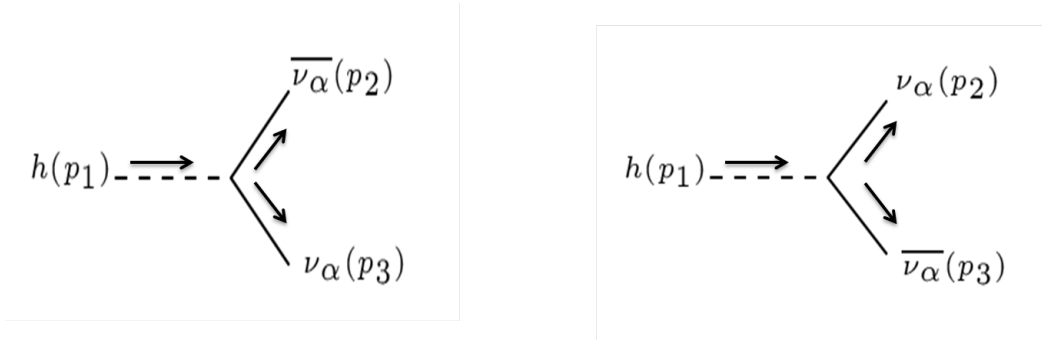


Figura 3.2: Diagramas de Feynman que contribuyen a la amplitud del decaimiento  $h \rightarrow \nu_\alpha \nu_\alpha$ .

La razón por la que el decaimiento de un bosón de Higgs en un par de neutrinos sin cambio de sabor se pueda expresar como la suma de dos diagramas de Feynman tiene que ver con el hecho de que en el caso de Majorana los neutrinos son indistinguibles de los antineutrinos.

## CAPÍTULO 3. EL OPERADOR DE WEINBERG

### 3.2. DECAIMIENTO $H \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$

Las expresiones analíticas de estos diagramas respectivamente son

$$-\overline{u}_\alpha(p_2) \frac{iv}{2} (c_{\alpha\alpha}^5 P_L + c_{\alpha\alpha}^{5*} P_R) v_\alpha(p_3), \quad (3.28)$$

$$\overline{u}_\alpha(p_3) \frac{iv}{2} (c_{\alpha\alpha}^5 P_L + c_{\alpha\alpha}^{5*} P_R) v_\alpha(p_2). \quad (3.29)$$

Conviene mencionar que la presencia de un signo negativo extra, en el segundo diagrama, proviene de intercambiar momentos entre el antineutrino y el neutrino. Sumando las expresiones analíticas de los diagramas se tiene que la amplitud se escribe como

$$i\mathcal{M}(h(p_1) \rightarrow \nu_\alpha(p_2) \nu_\alpha(p_3)) = -\frac{iv}{2} \overline{u}_\alpha(p_2) (c_{\alpha\alpha}^5 P_L + c_{\alpha\alpha}^{5*} P_R) v_\alpha(p_3) + \frac{iv}{2} \overline{u}_\alpha(p_3) (c_{\alpha\alpha}^5 P_L + c_{\alpha\alpha}^{5*} P_R) v_\alpha(p_2). \quad (3.30)$$

Si ahora consideramos el caso en que  $\alpha \neq \beta$ , diagramáticamente, la amplitud se expresa, a nivel de árbol, como:

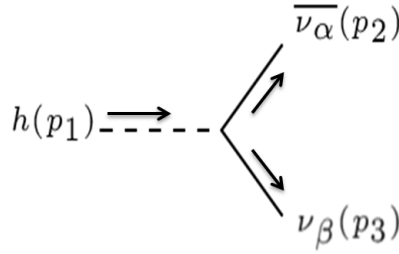


Figura 3.3: Diagrama de Feynman que contribuye a la amplitud del decaimiento  $h \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$ .

Cuando los neutrinos finales tienen sabor diferente solo contribuye un diagrama como aquel mostrado en la Fig. 3.3, en el cual la partícula de momento  $p_2$  y sabor  $\alpha$  es un neutrino, mientras que la partícula de momento  $p_3$  y sabor  $\beta$  es un antineutrino. Si bien los neutrinos y antineutrinos no pueden ser distinguidos unos de otros, el sabor sí que hace una diferencia, pues en este caso no podemos intercambiar momentos  $p_2$  y  $p_3$ , como hicimos cuando  $\alpha = \beta$ . Así que la amplitud queda como

$$i\mathcal{M}(h(p_1) \rightarrow \nu_\alpha(p_2) \nu_\beta(p_3)) = -\frac{iv}{2} \overline{u}_\alpha(p_2) (c_{\alpha\beta}^5 P_L + c_{\alpha\beta}^{5*} P_R) v_\beta(p_3). \quad (3.31)$$

### 3.2.1. Amplitud al cuadrado

Si queremos calcular la tasa de decaimiento es necesario calcular primero la amplitud cuadrática, definida como  $|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger$ .

Para el proceso de decaimiento de un bosón de Higgs en un par de neutrinos con cambio de sabor, la amplitud está dada por la ec. (3.31), entonces

$$-i\mathcal{M}^\dagger = \frac{iv}{2} \overline{v}_\beta(p_3) (c_{\alpha\beta}^{5*} P_R + c_{\alpha\beta}^5 P_L) u_\alpha(p_2). \quad (3.32)$$

## CAPÍTULO 3. EL OPERADOR DE WEINBERG

### 3.2. DECAIMIENTO $H \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$

Multiplicando las ec's. (3.31) y (3.32) se tiene que la amplitud cuadrática

$$|\mathcal{M}|^2 = i\mathcal{M}(-i\mathcal{M}^\dagger) = \mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger \quad (3.33)$$

$$= \left[-\frac{iv}{2}\bar{u}_\alpha(p_2)(c_{\alpha\beta}^5 P_L + c_{\alpha\beta}^{5*} P_R)v_\beta(p_3)\right]\left[\frac{iv}{2}\bar{v}_\beta(p_3)(c_{\alpha\beta}^{5*} P_R + c_{\alpha\beta}^5 P_L)u_\alpha(p_2)\right] \quad (3.34)$$

$$= \frac{v^2}{4}|c_{\alpha\beta}^5|^2\bar{u}_\alpha(p_2)P_L v_\beta(p_3)\bar{v}_\beta(p_3)P_R u_\alpha(p_2) + \frac{v^2}{4}|c_{\alpha\beta}^5|^2\bar{u}_\alpha(p_2)P_R v_\beta(p_3)\bar{v}_\beta(p_3)P_L u_\alpha(p_2). \quad (3.35)$$

Sumando sobre los estados de espín  $s_2, s_3$ :

$$\begin{aligned} \sum_{s_2} u_\alpha(p_2)\bar{u}_\alpha(p_2) &= \not{p}_2 + m_\alpha, \\ \sum_{s_3} v_\beta(p_3)\bar{v}_\beta(p_3) &= \not{p}_3 - m_\beta, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{v^2}{4}|c_{\alpha\beta}^5|^2 \text{tr}\{(P_L(\not{p}_3 - m_\beta)P_R(\not{p}_2 + m_\alpha))\} + \frac{v^2}{4}|c_{\alpha\beta}^5|^2 \text{tr}\{P_L(\not{p}_2 + m_\alpha)P_R(\not{p}_3 - m_\beta)\} \\ &= \frac{v^2}{4}|c_{\alpha\beta}^5|^2(2p_2 \cdot p_3) + \frac{v^2}{4}|c_{\alpha\beta}^5|^2(2p_2 \cdot p_3) \\ &= v^2|c_{\alpha\beta}^5|^2(p_2 \cdot p_3). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Por otro lado, se tienen las siguientes condiciones en los momentos

$$\begin{aligned} p_2^2 &= m_\alpha^2, \\ p_3^2 &= m_\beta^2, \\ p_2 \cdot p_3 &= \frac{m_H^2 - m_\alpha^2 - m_\beta^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

De modo que la amplitud cuadrática media es

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{v^2}{2}|c_{\alpha\beta}^5|^2 m_H^2 \left[1 - \left(\frac{m_\alpha^2 + m_\beta^2}{m_H^2}\right)\right]. \quad (3.39)$$

### 3.2.2. Tasa de decaimiento

Para una partícula de momento  $p_1$  y masa  $m_1$  que decae en dos partículas de momentos  $p_2, p_3$  y masas  $m_2, m_3$  respectivamente, la tasa de decaimiento está dada por<sup>4</sup>

$$\Gamma = |\mathcal{M}|^2 \frac{p_2}{8\pi m_1^2}, \quad (3.40)$$

$$\text{con } \frac{p_2}{m_1} = \frac{[m_1^2 - (m_2 + m_3)^2]^{\frac{1}{2}} [m_1^2 - (m_2 - m_3)^2]^{\frac{1}{2}}}{2m_1^2}.$$

Podemos usar la ec. (3.40) para calcular la tasa de decaimiento de nuestro proceso, donde la amplitud al cuadrado está dada por la ec. (3.39) entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \Gamma(h \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta) &= \frac{v^2 m_H^2}{2}|c_{\alpha\beta}^5|^2 \left[1 - \left(\frac{m_\alpha^2 + m_\beta^2}{m_H^2}\right)\right] \frac{p_2}{8\pi m_1^2} \\ &= \frac{v^2 m_H}{32\pi}|c_{\alpha\beta}^5|^2 \left[1 - \left(\frac{m_\alpha^2 + m_\beta^2}{m_H^2}\right)\right] \left[1 - \left(\frac{m_\alpha + m_\beta}{m_H}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(\frac{m_\alpha - m_\beta}{m_H}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

<sup>4</sup>Para más detalles sobre el cálculo de la tasa de decaimiento ver el Apéndice B.

## Capítulo 4

# Decaimiento $h \longrightarrow \ell_\alpha \ell_\beta$

El decaimiento que se estudiará es de un bosón de Higgs en un par leptón-antileptón, ambos cargados  $h \longrightarrow \ell_\alpha \ell_\beta$ , con  $\alpha \neq \beta$  y que puede ser representado diagramáticamente como:

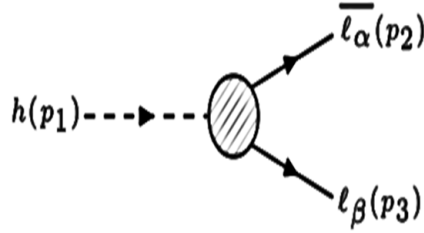


Figura 4.1: Diagramas de Feynman para el proceso de decaimiento  $h \longrightarrow \ell_\alpha \ell_\beta$ .

Para explorar este proceso físico conviene cambiar la base de sabor de los neutrinos a su base de eigencampos de masa. Para ello, consideremos primero el factor

$$\overline{\nu_{\alpha,L}^c} \nu_{\beta,L}, \quad (4.1)$$

pero  $\nu_{\alpha,L}^c$  es un campo de carga conjugada, es decir, se satisface que

$$\nu_{\alpha,L}^c = C \overline{\nu_{\alpha,L}}^T, \quad (4.2)$$

si además, usamos las propiedades de la matriz de conjugación de carga  $C$ , es fácil probar que

$$\overline{\nu_{\alpha,L}^c} \nu_{\beta,L} = -\nu_{\alpha,L}^T C^\dagger \nu_{\beta,L}, \quad (4.3)$$

por otro lado, se tiene que

$$\overline{\nu_{\beta,L}} \nu_{\alpha,L}^c = \overline{\nu_{\beta,L}} C \overline{\nu_{\alpha,L}}^T, \quad (4.4)$$

Usando este par de expresiones, escribimos al operador de Weinberg como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W = & \frac{v^2}{4} c_{\alpha\beta}^5 \nu_{\alpha,L}^T C^\dagger \nu_{\beta,L} - \frac{v^2}{4} c_{\alpha\beta}^{5*} \overline{\nu_{\beta,L}} C \overline{\nu_{\alpha,L}}^T + \frac{v}{2} c_{\alpha\beta}^5 h \nu_{\alpha,L}^T C^\dagger \nu_{\beta,L} - \frac{v}{2} c_{\alpha\beta}^{5*} h \overline{\nu_{\beta,L}} C \overline{\nu_{\alpha,L}}^T \\ & + \frac{1}{4} c_{\alpha\beta}^5 h^2 \nu_{\alpha,L}^T C^\dagger \nu_{\beta,L} - \frac{1}{4} c_{\alpha\beta}^{5*} h^2 \overline{\nu_{\beta,L}} C \overline{\nu_{\alpha,L}}^T, \quad (4.5) \end{aligned}$$

si redefinimos a

$$c_{\alpha\beta}^5 = \frac{\kappa_{\alpha\beta}}{\Lambda}, \quad (4.6)$$

donde  $\Lambda$  es una cantidad real con unidades de masa, y además,  $\Lambda \sim \mathcal{O}(10^{14})$  GeV[35], de modo que el factor  $\kappa_{\alpha\beta}$ , es adimensional y simétrico en  $\alpha\beta$ . Entonces, el operador de Weinberg se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W = & \frac{v^2 \kappa_{\alpha\beta}}{4\Lambda} \nu_{\alpha,L}^T C^\dagger \nu_{\beta,L} - \frac{v^2 \kappa_{\alpha\beta}^*}{4\Lambda} \overline{\nu_{\beta,L}} C \overline{\nu_{\alpha,L}}^T + \frac{v \kappa_{\alpha\beta}}{2\Lambda} h \nu_{\alpha,L}^T C^\dagger \nu_{\beta,L} - \frac{v \kappa_{\alpha\beta}^*}{2\Lambda} h \overline{\nu_{\beta,L}} C \overline{\nu_{\alpha,L}}^T \\ & + \frac{\kappa_{\alpha\beta}}{4\Lambda} h^2 \nu_{\alpha,L}^T C^\dagger \nu_{\beta,L} - \frac{\kappa_{\alpha\beta}^*}{4\Lambda} h^2 \overline{\nu_{\beta,L}} C \overline{\nu_{\alpha,L}}^T. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Si recordamos que los índices  $\alpha, \beta$  representan el sabor de los neutrinos, es decir,  $\alpha, \beta = e, \mu, \tau$ , entonces los factores  $\kappa_{\alpha\beta}$  representan los coeficientes de una matriz  $3 \times 3$ , caracterizada por

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \kappa_{ee} & \kappa_{e\mu} & \kappa_{e\tau} \\ \kappa_{\mu e} & \kappa_{\mu\mu} & \kappa_{\mu\tau} \\ \kappa_{\tau e} & \kappa_{\tau\mu} & \kappa_{\tau\tau} \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

donde  $\mathcal{K}$  es simétrica.

Si además, definimos el objeto  $\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ \nu_{\mu,L} \\ \nu_{\tau,L} \end{pmatrix}$ , el operador de Weinberg puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W = & \frac{v^2}{4\Lambda} \nu_L^T C^\dagger \mathcal{K} \nu_L - \frac{v^2}{4\Lambda} \overline{\nu_L} \mathcal{K}^\dagger C \overline{\nu_L}^T + \frac{v}{2\Lambda} h \nu_L^T C^\dagger \mathcal{K} \nu_L - \frac{v}{2\Lambda} h \overline{\nu_L} \mathcal{K}^\dagger C \overline{\nu_L}^T \\ & + \frac{1}{4\Lambda} h^2 \nu_L^T C^\dagger \mathcal{K} \nu_L - \frac{1}{4\Lambda} h^2 \overline{\nu_L} \mathcal{K}^\dagger C \overline{\nu_L}^T. \end{aligned}$$

Un resultado importante de álgebra lineal nos garantiza que dada una matriz compleja y simétrica  $A$ , esta es diagonalizable, y además, existe una matriz unitaria  $U$  de diagonalización, es decir, se satisface que

$$U^T A U = \mathcal{A}, \quad (4.9)$$

donde  $\mathcal{A}$  es una matriz diagonal.

Resulta que la matriz  $\mathcal{K}$  satisface las condiciones del teorema anterior, es decir, existe una matriz de diagonalización unitaria, digamos  $U_\nu$ , tal que

$$U_\nu^T \mathcal{K} U_\nu = \mathcal{M}_\nu, \quad (4.10)$$

donde  $\mathcal{M}_\nu$  es una matriz diagonal, cuyos elementos en la diagonal son coeficientes reales y estrictamente positivos. Puesto que  $U_\nu$  es unitaria, se satisface que

$$U_\nu^\dagger U_\nu = \mathbb{1}_3, \quad (4.11)$$

$$U_\nu U_\nu^\dagger = \mathbb{1}_3. \quad (4.12)$$

Los complejos conjugados de estas ecuaciones nos llevan a las relaciones

$$U_\nu^T U_\nu^* = \mathbb{1}_3, \quad (4.13)$$

$$U_\nu^* U_\nu^T = \mathbb{1}_3. \quad (4.14)$$

Usando estas expresiones se puede probar fácilmente que se cumplen las relaciones

$$\nu_L^T C^\dagger \mathcal{K} \nu_L = (U_\nu^\dagger \nu_L)^T C^\dagger \mathcal{M}_\nu (U_\nu^\dagger \nu_L), \quad (4.15)$$

$$\overline{\nu_L} \mathcal{K}^\dagger C \overline{\nu_L}^T = \overline{(U_\nu^\dagger \nu_L)} C \mathcal{M}_\nu \overline{(U_\nu^\dagger \nu_L)}^T. \quad (4.16)$$

Usando las expresiones anteriores, podemos escribir al operador de Weinberg como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W = & \frac{v^2}{4\Lambda} (U_\nu^\dagger \nu_L)^T C^\dagger \mathcal{M}_\nu (U^\dagger \nu_L) - \frac{v^2}{4\Lambda} \overline{(U_\nu^\dagger \nu_L)} C \mathcal{M}_\nu \overline{(U^\dagger \nu_L)}^T + \frac{v}{2\Lambda} h (U_\nu^\dagger \nu_L)^T C^\dagger \mathcal{M}_\nu (U^\dagger \nu_L) \\ & - \frac{v}{2\Lambda} h \overline{(U_\nu^\dagger \nu_L)} C \mathcal{M}_\nu \overline{(U^\dagger \nu_L)}^T + \frac{1}{4\Lambda} h^2 (U_\nu^\dagger \nu_L)^T C^\dagger \mathcal{M}_\nu (U^\dagger \nu_L) - \frac{1}{4\Lambda} h^2 \overline{(U_\nu^\dagger \nu_L)} C \mathcal{M}_\nu \overline{(U^\dagger \nu_L)}^T. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Conviene definir un cambio de base de la forma

$$n_L = U_\nu^\dagger \nu_L, \quad (4.18)$$

donde  $n_L$  es una matriz columna de 3 componentes, cuyas entradas son espinores quirales izquierdos, denotados como  $\nu_{1,L}, \nu_{2,L}, \nu_{3,L}$ . En forma más explícita, la anterior ecuación matricial se expresa como

$$n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1,L} \\ \nu_{2,L} \\ \nu_{3,L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (U_\nu^\dagger)_{1e} & (U_\nu^\dagger)_{1\mu} & (U_\nu^\dagger)_{1\tau} \\ (U_\nu^\dagger)_{2e} & (U_\nu^\dagger)_{2\mu} & (U_\nu^\dagger)_{2\tau} \\ (U_\nu^\dagger)_{3e} & (U_\nu^\dagger)_{3\mu} & (U_\nu^\dagger)_{3\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ \nu_{\mu,L} \\ \nu_{\tau,L} \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Tras este cambio de base, escribimos a  $\mathcal{L}_W$  como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W = & \frac{v^2}{4\Lambda} n_L^T C^\dagger \mathcal{M}_\nu n_L - \frac{v^2}{4\Lambda} \overline{n_L} C \mathcal{M}_\nu \overline{n_L}^T + \frac{v}{2\Lambda} h n_L^T C^\dagger \mathcal{M}_\nu n_L - \frac{v}{2\Lambda} h \overline{n_L} C \mathcal{M}_\nu \overline{n_L}^T \\ & + \frac{1}{4\Lambda} h^2 n_L^T C^\dagger \mathcal{M}_\nu n_L - \frac{1}{4\Lambda} h^2 \overline{n_L} C \mathcal{M}_\nu \overline{n_L}^T. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Si desarrollamos explícitamente la expresión anterior en términos de componentes, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W = & \frac{v^2}{4\Lambda} \nu_{j,L}^T C^\dagger (\mathcal{M}_\nu)_{jk} \nu_{k,L} - \frac{v^2}{4\Lambda} \overline{\nu_{j,L}} C (\mathcal{M}_\nu)_{jk} \overline{\nu_{k,L}}^T + \frac{v}{2\Lambda} h \nu_{j,L}^T C^\dagger (\mathcal{M}_\nu)_{jk} \nu_{k,L} \\ & - \frac{v}{2\Lambda} h \overline{\nu_{j,L}} C (\mathcal{M}_\nu)_{jk} \overline{\nu_{k,L}}^T + \frac{1}{4\Lambda} h^2 \nu_{j,L}^T C^\dagger (\mathcal{M}_\nu)_{jk} \nu_{k,L} - \frac{1}{4\Lambda} h^2 \overline{\nu_{j,L}} C (\mathcal{M}_\nu)_{jk} \overline{\nu_{k,L}}^T. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Recordemos que  $\mathcal{M}_\nu$  es una matriz diagonal, es decir, explícitamente,

$$\mathcal{M}_\nu = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix}, \text{ si usamos lo anterior, el operador de Weinberg se escribe como}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W = & \frac{v^2}{4\Lambda} \nu_{j,L}^T C^\dagger \mathcal{M}_j \nu_{j,L} - \frac{v^2}{4\Lambda} \overline{\nu_{j,L}} C \mathcal{M}_j \overline{\nu_{j,L}}^T + \frac{v}{2\Lambda} h \nu_{j,L}^T C^\dagger \mathcal{M}_j \nu_{j,L} \\ & - \frac{v}{2\Lambda} h \overline{\nu_{j,L}} C \mathcal{M}_j \overline{\nu_{j,L}}^T + \frac{1}{4\Lambda} h^2 \nu_{j,L}^T C^\dagger \mathcal{M}_j \nu_{j,L} - \frac{1}{4\Lambda} h^2 \overline{\nu_{j,L}} C \mathcal{M}_j \overline{\nu_{j,L}}^T. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Definimos:

$$m_j = \frac{M_j v^2}{2\Lambda}, \quad (4.23)$$

con  $j = 1, 2, 3$ . Además, la masa del bosón W está dada como

$$m_W = \frac{g_2 v}{2} \implies \frac{1}{v} = \frac{g_2}{2m_W}, \quad (4.24)$$

donde  $g_2$  es la constante de acoplamiento de  $SU(2)_L$ . Si regresamos a las definiciones de las ec's. (4.3) y (4.4), y usamos todos estos elementos, expresamos al operador de Weinberg como

$$\mathcal{L}_W = -\frac{m_j}{2} (\overline{\nu_{j,L}^c} \nu_{j,L} + \overline{\nu_{j,L}} \nu_{j,L}^c) - \frac{g_2 m_j}{2m_W} h (\overline{\nu_{j,L}^c} \nu_{j,L} + \overline{\nu_{j,L}} \nu_{j,L}^c) - \frac{g_2^2 m_j}{8m_W^2} h^2 (\overline{\nu_{j,L}^c} \nu_{j,L} + \overline{\nu_{j,L}} \nu_{j,L}^c). \quad (4.25)$$

Podemos emplear la definición de campo de Majorana, es decir, se cumple que

$$\nu_j = \nu_{j,L} + \nu_{j,L}^c, \quad (4.26)$$

donde  $\nu_j$  no tiene quiralidad definida, y se satisfacen las relaciones

$$P_L \nu_j = \nu_{j,L}, \quad (4.27)$$

$$P_R \nu_j = \nu_{j,L}^c. \quad (4.28)$$

Más aún, se puede probar que

$$\overline{\nu_{j,L}^c} \nu_{j,L}^c = 0, \quad (4.29)$$

$$\overline{\nu_{j,L}} \nu_{j,L} = 0. \quad (4.30)$$

Las expresiones anteriores nos permiten escribir al operador de Weinberg como

$$\mathcal{L}_W = -\frac{m_j}{2} \overline{\nu_j} \nu_j - \frac{g_2 m_j}{2m_W} h \overline{\nu_j} \nu_j - \frac{g_2^2 m_j}{8m_W^2} h^2 \overline{\nu_j} \nu_j, \quad (4.31)$$

donde, además,  $\nu_j$  satisface la condición de Majorana:  $\nu_j = \nu_j^c$ .

Finalmente, se puede apreciar que el primer término de la expresión anterior es, sin duda, un término de masa de Majorana.

Regresemos ahora al cálculo principal, es decir, al proceso de decaimiento del bosón de Higgs en dos leptones cargados, con cambio de sabor, cuyo diagrama se muestra en la Fig. (4.1)

Los diagramas de Feynman que contribuyen a la amplitud en este proceso son:

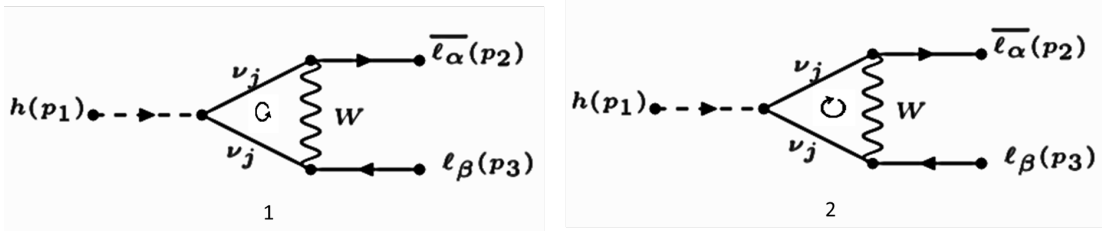


Figura 4.2: Diagramas de Feynman que contribuye a la amplitud del decaimiento  $h \rightarrow \ell_\alpha \ell_\beta$ .

Aunque estos diagramas son aparentemente iguales, existe una diferencia sutil e importante entre ellos. Para entender esto, recordemos que los diagramas de Feynman son formas gráficas para representar interacciones, donde cada punto en el que las líneas se intersectan se llama vértice, y en cada uno de estos se pueden examinar las leyes de conservación que rigen las interacciones de partículas. En el contexto del Modelo Estándar electrodébil con neutrinos de Majorana se establecen reglas correspondientes para cada elemento involucrado en los diagramas. Podríamos entonces, extender los diagramas anteriores con el fin de entender las diferencias entre los mismos, es decir, dichos diagramas de forma más explícita son:

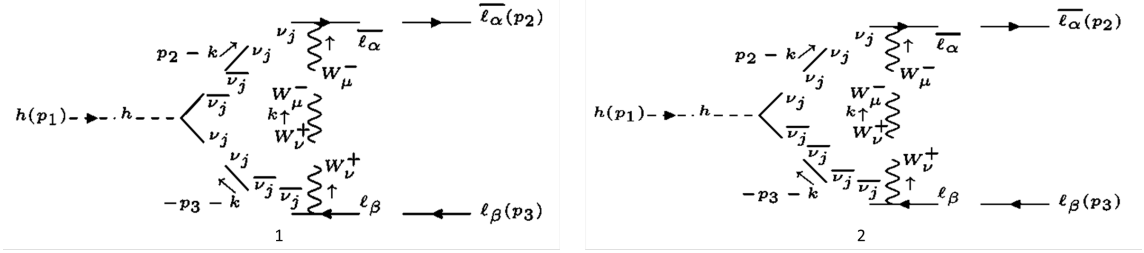


Figura 4.3: Diagramas de Feynman extendidos que contribuye a la amplitud del decaimiento  $h \rightarrow \ell_\alpha \ell_\beta$ .

La principal diferencia en los diagramas radica en que el vértice  $h \rightarrow \nu\nu$  puede ser insertado de dos maneras en el diagrama, lo cual solo ocurre para el caso de partículas de Majorana, lo cual es consecuencia de que para partículas de Majorana, en contraste con las partículas de Dirac, no existe corriente de Noether asociada a número fermiónico.

Por otro lado, usando las reglas de Feynman<sup>5</sup> podemos escribir la forma analítica del primer diagrama de Feynman, en el cual se está integrando sobre el lazo  $k$ , al tener dos líneas externas podemos asociarles espinores, la primera corresponde a una matriz renglón  $\bar{u}(p_2, m_\alpha)$ , la segunda corresponde a una matriz columna  $v(p_3, m_\beta)$ , de modo que la expresión analítica para el primer diagrama es

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_2, m_\alpha) \frac{ig_2}{\sqrt{2}} U_{\alpha j} \gamma_\mu P_L \frac{i(\not{p}_2 - \not{k} + m_j \cdot \mathbb{1}_4)}{(p_2 - k)^2 - m_j^2} \left(-\frac{ig_2 m_j}{2m_W} \cdot \mathbb{1}_4\right) \frac{i(-\not{p}_3 - \not{k} + m_j \cdot \mathbb{1}_4)}{(-p_3 - k)^2 - m_j^2} \\ \times \frac{ig_2}{\sqrt{2}} U_{\beta j}^* \gamma_\nu P_L v(p_3, m_\beta) \frac{-i}{k^2 - m_W^2} (g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m_W^2}).$$

En la expresión anterior podemos factorizar las constantes, entonces la ec. anterior se escribe como

$$-\frac{g_2^3 m_j}{4m_W} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}_\alpha(p_2) \frac{\gamma_\mu P_L (\not{p}_2 - \not{k} + m_j \cdot \mathbb{1}_4) (-\not{p}_3 - \not{k} + m_j \cdot \mathbb{1}_4) \gamma_\nu P_L}{[k^2 - m_W^2][(k - p_2)^2 - m_j^2][(k + p_3)^2 - m_j^2]} v_\beta(p_3) (g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m_W^2}),$$

donde  $\bar{u}_\alpha(p_2) = \bar{u}(p_2, m_\alpha)$  y  $v_\beta(p_3) = v(p_3, m_\beta)$ .

Con respecto al segundo diagrama, la forma analítica del mismo es

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_2, m_\alpha) \frac{ig_2}{\sqrt{2}} U_{\alpha j} \gamma_\mu P_L \frac{i(\not{p}_2 - \not{k} + m_j \cdot \mathbb{1}_4) C}{(p_2 - k)^2 - m_j^2} \left(-\frac{ig_2 m_j}{2m_W} \cdot \mathbb{1}_4\right) \frac{iC^{-1}(-\not{p}_3 - \not{k} + m_j \cdot \mathbb{1}_4)}{(-p_3 - k)^2 - m_j^2} \\ \times \frac{ig_2}{\sqrt{2}} U_{\beta j}^* \gamma_\nu P_L v(p_3, m_\beta) \frac{-i}{k^2 - m_W^2} (g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m_W^2}),$$

podemos ahora extraer fuera de la integral las constantes, además, recordemos que la matriz de conjugación de carga  $C$ , es una matriz unitaria, es decir,  $CC^\dagger = \mathbb{1}_3$ , de modo que la expresión analítica para el segundo diagrama es

$$-\frac{g_2^3 m_j}{4m_W} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}_\alpha(p_2) \frac{\gamma_\mu P_L (\not{p}_2 - \not{k} + m_j \cdot \mathbb{1}_4) (-\not{p}_3 - \not{k} + m_j \cdot \mathbb{1}_4) \gamma_\nu P_L}{[k^2 - m_W^2][(k - p_2)^2 - m_j^2][(k + p_3)^2 - m_j^2]} v_\beta(p_3) (g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m_W^2}).$$

<sup>5</sup>Las reglas de Feynman para propagadores y vértices se encuentran en el Apéndice C.

## 4.1. Suma de los diagramas de Feynman

Ha de notarse que las expresiones analíticas para los diagramas de Feynman que contribuyen a la amplitud del proceso de decaimiento en cuestión, son iguales, por lo que al sumar ambos diagramas se tiene que

$$-\frac{g_2^3 m_j}{2m_W} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}_\alpha(p_2) \frac{\gamma_\mu P_L (p_2 - \not{k} + m_j \cdot \mathbb{1}_4) (-\not{p}_3 - \not{k} + m_j \cdot \mathbb{1}_4) \gamma_\nu P_L}{[k^2 - m_W^2][(k - p_2)^2 - m_j^2][(k + p_3)^2 - m_j^2]} v_\beta(p_3) (g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m_W^2}).$$

De la expresión anterior se puede notar que la amplitud involucra a las matrices de proyección quiral  $P_L$  y  $P_R$  acompañadas de algunas constantes, dicho esto, empleando herramientas de FeynCalc se verifica que, después de manipular algebraicamente la amplitud  $\mathcal{M}$ , tiene la forma

$$\mathcal{M} = k U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \bar{u}_\alpha(p_2) (c_L^j P_L + c_R^j P_R) v_\beta(p_3), \quad (4.32)$$

con  $j = 1, 2, 3$  y  $k = -\frac{g_2^3 m_j}{2m_W}$ , y en principio,  $c_L^j$  y  $c_R^j$  son funciones de las masas de las partículas involucradas en el proceso de decaimiento. Si recordamos, las definiciones de las matrices de proyección quiral, dadas en las ec's. (3.17) y (3.18), podemos escribir a la amplitud como

$$\mathcal{M} = k U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \bar{u}_\alpha(p_2) [c_L^j (\frac{\mathbb{1}_4 - \gamma_5}{2}) + c_R^j (\frac{\mathbb{1}_4 + \gamma_5}{2})] v_\beta(p_3) \quad (4.33)$$

$$= k U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \bar{u}_\alpha(p_2) [(\frac{c_L^j + c_R^j}{2}) \cdot \mathbb{1}_4 + (\frac{c_R^j - c_L^j}{2}) \cdot \gamma_5] v_\beta(p_3). \quad (4.34)$$

Definimos:

$$c_{1,\alpha\beta}^j = \frac{c_L^j + c_R^j}{2}, \quad (4.35)$$

$$c_{5,\alpha\beta}^j = \frac{c_R^j - c_L^j}{2}, \quad (4.36)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta} = U_{\alpha j} U_{\beta j}^* (c_{1,\alpha\beta}^j \cdot \mathbb{1}_4 + c_{5,\alpha\beta}^j \cdot \gamma_5), \quad (4.37)$$

con  $j = 1, 2, 3$ . Usando lo anterior, la amplitud  $\mathcal{M}$  se escribe como

$$\mathcal{M} = k \bar{u}_\alpha(p_2) \Gamma_{\alpha\beta}^j v_\beta(p_3). \quad (4.38)$$

Sin embargo, en la definición de  $\Gamma_{\alpha\beta}$ , siguiendo la notación de Einstein, existe suma sobre índices repetidos, entonces podemos escribir esta suma de forma explícita como  $\Gamma_{\alpha\beta} = \sum_j^3 U_{\alpha j} U_{\beta j}^* (c_{1,\alpha\beta}^j \cdot \mathbb{1}_4 + c_{5,\alpha\beta}^j \cdot \gamma_5)$ , definimos entonces

$$c_{1,\alpha\beta} = \sum_j^3 U_{\alpha j} U_{\beta j}^* c_{1,\alpha\beta}^j, \quad (4.39)$$

$$c_{5,\alpha\beta} = \sum_j^3 U_{\alpha j} U_{\beta j}^* c_{5,\alpha\beta}^j, \quad (4.40)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta} = c_{1,\alpha\beta} \cdot \mathbb{1}_4 + c_{5,\alpha\beta} \cdot \gamma_5, \quad (4.41)$$

por lo tanto, la forma general de la amplitud es

$$\mathcal{M} = k \bar{u}_\alpha(p_2) \Gamma_{\alpha\beta} v_\beta(p_3). \quad (4.42)$$

## 4.2. Amplitud al cuadrado

Para el cálculo de la tasa de decaimiento es necesario calcular la amplitud al cuadrado  $|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger$ , donde la forma explícita de  $\mathcal{M}$  es

$$\mathcal{M} = k\bar{u}_\alpha(p_2)[c_{1,\alpha\beta} \cdot \mathbb{1}_4 + c_{5,\alpha\beta} \cdot \gamma_5]v_\beta(p_3). \quad (4.43)$$

Calculamos entonces el hermitiano adjunto de  $\mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\dagger &= k[\bar{u}_\alpha(p_2)[c_{1,\alpha\beta} \cdot \mathbb{1}_4 + c_{5,\alpha\beta} \cdot \gamma_5]v_\beta(p_3)]^\dagger \\ &= k[v_\beta(p_3)]^\dagger [c_{1,\alpha\beta}^* \cdot \mathbb{1}_4 + c_{5,\alpha\beta}^* \cdot \gamma_5][\bar{u}_\alpha(p_2)]^\dagger \\ &= k[v_\beta(p_3)]^\dagger \gamma^0 [c_{1,\alpha\beta}^* \cdot \mathbb{1}_4 - c_{5,\alpha\beta}^* \cdot \gamma_5]u_\alpha(p_2) \\ &= k\bar{v}_\beta(p_3)[c_{1,\alpha\beta}^* \cdot \mathbb{1}_4 - c_{5,\alpha\beta}^* \cdot \gamma_5]u_\alpha(p_2). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Usando las expresiones anteriores, la amplitud al cuadrado es

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= k\bar{u}_\alpha(p_2)[c_{1,\alpha\beta} \cdot \mathbb{1}_4 + c_{5,\alpha\beta} \cdot \gamma_5]v_\beta(p_3)k\bar{v}_\beta(p_3)[c_{1,\alpha\beta}^* \cdot \mathbb{1}_4 - c_{5,\alpha\beta}^* \cdot \gamma_5]u_\alpha(p_2) \\ &= k^2|c_{1,\alpha\beta}|^2[\bar{u}_\alpha(p_2)v_\beta(p_3)\bar{v}_\beta(p_3)u_\alpha(p_2)] - k^2|c_{5,\alpha\beta}|^2[\bar{u}_\alpha(p_2)\gamma_5v_\beta(p_3)\bar{v}_\beta(p_3)\gamma_5u_\alpha(p_2)]. \end{aligned}$$

Sumando sobre los estados de espín  $s_2, s_3$ , dados por la ec. (3.36)

$$\begin{aligned} \sum_{s_2} u_\alpha(p_2)\bar{u}_\alpha(p_2) &= \not{p}_2 + m_\alpha, \\ \sum_{s_3} v_\beta(p_3)\bar{v}_\beta(p_3) &= \not{p}_3 - m_\beta, \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= k^2|c_{1,\alpha\beta}|^2 \text{tr}\{(\not{p}_2 + m_\alpha)(\not{p}_3 - m_\beta)\} - k^2|c_{5,\alpha\beta}|^2 \text{tr}\{(\not{p}_2 + m_\alpha)\gamma_5(\not{p}_3 - m_\beta)\gamma_5\} \\ &= k^2|c_{1,\alpha\beta}|^2 \text{tr}\{(\not{p}_2 + m_\alpha)(\not{p}_3 - m_\beta)\} - k^2|c_{5,\alpha\beta}|^2 \text{tr}\{(\not{p}_2 + m_\alpha)(-\not{p}_3 - m_\beta)\} \\ &= 4k^2|c_{1,\alpha\beta}|^2(p_2 \cdot p_3 - m_\alpha m_\beta) + 4k^2|c_{5,\alpha\beta}|^2(p_2 \cdot p_3 + m_\alpha m_\beta). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Por otro lado, recuerde las condiciones en los momentos dados por la ec. (3.38)

$$\begin{aligned} p_2^2 &= m_\alpha^2, \\ p_3^2 &= m_\beta^2, \\ p_2 \cdot p_3 &= \frac{m_H^2 - m_\alpha^2 - m_\beta^2}{2}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

de modo que la amplitud al cuadrado es

$$|\mathcal{M}|^2 = 2m_H^2 \left(\frac{g_2^3 m_j}{2m_W}\right)^2 |c_{1,\alpha\beta}|^2 \left[1 - \left(\frac{m_\alpha + m_\beta}{m_H}\right)^2\right] + 2m_H^2 \left(\frac{g_2^3 m_j}{2m_W}\right)^2 |c_{5,\alpha\beta}|^2 \left[1 - \left(\frac{m_\alpha - m_\beta}{m_H}\right)^2\right]. \quad (4.48)$$

## 4.3. Cálculo numérico

En las expresiones analíticas de los diagramas de Feynman, mismas que resultaron ser iguales, existe una integración sobre el lazo  $k$ .

Para resolver la integral y obtener un valor numérico de la tasa de decaimiento, hicimos uso del software *Wolfram Mathematica*, bajo la paquetería *FeynCalc*, y tomando los resultados de *Particle Data Group* (PDG). A continuación se explica brevemente el proceso realizado:

1. Se escribieron las expresiones analíticas para los diagramas de Feynman, se calculó la integral involucrada y se aplicaron las condiciones en los momentos para reducir el resultado. En el resultado obtenido previamente, aparecieron funciones escalares de Passarino-Veltman,  $B_0, C_0$  acompañadas de factores constantes. Con lo anterior, definimos

$$c_{1,\alpha\beta}^j = \sum_l a_l B_0^{(l)} + \sum_m d_m C_0^{(m)}, \quad (4.49)$$

$$c_{5,\alpha\beta}^j = \sum_l n_l B_0^{(l)} + \sum_m q_m C_0^{(m)}. \quad (4.50)$$

2. Resultó que las funciones escalares de Passarino-Veltman, involucradas en la expresión anterior son las siguientes

$$B_0^{(1)}(0, m_j^2, m_W^2), \quad (4.51)$$

$$B_0^{(2)}(m_H^2, m_j^2, m_j^2), \quad (4.52)$$

$$B_0^{(3)}(m_\alpha^2, m_j^2, m_W^2), \quad (4.53)$$

$$B_0^{(4)}(m_\beta^2, m_j^2, m_W^2), \quad (4.54)$$

$$C_0^{(1)}(m_H^2, m_\alpha^2, m_\beta^2, m_j^2, m_j^2, m_W^2). \quad (4.55)$$

3. Con el fin de demostrar si nuestro cálculo contenía divergencias, se definieron las siguientes integrales ultravioletas finitas

$$\Delta_1 = B_0^{(1)}(0, m_j^2, m_W^2) - B_0^{(2)}(m_H^2, m_j^2, m_j^2), \quad (4.56)$$

$$\Delta_2 = B_0^{(2)}(m_H^2, m_j^2, m_j^2) - B_0^{(3)}(m_\alpha^2, m_j^2, m_W^2), \quad (4.57)$$

$$\Delta_3 = B_0^{(3)}(m_\alpha^2, m_j^2, m_W^2) - B_0^{(4)}(m_\beta^2, m_j^2, m_W^2), \quad (4.58)$$

$$\Delta_4 = C_0^{(1)}(m_H^2, m_\alpha^2, m_\beta^2, m_j^2, m_j^2, m_W^2), \quad (4.59)$$

de modo que

$$c_{1,\alpha\beta}^j = a_1 \Delta_1 + (a_1 + a_2) \Delta_2 + (a_1 + a_2 + a_3) \Delta_3 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) B_0^{(4)} + d_1 \Delta_4, \quad (4.60)$$

$$c_{5,\alpha\beta}^j = n_1 \Delta_1 + (n_1 + n_2) \Delta_2 + (n_1 + n_2 + n_3) \Delta_3 + (n_1 + n_2 + n_3 + n_4) B_0^{(4)} + q_1 \Delta_4, \quad (4.61)$$

con  $j = 1, 2, 3$ .

4. De las expresiones anteriores se puede ver que los términos  $c_{1,\alpha\beta}^j$  y  $c_{5,\alpha\beta}^j$  son finitos si y sólo si  $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = (n_1 + n_2 + n_3 + n_4) = 0$ .

Al resolver las sumas anteriores, resultó que

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{3m_j(m_\beta + m_\alpha)}{4m_W^2}, \quad (4.62)$$

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = \frac{3m_j(m_\beta - m_\alpha)}{4m_W^2}, \quad (4.63)$$

con lo que se concluye que en nuestra cuenta principal existen divergencias ultravioletas.

### 4.3.1. Proceso de renormalización

Con el fin de eliminar las divergencias ultravioletas, vamos a realizar un proceso de renormalización para encontrar los contratérminos que cancelan dichas divergencias.

Consideremos el término Lagrangiano no-renormalizable

$$\mathcal{L}_6^{NR} = \sum_{\alpha,\beta} \left( \frac{\zeta'_{\alpha\beta}}{\Lambda^2} (\phi'^\dagger \phi') \overline{L'_{\alpha,L}} \phi' \ell'_{\beta,R} + h.c. \right), \quad (4.64)$$

donde  $L'_{\alpha,L}$ ,  $\ell'_{\beta,R}$ ,  $\phi'$  denota a multipletes de  $SU(2)_L$  desnudos. Definimos, pues, a los multipletes renormalizados mediante

$$\phi' = \sqrt{Z_\phi} \phi, \quad (4.65)$$

$$L'_{\alpha,L} = \sqrt{Z_{\alpha,L}} L_{\alpha,L}, \quad (4.66)$$

$$\ell'_{\beta,R} = \sqrt{Z_{\beta,R}} \ell_{\beta,R}. \quad (4.67)$$

Usando estas definiciones, escribimos a  $\mathcal{L}_6^{NR}$  como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6^{NR} &= \sum_{\alpha,\beta} \left( \frac{\zeta'_{\alpha\beta}}{\Lambda^2} Z_\phi (\phi^\dagger \phi) \sqrt{Z_{\alpha,L}} \overline{L_{\alpha,L}} \sqrt{Z_\phi} \phi \sqrt{Z_{\beta,R}} \ell_{\beta,R} + h.c. \right) \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \left( \frac{1}{\Lambda^2} (\zeta'_{\alpha\beta} Z_\phi^{\frac{3}{2}} Z_{\alpha,L}^{\frac{1}{2}} Z_{\beta,R}^{\frac{1}{2}}) (\phi^\dagger \phi) \overline{L_{\alpha,L}} \phi \ell_{\beta,R} + h.c. \right). \end{aligned}$$

Ahora definimos al coeficiente renormalizado  $\zeta_{\alpha\beta}$  a través de

$$\zeta'_{\alpha\beta} Z_\phi^{\frac{3}{2}} Z_{\alpha,L}^{\frac{1}{2}} Z_{\beta,R}^{\frac{1}{2}} = Z_\zeta^{\alpha\beta} \zeta_{\alpha\beta}, \quad (4.68)$$

con lo cual, nuestra Lagrangiana no renormalizable queda como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6^{NR} &= \sum_{\alpha,\beta} \left( \frac{Z_\zeta^{\alpha\beta} \zeta_{\alpha\beta}}{\Lambda^2} (\phi^\dagger \phi) \overline{L_{\alpha,L}} \phi \ell_{\beta,R} + h.c. \right) \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \left( (Z_\zeta^{\alpha\beta} + 1 - 1) \frac{\zeta_{\alpha\beta}}{\Lambda^2} (\phi^\dagger \phi) \overline{L_{\alpha,L}} \phi \ell_{\beta,R} + h.c. \right) \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \left( \frac{\zeta_{\alpha\beta}}{\Lambda^2} (\phi^\dagger \phi) \overline{L_{\alpha,L}} \phi \ell_{\beta,R} + h.c. \right) + \sum_{\alpha,\beta} \left( \frac{(Z_\zeta^{\alpha\beta} - 1) \zeta_{\alpha\beta}}{\Lambda^2} (\phi^\dagger \phi) \overline{L_{\alpha,L}} \phi \ell_{\beta,R} + h.c. \right). \end{aligned}$$

Definiendo:

$$\delta_\zeta^{\alpha\beta} = Z_\zeta^{\alpha\beta} - 1, \quad (4.69)$$

usando lo anterior, nuestra Lagrangiana queda como

$$\mathcal{L}_6^{NR} = \sum_{\alpha,\beta} \left( \frac{\zeta_{\alpha\beta}}{\Lambda^2} (\phi^\dagger \phi) \overline{L_{\alpha,L}} \phi \ell_{\beta,R} + h.c. \right) + \sum_{\alpha,\beta} \left( \delta_\zeta^{\alpha\beta} \frac{\zeta_{\alpha\beta}}{\Lambda^2} (\phi^\dagger \phi) \overline{L_{\alpha,L}} \phi \ell_{\beta,R} + h.c. \right). \quad (4.70)$$

A la ecuación anterior, implementaremos el rompimiento espontáneo de simetría electrodébil, mediante el cambio de base  $\phi(x) = \phi_0 + \xi(x)$ , entonces

$$\begin{aligned} \phi^\dagger \phi &= (\phi_0 + \xi)^\dagger (\phi_0 + \xi) \\ &= \phi_0^\dagger \phi_0 + \phi_0^\dagger \xi + \xi^\dagger \phi_0 + \xi^\dagger \xi. \end{aligned}$$

Recordemos que

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \\ \xi &= \begin{pmatrix} G_W^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(h + iG_Z) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

en la norma unitaria,

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (4.71)$$

de esta forma

$$\begin{aligned}\phi^\dagger \phi &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{v^2}{2} + vh + \frac{h^2}{2}.\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}\overline{L_{\alpha,L}} \phi \ell_{\beta,R} &= \overline{L_{\alpha,L}} (\phi_0 + \xi) \ell_{\beta,R} = \overline{L_{\alpha,L}} \phi_0 \ell_{\beta,R} + \overline{L_{\alpha,L}} \xi \ell_{\beta,R} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{\nu_{\alpha,L}} & \overline{\ell_{\alpha,L}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \ell_{\beta,R} + \begin{pmatrix} \overline{\nu_{\alpha,L}} & \overline{\ell_{\alpha,L}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \ell_{\beta,R} \\ &= \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{\ell_{\alpha,L}} \ell_{\beta,R} + \frac{h}{\sqrt{2}} \overline{\ell_{\alpha,L}} \ell_{\beta,R},\end{aligned}$$

con las expresiones anteriores nuestra Lagrangiana puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_6^{NR} &= \sum_{\alpha,\beta} \left( \frac{\zeta_{\alpha\beta}}{\Lambda^2} \left( \frac{v^2}{2} + vh + \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{\ell_{\alpha,L}} \ell_{\beta,R} + \frac{h}{\sqrt{2}} \overline{\ell_{\alpha,L}} \ell_{\beta,R} \right) + h.c. \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha,\beta} \left( \delta_\xi^{\alpha\beta} \frac{\zeta_{\alpha\beta}}{\Lambda^2} \left( \frac{v^2}{2} + vh + \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{\ell_{\alpha,L}} \ell_{\beta,R} + \frac{h}{\sqrt{2}} \overline{\ell_{\alpha,L}} \ell_{\beta,R} \right) + h.c. \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_6^{NR} &= \frac{1}{\Lambda^2} \left( \frac{v^2}{2} + vh + \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{v}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha,\beta} \overline{\ell_{\alpha,L}} \zeta_{\alpha\beta} \ell_{\beta,R} + \frac{h}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha,\beta} \overline{\ell_{\alpha,L}} \zeta_{\alpha\beta} \ell_{\beta,R} \right) + h.c. \\ &\quad + \frac{1}{\Lambda^2} \left( \frac{v^2}{2} + vh + \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{v}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha,\beta} \overline{\ell_{\alpha,L}} \delta_\xi^{\alpha,\beta} \zeta_{\alpha\beta} \ell_{\beta,R} + \frac{h}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha,\beta} \overline{\ell_{\alpha,L}} \delta_\xi^{\alpha,\beta} \zeta_{\alpha\beta} \ell_{\beta,R} \right) + h.c.\end{aligned}$$

Definimos la matriz  $\tilde{\delta}$ , mediante sus entradas, como

$$\tilde{\delta}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \zeta_{\alpha\beta}, \quad (4.72)$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_6^{NR} &= \frac{1}{\Lambda^2} \left( \frac{v^2}{2} + vh + \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{\ell_L} \zeta \ell_R + \frac{h}{\sqrt{2}} \overline{\ell_L} \zeta \ell_R \right) + h.c. \\ &\quad + \frac{1}{\Lambda^2} \left( \frac{v^2}{2} + vh + \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{\ell_L} \tilde{\delta} \ell_R + \frac{h}{\sqrt{2}} \overline{\ell_L} \tilde{\delta} \ell_R \right) + h.c.\end{aligned}$$

A continuación usamos los cambios de bases a campos eigenespinores de masa

$$\ell'_L = \nu_L^\dagger \ell_L, \quad (4.73)$$

$$\ell'_R = \nu_R^\dagger \ell_R, \quad (4.74)$$

de donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6^{NR} = & \frac{1}{\Lambda^2} \left( \frac{v^2}{2} + vh + \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{\ell_L} \nu_L \nu_L^\dagger \zeta \nu_R \nu_R^\dagger \ell_R + \frac{h}{\sqrt{2}} \overline{\ell_L} \nu_L \nu_L^\dagger \zeta \nu_R \nu_R^\dagger \ell_R + h.c. \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Lambda^2} \left( \frac{v^2}{2} + vh + \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{\ell_L} \nu_L \nu_L^\dagger \tilde{\delta} \nu_R \nu_R^\dagger \ell_R + \frac{h}{\sqrt{2}} \overline{\ell_L} \nu_L \nu_L^\dagger \tilde{\delta} \nu_R \nu_R^\dagger \ell_R + h.c. \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6^{NR} = & \frac{1}{\Lambda^2} \left( \frac{v^2}{2} + vh + \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{\ell'_L} (\nu_L^\dagger \zeta \nu_R) \ell'_R + \frac{h}{\sqrt{2}} \overline{\ell'_L} (\nu_L^\dagger \zeta \nu_R) \ell'_R + h.c. \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Lambda^2} \left( \frac{v^2}{2} + vh + \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{\ell'_L} (\nu_L^\dagger \tilde{\delta} \nu_R) \ell'_R + \frac{h}{\sqrt{2}} \overline{\ell'_L} (\nu_L^\dagger \tilde{\delta} \nu_R) \ell'_R + h.c. \right) \right. \end{aligned}$$

Ahora, definimos:

$$\zeta' = \nu_L^\dagger \zeta \nu_R, \quad (4.75)$$

$$\tilde{\delta}' = \nu_L^\dagger \tilde{\delta} \nu_R, \quad (4.76)$$

y así:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6^{NR} = & \frac{1}{\Lambda^2} \left( \frac{v^2}{2} + vh + \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{\ell'_L} \zeta' \ell'_R + \frac{h}{\sqrt{2}} \overline{\ell'_L} \zeta' \ell'_R + h.c. \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Lambda^2} \left( \frac{v^2}{2} + vh + \frac{h^2}{2} \right) \left( \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{\ell'_L} \tilde{\delta}' \ell'_R + \frac{h}{\sqrt{2}} \overline{\ell'_L} \tilde{\delta}' \ell'_R + h.c. \right) \right. \end{aligned}$$

A continuación nos centramos en los acoplamientos  $h\ell_\alpha \ell_\beta$ . Es decir, que escribimos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6^{NR} = & \frac{1}{\Lambda^2} \frac{v^2}{2} \frac{h}{\sqrt{2}} \overline{\ell'_L} \zeta' \ell'_R + \frac{1}{\Lambda^2} vh \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{\ell'_L} \zeta' \ell'_R + h.c. \\ & + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{v^2}{2} \frac{h}{\sqrt{2}} \overline{\ell'_L} \tilde{\delta}' \ell'_R + \frac{1}{\Lambda^2} vh \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{\ell'_L} \tilde{\delta}' \ell'_R + h.c. + \dots \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_6^{NR} = \frac{v^2}{\Lambda^2} \frac{3h}{2\sqrt{2}} \overline{\ell'_L} \zeta' \ell'_R + h.c. + \frac{v^2}{\Lambda^2} \frac{3h}{2\sqrt{2}} \overline{\ell'_L} \tilde{\delta}' \ell'_R + h.c. + \dots$$

Si calculamos los hermitianos adjuntos involucrados, y además, extendemos la Lagrangiana anterior a componentes, agrupando de manera correcta, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6^{NR} = & \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{v^2}{\Lambda^2} h \sum_{\alpha, \beta} \left( \zeta'_{\alpha\beta} \overline{\ell'_{\alpha,L}} \ell'_{\beta,R} + \zeta'^*_{\alpha\beta} \overline{\ell'_{\beta,R}} \ell'_{\alpha,L} \right) \\ & + \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{v^2}{\Lambda^2} h \sum_{\alpha, \beta} \left( \tilde{\delta}'_{\alpha\beta} \overline{\ell'_{\alpha,L}} \ell'_{\beta,R} + \tilde{\delta}'^*_{\alpha\beta} \overline{\ell'_{\beta,R}} \ell'_{\alpha,L} \right) + \dots \end{aligned}$$

Usando las definiciones de campos quirales

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6^{NR} = & \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{v^2}{\Lambda^2} h \sum_{\alpha,\beta} (\zeta'_{\alpha\beta} \overline{\ell'_\alpha} P_R \ell'_\beta + \zeta'^*_{\alpha\beta} \overline{\ell'_\beta} P_L \ell'_\alpha) \\ & + \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{v^2}{\Lambda^2} h \sum_{\alpha,\beta} (\tilde{\delta}'_{\alpha\beta} \overline{\ell'_\alpha} P_R \ell'_\beta + \tilde{\delta}'^*_{\alpha\beta} \overline{\ell'_\beta} P_L \ell'_\alpha) + \dots \end{aligned}$$

factorizando los espinores  $\overline{\ell'_\alpha}$ ,  $\ell'_\beta$  por la izquierda y derecha respectivamente, y usando las definiciones de las matrices  $P_L, P_R$ , además agrupando correctamente todo lo que tenga que ver con la matriz  $\mathbb{1}_4$  y la matriz  $\gamma_5$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6^{NR} = & \sum_{\alpha,\beta} \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{v^2}{\Lambda^2} h \overline{\ell'_\alpha} \left( \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_4 (\zeta'_{\alpha\beta} + \zeta'^*_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} \cdot \gamma_5 (\zeta'_{\alpha\beta} - \zeta'^*_{\alpha\beta}) \right) \ell'_\beta \\ & + \sum_{\alpha,\beta} \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{v^2}{\Lambda^2} h \overline{\ell'_\alpha} \left( \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_4 (\tilde{\delta}'_{\alpha\beta} + \tilde{\delta}'^*_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} \cdot \gamma_5 (\tilde{\delta}'_{\alpha\beta} - \tilde{\delta}'^*_{\alpha\beta}) \right) \ell'_\beta + \dots \quad (4.77) \end{aligned}$$

Ahora definimos:

$$v_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\zeta'_{\alpha\beta} + \zeta'^*_{\alpha\beta}), \quad (4.78)$$

$$a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\zeta'_{\alpha\beta} - \zeta'^*_{\alpha\beta}), \quad (4.79)$$

$$\delta^v_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\tilde{\delta}'_{\alpha\beta} + \tilde{\delta}'^*_{\alpha\beta}), \quad (4.80)$$

$$\delta^a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\tilde{\delta}'_{\alpha\beta} - \tilde{\delta}'^*_{\alpha\beta}), \quad (4.81)$$

donde  $\delta^v_{\alpha\beta}$  y  $\delta^a_{\alpha\beta}$  son los contratérminos. De modo que

$$\mathcal{L}_6^{NR} = \sum_{\alpha,\beta} \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{v^2}{\Lambda^2} h \overline{\ell'_\alpha} (v_{\alpha\beta} \cdot \mathbb{1}_4 + a_{\alpha\beta} \cdot \gamma_5) \ell'_\beta + \sum_{\alpha,\beta} \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{v^2}{\Lambda^2} h \overline{\ell'_\alpha} (\delta^v_{\alpha\beta} \cdot \mathbb{1}_4 + \delta^a_{\alpha\beta} \cdot \gamma_5) \ell'_\beta + \dots$$

Consideremos el hermitiano adjunto del primer término Lagrangiano

$$\begin{aligned} \left( \sum_{\alpha,\beta} \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{v^2}{\Lambda^2} h \overline{\ell'_\alpha} (v_{\alpha\beta} \cdot \mathbb{1}_4 + a_{\alpha\beta} \cdot \gamma_5) \ell'_\beta \right)^\dagger &= \sum_{\alpha,\beta} \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{v^2}{\Lambda^2} h \ell'^{\dagger}_\beta (v_{\alpha\beta} \cdot \mathbb{1}_4 + a_{\alpha\beta} \cdot \gamma_5)^\dagger \overline{\ell'_\alpha}^\dagger \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{v^2}{\Lambda^2} h \overline{\ell'_\beta} (v^*_{\alpha\beta} \cdot \mathbb{1}_4 - a^*_{\alpha\beta} \cdot \gamma_5) \ell'_\alpha \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{v^2}{\Lambda^2} h \overline{\ell'_\alpha} (v^*_{\beta\alpha} \cdot \mathbb{1}_4 - a^*_{\beta\alpha} \cdot \gamma_5) \ell'_\beta. \end{aligned}$$

Puesto que la suma de términos considerada tiene que ser hermitiana, se satisface que

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{v^2}{\Lambda^2} h \overline{\ell'_\alpha} (v_{\alpha\beta} \cdot \mathbb{1}_4 + a_{\alpha\beta} \cdot \gamma_5) \ell'_\beta = \sum_{\alpha,\beta} \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{v^2}{\Lambda^2} h \overline{\ell'_\alpha} (v^*_{\beta\alpha} \cdot \mathbb{1}_4 - a^*_{\beta\alpha} \cdot \gamma_5) \ell'_\beta, \quad (4.82)$$

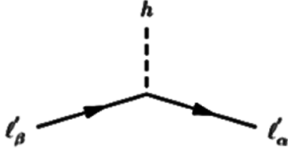
lo cual ocurre si

$$\begin{aligned} v_{\alpha\beta} &= v^*_{\beta\alpha}, \\ a_{\alpha\beta} &= -a^*_{\beta\alpha}, \end{aligned}$$

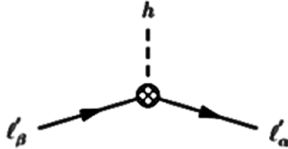
análogamente se puede probar que

$$\begin{aligned}\delta_{\alpha\beta}^v &= \delta_{\beta\alpha}^{v*}, \\ \delta_{\alpha\beta}^a &= -\delta_{\beta\alpha}^{a*}.\end{aligned}$$

Usando la Lagrangiana  $\mathcal{L}_6^{NR}$ , se derivan las reglas de Feynman



$= \frac{3i}{2\sqrt{2}} \frac{v^2}{\Lambda^2} (v_{\alpha\beta} \cdot \mathbb{1}_4 + a_{\alpha\beta} \cdot \gamma_5) \quad (1)$



$= \frac{3i}{2\sqrt{2}} \frac{v^2}{\Lambda^2} (\delta_{\alpha\beta}^v \cdot \mathbb{1}_4 + \delta_{\alpha\beta}^a \cdot \gamma_5) \quad (2)$

Figura 4.4: Reglas de Feynman para la lagrangina no-renormalizable  $\mathcal{L}_6^{NR}$ .

donde al segundo diagrama se le conoce también como contratérmino.

Regresando a la contribución dada por la Fig. 4.3, la amplitud se define por las ec's. (4.32)-(4.42), es decir

$$i\mathcal{M} = k\bar{u}_\alpha(p_2)\Gamma_{\alpha\beta}v_\beta(p_3). \quad (4.83)$$

Recordemos que el proceso de renormalización efectuado es consecuencia directa de la existencia de divergencias ultravioletas en el cálculo analítico de los diagramas de Feynman, más aún, las divergencias presentes son originadas dentro de la función de dos puntos  $B_0^{(4)}(m_\beta^2, m_j^2, m_W^2)$ , por lo que es conveniente usar un proceso de regularización llamado *regularización dimensional* (RD) que permite aislar los términos divergentes con el fin de ser eliminados por los contratérminos encontrados durante la renormalización.

A través de un cálculo explícito de RD en las funciones de Passarino-Veltman de dos puntos[36, 37], se encuentra que los coeficientes  $c_{1,\alpha\beta}^j$  y  $c_{5,\alpha\beta}^j$  pueden escribirse de la forma

$$\begin{aligned}c_{1,\alpha\beta}^j &= \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{g_2^3 m_j}{2m_W} \frac{3}{4} \frac{m_j(m_\beta + m_\alpha)}{m_W^2} \Delta_\epsilon + \text{términos finitos}, \\ c_{5,\alpha\beta}^j &= \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{g_2^3 m_j}{2m_W} \frac{3}{4} \frac{m_j(m_\beta - m_\alpha)}{m_W^2} \Delta_\epsilon + \text{términos finitos},\end{aligned}$$

donde  $\Delta_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_\epsilon + \text{Log}(4\pi)$  y  $\gamma_\epsilon$  es la constante de Euler-Mascheroni.

Usando esto, escribimos

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta} &= \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \left( \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{3g_2^3 m_j^2 (m_\beta + m_\alpha)}{8m_W^3} \Delta_\epsilon \cdot \mathbb{1}_4 - \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{3g_2^3 m_j^2 (m_\beta - m_\alpha)}{8m_W^3} \Delta_\epsilon \cdot \gamma_5 \right) + \text{términos finitos} \\ &= -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{3g_2^3}{8m_W^3} \Delta_\epsilon \left( (m_\beta + m_\alpha) \cdot \mathbb{1}_4 + (m_\beta - m_\alpha) \cdot \gamma_5 \right) \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j} U_{\beta j}^* m_j^2 + \text{términos finitos}.\end{aligned}$$

**CAPÍTULO 4. DECAIMIENTO  $H \rightarrow \ell_\alpha \ell_\beta$**   
4.3. CÁLCULO NUMÉRICO

De este modo,

$$i\mathcal{M} = -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{3g_2^3}{8m_W^3} \Delta_\epsilon \bar{u}_\alpha(p_2) ((m_\beta + m_\alpha) \cdot \mathbb{1}_4 + (m_\beta - m_\alpha) \cdot \gamma_5) v_\beta(p_3) \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j} U_{\beta j}^* m_j^2 + \text{términos finitos.}$$

Consideremos la suma de diagramas

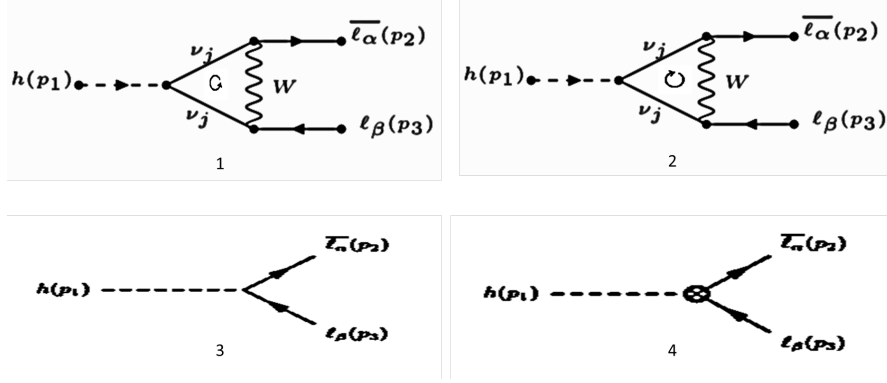


Figura 4.5: Diagramas de Feynman que contribuyen a la amplitud final.

La expresión analítica de la amplitud total para la suma de diagramas anteriores es

$$i\mathcal{M}_f = -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{3g_2^3}{8m_W^3} \Delta_\epsilon \bar{u}_\alpha(p_2) ((m_\beta + m_\alpha) \cdot \mathbb{1}_4 + (m_\beta - m_\alpha) \cdot \gamma_5) v_\beta(p_3) \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j} U_{\beta j}^* m_j^2 + \frac{3i}{2\sqrt{2}} \frac{v^2}{\Lambda^2} \bar{u}_\alpha(p_2) (\delta_{\alpha\beta}^v \cdot \mathbb{1}_4 + \delta_{\alpha\beta}^a \cdot \gamma_5) v_\beta(p_3) + \text{términos finitos,} \quad (4.84)$$

$$i\mathcal{M}_f = \bar{u}_\alpha(p_2) (\mathbb{1}_4 \cdot (-\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{3g_2^3}{8m_W^3} \Delta_\epsilon (m_\beta + m_\alpha) \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j} U_{\beta j}^* m_j^2 + \frac{3i}{2\sqrt{2}} \frac{v^2}{\Lambda^2} \delta_{\alpha\beta}^v) + \gamma_5 \cdot (-\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{3g_2^3}{8m_W^3} \Delta_\epsilon (m_\beta - m_\alpha) \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j} U_{\beta j}^* m_j^2 + \frac{3i}{2\sqrt{2}} \frac{v^2}{\Lambda^2} \delta_{\alpha\beta}^a)) v_\beta(p_3) + \text{términos finitos.} \quad (4.85)$$

Siguiendo el esquema de renormalización  $\overline{MS}$ , establecemos que

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{3g_2^3}{8m_W^3} \Delta_\epsilon (m_\beta + m_\alpha) \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j} U_{\beta j}^* m_j^2 + \frac{3i}{2\sqrt{2}} \frac{v^2}{\Lambda^2} \delta_{\alpha\beta}^v = 0, \\ \Rightarrow & \frac{v^2}{\sqrt{2}\Lambda^2} \delta_{\alpha\beta}^v = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{g_2^3}{4m_W^3} \Delta_\epsilon (m_\beta + m_\alpha) \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j} U_{\beta j}^* m_j^2, \\ \Rightarrow & \delta_{\alpha\beta}^v = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{g_2^3 (m_\beta + m_\alpha)}{2\sqrt{2}m_W^3 v^2} \Delta_\epsilon \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j} U_{\beta j}^* (\Lambda m_j)^2, \end{aligned}$$

recordando que  $v = \frac{2m_W}{g_2}$ , el contratérmino  $\delta_{\alpha\beta}^v$  se escribe como

$$\delta_{\alpha\beta}^v = \frac{g_2^5}{8\sqrt{2}(4\pi)^2} \frac{m_\beta + m_\alpha}{m_W^5} \Delta_\epsilon \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j} U_{\beta j}^* (\Lambda m_j)^2. \quad (4.86)$$

Siguiendo un procedimiento análogo, se prueba que

$$\delta_{\alpha\beta}^a = \frac{g_2^5}{8\sqrt{2}(4\pi)^2} \frac{m_\beta - m_\alpha}{m_W^5} \Delta_\epsilon \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j} U_{\beta j}^* (\Lambda m_j)^2. \quad (4.87)$$

5. Encontrar los contratérminos permite eliminar las divergencias ultravioletas, y por tanto, nuestra amplitud final  $i\mathcal{M}_f$  es un término finito, cuya expresión analítica es

$$i\mathcal{M}_f = \overline{u_\alpha}(p_2) \left[ -\frac{g_2^3}{2m_W} \sum_j^3 m_j U_{\alpha j} U_{\beta j}^* (c_{1,\alpha\beta}^j \cdot \mathbb{1}_4 + c_{5,\alpha\beta}^j \cdot \gamma_5) + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2} (v_{\alpha\beta} \cdot \mathbb{1}_4 + a_{\alpha\beta} \cdot \gamma_5) \right] v_\beta(p_3). \quad (4.88)$$

### 4.3.2. Implementación del Mecanismo GIM(Glashow-Iliopoulos-Maiani)

En nuestra expresión de la amplitud final, previamente obtenida, existe una sumatoria que corre sobre los eigencampos de masa.

Consideremos entonces, el término:

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \sum_j^3 m_j U_{\alpha j} U_{\beta j}^* (c_{1,\alpha\beta}^j \cdot \mathbb{1}_4 + c_{5,\alpha\beta}^j \cdot \gamma_5). \quad (4.89)$$

Implementaremos el mecanismo GIM, para ello, escribiremos explícitamente la sumatoria anterior, se tiene entonces

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta} &= m_1 U_{\alpha 1} U_{\beta 1}^* (c_{1,\alpha\beta}^{(1)} \cdot \mathbb{1}_4 + c_{5,\alpha\beta}^{(1)} \cdot \gamma_5) \\ &\quad + m_2 U_{\alpha 2} U_{\beta 2}^* (c_{1,\alpha\beta}^{(2)} \cdot \mathbb{1}_4 + c_{5,\alpha\beta}^{(2)} \cdot \gamma_5) \\ &\quad + m_3 U_{\alpha 3} U_{\beta 3}^* (c_{1,\alpha\beta}^{(3)} \cdot \mathbb{1}_4 + c_{5,\alpha\beta}^{(3)} \cdot \gamma_5). \end{aligned}$$

Recordemos que los coeficientes  $U_{\alpha j}$  y  $U_{\beta j}$  son las entradas de la matriz unitaria  $U_\nu$  de tamaño  $3 \times 3$ , lo cual significa que se satisface

$$\begin{aligned} U_\nu U_\nu^\dagger = \mathbb{1}_3 &\implies (U_\nu U_\nu^\dagger)_{\alpha\beta} = (\mathbb{1}_3)_{\alpha\beta}, \\ &\implies \sum_j^3 U_{\alpha j} U_{\beta j}^* = \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

, o de forma más explícita, se satisface

$$U_{\alpha 1} U_{\beta 1}^* + U_{\alpha 2} U_{\beta 2}^* + U_{\alpha 3} U_{\beta 3}^* = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.90)$$

El caso que nos interesa es cuando  $\alpha \neq \beta$ , entonces ha de cumplirse que

$$0 = U_{\alpha 1} U_{\beta 1}^* + U_{\alpha 2} U_{\beta 2}^* + U_{\alpha 3} U_{\beta 3}^*, \quad (4.91)$$

$$\implies U_{\alpha 1} U_{\beta 1}^* = -U_{\alpha 2} U_{\beta 2}^* - U_{\alpha 3} U_{\beta 3}^*, \quad (4.92)$$

usando la expresión anterior, podemos sustituir en  $\Gamma_{\alpha\beta}$ , entonces

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta} &= m_1(-U_{\alpha 2}U_{\beta 2}^* - U_{\alpha 3}U_{\beta 3}^*)(c_{1,\alpha\beta}^{(1)} \cdot \mathbb{1}_4 + c_{5,\alpha\beta}^{(1)} \cdot \gamma_5) \\ &\quad + m_2U_{\alpha 2}U_{\beta 2}^*(c_{1,\alpha\beta}^{(2)} \cdot \mathbb{1}_4 + c_{5,\alpha\beta}^{(2)} \cdot \gamma_5) \\ &\quad + m_3U_{\alpha 3}U_{\beta 3}^*(c_{1,\alpha\beta}^{(3)} \cdot \mathbb{1}_4 + c_{5,\alpha\beta}^{(3)} \cdot \gamma_5) \\ &= [U_{\alpha 2}U_{\beta 2}^*(m_2c_{1,\alpha\beta}^{(2)} - m_1c_{1,\alpha\beta}^{(1)}) + U_{\alpha 3}U_{\beta 3}^*(m_3c_{1,\alpha\beta}^{(3)} - m_1c_{1,\alpha\beta}^{(1)})] \cdot \mathbb{1}_4 \\ &\quad + [U_{\alpha 2}U_{\beta 2}^*(m_2c_{5,\alpha\beta}^{(2)} - m_1c_{5,\alpha\beta}^{(1)}) + U_{\alpha 3}U_{\beta 3}^*(m_3c_{5,\alpha\beta}^{(3)} - m_1c_{5,\alpha\beta}^{(1)})] \cdot \gamma_5.\end{aligned}$$

Vamos a definir:

$$f_{\alpha\beta}^1 = U_{\alpha 2}U_{\beta 2}^*(m_2c_{1,\alpha\beta}^{(2)} - m_1c_{1,\alpha\beta}^{(1)}) + U_{\alpha 3}U_{\beta 3}^*(m_3c_{1,\alpha\beta}^{(3)} - m_1c_{1,\alpha\beta}^{(1)}), \quad (4.93)$$

$$f_{\alpha\beta}^5 = U_{\alpha 2}U_{\beta 2}^*(m_2c_{5,\alpha\beta}^{(2)} - m_1c_{5,\alpha\beta}^{(1)}) + U_{\alpha 3}U_{\beta 3}^*(m_3c_{5,\alpha\beta}^{(3)} - m_1c_{5,\alpha\beta}^{(1)}). \quad (4.94)$$

Sustituyendo estas expresiones en nuestra amplitud final  $i\mathcal{M}_f$ :

$$\begin{aligned}i\mathcal{M}_f &= \overline{u_\alpha}(p_2)\left[-\frac{g_2^3}{2m_W}(f_{\alpha\beta}^1 \cdot \mathbb{1}_4 + f_{\alpha\beta}^5 \cdot \gamma_5) + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2}(v_{\alpha\beta} \cdot \mathbb{1}_4 + a_{\alpha\beta} \cdot \gamma_5)\right]v_\beta(p_3) \\ &= \overline{u_\alpha}(p_2)\left[\left(-\frac{g_2^3}{2m_W}f_{\alpha\beta}^1 + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2}v_{\alpha\beta}\right) \cdot \mathbb{1}_4 + \left(-\frac{g_2^3}{2m_W}f_{\alpha\beta}^5 + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2}a_{\alpha\beta}\right) \cdot \gamma_5\right]v_\beta(p_3).\end{aligned}$$

Con el resultado anterior, podemos calcular la amplitud cuadrada final  $|\mathcal{M}_f| = \mathcal{M}_f\mathcal{M}_f^\dagger$ . Calculando primero el hermitiano adjunto de  $i\mathcal{M}_f$ , se tiene que

$$i^*\mathcal{M}_f^\dagger = \overline{v_\beta}(p_3)\left[\left(-\frac{g_2^3}{2m_W}f_{\alpha\beta}^1 + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2}v_{\alpha\beta}\right)^* \cdot \mathbb{1}_4 + \left(-\frac{g_2^3}{2m_W}f_{\alpha\beta}^5 + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2}a_{\alpha\beta}\right)^* \cdot \gamma_5\right]u_\alpha(p_2),$$

de modo que la amplitud cuadrada final es

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}_f| &= i\mathcal{M}_f i^*\mathcal{M}_f^\dagger = \mathcal{M}_f\mathcal{M}_f^\dagger \\ &= \overline{u_\alpha}(p_2)\left[\left(-\frac{g_2^3}{2m_W}f_{\alpha\beta}^1 + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2}v_{\alpha\beta}\right) \cdot \mathbb{1}_4 + \left(-\frac{g_2^3}{2m_W}f_{\alpha\beta}^5 + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2}a_{\alpha\beta}\right) \cdot \gamma_5\right]v_\beta(p_3) \\ &\quad \times \overline{v_\beta}(p_3)\left[\left(-\frac{g_2^3}{2m_W}f_{\alpha\beta}^1 + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2}v_{\alpha\beta}\right)^* \cdot \mathbb{1}_4 + \left(-\frac{g_2^3}{2m_W}f_{\alpha\beta}^5 + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2}a_{\alpha\beta}\right)^* \cdot \gamma_5\right]u_\alpha(p_2) \\ &= \left|-\frac{g_2^3}{2m_W}f_{\alpha\beta}^1 + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2}v_{\alpha\beta}\right|^2 \overline{u_\alpha}(p_2)v_\beta(p_3)\overline{v_\beta}(p_3)u_\alpha(p_2) \\ &\quad - \left|-\frac{g_2^3}{2m_W}f_{\alpha\beta}^5 + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2}a_{\alpha\beta}\right|^2 \overline{u_\alpha}(p_2)\gamma_5 v_\beta(p_3)\overline{v_\beta}(p_3)\gamma_5 u_\alpha(p_2).\end{aligned}$$

Sumando sobre los estados de espín  $s_2$  y  $s_3$

$$\sum_{s_2} u_\alpha(p_2)\overline{u_\alpha}(p_2) = \not{p}_2 + m_\alpha, \quad (4.95)$$

$$\sum_{s_3} u_\alpha(p_3)\overline{u_\alpha}(p_3) = \not{p}_3 - m_\beta, \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_f| &= \left| -\frac{g_2^3}{2m_W} f_{\alpha\beta}^1 + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2} v_{\alpha\beta} |^2 \text{tr}\{(p_2 + m_\alpha)(p_3 - m_\beta)\} \right. \\
&\quad \left. - \left| -\frac{g_2^3}{2m_W} f_{\alpha\beta}^5 + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2} a_{\alpha\beta} |^2 \text{tr}\{(p_2 + m_\alpha)\gamma_5(p_3 - m_\beta)\gamma_5\} \right. \right. \\
&= 4 \left| -\frac{g_2^3}{2m_W} f_{\alpha\beta}^1 + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2} v_{\alpha\beta} |^2 (p_2 \cdot p_3 - m_\alpha m_\beta) \right. \\
&\quad \left. + 4 \left| -\frac{g_2^3}{2m_W} f_{\alpha\beta}^5 + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2} a_{\alpha\beta} |^2 (p_2 \cdot p_3 + m_\alpha m_\beta), \right. \right.
\end{aligned}$$

recuerde que condiciones en los momentos están dadas por

$$p_2^2 = m_\alpha^2, \quad (4.97)$$

$$p_3^2 = m_\beta^2, \quad (4.98)$$

$$p_2 \cdot p_3 = \frac{m_H^2 - m_\alpha^2 - m_\beta^2}{2}, \quad (4.99)$$

de modo que la amplitud al cuadrado final es

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_f| &= 2m_H^2 \left| -\frac{g_2^3}{2m_W} f_{\alpha\beta}^1 + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2} v_{\alpha\beta} |^2 \left[ 1 - \left( \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_H} \right)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + 2m_H^2 \left| -\frac{g_2^3}{2m_W} f_{\alpha\beta}^5 + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2} a_{\alpha\beta} |^2 \left[ 1 - \left( \frac{m_\alpha - m_\beta}{m_H} \right)^2 \right]. \right. \quad (4.100)
\end{aligned}$$

6. Se calcula la tasa de decaimiento que está dada por<sup>6</sup>

$$\Gamma = |\mathcal{M}|^2 \frac{p_2}{8\pi m_1^2}, \quad (4.101)$$

$$\text{con } \frac{p_2}{m_1} = \frac{[m_1^2 - (m_2 + m_3)^2]^{\frac{1}{2}} [m_1^2 - (m_2 - m_3)^2]^{\frac{1}{2}}}{2m_1^2}.$$

Si la expresión para la amplitud cuadrada dada por la ec. (4.100) es sustituida en la ec. (4.101), se tiene que la tasa de decaimiento es

$$\begin{aligned}
\Gamma(h \rightarrow \ell_\alpha \ell_\beta) &= \frac{m_H}{8\pi} \left| -\frac{g_2^3}{2m_W} f_{\alpha\beta}^1 + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2} v_{\alpha\beta} |^2 \left[ 1 - \left( \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_H} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \left[ 1 - \left( \frac{m_\alpha - m_\beta}{m_H} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{m_H}{8\pi} \left| -\frac{g_2^3}{2m_W} f_{\alpha\beta}^5 + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2} a_{\alpha\beta} |^2 \left[ 1 - \left( \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_H} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ 1 - \left( \frac{m_\alpha - m_\beta}{m_H} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}, \right. \quad (4.102)
\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}
\Gamma(h \rightarrow \ell_\alpha \ell_\beta) &= \frac{m_H}{8\pi} \left| -\frac{4m_W^2}{v^3} f_{\alpha\beta}^1 + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2} v_{\alpha\beta} |^2 \left[ 1 - \left( \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_H} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \left[ 1 - \left( \frac{m_\alpha - m_\beta}{m_H} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{m_H}{8\pi} \left| -\frac{4m_W^2}{v^3} f_{\alpha\beta}^5 + \frac{3iv^2}{2\sqrt{2}\Lambda^2} a_{\alpha\beta} |^2 \left[ 1 - \left( \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_H} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ 1 - \left( \frac{m_\alpha - m_\beta}{m_H} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}, \right. \quad (4.103)
\end{aligned}$$

$$\text{con } \frac{g_2^3}{2m_W} = \frac{4m_W^2}{v^3}.$$

Consideramos los tres posibles decaimientos, dados por

$$h \rightarrow e\mu, \quad (4.104)$$

$$h \rightarrow e\tau, \quad (4.105)$$

$$h \rightarrow \mu\tau. \quad (4.106)$$

<sup>6</sup>Ver Apéndice B para más detalles de la fórmula obtenida.

**CAPÍTULO 4. DECAIMIENTO  $H \rightarrow \ell_\alpha \ell_\beta$**   
4.3. CÁLCULO NUMÉRICO

7. Se calcularon las integrales ultravioletas finitas con la paquetería *Package X* y se realizó una expansión en serie de potencias a primer orden con el fin de facilitar los cálculos numéricos.

Las masas para los leptones, el bosón W y el bosón de Higgs fueron tomados de los resultados de PDG[38]:

$$m_e = 0,5109989461 \pm 0,0000000031\text{MeV}, \quad (4.107)$$

$$m_\mu = 105,6583745 \pm 0,0000024\text{MeV}, \quad (4.108)$$

$$m_\tau = 1776,86 \pm 0,12\text{MeV}, \quad (4.109)$$

$$m_W = 80,379 \pm 0,012\text{GeV}, \quad (4.110)$$

$$m_H = 125,25 \pm 0,17\text{GeV}. \quad (4.111)$$

Con respecto a la matriz PMNS para neutrinos de Majorana, está dada por la ec. (1.121), se tomaron a las fases de Majorana como  $\alpha = \beta = 0$ , de modo que la la matriz PMNS se reduce al caso de neutrinos de Dirac dada por la ec. (1.113), cuyos coeficientes se establecen en la Fig. (4.6)[39]:

parameter	best fit value $\pm 1\sigma$	$3\sigma$ range
$\sin^2 \theta_{12}$	$0.304^{+0.012}_{-0.012}$	(0.270, 0.344)
$\theta_{12}$ (degrees)	$33.48^{+0.77}_{-0.74}$	(31.30, 35.90)
$\sin^2 \theta_{23}$	$[0.451^{+0.001}_{-0.001}]$ or $0.577^{+0.027}_{-0.035}$	(0.385, 0.644)
$\theta_{23}$ (degrees)	$[42.2^{+0.11}_{-0.1}]$ or $49.4^{+1.6}_{-2.0}$	(38.4, 53.3)
$\sin^2 \theta_{13}$	$0.0219^{+0.0010}_{-0.0011}$	(0.0188, 0.0251)
$\theta_{13}$ (degrees)	$8.52^{+0.20}_{-0.21}$	(7.87, 9.11)
$\delta_{CP}$ (degrees)	$251^{+67}_{-59}$	(0, 360)
$\Delta m_{21}^2 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$	$7.50^{+0.19}_{-0.17}$	(7.03, 8.09)
(normal) $\Delta m_{31}^2 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$	$+2.458^{+0.046}_{-0.047}$	(+2.325, +2.599)
(inverted) $\Delta m_{32}^2 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$	$-2.448^{+0.047}_{-0.047}$	(-2.590, -2.307)

Figura 4.6: Valores para la matriz PMNS, tomados del artículo Neutrino Mass Hierarchy.

Los valores dados en la figura anterior, nos proporcionan dos esquemas para neutrinos masivos, los cuales son consecuencia de las mediciones de oscilaciones de neutrinos, y se traduce en la diferencia de cuadrados de las masas de neutrinos. Si consideramos que la masa del neutrino más ligero es  $1 \times 10^{-2} \text{ eV}$  para el caso invertido y  $7 \times 10^{-3} \text{ eV}$  para el caso normal[40], entonces, para el esquema normal  $m_1 < m_2 < m_3$

$$m_1 = 7 \times 10^{-3} \text{ eV}, \quad (4.112)$$

$$m_2 = 1,1 \times 10^{-2} \text{ eV}, \quad (4.113)$$

$$m_3 = 5 \times 10^{-2} \text{ eV}, \quad (4.114)$$

y para el esquema invertido  $m_3 < m_1 < m_2$

$$m_1 = 4,9 \times 10^{-2} \text{ eV}, \quad (4.115)$$

$$m_2 = 5 \times 10^{-2} \text{ eV}, \quad (4.116)$$

$$m_3 = 1 \times 10^{-2} \text{ eV}. \quad (4.117)$$

A los coeficientes introducidos durante la renormalización de la teoría  $a_{\alpha\beta}, v_{\alpha\beta}$ , con el fin de reducir los cálculos se tomaron como  $a_{\alpha\beta} = v_{\alpha\beta} = 1$ , de modo que las tasas de decaimiento

para el esquema normal son

$$\Gamma_{e\mu} = 4,10152 \times 10^{-46} GeV, \quad (4.118)$$

$$\Gamma_{e\tau} = 4,09972 \times 10^{-46} GeV, \quad (4.119)$$

$$\Gamma_{\mu\tau} = 4,09904 \times 10^{-46} GeV, \quad (4.120)$$

y para el esquema invertido

$$\Gamma_{e\mu} = 4,10143 \times 10^{-46} GeV, \quad (4.121)$$

$$\Gamma_{e\tau} = 4,09996 \times 10^{-46} GeV, \quad (4.122)$$

$$\Gamma_{\mu\tau} = 4,10524 \times 10^{-46} GeV. \quad (4.123)$$

8. Lo interesante en una partícula que decae en diferentes estados finales, es la proporción en la que estos decaimientos tendrán un estado final específico, a esto se le conoce como *Branching ratio* y está dado por

$$Br = \frac{\Gamma_{\alpha\beta}}{\Gamma_{tot}}. \quad (4.124)$$

Si consideramos al decaimiento total del bosón de Higgs como  $\Gamma_H = 4,1 \times 10^{-3} GeV$ [41], los *Branching ratios* para cada posible decaimiento son aproximadamente del orden

**Esquema normal:**

$$Br(h \rightarrow e\mu) \sim \mathcal{O}(10^{-43}), \quad (4.125)$$

$$Br(h \rightarrow e\tau) \sim \mathcal{O}(10^{-43}), \quad (4.126)$$

$$Br(h \rightarrow \mu\tau) \sim \mathcal{O}(10^{-43}). \quad (4.127)$$

**Esquema invertido:**

$$Br(h \rightarrow e\mu) \sim \mathcal{O}(10^{-43}), \quad (4.128)$$

$$Br(h \rightarrow e\tau) \sim \mathcal{O}(10^{-43}), \quad (4.129)$$

$$Br(h \rightarrow \mu\tau) \sim \mathcal{O}(10^{-43}). \quad (4.130)$$



# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo se logró demostrar que después del rompimiento espontáneo de simetría, el operador de Weinberg permite dotar con masa de Majorana a los neutrinos. Además, a primera instancia, se logró calcular parcialmente la tasa de decaimiento para un proceso de decaimiento de un bosón de Higgs en un par de neutrinos con cambio de sabor.

Con respecto al cálculo de la amplitud para un proceso de decaimiento de un bosón de Higgs en un par de leptones con cambio de sabor, debe notarse que inicialmente la amplitud consideraba un par de diagramas de Feynman a orden de un lazo, sin embargo, durante el cálculo analítico se encontraron divergencias ultravioletas, lo que provocó que se tuviera que renormalizar la teoría, y por tanto, considerar dos diagramas de Feynman más a la amplitud total, con el fin de eliminar estas divergencias.

Es importante mencionar que la unitariedad de la matriz PMNS nos permitió eliminar términos que no contribuyen a la amplitud total, además de que permite reducir el conjunto de decaimientos en tres casos posibles.

También cabe señalar que las soluciones analíticas a las funciones de Passarino-Veltman,  $B_0$  y  $C_0$  se desarrollaron en serie de Taylor a primer orden, con el fin de facilitar el cálculo. Y el valor numérico de las mismas, fue obtenido mediante *Package X*. De igual forma, las tasas de decaimiento se desarrollaron en serie de Taylor a primer orden con respecto del cociente  $x_j = \frac{m_j^2}{m_H^2}$  y alrededor del punto  $x_0 = 0$ , de modo que los *Branching ratios* son también a primer orden.

Finalmente, los *Branching ratios*, sin importar si se trabaja en el esquema normal o invertido son de orden  $\mathcal{O}(10^{-43})$ , esto debido a que las diferencias cuadráticas de las masas  $\Delta m_{31}^2$  y  $\Delta m_{32}^2$  son demasiado pequeñas en comparación con la masa de los leptones cargados y los bosones.

Los valores obtenidos para los *Branching ratios* se encuentran alejados de las cotas experimentales reportadas por el Particle Data Group, cuyos valores son del orden  $\mathcal{O}(10^{-5})$ ,  $\mathcal{O}(10^{-3})$ ,  $\mathcal{O}(10^{-3})$  para los decaimientos  $h \rightarrow e\mu$ ,  $h \rightarrow e\tau$  y  $h \rightarrow \mu\tau$  respectivamente.



# Apéndice A

## Álgebra de Dirac

### A.1. Matrices de Dirac

Las matrices gamma, representadas como  $\gamma^\mu$  con  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , son matrices de tamaño  $4 \times 4$  que satisfacen las relaciones de anticonmutación

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1}_4, \quad (\text{A.1})$$

donde  $g^{\mu\nu}$  es el tensor métrico, definido como

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Las matrices gamma, también llamadas matrices de Dirac, han de satisfacer, además, la condición

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu. \quad (\text{A.3})$$

De la ec. (A.1), se puede observar que se cumplen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^2 &= \mathbb{1}_4, \\ (\gamma^k)^2 &= -\mathbb{1}_4, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

La condición establecida por la ec. (A.3), implica que

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^\dagger &= \gamma^0, \\ (\gamma^k)^\dagger &= -\gamma^k, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

es decir,  $\gamma^0$  es una matriz hermitiana, mientras que las matrices  $\gamma^k$  son antihermitianas, con  $k = 1, 2, 3$ .

Existen diversas representaciones para las matrices gamma, la representación estándar para estas matrices, son la llamada representación de Dirac

$$\begin{aligned} \gamma_D^0 &= \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \\ \gamma_D^k &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

con  $k = 1, 2, 3$ , y  $\sigma^k$  son las matrices de Pauli.

**APÉNDICE A. ÁLGEBRA DE DIRAC**  
A.1. MATRICES DE DIRAC

---

Además, podemos definir la matriz de quiralidad

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (\text{A.7})$$

que satisface las siguientes propiedades

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}_4, \quad (\text{A.9})$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\text{A.10})$$

y que en la representación de Dirac tiene la forma

$$\gamma_D^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Otra representación importante de las matrices gamma es la representación quiral, usada comúnmente para el estudio de partículas relativistas como los neutrinos, en esta representación se definen como

$$\begin{aligned} \gamma_C^0 &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_2 \\ -\mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_C^k &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_C^5 &= \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Es importante mencionar que independientemente de la representación que se esté usando, las matrices gamma son de traza nula.

Las matrices de Dirac satisfacen las siguientes propiedades

1. La traza de cualquier producto de un número impar de  $\gamma^\mu$  es cero.
2. La traza de  $\gamma^5$  por un producto de un número impar de  $\gamma^\mu$  también es cero.
3.  $tr\{\gamma^5\} = tr\{\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5\} = 0$ .
4.  $tr\{\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5\} = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ , donde  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  es el símbolo de Levi-Civita.

Por otro lado, para cualquier cuadvivector  $a_\mu$ , la notación slash de Feynman se define como

$$\not{a} = \gamma^\mu a_\mu, \quad (\text{A.13})$$

donde hay suma sobre índice repetido.

Algunas identidades que se cumplen son las siguientes

$$\gamma^5 \not{a} \gamma^5 = -\not{a}, \quad (\text{A.14})$$

$$\not{a} \not{a} = a^2, \quad (\text{A.15})$$

$$tr\{\not{a} \not{b}\} = 4a \cdot b, \quad (\text{A.16})$$

$$tr\{\gamma^5 \not{a} \not{b}\} = 0, \quad (\text{A.17})$$

$$tr\{\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}\} = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c) - (a \cdot c)(b \cdot d)], \quad (\text{A.18})$$

$$tr\{\not{a}_1 \dots \not{a}_n\} = tr\{\gamma^5 \not{a}_1 \dots \not{a}_n\} = 0, n - \text{impar}. \quad (\text{A.19})$$

Dada la matriz  $\gamma^5$ , se definen las matrices de proyección quirral como

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{\mathbb{1}_4 - \gamma^5}{2}, \\ P_R &= \frac{\mathbb{1}_4 + \gamma^5}{2}, \end{aligned} \tag{A.20}$$

donde  $P_L$  es la matriz de proyección quirral izquierda y  $P_R$  es la matriz de proyección quirral derecha, y en la representación quirral tienen la forma

$$\begin{aligned} P_L &= \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ P_R &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{A.21}$$

Las matrices de proyección quirral satisfacen las propiedades

$$(P_L)^\dagger = P_L, \quad (P_L)^2 = P_L, \tag{A.22}$$

$$(P_R)^\dagger = P_R, \quad (P_R)^2 = P_R, \tag{A.23}$$

$$P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L, \quad P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R, \tag{A.24}$$

$$P_L P_R = 0, \quad P_R + P_L = \mathbb{1}_4. \tag{A.25}$$

## A.2. Matriz de conjugación de carga

La matriz de conjugación de carga  $C$ , en cualquiera de las dos representaciones antes mencionadas, se define como

$$C = -i\gamma^0\gamma^2, \tag{A.26}$$

entonces  $C$  es una matriz unitaria de tamaño  $4 \times 4$ , y satisface las relaciones

$$C^\dagger = C^{-1}, \tag{A.27}$$

$$C^T = -C, \tag{A.28}$$

$$C(\gamma^\mu)^T C^{-1} = -\gamma^\mu, \tag{A.29}$$

$$C(\gamma_5)^T C^{-1} = -\gamma_5. \tag{A.30}$$



## Apéndice B

# Tasa de decaimiento

Consideremos un proceso de decaimiento  $1 \rightarrow n$  con  $|1\rangle = |\vec{p}_1\rangle$  y  $|f\rangle = |\vec{p}_{f_1} \dots \vec{p}_{f_n}\rangle$ , donde  $\vec{p}_{f_1} \dots \vec{p}_{f_n}$  son el momento inicial y final respectivamente. La tasa de decaimiento diferencial para la partícula 1, visto desde un marco en reposo, de forma general, se expresa como[42]:

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \frac{\delta^4(p_1 - \sum_k p_{f_k})}{2m_1} \prod_{k=1}^n \frac{d^3\vec{p}_{f_k}}{(2\pi)^3 2E_{f_k}} |\mathcal{M}|^2. \quad (\text{B.1})$$

La tasa de decaimiento total se obtiene integrando sobre el espacio fase de las partículas finales

$$\Sigma = \prod_l S_l \int d\Gamma. \quad (\text{B.2})$$

Nos concentraremos en un proceso del tipo  $1 \rightarrow 2$ , con  $|1\rangle = \vec{p}_1$  y  $|f\rangle = |\vec{p}_2, \vec{p}_3\rangle$ , donde  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ , son los momentos para las partículas en cuestión respectivamente. De modo que la tasa de decaimiento diferencial tiene la forma

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \frac{\delta^4(p_1 - p_2 - p_3)}{2m_1} \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} |\mathcal{M}|^2, \quad (\text{B.3})$$

si integramos la expresión anterior

$$\Gamma = \int d\Gamma = \int (2\pi)^4 \frac{\delta^4(p_1 - p_2 - p_3)}{2m_1} \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} |\mathcal{M}|^2. \quad (\text{B.4})$$

Extrayendo las constantes fuera de la integral

$$\Gamma = \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^6 8m_1} \int \frac{d^3\vec{p}_3}{E_3} \int \frac{d^3\vec{p}_2}{E_2} \delta^4(p_1 - p_2 - p_3). \quad (\text{B.5})$$

Podemos separar la función delta de Dirac cuadrimensional de la forma  $\delta^4(p_1 - p_2 - p_3) = \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \delta(p_1^0 - p_2^0 - p_3^0)$ , además podemos pensar que la partícula 1 parte del reposo, de modo que  $\vec{p}_1 = 0$ , y también se cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} p_1 &= \begin{pmatrix} p_1^0 \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ p_2 &= \begin{pmatrix} p_2^0 \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix}, \\ p_3 &= \begin{pmatrix} p_3^0 \\ \vec{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_3 \\ \vec{p}_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

---

**APÉNDICE B. TASA DE DECAIMIENTO**

---

donde  $E_{2,3} = \sqrt{\vec{p}_{2,3}^2 + m_{2,3}^2}$ .

Entonces, la tasa de decaimiento es

$$\Gamma = \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^6 8m_1} \int \frac{d^3 \vec{p}_3}{E_3} \int \frac{d^3 \vec{p}_2}{E_2} \delta^3(-(\vec{p}_2 + \vec{p}_3)) \delta(m_1 - E_2 - E_3) \quad (\text{B.7})$$

$$= \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^6 8m_1} \int \frac{d^3 \vec{p}_3}{E_3} \int \frac{d^3 \vec{p}_2}{E_2} \delta^3(\vec{p}_2 + \vec{p}_3) \delta(m_1 - E_2 - E_3). \quad (\text{B.8})$$

Por las propiedades de la función delta de Dirac podemos cancelar la integral de  $\int d^3 \vec{p}_3$ , y como consecuencia se redefinen las energías de las partículas 2 y 3 de la forma  $E_{2,3} = \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_{2,3}^2}$ , entonces la tasa de decaimiento es

$$\Gamma = \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^6 8m_1} \int \frac{d^3 \vec{p}_2}{E_2 E_3} \delta(m_1 - E_2 - E_3). \quad (\text{B.9})$$

Para facilitar el cálculo de la integral conviene hacer un cambio de variables a coordenadas esféricas, de modo que  $d^3 \vec{p}_2 = \vec{p}_2^2 \sin\theta d\vec{p}_2 d\theta d\phi = d\Omega \vec{p}_2^2 d\vec{p}_2$ , con lo cual, la tasa de decaimiento es

$$\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^2 8m_1} \int d\Omega \int \frac{\vec{p}_2^2 d\vec{p}_2}{E_2 E_3} \delta(m_1 - E_2 - E_3). \quad (\text{B.10})$$

Resulta que la primera integral es fácil de calcular  $\int d\Omega = 4\pi$ , de modo que la tasa de decaimiento es

$$\Gamma = \frac{4\pi |\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^2 8m_1} \int \frac{\vec{p}_2^2 d\vec{p}_2}{E_2 E_3} \delta(m_1 - E_2 - E_3) \quad (\text{B.11})$$

$$= \frac{4\pi |\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^2 8m_1} \int \frac{\vec{p}_2^2 d\vec{p}_2}{\sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2} \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_3^2}} \delta\left(m_1 - \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2} - \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_3^2}\right). \quad (\text{B.12})$$

Con el fin de calcular la integral usaremos una propiedad importante de la función delta, la cual nos dice

$$\delta(f(x)) = \sum_j \frac{\delta(x - a_j)}{|f'(a_j)|}, \quad (\text{B.13})$$

con  $a_j$  raíces tales que  $f(a_j) = 0$ . Entonces nuestra  $f(\vec{p}_2) = \left(m_1 - \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2} - \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_3^2}\right)$ , con  $x = \vec{p}_2$ . Encontramos donde  $f(a_j) = 0$ ,

$$a_1 = \frac{\sqrt{(m_1^2 - (m_2 + m_3)^2)(m_1^2 - (m_2 - m_3)^2)}}{2m_1}, \quad (\text{B.14})$$

la derivada de  $f(\vec{p}_2)$ , es la siguiente

$$f'(\vec{p}_2) = -\frac{\vec{p}_2}{\sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2}} - \frac{\vec{p}_2}{\sqrt{\vec{p}_2^2 + m_3^2}}. \quad (\text{B.15})$$

Si sustituimos el valor de  $a_1$  en la ec. anterior, tenemos que

$$\frac{1}{|f'(a_1)|} = \frac{1}{2m_1^2} \frac{m_1^4 - (m_2^2 - m_3^2)^2}{\sqrt{(m_1^2 - (m_2 + m_3)^2)(m_1^2 - (m_2 - m_3)^2)}}. \quad (\text{B.16})$$

Entonces la función delta queda de la siguiente forma

$$\sum_j \frac{\delta(x - a_j)}{|f'(a_j)|} = \frac{1}{2m_1^2} \frac{m_1^4 - (m_2^2 - m_3^2)^2}{\sqrt{(m_1^2 - (m_2 + m_3)^2)(m_1^2 - (m_2 - m_3)^2)}} \delta\left(\vec{p}_2 - \frac{\sqrt{(m_1^2 - (m_2 + m_3)^2)(m_1^2 - (m_2 - m_3)^2)}}{2m_1}\right). \quad (\text{B.17})$$


---

## APÉNDICE B. TASA DE DECAIMIENTO

---

Sustituyendo la ec. (B.17) en la ec. (B.12), podemos resolver la integral y haciendo el álgebra pertinente, tenemos que la tasa de decaimiento es

$$\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{8\pi m_1} \frac{\sqrt{(m_1^2 - (m_2 + m_3)^2)(m_1^2 - (m_2 - m_3)^2)}}{2m_1^2} \quad (\text{B.18})$$

$$= \frac{|\mathcal{M}|^2}{8\pi m_1} \frac{[m_1^2 - (m_2 + m_3)^2]^{\frac{1}{2}} [m_1^2 - (m_2 - m_3)^2]^{\frac{1}{2}}}{2m_1^2} \quad (\text{B.19})$$

$$= \frac{|\mathcal{M}|^2 p_2}{8\pi m_1^2}, \quad (\text{B.20})$$

donde definimos  $\frac{p_2}{m_1} = \frac{[m_1^2 - (m_2 + m_3)^2]^{\frac{1}{2}} [m_1^2 - (m_2 - m_3)^2]^{\frac{1}{2}}}{2m_1^2}$ .



# Apéndice C

## Reglas de Feynman

Se presentan las reglas de Feynman siguientes:

- Propagadores

1. Neutrinos

$$\bar{\nu}_j \xrightarrow{q} \nu_j = \frac{i(\not{q} + m_j \cdot 1_4)}{q^2 - m_j^2} \quad (1)$$

$$\nu_j \xrightarrow{q} \nu_j = \frac{iC^{-1}(\not{q} + m_j \cdot 1_4)}{q^2 - m_j^2} \quad (2)$$

$$\bar{\nu}_j \xrightarrow{q} \bar{\nu}_j = \frac{i(\not{q} + m_j \cdot 1_4)C}{q^2 - m_j^2} \quad (3)$$

2. Bosón  $W$  (norma unitaria):

$$W_\mu \xrightarrow{q} W_\nu = \frac{-i}{q^2 - m_W^2} (g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_W^2}) \quad (4)$$

- Vértices

$$\begin{array}{c} W_\mu^- \\ \downarrow \\ \nu_j \text{---} \text{---} \bar{\ell}_\alpha \end{array} = \frac{ig}{\sqrt{2}} U_{\alpha j} \gamma_\mu P_L \quad (5)$$

$$\begin{array}{c} W_\mu^+ \\ \downarrow \\ \ell_\alpha \text{---} \text{---} \bar{\nu}_j \end{array} = \frac{ig}{\sqrt{2}} U_{\alpha j}^* \gamma_\mu P_L \quad (6)$$

$$\begin{array}{c} h \\ \vdots \\ \nu_j \text{---} \text{---} \bar{\nu}_j \end{array} = -\frac{igm_j}{2m_w} \cdot 1_4 \quad (7)$$

Los propagadores son las líneas interiores y se interpretan como partículas virtuales que no son observadas.



# Bibliografía

- [1] S.L. Glashow. Partial-symmetries of weak interactions. *Nuclear Phys.*, 2 1961.
- [2] Steven Weinberg. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1264–1266, Nov 1967.
- [3] Abdus Salam. Weak and Electromagnetic Interactions. *Conf. Proc. C*, 680519:367–377, 1968.
- [4] Mary K. Gaillard, Paul D. Grannis, and Frank J. Sciulli. The standard model of particle physics. *Reviews of Modern Physics*, 71(2):S96–S111, Mar 1999.
- [5] Guido Altarelli. The standard model of particle physics. *Encyclopedia of Mathematical Physics*, 11 2005.
- [6] Christian Gross, Antonello Polosa, Alessandro Strumia, Alfredo Urbano, and Wei Xue. Dark matter in the standard model? *Physical Review D*, 98(6), Sep 2018.
- [7] Manuel Drees. Dark Matter Theory. *PoS, ICHEP2018:730*, 2019.
- [8] G. Aad, T. Abajyan, B. Abbott, J. Abdallah, S. Abdel Khalek, A.A. Abdelalim, O. Abdinov, R. Aben, B. Abi, M. Abolins, and et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Physics Letters B*, 716(1):1–29, Sep 2012.
- [9] S. Chatrchyan, V. Khachatryan, A.M. Sirunyan, A. Tumasyan, W. Adam, E. Aguilo, T. Bergauer, M. Dragicevic, J. Erö, C. Fabjan, and et al. Observation of a new boson at a mass of 125 gev with the cms experiment at the lhc. *Physics Letters B*, 716(1):30–61, Sep 2012.
- [10] Y. Fukuda, T. Hayakawa, E. Ichihara, K. Inoue, K. Ishihara, H. Ishino, Y. Itow, T. Kajita, J. Kameda, S. Kasuga, and et al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Physical Review Letters*, 81(8):1562–1567, Aug 1998.
- [11] Q. R. Ahmad, R. C. Allen, T. C. Andersen, J. D. Anglin, J. C. Barton, E. W. Beier, M. Bercovitch, J. Bigu, S. D. Biller, R. A. Black, and et al. Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the sudbury neutrino observatory. *Physical Review Letters*, 89(1), Jun 2002.
- [12] M. Goeppert-Mayer. Double beta-disintegration. *Phys. Rev.*, 48:512–516, Sep 1935.
- [13] J. D. Vergados, H. Ejiri, and F. Šimkovic. Theory of neutrinoless double-beta decay. *Reports on Progress in Physics*, 75(10):106301, Sep 2012.
- [14] L. Cardani. Neutrinoless Double Beta Decay Overview. *SciPost Phys. Proc.*, 1:024, 2019.
- [15] E. Noether. Invariant variation problems. *Transport Theory and Statistical Physics*, 1(3):186–207, Jan 1971.
- [16] M. Bañados and I. Reyes. A short review on noether’s theorems, gauge symmetries and boundary terms. *International Journal of Modern Physics D*, 25(10):1630021, Aug 2016.

- [17] R. Marinho Jr. Noether's theorem in classical mechanics revisited. *European Journal of Physics*, 28, 09 2006.
- [18] A. Kobakhidze and A. Spencer-Smith. The Higgs vacuum is unstable, ARC Centre of Excellence for Particle Physics at the Terascale, School of Physics, The University of Sydney, NSW, 2006.
- [19] X. Calmet. Cosmological evolution of the higgs boson's vacuum expectation value. *The European Physical Journal C*, 77(11), Nov 2017.
- [20] H. Bertle. Goldstone Boson and Higgs Mechanism. *Proseminar Theoretical Physics,ETH Zurich*, May 2018.
- [21] J. Goldstone. Field theories with "superconductor"solutions. *Nuovo Cimento*, 19:154–164, Aug 1960.
- [22] P. W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:508–509, Oct 1964.
- [23] P. W. Higgs. Broken symmetries, massless particles and gauge fields. *Phys. Lett.*, 12:132–133, 1964.
- [24] N. Cabibbo. Unitary symmetry and leptonic decays. *Phys. Rev. Lett.*, 10:531–533, Jun 1963.
- [25] M. Kobayashi and T. Maskawa. CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction. *Progress of Theoretical Physics*, 49(2):652–657, 02 1973.
- [26] T. Gershon. Overview of the cabibbo–kobayashi–maskawa matrix†. *Pramana*, 79(5):1091–1108, Nov 2012.
- [27] Carlo Giunti and Chung Wook Kim. *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics*. Oxford University Press, 2007.
- [28] S. M. Bilenky. Neutrinos: Majorana or Dirac? *Universe*, 6(9):134, 2020.
- [29] P. B. Pal. Dirac, Majorana and Weyl fermions. *American Journal of Physics*, 79(5):485–498, May 2011.
- [30] J. Wudka. Electroweak effective lagrangians. *International Journal of Modern Physics A*, 09(14):2301–2361, Jun 1994.
- [31] Aneesh V. Manohar. Introduction to Effective Field Theories. Effective Field Theories in Particle Physics and Cosmology: Lecture Notes of the les Houches Summer School: Session CVIII, July 2017.
- [32] A. Dobado, A. Gomez-Nicola, A. L. Maroto, and J. R. Pelaez. *Effective Lagrangians for the Standard Model*. Springer, Berlin, 1997.
- [33] F. Bonnet, M. Hirsch, T. Ota, and W. Winter. Systematic study of the  $d = 5$  Weinberg operator at one-loop order. *Journal of High Energy Physics*, 2012(7), Jul 2012.
- [34] J. Hernandez-Garcia and S. F. King. New weinberg operator for neutrino mass and its seesaw origin. *Journal of High Energy Physics*, 2019(5), May 2019.
- [35] J. Turner and Ye-Ling Zhou. Leptogenesis via varying weinberg operator: the closed-time-path approach, 2019.
- [36] Gerard 't Hooft and M. J. G. Veltman. Scalar One Loop Integrals. *Nucl. Phys. B*, 153:365–401, 1979.

- [37] G. Passarino and M. J. G. Veltman. One Loop Corrections for  $e^+ e^-$  Annihilation Into  $\mu^+ \mu^-$  in the Weinberg Model. *Nucl. Phys. B*, 160:151–207, 1979.
- [38] P.A. Zyla et al. (Particle Data Group). Prog. Theor. Exp. Phys. 2020, 083C01 (2020).
- [39] X. Qian and P. Vogel. Neutrino mass hierarchy. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 83:1–30, Jul 2015.
- [40] P. F. de Salas, S. Gariazzo, O. Mena, C. A. Ternes, and M. Tórtola. Neutrino mass ordering from oscillations and beyond: 2018 status and future prospects. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 5, Oct 2018.
- [41] J. I. Aranda, G. González-Estrada, J. Montaña, F. Ramírez-Zavaleta, and E. S. Tututi. Revisiting the rare  $h \rightarrow q \bar{q} j$  decays in the standard model. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 47(12):125001, Oct 2020.
- [42] P. Langacker. *The Standard Model and Beyond*. CRC Press, 2010.