



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Diagramas de manchas e irradiancias con los polinomios  
ortonormales de Zernike

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA**

por

Ana Elizabeth Espinosa Mómox

Asesorada por

Dr. Alberto Cordero Dávila

Puebla Pue.  
Octubre de 2021





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Diagramas de manchas e irradiancias con los polinomios  
ortonormales de Zernike

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA**

por

Ana Elizabeth Espinosa Mómox

Asesorada por

Dr. Alberto Cordero Dávila

Puebla Pue.  
Octubre de 2021



**Título:** Diagramas de manchas e irradiancias con los polinomios ortonormales de Zernike

**Estudiante:** ANA ELIZABETH ESPINOSA MÓMOX

COMITÉ

---

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez  
Presidente

---

Dr. Cruz Meneses Fabián  
Secretario

---

Dr. Miguel Ángel Olvera Santamaría  
Vocal

---

Dra. Ma. del Rosario Pastrana Sánchez  
Vocal

---

Dr. Alberto Cordero Dávila  
Asesor



# Agradecimientos

A mis padres, por su apoyo incondicional sin el cual no habría podido realizar este trabajo. Gracias por la confianza, su constante ayuda, guianza y sabios consejos.

A mi hermano Javi, por siempre acompañarme a todo lugar y por hacer de la semana algo más agradable y divertido.

Al Dr. Carlos Manuel Ortiz Lima, gran compañero y amigo, quien me ayudó en muchas ocasiones resolviendo mis dudas y enseñándome tantas cosas. Gracias por todas esas charlas en el trabajo.

A la M.I. Mónica Macías Pérez y al M.C. Edgar S. Moyotl Hernández, por su trabajo y ayuda en el desarrollo e incorporación de este trabajo a FOOSS.

Finalmente, y no por menor importancia, a mi asesor el Dr. Alberto Cordero Dávila, por todas sus enseñanzas, apoyo, paciencia y todo el tiempo invertido.



# Índice general

<b>1. Antecedentes</b>	<b>3</b>
1.1. La función de aberración . . . . .	3
1.2. El paso de la Óptica Física a la Óptica Geométrica. . . . .	5
1.3. Relación entre las componentes de la aberración transversal y $W$ . . . . .	5
1.4. Análisis de la función $W$ . . . . .	7
1.4.1. Términos constantes . . . . .	7
1.4.2. Errores de foco . . . . .	7
1.4.3. Aberraciones clásicas de Seidel . . . . .	8
1.5. Conclusiones . . . . .	13
<b>2. Análisis de la función de aberración con los polinomios de Zernike</b>	<b>15</b>
2.1. $W$ en términos de los polinomios de Zernike . . . . .	15
2.2. Análisis de la función $W$ . . . . .	17
2.2.1. Inclinación alrededor de $y$ . . . . .	17
2.2.2. Inclinación alrededor de $x$ . . . . .	18
2.2.3. Defoco . . . . .	19
2.2.4. Astigmatismo primario $45^\circ$ . . . . .	20
2.2.5. Astigmatismo primario $0^\circ$ . . . . .	22
2.2.6. Coma primaria alrededor de $y$ . . . . .	22
2.2.7. Coma primaria alrededor de $x$ . . . . .	25
2.2.8. Aberración 8 . . . . .	26
2.2.9. Aberración 9 . . . . .	28
2.2.10. Esférica primaria . . . . .	29
2.2.11. Astigmatismo secundario $0^\circ$ . . . . .	30
2.2.12. Astigmatismo secundario $45^\circ$ . . . . .	31
2.2.13. Aberración 13 . . . . .	32
2.2.14. Aberración 14 . . . . .	34
2.3. Conclusiones . . . . .	36
<b>3. Diagramas de manchas y patrones de irradiancia</b>	<b>37</b>
3.1. Programa de cómputo . . . . .	37
3.2. Diagramas de Manchas . . . . .	38
3.2.1. Inclinación alrededor de $y$ y $x$ . . . . .	38
3.2.2. Defoco . . . . .	38
3.2.3. Astigmatismo primario $45^\circ$ y $0^\circ$ . . . . .	39
3.2.4. Coma primaria alrededor de $y$ y $x$ . . . . .	40
3.2.5. Aberración 8 y 9 . . . . .	42
3.2.6. Esférica primaria . . . . .	43
3.2.7. Astigmatismo secundario $0^\circ$ y Astigmatismo secundario $45^\circ$ . . . . .	44
3.2.8. Aberración 13 . . . . .	46

3.2.9.	Aberración 14 . . . . .	47
3.3.	Patrones de irradiancia . . . . .	48
3.3.1.	Inclinación alrededor de $y$ y $x$ . . . . .	48
3.3.2.	Defoco . . . . .	48
3.3.3.	Astigmatismo primario $45^\circ$ y $0^\circ$ . . . . .	49
3.3.4.	Coma primaria alrededor de $y$ y de $x$ . . . . .	50
3.3.5.	Aberración 8 y 9 . . . . .	50
3.3.6.	Esférica primaria . . . . .	51
3.3.7.	Astigmatismo secundario $0^\circ$ y $45^\circ$ . . . . .	52
3.3.8.	Aberración 13 y 14 . . . . .	53
3.3.9.	Otros ejemplos con más de 1 aberración . . . . .	53
3.4.	FOOSS . . . . .	55
3.5.	Conclusiones . . . . .	56
<b>4.</b>	<b>Conclusiones Generales</b>	<b>57</b>
<b>A.</b>	<b>Obtención de los puntos que definen una Cardiode</b>	<b>59</b>
<b>B.</b>	<b>Curva obtenida fuera del plano imagen gaussiano (Aberración 8)</b>	<b>63</b>
<b>C.</b>	<b>Curva obtenida fuera del plano imagen gaussiano (Astigmatismo secundario <math>0^\circ</math>)</b>	<b>67</b>
<b>D.</b>	<b>Curva obtenida fuera del plano imagen gaussiano (Aberración 13)</b>	<b>71</b>
<b>E.</b>	<b>Programa de cómputo</b>	<b>75</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>

# Índice de figuras

1.1. Diagrama de un sistema óptico basado en Introduction to Statistical Optics (O'Neill, 1963) . . . . .	4
1.2. Coordenadas en la pupila de salida de un sistema donde $a = 1$ . . . . .	4
1.3. Error de foco longitudinal [basado en Introduction to Statistical Optics (O'Neill, 1963)] . . . . .	8
1.4. Error de foco transversal [basado en Introduction to Statistical Optics (O'Neill, 1963)] . . . . .	8
1.5. Esférica [basado en Introduction to Statistical Optics (O'Neill, 1963)] . . . . .	9
1.6. Astigmatismo [basado en Introduction to Statistical Optics (O'Neill, 1963)] (a) Plano tangencial, (b) Círculo de mínima confusión, (c) Plano sagital . . . . .	10
1.7. Curvatura de campo . . . . .	11
1.8. Distorsión (a) tipo barril, (b) tipo cojín . . . . .	11
1.9. Contribución de todos los anillos en la coma [basado en Introduction to Statistical Optics (O'Neill, 1963)] . . . . .	12
1.10. Envoltente de la coma . . . . .	12
2.1. Gráfica de la diferencia de caminos ópticos, $W$ , producido por la inclinación alrededor de $y$ . . . . .	17
2.2. Desplazamiento sobre el eje $\tau_x$ . . . . .	18
2.3. Gráfica de la diferencia de caminos ópticos, $W$ , producido por la inclinación alrededor de $x$ . . . . .	18
2.4. Desplazamiento sobre el eje $\tau_y$ . . . . .	19
2.5. Gráfica de la diferencia de caminos ópticos, $W$ , producido por el defoco . . . . .	19
2.6. Defoco . . . . .	20
2.7. Gráfica de la diferencia de caminos ópticos, $W$ , producido por el astigmatismo $45^\circ$ . . . . .	20
2.8. Imágenes con astigmatismo $45^\circ$ en diferentes planos de observación . . . . .	22
2.9. Gráfica de la diferencia de caminos ópticos, $W$ , producido por el astigmatismo $0^\circ$ . . . . .	22
2.10. Imágenes con astigmatismo $0^\circ$ en diferentes planos de observación . . . . .	22
2.11. Gráfica de la diferencia de caminos ópticos, $W$ , producido por la coma primaria alrededor de $y$ . . . . .	23
2.12. Coma primaria alrededor de $y$ en el plano gaussiano . . . . .	24
2.13. Cardiode obtenida con coma $\alpha_6 = 0.5$ para $\rho = 0.7$ cuando $t_z \neq 0$ con los puntos que definen la curva . . . . .	25
2.14. Gráfica de la diferencia de caminos ópticos, $W$ , producido por la coma primaria alrededor de $x$ . . . . .	25
2.15. Coma primaria alrededor de $x$ en el plano gaussiano . . . . .	26
2.16. Cardiode obtenida con coma $\alpha_7 = 0.5$ para $\rho = 0.7$ cuando $t_z \neq 0$ con los puntos que definen la curva . . . . .	26
2.17. Gráfica de la diferencia de caminos ópticos, $W$ , producido por la aberración 8 . . . . .	27
2.18. Imágenes en el plano gaussiano producidas por la aberración 8 para $\rho$ arbitrario . . . . .	27

2.19. Imagen con aberración 8 $\alpha_8 = 0.5$ para $\rho = 0.7$ , fuera del plano gaussiano, con los puntos que definen la curva . . . . .	28
2.20. Gráfica de la diferencia de caminos ópticos, $W$ , producido por la aberración 9 . . . . .	28
2.21. Imágenes en el plano gaussiano producidas por la aberración 9 para $\rho$ arbitrario . . . . .	29
2.22. Imagen con aberración 9 $\alpha_9 = 0.5$ para $\rho = 0.7$ , fuera del plano gaussiano, con los puntos que definen la curva . . . . .	29
2.23. Gráfica de la diferencia de caminos ópticos, $W$ , producido por la esférica primaria . . . . .	30
2.24. Esférica para (a) cualquier plano $t_z$ y (b) distintos planos $t_z$ . . . . .	30
2.25. Gráfica de la diferencia de caminos ópticos, $W$ , producido por el astigmatismo secundario $0^\circ$ . . . . .	31
2.26. Imagen con astigmatismo secundario $0^\circ$ $\alpha_{11} = 0.3$ para $\rho = 0.9$ , fuera del plano gaussiano, con los puntos que definen la curva . . . . .	31
2.27. Gráfica de la diferencia de caminos ópticos, $W$ , producido por el astigmatismo secundario $45^\circ$ . . . . .	32
2.28. Imagen con astigmatismo secundario $45^\circ$ $\alpha_{12} = 0.3$ para $\rho = 0.9$ , fuera del plano gaussiano . . . . .	32
2.29. Gráfica de la diferencia de caminos ópticos, $W$ , producido por la aberración 13 . . . . .	33
2.30. Imagen con aberración 13 $\alpha_{13} = 0.5$ para $\rho = 0.8$ , fuera del plano gaussiano, con los puntos que definen la curva . . . . .	34
2.31. Gráfica de la diferencia de caminos ópticos, $W$ , producido por la aberración 14 . . . . .	34
2.32. Imagen con aberración 14 $\alpha_{14} = 0.5$ para $\rho = 0.8$ , fuera del plano gaussiano . . . . .	36
3.1. Imágenes con (a) $\alpha_1 = 0.5$ y (b) $\alpha_2 = 0.5$ para $\rho = 0.5$ sobre el plano gaussiano . . . . .	38
3.2. Diagrama de manchas con defoco $\alpha_3 = 0.5$ sobre el plano imagen gaussiano considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida . . . . .	38
3.3. Diagrama de manchas con defoco $\alpha_3 = 0.5$ sobre el plano imagen gaussiano considerando anillos que emergen de la pupila de salida con radio $\rho \leq 1$ . . . . .	39
3.4. Diagrama de manchas con astigmatismo primario $45^\circ$ $\alpha_4 = 0.5$ sobre (a) plano tangencial $\alpha_3 = -0.35$ , (b) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (c) plano imagen gaussiano, (d) plano $\alpha_3 = 0.2$ , (e) plano sagital $\alpha_3 = 0.35$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos . . . . .	39
3.5. Diagrama de manchas con astigmatismo primario $45^\circ$ $\alpha_4 = 0.5$ sobre (a) plano tangencial $\alpha_3 = -0.35$ , (b) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (c) plano imagen gaussiano, (d) plano $\alpha_3 = 0.2$ , (e) plano sagital $\alpha_3 = 0.35$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio $\rho \leq 1$ para todos los casos . . . . .	39
3.6. Diagrama de manchas con astigmatismo primario $0^\circ$ $\alpha_5 = 0.5$ sobre (a) plano tangencial $\alpha_3 = -0.35$ , (b) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (c) plano imagen gaussiano, (d) plano $\alpha_3 = 0.2$ , (e) plano sagital $\alpha_3 = 0.35$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos . . . . .	40
3.7. Diagrama de manchas con astigmatismo primario $0^\circ$ $\alpha_5 = 0.5$ sobre (a) plano tangencial $\alpha_3 = -0.35$ , (b) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (c) plano imagen gaussiano, (d) plano $\alpha_3 = 0.2$ , (e) plano sagital $\alpha_3 = 0.35$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio $\rho \leq 1$ para todos los casos . . . . .	40
3.8. Diagrama de manchas con coma primaria alrededor $y$ $\alpha_6 = 0.3$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos . . . . .	40
3.9. Diagrama de manchas con coma primaria alrededor de $y$ $\alpha_6 = 0.3$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio $\rho \leq 1$ para todos los casos . . . . .	41
3.10. Diagrama de manchas con coma primaria alrededor $x$ $\alpha_7 = 0.3$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos . . . . .	41

3.11. Diagrama de manchas con coma primaria alrededor de $x$ $\alpha_7 = 0.3$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio $\rho \leq 1$ para todos los casos . . . . .	41
3.12. Diagrama de manchas con aberración 8 $\alpha_8 = 0.5$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos . . . . .	42
3.13. Diagrama de manchas con aberración 8 $\alpha_8 = 0.5$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio $\rho \leq 1$ para todos los casos . . . . .	42
3.14. Diagrama de manchas con aberración 9 $\alpha_9 = 0.5$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos . . . . .	43
3.15. Diagrama de manchas con aberración 9 $\alpha_9 = 0.5$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio $\rho \leq 1$ para todos los casos . . . . .	43
3.16. Diagrama de manchas con esférica primaria $\alpha_{10} = 0.3$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos . . . . .	43
3.17. Diagrama de manchas con esférica primaria $\alpha_{10} = 0.3$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio $\rho \leq 1$ para todos los casos . . . . .	44
3.18. Diagrama de manchas con astigmatismo secundario $0^\circ$ $\alpha_{11} = 0.3$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano, (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos . . . . .	44
3.19. Diagrama de manchas con astigmatismo secundario $0^\circ$ $\alpha_{11} = 0.3$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano, (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio $\rho \leq 1$ para todos los casos . . . . .	44
3.20. Diagrama de manchas con astigmatismo secundario $45^\circ$ $\alpha_{12} = 0.3$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano, (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos . . . . .	45
3.21. Diagrama de manchas con astigmatismo secundario $45^\circ$ $\alpha_{12} = 0.3$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano, (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio $\rho \leq 1$ para todos los casos . . . . .	45
3.22. Diagrama de manchas con aberración 13 $\alpha_{13} = 0.5$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos . . . . .	46
3.23. Diagrama de manchas con aberración 13 $\alpha_{13} = 0.5$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio $\rho \leq 1$ para todos los casos . . . . .	46
3.24. Diagrama de manchas con aberración 14 $\alpha_{14} = 0.5$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos . . . . .	47
3.25. Diagrama de manchas con aberración 14 $\alpha_{14} = 0.5$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio $\rho \leq 1$ para todos los casos . . . . .	47
3.26. Patrón de irradiancia con (a) $\alpha_1 = 0.5$ y (b) $\alpha_2 = 0.5$ sobre el plano imagen gaussiano	48
3.27. Patrón de irradiancia con defoco $\alpha_3 = 0.5$ sobre el plano imagen gaussiano . . . .	48
3.28. Patrones de irradiancia producidos por astigmatismo primario $45^\circ$ $\alpha_4 = 0.5$ sobre (a) plano tangencial $\alpha_3 = -0.35$ , (b) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (c) plano imagen gaussiano, (d) plano $\alpha_3 = 0.2$ y (e) plano sagital $\alpha_3 = 0.35$ . . . . .	49

3.29. Patrones de irradiancia producidos por astigmatismo primario $0^\circ$ $\alpha_5 = 0.5$ sobre (a) plano tangencial $\alpha_3 = -0.35$ , (b) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (c) plano imagen gaussiano, (d) plano $\alpha_3 = 0.2$ y (e) plano sagital $\alpha_3 = 0.35$ . . . . .	49
3.30. Patrones de irradiancia producidos por coma primaria alrededor de $y$ $\alpha_6 = 0.3$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ . . . . .	50
3.31. Patrones de irradiancia producidos por coma primaria alrededor de $x$ $\alpha_7 = 0.3$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ . . . . .	50
3.32. Patrones de irradiancia producidos por aberración 8 $\alpha_8 = 0.5$ sobre (a) plano $\alpha_3 =$ $-0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ . . . . .	50
3.33. Patrones de irradiancia producidos por aberración 9 $\alpha_9 = 0.5$ sobre (a) plano $\alpha_3 =$ $-0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ . . . . .	51
3.34. Patrones de irradiancia producidos por esférica primaria $\alpha_{10} = 0.3$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ . . . . .	51
3.35. Patrones de irradiancia producidos por astigmatismo secundario $0^\circ$ $\alpha_{11} = 0.3$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ . . . . .	52
3.36. Patrones de irradiancia producidos por astigmatismo secundario $45^\circ$ $\alpha_{12} = 0.3$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ . . . . .	52
3.37. Patrones de irradiancia producidos por aberración 13 $\alpha_{13} = 0.5$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ . . . . .	53
3.38. Patrones de irradiancia producidos por aberración 14 $\alpha_{14} = 0.5$ sobre (a) plano $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano $\alpha_3 = 0.2$ . . . . .	53
3.39. Diagrama de manchas producido por un frente de onda con coma primaria $y$ $\alpha_6 =$ $-0.2$ , esférica $\alpha_{10} = 0.4$ y astigmatismo secundario $45^\circ$ $\alpha_{12} = 0.3$ . . . . .	53
3.40. Patrón de irradiancia producido por un frente de onda con coma primaria $y$ $\alpha_6 =$ $-0.2$ , esférica $\alpha_{10} = 0.4$ y astigmatismo secundario $45^\circ$ $\alpha_{12} = 0.3$ . . . . .	54
3.41. Diagrama de manchas producido por un frente de onda con defoco $\alpha_3 = 0.2$ , astig- matismo primario $45^\circ$ $\alpha_4 = 0.2$ , aberración 8 $\alpha_8 = 0.3$ y aberración 13 $\alpha_{13} = 0.25$ . . . . .	54
3.42. Patrón de irradiancia producido por un frente de onda con defoco $\alpha_3 = 0.2$ , astig- matismo primario $45^\circ$ $\alpha_4 = 0.2$ , aberración 8 $\alpha_8 = 0.3$ y aberración 13 $\alpha_{13} = 0.25$ . . . . .	54
3.43. Optical Tools, FOOSS . . . . .	55
3.44. Resultados disponibles para descarga . . . . .	55
A.1. Cardiode obtenida con coma $\alpha_6 = 0.5$ para $\rho = 0.7$ cuando $t_z \neq 0$ con los puntos que definen la curva . . . . .	62
B.1. Imagen con aberración 8 $\alpha_8 = 0.5$ para $\rho = 0.7$ , fuera del plano gaussiano, con los puntos que definen la curva . . . . .	66
C.1. Imagen con astigmatismo secundario $0^\circ$ $\alpha_{11} = 0.3$ para $\rho = 0.9$ , fuera del plano gaussiano, con los puntos que definen la curva . . . . .	70
D.1. Imagen con aberración 13 $\alpha_{13} = 0.5$ para $\rho = 0.8$ , fuera del plano gaussiano, con los puntos que definen la curva . . . . .	74

# Índice de tablas

2.1. Polinomios de Zernike y primeras derivadas parciales . . . . .	17
---	----



# Resumen

Si un sistema óptico es iluminado por una fuente puntual este genera, desde el punto de vista de la óptica geométrica, en la pupila de salida, un frente de onda idealmente esférico. Como todos los rayos que salen del frente de onda son perpendiculares al mismo, estos convergen en un punto conocido como punto imagen gaussiano. Sin embargo, el frente de onda que emerge de la pupila de salida, en general, no es esférico, difiere del frente de onda ideal en una cantidad llamada función de aberración  $W$  (ver figura 1.1). Como resultado de lo anterior, los rayos se desvían del punto imagen gaussiano en una cantidad llamada aberración transversal  $T$ . Existe una relación exacta entre el gradiente de  $W$  y  $T$ . H. H. Hopkins (1964) (citado por O'Neill, 1991) expresa la función de aberración  $W$  como una expansión en serie de potencias de variables invariantes rotacionales de un sistema óptico axialmente simétrico. En el capítulo 1, se reproduce este análisis, deduciendo las ecuaciones para la aberración transversal y, estudiando cada término de la expansión, se calcula  $T$  y se llega a las aberraciones de Seidel, usando un enfoque analítico.

Cuando el sistema que se estudia no es axialmente simétrico, pero se considera una pupila de salida circular entonces el dominio de  $W$  es un círculo. Zernike construyó un conjunto ortonormal y completo de funciones, sobre un círculo unitario, conocidos como los polinomios ortonormales de Zernike.  $W$  se expresa como una combinación lineal de estos polinomios ortonormales circulares y, dado que se trata de un conjunto ortonormal completo, cualquier frente de onda que emerge de la pupila de salida puede ser descrito como una combinación lineal de estos polinomios. Sin embargo, hasta donde se sabe, no hay un estudio equivalente al hecho por H. H. Hopkins con este enfoque. Por eso, en el capítulo 2, partiendo de la función de aberración descrita con los polinomios de Zernike se obtienen las primeras derivadas parciales de cada polinomio con el fin de obtener la aberración transversal y se estudia la forma de la imagen en el plano de observación. Aquí se sigue una combinación de enfoques analítico y numérico.

Posteriormente, siguiendo el enfoque numérico del capítulo 2, se desarrolló un programa de cómputo para el cálculo de diagramas de manchas y patrones de irradiancia para cualquier aberración y/o combinación lineal de estas. Para hacer lo anterior, se parte de las ecuaciones de aberración transversal, el programa prevé que en el plano de observación se coloque un detector (CCD o CMOS) y calcula a qué píxel del detector llega cada rayo que sale de la pupila de salida. En el capítulo 3 se hace una descripción del programa de cómputo y se presentan los diagramas de manchas calculados y obtenidos para ciertos valores de los coeficientes de Zernike. Además, estos cálculos se repitieron para una gran cantidad de rayos, contabilizando el número de rayos que llega a cada píxel del detector y se calcula la irradiancia que es graficada.



# Capítulo 1

## Antecedentes

Anteriormente los diseñadores ópticos hacían los cálculos manuales de las aberraciones que producían los sistemas para optimizar la calidad de la imagen. Sin embargo, cuando se trata de la teoría de aberración de quinto y órdenes más altos, estos cálculos se vuelven tediosos y tardados. Por eso ahora, gracias al desarrollo de máquinas computacionales, es posible para los diseñadores intentar diseños más complejos y sofisticados, de los cuales dependerá el diseñador para lograr el grado de precisión deseable.

Para el diseño de un sistema óptico, es importante estudiar la teoría geométrica de aberraciones adoptando un enfoque fenomenológico. De un sistema óptico emerge un frente de onda de la pupila de salida que difiere del frente de onda esférico ideal. La diferencia entre estos frentes de onda se representa por la función de aberración  $W$ ; esta puede ser descrita de distintas maneras, una de ellas es la descripción hecha por H. H. Hopkins (1953) que se encuentra descrita y citada por O'Neill (1991), la cual sirve como antecedente de este trabajo que a continuación se presenta.

### 1.1. La función de aberración

En la figura 1.1 se muestra un sistema en el que se identifican 4 planos importantes:

- a. Plano del objeto, donde se tiene una fuente puntual,  $A$ , la cual generará un frente de onda esférico.
- b. Plano de la pupila de entrada, donde se delimita la parte del frente de onda que entra al sistema óptico.
- c. Plano de la pupila de salida, de donde emerge un frente de onda cuya forma dependerá del sistema óptico por el que haya pasado.
- d. Plano de la imagen, donde convergen los rayos que salen de la pupila de salida cuyo origen está en el punto imagen Gaussiano,  $G$ .

Como puede observarse, el punto  $G$  es el punto imagen gaussiano del punto  $A$ , por lo tanto  $G$  es el centro del frente de onda esférico ideal; el rayo principal es el que va del centro de la pupila de salida al punto imagen gaussiano. Si cada rayo que parte del punto  $A$  y sale de la pupila de salida tuviera el mismo camino óptico, entonces esta esfera representaría una superficie de camino óptico constante y todos los rayos convergerían en el punto  $G$ .

**CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES**  
**1.1. LA FUNCIÓN DE ABERRACIÓN**

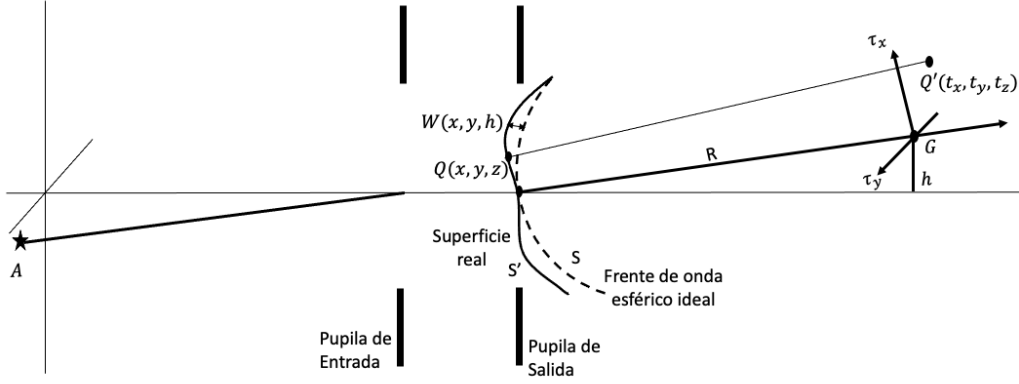


Figura 1.1: Diagrama de un sistema óptico basado en Introduction to Statistical Optics (O'Neill, 1963)

Sin embargo, en la práctica, la superficie de camino constante no es una esfera y la cantidad en la que se desvía de la esfera ideal es  $W$ , que es la distancia entre el frente de onda ideal y el frente de onda real. Como pudiera suponerse,  $W$  depende del punto con coordenadas  $(x, y)$  en la pupila de salida y de las coordenadas  $(h_x, h_y)$  del punto imagen gaussiano. Por eso, en general  $W = W(x, y, h_x, h_y)$ .

La forma en que se describirá la función de aberración será por una expansión en serie de potencias. Además, por la simetría de un sistema óptico axialmente simétrico,  $W$  podrá depender únicamente de las invariantes rotacionales  $h^2, \rho^2, h\rho \cos \phi$ , esto es  $W(h^2, \rho^2, h\rho \cos \phi)$ , en términos de coordenadas  $\rho$  y  $\phi$  en la pupila de salida.

Haciendo una expansión de  $W$  en función de  $h^2, \rho^2, h\rho \cos \phi$ , se tendrá:

$$W(h^2, \rho^2, h\rho \cos \phi) = a_0 + b_0 h^2 + b_1 \rho^2 + b_2 h\rho \cos \phi + c_0 h^4 + c_1 \rho^4 + c_2 h^2 \rho^2 \cos^2 \phi + c_3 h^2 \rho^2 + c_4 h^3 \rho \cos \phi + c_5 h^3 \rho \cos \phi + c_5 h \rho^3 \cos \phi + d_0 h^6 + d_1 \rho^6 + \dots \quad (1.1)$$

donde:

$\rho$  son las coordenadas en la pupila de salida (ver Figura 1.2), y

$$\begin{aligned} x &= a\rho \cos \phi & y &= a\rho \sin \phi \\ \rho &= \sqrt{(x^2 + y^2)}/a^2 & \text{tal que } 0 \leq \rho \leq 1 \\ \phi &= \tan^{-1}(y/x) & a &= \text{radio de la pupila} \end{aligned}$$

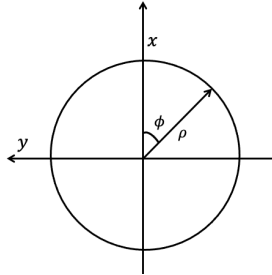


Figura 1.2: Coordenadas en la pupila de salida de un sistema donde  $a = 1$

## 1.2. El paso de la Óptica Física a la Óptica Geométrica.

Para saber cómo es que el perfil de la superficie deformada hace que los rayos se desvíen de la imagen Gaussiana  $G$ , es necesario estudiar el paso de la óptica física a la óptica geométrica. Iniciamos con la ecuación de onda

$$\nabla^2 \phi(x, y, z, t) = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

donde  $n$  es el índice de refracción del medio y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío Usando el método de separación de variables, la solución puede expresarse como:

$$\phi(r, t) = A(r) \exp\{ik[L(r) - ct]\} \quad (1.3)$$

$A(r)$  y  $L(r)$  son reales.

Por conveniencia se reemplaza  $A(r)$  por  $\exp(a(r))$  y se sustituyen en la ecuación de onda las siguientes expresiones

$$\nabla^2 \phi = \text{div grad } \phi = [\nabla^2(a + ikL) + \{\text{grad}(a + ikL)\}^2] \phi \quad (1.4)$$

$$-\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = n^2 k^2 \phi \quad (1.5)$$

Se tiene que

$$\{\nabla^2 a + (\text{grad } a)^2 - k^2 [(\text{grad } L)^2 - \mu^2]\} + ik \{2(\text{grad } a)(\text{grad } L) + \nabla^2 L\} = 0 \quad (1.6)$$

Igualando partes real e imaginaria en ambos lados de la ecuación, se obtiene

$$(\text{grad } L)^2 - n^2 = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} [\nabla^2 a + (\text{grad } a)^2] \quad (1.7)$$

de la parte real. En el límite cuando  $\lambda \rightarrow 0$  se tiene como resultado la ecuación eikonal de la óptica geométrica:

$$(\text{grad } L)^2 = n^2 \quad (1.8)$$

Por lo tanto, las superficies de  $L$  constante son superficies de fase óptica constante y, en consecuencia, definen un frente de onda. Además, las trayectorias de los rayos son normales a la superficie de la onda.

Sin embargo, no hay que olvidar que la ecuación anterior es el resultado de una aproximación. Por lo tanto, cerca de un foco bien definido, donde existe una alta concentración de intensidad de luz, se debe aceptar con serias reservas la predicción de la óptica geométrica.

## 1.3. Relación entre las componentes de la aberración transversal y $W$

Teniendo en cuenta la suposición básica de la óptica geométrica ( $\lambda = 0$ ), podremos determinar la ecuación de una línea recta que pase entre  $Q(x, y, z)$  y  $Q'(t_x, t_y, t_z)$  (ver figura 1.1), con la constricción adicional de que el rayo sea normal a  $W(x, y, h)$  en  $Q$ . La ecuación de la superficie de la onda es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (R + W)^2 \quad (1.9)$$

Que puede reducirse a la ecuación de la esfera ideal cuando  $W = 0$ . Ya que nuestro interés, son las deformaciones de la onda expresados en unidad de longitudes de onda de la luz,  $W^2$  se considera un término despreciable con respecto a  $\lambda$ , teniendo como resultado:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2RW - R^2 = 0 \quad (1.10)$$

Ahora, los cosenos directores del vector unitario

$$\hat{n} = \hat{i} \cos \alpha + \hat{j} \cos \beta + \hat{k} \cos \gamma \quad (1.11)$$

normal a la superficie  $S'$  y el vector unitario común de la línea pasando entre  $Q$  y  $Q'$  están dados por

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x - R(\partial W/\partial x)}{1/2 |\text{grad } S'|} = \frac{t_x - x}{\overline{QQ'}} \\ \cos \beta &= \frac{y - R(\partial W/\partial y)}{1/2 |\text{grad } S'|} = \frac{t_y - y}{\overline{QQ'}} \\ \cos \gamma &= \frac{z}{1/2 |\text{grad } S'|} = \frac{t_z - z}{\overline{QQ'}} \end{aligned} \quad (1.12)$$

La ecuación de un rayo que sale de la pupila de salida en  $Q$ , normal al frente de onda e interseca el plano imagen en  $Q'$ , está dado por:

$$\frac{t_x - x}{x - R(\partial W/\partial x)} = \frac{t_y - y}{y - R(\partial W/\partial y)} = \frac{t_z - z}{z} \quad (1.13)$$

Esta ecuación se obtiene despejando  $\overline{QQ'}$  de cada una de las ecuaciones 1.12 e igualando. O, ya que en la mayor parte de las aplicaciones

$$z \cong -R \quad \text{y} \quad \frac{t_z}{|z|} \cong \frac{t_z}{R} \ll 1$$

podemos reducir a

$$\begin{aligned} t_x &\cong -\frac{xt_z}{R} + R \frac{\partial W}{\partial x} \\ t_y &\cong -\frac{yt_z}{R} + R \frac{\partial W}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.14)$$

En el plano imagen Gaussiano ( $t_z = 0$ ), las ecuaciones 1.14 se reducen a

$$t_{x_0} \cong R \frac{\partial W}{\partial x}, \quad t_{y_0} \cong R \frac{\partial W}{\partial y} \quad (1.15)$$

Finalmente, ya que  $x = a\rho \cos \phi$  y  $y = a\rho \sin \phi$ , las ecuaciones 1.15 pasan a ser

$$\begin{aligned} t_{x_0} &\cong \frac{R}{a} \left( \cos \phi \frac{\partial W}{\partial \rho} - \frac{\sin \phi}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \phi} \right) \\ t_{y_0} &\cong \frac{R}{a} \left( \sin \phi \frac{\partial W}{\partial \rho} - \frac{\cos \phi}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (1.16)$$

que, si en ciertos casos  $W$  no depende de  $\phi$ , un anillo de rayos  $\rho = \text{cte} = \rho_1$ , va a intersecar el plano imagen Gaussiano en un anillo  $r_0$  dado por

$$r_0 = \sqrt{t_{x_0}^2 + t_{y_0}^2} = \left. \frac{R}{a} \frac{\partial W}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_1} \quad (1.17)$$

Que es llamada la aberración transversal. El esparcimiento longitudinal sobre el eje, para este caso especial puede ser determinado en coordenadas polares de las ecuaciones 1.14 fijando  $x = y = 0$ . Para un anillo dado en la pupila de salida  $\rho = \rho_1$ , el esparcimiento longitudinal se convierte

$$t_z = \left. \frac{R^2}{a^2 \rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_1} \quad (1.18)$$

Y el efecto total puede ser determinado sumando las contribuciones de cada anillo  $0 \leq \rho_1 \leq 1$ .

Vale la pena recalcar que Rayces dedujo una expresión exacta para la relación entre  $(t_x, t_y, t_z)$  y  $W(x, y, h)$  (Rayces, 1964), las cuales están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{t_x}{R - W} \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{t_y}{R - W} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Si en la ecuación de Rayces se introduce la aproximación  $|W| \ll |R|$ , se llega a las ecuaciones 1.14 en el plano gaussiano ( $t_z = 0$ .)

## 1.4. Análisis de la función $W$

### 1.4.1. Términos constantes

$$W = a_0 + b_0 h^2 \quad (1.20)$$

Estos términos pueden ser parte de la expansión en función de  $h^2, \rho^2, h\rho \cos \phi$  de  $W$ . Sin embargo, por la forma de las ecuaciones 1.14 no son considerados aberraciones, pues no contienen  $x$  o  $y$  (y por ende,  $\rho$  y  $\phi$ ). Así que los rayos convergerían en  $G(t_x = t_y = t_z = 0)$ . Por lo tanto, la suma de una constante simplemente indica que se escogió una esfera ideal con diferente radio, pero con el mismo centro.

### 1.4.2. Errores de foco

#### Longitudinal

$$W = b_1 \rho^2 \quad (1.21)$$

Usando las ecuaciones 1.17 y 1.18, vemos que:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{2b_1 R}{a} \rho_1, \quad 0 \leq \rho_1 \leq 1 \\ t_z &= \frac{2b_1 R^2}{a^2} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Así que cada anillo  $\rho_1$  en la pupila de salida, forma un anillo en el plano imagen gaussiano de radio  $r_0 = \frac{2b_1 R}{a} \rho_1$ . Sin embargo, todos los rayos siguen convergiendo a un punto  $(0, 0, \frac{2b_1 R^2}{a})$ , por lo que no se trata de una aberración.

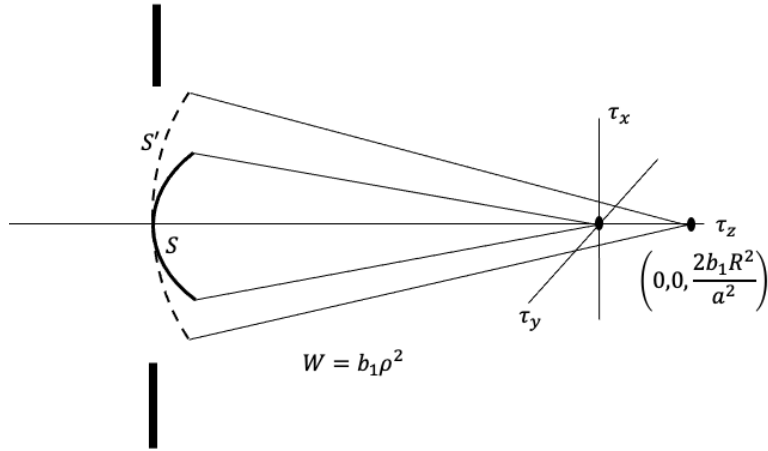


Figura 1.3: Error de foco longitudinal [basado en Introduction to Statistical Optics (O'Neill, 1963)]

### Transversal

$$W = b_2 h \rho \cos \phi \tag{1.23}$$

A partir de las ecuaciones 1.14 se observa que, de la misma forma que en el caso anterior, todos los rayos convergen a un punto  $(\frac{b_2 h R}{a}, 0, 0)$ . Por lo que tampoco se trata de una aberración, únicamente la imagen gaussiana se encuentra desplazada por una cantidad  $\frac{b_2 h R}{a}$  sobre el eje  $t_x$ .

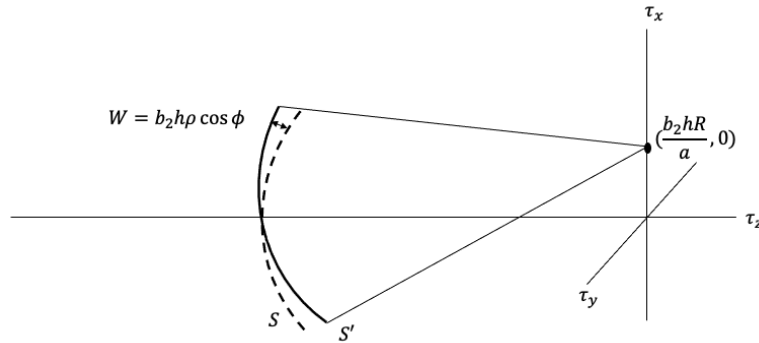


Figura 1.4: Error de foco transversal [basado en Introduction to Statistical Optics (O'Neill, 1963)]

### 1.4.3. Aberraciones clásicas de Seidel

#### Esférica

$$W = c_1 \rho^4 \tag{1.24}$$

Haciendo uso de las ecuaciones 1.17 y 1.18, vemos que un anillo de radio  $\rho_1$  producirá un anillo en el plano imagen Gaussiano que cruza el eje en un punto  $t_z = \frac{4R^2 \rho^2 c_1}{a^2}$ , que será diferente por zonas. Para el anillo máximo ( $\rho = 1$ ):

$$r_0 = \frac{4c_1 R}{a}, \quad t_z = \frac{4R^2 c_1}{a^2} \quad (1.25)$$

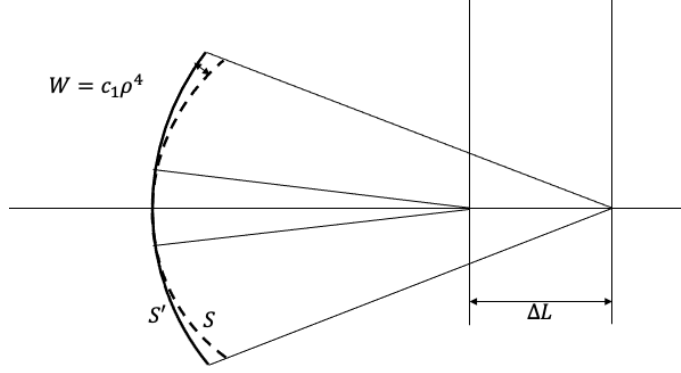


Figura 1.5: Esférica [basado en Introduction to Statistical Optics (O'Neill, 1963)]

A diferencia del defoco, en el caso de un frente de onda afectado por esférica, nunca se podrá encontrar un plano en el que todos los rayos se concentren en un único punto.

### Astigmatismo

$$W = c_2 h^2 \rho^2 \cos^2 \phi + c_3 h^2 \rho^2 \quad (1.26)$$

En término de coordenadas cartesianas:

$$W = \frac{h^2}{a^2} [(c_2 + c_3) x^2 + c_3 y^2] \quad (1.27)$$

A partir de las ecuaciones 1.14, se observa que

$$t_x = \left[ -\frac{t_z}{R} + \frac{2Rh^2}{a^2} (c_2 + c_3) \right] x \quad (1.28)$$

$$t_y = \left[ -\frac{t_z}{R} + \frac{2Rh^2}{a^2} c_3 \right] y$$

elevando al cuadrado y sumando, se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2 \rho^2 [(t_z/R) - (2Rh^2/a^2) (c_2 + c_3)]^2} + \frac{y^2}{a^2 \rho^2 [(t_z/R) - (2Rh^2/a^2) c_3]^2} = 1 \quad (1.29)$$

Así que cada anillo en la pupila de salida produce una elipse en el plano imagen Gaussiano.

El patrón se reduce a una línea ( $A = 0$ ) donde los rayos en el plano tangencial ( $y = 0$ ) se enfocan. Esto ocurre cuando

$$t_{z1} = \frac{2R^2 h^2}{a^2} (c_2 + c_3) \quad (1.30)$$

De la misma forma, los rayos del plano sagital ( $x = 0$ ) se enfocan en una línea sobre una superficie descrita por

$$t_{z2} = \frac{2R^2h^2}{a^2}c_3 \quad (1.31)$$

la distancia entre estas líneas focales es la siguiente:

$$t_{z1} - t_{z2} = \frac{2R^2h^2}{a^2}c_2 \quad (1.32)$$

Por ello,  $c_2$  se conoce como coeficiente de astigmatismo.

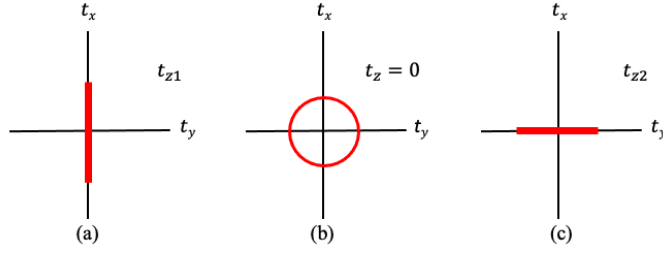


Figura 1.6: Astigmatismo [basado en Introduction to Statistical Optics (O'Neill, 1963)] (a) Plano tangencial, (b) Círculo de mínima confusión, (c) Plano sagital

En general, cuando  $c_2$  y  $c_3$  sean diferentes de cero, habrá una superficie sobre la cual la elipse se convierta en un círculo (llamado círculo de mínima confusión). Para determinar esta superficie, igualamos los denominadores de los términos de la ecuación 1.29, obteniendo que

$$t_z = \frac{t_{z1} + t_{z2}}{2} \quad (1.33)$$

### Curvatura de campo

Cuando  $c_2 = 0$ , entonces

$$W = c_3h^2\rho^2 \quad (1.34)$$

Sacando las componentes de la aberración transversal:

$$t_x = -\frac{xt_z}{R} + 2c_3h^2Rx \quad (1.35)$$

$$t_y = -\frac{yt_z}{R} + 2c_3h^2Ry$$

Si hacemos que  $t_x$  y  $t_y$  sean igual a cero para que todos los rayos converjan en un punto, entonces de las ecuaciones 1.35:

$$t_z = 2c_3R^2h^2 \quad (1.36)$$

Esto quiere decir que, si los rayos convergen a un punto, este se desviará más y más de la imagen gaussiana sobre una parábola conforme uno se desplace incrementando  $h$ . De ahí el término *curvatura de campo*.

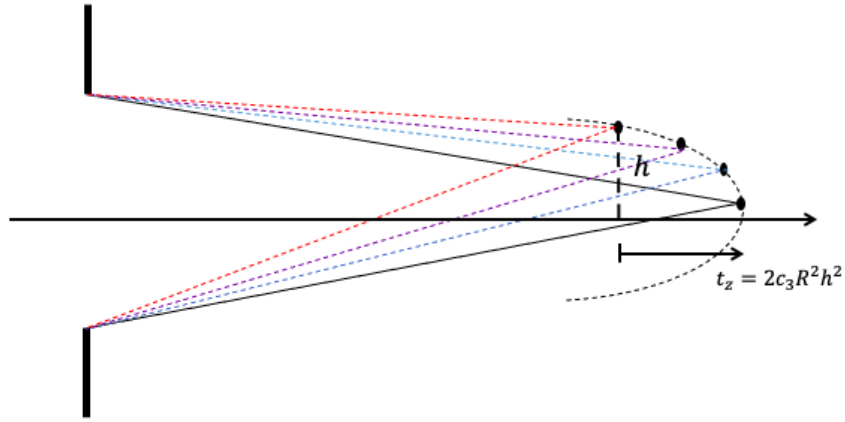


Figura 1.7: Curvatura de campo

### Distorsión

$$W = c_4 h^3 \rho \cos \phi \quad (1.37)$$

Para una  $h$  dada, todos los rayos que se enfocarán en el punto  $[(R/a)c_4 h^3, 0, 0]$ . Este desplazamiento varía según el cubo del ángulo de campo a través de  $h^3$ . Dependiendo del signo de  $c_4$  se tendrá una distorsión en forma de «barril» o de «cojín».

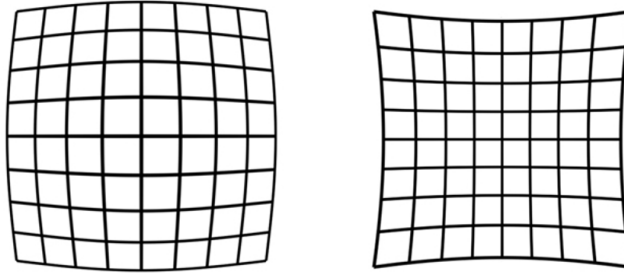


Figura 1.8: Distorsión (a) tipo barril, (b) tipo cojín

### Coma

$$W = c_5 h \rho^3 \cos \phi \quad (1.38)$$

sustituyendo  $W$  en las ecuaciones 1.16, se obtiene

$$t_{x0} = \frac{Rhc_5}{a} \rho^2 (3 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \frac{Rhc_5}{a} \rho^2 (2 + \cos 2\phi) \quad (1.39)$$

$$t_{y0} = \frac{Rhc_5}{a} \rho^2 (3 \cos \phi \sin \phi - \cos \phi \sin \phi) = \frac{Rhc_5}{a} \rho^2 \sin 2\phi$$

Estas ecuaciones pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\left(t_{x0} - 2\frac{Rhc_5}{a}\rho^2\right) = \frac{Rhc_5}{a}\rho^2 \cos 2\phi \tag{1.40}$$

$$t_{y0} = \frac{Rhc_5}{a}\rho^2 \sin 2\phi$$

elevando al cuadrado y sumando, se obtiene:

$$\left(t_{x0} - 2\frac{Rhc_5}{a}\rho^2\right)^2 + t_{y0}^2 = \left(\frac{Rhc_5}{a}\right)^2 \rho^4 \tag{1.41}$$

Esto quiere decir que cada anillo en la pupila de salida producirá un círculo en el plano imagen Gaussiano, cuyo centro se encontrará a lo largo del eje  $t_x$  y su radio irá en aumento al incrementar  $\rho$  y  $h$ .

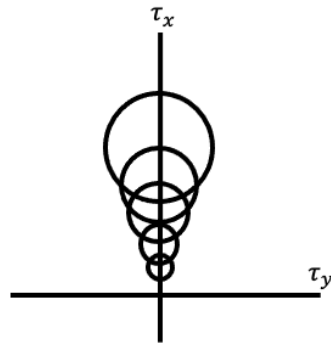


Figura 1.9: Contribución de todos los anillos en la coma [basado en Introduction to Statistical Optics (O'Neill, 1963)]

La envolvente (curva tangente) de esta familia de círculos se muestra en la figura siguiente:

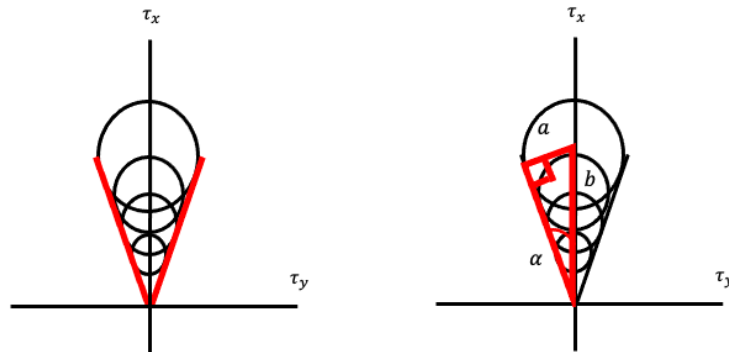


Figura 1.10: Envolvente de la coma

donde  $a$  es el radio del círculo producido por el anillo de radio  $\rho$ ,  $a = \frac{Rhc_5}{a}\rho^2$ ;  $b$  se obtiene de la ecuación 1.41,  $b = 2\frac{Rhc_5}{a}\rho^2$ .

Por lo anterior:

$$\sin \alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \tag{1.42}$$

Así,  $\alpha = 30^\circ$  y la envolvente define un ángulo de  $60^\circ$ .

## 1.5. Conclusiones

En este capítulo se han dado las ecuaciones de las componentes de la aberración transversal, las cuales servirán para hacer el análisis de aberraciones del siguiente capítulo. Además, se llegó a las aberraciones de Seidel partiendo de la función de aberración descrita como una expansión en serie de potencias en término de invariantes rotacionales. Esto quiere decir que este análisis es únicamente útil para sistemas axialmente simétricos. En la siguiente sección se hará el análisis para casos sin la simetría mencionada.



## Capítulo 2

# Análisis de la función de aberración con los polinomios de Zernike

El análisis hecho en el capítulo anterior considera sistemas axialmente simétricos; en este capítulo se hace el análisis de un sistema óptico que no necesariamente tiene simetría de revolución. Para esto, la función de aberración es expandida como una serie de los polinomios de Zernike. Frits Zernike desarrolló un conjunto completo de polinomios cuyo dominio es un círculo unitario. Los polinomios de Zernike fueron desarrollados para sus estudios sobre la influencia de las pequeñas aberraciones en los patrones de difracción; por su naturaleza son útiles para describir los frentes de onda que emergen de sistemas ópticos sin simetría axial. Analizando cada polinomio, se podrá calcular la aberración transversal y con ello conocer la forma en la que se mapean los puntos que salen de la pupila de salida y llegan al plano imagen. Para cada aberración se analizan los puntos a los cuales llegan, en plano cercano al punto imagen Gaussiano, los rayos que salen de un círculo de radio  $\rho$  en la pupila de salida. En los casos en los que es posible, se analiza el diagrama de manchas producido.

### 2.1. $W$ en términos de los polinomios de Zernike

Ahora, la función  $W$  se expresará como una combinación lineal del conjunto de polinomios ortonormales circulares de Zernike<sup>[1]</sup> de la siguiente manera:

$$W(x, y) = \sum_j \alpha_j Z_j(x, y) \quad (2.1)$$

donde  $\alpha_j$  son los coeficientes de la expansión y los  $Z_j(x, y)$  son los polinomios mostrados en la columna 3 de la Tabla 2.1. Los polinomios de Zernike son una secuencia infinita y aquí, únicamente se consideran los primeros 14.

Además, al ser un conjunto completo, el valor de un  $\alpha_j$  es independiente de los valores de los otros coeficientes o del número de polinomios utilizados para representar la función de aberración.

Tal y como fue analizado en el capítulo anterior, como resultado de  $W(x, y)$ , los rayos que salen de la pupila de salida del sistema se desvían del punto imagen Gaussiano en una cantidad conocida como aberración transversal,  $(t_x, t_y, t_z)$ , la cual se mide desde el punto imagen Gaussiano  $G$ , como se mencionó en el capítulo anterior, donde se dedujeron las ecuaciones 1.14:

**CAPÍTULO 2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DE ABERRACIÓN CON LOS  
POLINOMIOS DE ZERNIKE**  
2.1.  $W$  EN TÉRMINOS DE LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE

---

$$t_x \cong -\frac{xt_z}{R} + R\frac{\partial W}{\partial x}$$

$$t_y \cong -\frac{yt_z}{R} + R\frac{\partial W}{\partial y}$$

Como se infiere de las ecuaciones anteriores, se necesitan las derivadas parciales  $\frac{\partial W}{\partial x}$  y  $\frac{\partial W}{\partial y}$  para calcular  $t_x$  y  $t_y$ . En la tabla 2.1 aparecen los primeros 14 polinomios de Zernike y sus respectivas derivadas parciales.

Además, en la siguiente sección serán mostradas las gráficas de la diferencia de camino óptico,  $W$ , y serán analizados los diagramas de manchas resultado de la aparición de cada término.

	Nombre	Polinomio de Zernike	Primera derivada
0	Pistón	1	0
1	Inclinación alrededor de $y$	$2x$	$\frac{\partial W}{\partial x} = 2$ $\frac{\partial W}{\partial y} = 0$
2	Inclinación alrededor de $x$	$2y$	$\frac{\partial W}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial W}{\partial y} = 2$
3	Defoco	$\sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$	$\frac{\partial W}{\partial x} = 4\sqrt{3}x$ $\frac{\partial W}{\partial y} = 4\sqrt{3}y$
4	Astigmatismo primario $45^\circ$	$2\sqrt{6}xy$	$\frac{\partial W}{\partial x} = 2\sqrt{6}y$ $\frac{\partial W}{\partial y} = 2\sqrt{6}x$
5	Astigmatismo primario $0^\circ$	$\sqrt{6}(x^2 - y^2)$	$\frac{\partial W}{\partial x} = 2\sqrt{6}x$ $\frac{\partial W}{\partial y} = -2\sqrt{6}y$
6	Coma primaria alrededor de $y$	$\sqrt{8}y(3\rho^2 - 2)$	$\frac{\partial W}{\partial x} = 6\sqrt{8}xy$ $\frac{\partial W}{\partial y} = \sqrt{8}(3x^2 + 9y^2 - 2)$
7	Coma primaria alrededor de $x$	$\sqrt{8}x(3\rho^2 - 2)$	$\frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{8}(9x^2 + 3y^2 - 2)$ $\frac{\partial W}{\partial y} = 6\sqrt{8}xy$
8		$\sqrt{8}y(3x^2 - y^2)$	$\frac{\partial W}{\partial x} = 6\sqrt{8}xy$ $\frac{\partial W}{\partial y} = 3\sqrt{8}(x^2 - y^2)$
9		$\sqrt{8}x(x^2 - 3y^2)$	$\frac{\partial W}{\partial x} = 3\sqrt{8}(x^2 - y^2)$ $\frac{\partial W}{\partial y} = -6\sqrt{8}xy$
10	Esférica primaria	$\sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$	$\frac{\partial W}{\partial x} = 12\sqrt{5}x(2\rho^2 - 1)$ $\frac{\partial W}{\partial y} = 12\sqrt{5}y(2\rho^2 - 1)$

**CAPÍTULO 2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DE ABERRACIÓN CON LOS  
POLINOMIOS DE ZERNIKE**  
2.2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN  $W$

	Nombre	Polinomio de Zernike	Primera derivada
11	Astigmatismo secundario 0°	$\sqrt{10}(x^2 - y^2)(4\rho^2 - 3)$	$\frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{10}(16x^3 - 6x)$ $\frac{\partial W}{\partial y} = \sqrt{10}(-16y^3 + 6x)$
12	Astigmatismo secundario 45°	$2\sqrt{10}xy(4\rho^2 - 3)$	$\frac{\partial W}{\partial x} = 2\sqrt{10}(12x^2y + 4y^3 - 3y)$ $\frac{\partial W}{\partial y} = 2\sqrt{10}(4x^3 + 12xy^2 - 3x)$
13		$\sqrt{10}(\rho^4 - 8x^2y^2)$	$\frac{\partial W}{\partial x} = 4\sqrt{10}x(x^2 - 3y^2)$ $\frac{\partial W}{\partial y} = 4\sqrt{10}y(y^2 - 3x^2)$
14		$4\sqrt{10}xy(x^2 - y^2)$	$\frac{\partial W}{\partial x} = 4\sqrt{10}y(3x^2 - y^2)$ $\frac{\partial W}{\partial y} = 4\sqrt{10}x(x^2 - 3y^2)$

Tabla 2.1: Polinomios de Zernike y primeras derivadas parciales

## 2.2. Análisis de la función $W$

De manera similar al capítulo anterior, a partir de las ecuaciones 1.14, para cada polinomio se calcula la aberración transversal y se hace el análisis correspondiente. Además, se grafica la diferencia de caminos ópticos,  $W$ , que emerge de la pupila de salida para cada polinomio ortonormal de Zernike (tabla 2.1).

### 2.2.1. Inclinación alrededor de $y$

Se tiene la diferencia de camino óptico siguiente:

$$W(x, y) = 2\alpha_1 x \tag{2.2}$$

Este corresponde a un plano inclinado alrededor del eje  $y$ , el cual se muestra en la figura siguiente:

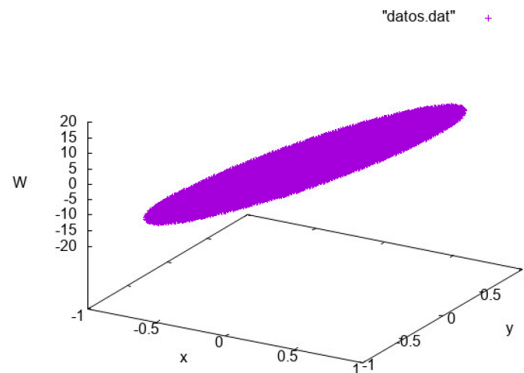


Figura 2.1: Gráfica de la diferencia de caminos ópticos,  $W$ , producido por la inclinación alrededor de  $y$

En el plano imagen gaussiano ( $t_z = 0$ ), las ecuaciones 1.14 quedan en la forma:

$$\begin{aligned} t_x &= 2\alpha_1 R \\ t_y &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Para cada valor de  $\alpha_1$ , se tendrá un desplazamiento transversal de la imagen sobre el eje  $\tau_x$ , sin dejar de ser puntual.  $2\alpha_1$  puede interpretarse como el ángulo de rotación del frente de onda alrededor del eje  $y$ .

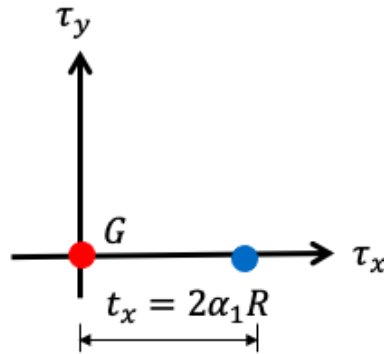


Figura 2.2: Desplazamiento sobre el eje  $\tau_x$

### 2.2.2. Inclinación alrededor de $x$

En este caso, a partir de la tabla 2.1, la diferencia de camino óptico está dada por:

$$W(x, y) = 2\alpha_2 y \tag{2.4}$$

Correspondiente a un plano inclinado alrededor del eje  $x$ , como se muestra en la figura 2.3

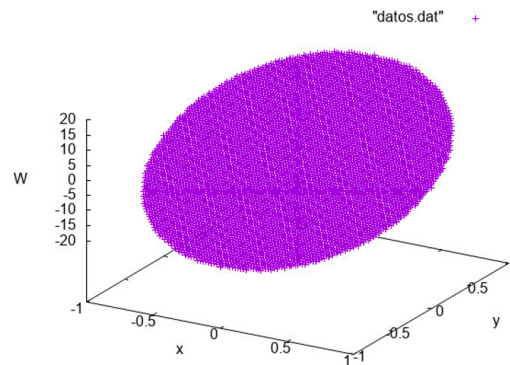


Figura 2.3: Gráfica de la diferencia de caminos ópticos,  $W$ , producido por la inclinación alrededor de  $x$

En el plano imagen gaussiano ( $t_z = 0$ ),

$$\begin{aligned} t_x &= 0 \\ t_y &= 2\alpha_2 R \end{aligned} \tag{2.5}$$

Como en el caso anterior, se tendrá una imagen puntual con un desplazamiento transversal, ahora a lo largo del eje  $\tau_y$ .

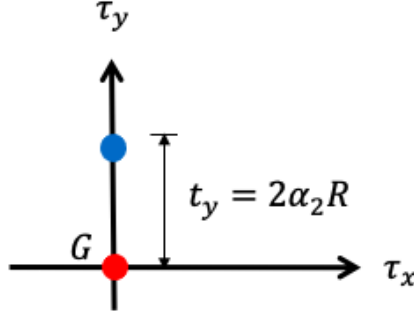


Figura 2.4: Desplazamiento sobre el eje  $\tau_y$

### 2.2.3. Defoco

Para el defoco, la diferencia de camino óptico es:

$$W(x, y) = \alpha_3 \sqrt{3} (2\rho^2 - 1) \quad (2.6)$$

donde  $\rho^2 = x^2 + y^2$ .

De la ecuación 2.6, la gráfica de  $W$  corresponde a una paraboloides de revolución cuyo vértice está en  $(0, 0, -\sqrt{3}\alpha_3)$

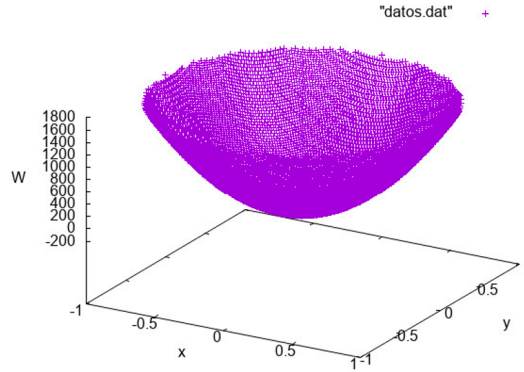


Figura 2.5: Gráfica de la diferencia de caminos ópticos,  $W$ , producido por el defoco

Aplicando las ecuaciones 1.14, las componentes de la aberración transversal quedan de la forma:

$$\begin{aligned} t_x &= -\frac{x t_z}{R} + 4\sqrt{3}\alpha_3 R x \\ t_y &= -\frac{y t_z}{R} + 4\sqrt{3}\alpha_3 R y \end{aligned} \quad (2.7)$$

Factorizando  $x$  y  $y$  de las ecuaciones 2.7, respectivamente, y en seguida elevando al cuadrado y sumando, se obtiene:

$$t_x^2 + t_y^2 = \left( -\frac{t_z}{R} + 4\sqrt{3}\alpha_3 R \right)^2 \rho^2 \quad (2.8)$$

En el plano de observación (definido por  $t_z$ ) se obtendrá un círculo de radio  $t_r = \left( -\frac{t_z}{R} + 4\sqrt{3}\alpha_3 R \right) \rho$ , mismo que puede convertirse en un círculo de radio cero en el plano  $t_z = 4\sqrt{3}\alpha_3 R^2$ , para cualquier  $\rho$ . Esto significa que basta con trasladar el plano de observación en una cantidad  $4\sqrt{3}\alpha_3 R^2$  para obtener una imagen puntual

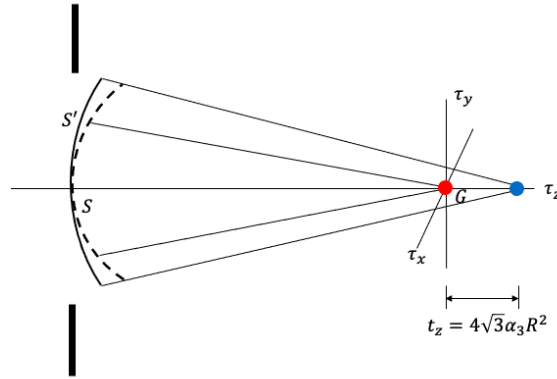


Figura 2.6: Defoco

#### 2.2.4. Astigmatismo primario $45^\circ$

Como puede observarse en la tabla 2.1, la diferencia de camino óptico por el astigmatismo primario a  $45^\circ$  es:

$$W(x, y) = 2\sqrt{6}\alpha_4 xy \quad (2.9)$$

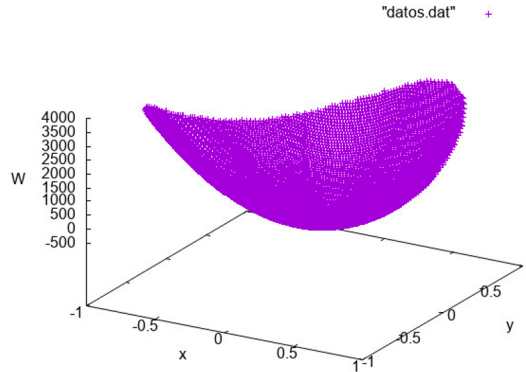


Figura 2.7: Gráfica de la diferencia de caminos ópticos,  $W$ , producido por el astigmatismo  $45^\circ$

Considerando que las ecuaciones para la rotación de un sistema coordenado son:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned} \quad (2.10)$$

Si usamos el sistema de coordenadas rotado  $45^\circ$ , se tiene que:

**CAPÍTULO 2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DE ABERRACIÓN CON LOS  
POLINOMIOS DE ZERNIKE**  
2.2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN  $W$

---

$$\begin{aligned}x &= \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} \\y &= \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\end{aligned}\tag{2.11}$$

Por tanto, la ecuación 2.9, pasa a ser:

$$W(x', y') = \sqrt{6}\alpha_4(x'^2 - y'^2)\tag{2.12}$$

Haciendo uso de las ecuaciones 1.14, las componentes de la aberración transversal son:

$$\begin{aligned}t'_x &= -\frac{x't_z}{R} + 2\sqrt{6}\alpha_4Rx' \\t'_y &= -\frac{y't_z}{R} - 2\sqrt{6}\alpha_4Ry'\end{aligned}\tag{2.13}$$

elevando al cuadrado, se obtiene:

$$\begin{aligned}t'^2_x &= x'^2 \left( \frac{t_z}{R} - 2\sqrt{6}\alpha_4R \right)^2 \\t'^2_y &= y'^2 \left( \frac{t_z}{R} + 2\sqrt{6}\alpha_4R \right)^2\end{aligned}\tag{2.14}$$

Despejando y sumando  $x'^2 + y'^2$  se obtiene

$$\frac{t'^2_x}{\left(\frac{t_z}{R} - 2\sqrt{6}\alpha_4R\right)^2} + \frac{t'^2_y}{\left(\frac{t_z}{R} + 2\sqrt{6}\alpha_4R\right)^2} = x'^2 + y'^2\tag{2.15}$$

$$\frac{t'^2_x}{\left(\frac{t_z}{R} - 2\sqrt{6}\alpha_4R\right)^2} + \frac{t'^2_y}{\left(\frac{t_z}{R} + 2\sqrt{6}\alpha_4R\right)^2} = \rho'^2\tag{2.16}$$

donde  $x'^2 + y'^2 = \rho'^2$  (ya que  $\rho$  es invariante ante rotaciones alrededor de  $z$ ).

Finalmente se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{t'^2_x}{\left[\rho' \left(\frac{t_z}{R} - 2\sqrt{6}\alpha_4R\right)\right]^2} + \frac{t'^2_y}{\left[\rho' \left(\frac{t_z}{R} + 2\sqrt{6}\alpha_4R\right)\right]^2} = 1\tag{2.17}$$

De la ecuación 2.17 se puede notar que en el plano de observación se tendrán elipses. Estas elipses serán concéntricas, y si  $\rho_A > \rho_B$ , la elipse  $A$  estará dentro de la elipse  $B$ . Por otro lado, si  $t_z = 2\sqrt{6}R^2\alpha_4$ , la elipse se convierte en un segmento de recta sobre el eje  $y'$ . Por el contrario, si  $t_z = -2\sqrt{6}R^2\alpha_4$ , la elipse se convierte en un segmento de recta sobre el eje  $x'$ . En el caso en que  $t_z = 0$ , la elipse pasa a ser un círculo (ya que los denominadores son iguales).

Esta aberración no aparece en el análisis del capítulo anterior de las aberraciones de Seidel.

**CAPÍTULO 2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DE ABERRACIÓN CON LOS  
POLINOMIOS DE ZERNIKE**  
2.2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN  $W$

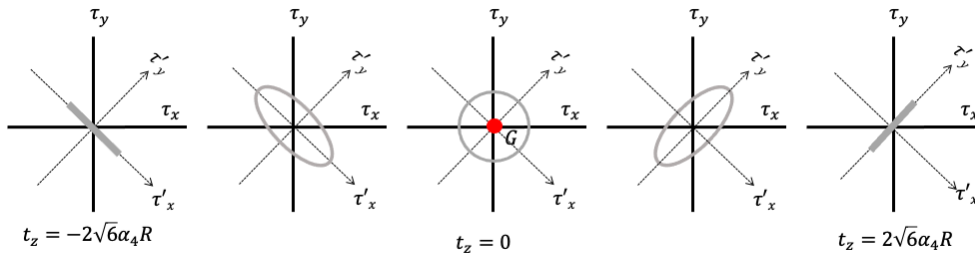


Figura 2.8: Imágenes con astigmatismo  $45^\circ$  en diferentes planos de observación

### 2.2.5. Astigmatismo primario $0^\circ$

A partir de la tabla 2.1, se sabe que la diferencia de camino óptico está dada por:

$$W(x, y) = \sqrt{6}\alpha_5(x^2 - y^2) \tag{2.18}$$

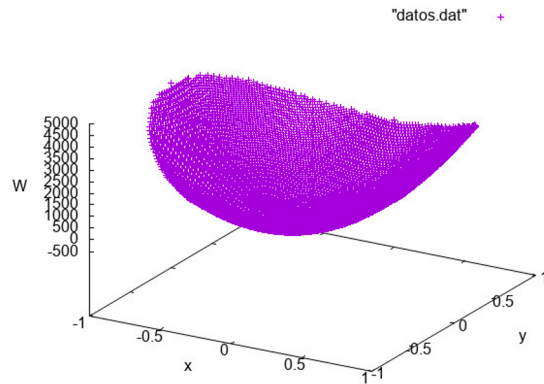


Figura 2.9: Gráfica de la diferencia de caminos ópticos,  $W$ , producido por el astigmatismo  $0^\circ$

Como puede notarse, la ecuación 2.18 es idéntica en forma a la ecuación 2.12. Es decir, en el plano de observación, se obtendrán resultados similares a los obtenidos en el astigmatismo primario a  $45^\circ$ , pero sin la rotación.

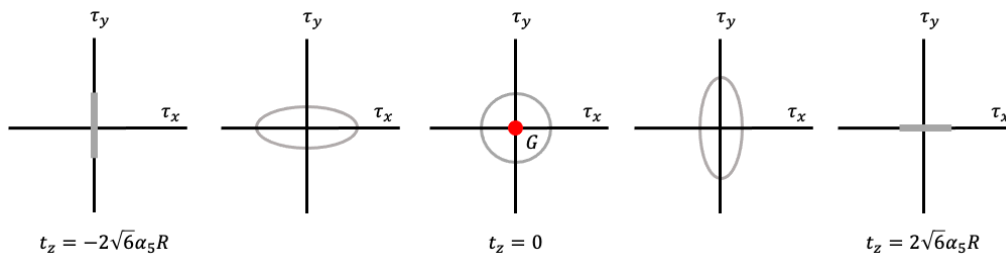


Figura 2.10: Imágenes con astigmatismo  $0^\circ$  en diferentes planos de observación

Esta aberración aparece de esta forma en el análisis de las aberraciones de Seidel.

### 2.2.6. Coma primaria alrededor de $y$

Para la coma primaria alrededor de  $y$ , la diferencia de camino óptico se expresa como (ver tabla 2.1):

**CAPÍTULO 2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DE ABERRACIÓN CON LOS  
POLINOMIOS DE ZERNIKE**  
2.2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN  $W$

---

$$W(x,y) = \sqrt{8}\alpha_6 y(3\rho^2 - 2) \quad (2.19)$$

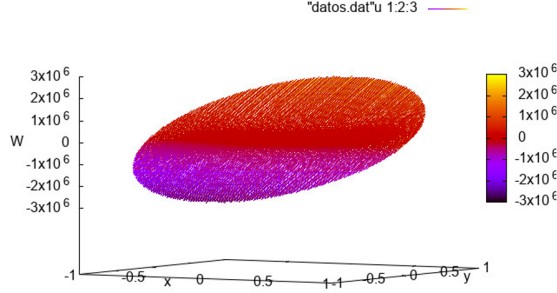


Figura 2.11: Gráfica de la diferencia de caminos ópticos,  $W$ , producido por la coma primaria alrededor de  $y$

Las componentes de aberración transversal adquieren la forma:

$$\begin{aligned} t_x &= -\frac{xt_z}{R} + 6\sqrt{8}\alpha_6 Rxy \\ t_y &= -\frac{yt_z}{R} + \sqrt{8}\alpha_6 R(3x^2 + 9y^2 - 2) \end{aligned} \quad (2.20)$$

En coordenadas polares, las ecuaciones 2.20 se convierten en:

$$\begin{aligned} t_x &= -\frac{t_z}{R}\rho \cos \theta + 6\sqrt{8}\alpha_6 R\rho^2 \sin \theta \cos \theta \\ t_y &= -\frac{t_z}{R}\rho \sin \theta + \sqrt{8}\alpha_6 R(6\rho^2 \sin^2 \theta + 3\rho^2 - 2) \end{aligned} \quad (2.21)$$

O bien, utilizando identidades trigonométricas, las ecuaciones 2.21 pueden reducirse a:

$$\begin{aligned} t_x &= -\frac{t_z}{R}\rho \cos \theta + 3\sqrt{8}\alpha_6 R\rho^2 \sin 2\theta \\ t_y &= -\frac{t_z}{R}\rho \sin \theta + \sqrt{8}\alpha_6 R(-3\rho^2 \cos 2\theta + 6\rho^2 - 2) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Cuando calculamos el diagrama de manchas en el plano imagen gaussiano ( $t_z = 0$ ), las ecuaciones 2.22 cambian a:

$$\begin{aligned} t_x &= 3\sqrt{8}\alpha_6 R\rho^2 \sin 2\theta \\ t_y &= \sqrt{8}\alpha_6 R(-3\rho^2 \cos 2\theta + 6\rho^2 - 2) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Despejando y elevando al cuadrado, se llega a que:

$$t_x^2 + [t_y - \sqrt{8}\alpha_6 R(6\rho^2 - 2)]^2 = [3\sqrt{8}\alpha_6 R\rho^2]^2 \quad (2.24)$$

Podemos interpretar la ecuación 2.24 como sigue: Los rayos que salen por un círculo de radio  $\rho$  en la pupila de salida llegan al plano imagen gaussiano sobre un círculo de radio  $3\sqrt{8}\alpha_6 R\rho^2$  centrado en  $C [0, \sqrt{8}\alpha_6 R(6\rho^2 - 2)]$ . Para lograr el barrido en todos los puntos de la pupila de

**CAPÍTULO 2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DE ABERRACIÓN CON LOS  
POLINOMIOS DE ZERNIKE**  
2.2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN  $W$

---

salida,  $\rho$  debe variar de 0 a 1.

El círculo de menor radio en la pupila de salida ( $\rho = 0$ ), es mapeado al plano imagen gaussiano en el punto  $A(0, -2\sqrt{8}\alpha_6 R)$  con radio  $r_0 = 0$ , el círculo de mayor radio ( $\rho = 1$ ) está centrado en  $B(0, 4\sqrt{8}\alpha_6 R)$  con radio  $r_1 = 3\sqrt{8}\alpha_6 R$ . Todos los círculos mapeados formarán el diagrama de manchas que asemeja una coma y cuya envolvente está integrada por dos rectas que forma un ángulo de  $60^\circ$  entre sí.

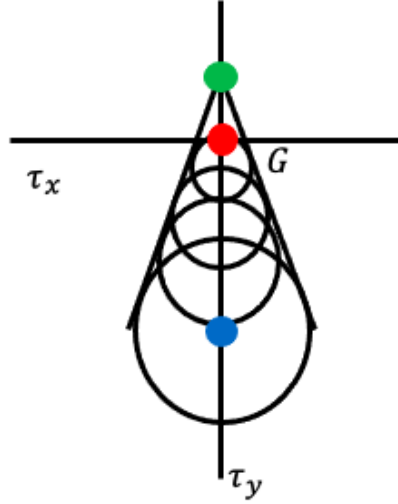


Figura 2.12: Coma primaria alrededor de  $y$  en el plano gaussiano

Cuando  $t_z \neq 0$ , entonces las ecuaciones 2.21 pueden reescribirse como:

$$\begin{aligned} t_x &= -a \cos \theta + b\rho^2 \sin \theta \cos \theta \\ t_y &= -a \sin \theta + b\rho^2 \sin^2 \theta + \frac{b}{2}\rho^2 - \frac{b}{3} \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde

$$a = \frac{t_z}{R}\rho, \quad b = 6\sqrt{8}\alpha_6 R$$

Elevando al cuadrado y sumando se obtiene:

$$[t_x + a \cos \theta]^2 + \left[ t_y + a \sin \theta - b\rho^2 + \frac{b}{3} \right]^2 = \left[ \frac{b}{2}\rho^2 \right]^2 \quad (2.26)$$

La cual es la ecuación de una cardiode; los puntos que definen esta curva son obtenidos en el apéndice A.

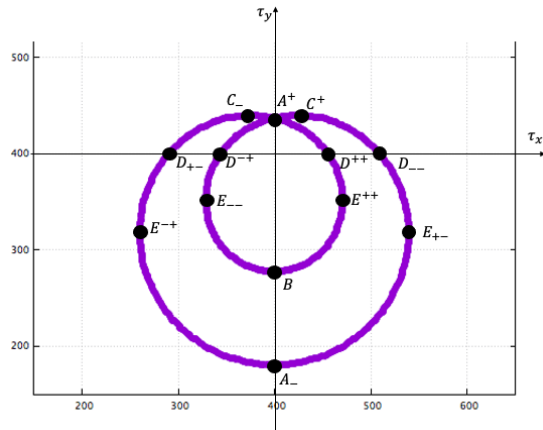


Figura 2.13: Cardiode obtenida con coma  $\alpha_6 = 0.5$  para  $\rho = 0.7$  cuando  $t_z \neq 0$  con los puntos que definen la curva

### 2.2.7. Coma primaria alrededor de $x$

La función de aberración en este caso está dada por:

$$W(x, y) = \sqrt{8}\alpha_7 x(3\rho^2 - 2) \tag{2.27}$$

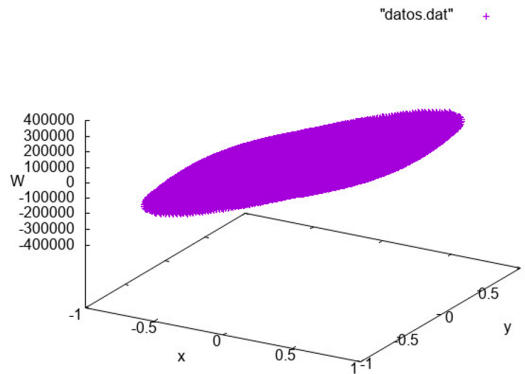


Figura 2.14: Gráfica de la diferencia de caminos ópticos,  $W$ , producido por la coma primaria alrededor de  $x$

Por la forma de la ecuación 2.27, podemos deducir que se obtienen resultados análogos a los obtenidos para la coma primaria alrededor de  $y$ , con la misma interpretación.

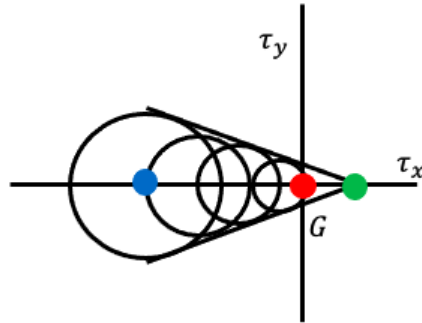


Figura 2.15: Coma primaria alrededor de  $x$  en el plano gaussiano

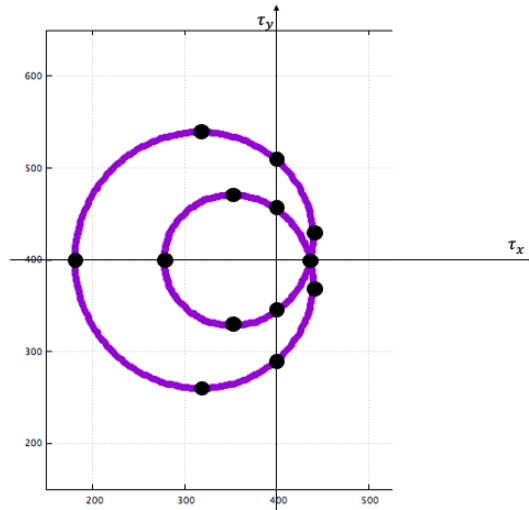


Figura 2.16: Cardiode obtenida con coma  $\alpha_7 = 0.5$  para  $\rho = 0.7$  cuando  $t_z \neq 0$  con los puntos que definen la curva

A partir de aquí, las siguientes aberraciones no se obtienen en el análisis de Seidel.

### 2.2.8. Aberración 8

Para este caso, la diferencia de caminos ópticos es:

$$W(x, y) = \sqrt{8}\alpha_8 y(3x^2 - y^2) \tag{2.28}$$

**CAPÍTULO 2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DE ABERRACIÓN CON LOS  
POLINOMIOS DE ZERNIKE**  
2.2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN  $W$

---

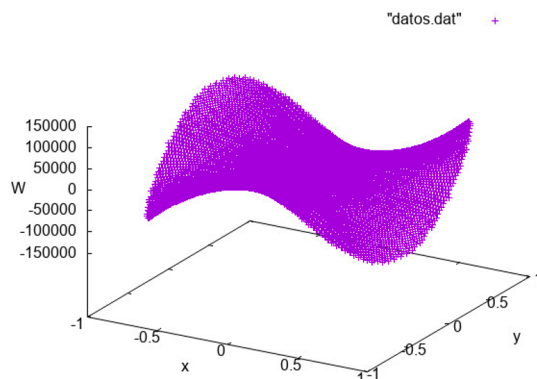


Figura 2.17: Gráfica de la diferencia de caminos ópticos,  $W$ , producido por la aberración 8

A partir de las ecuaciones 1.14:

$$\begin{aligned} t_x &= -\frac{xt_z}{R} + 6\sqrt{8}\alpha_8 Rxy \\ t_y &= -\frac{yt_z}{R} + 3\sqrt{8}\alpha_8 R(x^2 - y^2) \end{aligned} \quad (2.29)$$

En el plano gaussiano y en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} t_x &= 3\sqrt{8}\alpha_8 R\rho^2 \sin 2\theta \\ t_y &= 3\sqrt{8}\alpha_8 R\rho^2 \cos 2\theta \end{aligned} \quad (2.30)$$

Si se eleva al cuadrado y se suma:

$$t_x^2 + t_y^2 = \left(3\sqrt{8}\alpha_8 R\rho^2\right)^2 \quad (2.31)$$

Esto quiere decir que en el plano imagen gaussiano tendremos círculos dependientes del radio del anillo que sale de la pupila de salida.

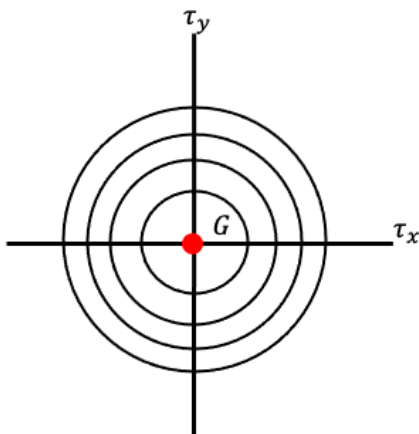


Figura 2.18: Imágenes en el plano gaussiano producidas por la aberración 8 para  $\rho$  arbitrario

Fuera del plano imagen gaussiano, la deducción de la curva que se obtiene se encuentra en el Apéndice B.

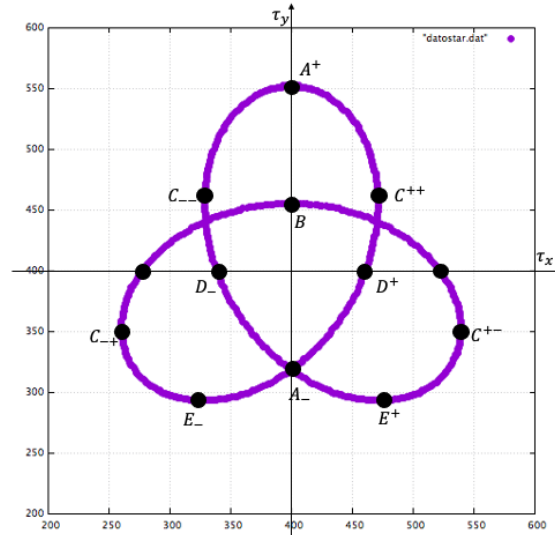


Figura 2.19: Imagen con aberración 8  $\alpha_8 = 0.5$  para  $\rho = 0.7$ , fuera del plano gaussiano, con los puntos que definen la curva

### 2.2.9. Aberración 9

De la tabla 2.1, la diferencia de caminos ópticos está dada por:

$$W(x, y) = \sqrt{8}\alpha_9 x(x^2 - 3y^2) \tag{2.32}$$

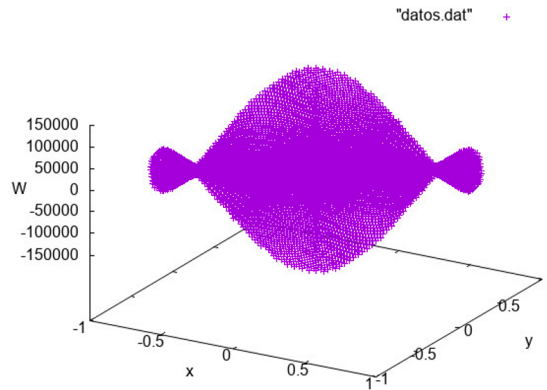


Figura 2.20: Gráfica de la diferencia de caminos ópticos,  $W$ , producido por la aberración 9

Si siguiendo el desarrollo del análisis de la aberración 8, se obtendrán resultados análogos, de los que se obtienen las mismas conclusiones.

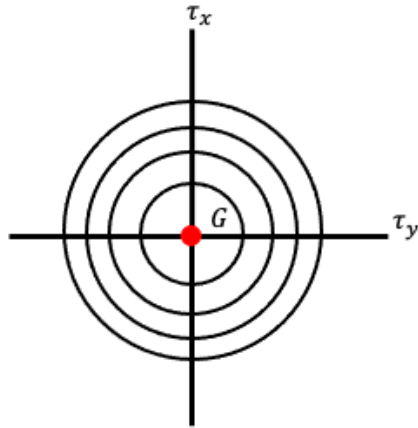


Figura 2.21: Imágenes en el plano gaussiano producidas por la aberración 9 para  $\rho$  arbitrario

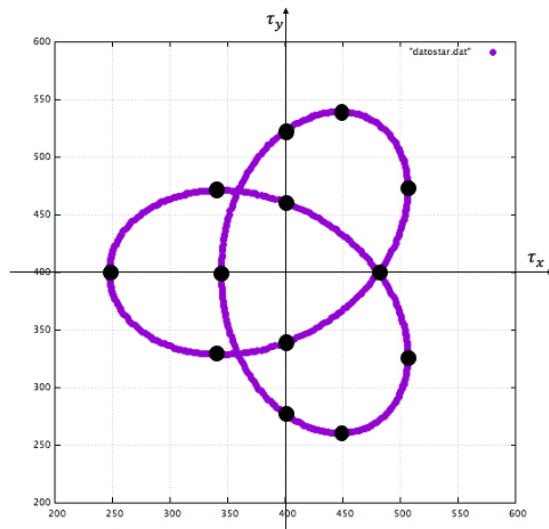


Figura 2.22: Imagen con aberración 9  $\alpha_9 = 0.5$  para  $\rho = 0.7$ , fuera del plano gaussiano, con los puntos que definen la curva

### 2.2.10. Esférica primaria

Para el caso de la esférica primaria, la siguiente ecuación nos da la diferencia de caminos ópticos

$$W(x, y) = \sqrt{5}\alpha_{10}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1) \quad (2.33)$$

Las componentes de la aberración transversal son de la forma:

$$\begin{aligned} t_x &= -\frac{xt_z}{R} + 12\sqrt{5}\alpha_{10}Rx(2\rho^2 - 1) \\ t_y &= -\frac{yt_z}{R} + 12\sqrt{5}\alpha_{10}Ry(2\rho^2 - 1) \end{aligned} \quad (2.34)$$

**CAPÍTULO 2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DE ABERRACIÓN CON LOS  
POLINOMIOS DE ZERNIKE**  
2.2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN  $W$

---

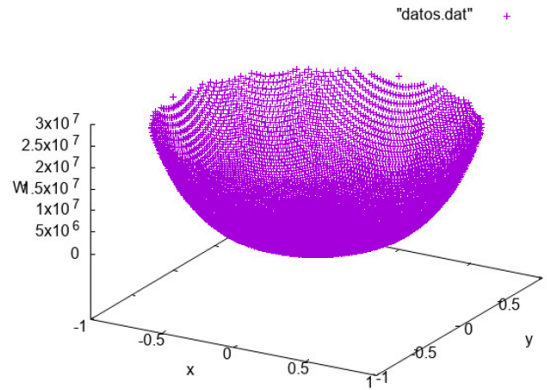


Figura 2.23: Gráfica de la diferencia de caminos ópticos,  $W$ , producido por la esférica primaria

Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones 2.34, se obtiene:

$$t_x^2 + t_y^2 = \left[ -\frac{t_z \rho}{R} + 12\sqrt{5}\alpha_{10}R(2\rho^2 - 1)\rho \right]^2 \quad (2.35)$$

Esta ecuación puede interpretarse como un conjunto de círculos de radio variable. De forma similar al caso del defoco, la posición del plano de observación, para la cual el radio de los círculos sería cero, es:

$$t_z = 12\sqrt{5}\alpha_{10}R^2(2\rho^2 - 1) \quad (2.36)$$

Es decir, no existe un plano para el cual todos los círculos converjan en un punto (ver figura 2.23b).

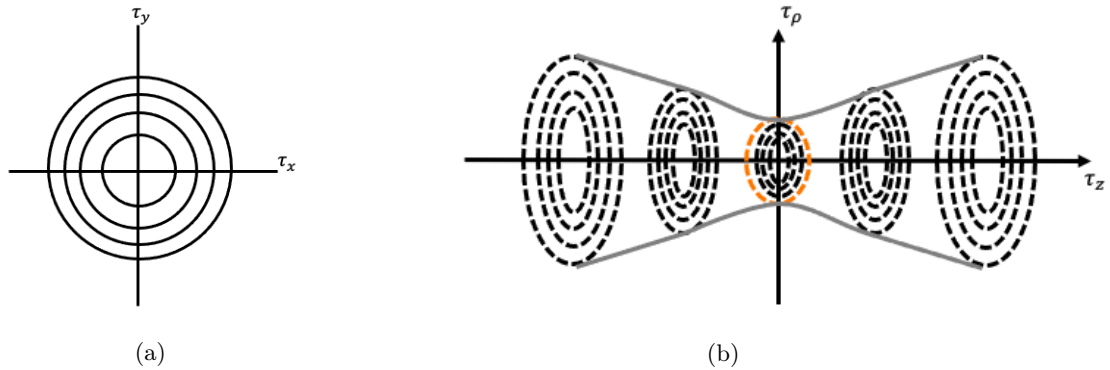


Figura 2.24: Esférica para (a) cualquier plano  $t_z$  y (b) distintos planos  $t_z$

### 2.2.11. Astigmatismo secundario $0^\circ$

En este caso, la diferencia de caminos ópticos es:

$$W(x, y) = \sqrt{10}\alpha_{11}(x^2 - y^2)(4\rho^2 - 3) \quad (2.37)$$

**CAPÍTULO 2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DE ABERRACIÓN CON LOS  
POLINOMIOS DE ZERNIKE**  
2.2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN  $W$

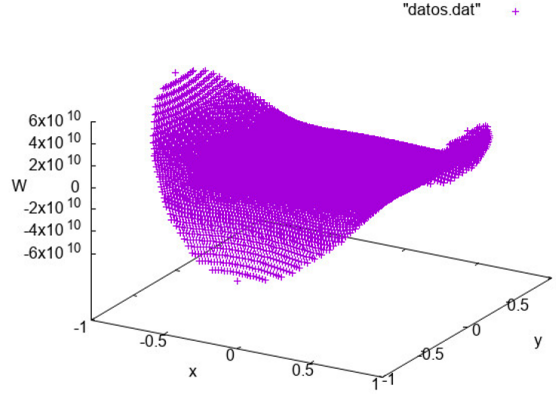


Figura 2.25: Gráfica de la diferencia de caminos ópticos,  $W$ , producido por el astigmatismo secundario  $0^\circ$

Cuyas expresiones para las componentes de la aberración transversal, son:

$$\begin{aligned} t_x &= -\frac{xt_z}{R} + \sqrt{10}\alpha_{11}R(16x^3 - 6x) \\ t_y &= -\frac{yt_z}{R} + \sqrt{10}\alpha_{11}R(-16y^3 + 6y) \end{aligned} \quad (2.38)$$

La deducción de la curva que se obtiene fuera del plano gaussiano se encuentra en el Apéndice C.

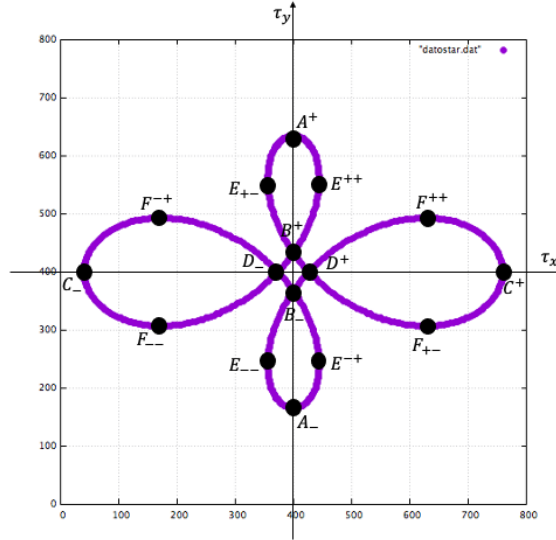


Figura 2.26: Imagen con astigmatismo secundario  $0^\circ$   $\alpha_{11} = 0.3$  para  $\rho = 0.9$ , fuera del plano gaussiano, con los puntos que definen la curva

### 2.2.12. Astigmatismo secundario $45^\circ$

En el caso del astigmatismo secundario  $45^\circ$ , por la tabla 2.1, se tiene:

$$W(x, y) = 2\sqrt{10}\alpha_{12}xy [4(x^2 + y^2) - 3] \quad (2.39)$$

**CAPÍTULO 2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DE ABERRACIÓN CON LOS  
POLINOMIOS DE ZERNIKE**  
2.2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN  $W$

---

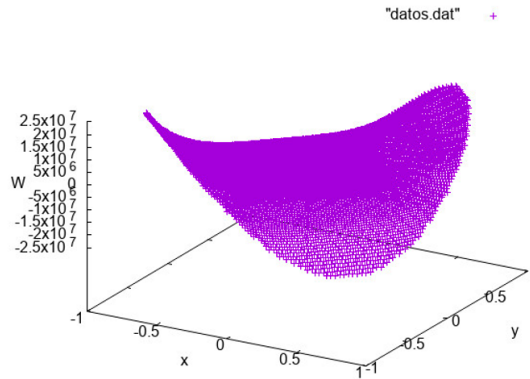


Figura 2.27: Gráfica de la diferencia de caminos ópticos,  $W$ , producido por el astigmatismo secundario  $45^\circ$

Para hacer el análisis, se hace la transformación siguiente:

$$x = x' \cos \phi - y' \sin \phi, \quad y = x' \sin \phi + y' \cos \phi$$

con  $\phi = 45^\circ$ .

De esta forma, la ecuación 2.39 se transforma en:

$$W(x, y) = \sqrt{10}\alpha_{12}(x'^2 + y'^2)(4\rho'^2 - 3) \quad (2.40)$$

Como puede notarse, la ecuación anterior es idéntica en forma a la ecuación 2.37. Por consiguiente, se obtiene el mismo patrón que en el caso del astigmatismo secundario  $0^\circ$ , con una rotación de  $45^\circ$ .

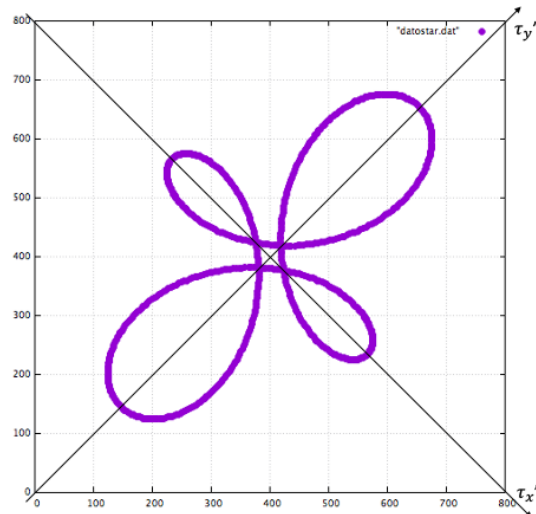


Figura 2.28: Imagen con astigmatismo secundario  $45^\circ$   $\alpha_{12} = 0.3$  para  $\rho = 0.9$ , fuera del plano gaussiano

### 2.2.13. Aberración 13

Por la tabla 2.1, sabemos que la diferencia de caminos ópticos para este caso es:

$$W(x, y) = \sqrt{10}\alpha_{13} (x^2 + y^2)^2 - 8x^2y^2 \quad (2.41)$$

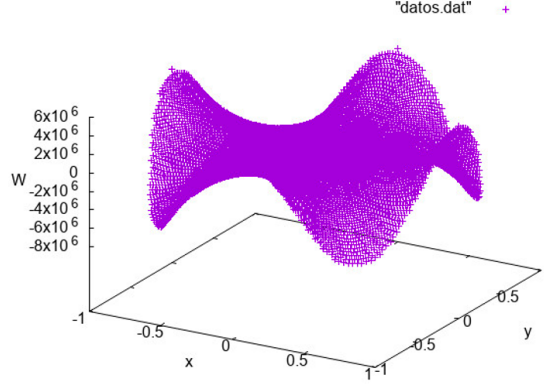


Figura 2.29: Gráfica de la diferencia de caminos ópticos,  $W$ , producido por la aberración 13

De las ecuaciones 1.14, se obtiene que:

$$\begin{aligned} t_x &= x \left[ -\frac{t_z}{R} + 4\sqrt{10}\alpha_{13}R(x^2 - 3y^2) \right] \\ t_y &= y \left[ -\frac{t_z}{R} + 4\sqrt{10}\alpha_{13}R(y^2 - 3x^2) \right] \end{aligned} \quad (2.42)$$

Se sustituye en la ecuación 2.42a  $y^2 = \rho^2 - x^2$ , y en 2.42b  $x^2 = \rho^2 - y^2$  para llegar a:

$$\begin{aligned} t_x &= \left( -\frac{t_z}{R} - 12\sqrt{10}\alpha_{13}R\rho^2 \right) x + 16\sqrt{10}\alpha_{13}Rx^3 \\ t_y &= \left( -\frac{t_z}{R} - 12\sqrt{10}\alpha_{13}R\rho^2 \right) y + 16\sqrt{10}\alpha_{13}Ry^3 \end{aligned} \quad (2.43)$$

La deducción de la curva que se obtiene fuera del plano Gaussiano se encuentra en el Apéndice D.

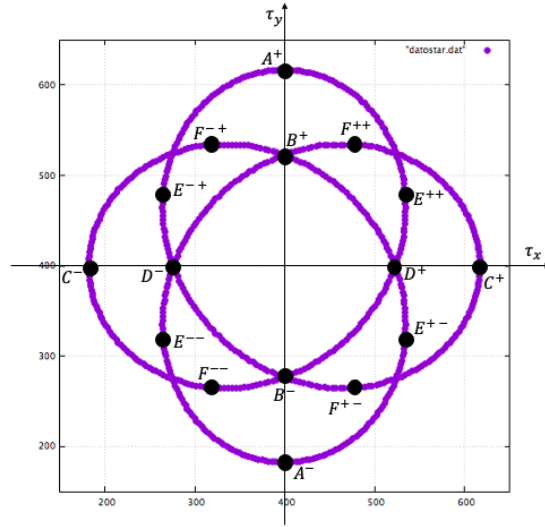


Figura 2.30: Imagen con aberración 13  $\alpha_{13} = 0.5$  para  $\rho = 0.8$ , fuera del plano gaussiano, con los puntos que definen la curva

### 2.2.14. Aberración 14

Finalmente, para este caso, la diferencia de caminos ópticos está dada por:

$$W(x, y) = 4\sqrt{10}\alpha_{14}xy(x^2 - y^2) \quad (2.44)$$

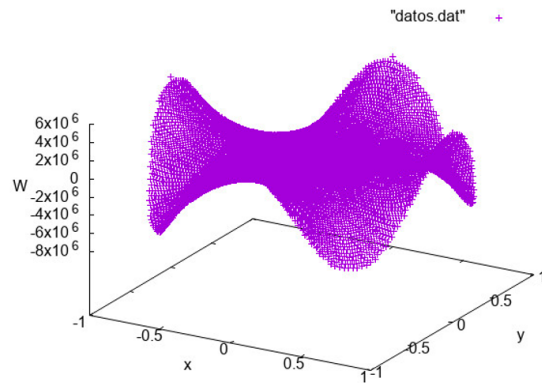


Figura 2.31: Gráfica de la diferencia de caminos ópticos,  $W$ , producido por la aberración 14

Las componentes de la aberración transversal están dadas por:

$$\begin{aligned} t_x &= -\frac{xt_z}{R} + 4\sqrt{10}\alpha_{14}Ry(3x^2 - y^2) \\ t_y &= -\frac{yt_z}{R} + 4\sqrt{10}\alpha_{14}Rx(x^2 - 3y^2) \end{aligned} \quad (2.45)$$

o bien

$$\begin{aligned} t_x &= -Ax + By(3x^2 - y^2) \\ t_y &= -Ay + Bx(x^2 - 3y^2) \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{t_z}{R} \\ B &= 4\sqrt{10}\alpha_{14}R \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores pueden ponerse en la forma

$$(t_x + Ax)^2 + (t_y + Ay)^2 = B^2 \left[ y^2 (3x^2 - y^2)^2 + x^2 (x^2 - 3y^2)^2 \right] \quad (2.47)$$

Usando funciones trigonométricas, la ecuación anterior queda de la forma:

$$\begin{aligned} (t_x + A\rho \cos \theta)^2 + (t_y + A\rho \sin \theta)^2 \\ = B^2 \left[ \rho^2 \sin^2 \theta (3\rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta)^2 \right. \\ \left. + \rho^2 \cos^2 \theta (\rho^2 \cos^2 \theta - 3\rho^2 \sin^2 \theta)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.48)$$

Esta ecuación se reduce a:

$$\begin{aligned} (t_x + A\rho \cos \theta)^2 + (t_y + A\rho \sin \theta)^2 \\ = B^2 \rho^6 [3 \sin^4 \theta \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta \cos^4 \theta + \sin^6 \theta + \cos^6 \theta] \end{aligned} \quad (2.49)$$

Esto es igual a:

$$(t_x + A\rho \cos \theta)^2 + (t_y + A\rho \sin \theta)^2 = B^2 \rho^6 (\sin^2 + \cos^2)^3 \quad (2.50)$$

Llegando, finalmente, a:

$$(t_x + A\rho \cos \theta)^2 + (t_y + A\rho \sin \theta)^2 = B^2 \rho^6 \quad (2.51)$$

que es la ecuación de una cicloide [5].

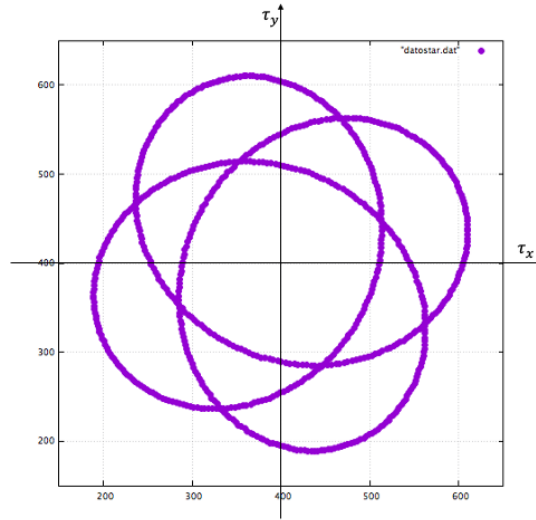


Figura 2.32: Imagen con aberración 14  $\alpha_{14} = 0.5$  para  $\rho = 0.8$ , fuera del plano gaussiano

### 2.3. Conclusiones

En este capítulo se han analizado los primeros 14 polinomios de la función de aberración. Calculando las componentes de la aberración transversal en cada caso y operando convenientemente con ellas se pudo identificar la estructura de los patrones que se formarán sobre y fuera del plano imagen gaussiano para un anillo de radio  $\rho$  donde  $0 \leq \rho \leq 1$  que emerge de la pupila de salida de un sistema óptico sin simetría axial. Estos cálculos se repetirán en el siguiente capítulo para obtener los diagramas de manchas y patrones de irradiancia.

## Capítulo 3

# Diagramas de manchas y patrones de irradiancia

Cuando las aberraciones superan varias veces el límite de Rayleigh, los resultados del trazo geométrico de rayos pueden ser utilizados para predecir la apariencia de una imagen puntual con bastante precisión. Esto se puede hacer dividiendo la pupila de entrada del sistema óptico en un gran número de áreas iguales y trazando un rayo desde el punto objeto a través del centro de cada una de las áreas pequeñas. La intersección de cada rayo con el plano de observación seleccionado se traza y, como cada rayo representa la misma fracción de la energía total en la imagen, la densidad de los puntos en el gráfico es una medida de la irradiancia en la imagen. Cuantos más rayos se rastrean, más precisa es la representación de la imagen geométrica. Una gráfica de intercepción de rayos de este tipo se llama diagrama de manchas (Smith, 1966). Bajo esta premisa y utilizando las ecuaciones de las componentes de aberración transversal utilizadas en los capítulos anteriores, se desarrolló un programa de cómputo que calcula los diagramas de manchas y patrones de irradiancia que se mostrarán en este capítulo.

### 3.1. Programa de cómputo

Se desarrolló un programa de cómputo en Fortran 77 (ver Apéndice E), donde se consideran únicamente 2 planos: el plano de la pupila de salida y el plano de observación, en este último se prevé que se instale un detector. Para esto, es necesario introducir, como datos de entrada, el tamaño horizontal y vertical de los píxeles del detector y el número de estos que se encuentran a lo largo de los ejes  $\tau_x$  y  $\tau_y$ . Así, el programa delimita los bordes de un CCD en el plano de la imagen y localiza el área de cada píxel. Haciendo uso de las ecuaciones 1.14 se calculan, para cada rayo que emerge de la pupila de salida, las coordenadas  $(t_x, t_y)$  en el plano de observación ( $t_z = cte$ ). El cálculo dependerá del valor de los coeficientes de Zernike  $\alpha_j$  que se definan; con las coordenadas  $(t_x, t_y)$  se estima el píxel donde el rayo incide en el detector. Es por eso, que además de las especificaciones del CCD, se introduce como datos de entrada el radio de curvatura del frente de onda, el diámetro de la pupila de salida (suponiendo que es circular) y el número de rayos que emerge de la pupila de salida.

Una vez hecho esto, se obtiene el diagrama de manchas producido por el frente de onda aberrado. Al repetir los cálculos para un gran número de rayos, se suma el número de estos que llegan a cada uno de los píxeles del detector y se obtienen los patrones de irradiancia.

### 3.2. Diagramas de Manchas

Dados los valores de uno o más coeficientes de Zernike, a continuación se muestran los diagramas de manchas obtenidos con el programa computacional sobre y fuera del plano imagen Gaussiano ( $t_z = 0$  y  $t_z \neq 0$ ).

#### 3.2.1. Inclinación alrededor de $y$ y $x$

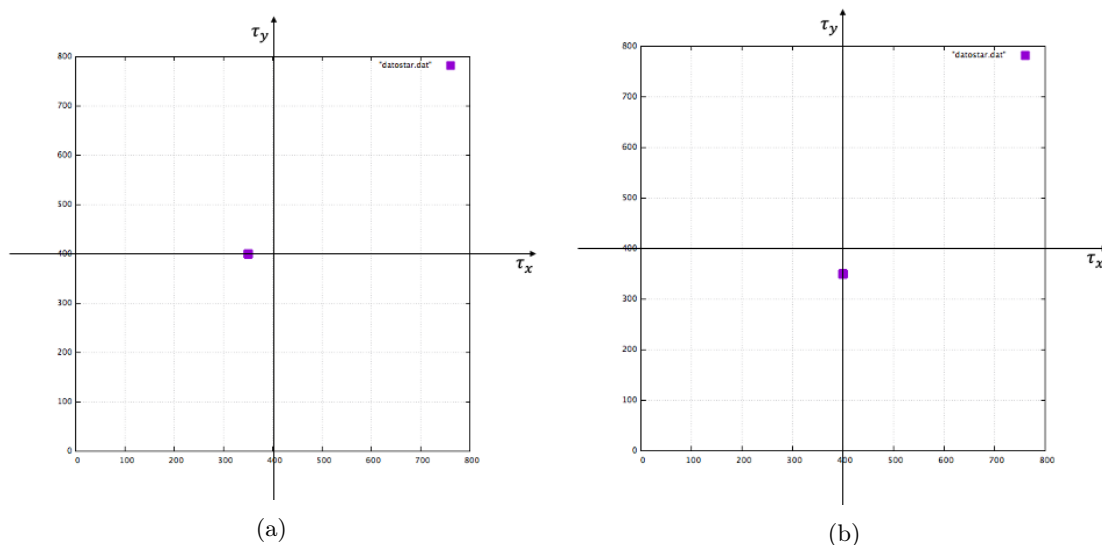


Figura 3.1: Imágenes con (a)  $\alpha_1 = 0.5$  y (b)  $\alpha_2 = 0.5$  para  $\rho = 0.5$  sobre el plano gaussiano

Tal como se analizó en el capítulo anterior, la imagen producida por las inclinaciones alrededor de los ejes  $y$  y  $x$ , es puntual con un desplazamiento sobre alguno de los ejes del plano imagen gaussiano.

#### 3.2.2. Defoco

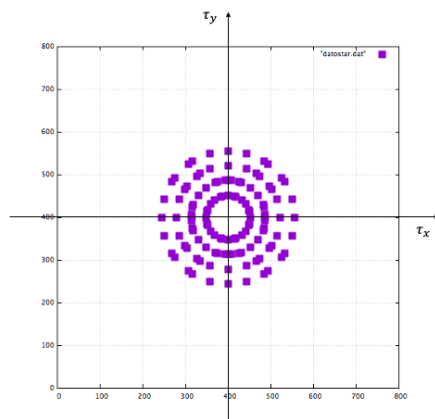


Figura 3.2: Diagrama de manchas con defoco  $\alpha_3 = 0.5$  sobre el plano imagen gaussiano considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida

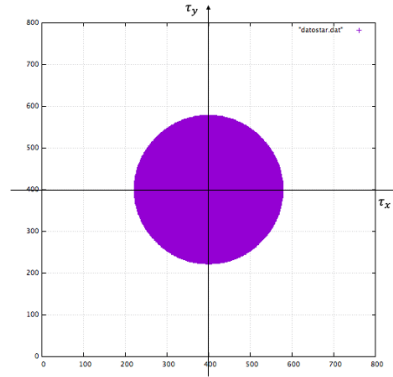


Figura 3.3: Diagrama de manchas con defoco  $\alpha_3 = 0.5$  sobre el plano imagen gaussiano considerando anillos que emergen de la pupila de salida con radio  $\rho \leq 1$

En el caso del defoco, cada anillo de rayos que emerge de la pupila de salida produce un anillo en el plano imagen. Esto puede verse bien en la figura 3.2, en donde se obtienen anillos concéntricos al punto imagen gaussiano. La contribución de todos los anillos da como resultado el diagrama de manchas de la figura 3.3.

### 3.2.3. Astigmatismo primario $45^\circ$ y $0^\circ$

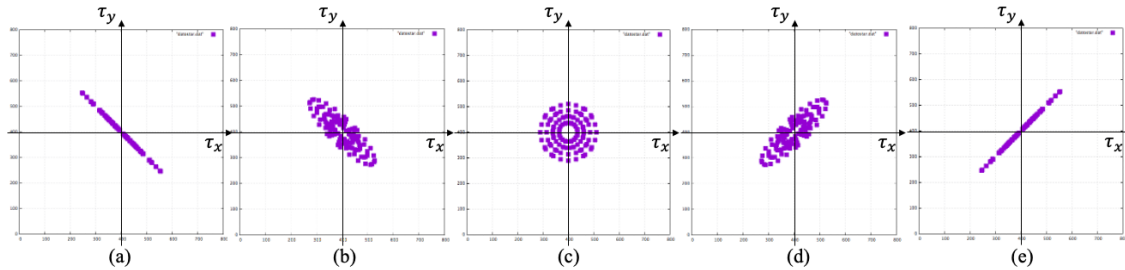


Figura 3.4: Diagrama de manchas con astigmatismo primario  $45^\circ$   $\alpha_4 = 0.5$  sobre (a) plano tangencial  $\alpha_3 = -0.35$ , (b) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (c) plano imagen gaussiano, (d) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , (e) plano sagital  $\alpha_3 = 0.35$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos

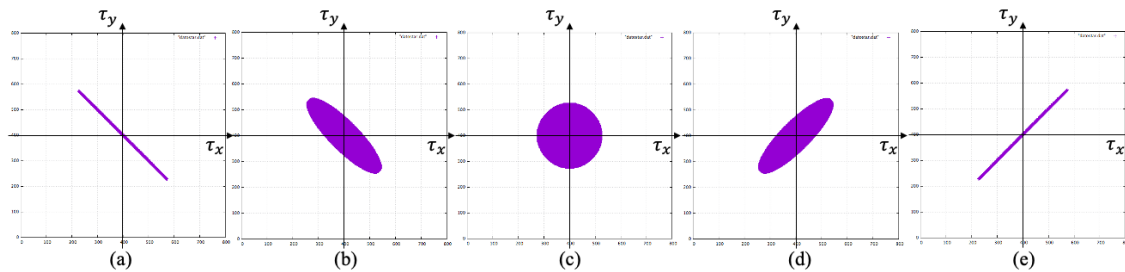


Figura 3.5: Diagrama de manchas con astigmatismo primario  $45^\circ$   $\alpha_4 = 0.5$  sobre (a) plano tangencial  $\alpha_3 = -0.35$ , (b) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (c) plano imagen gaussiano, (d) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , (e) plano sagital  $\alpha_3 = 0.35$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio  $\rho \leq 1$  para todos los casos

CAPÍTULO 3. DIAGRAMAS DE MANCHAS Y PATRONES DE IRRADIANCIA  
3.2. DIAGRAMAS DE MANCHAS

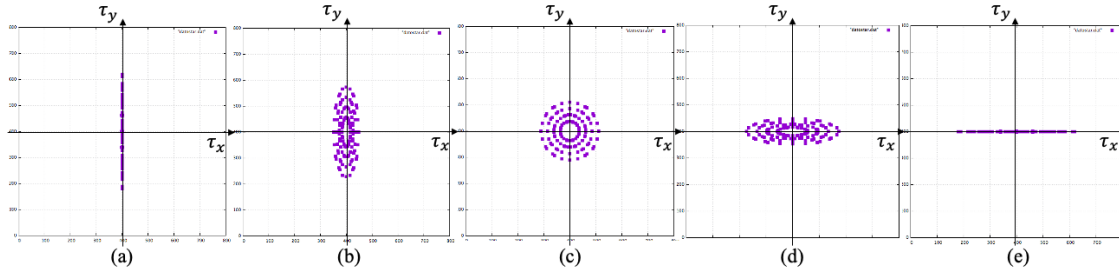


Figura 3.6: Diagrama de manchas con astigmatismo primario  $0^\circ$   $\alpha_5 = 0.5$  sobre (a) plano tangencial  $\alpha_3 = -0.35$ , (b) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (c) plano imagen gaussiano, (d) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , (e) plano sagital  $\alpha_3 = 0.35$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos

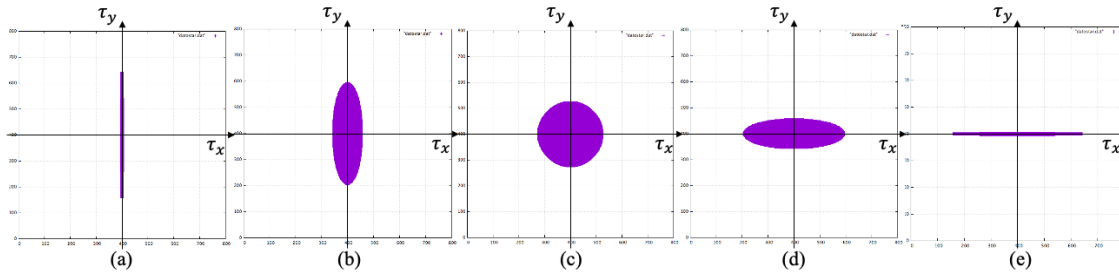


Figura 3.7: Diagrama de manchas con astigmatismo primario  $0^\circ$   $\alpha_5 = 0.5$  sobre (a) plano tangencial  $\alpha_3 = -0.35$ , (b) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (c) plano imagen gaussiano, (d) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , (e) plano sagital  $\alpha_3 = 0.35$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio  $\rho \leq 1$  para todos los casos

En el caso del astigmatismo primario  $45^\circ$  y  $0^\circ$ , en las figuras 3.4-3.7 se pueden observar los diagramas de manchas sobre los planos de mayor importancia encontrados en el capítulo anterior. Sobre los planos sagital y tangencial, el diagrama de manchas es una línea recta. Podemos trasladarnos fácilmente sobre el eje  $\tau_z$ , asignándole un valor al coeficiente de defoco  $\alpha_3$ . En estos, el diagrama que aparece es una elipse. Sobre el plano imagen gaussiano identificamos el círculo de mínima confusión.

### 3.2.4. Coma primaria alrededor de $y$ y $x$

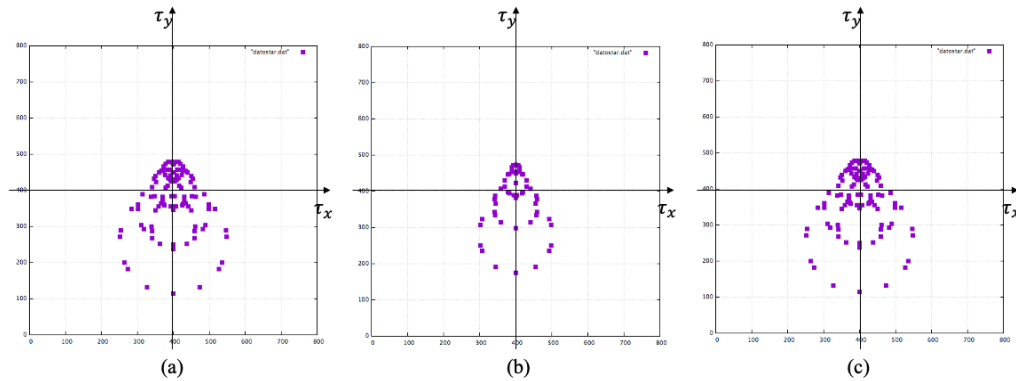


Figura 3.8: Diagrama de manchas con coma primaria alrededor  $y$   $\alpha_6 = 0.3$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos

**CAPÍTULO 3. DIAGRAMAS DE MANCHAS Y PATRONES DE IRRADIANCIA**  
**3.2. DIAGRAMAS DE MANCHAS**

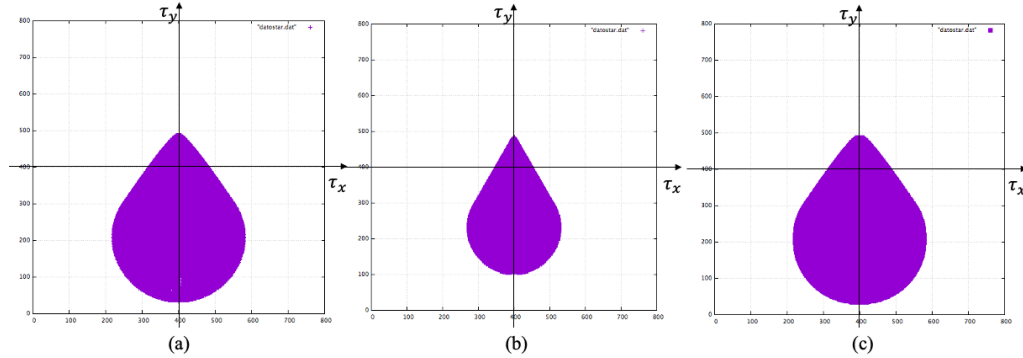


Figura 3.9: Diagrama de manchas con coma primaria alrededor de  $y$   $\alpha_6 = 0.3$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio  $\rho \leq 1$  para todos los casos

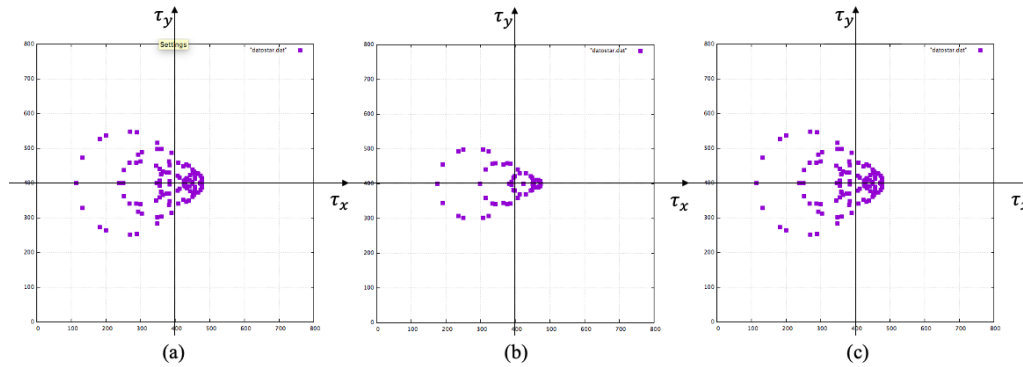


Figura 3.10: Diagrama de manchas con coma primaria alrededor  $x$   $\alpha_7 = 0.3$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos

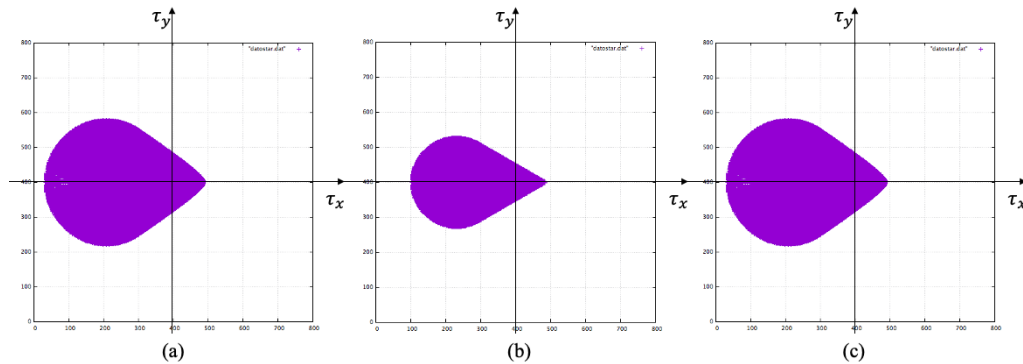


Figura 3.11: Diagrama de manchas con coma primaria alrededor de  $x$   $\alpha_7 = 0.3$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio  $\rho \leq 1$  para todos los casos

En el caso de la coma primaria alrededor de  $y$  y  $x$ , un anillo de rayos que emerge de la pupila de salida se mapea sobre el plano imagen gaussiano como un anillo. Esto puede notarse en las figuras 3.8a y 3.10a. Fuera del plano imagen gaussiano, en la sección 2.2.6 se dedujo que cada anillo se mapearía como una cardiode. Este fue el resultado que se obtuvo en los diagramas de manchas de las figuras 3.8b y 3.10b. En ambos casos, la contribución de los anillos de radio  $\rho \leq 1$  da como

resultado la forma de “coma” de la figura 3.11. Notar también de la figura 3.10 que la concentración de puntos se da en la “punta” de las comas.

### 3.2.5. Aberración 8 y 9

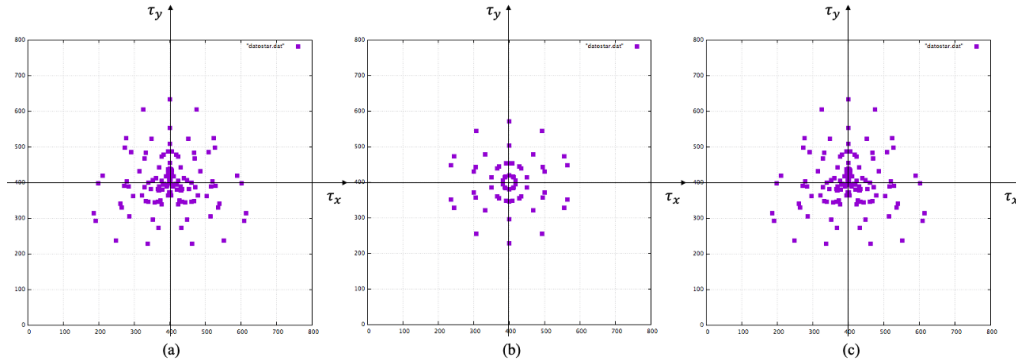


Figura 3.12: Diagrama de manchas con aberración 8  $\alpha_8 = 0.5$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos

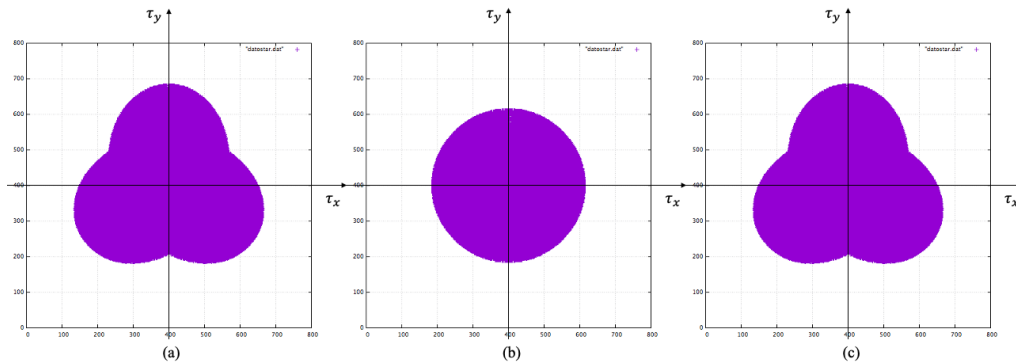


Figura 3.13: Diagrama de manchas con aberración 8  $\alpha_8 = 0.5$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio  $\rho \leq 1$  para todos los casos

En el capítulo anterior se hizo el análisis de las aberraciones 8 y 9 y se encontró que, tal como se observa en las figuras 3.13a y 3.15a, el diagrama de manchas sobre el plano imagen gaussiano tiene la forma de un círculo. En las figuras 3.12b-c y 3.14b-c se pueden identificar las curvas resultantes de 4 anillos de rayos que emergen de la pupila de salida y llegan a un plano de observación  $t_z \neq 0$ . Estas curvas fueron analizadas en la sección 2.2.8; la contribución de todas ellas da como resultado el patrón de las figuras 3.13b y 3.13c para la aberración 8, y las figuras 3.15b y 3.15c para la aberración 9. En estos 2 casos vale la pena resaltar que hay una mayor concentración de puntos alrededor del centro del patrón.

**CAPÍTULO 3. DIAGRAMAS DE MANCHAS Y PATRONES DE IRRADIANCIA**  
**3.2. DIAGRAMAS DE MANCHAS**

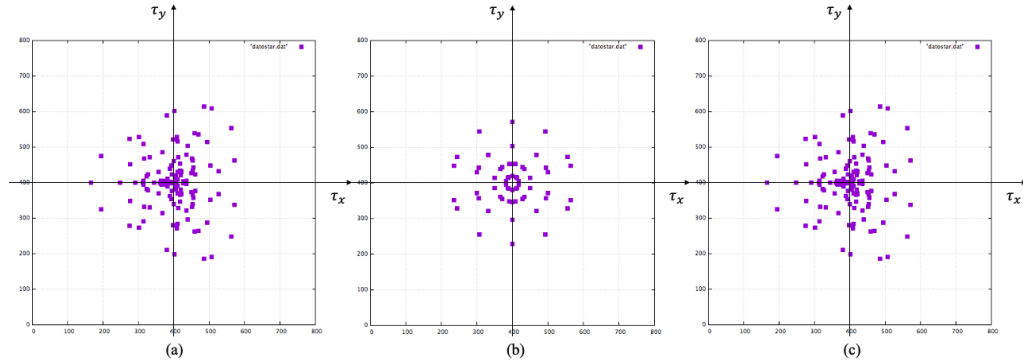


Figura 3.14: Diagrama de manchas con aberración 9  $\alpha_9 = 0.5$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos

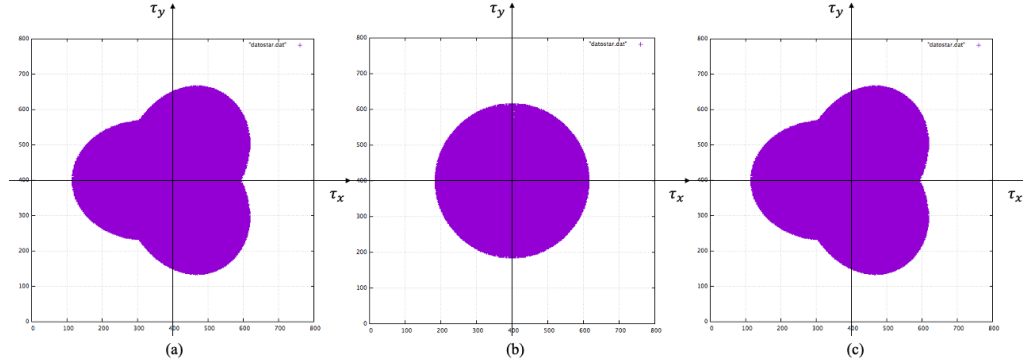


Figura 3.15: Diagrama de manchas con aberración 9  $\alpha_9 = 0.5$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio  $\rho \leq 1$  para todos los casos

**3.2.6. Esférica primaria**

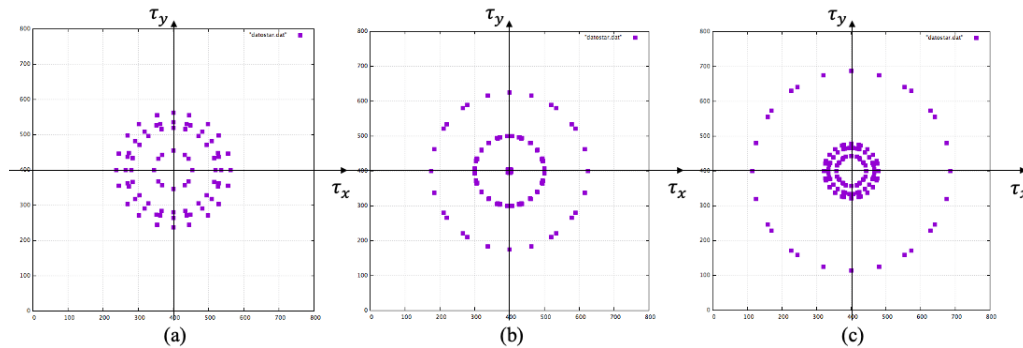


Figura 3.16: Diagrama de manchas con esférica primaria  $\alpha_{10} = 0.3$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos

CAPÍTULO 3. DIAGRAMAS DE MANCHAS Y PATRONES DE IRRADIANCIA  
3.2. DIAGRAMAS DE MANCHAS

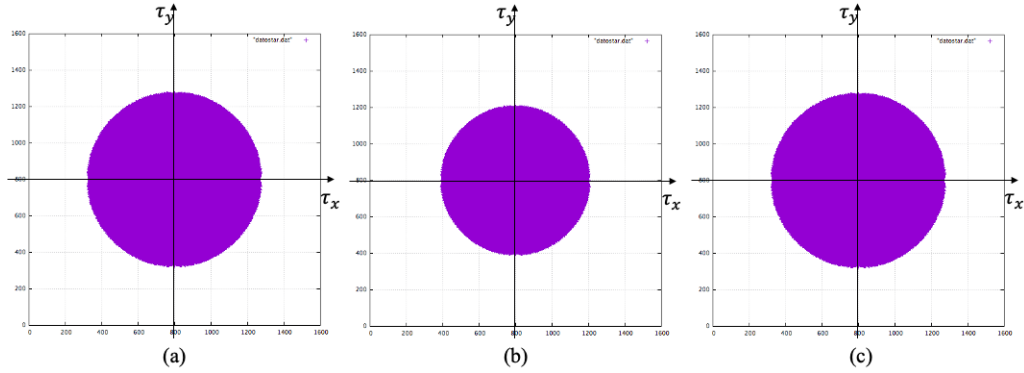


Figura 3.17: Diagrama de manchas con esférica primaria  $\alpha_{10} = 0.3$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio  $\rho \leq 1$  para todos los casos

Tal y como se analizó en el capítulo anterior, ante la presencia de esférica primaria, un anillo de rayos de radio  $\rho$  que emerge de la pupila de salida se mapea sobre el plano imagen gaussiano en una circunferencia centrada en el punto imagen gaussiano (figuras 3.16a y 3.17a). En las figuras 3.16b-c y 3.17b-c se muestra el diagrama sobre 2 planos en los que  $t_z \neq 0$  y se puede notar un incremento en el radio del círculo.

3.2.7. Astigmatismo secundario  $0^\circ$  y Astigmatismo secundario  $45^\circ$

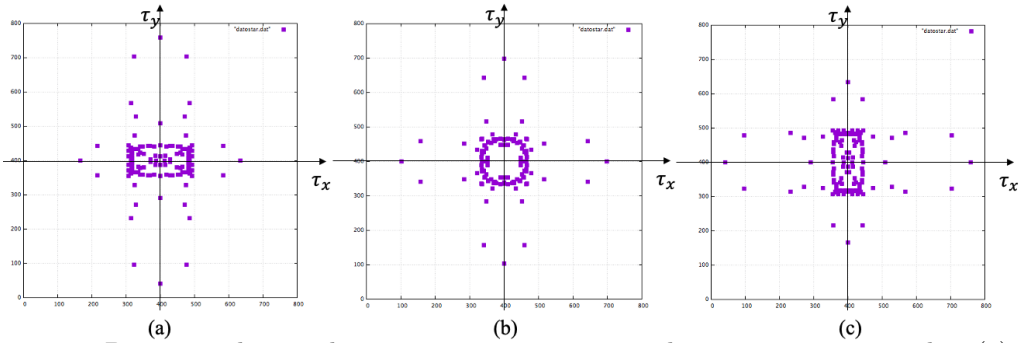


Figura 3.18: Diagrama de manchas con astigmatismo secundario  $0^\circ$   $\alpha_{11} = 0.3$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano, (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos

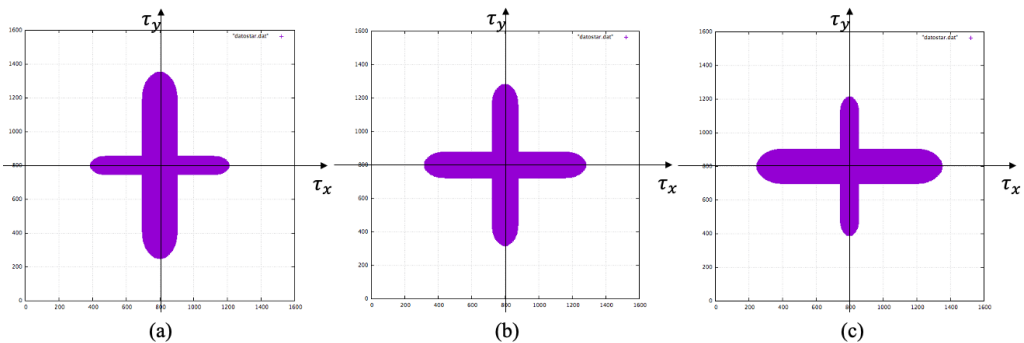


Figura 3.19: Diagrama de manchas con astigmatismo secundario  $0^\circ$   $\alpha_{11} = 0.3$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano, (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio  $\rho \leq 1$  para todos los casos

CAPÍTULO 3. DIAGRAMAS DE MANCHAS Y PATRONES DE IRRADIANCIA  
 3.2. DIAGRAMAS DE MANCHAS

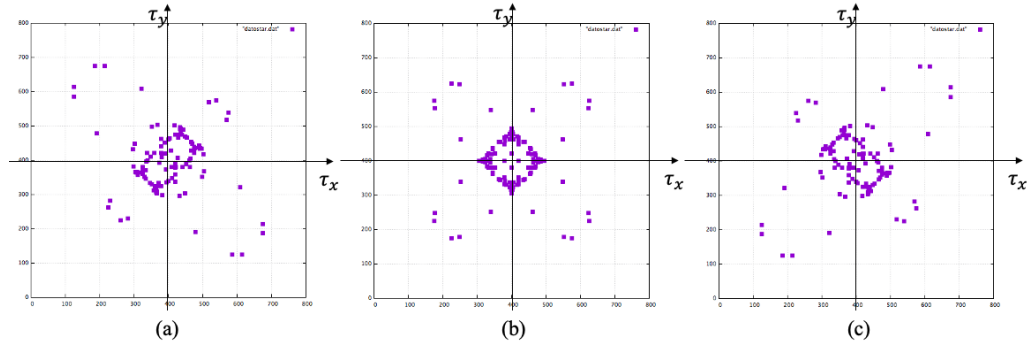


Figura 3.20: Diagrama de manchas con astigmatismo secundario  $45^\circ$   $\alpha_{12} = 0.3$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano, (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos

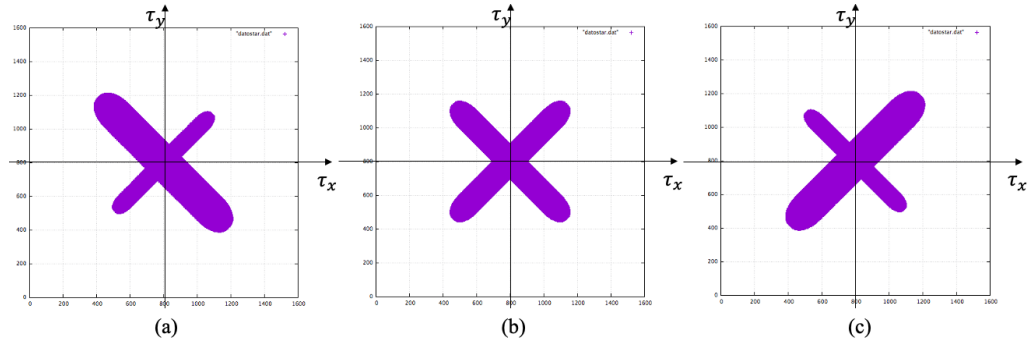


Figura 3.21: Diagrama de manchas con astigmatismo secundario  $45^\circ$   $\alpha_{12} = 0.3$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano, (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio  $\rho \leq 1$  para todos los casos

En los casos del astigmatismo secundario  $0^\circ$  y  $45^\circ$  se obtienen los mismos diagramas de manchas, con una diferencia de rotación. En ambos casos, en el plano imagen gaussiano se obtiene una diagrama en forma de cruz. Al hacer una traslación sobre el eje  $\tau_z$  pueden notarse modificaciones los "brazos" de la cruz, los cuales se agrandarán o reducirán dependiendo del signo del desplazamiento sobre  $\tau_z$ . Esto puede observarse en las figuras 3.19 y 3.21. Vale la pena mencionar que hay una concentración de puntos en una pequeña sección alrededor del centro del diagrama (ver figuras 3.18 y 3.20).

3.2.8. Aberración 13

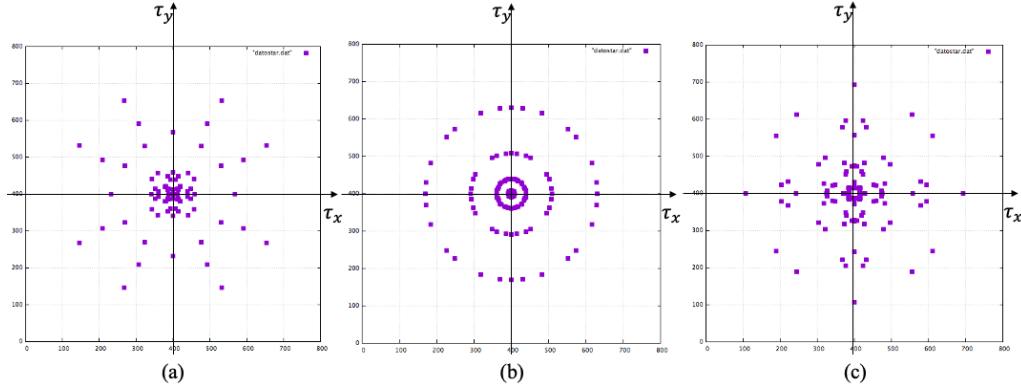


Figura 3.22: Diagrama de manchas con aberración 13  $\alpha_{13} = 0.5$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos

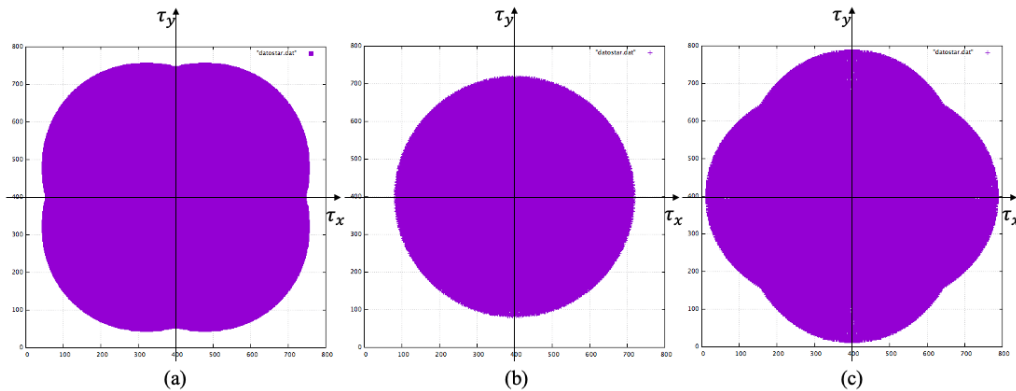


Figura 3.23: Diagrama de manchas con aberración 13  $\alpha_{13} = 0.5$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio  $\rho \leq 1$  para todos los casos

Al estudiar la aberración 13 en la sección 2.2.13, se hizo un análisis de las curvas resultantes en el plano imagen gaussiano y planos  $t_z \neq 0$ . En ambos casos, estas curvas pueden identificarse en las figura 3.22, donde se mapean únicamente 4 anillos que emergen de la pupila de salida. La contribución de los anillos de radio  $\rho \leq 1$  da como resultado los patrones que se observan en la figura 3.23

3.2.9. Aberración 14

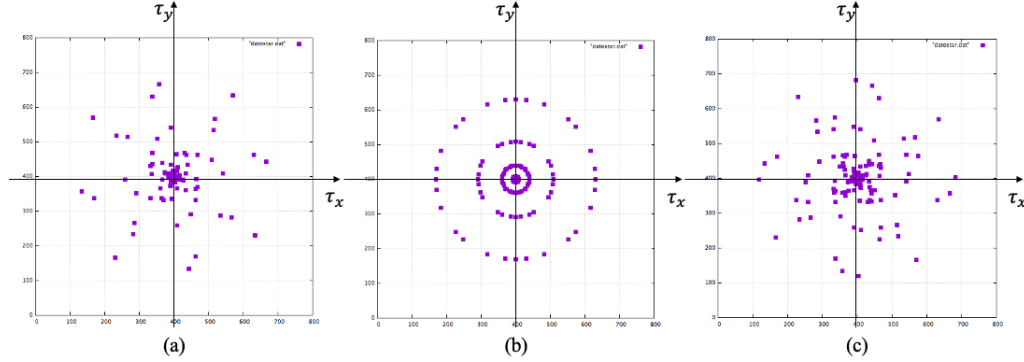


Figura 3.24: Diagrama de manchas con aberración 14  $\alpha_{14} = 0.5$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , considerando 4 anillos que emergen de la pupila de salida para todos los casos

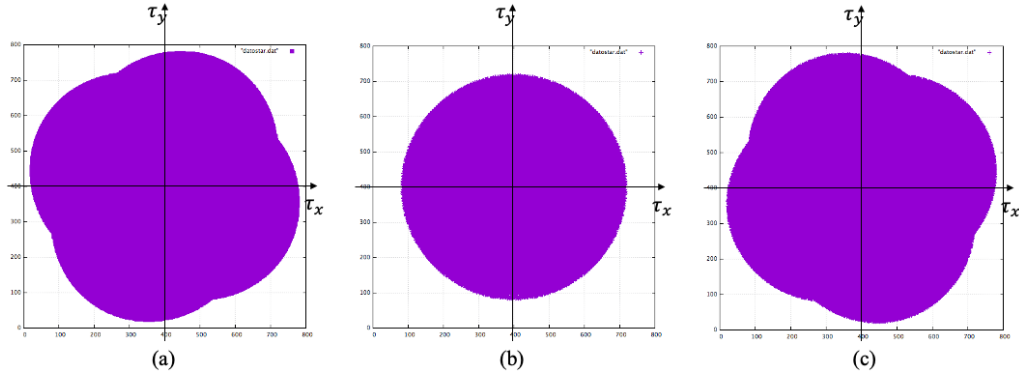


Figura 3.25: Diagrama de manchas con aberración 14  $\alpha_{14} = 0.5$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$ , considerando anillos que emergen de la pupila de salida, con radio  $\rho \leq 1$  para todos los casos

Al tener presente la aberración 14, se obtendrán resultados similares a los de la aberración anterior. En el plano imagen gaussiano, un anillo de rayos de radio  $\rho$  que emerge de la pupila de salida produce un anillo concéntrico con el punto imagen gaussiano, obteniéndose un diagrama de manchas con forma de círculo (figura 3.25a). Por otro lado, fuera del plano imagen gaussiano, los anillos que emergen de la pupila de salida generan cicloides (figuras 3.24b y 3.24c), obteniendo los diagramas de manchas de las figuras 3.25b y 3.25c.

### 3.3. Patrones de irradiancia

El mismo cálculo hecho para obtener los diagramas de manchas en la sección anterior se repite para una gran cantidad de rayos (el número de rayos afecta el tiempo de cálculo) que emergen sobre una cuadrícula de la pupila de salida del sistema óptico, se suma el número de éstos que llegan a cada píxel y se asume que este número es proporcional a la irradiancia (Smith,1966). A continuación, se presentan los patrones de irradiancia calculados con los mismos coeficientes de Zernike de la sección 3.2, considerando 2000 puntos que salen de la pupila de salida; los patrones de irradiancia son normalizados.

#### 3.3.1. Inclinación alrededor de $y$ y $x$

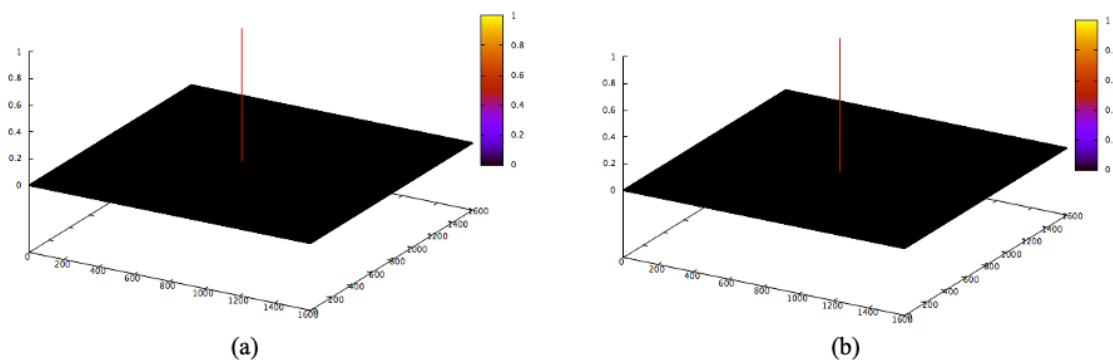


Figura 3.26: Patrón de irradiancia con (a)  $\alpha_1 = 0.5$  y (b)  $\alpha_2 = 0.5$  sobre el plano imagen gaussiano

En ambos casos se obtuvo el patrón de irradiancia que se esperaba; debido a que todos los rayos se concentran en un solo punto, lo mismo sucede con la energía.

#### 3.3.2. Defoco

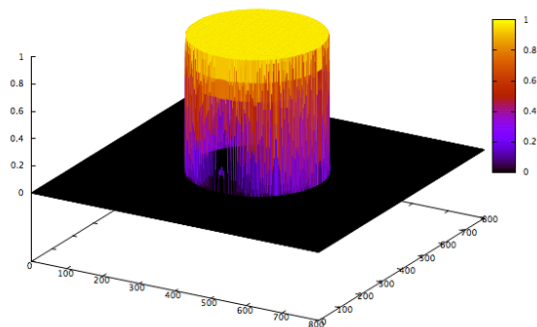


Figura 3.27: Patrón de irradiancia con defoco  $\alpha_3 = 0.5$  sobre el plano imagen gaussiano

En el caso del defoco, en el patrón de irradiancia de la figura anterior puede observarse una distribución homogénea de la energía sobre un círculo. Al modificar el valor del defoco, la energía se distribuirá sobre un círculo de mayor o menor área según el caso.

3.3.3. Astigmatismo primario  $45^\circ$  y  $0^\circ$

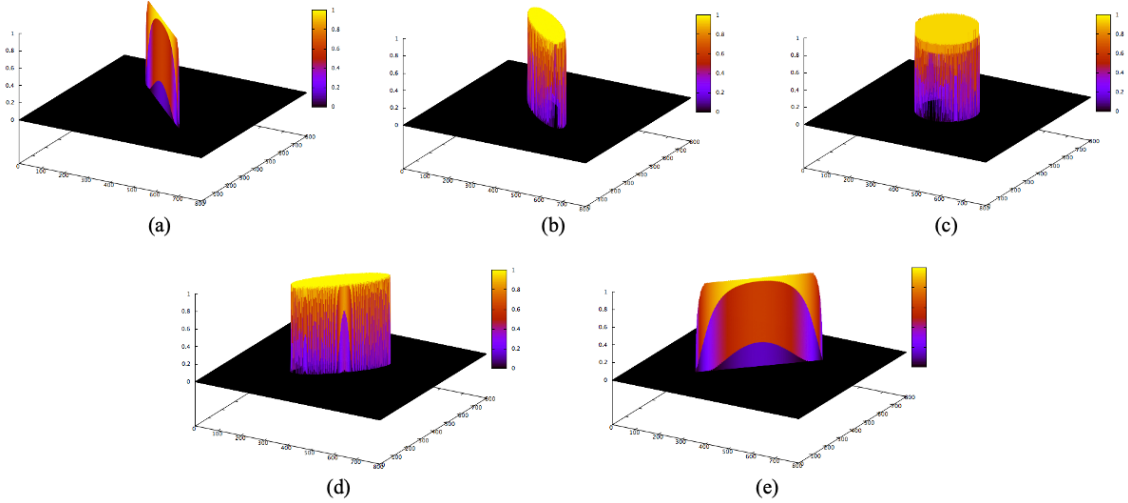


Figura 3.28: Patrones de irradiancia producidos por astigmatismo primario  $45^\circ$   $\alpha_4 = 0.5$  sobre (a) plano tangencial  $\alpha_3 = -0.35$ , (b) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (c) plano imagen gaussiano, (d) plano  $\alpha_3 = 0.2$  y (e) plano sagital  $\alpha_3 = 0.35$

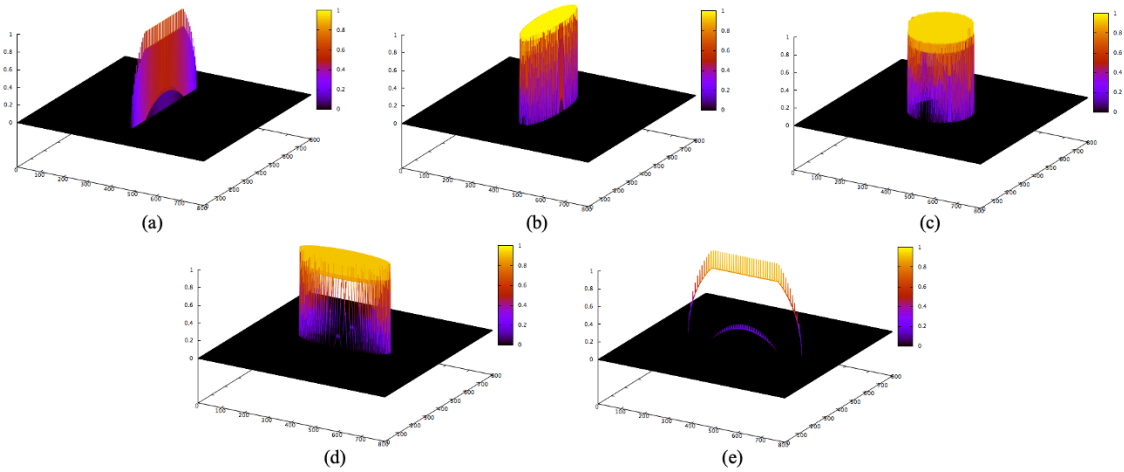


Figura 3.29: Patrones de irradiancia producidos por astigmatismo primario  $0^\circ$   $\alpha_5 = 0.5$  sobre (a) plano tangencial  $\alpha_3 = -0.35$ , (b) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (c) plano imagen gaussiano, (d) plano  $\alpha_3 = 0.2$  y (e) plano sagital  $\alpha_3 = 0.35$

Ante la presencia de astigmatismo primario  $45^\circ$  o  $0^\circ$ , la energía se distribuye de forma homogénea sobre los distintos patrones que se generan al cambiar de plano imagen.

### 3.3.4. Coma primaria alrededor de $y$ y de $x$

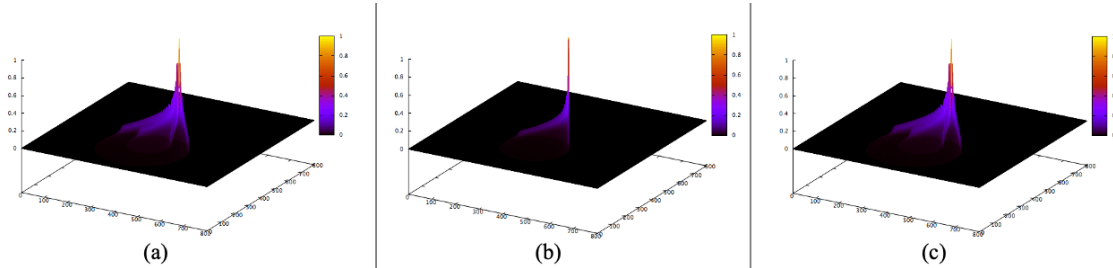


Figura 3.30: Patrones de irradiancia producidos por coma primaria alrededor de  $y$   $\alpha_6 = 0.3$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$

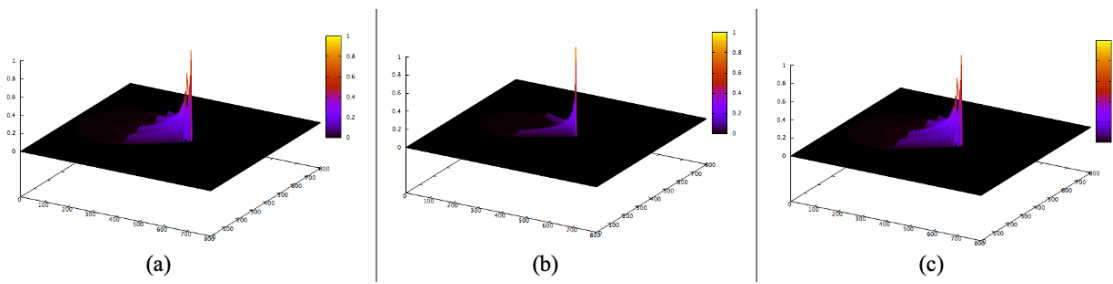


Figura 3.31: Patrones de irradiancia producidos por coma primaria alrededor de  $x$   $\alpha_7 = 0.3$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$

Cuando se presenta coma primaria alrededor de  $y$  o de  $x$ , los patrones de las figuras 3.30 y 3.31 nos indican que existe una alta concentración de energía en las puntas de la coma, con una disminución a lo largo del contorno. Por otro lado, puede notarse una diferencia en el patrón de irradiancia al cambiar de plano imagen; mientras que en el plano imagen gaussiano existe un pico de energía en la punta, al trasladarnos adelante o atrás (figuras 3.30a-c y 3.31a-c) aparece un segundo pico de energía menor muy cercano al primero.

### 3.3.5. Aberración 8 y 9

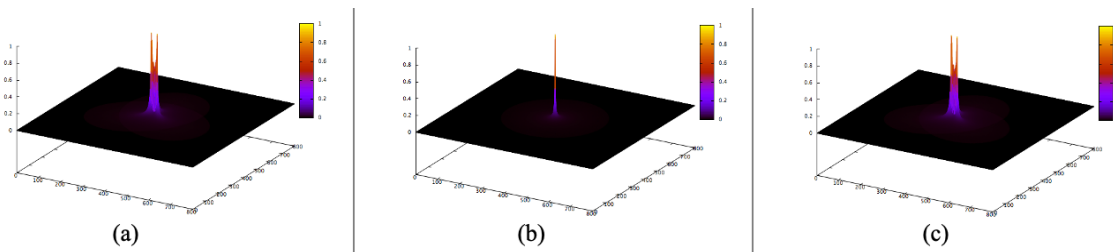


Figura 3.32: Patrones de irradiancia producidos por aberración 8  $\alpha_8 = 0.5$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$

Los patrones de irradiancia que se presentan en las figuras 3.32 y 3.33 muestran que un frente de onda con aberración 8 o 9 producirá una imagen con alta concentración de energía en el centro del patrón. Al posicionarnos en el plano imagen gaussiano, la concentración energética es sobre el centro del círculo en un pico, mientras que para otros planos, la energía se distribuye sobre un área central de mayor tamaño y de forma inhomogénea.

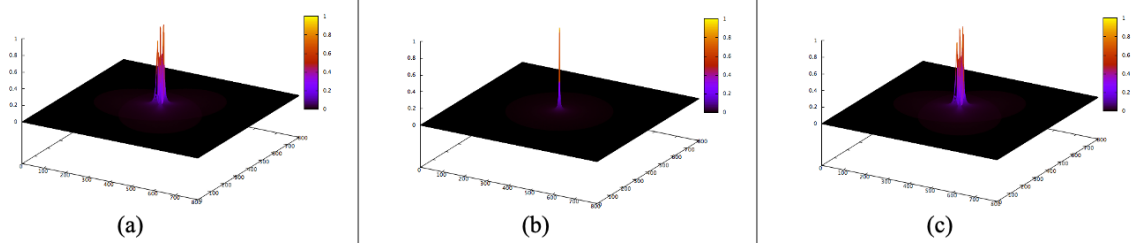


Figura 3.33: Patrones de irradiancia producidos por aberración 9  $\alpha_9 = 0.5$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$

### 3.3.6. Esférica primaria

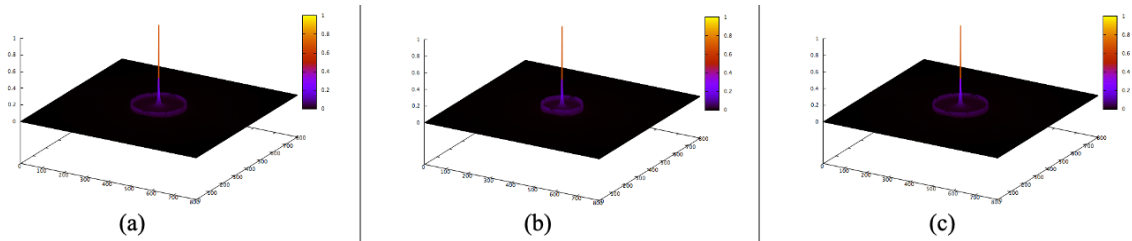


Figura 3.34: Patrones de irradiancia producidos por esférica primaria  $\alpha_{10} = 0.3$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$

En la sección anterior se observó en los diagramas de manchas un incremento en el radio del patrón producido por la esférica primaria cuando se hace una traslación sobre el eje  $\tau_z$ . Sucede algo similar en los patrones de irradiancia, en los que pueden identificarse 2 concentraciones principales de energía. La mayor concentración se da en el centro del patrón con un pico energético. La segunda, mucho menor, forma una circunferencia. Este tipo de concentraciones se hallan tanto en el plano imagen gaussiano como fuera de él.

3.3.7. Astigmatismo secundario  $0^\circ$  y  $45^\circ$

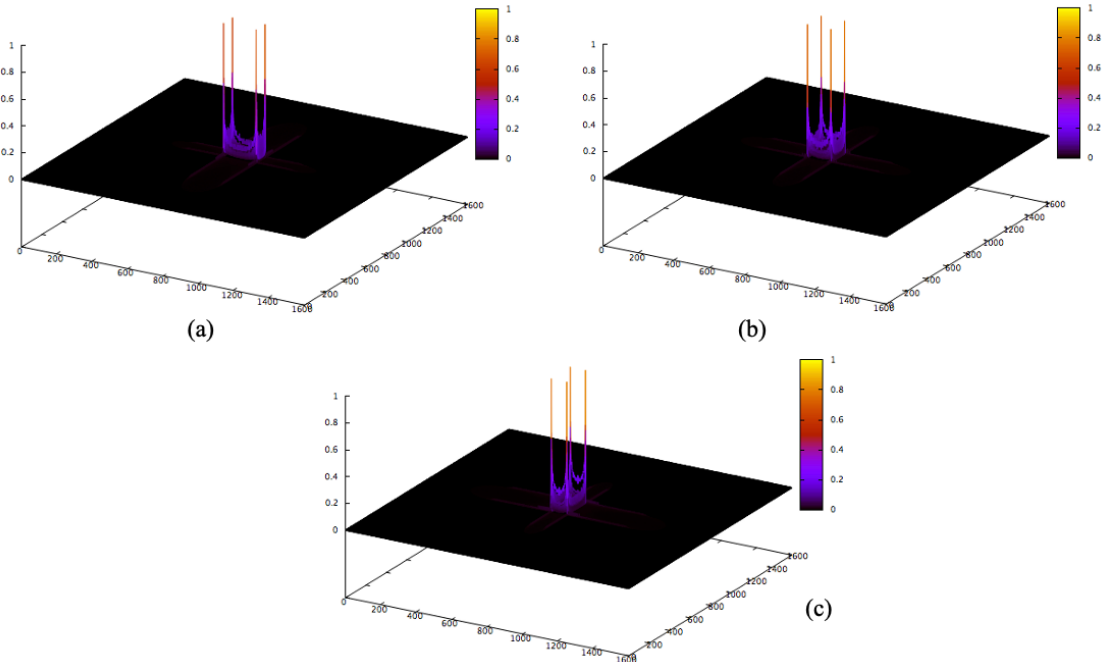


Figura 3.35: Patrones de irradiancia producidos por astigmatismo secundario  $0^\circ$   $\alpha_{11} = 0.3$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$

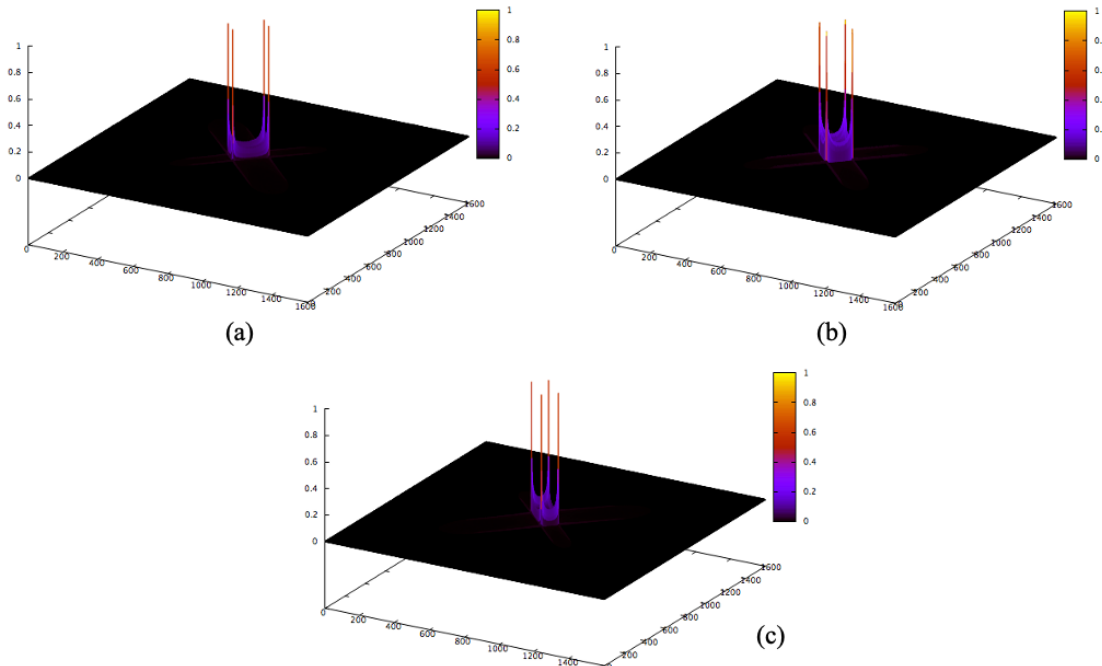


Figura 3.36: Patrones de irradiancia producidos por astigmatismo secundario  $45^\circ$   $\alpha_{12} = 0.3$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$

Anteriormente, se calcularon los diagramas de manchas producidos por el astigmatismo secun-

dario  $0^\circ$  y  $45^\circ$ . Los diagramas mostraban la forma de una cruz. Esta forma de cruz se ve débilmente en los patrones de irradiancia. La concentración principal de energía se da en el intersección de los “brazos” de la cruz, principalmente en 4 puntos (ver figuras 3.35 y 3.36). Esto se cumple para todos los casos.

### 3.3.8. Aberración 13 y 14

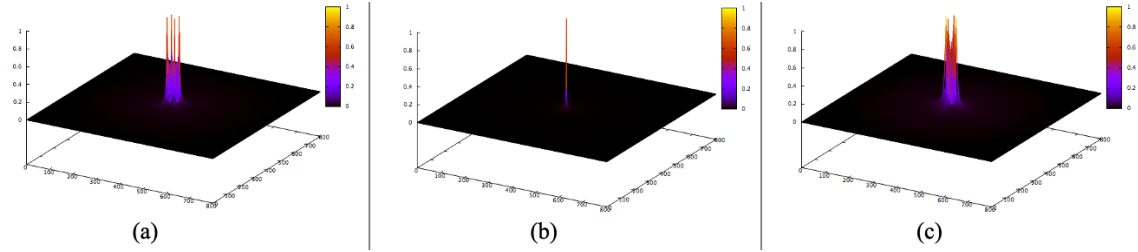


Figura 3.37: Patrones de irradiancia producidos por aberración 13  $\alpha_{13} = 0.5$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$

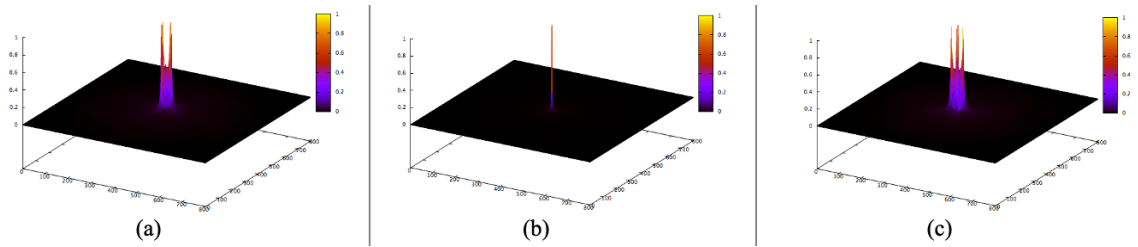


Figura 3.38: Patrones de irradiancia producidos por aberración 14  $\alpha_{14} = 0.5$  sobre (a) plano  $\alpha_3 = -0.2$ , (b) plano imagen gaussiano y (c) plano  $\alpha_3 = 0.2$

Los casos de la aberración 13 y la aberración 14 son muy similares a los de las aberraciones 8 y 9. En el plano imagen Gaussiano los rayos se concentran en el centro del patrón sobre un punto, mientras que para un  $t_z$  dado, la energía se concentra sobre un área mayor de forma inhomogénea.

### 3.3.9. Otros ejemplos con más de 1 aberración

#### Ejemplo 1

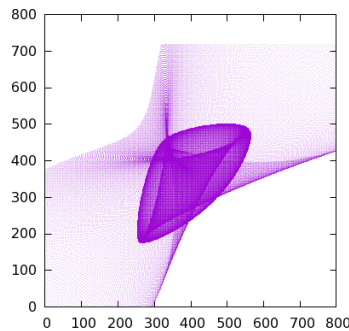


Figura 3.39: Diagrama de manchas producido por un frente de onda con coma primaria  $y$   $\alpha_6 = -0.2$ , esférica  $\alpha_{10} = 0.4$  y astigmatismo secundario  $45^\circ$   $\alpha_{12} = 0.3$

CAPÍTULO 3. DIAGRAMAS DE MANCHAS Y PATRONES DE IRRADIANCIA  
 3.3. PATRONES DE IRRADIANCIA

---

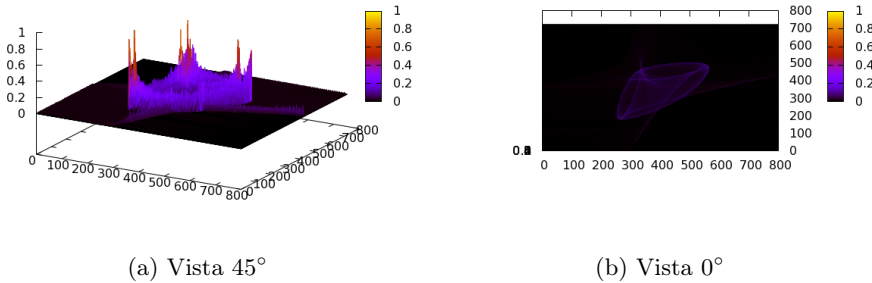


Figura 3.40: Patrón de irradiancia producido por un frente de onda con coma primaria  $y$   $\alpha_6 = -0.2$ , esférica  $\alpha_{10} = 0.4$  y astigmatismo secundario 45°  $\alpha_{12} = 0.3$

**Ejemplo 2**

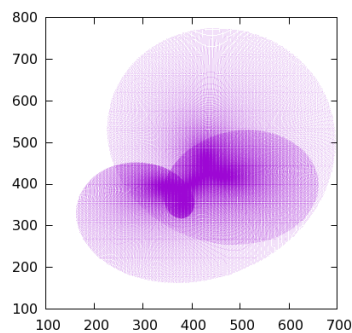


Figura 3.41: Diagrama de manchas producido por un frente de onda con defoco  $\alpha_3 = 0.2$ , astigmatismo primario 45°  $\alpha_4 = 0.2$ , aberración 8  $\alpha_8 = 0.3$  y aberración 13  $\alpha_{13} = 0.25$

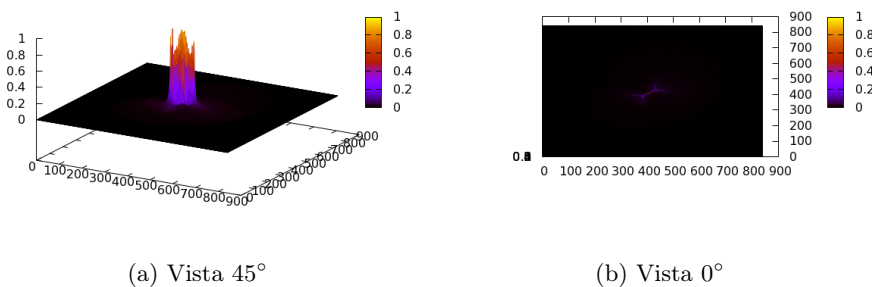


Figura 3.42: Patrón de irradiancia producido por un frente de onda con defoco  $\alpha_3 = 0.2$ , astigmatismo primario 45°  $\alpha_4 = 0.2$ , aberración 8  $\alpha_8 = 0.3$  y aberración 13  $\alpha_{13} = 0.25$

### 3.4. FOOSS

Free Online Optical Shop Software (FOOSS) es una plataforma de acceso libre en la red, desarrollada por miembros de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la BUAP. Esta contiene herramientas y una serie de programas para la enseñanza, investigación y realización de pruebas ópticas. En este contexto, por la utilidad que tienen los cálculos de patrones de irradiancia en la práctica, el programa aquí presentado ha sido agregado a esta plataforma como parte de las herramientas ópticas que ofrece FOOSS, en la sección Irradiance Pattern.

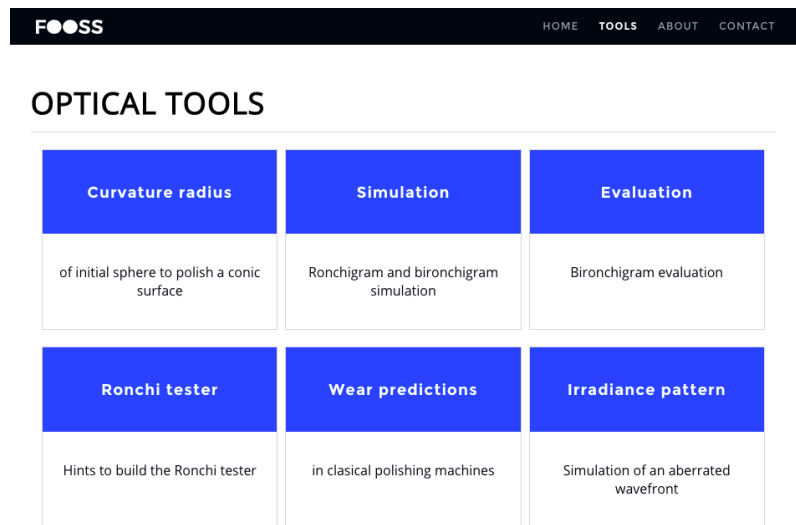


Figura 3.43: Optical Tools, FOOSS

El usuario se encuentra con un entorno de uso intuitivo, en el que podrá diseñar su sistema, estableciendo los parámetros del CCD, tamaño de la pupila de salida, longitud del radio de curvatura del frente de onda y longitud de onda, así como asignar el valor a los 14 coeficientes de Zernike con los que se trabaja. Todos los resultados pueden ser descargados de forma gratuita de la plataforma.

Liga: <https://www.fcfm.buap.mx/cslab/fooss/>

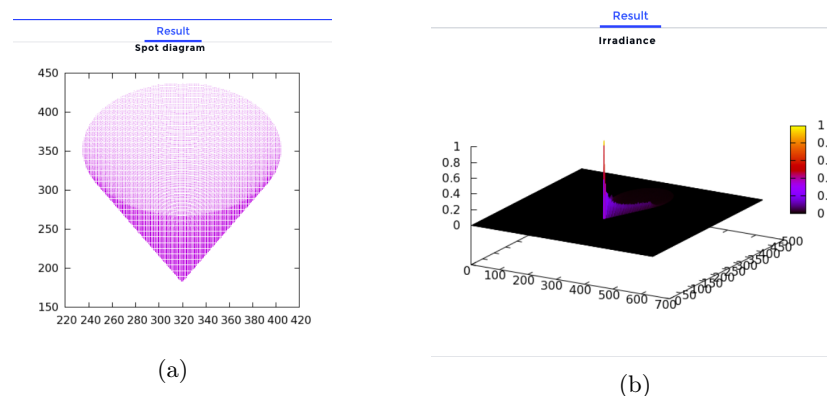


Figura 3.44: Resultados disponibles para descarga

### 3.5. Conclusiones

En este capítulo se describió el programa de cómputo que se desarrolló a partir del análisis hecho en el capítulo 2. Con las expresiones para las componentes de la aberración transversal se pueden calcular los diagramas de manchas e, incorporando las ideas de Smith, los patrones de irradiancia que produce un sistema óptico. Para los 14 polinomios analizados se presentaron los diagramas de manchas y patrones de irradiancia calculados con el programa, identificando las zonas del patrón en las que se concentra mayor cantidad de energía. Además, se presentan un par de ejemplos con valores asignados a diferentes coeficientes de Zernike.

En la práctica, para obtener las imágenes producidas por un sistema óptico, se incorporan detectores CCD o CMOS al sistema. De ahí la importancia de calcular los patrones de irradiancia, pues proporcionan noción de las imágenes que se obtendrían en un sistema real. Por esta razón, el programa aquí descrito forma parte de FOOSS, una plataforma de acceso libre con herramientas digitales de óptica.

## Capítulo 4

# Conclusiones Generales

En este trabajo de tesis se realizó un análisis de los invariantes de un sistema óptico axialmente simétrico de la función de aberración  $W$  como una expansión en serie de potencias.

Además, se realizó un análisis de la función de aberración  $W$ , descrita con los polinomios de Zernike; debido a la naturaleza de los polinomios (un conjunto ortonormal completo), con este enfoque es posible describir frentes de onda que no tienen simetría que emergen de un sistema óptico.

Por otro lado, se trabajó en un programa de cómputo que puede calcular la forma del frente de onda que emerge de la pupila de salida de un sistema, el diagrama de manchas producido por el frente y el patrón de irradiancia en el plano de observación sobre un detector. Los cálculos se realizan a partir de las ecuaciones de aberración transversal, deducidas por Rayces.

Con ese programa se calculó la forma del diagrama de manchas para ciertos coeficientes de Zernike dados y se comparó con los resultados obtenidos en el análisis de los polinomios de Zernike. Se encontró que en todos los casos coincide la parte matemática con la forma de los diagramas.

Posteriormente, se calculó el patrón de irradiancia para coeficientes de Zernike dados y se identificaron las zonas dentro del patrón con mayor concentración de energía.

Resta decir que el programa aquí presentado sirve para cálculos de diagramas de manchas y patrones de irradiancia de cualquier sistema, pues no toma en cuenta el sistema óptico, sino los planos de la pupila de salida y el de observación. Además, el usuario del programa puede simular en el plano de observación un detector de tamaño variable con píxeles rectangulares, de los cuales también puede definir las dimensiones.



## Apéndice A

# Obtención de los puntos que definen una Cardiode

A partir de la ecuación 2.26

$$[t_x + a \cos(\theta)]^2 + \left[ t_y + a \sin \theta - b\rho^2 + \frac{b}{3} \right]^2 = \left[ \frac{b}{2}\rho^2 \right]^2 \quad (\text{A.1})$$

Los puntos para los que  $t_x = 0$

$$-a \cos \theta + b\rho^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\Rightarrow \cos \theta [-a + b\rho^2 \sin \theta] = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = 0 \quad \vee \quad -a + b\rho^2 \sin \theta = 0$$

### Caso 1

$$\cos \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = \pm 1$$

Sustituyendo en la ecuación 2.25

$$t_y = \mp a + 2b\rho^2 - \frac{b}{3}$$

Así:

$$A_{\pm}^{\pm} = \left[ 0, \mp a + 2b\rho^2 - \frac{b}{3} \right] \quad (\text{A.4})$$

### Caso 2

$$-a + b\rho^2 \sin \theta = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{a}{b\rho^2} \quad (\text{A.6})$$

Sustituyendo en la ecuación 2.25

$$t_y = \frac{b}{2}\rho^2 - \frac{b}{3} \quad (\text{A.7})$$

**APÉNDICE A. OBTENCIÓN DE LOS PUNTOS QUE DEFINEN UNA  
CARDIODE**

---

Por lo tanto:

$$B = \left[ 0, \frac{b}{2}\rho^2 - \frac{b}{3} \right] \quad (\text{A.8})$$

Ahora, para saber si son extremos de  $t_y$ , se debe cumplir que:

$$\frac{\partial t_y}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Esto es:

$$-a \cos \theta + 2b\rho^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\Rightarrow \cos \theta [-a + 2b\rho^2 \sin \theta] = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = 0 \quad \vee \quad -a + 2b\rho^2 \sin \theta = 0$$

**Caso 1**

$$\cos(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta) = \pm 1$$

Entonces  $A_{\pm}^+$  son extremos.

**Caso 2**

$$-a + 2b\rho^2 \sin \theta = 0 \quad (\text{A.12})$$

Entonces

$$\sin \theta = \frac{a}{2b\rho^2} \quad (\text{A.13})$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \left( \frac{a}{2b\rho^2} \right)^2} \quad (\text{A.14})$$

Y

$$t_x = \mp \sqrt{1 - \left( \frac{a}{2b\rho^2} \right)^2} \left( \frac{a}{2} \right) \quad (\text{A.15})$$

$$t_y = \frac{-a^2}{4b\rho^2} + \frac{b}{2}\rho^2 - \frac{b}{3}$$

Es decir, los puntos:

$$C_{\pm}^+ = \left[ \mp \sqrt{1 - \left( \frac{a}{2b\rho^2} \right)^2} \left( \frac{a}{2} \right), \frac{-a^2}{4b\rho^2} + \frac{b}{2}\rho^2 - \frac{b}{3} \right] \quad (\text{A.16})$$

Son extremos de  $t_y$

Los puntos para los que  $t_y = 0$

$$a \sin \theta + b\rho^2 \sin^2 \theta + \frac{b}{2}\rho^2 - \frac{b}{3} = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2b^2\rho^2 \left( \rho^2 - \frac{2}{3} \right)}}{2b\rho^2} \quad (\text{A.18})$$

**APÉNDICE A. OBTENCIÓN DE LOS PUNTOS QUE DEFINEN UNA  
CARDIODE**

---

$$\Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \left( \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2b^2\rho^2 \left(\rho^2 - \frac{2}{3}\right)}}{2b\rho^2} \right)^2} \quad (\text{A.19})$$

Lo que nos da los siguientes puntos (definidos por elección de los signos de los radicales):

$$D_{\pm\pm} = \left[ \pm \sqrt{1 - \left( \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2b^2\rho^2 \left(\rho^2 - \frac{2}{3}\right)}}{2b\rho^2} \right)^2} \left( -a + \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2b^2\rho^2 \left(\rho^2 - \frac{2}{3}\right)}}{2} \right), 0 \right] \quad (\text{A.20})$$

Para encontrar los extremos de  $t_x$ , debemos ver que:

$$\frac{\partial t_x}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{A.21})$$

Esto es:

$$a \sin \theta + b\rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$\Leftrightarrow a \sin \theta + b\rho^2 (1 - 2 \sin^2 \theta) = 0 \quad (\text{A.23})$$

Resolviendo la ecuación, llegamos a las soluciones:

$$\sin \theta = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8b^2\rho^4}}{2b\rho^2} \quad (\text{A.24})$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \left( \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8b^2\rho^4}}{2b\rho^2} \right)^2} \quad (\text{A.25})$$

Obteniendo los puntos con coordenadas

$$Ejhjhgh \quad (\text{A.26})$$

Dependientes del signo de  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$ .

APÉNDICE A. OBTENCIÓN DE LOS PUNTOS QUE DEFINEN UNA  
CARDIODE

---

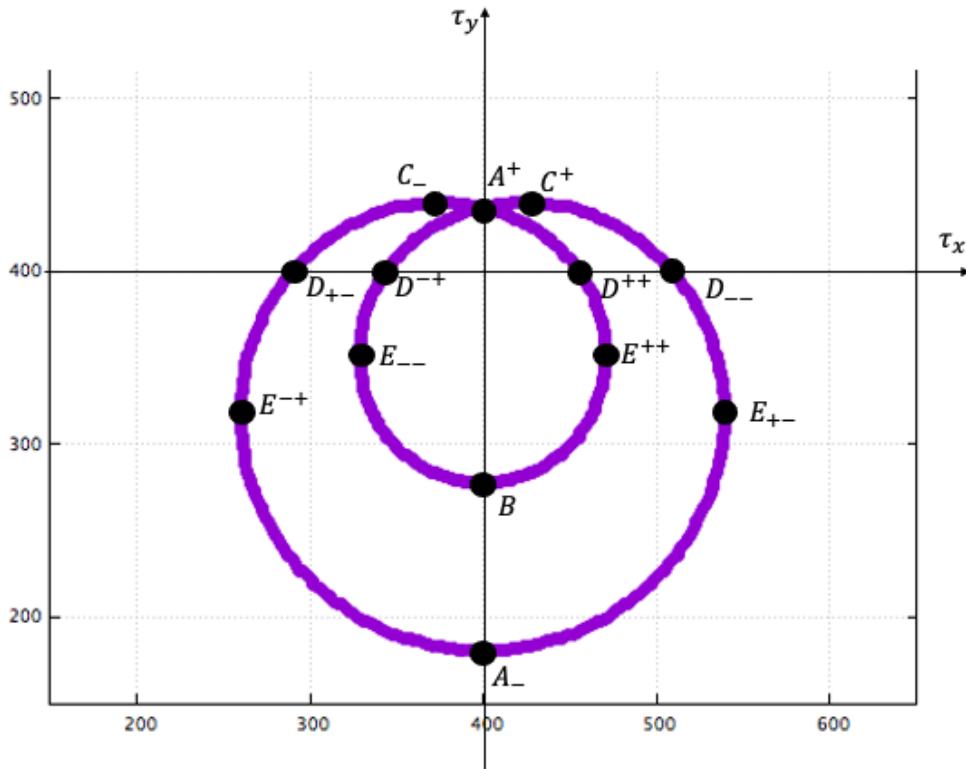


Figura A.1: Cardiode obtenida con coma  $\alpha_6 = 0.5$  para  $\rho = 0.7$  cuando  $t_z \neq 0$  con los puntos que definen la curva

## Apéndice B

# Curva obtenida fuera del plano imagen gaussiano (Aberración 8)

Las ecuaciones 2,29 pueden ser escritas en coordenadas polares como:

$$\begin{aligned}t_x &= -a \cos \theta + b \cos \theta \sin \theta \\t_y &= -a \sin \theta + \frac{b}{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\end{aligned}\tag{B.1}$$

Si

$$a = \frac{\rho \cos \theta t_z}{R} \quad \text{y} \quad b = 6\sqrt{8}\alpha_8 R \rho^2$$

Los puntos para los que  $t_x = 0$

$$t_x = \cos \theta [-a + b \sin \theta] = 0\tag{B.2}$$

Se obtienen cuando:

$$\cos \theta = 0 \quad \vee \quad -a + b \sin \theta = 0$$

**Caso 1**

$$\cos \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = \pm 1$$

Sustituyendo:

$$t_y = \mp a - \frac{b}{2}\tag{B.3}$$

$$A_{\pm}^{\pm} = \left[ 0, \mp a - \frac{b}{2} \right]\tag{B.4}$$

**Caso2**

$$\sin \theta = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \pm \sqrt{1 + \frac{a^2}{b}}$$

sustituyendo

$$t_y = -\frac{2a^2}{b} + \frac{b}{2}\tag{B.5}$$

**APÉNDICE B. CURVA OBTENIDA FUERA DEL PLANO IMAGEN  
GAUSSIANO (ABERRACIÓN 8)**

---

Obtenemos el punto:

$$B = \left[ 0, -\frac{2a^2}{b} + \frac{b}{2} \right] \quad (\text{B.6})$$

Para encontrar los extremos de  $t_x$ , debemos buscar

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_x}{\partial \theta} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial t_x}{\partial \theta} &= a \sin \theta + b(1 - 2 \sin^2 \theta) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Cuya solución es:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{a \mp \sqrt{a^2 + 8b^2}}{4b} \\ \Rightarrow \cos \theta &= \sqrt{1 - \left( \frac{a \mp \sqrt{a^2 + 8b^2}}{4b} \right)^2} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Sustituyendo en las ecuaciones A2.2, se obtiene:

$$\begin{aligned} t_x &= -\frac{5a}{4} \mp \frac{\sqrt{a^2 + 8b^2}}{4b} \\ t_y &= a \left[ \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8b^2}}{4b} \right] + \frac{b}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Esto es, los puntos:

$$C_{\pm}^{\pm} = \left[ -\frac{5a}{4} \mp \frac{\sqrt{a^2 + 8b^2}}{4b}, a \left( \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8b^2}}{4b} \right) + \frac{b}{2} \right] \quad (\text{B.10})$$

Son extremos de  $t_x$

Para el caso en el que  $t_y = 0$ , es decir:

$$t_y = -a \sin \theta + \frac{b}{2} (1 - 2 \sin^2 \theta) = 0 \quad (\text{B.11})$$

La solución a esta ecuación es:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 2b^2}}{-2b} \\ \Rightarrow \cos \theta &= \sqrt{1 - \left( \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 2b^2}}{-2b} \right)^2} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Sustituyendo en  $t_x$  :

$$t_x = \sqrt{1 - \left( \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 2b^2}}{-2b} \right)^2} \left[ -a + b \left( \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 2b^2}}{-2b} \right) \right] \quad (\text{B.13})$$

Obteniendo así los puntos:

**APÉNDICE B. CURVA OBTENIDA FUERA DEL PLANO IMAGEN  
GAUSSIANO (ABERRACIÓN 8)**

---

$$D_{-}^{+} = \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 2b^2}}{-2b} \right)^2} \left[ -a + b \left( \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 2b^2}}{-2b} \right) \right], 0 \right] \quad (\text{B.14})$$

Ahora, para encontrar los extremos de  $t_y$ , esto es

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_y}{\partial \theta} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial t_y}{\partial \theta} &= \cos \theta (-a - 2b \sin \theta) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Esto sucede si:

$$\cos \theta = 0 \quad \vee \quad -a + 2b \sin \theta = 0$$

**Caso 1**

Si

$$\cos \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = \pm 1$$

Obtenemos que los puntos A son extremos de  $t_y$

**Caso 2**

$$\sin \theta = -\frac{a}{2b} \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \frac{a^2}{4b^2}}$$

Entonces

$$\begin{aligned} t_x &= \left( -\frac{3a}{2} \right) \left( \pm \sqrt{1 - \frac{a^2}{4b^2}} \right) \\ t_y &= \frac{a^2}{2b} + \frac{b}{2} - \frac{a^2}{4b} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Y se obtienen los puntos:

$$E_{-}^{+} = \left[ \left( -\frac{3a}{2} \right) \left( \pm \sqrt{1 - \frac{a^2}{4b^2}} \right), \frac{a^2}{2b} + \frac{b}{2} - \frac{a^2}{4b} \right] \quad (\text{B.17})$$

APÉNDICE B. CURVA OBTENIDA FUERA DEL PLANO IMAGEN  
GAUSSIANO (ABERRACIÓN 8)

---

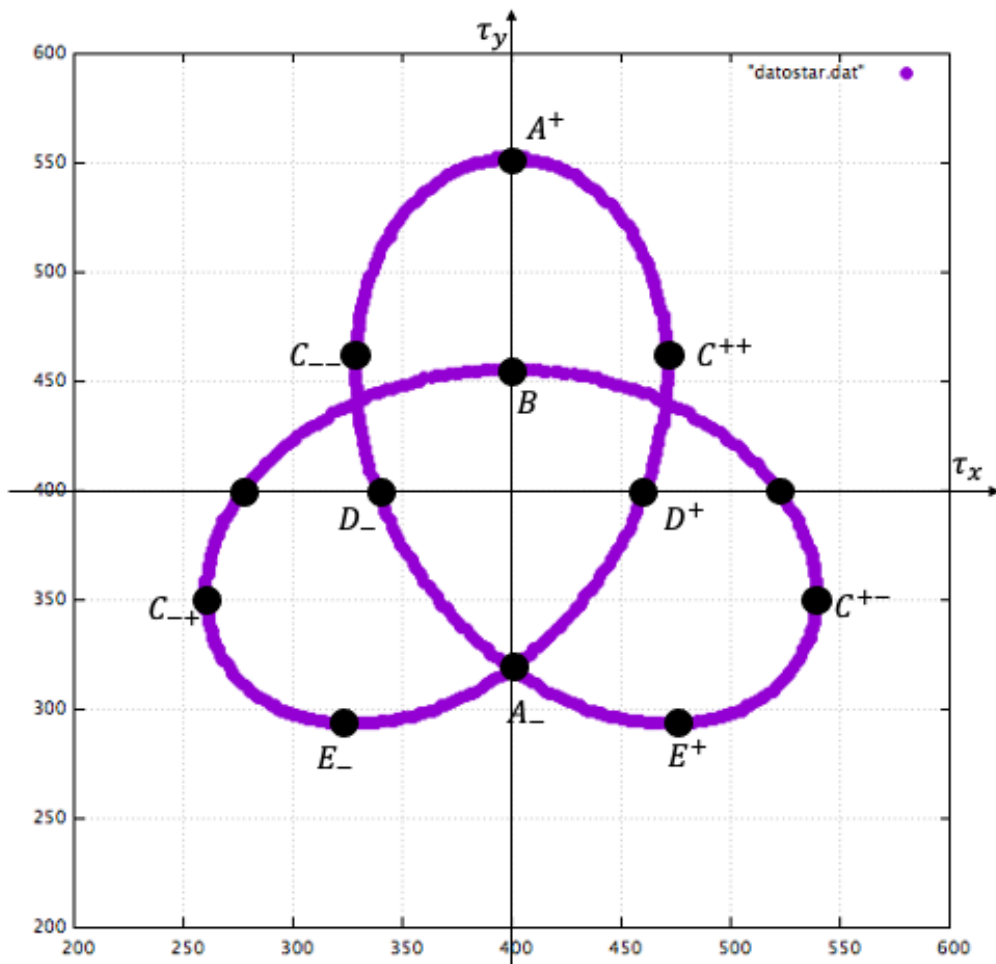


Figura B.1: Imagen con aberración 8  $\alpha_8 = 0.5$  para  $\rho = 0.7$ , fuera del plano gaussiano, con los puntos que definen la curva

## Apéndice C

# Curva obtenida fuera del plano imagen gaussiano (Astigmatismo secundario $0^\circ$ )

Las componentes de la aberración transversal pueden ponerse en coordenadas polares como:

$$\begin{aligned}t_x &= \rho \cos \theta (-a + b\rho^2 \cos^2 \theta - c) \\t_y &= \rho \sin \theta (-a - b\rho^2 \sin^2 \theta + c)\end{aligned}\tag{C.1}$$

donde

$$a = \frac{t_z}{R}, \quad b = 16\sqrt{10}\alpha_{11}R, \quad c = 6\sqrt{10}\alpha_{11}R$$

En el caso que  $t_x = 0$ , entonces:

$$\cos \theta = 0 \quad \vee \quad \cos^2 \theta = \frac{a+c}{b\rho^2}$$

Entonces **Caso 1**

$$\cos \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = \pm 1$$

Sustituyendo en la ecuación 2.75b

$$t_y = \pm \rho (-a - b\rho^2 + c)\tag{C.2}$$

Obteniendo los puntos con coordenadas:

$$A_{\pm}^+ = [0, \rho (-a + b - c\rho^2)]\tag{C.3}$$

**Caso 2**

$$\cos^2 \theta = \frac{a+c}{b\rho^2} \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - \frac{a+c}{b\rho^2}}$$

Al sustituir en la ecuación 2.75b

$$t_y = \pm \rho \sqrt{1 - \frac{a+c}{b\rho^2}} (-b\rho^2 + 2c)\tag{C.4}$$

**APÉNDICE C. CURVA OBTENIDA FUERA DEL PLANO IMAGEN  
GAUSSIANO (ASTIGMATISMO SECUNDARIO 0°)**

---

Obteniendo los puntos

$$B_{\pm}^+ = \left[ 0, \pm \rho \sqrt{1 - \frac{a+c}{b\rho^2}} (-b\rho^2 + 2c) \right] \quad (\text{C.5})$$

Por otro lado,  $t_y = 0$  cuando:

$$\sin \theta = 0 \quad \vee \quad \sin^2 \theta = \frac{a-c}{-b\rho^2}$$

Entonces Caso 1

$$\sin \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \pm 1$$

Entonces

$$t_x = \pm \rho (-a + b\rho^2 - c) \quad (\text{C.6})$$

Obteniendo el punto

$$C_{\pm}^+ = [\pm \rho (-a + b\rho^2 - c), 0] \quad (\text{C.7})$$

Caso 2

$$\sin^2 \theta = \frac{a-c}{-b\rho^2} \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \pm \sqrt{1 + \frac{a-c}{b\rho^2}}$$

Sustituyendo en la ecuación 2.37a

$$t_x = \pm \rho \sqrt{1 + \frac{a-c}{b\rho^2}} (b\rho^2 - 2c) \quad (\text{C.8})$$

Obteniendo los puntos

$$D_{\pm}^+ = \left[ \pm \rho \sqrt{1 + \frac{a-c}{b\rho^2}} (b\rho^2 - 2c), 0 \right] \quad (\text{C.9})$$

Ahora se encontrarán los extremos de la función sobre  $t_x$  con la condición:

$$\frac{\partial t_x}{\partial x} = 0 \quad (\text{C.10})$$

esto es

$$\rho \sin \theta (a - 3b\rho^2 \cos^2 \theta + c) = 0 \quad (\text{C.11})$$

Esto sucede cuando:

$$\sin \theta = 0 \quad \vee \quad \cos^2 \theta = \frac{a+c}{3b\rho^2}$$

Caso 1

$$\sin \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \pm 1$$

Estos son los puntos  $C_{\pm}^+$

Caso 2

$$\cos^2 \theta = \frac{a+c}{3b\rho^2} \Rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{1 - \frac{a+c}{3b\rho^2}}$$

**APÉNDICE C. CURVA OBTENIDA FUERA DEL PLANO IMAGEN  
GAUSSIANO (ASTIGMATISMO SECUNDARIO 0°)**

---

$$t_x = \mp \frac{2}{3} \rho \sqrt{\frac{a+c}{3b\rho^2}} (a+c) t_y = \pm \rho \sqrt{1 - \frac{a+c}{3b\rho^2}} \left( -\frac{2a}{3} + \frac{4c}{3} - b\rho^2 \right) \quad (\text{C.12})$$

Es decir, los siguientes puntos

$$E_{--}^{++} = \left[ \mp \frac{2}{3} \rho \sqrt{\frac{a+c}{3b\rho^2}} (a+c), \pm \rho \sqrt{1 - \frac{a+c}{3b\rho^2}} \left( -\frac{2a}{3} + \frac{4c}{3} - b\rho^2 \right) \right] \quad (\text{C.13})$$

Para encontrar los extremos de la función sobre  $t_y$

$$\frac{\partial t_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{C.14})$$

Esto es

$$\rho \cos \theta (-a - 3b\rho^2 \sin^2 \theta + c) = 0 \quad (\text{C.15})$$

Esto se cumple cuando

$$\cos \theta = 0 \quad \vee \quad \sin^2 \theta = \frac{-a+c}{3b\rho^2}$$

Caso 1

$$\cos \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = \pm 1$$

Estas son las condiciones de los puntos  $A_{-}^{+}$ , es decir, son extremos.

Caso 2

$$\sin^2 \theta = \frac{-a+c}{3b\rho^2} \Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{1 + \frac{a-c}{3b\rho^2}}$$

$$\begin{aligned} t_x &= \pm \rho \sqrt{1 + \frac{a-c}{3b\rho^2}} \left( -\frac{2a}{3} - \frac{4c}{3} + b\rho^2 \right) \\ t_y &= \pm \frac{4}{3} \rho \sqrt{\frac{-a+c}{3b\rho^2}} (-a+c) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

$$\frac{++}{F_{\mp}^{\pm}} = \left[ \pm \rho \sqrt{1 + \frac{a-c}{3b\rho^2}} \left( -\frac{2a}{3} - \frac{4c}{3} + b\rho^2 \right), \pm \frac{4}{3} \rho \sqrt{\frac{-a+c}{3b\rho^2}} (-a+c) \right] \quad (\text{C.17})$$

APÉNDICE C. CURVA OBTENIDA FUERA DEL PLANO IMAGEN  
 GAUSSIANO (ASTIGMATISMO SECUNDARIO  $0^\circ$ )

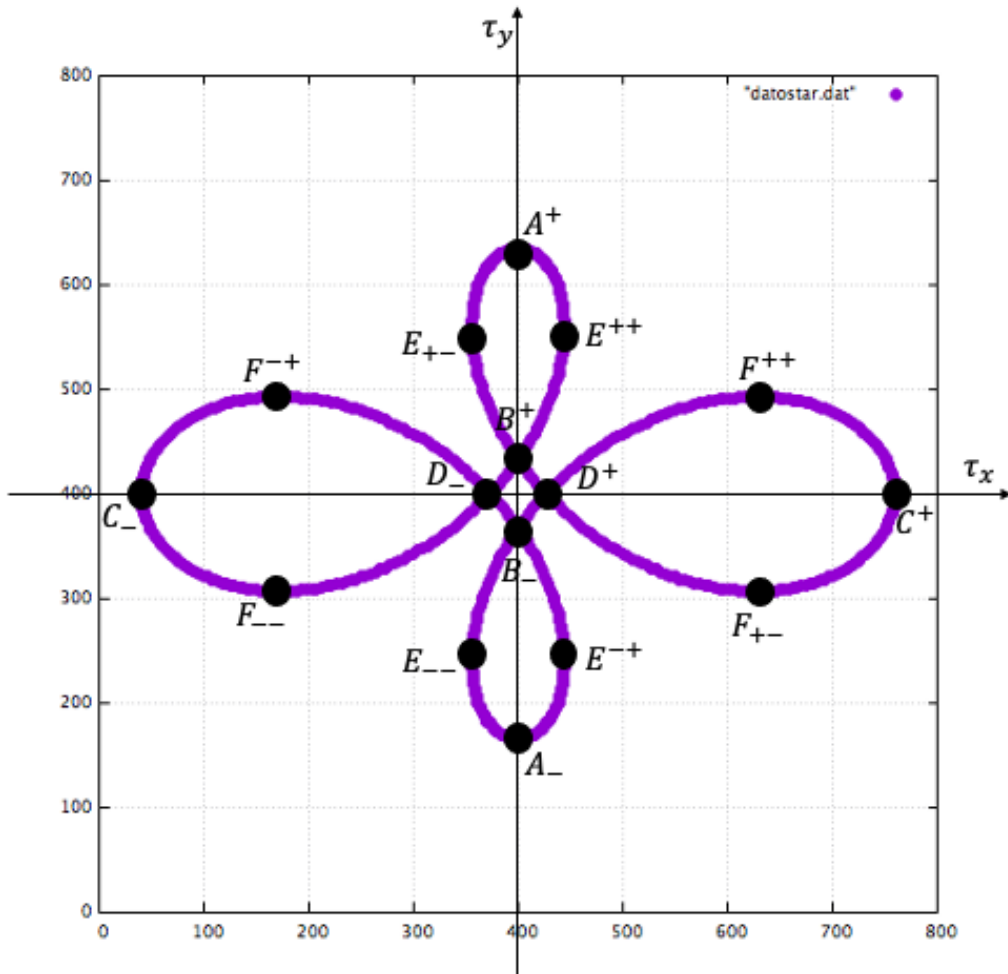


Figura C.1: Imagen con astigmatismo secundario  $0^\circ$   $\alpha_{11} = 0.3$  para  $\rho = 0.9$ , fuera del plano gaussiano, con los puntos que definen la curva

## Apéndice D

# Curva obtenida fuera del plano imagen gaussiano (Aberración 13)

Las ecuaciones 2.45 pueden escribirse en coordenadas polares de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}t_x &= \rho \cos \theta [-a - b\rho^2 + c(\rho^2 \cos^2 \theta)] \\t_y &= \rho \sin \theta [-a - b\rho^2 + c(\rho^2 \sin^2 \theta)]\end{aligned}\tag{D.1}$$

donde

$$\begin{aligned}a &= \frac{t_z}{R} \\b &= 12\sqrt{10}\alpha_{13}R \\c &= 16\sqrt{10}\alpha_{13}R\end{aligned}$$

$t_x = 0$ , si

$$\cos \theta = 0 \quad \vee \quad \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{a + b\rho^2}{c\rho^2}}$$

Caso 1

$$\cos \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = \pm 1$$

Sustituyendo en la ecuación 2.32b

$$t_y = \pm \rho (-a + \rho^2(-b + c))\tag{D.2}$$

Obteniendo los puntos

$$A_{\pm}^+ = [0, \pm \rho (-a + \rho^2(-b + c))]\tag{D.3}$$

Caso 2

$$\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{a + b\rho^2}{c\rho^2}} \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = \pm \sqrt{\rho^2 - \frac{a + b\rho^2}{c\rho^2}}$$

para este caso

**APÉNDICE D. CURVA OBTENIDA FUERA DEL PLANO IMAGEN  
GAUSSIANO (ABERRACIÓN 13)**

---

$$t_y = \pm \sqrt{\rho^2 - \frac{a + b\rho^2}{c\rho^2}} (-2(a + b\rho^2) + c\rho^2) \quad (\text{D.4})$$

Obteniendo los puntos

$$B_{\pm}^+ = \left[ 0, \pm \sqrt{\rho^2 - \frac{a + b\rho^2}{c\rho^2}} (-2(a + b\rho^2) + c\rho^2) \right] \quad (\text{D.5})$$

De forma similar ocurre cuando  $t_y = 0$ :

$$\sin \theta = 0 \quad \vee \quad \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{a + b\rho^2}{c\rho^2}}$$

Caso 1

$$\sin \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \pm 1$$

Entonces

$$t_x = \pm \rho (-a + \rho^2(-b + c)) \quad (\text{D.6})$$

Obteniendo los puntos

$$C_{\pm}^+ = [\pm \rho (-a + \rho^2(-b + c)), 0] \quad (\text{D.7})$$

Caso 2

$$\begin{aligned} \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{a + b\rho^2}{c\rho^2}} &\Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \frac{a + b\rho^2}{c\rho^2}} \\ t_x = \pm \sqrt{1 - \frac{a + b\rho^2}{c\rho^2}} &(-2(a + b\rho^2) + c\rho^2) \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Lo cual, nos da los puntos

$$D_{\pm}^+ \left[ \pm \sqrt{1 - \frac{a + b\rho^2}{c\rho^2}} (-2(a + b\rho^2) + c\rho^2), 0 \right] \quad (\text{D.9})$$

Para encontrar los extremos de la función,

$$\frac{\partial t_x}{\partial \theta} = 0 \quad y \quad \frac{\partial t_y}{\partial \theta} = 0$$

En el primer caso

$$\frac{\partial t_x}{\partial \theta} = \rho \sin \theta (a + b\rho^2 - 3c\rho^2 \cos^2 \theta) = 0 \quad (\text{D.10})$$

Esto pasa cuando

$$\sin \theta = 0 \quad \vee \quad \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{a + b\rho^2}{3c\rho^2}}$$

Caso 1

$$\sin \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \pm 1$$

Es decir, los puntos  $C_{\pm}^+$

---

**APÉNDICE D. CURVA OBTENIDA FUERA DEL PLANO IMAGEN  
GAUSSIANO (ABERRACIÓN 13)**

---

Caso 2

$$\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{a + b\rho^2}{3c\rho^2}} \Rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{1 - \frac{a + b\rho^2}{3c\rho^2}}$$

Sustituyendo en las ecuaciones D.1

$$\begin{aligned} t_x &= \mp \frac{4}{3} \rho \sqrt{\frac{a + b\rho^2}{3c\rho^2}} (a + b\rho^2) \\ t_y &= \pm \rho \sqrt{1 - \frac{a + b\rho^2}{3c\rho^2}} \left( -\frac{4}{3} (a + b\rho^2) + c\rho^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Obteniendo los puntos con coordenadas

$$E_{--}^{++} = \left[ \mp \frac{4}{3} \rho \sqrt{\frac{a + b\rho^2}{3c\rho^2}} (a + b\rho^2), \pm \rho \sqrt{1 - \frac{a + b\rho^2}{3c\rho^2}} \left( -\frac{4}{3} (a + b\rho^2) + c\rho^2 \right) \right] \quad (\text{D.12})$$

De la misma forma

$$\frac{\partial t_y}{\partial \theta} = \rho \cos \theta (-a - b\rho^2 + 3c\rho^2 \sin^2 \theta) = 0 \quad (\text{D.13})$$

Cuando

$$\cos \theta = 0 \quad \vee \quad \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{a + b\rho^2}{3c\rho^2}}$$

Caso 1

$$\cos \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = \pm 1$$

Esto es, los puntos  $A_{-}^{+}$

Caso 2

$$\sin \theta = \pm \sqrt{\frac{a + b\rho^2}{3c\rho^2}} \Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \frac{a + b\rho^2}{3c\rho^2}}$$

Sustituyendo en las ecuaciones D.1

$$\begin{aligned} t_x &= \pm \rho \sqrt{1 - \frac{a + b\rho^2}{3c\rho^2}} \left( -\frac{4}{3} (a + b\rho^2) + c\rho^2 \right) \\ t_y &= \mp \frac{4}{3} \rho \sqrt{\frac{a + b\rho^2}{3c\rho^2}} (a + b\rho^2) \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Obteniendo los puntos con coordenadas

$$E_{--}^{++} = \left[ \pm \rho \sqrt{1 - \frac{a + b\rho^2}{3c\rho^2}} \left( -\frac{4}{3} (a + b\rho^2) + c\rho^2 \right), \mp \frac{4}{3} \rho \sqrt{\frac{a + b\rho^2}{3c\rho^2}} (a + b\rho^2) \right] \quad (\text{D.15})$$

APÉNDICE D. CURVA OBTENIDA FUERA DEL PLANO IMAGEN  
GAUSSIANO (ABERRACIÓN 13)

---

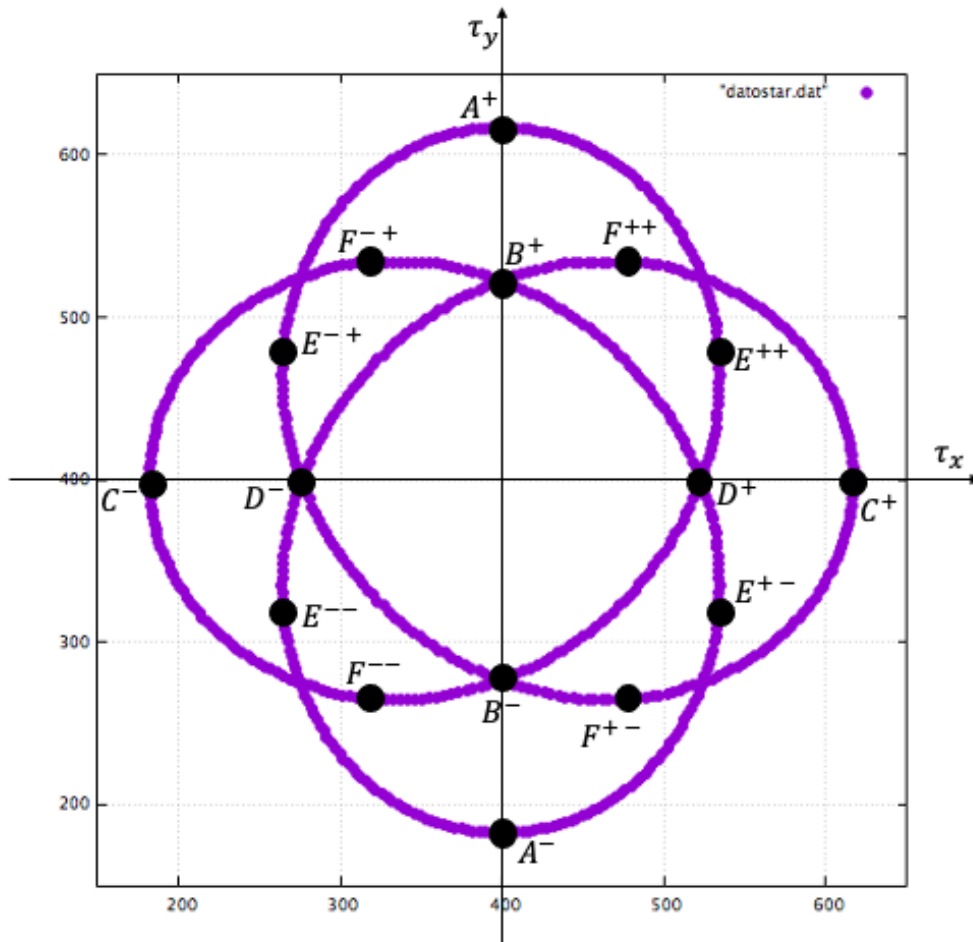


Figura D.1: Imagen con aberración 13  $\alpha_{13} = 0.5$  para  $\rho = 0.8$ , fuera del plano gaussiano, con los puntos que definen la curva

## Apéndice E

# Programa de cómputo

```
real*8 di,sdi,r,tpx,tpy,tccdx,tccdy,lamda
real*8 al(20),xb(5),yb(5),x,y,ro,zx(20),zy(20),tx,ty
real*8 irra(3000,3000)
real*8 txccd,tyccd,xbccd,ybccd,imax,irrr
real*8 irra2(3000,3000)
integer nt,npx,npj,snpps,ix,iy,npps
integer np,m,im,jm,npuntos,npuntosa
integer i,j,ii, nmax,index(100)
c número de terminos
nt=14
c número de pixeles del ccd en dirección x
c npx=640
npx=800
c número de pixeles del ccd en dirección y
c npy=480
npy=800
npps=2000
c 1/2 del número de puntos en la pupila de salida
snpps=npps/2.0d0
c diametro de pupila de salida
di=0.5d0
sdi=di/2.0d0
c radio de curvatura del frente de onda
r=200.0d0
c tamaño del pixel en dirección x
tpx=.0002
c tamaño del pixel en dirección y
tpy=.0002
c tamaño del ccd en x
tccdx=dfloat(npx)*tpx
c tamaño del ccd en y
tccdy=dfloat(npy)*tpy
c longitud de onda
lamda=.00005d0
c 1 tilt y
c 2 tilt x
c 3 defoco
```

## APÉNDICE E. PROGRAMA DE CÓMPUTO

---

```
c 4 astigmatismo primario a 45 grados
c 5 astigmatismo primario a 0 grados
c 6 coma primaria y
c 7 coma primaria x
c 8
c 9
c 10 esférica primaria
c 11 astigmatismo secundaria a 0 grados
c 12 astigmatismo secundaria a 45 grados
c 13
c 14
c*****al(i)= coeficientes de aberración*****
c 1 tilt y
al(1)=0.000d0
c 2 tilt x
al(2)=0.000d0
c 3 defoco
al(3)=0.2000d0
c astigmatismo primario a 45 grados
al(4)=0.000d0
c 5 astigmatismo primario a 0 grados
al(5)=0.000d0
c 6 coma primaria y
al(6)=0.000d0
c 7 coma primaria x
al(7)=0.000d0
al(8)=0.000d0
al(9)=0.000d0
c 10 esférica primaria
al(10)=0.000d0
c 11 astigmatismo secundario a 0 grados
al(11)=0.000d0
c 12 astigmatismo secundario a 45 grados
al(12)=0.000d0
al(13)=0.000d0
al(14)=0.5000d0
do ix=1, npx
do iy=1, npy
irra(ix,iy)=0.0d0
enddo
enddo
open(unit=1,file='datostar.dat')
c *****Cálculo de rayos desde la pupila de salida al plano de observación*****
do ix=-snpps,snpps
do iy=-snpps,snpps
x=dfloat(ix)/dfloat(snpps)
y=dfloat(iy)/dfloat(snpps)
ro=dsqrt(x*x+y*y)
c if((ro.eq.0.1).or.(ro.eq.0.3d0).or.(ro.eq.0.5d0))then
if(ro.le.1.0d0)then
c if(ro.eq.0.9d0)then
c*****Derivadas*****
```

---

APÉNDICE E. PROGRAMA DE CÓMPUTO

```

zx(1)=2.0d0
zy(1)=0.0d0
zx(2)=0.0d0
zy(2)=2.0d0
zx(3)=4.0d0*dsqrt(3.0d0)*x
zy(3)=4.0d0*dsqrt(3.0d0)*y
zx(4)=2.0d0*dsqrt(6.0d0)*y
zy(4)=2.0d0*dsqrt(6.0d0)*x
zx(5)=2.0d0*dsqrt(6.0d0)*x
zy(5)=-2.0d0*dsqrt(6.0d0)*y
zx(6)=6.0d0*dsqrt(8.0d0)*x*y
zy(6)=dsqrt(8.0d0)*(6.0d0*y*y+3.0d0*ro*ro-2.0d0)
zx(7)=dsqrt(8.0d0)*(6.0d0*x*x+3.0d0*ro*ro-2.0d0)
zy(7)=dsqrt(8.0d0)*6.0d0*x*y
zx(8)=dsqrt(8.0d0)*6.0d0*x*y
zy(8)=dsqrt(8.0d0)*3.0d0*(x*x-y*y)
zx(9)=dsqrt(8.0d0)*3.0d0*(x*x-y*y)
zy(9)=-dsqrt(8.0d0)*6.0d0*x*y
zx(10)=dsqrt(5.0d0)*12.0d0*x*(2.0d0*ro*ro-1.0d0)
zy(10)=dsqrt(5.0d0)*12.0d0*y*(2.0d0*ro*ro-1.0d0)
zx(11)=x*(8.0d0*(x*x-y*y)+2.0d0*(4.0d0*ro*ro-3.0d0))
zx(11)=dsqrt(10.0d0)*zx(11)
zy(11)=y*(8.0d0*(x*x-y*y)-2.0d0*(4.0d0*ro*ro-3.0d0))
zy(11)=dsqrt(10.0d0)*zy(11)
zx(12)=2.0d0*dsqrt(10.0d0)*y*(8.0d0*x*x+4.0d0*ro*ro-3.0d0)
zy(12)=2.0d0*dsqrt(10.0d0)*x*(8.0d0*y*y+4.0d0*ro*ro-3.0d0)
zx(13)=dsqrt(10.0d0)*x*(4.0d0*ro*ro-16.0d0*y*y)
zy(13)=dsqrt(10.0d0)*y*(4.0d0*ro*ro-16.0d0*x*x)
zx(14)=4.0d0*dsqrt(10.0d0)*y*(3.0d0*x*x-y*y)
zy(14)=4.0d0*dsqrt(10.0d0)*x*(x*x-3.0d0*y*y)
*****
tx=0.0d0
ty=0.0d0
do i=1,nt
tx=tx-lamda*r*al(i)*zx(i)
ty=ty-lamda*r*al(i)*zy(i)
enddo
txccd=tx+tccdx/2.0d0
tyccd=ty+tccdy/2.0d0
npixx=int(txccd/tpx)
npiyy=int(tyccd/tpy)
*****
if((npixx.gt.0).and.(npixx.lt.npx))then
if((npiyy.gt.0).and.(npiyy.lt.npy))then
write(1,*)npixx,npiyy, irra(npixx,npiyy)
irra(npixx,npiyy)=irra(npixx,npiyy)+1.0d0
else
endif
endif
else
endif
endif
enddo

```

## APÉNDICE E. PROGRAMA DE CÓMPUTO

---

```

enddo
*****Gráfica del marco del CCD*****
write(1,*)0,0
write(1,*)npx,npx
write(1,*)npx,0
write(1,*)npx,ncpy
write(1,*)0,ncpy
xb(1)=0
yb(1)=0
xb(2)=npx
yb(2)=0
xb(3)=npx
yb(3)=ncpy
xb(4)=0
yb(4)=ncpy
xb(5)=xb(1)
yb(5)=yb(1)
do j=1,4
do i=0,1000
xx=xb(j)+i*(xb(j+1)-xb(j))/1000.0d0
yy=yb(j)+i*(yb(j+1)-yb(j))/1000.0d0
write(1,*)xx,yy
enddo
enddo
close(1)
*****SCRIPT PARA GRÁFICAS*****
open(unit=2, file='evastar.txt', status='unknown')
write(2,*)'set size square'
write(2,*)'set grid'
write(2,*)'set xrange [0:800]'
write(2,*)'set yrange [0:800]'
c write(2,*)'plot "datostar.dat" w p pointtype 5'
write(2,*)'plot "datostar.dat" '
write(2,*)'replot'
close(2)
open(unit=3, file='evastar2.txt', status='unknown')
write(3,*)'set palette color positive gamma .5'
write(3,*)'set size square'
write(3,*)'splot "datostar2.dat" u 1:2:3 w l linetype palette'
write(3,*)'replot'
close(3)
open(unit=5, file='evastar3.txt', status='unknown')
write(5,*)'set palette color positive gamma .5'
write(5,*)'set size square'
write(5,*)'splot "datostar2.dat" u 1:2:3 w l linetype palette'
write(5,*)'set view 0,0'
write(5,*)'replot'
close(5)
*****
c call system('gnuplot -persist evastar.txt')
191 open(unit=4,file='datostar2.dat')
irramax=0.0
```

---

## APÉNDICE E. PROGRAMA DE CÓMPUTO

---

```
do i=1,npx,1
do j=1,npj,1
irrr=irra(i,j)
if(irrr.ge.irramax)then irramax=irrr
endif
enddo
enddo
*****
do j=1, npy,1
do i=1,npx,1
write(4,*)i,j,irra(i,j)/irramax
enddo
enddo
close (4)
call system('gnuplot -persist evastar2.txt')
c call system('gnuplot -persist evastar3.txt')
200 end
```



# Bibliografía

- [1] V. Mahajan, D. Malacara, Optical Shop Testing: “Zernike Polynomials and Wavefront Fitting”, Wiley, New Jersey, US; (2007).
- [2] E. L. O’Neill, Introduction to Statistical Optics, Mac Graw Hill, US.; (1990).
- [3] J. Rayces, “Exact relation between wave aberration and ray aberration”, Optica Acta 11, 85-88; (1964).
- [4] W. J. Smith, Modern Optical Engineering, Courier Corporation, US; (1990).
- [5] C. Wexler, Analytic geometry: a vector approach, Addison-Wesley Pub. Co., US; (1962).