

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



# Un modelo matemático para estudiar la variación del confort térmico en una habitación como consecuencia del flujo de calor a través de sus paredes

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

**ALEJANDRO MENDEZ CALVARIO**

DIRECTORES DE TESIS

DR. ANDRÉS FRAGUELA COLLAR  
DRA. BEATRIZ BONILLA CAPILLA



*A mis padres David y Yolanda  
A mis hermanos David y Aidé.*



# Agradecimientos

Antes de todo deseo agradecer infinitamente a mis padres David y Yolanda por el apoyo incondicional, el amor y la paciencia que han dedicado en cada uno de mis pasos.

Agradezco inmensamente a mis hermanos David y Aidé por el apoyo que me otorgan cada día, por su compañía y alegría que consuela mis problemas.

Agradezco mucho a mi asesor, el Dr. Andrés Fraguela Collar por permitirme trabajar con sus extraordinarias ideas, su gran conocimiento y por la oportunidad de aceptarme como su tesista.

Le agradezco inmensamente a mi asesora, la Dra. Beatriz Bonilla Capilla por todo el apoyo que me brindó en esta etapa, especialmente por la infinita paciencia que presentó durante la realización de la tesis, por su profesionalismo y su gran calidad humana.

Agradezco al Dr. Andrés Anzo Hernández, al Dr. Jorge Velázquez Castro y al Dr. Raúl Felipe Sosa por brindarme el honor de conformar el jurado calificador de la presente tesis.

Agradezco a Daniela por el apoyo que me ha brindado, especialmente por el ejemplo de responsabilidad ante las cuestiones académicas. También agradezco a Javier, Antonio, Juan y a todos los amigos y personas que me han acompañado a lo largo de esta vida.

Esta investigación fue realizada gracias al apoyo del Consejo de  
Ciencia y Tecnología del Estado de Puebla

# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Ecuación Diferencial Parcial . . . . .	1
1.1.1. Definiciones y conceptos . . . . .	2
1.1.2. Ecuación en derivadas parciales de segundo orden . . . . .	3
1.1.3. Conceptos básicos en la transferencia de calor . . . . .	5
1.2. Significado físico de los modelos . . . . .	6
1.2.1. Condiciones de frontera y condiciones iniciales para la ecuación de calor . . . . .	7
1.3. Método de Fourier . . . . .	8
<b>2. Conducción de calor en una celda compuesta por ladrillos unidos con contacto perfecto</b>	<b>9</b>
2.1. Planteamiento del problema . . . . .	9
2.2. Modelo matemático del problema . . . . .	10
2.3. Solución analítica del modelo (2.2.9)-(2.2.11) . . . . .	12
2.4. Una expresión analítica para la función $f(t)$ . . . . .	13
2.5. Cálculo de los coeficientes $f_1, f_1, f_2$ para datos reales de la temperatura diaria . . . . .	14
2.6. Expresiones analíticas para la temperatura y el flujo de calor . . . . .	16
2.7. Conclusiones . . . . .	22
 <b>Bibliografía</b>	 <b>23</b>



# Introducción

A través de la historia, el hombre ha buscado la manera de protegerse de las inclemencias del clima y lo ha conseguido mediante la construcción de viviendas, las que han evolucionado desde los inicios de la humanidad hasta la actualidad, con el propósito de lograr mayor calidad de vida. En este contexto se pueden encontrar un sin número de materiales naturales y artificiales dedicados a la construcción, cada uno con iguales o diferentes propiedades que dependen de su composición, síntesis y procesamiento, sin olvidar lo más importante, su estructura interna y la relación de costo-desempeño así como el uso de sistemas de calefacción y enfriamiento (aire acondicionado).

Es así que ante esta situación surge un problema, y es que en lugares donde los cambios de temperatura se presentan de manera considerable, el uso de sistemas de calefacción o aire acondicionado es común entre los habitantes de las viviendas, esto con la finalidad de que la temperatura al interior de las habitaciones se mantenga en un estado de confort, ya sea durante el día o la noche; una vez alcanzada dicha temperatura, ésta se mantendrá así por un determinado intervalo de tiempo hasta que la temperatura en el exterior cambie y nuevamente sea necesario el uso del aire acondicionado, generando así un proceso periódico en el que se hace un consumo considerable de energía, que desemboca en cuantiosos gastos económicos.

Como objetivo principal de este trabajo es analizar el modelo matemático que estudia la variación del confort térmico en una habitación.

La habitación considerada se encuentra expuesta al influjo de dos temperaturas, en la parte externa, a una temperatura que varía con relación al transcurso del día y por la parte interna, a una temperatura que se mantiene constante debido a un sistema de aire acondicionado. En este entorno se presentan las siguientes cuestiones:

¿Cuál es la fórmula adecuada para calcular la temperatura en cualquier punto interior de la pared?, ¿se puede encontrar alguna expresión aproximada para el flujo de calor en la parte interna de la pared? y ¿Es posible encontrar alguna expresión que describa cuando tiende a enfriarse o calentarse la parte interna de la pared? o simplemente ¿en que momento el flujo de calor se hace cero?.

Cabe resaltar que en este trabajo, el análisis de la transferencia de calor por conducción se presenta la solución analítica de la ecuación de calor con condiciones de frontera no homogéneas y algunos resultados que surgen del análisis de la fórmula que se obtiene para el flujo de calor. Todo esto se realizará en dos capítulos que se describirán a continuación.

En el capítulo 1 se hace una breve introducción al contexto de las ecuaciones en derivadas parciales, desde su origen en el siglo XVII hasta la época actual, haciendo énfasis en el trabajo que realizó Joseph Fourier a la ecuación de calor, además, en este capítulo se introducen los conceptos básicos para la comprensión de la tesis y se desarrollan los procesos para la obtención de la solución a los problemas de conducción de calor con condiciones de frontera de tipo Dirichlet homogéneas, condiciones de frontera de tipo Neumann, condiciones de frontera periódicas y condiciones de frontera de tipo Dirichlet no homogéneas, todo para una variable espacial y la variable temporal.

En el capítulo 2 se aborda el problema de conducción de calor en un bloque, utilizando condiciones de frontera en tres dimensiones no homogéneas para la variable espacial  $x$  y condiciones de frontera periódicas para las variables espaciales  $y$  y  $z$ ; se verá que por las condiciones del problema, éste se reduce a un problema de conducción de calor respecto únicamente a la variable espacial  $x$  y a la variable temporal  $t$ . En este capítulo se estudia también el proceso de transmisión de calor a través de la pared de una habi-

tación expuesta a temperaturas tanto del exterior como del interior, además del estudio de la variación del confort térmico que se presenta en la habitación, es decir los momentos en que tiende a enfriarse o calentarse mediante la dirección del flujo de calor en el transcurso del día.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este primer capítulo se presentan los elementos básicos y necesarios para comprender el desarrollo de este trabajo, iniciando con una breve reseña histórica y teoría básica de las ecuaciones en derivadas parciales; también se presentan los conceptos básicos de conducción de calor utilizados y por último se muestra una introducción al método de Fourier utilizado para obtener la solución de un problema de conducción de calor.

### 1.1. Ecuación Diferencial Parcial

#### Breve reseña histórica

En el transcurso histórico de la ciencia, una de las ramas de la matemática estudiadas con gran interés, es la rama de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, originadas a partir del estudio de superficies en geometría y en problemas de mecánica[6]. Durante el siglo XVIII la disciplina de las ecuaciones en derivadas parciales se origina de manera paulatina; los matemáticos empiezan por estudiar a fondo los fenómenos físicos que dan paso al desarrollo de importantes resultados que han prevalecido hasta hoy. Como un primer resultado exitoso real de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, se da después de un incesante interés en el problema de la cuerda vibrante de instrumentos musicales, en esta etapa Jean Le Rond d'Alembert, Daniel Bernoulli y Euler hacen interesantes estudios de manera individual, convergiendo en un resultado importante: la ecuación de onda [6], representada por

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

en este caso  $U$  representa la amplitud de onda en el punto  $(x, t)$  y  $c$  la velocidad de propagación de onda. Otra clase de investigaciones se basó en uno de los principales problemas del mismo siglo, la determinación de la magnitud de la atracción gravitatoria que una masa ejerce sobre otra. En esta ocasión se manifiesta un resultado de gran importancia, la ecuación

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

que se conoce como ecuación de potencial o de Laplace, donde  $U$  representa el potencial gravitacional o también el potencial eléctrico y cuya primera aparición formal fue en los trabajos de Euler en 1752 en su trabajo *Principios del movimiento de fluidos*. Más tarde recibió algunas correcciones de Poisson y Gauss para terminar en las manos del matemático británico George Green, quien hace grandes aportaciones al estudio de la ecuación.

Ulteriormente, a mediados del siglo XIX, el interés de la comunidad matemática por el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales adquiere más fuerza, principalmente porque estas ecuaciones pueden expresar muchas leyes de la naturaleza. En este siglo surgen nuevos tipos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y las ya existentes, las ecuaciones de ondas y de potencial fueron aplicadas a nuevas áreas de la física[6].

El primer gran avance del siglo XIX respecto a estas ecuaciones fue dado por Joseph Fourier, quien realizó estudios sobre problemas de transferencia de calor; originalmente se presentaban de manera práctica y se manifestaban en la industria, particularmente en el manejo de metales y su interacción con el calor,

también realizó interesantes estudios sobre la temperatura en el interior de la tierra[6].

El problema sustancial que enfoca, es el determinar la temperatura en un cuerpo homogéneo en función de  $x, y, z$  y  $t$ ; con ello demuestra que con base en principios físicos,  $T$  debe satisfacer la ecuación diferencial parcial llamada ecuación de calor en tres dimensiones y con distintas condiciones de frontera

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial T}{\partial t},$$

donde  $T$  es la temperatura en el cuerpo estudiado y  $k$  representa la relación que hay entre la conductividad térmica, el calor específico y la densidad del material en el que se estudia la transferencia de calor. Para resolver este problema, Fourier se basó en el método de separación de variables de tal manera que que obtuvo una solución que involucraba una sumatoria de funciones trigonométricas, es allí cuando se enfrenta a la cuestión de si es posible representar cualquier función como una serie de funciones trigonométricas, la cual le da paso a desarrollar las *series de Fourier* y poder calcular los *coeficientes de Fourier* que determinan la representación en serie de Fourier de cierto tipo de funciones [6].

Fourier agrega ciertos avances importantes además del estudio de las ecuaciones diferenciales, marca la separación de las funciones analíticas o funciones desarrollables en series de Taylor de las series de Fourier, demuestra que una serie de Fourier representa una función sobre un intervalo en su totalidad y que una serie de Taylor denota una función que solo se desarrolla en un punto del cual la función es analítica.

Posteriormente Simeon Deni Poisson, uno de los mas grandes analistas del siglo XIX y un físico matemático de élite, tuvo acercamiento al trabajo de Fourier, del que fue un seguido muy cercano, trabajó en la teoría del calor, desarrollando soluciones a vastos problemas de conducción de calor, por otro lado, aportó la idea de extender la teoría de potencial gravitacional a la electricidad estática y al magnetismo[6].

Hoy en día la influencia de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales es tan amplia que se puede afirmar que no hay ciencias que no las utilice, gracias a la versatilidad para generar modelos matemáticos en una variedad de fenómenos físicos, biológicos, químicos de la ingeniería y de manera más reciente en la economía y las finanzas.

Cabe resaltar que en la coyuntura del siglo XXI las ecuaciones en derivadas parciales adquieren gran avance en combinación con la alta tecnología que se presenta como modelización, simulación numérica y optimización. El papel del matemático ha evolucionado de dedicarse, casi exclusivamente, a la investigación clásica y a la docencia, a ser reclamados por las empresas de todo tipo; las matemáticas han pasado de estar entre las carreras menos demandadas, a convertirse en muy solicitadas [8].

### 1.1.1. Definiciones y conceptos

Una ecuación en derivadas parciales (EDP) en una región  $D$  de  $R^k$  no es más que una relación funcional entre la variable independiente en  $D$ , una función desconocida definida en dicha región y algunas de sus derivadas parciales hasta en cierto orden finito que se supone que existen en  $D$  y se denomina ecuación de  $n$  – *ésimo* orden, si contiene al menos una derivada de orden  $n$  y no contiene derivadas de orden superior a  $n$ . De manera general, una ecuación diferencial parcial se expresa de la siguiente manera:

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots, T, \frac{\partial T}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 x_2}, \dots, \frac{\partial^n T}{\partial x_k^n}) = 0, \quad (1.1.1)$$

donde  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$  elemento de  $U$  es la variable independiente.

Se dice que la solución de la EDP (1.1.1) es una función  $T(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  definida en el dominio  $D$  del  $k$ -espacio dimensional  $R^k$  si existen todas sus derivadas parciales hasta el orden de la ecuación y al sustituirlas en la relación funcional de  $F$  se satisface la igualdad (1.1.1) para todo  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$  en  $D$ .

Se dice que la EDP es lineal en  $D$  si la relación funcional  $F$  en (1.1.1) es lineal con respecto a la función  $T$  y y todas sus derivadas hasta el orden  $n$ . Por ejemplo, la forma de una EDP lineal de primer orden en un dominio  $D$  de  $R^2$  viene dada por:

$$a(x, y) \frac{\partial T}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial T}{\partial y} + c(x, y)T = f(x, y),$$

donde las funciones  $a, b, c$  y  $f$  están definidas en  $D$ . Si además las funciones  $a, b$  y  $c$  son constantes en  $D$  se dice que estamos en presencia de una EDP lineal con coeficientes constantes.

### Problema de Cauchy y teorema de Kovalevskaya

De manera similar al estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias, en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales también podemos encontrar problemas de valores iniciales, a continuación vemos que al considerar la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = F(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots, T, \frac{\partial T}{\partial t}, \frac{\partial T}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial x_n}, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial t}, \frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial t}, \dots, \frac{\partial^2 T}{\partial x_n \partial t}, \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 x_2}, \dots, \frac{\partial^n T}{\partial x_n \partial x_n}), \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

para un valor  $t = t_0$  se proporcionan valores, conocidos como valores iniciales de la función incógnita  $T$  y de sus derivadas respecto a  $t$  hasta el orden  $n - 1$ .

Se supondrá ahora que para  $t = t_0$

$$T = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.1.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = g(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.1.4)$$

las funciones  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  están definida en una región del espacio  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

El problema de hallar la solución del sistema (1.1.2) que satisface las condiciones (1.1.3) y (1.1.4) para  $t = t_0$  es conocido como el **problema de Cauchy**.

En cuanto a la solución del problema, el siguiente teorema nos habla de la existencia y unicidad de la solución.

**Teorema 1.1.1** (Teorema de Kovalevskaya). *Si la función  $F$  es analítica en una vecindad del punto  $(t^0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, T^0, T_t^0, \dots)$  y si las funciones  $f$  y  $g$  son analíticas en una vecindad del punto  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , el problema de Cauchy admite solución analítica en una vecindad del punto  $(t^0; x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , solución que es única en la clase de funciones analíticas[10].*

### 1.1.2. Ecuación en derivadas parciales de segundo orden

Es común encontrar ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en el estudio de las leyes fundamentales de la naturaleza y en distintos modelos de la física, la química y la biología, además de sus recientes incursiones en el ámbito económico.

El estudio de las ecuaciones en derivadas parciales lineales de segundo orden es de gran importancia, puesto que se pueden encontrar en una variedad de aplicaciones[8].

Por este hecho, de ahora en adelante se dará más énfasis al análisis de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.

### Clasificación de ecuaciones de segundo orden

Consideraremos una ecuación en derivadas parciales de segundo orden en la variable dependiente  $T$  y las variables independientes  $x$  y  $y$

$$A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + D \frac{\partial T}{\partial x} + E \frac{\partial T}{\partial y} + FT = G, \quad (1.1.5)$$

donde los coeficientes son funciones de las variables independientes  $x$  y  $y$ , además, supongamos que  $T$  es dos veces continuamente diferenciable en algún dominio de  $\mathbb{R}^2$ .

La clasificación de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden tiene como base la reducción de la ecuación (1.1.5) a su forma canónica o estándar en un punto.

Así que para llevar (1.1.5) a su forma canónica se hará un cambio de variables independientes, es decir:

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad (1.1.6)$$

y para poder incorporar las nuevas variables  $\xi$  y  $\eta$  mediante las funciones  $\xi(x, y)$  y  $\eta(x, y)$ , se supondrá que las variables  $\xi$  y  $\eta$  son continuamente diferenciables y el Jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (1.1.7)$$

así que  $x$  y  $y$  pueden ser determinadas de manera única mediante la transformación (1.1.6). Veamos ahora que usando la regla de la cadena para calcular cada una de las derivadas parciales y sustituyendo  $\xi$  y  $\eta$  en (1.1.5) se obtiene:

$$A^* \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + B^* \frac{\partial^2 T}{\partial \xi \partial \eta} + C^* \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + D^* \frac{\partial T}{\partial \xi} + E^* \frac{\partial T}{\partial \eta} + F^* T = G^*, \quad (1.1.8)$$

Observar que bajo la transformación (1.1.6), la ecuación (1.1.5) no cambió en su forma, puesto que la ecuación (1.1.8) es muy similar, esto porque la naturaleza de la ecuación hace que ésta sea invariante ante la transformación si el jacobiano no desaparece, lo cual se basa en el hecho de que el signo del discriminante no cambia dada la transformación, es decir:

$$B^{*2} - 4A^*C^* = J^2(B^2 - 4AC), \quad (1.1.9)$$

veamos ahora que la clasificación de la ecuación depende de los coeficientes  $A$ ,  $B$  y  $C$  del discriminante, en un punto dado, para ello se reescribirán las ecuaciones (1.1.5) y (1.1.8) como:

$$A \frac{\partial T}{\partial x^2} + B \frac{\partial T}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial T}{\partial y^2} = \psi(x, y, T, \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}), \quad (1.1.10)$$

$$A^* \frac{\partial T}{\partial x^2} + B^* \frac{\partial T}{\partial x \partial y} + C^* \frac{\partial T}{\partial y^2} = \psi^*(x, y, T, \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}), \quad (1.1.11)$$

Se hará un nuevo cambio de variables para (1.1.10) y (1.1.11), de tal modo que sea posible reducirla a su forma canónica.

Sean  $\phi$  y  $\varphi$  entonces:

$$A^* = A \frac{\partial \phi^2}{\partial x} + B \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + C \frac{\partial \phi^2}{\partial y}, \quad (1.1.12)$$

$$C^* = A \frac{\partial \varphi^2}{\partial x} + B \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + C \frac{\partial \varphi^2}{\partial y}, \quad (1.1.13)$$

donde asumimos que  $A$ ,  $B$  y  $C$  no son cero.

Veamos ahora que las dos ecuaciones, (1.1.12) y (1.1.13) pertenecen al mismo tipo de ecuaciones y por lo tanto podemos escribirlas en la forma:

$$A \frac{\partial \theta^2}{\partial x} + B \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial \theta^2}{\partial y} = 0, \quad (1.1.14)$$

de aquí que

$$d\theta = \frac{d\theta}{dx} dx + \frac{d\theta}{dy} dy = 0,$$

por tanto

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d\theta}{dx}}{\frac{d\theta}{dy}}, \quad (1.1.15)$$

y

$$A \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - B \left( \frac{dy}{dx} \right) + C, \quad (1.1.16)$$

cuyas raíces son:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(B + \sqrt{B^2 - 4AC})}{2A}, \quad (1.1.17)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(B - \sqrt{B^2 - 4AC})}{2A}. \quad (1.1.18)$$

Las ecuaciones (1.1.17) y (1.1.18) se conocen como *ecuaciones características*.

Para el caso en el que  $B^2 - 4AC > 0$ , la ecuación (1.1.10) se dice que es del tipo Hiperbólica, si  $B^2 - 4AC = 0$  entonces la ecuación es de tipo Parabólica y si  $B^2 - 4AC < 0$  la ecuación es tipo Elíptica[8].

### 1.1.3. Conceptos básicos en la transferencia de calor

Este trabajo se trata básicamente del estudio de la ecuación de calor y sus solución con distintas condiciones de frontera, así que, para ello es menester presentar algunos conceptos relacionados con la transferencia de calor.

Una de las formas de energía que aparecen con frecuencia en la naturaleza es el calor, se interpreta como energía que se puede transferir de un sistema a otro, siendo siempre de un medio con mayor temperatura a otro con menor temperatura, este proceso termina cuando los dos medios conciben la mínima temperatura[5].

#### Mecanismos de transferencia de calor

El calor se puede transferir a partir de tres modos: conducción, convección y radiación [4].

- **Conducción:** Es el proceso de transferencia de energía a través del contacto directo sin intercambiar materia;
- **Convección:** Es el proceso de transferencia de energía entre un sólido y un líquido o un gas que se encuentra en movimiento, este proceso introduce los fenómenos de conducción y movimiento de fluidos;
- **Radiación:** Es el proceso de intercambio de energía emitida por materia en forma de ondas electro-magnéticas.

#### Flujo de calor

El flujo de calor es un flujo de energía por unidad de área por unidad de tiempo, comúnmente se denota como  $\vec{\phi}_q$  donde  $q$  especifica el flujo de calor opuesto al de masa.

En muchos sólidos que se encuentran en condiciones normales el calor se transporta por conducción y el flujo se describe adecuadamente por la ley de Fourier que se representa por:

$$\phi_q = -\sigma \nabla T,$$

donde  $\sigma$  es la conductividad térmica. El signo nos muestra que el flujo de calor se desplaza desde la zona de temperatura más alta a la zona con temperatura más baja [5].

### Conductividad térmica

La conductividad térmica es una propiedad de la materia que indica la tasa de transmisión de calor del material, por unidad de área y por unidad de diferencia de temperatura. Para su medida se utiliza las unidades, Watts entre metro por segundo

$$\frac{W}{ms},$$

Esta propiedad depende totalmente de la densidad, porosidad y humedad del material. La distribución de temperatura en un material depende en gran medida de su conductividad térmica; los valores más altos de conductividad se encuentran en materia sólida y líquida, mientras que los valores más bajos se encuentran en los gases.

### Difusividad térmica

La difusividad térmica al igual que la conductividad térmica es una propiedad de los materiales que influye en la transferencia de calor con la distinción de que la conductividad térmica se presenta en estados estacionarios y para los estados transitorios la difusividad térmica se hace presente[4][5].

La difusividad térmica depende de tres propiedades físicas, la conductividad térmica, el calor específico y la densidad del material.

$$\sigma = \frac{k}{\rho C_p} \quad (m^2/s),$$

donde  $k$  es la conductividad térmica,  $\rho$  es la densidad del material y  $C_p$  es el calor específico; entre más grandes sean los valores para  $\sigma$  mayor será la tasa de propagación de temperatura[4] [5].

## 1.2. Significado físico de cada uno de los modelos de ecuaciones en derivadas parciales

### Ecuación de Laplace

La ecuación de Laplace es el modelo principal de las ecuaciones en derivadas parciales elípticas, y se encuentra presente en trabajos de sistemas físicos estacionarios, en fenómenos potenciales, gravitacionales o problemas de distribución de temperatura en un sistema en equilibrio [11].

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (1.2.1)$$

### Ecuación de onda

El modelo principal de las ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas es la ecuación de onda, la cual rige fenómenos como la propagación de ondas y vibraciones[11].

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \sigma^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (1.2.2)$$

en este modelo  $T$  puede representar distintas cantidades, como la amplitud de una cuerda y  $\sigma$  la velocidad de propagación de la onda [11].

Es preciso mencionar que este trabajo se enfocará únicamente en la ecuación de difusión de calor.

### Ecuación de calor

Tomemos un dominio  $D$  el cual se encuentra acotado por una superficie  $S$  de un cuerpo  $G$ , la temperatura en el punto  $(x_1, x_2, x_3)$  y en el instante  $t$ , esta temperatura será representada por  $T(x, y, z, t)$ . Según la ley de Fourier la velocidad  $V$  de flujo es proporcional al gradiente de temperatura, considerando que el calor se desplaza de la zona de mayor temperatura a la de menor temperatura y para temperaturas que son variables, así se tiene que

$$V = -\sigma \nabla T \quad (1.2.3)$$

donde  $\sigma$  es la constante de conductividad del cuerpo; ahora sea  $D$  un dominio de la superficie  $S$  del cuerpo  $G$ , entonces la cantidad de calor que sale de  $D$  por unidad de tiempo esta representada por:

$$\int \int_G \frac{\partial T}{\partial n} ds,$$

donde  $\frac{\partial T}{\partial n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  es la componente de  $\mathbf{v}$  en la dirección del vector unitario normal  $\mathbf{n}$  del cuerpo  $G$ , de modo que al usar el teorema de la divergencia se obtiene:

$$\int \int \frac{\partial T}{\partial n} ds = \int \int_G \frac{\partial T}{\partial n} = \int \int \int_D \text{div}(-\sigma \nabla T) dx dy dz = -\sigma \int \int \int_D \nabla^2 T dx dy dz, \quad (1.2.4)$$

pero la cantidad de calor en  $D$  está representada por

$$\int \int \int_D c_p \rho T dx dy dz, \quad (1.2.5)$$

donde  $c_p$  es el calor específico y  $\rho$  es la densidad del del material.

Así que la tasa de decrecimiento del calor en el dominio  $D$  es

$$- \int \int \int_D c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz, \quad (1.2.6)$$

puesto que la cantidad de decrecimiento de calor en el dominio  $D$  debe ser igual a la cantidad de calor que saca  $D$ , entonces se obtiene:

$$- \int \int \int_D c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz = -K \int \int \int_D \nabla^2 T dx dy dz, \quad (1.2.7)$$

o

$$- \int \int \int_D [c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} - \sigma \nabla^2 T] dx dy dz = 0, \quad (1.2.8)$$

para un dominio arbitrario del cuerpo  $G$ .

Suponiendo que el integrando no es zero en un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  en  $D$  y si además se hace la suposición de que es continuo, entonces el integrando no es cero en una vecindad del punto  $(x_0, y_0, z_0)$ , así que con el mismo argumento para una región ampliada y por (1.2.8) se concluye que el integrando es cero es decir:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sigma_1 \nabla^2 T, \quad (1.2.9)$$

donde  $\sigma_1 = \frac{\sigma}{c_p \rho}$ .

Esta ecuación (1.2.9) es conocida como la ecuación de calor[8].

### 1.2.1. Condiciones de frontera y condiciones iniciales para la ecuación de calor

La ecuación de calor (1.1.2) tiene muchas soluciones, de modo que para extraer de entre el conjunto de soluciones una determinada, se establecen las condiciones de frontera [10].

#### Condiciones de frontera

Para que una ecuación de calor pueda describir una distribución de temperatura, es necesario complementarla con condiciones iniciales y condiciones de frontera.

Las condiciones de frontera son condiciones que describen el comportamiento de la solución y su derivada en los límites de la región definida.

Bajo esta perspectiva, a continuación se considera la ecuación de calor limitada a una región espacial dada  $\Omega$ .

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sigma \Delta T \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1.2.10)$$

donde  $\Delta$  es el operador laplaciano.

Es posible encontrar tres tipos de condiciones de frontera; el primer tipo es cuando se presentan valores de temperatura

$$T(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) \quad (x, y, z, t) \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (1.2.11)$$

llamadas *condiciones de frontera del tipo Dirichlet* [11] [4].

Las condiciones de frontera de Dirichlet representan físicamente una temperatura específica que puede ser fija o variar en el tiempo sobre el intervalo en el que se desenvuelven las variables espaciales.

Es posible conocer la derivada normal  $\frac{\partial T}{\partial n}$  de la temperatura  $T(x, y, z, t)$  en la frontera  $\partial\Omega$ , es decir

$$\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial n} = f(x, y, z, t) \quad (x, y, z, t) \in \partial\Omega. \quad t > 0, \quad (1.2.12)$$

esta expresión representa otro tipo de condiciones de frontera que reciben el nombre de *condiciones de frontera de tipo Neumann* [11] [4].

Estas condiciones de tipo Neumann representan a un flujo específico de calor sobre algún intervalo de las variables espaciales de acuerdo a las leyes de Fourier. El caso particular en el que

$$\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial n} = 0, \quad (1.2.13)$$

representa una frontera que no permite el paso del flujo de calor. Es decir es una frontera aislada.

El tercer tipo de condiciones de frontera se presentan como una combinación de condiciones de tipo Dirichlet y condiciones de tipo Neumann

$$H(x, y, z)\partial_n T(x, y, z, t) + T(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) \quad (x, y, z) \in \partial D, \quad t > 0, \quad (1.2.14)$$

llamadas *condiciones de frontera de tipo Robin*.

Cabe resaltar que las condiciones de frontera descritas anteriormente, son las que comúnmente se presentan dentro de las aplicaciones, pero es posible encontrar excepciones de más condiciones de frontera, tales como: condiciones de frontera mixtas, oblicuas y periódicas [11] [4].

### Condiciones iniciales

Son condiciones que se imponen a las soluciones de una ecuación diferencial parcial respecto a la variable independiente  $t$ , suelen presentarse como un conjunto de condiciones de la forma

$$T \Big|_{t=t_0} = f, \quad (1.2.15)$$

Geoméricamente hablando, estas condiciones determinan una curva a través de la cual, la superficie de la solución debe pasar [11] [4].

## 1.3. Método de Fourier

El método de Fourier o expansión de Fourier es una técnica que desarrolló Joseph Fourier para resolver el problema de valor inicial y condiciones de frontera.

El método de Fourier se basa en la técnica de separación de variables, cuya descripción se dará más adelante [11].

**Definición 1.3.1.** Sea  $V$  un espacio vectorial real o complejo y sea la función  $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , ésta recibe el nombre de producto interior en  $V$  si cumple las siguientes propiedades para cualquier elemento  $v_n \in V$  con  $n = 1, 2, 3$  y  $\alpha \in \mathbb{C}$

i)  $(v_1, v_1) \geq 0$ ;  $(v_1, v_1) = 0 \Leftrightarrow v_1 = 0$ ;

ii)  $(v_1, v_2) = \overline{(v_2, v_1)}$ ;

iii)  $(\alpha v_1, v_2) = \alpha(v_1, v_2)$ ;

iv)  $(v_1 + v_2, v_3) = (v_1, v_3) + (v_2, v_3)$ ,

al par conformado por  $(V, (\cdot, \cdot))$  se le llama, espacio producto interior.

**Definición 1.3.2.** Sea  $V$  un espacio vectorial real o complejo, se define la norma en  $V$  como la función  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual satisface las siguientes propiedades:

i)  $\|v_1\| > 0$  si  $v_1 \neq 0$ ;

ii)  $\|\alpha v_1\| = |\alpha| \|v_1\| \forall \alpha \in \mathbb{C}, v_1 \in V$ ;

iii)  $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|, \forall v_1, v_2 \in V$ ,

Al par compuesto por  $(V, \|\cdot\|)$  se le conoce como espacio normado.

Sea  $V$  un espacio vectorial normado respecto a la norma inducida por el producto interior,  $V$  recibe el nombre de espacio pre-Hilbert y utiliza el prefijo pre, pues solo basta que  $V$  sea completo para que sea un espacio de Hilbert, por lo tanto se tiene la siguiente definición.

**Definición 1.3.3.** Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial  $H$  dotado de un producto escalar  $(u, v)$  y que es completo por la norma  $(u, u)^{1/2}$  [2].

**Ejemplo 1.** El espacio  $L^2(\Omega)$  con producto escalar:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

es un espacio de Hilbert.

**Definición 1.3.4.** Se llama base Hilbertiana a toda sucesión  $e_n$  de elementos de  $H$  tales que[2]:

- $|e_n| = 1$  para todo  $n$ ,  $(e_m, e_n) = 0$  para  $m, n$  con  $m \neq n$
- El espacio vectorial generado por los  $(e_n)$  es denso en  $H$ .

**Ejemplo 2.** En  $L^2(\Omega)$  se utilizan con frecuencia bases especiales formadas por funciones propias de un operador diferencial por ejemplo la base de funciones propias:

$$\left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}(nx) \right)_n \geq 1,$$

o también:

$$\left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{cos}(nx) \right)_n \geq 1,$$

A continuación se hará una breve descripción del método de separación de variables para ecuaciones en derivadas parciales y después se muestra un ejemplo básico de su aplicación.

Como primer paso se busca una solución para la ecuación diferencial parcial homogénea, identificada como solución separada o solución producto

$$T(x, t) = V(t)P(x),$$

esta debe satisfacer las condiciones de frontera y condiciones iniciales que se asocian al problema; a partir de esta expresión se obtienen soluciones separadas para  $V(t)$  y  $P(x)$ , que deben ser soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, de tal manera que sean más sencillas de desarrollar en comparación con la ecuación diferencial parcial.

Ulteriormente se utiliza el principio de superposición que proporciona soluciones más generales a partir de la solución producto, estas soluciones generales se expresan como una suma infinita de funciones separadas que reciben el nombre de series de Fourier; como último paso se calculan los coeficientes de estas series [11].

## Aplicación del método de separación de variables a un problema de conducción de calor en una dimensión con distintos tipos de condiciones de frontera

### Ecuación de calor con condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas

Para comprender mejor el método de separación de variables se considera un problema de conducción de calor para una barra recta uniforme cuyo material es homogéneo y de longitud  $a$ ; la barra es suficientemente delgada de modo que el calor se distribuye equitativamente sobre la sección transversal en el tiempo  $t$ , además los lados de la barra están aislados de modo que no pasa calor a través de ellos.

El modelo para el problema se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{dT(x, t)}{dt} = \sigma \frac{d^2T(x, t)}{dx^2}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad t > 0, \quad (1.3.1)$$

$$T(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.3.2)$$

$$T(a, t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.3.3)$$

$$T(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (1.3.4)$$

donde  $\sigma$  es la constante de difusividad térmica.

El objetivo sustancial del problema de conducción de calor es encontrar una solución  $T(x, t)$  que satisfaga la ecuación diferencial (1.3.1), la condición inicial (1.3.4) y las condiciones de la frontera (1.3.2), (1.3.3) correspondientes a las condiciones que plantea el problema físico.

Para solucionar la ecuación (1.3.1) se utilizará el método Fourier de variables y se buscare las soluciones no triviales, en otras palabras las soluciones que no son idénticamente nulas de la ecuación (1.3.1), del tipo

$$T(x, y) = P(x)V(t), \quad (1.3.5)$$

de modo que sustituyendo en la ecuación (1.3.1) y calculando la derivada de cada miembro de la ecuación con respecto de  $t$  y con respecto de  $x$ , se obtiene:

$$P(x) \frac{dV(t)}{dt} = \sigma V(t) \frac{d^2P(x)}{dx^2}, \quad (1.3.6)$$

así que al separar variables se llega a

$$\frac{1}{V(t)} \frac{dV(t)}{dt} = \frac{1}{P(x)} \frac{\sigma d^2P(x)}{dx^2}, \quad (1.3.7)$$

Dado que  $x$  y  $t$  son variables independientes y la igualdad debe cumplirse para cada una de éstas, entonces la única posibilidad es que cada uno de los miembros sean igual a una constante fija  $\lambda$ , que recibe el nombre de constante de separación, de modo que

$$\frac{1}{V(t)} \frac{dV(t)}{dt} = \frac{1}{P(x)} \frac{\sigma d^2 P(x)}{dx^2} = \lambda, \quad (1.3.8)$$

de donde surgen dos ecuaciones

$$\frac{1}{V(t)} \frac{dV(t)}{dt} = \lambda, \quad (1.3.9)$$

$$\frac{1}{P(x)} \frac{\sigma d^2 P(x)}{dx^2} = \lambda, \quad (1.3.10)$$

en las que  $P(x)$  satisface las condiciones de frontera

$$P(0) = 0, \quad (1.3.11)$$

$$P(a) = 0, \quad (1.3.12)$$

convirtiéndose en un problema de valores propios y que se resolverá a continuación. De (1.3.10) se tiene que:

$$\sigma \frac{d^2 P(x)}{dx^2} = \lambda P(x), \quad (1.3.13)$$

Así que, multiplicando en ambos lados de la ecuación anterior por  $P(x)$  e integrando sobre  $dx$ , se obtiene:

$$\int_0^a \sigma \frac{d^2 P(x)}{dx^2} \cdot P(x) dx = \lambda \int_0^a |P(x)|^2 dx, \quad (1.3.14)$$

después, integrando por partes sobre el intervalo  $[0, a]$

$$\left. \frac{dP(x)}{dx} P(x) \right|_0^a - \int_0^a \left( \frac{dP(x)}{dx} \right)^2 dx = \frac{\lambda}{\sigma} \int_0^a |P(x)|^2 dx, \quad (1.3.15)$$

puesto que  $P(a) = P(0) = 0$

$$\sigma \int_0^a \left| \frac{dP(x)}{dx} \right|^2 dx = -\lambda \int_0^a |P(x)|^2 dx, \quad (1.3.16)$$

para que la igualdad se cumpla,  $\lambda$  debe ser negativo, así que es posible expresar  $\lambda = -\alpha^2$ . Entonces

$$\sigma \frac{d^2 P(x)}{dx^2} + \alpha^2 P(x) = 0, \quad (1.3.17)$$

por lo tanto

$$P(x) = A \cos \left( \frac{\alpha x}{\sqrt{\sigma}} \right) + B \sin \left( \frac{\alpha x}{\sqrt{\sigma}} \right), \quad (1.3.18)$$

para que se cumplan las condiciones de frontera  $P(a) = P(0) = 0$ , entonces  $A = 0$ . Si  $x = a$

$$P(a) = B \sin \left( \frac{\alpha a}{\sqrt{\sigma}} \right) = 0, \quad (1.3.19)$$

de lo anterior se deduce que

$$\frac{\alpha a}{\sqrt{\sigma}} = n\pi, \quad (1.3.20)$$

entonces

$$\alpha_n^2 = \frac{\sigma n^2 \pi^2}{a^2}, \quad (1.3.21)$$

por lo tanto, para  $n \geq 1$  las funciones propias asociadas a  $\alpha_n^2$  se pueden expresar como:

$$P_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad (1.3.22)$$

Por otro lado, la solución para la ecuación (1.3.9) está dada por:

$$V(t) = C_n e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 t}, \quad (1.3.23)$$

y dado que la sucesión  $P_n(x)$  es una sucesión de funciones propias asociadas a los valores propios  $\alpha_n$ , conviene una notación de la siguiente manera:

$$P_n(x) = B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots,$$

y

$$V_n(t) = C_n e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 t} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots,$$

por tanto, una solución del problema es:

$$T(x, t) = P(x)V(t) = C_n e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad (1.3.24)$$

Con  $n = 1, 2, 3, \dots$  y  $C_n$  una constante arbitraria.

Después, con base en el principio de superposición, del cual se sabe que cualquier combinación lineal de las soluciones  $T_n$  también satisface la ecuación diferencial, se tiene que:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad (1.3.25)$$

la cual, satisface la condición inicial

$$T(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

y por lo anterior se observa que  $f(x)$  se puede expresar términos senoidales

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a},$$

es decir, es posible encontrar los coeficientes  $C_n$  de la serie, los cuales reciben el nombre de coeficientes de Fourier.

Así que para iniciar con el cálculo de estos coeficientes se toma un número natural  $m$  y se multiplica la expresión  $f(x)$  por la función propia  $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$  para después integrar cada lado, término a término sobre el intervalo  $[0, a]$

$$\int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx,$$

despejando  $C_n$ ,

$$C_n = \frac{\int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) f(x) dx}{\int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx},$$

y tomando en cuenta la siguiente relación de ortogonalidad

$$\int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \frac{a}{2} & \text{si } m = n \end{cases},$$

se obtiene:

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) f(x) dx,$$

que son los coeficientes de Fourier en la solución de la ecuación (1.3.1), que está dada por

$$T(x, t) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) f(x) dx \right) e^{-\sigma \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad (1.3.26)$$

### Condiciones de Neumann

Seguindo con el problema (1.3.4) se establecen las siguientes condiciones de frontera:

$$\frac{dT(0, t)}{dx} = 0, \quad (1.3.27)$$

$$\frac{dT(a, t)}{dx} = 0, \quad (1.3.28)$$

presentando un problema de conducción de calor cuyas condiciones de frontera son del tipo Neumann. Para resolver este problema se utiliza el método de separación de variables como en el caso precedente, de tal manera que se propone que la solución sea expresada en forma de producto de funciones respecto de las variables independientes  $x$  y  $t$  (1.3.5).

Para este caso, solo basta buscar soluciones  $P(x)$  del problema de valores propios (1.3.10), es decir, hay encontrar valores  $\lambda$  para los que  $P(x)$  no es idénticamente cero.

Veamos que de la expresión

$$\frac{\sigma d^2 P(x)}{dx^2} = \lambda P(x),$$

que es la misma que en el caso anterior, se deduce nuevamente que  $\lambda$  toma valores negativos es decir  $\lambda = -\alpha^2$  y que

$$P(x) = A \cos\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{\sigma}}\right) + B \sin\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{\sigma}}\right) \quad (1.3.29)$$

además e

$$\frac{dP(x)}{dx} = -\frac{\alpha A}{\sqrt{\sigma}} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{\sigma}}\right) + \frac{\alpha B}{\sqrt{\sigma}} \cos\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{\sigma}}\right) \quad (1.3.30)$$

así que para que se cumplan las condiciones de frontera (1.3.27) y (1.3.28),  $\frac{dP(a)}{dx} = \frac{dP(0)}{dx} = 0$  entonces  $A = 0$ .

Si  $x = a$

$$\frac{dP(a)}{dx} = \frac{\alpha B}{\sqrt{\sigma}} \cos\left(\frac{\alpha a}{\sqrt{\sigma}}\right) = 0, \quad (1.3.31)$$

se deduce que

$$\frac{\alpha a}{\sqrt{\sigma}} = n\pi, \quad (1.3.32)$$

entonces

$$\alpha_n^2 = \frac{\sigma n^2 \pi^2}{a^2}, \quad (1.3.33)$$

por lo tanto, para  $n \geq 1$  las funciones propias asociadas a  $\alpha_n^2$  se pueden expresar como:

$$P_0(x) = B_0 \quad (1.3.34)$$

$$P_n(x) = B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad (1.3.35)$$

así que la solución para (1.3.1) con las condiciones de frontera (1.3.27) está dada por una serie de soluciones

$$T_n(x, t) = B_n e^{-\sigma(\frac{n\pi x}{a})^2 t} \cos(\frac{n\pi x}{a}) \quad (1.3.36)$$

de modo que al utilizar el principio de superposición se tiene que:

$$T_n(x, t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\sigma(\frac{n\pi x}{a})^2 t} \cos(\frac{n\pi x}{a}), \quad (1.3.37)$$

además, si  $t = 0$  se tiene

$$T(x, 0) = f(x) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\frac{n\pi x}{a}), \quad (1.3.38)$$

pero, para obtener la solución general es necesario encontrar los coeficientes de Fourier  $B_n$  y  $B_0$  así que, multiplicando ambos lados de (1.3.38) por  $\cos(\frac{m\pi x}{a})$  se obtiene

$$f(x) \cos(\frac{m\pi x}{a}) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\frac{n\pi x}{a}) \cos(\frac{m\pi x}{a}),$$

e integrando sobre  $[0, a]$

$$\int_0^a f(x) \cos(\frac{m\pi x}{a}) dx = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^a \cos(\frac{n\pi x}{a}) \cos(\frac{m\pi x}{a}) dx,$$

además tomando en cuenta la relación de ortogonalidad

$$\int_0^a \cos(\frac{m\pi x}{a}) \cos(\frac{n\pi x}{a}) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{a}{2} & \text{si } m = n \end{cases},$$

se obtiene que

$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos(\frac{n\pi x}{a}) dx, \quad (1.3.39)$$

y

$$B_0 = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx \quad (1.3.40)$$

por lo tanto

$$T(x, t) = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} B_n = \left[ \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos(\frac{m\pi x}{a}) dx \right] e^{-\sigma(\frac{n\pi}{a})^2 t} \cos(\frac{n\pi x}{a}) \quad (1.3.41)$$

### Condiciones periódicas

Otro problema de gran importancia y que resulta interesante conocer, surge al considerar la ecuación de calor (1.3.58) con condiciones periódicas, es decir

$$T(-a, t) = T(a, t); \quad \frac{\partial T(-a, t)}{\partial x} = \frac{\partial T(a, t)}{\partial x} \quad (1.3.42)$$

Retomando la ecuación

$$\sigma \frac{d^2 P(x)}{dx^2} = \lambda P(x),$$

nuevamente deducimos que la constante  $\lambda$  toma valores negativos, es decir, que  $\lambda = -\mu^2$  y que además, como ya se vio en los casos anteriores

$$P(x) = A \cos\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{\sigma}}\right) + B \sin\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{\sigma}}\right) \quad (1.3.43)$$

de modo que para que cumpla las condiciones de periodicidad (1.3.42)

$$A \cos\left(\frac{\alpha a}{\sqrt{\sigma}}\right) + B \sin\left(\frac{\alpha a}{\sqrt{\sigma}}\right) = A \cos\left(\frac{-\alpha a}{\sqrt{\sigma}}\right) - B \sin\left(\frac{-\alpha a}{\sqrt{\sigma}}\right) \quad (1.3.44)$$

y

$$-A\alpha \sin\left(\frac{\alpha a}{\sqrt{\sigma}}\right) + B\alpha \cos\left(\frac{\alpha a}{\sqrt{\sigma}}\right) = -A\alpha \sin\left(\frac{-\alpha a}{\sqrt{\sigma}}\right) - B\alpha \cos\left(\frac{-\alpha a}{\sqrt{\sigma}}\right) \quad (1.3.45)$$

así, de (1.3.44) se deduce que

$$2B \sin\left(\frac{\alpha a}{2\sqrt{\sigma}}\right) = 0, \quad (1.3.46)$$

y de (1.3.45)

$$2A\alpha \sin\left(\frac{\alpha a}{2\sqrt{\sigma}}\right) = 0, \quad (1.3.47)$$

por lo tanto

$$\alpha_n^2 = \frac{4n^2\pi^2\sigma}{a^2}, \quad (1.3.48)$$

por lo tanto las funciones propias asociadas al valor propio  $\alpha$  para  $n \geq 0$  son:

$$Q_n(x) = A \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) + B \sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right), \quad (1.3.49)$$

cuando  $\lambda = 0$  resulta que

$$P''(x) = 0, \quad (1.3.50)$$

entonces  $P(x) = D + \phi x$ , así que evaluando en las condiciones de frontera (1.3.27) y (1.3.28) se tiene:

$$D + \phi(a) = D + \phi(0), \quad (1.3.51)$$

entonces  $\phi = 0$  de modo que  $P(x) = D$ , que también satisface la propiedad de la derivada respecto a la variable  $x$ . Así las funciones propias respecto al valor propio  $\alpha_n^2$  se pueden desarrollar como series del conjunto  $\{1, \sin\left(\frac{2n\pi y}{a}\right), \cos\left(\frac{2n\pi y}{a}\right)\}$

Así para cada valor propio  $\lambda_n$  corresponde una función propia de la forma

$$P_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad (1.3.52)$$

por lo tanto la solución es de la forma

$$T_n(x, t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 t}, \quad (1.3.53)$$

y por el principio de superposición es posible escribir

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)] e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 t}, \quad (1.3.54)$$

Si además se sustituye la condición inicial, se obtiene

$$T(x, 0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)] \quad (1.3.55)$$

de donde se buscarán los coeficientes de Fourier. Observar que el lado derecho es una serie de Fourier, luego si  $f(x)$  satisface las condiciones para que sea reproducible por una serie de Fourier, entonces los  $A_n$  y  $B_n$  tienen que ser sus coeficientes de Fourier, donde:

$$A_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx, \quad (1.3.56)$$

y

$$B_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx, \quad (1.3.57)$$

Por lo tanto

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \left( \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right] e^{-\sigma \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 t}$$

### Ecuación de calor con condiciones de frontera de Dirichlet no homogéneas

Supóngase, que las temperaturas de los extremos de una barra se encuentran constantes, es decir las condiciones de frontera son del tipo Dirichlet

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1.3.58)$$

$$T(0, t) = \gamma_1, \quad t > 0, \quad (1.3.59)$$

$$T(a, t) = \gamma_2, \quad t > 0, \quad (1.3.60)$$

$$T(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq a, \quad (1.3.61)$$

donde  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son constantes y  $\sigma$  es la constante de difusividad térmica. Para obtener la solución a este planteamiento es preferente reducirlo a un problema más sencillo que contenga condiciones de frontera homogéneas.

Notemos que la función

$$r(x) = (\gamma_2 - \gamma_1) \frac{x}{a} + t_1, \quad (1.3.62)$$

satisface la ecuación del calor y las condiciones de contorno (1.3.59) y (1.3.60) de modo que

$$T(x, t) = s(x, t) + r(x), \quad (1.3.63)$$

Primero al sustituir (1.3.63) en (1.3.58)

$$\frac{\partial s(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2}$$

Por otro lado al sustituir (1.3.63) en las condiciones de frontera (1.3.59) y (1.3.60)

$$\begin{aligned} s(0, t) &= T(0, t) - r(0) \\ &= t_1 - \left( (\gamma_2 - \gamma_1) \frac{0}{a} + \gamma_1 \right) \\ &= \gamma_1 - \gamma_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(a, t) &= T(a, t) - r(a) \\ &= \gamma_2 - \left( (\gamma_2 - \gamma_1) \frac{a}{a} + \gamma_1 \right) \\ &= \gamma_2 - \gamma_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por último, al sustituir (1.3.63) en la condición inicial (1.3.61) se tiene

$$\begin{aligned} s(x, 0) &= T(x, 0) - r(x) \\ &= f(x) - \left( (\gamma_2 - \gamma_1) \frac{x}{a} + \gamma_1 \right) \end{aligned}$$

Así el problema original se reduce a un problema más sencillo y queda de la siguiente manera

$$\frac{\partial s(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1.3.64)$$

$$s(0, t) = 0 \quad t \geq 0, \quad (1.3.65)$$

$$s(a, t) = 0 \quad t \geq 0, \quad (1.3.66)$$

$$s(x, 0) = f(x) - \left( (t_2 - t_1) \frac{x}{a} + t_1 \right) \quad 0 \leq x \leq a, \quad (1.3.67)$$

donde  $\sigma$  es la constante de difusividad térmica.

Tomando como referencia la solución para el problema de conducción de calor con condiciones de frontera homogéneas (1.3.1) se obtiene una solución similar para (1.3.64)-(1.3.67), que se expresa de la siguiente manera

$$s(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\sigma \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad (1.3.68)$$

así que sustituyendo (1.3.68) en (1.3.63) se obtiene

$$T(x, t) = \left[ (\gamma_2 - \gamma_1) \frac{x}{a} + \gamma_1 \right] + \sum_{n=1}^N B_n e^{-\sigma \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad (1.3.69)$$

donde

$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a \left[ f(x) - \left( (\gamma_2 - \gamma_1) \frac{x}{a} + \gamma_1 \right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx, \quad (1.3.70)$$

## Capítulo 2

# Conducción de calor en una celda compuesta por ladrillos unidos con contacto perfecto

### 2.1. Planteamiento del problema

Uno de los grandes problemas a los que se ha enfrentado el hombre desde el inicio de su existencia es de encontrar métodos eficaces para lidiar con los fenómenos naturales. Uno de éstos es el cambio de temperaturas que en algunos lugares del planeta se presentan de manera brusca propiciando negativas principalmente problemas de salud y problemas económicos [3].

En la actualidad existen una multitud de formas que ayudan a la humanidad a lidiar con los cambios de temperatura a nivel global, uno de estos es el uso de sistemas de calefacción o aire acondicionado al interior de la viviendas que tienen la finalidad de regular la temperatura hasta alcanzar un ambiente adecuado para vivir cómodamente, pero estos sistemas traen consigo una desventaja y es el consumo excesivo de energía que se refleja en un gasto económico. Para entender mejor el problema se considera una habitación que se encuentra bajo la influencia de los cambios de temperatura exteriores y se involucra un sistema de calefacción o aire acondicionado al interior, para regular la temperatura hasta lograr un estado de confort, cuando se alcanza este estado, el sistema de aire se desactiva, después de cierto tiempo y por influencia de la temperatura exterior, la temperatura de la habitación pierde el estado de confort alcanzado, dando paso a la activación del sistema de aire acondicionado nuevamente, generando un proceso iterativo.

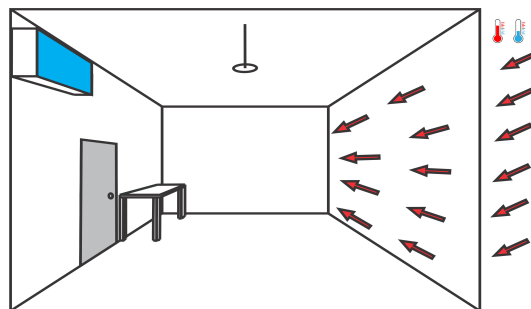


Figura 2.1: Habitación con aire acondicionado y bajo los efectos del clima exterior.

Ante la situación descrita, se hace un análisis de la transferencia de calor en una de las paredes de la habitación, con la finalidad de conocer como se distribuye el calor y el momento adecuado en que el aire acondicionado se debe activar. Se hace a través de una pared homogénea que se compone de ladrillos unidos por contacto perfecto, es decir que no existen irregularidades en la unión de un ladrillo respecto a otro y que las condiciones naturales de contorno, tanto de flujo de calor como de temperatura de las fronteras de cada ladrillo desaparecen; para ello se hará un análisis de una región más simple y repetitiva extraída de toda la estructura, una celda.

## 2.2. Modelo matemático del problema

La celda Fig.(2.2) se representará por la región en el espacio  $\Omega := (0, a) \times (-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}) \times (-\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$ , donde  $a$  es la profundidad del ladrillo,  $b$  representa el largo y  $c$  la altura y cada uno de los lados se definen de la siguiente manera:

	Descripción	Condiciones de frontera
$L_{int} := \{(a, y, z) : -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \leq z \leq \frac{c}{2}\}$	Lado interno	Dirichlet
$L_{ext} := \{(0, y, z) : -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \leq z \leq \frac{c}{2}\}$	Lado externo	Dirichlet
$L_{der} := \{(x, \frac{b}{2}, z) : 0 \leq x \leq a, -\frac{c}{2} \leq z \leq \frac{c}{2}\}$	Lado derecho	Periódicas
$L_{izq} := \{(x, -\frac{b}{2}, z) : 0 \leq x \leq a, -\frac{c}{2} \leq z \leq \frac{c}{2}\}$	Lado izquierdo	Periódicas
$L_{sup} := \{(x, y, \frac{c}{2}) : 0 \leq x \leq a, -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}\}$	Lado superior	Periódicas
$L_{inf} := \{(x, y, -\frac{c}{2}) : 0 \leq x \leq a, -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}\}$	Lado inferior	Periódicas

En cada uno de los lados del paralelepípedo  $\Omega$  se definen condiciones de frontera referentes al evento físico, en el caso de los lados correspondientes al eje  $x$  se definen condiciones de tipo Dirichlet, que son: una temperatura constante  $T_{int}$  para el lado interior y  $f(t)$  que describe la temperatura a lo largo del día, para el lado exterior.

Por la forma en que se ordenan los ladrillos en la estructura de una pared y la repetición continua de la celda, las condiciones que se definen para los lados derecho e izquierdo correspondientes al eje  $y$  son de tipo periódicas.

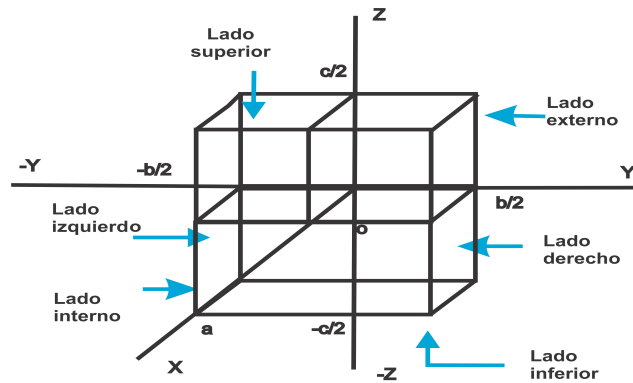


Figura 2.2: Celda conformada por dos mitades de ladrillos y un ladrillo entero.

Y para las condiciones correspondientes a la dirección del eje  $z$  se establecen por la estructura de la celda y la posición en la que se acomodan los ladrillos, de tal modo que también se consideran de tipo periódicas. (ver Figura 2.3)

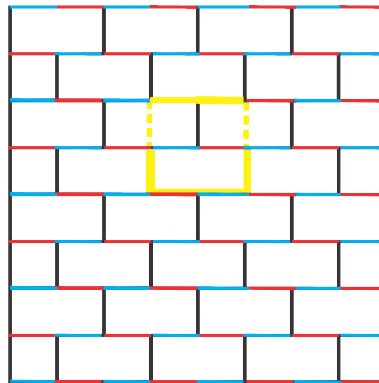


Figura 2.3: Las condiciones de frontera para la dirección  $z$  se establecen al considerar condiciones de cada ladrillo dividido por la mitad de modo que las condiciones de frontera para la celda son las mismas en el lado superior y el lado inferior, por lo que se consideran como condiciones de frontera periódicas.

Consideramos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \bar{T}(x, y, z, t)}{\partial t} = \sigma \left( \frac{\partial^2 \bar{T}(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right), \quad (2.2.1)$$

$$\bar{T}(a, y, z, t) = T_{int}, \quad \bar{T}(0, y, z, t) = f(t), \quad -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, \quad -\frac{c}{2} \leq z \leq \frac{c}{2}, \quad t \geq 0, \quad (2.2.2)$$

$$\bar{T}(x, \frac{b}{2}, z, t) = \bar{T}(x, -\frac{b}{2}, z, t), \quad \frac{\partial \bar{T}(x, \frac{b}{2}, z, t)}{\partial y} = \frac{\partial \bar{T}(x, -\frac{b}{2}, z, t)}{\partial y}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad -\frac{c}{2} \leq z \leq \frac{c}{2}; \quad (2.2.3)$$

$$\bar{T}(x, y, \frac{c}{2}, t) = \bar{T}(x, y, -\frac{c}{2}, t), \quad \frac{\partial \bar{T}(x, y, \frac{c}{2}, t)}{\partial z} = \frac{\partial \bar{T}(x, y, -\frac{c}{2}, t)}{\partial z}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}; \quad (2.2.4)$$

$$\bar{T}(x, y, z, 0) = \bar{T}_0(x, y, z), \quad (2.2.5)$$

donde  $f(t)$  es la función que describe la variación de temperatura de un día (Ver sección 2.5).

Dado que estamos considerando que las temperaturas en las caras exterior e interior de la pared no dependen de las variables espaciales  $y$  y  $z$ , veamos que la temperatura inicial  $T_0(x, y, z)$  de la pared tiene que depender solo de la variable  $x$  y encontraremos su expresión.

En efecto,  $T_0(x, y, z)$  denota la distribución estacionaria de la temperatura en la pared y por ello supondremos que satisface la ecuación del calor estacionaria, es decir

$$\Delta T_0 = \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} = 0$$

y las condiciones de contorno

$$T_0(a, y, z) = T_{int}, \quad T_0(0, y, z) = f(0)$$

Este problema tiene solución única y, por lo tanto, si encontramos una solución que dependa únicamente de la variable  $x$  ésta tiene que ser única solución.

Pero si  $T_0$  dependiera solamente de la variable  $x$ , tendríamos que

$$\frac{d^2 T_0(x)}{dx^2} = 0, \quad (2.2.6)$$

$$T_0(a) = T_{int}, \quad T_0(0) = f(0), \quad (2.2.7)$$

Pero de (2.2.6) se tiene que

$$T_0(x) = \alpha x + \beta$$

y de (2.2.7) se obtiene  $\beta = f(0)$  y  $T_0(a) = \alpha a + f(0) = T_{int}$ , de donde  $\alpha = \frac{T_{int} - f(0)}{a}$ , o sea  $T_0(x)$  debe ser de la forma:

$$T_0(x) = (T_{int} - f(0)) \frac{x}{a} + f(0), \quad (2.2.8)$$

Pero, una vez que sabemos que  $T_0(x)$  tiene la forma (2.2.8), entonces por la unicidad de solución de sistema (2.2.1)-(2.2.5) concluimos que si dicho sistema tiene alguna solución que dependa solamente de la variable  $x$ , ésta tendrá que ser una única solución.

Es fácil ver que la solución del sistema (2.2.1)-(2.2.5) que dependen únicamente de la variable  $x$  satisface el sistema:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2}, \quad 0 < x < a, \quad (2.2.9)$$

$$\bar{T}(0, t) = f(t), \quad \bar{T}(a, t) = T_{int}, \quad (2.2.10)$$

$$\bar{T}(x, 0) = T_0 = (T_{int} - f(0))\frac{x}{a} + f(0), \quad (2.2.11)$$

Notemos que las condiciones de periodicidad (2.2.3) y (2.2.4) desaparecen cuando suponemos que  $\bar{T}$  no depende de  $y$  ni de  $z$ .

Pero es conocido que el sistema (2.2.9)-(2.2.11) tiene solución única que es también solución única del sistema (2.2.1)-(2.2.5), la cual, como vemos no depende de  $y$  ni de  $z$ .

*Observación:* Dado que la solución del sistema (2.2.1)-(2.2.2) no depende de las variables  $y$ ,  $z$  y se reduce al sistema mas simple (2.2.9)-(2.2.11) se concluye que, el caso en que los ladrillos están unidos por contacto perfecto es insustancial considerar la celda de la figura 2.2, es decir se pierden las condiciones de contorno periódicas y la pared completa se comporta como una unidad por lo cual el papel de los ladrillos se hace irrelevante.

A partir de ahora consideraremos el sistema (2.2.9)-(2.2.11) para toda la pared.

### 2.3. Solución analítica del modelo (2.2.9)-(2.2.11)

Notemos que el problema (2.2.9)-(2.2.11) es un problema auxiliar del problema (1.3.58)-(1.3.61) salvo que la condición de contorno (1.3.59) no depende de  $t$  ( $T(0, t) = \gamma_1$ ) mientras que, en nuestro caso, la condición de contorno para  $\bar{T}(0, t) = f(t)$ .

Haciendo el cambio de variable

$$\bar{T}(x, y, z, t) = \bar{T}(x, y, z, t) - H_0(x, t), \quad (2.3.1)$$

donde

$$H_0(x, t) = (T_{int} - f(t))\frac{x}{a} + f(t), \quad (2.3.2)$$

entonces el problema (2.2.1)-(2.2.3) se convierte en el siguiente problema con condiciones de contorno homogéneas:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left(\frac{x}{a} - 1\right) \frac{df}{dt}, \quad (2.3.3)$$

$$T(0, t) = T(a, t) = 0, \quad (2.3.4)$$

$$T(x, 0) = 0, \quad (2.3.5)$$

Notemos que, a diferencia del problema (1.3.58)-(1.3.61) en el que, cuando se hizo el cambio de variable (1.3.63) se obtuvo el problema (1.3.64)-(1.3.67) para la función  $S(x, t)$  queda homogénea mientras que, en nuestro caso, al hacer el cambio de variable de  $\bar{T}$  a  $T$ , la ecuación diferencial (2.3.3) que se obtiene para  $T$  no es homogénea.

Del hecho que la solución del problema (1.3.64)-(1.3.67) con condiciones de contorno homogéneas se pueda expresar en la forma expresaren la forma (1.3.68) nos sugiere que una buena base ortogonal en  $L_2(0, a)$  para expresar la solución del problema (2.3.3)-(2.3.5) es precisamente  $\{\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\}_{n=1}^{\infty}$  la cual se puede ortonormalizar multiplicando a cada lado de la base por factor  $\sqrt{\frac{2}{a}}$ . Entonces buscaremos la solución de (2.3.3)-(2.3.5) en la forma:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \sqrt{\frac{2}{a}} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad (2.3.6)$$

Es claro que si la serie en (2.3.6) converge adecuadamente, entonces la función  $T(x, t)$  satisface siempre las condiciones de contorno (2.3.4).

Se expresará la función  $(1 - \frac{x}{a})$  en serie con respecto a la base ortonormal  $\sqrt{\frac{2}{a}} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ , con  $n \geq 1$  de  $L_2(0, a)$ . En efecto:

$$1 - \frac{x}{a} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sqrt{\frac{2}{a}} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad (2.3.7)$$

donde  $\alpha_n$  son los coeficientes de Fourier de la función  $1 - \frac{x}{a}$  con respecto a dicho sistema ortonormal, es decir:

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{\sqrt{2a}}{n\pi}, \quad (2.3.8)$$

sustituyendo (2.3.8) en (2.3.7) y posteriormente en (2.3.3) se llega a la ecuación:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} - \frac{2}{\pi} f'(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right), \quad (2.3.9)$$

en la que la serie en (2.3.7) converge en la norma de  $L_2(0, a)$ .

Ahora se supondrá que los coeficientes  $C_n(t)$  en (2.3.6) son tales que la serie (2.3.6) puede ser derivada término a término, una vez respecto a  $t$  y dos veces con respecto a  $x$ , dando como resultado, en cada caso, una función de  $L_2(0, a)$  para cada valor de  $t > 0$ .

Entonces sustituyendo la expresión de (2.3.6) en (2.3.9) se llega a:

$$\sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} C'_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) + \sigma \sqrt{\frac{2}{a}} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) n^2 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) = -\frac{2}{\pi} f'(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right),$$

y agrupando convenientemente se llega a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ C'_n(t) + \sigma \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 n^2 C_n(t) + \frac{\sqrt{2a}}{n\pi} f'(t) \right] \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \equiv 0, \quad (2.3.10)$$

$$\forall t > 0, \forall x \in [0, a]$$

Entonces del hecho que  $\sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right)$  es una base ortonormal en  $L_2(0, a)$  de (2.3.10) se deduce que

$$C'_n(t) + \sigma \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 n^2 C_n(t) + \frac{\sqrt{2a}}{n\pi} f'(t) = 0; \quad \forall t > 0, \forall n \geq 1, \quad (2.3.11)$$

Pero notar que, cada una de las ecuaciones (2.3.11) es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden para la función  $C_n(t)$ .

Como además se tiene que cumple la condición inicial (2.3.5), entonces al evaluar en  $t = 0$  la expresión (2.3.6) queda que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(0) \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \equiv 0,$$

de donde, nuevamente, por ser  $\sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right)$  una base ortonormal de  $L_2(0, a)$  se concluye que

$$C_n(0) = 0 \quad \forall n \geq 1, \quad (2.3.12)$$

Resolviendo ahora cada una de las ecuaciones (2.3.11) en la condición inicial (2.3.12), es fácil ver que la solución es:

$$C_n(t) = -\frac{\sqrt{2a}}{n\pi} \int_0^t e^{\sigma \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 n^2 (\tau-t)} f'(\tau) d\tau, \quad (2.3.13)$$

Entonces, finalmente, la solución  $T(x, t)$  del problema (2.3.3)-(2.3.5) se expresa en la forma de la serie (2.3.6) donde los coeficientes  $C_n$  se calculan mediante la fórmula (2.3.13).

Para este trabajo es de interés la solución  $\bar{T}(x, t)$  del problema original (2.2.1)-(2.2.4), pero ésta se obtiene a partir de la solución  $T(x, t)$  utilizando la fórmula (2.2.11).

A continuación se verá una expresión analítica explícita para la función  $f(t)$  que reproduce de forma bastante realista lo que ocurre en la trayectoria diaria de la temperatura durante la primavera-verano en un país como México.

Esto nos permitirá obtener una expresión concreta para la solución  $\bar{T}(x, t)$  del sistema (2.2.1)-(2.2.5).

## 2.4. Una expresión analítica para la función $f(t)$

Se supondrá ahora que  $f(t)$  se comporta de forma periódica con un periodo de un día, o sea 24 horas y que hay tres horarios en el día que marcan una diferencia más o menos significativa en el comportamiento de la temperatura. Ésta última suposición se basa en el hecho cotidiano de que en la madrugada hay

una temperatura mas fresca que comienza a subir a lo largo de la mañana hasta que llega a un valor máximo en las primeras horas de la tarde y posteriormente comienza a bajar hasta que de nuevo alcanza un mínimo en la madrugada siguiente. Si se miden las 24 horas del día considerando la hora 0 como las 12 de la noche de un día y las 24 como las 12 de la noche del día siguiente, se hará la suposición de que el mínimo se alcanza entre las 5 ó 6 de la madrugada y el máximo entre las 2 y 4 de la tarde y así se repite periódicamente cada día, mostrándose un patrón como el de la figura siguiente:

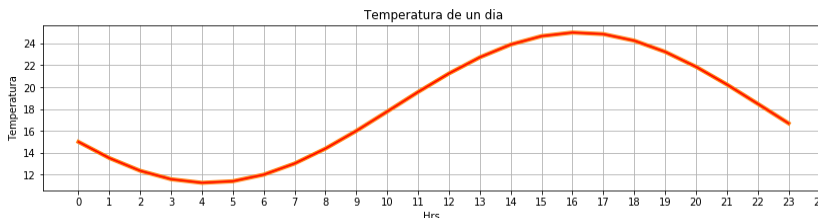


Figura 2.4: Gráfica del clima de un día arbitrario.

Un comportamiento de este tipo se reproduce fácilmente con una expresión del tipo:

$$f(t) = f_0 + f_1 \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) + f_2 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right), \quad (2.4.1)$$

donde los valores se determinan de manera única si se dan los valores mínimo y máximo de la temperatura así como la temperatura en  $t = 0$ . Más adelante se obtendrán los valores de  $f_0$ ,  $f_1$ , y  $f_2$  partiendo de mediciones reales de la temperatura a lo largo del día en ciertos puntos de monitoreo.

Es posible calcular ahora la expresión explícita de los coeficientes en (2.3.13) utilizando la fórmula para  $f(t)$  dada en (2.4.1).

Así se obtiene:

$$C_n(t) = \frac{\sqrt{2a}}{12n} e^{-\sigma\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 t} \left[ f_2 \int_0^t e^{\sigma\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 \tau} \cos\left(\frac{\pi \tau}{12}\right) d\tau - f_1 \int_0^t e^{\sigma\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 \tau} \sin\left(\frac{\pi \tau}{12}\right) d\tau \right],$$

Calculando por separado cada una de las dos integrales se obtiene:

$$\int_0^t e^{\sigma\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 \tau} \cos\left(\frac{\pi \tau}{12}\right) d\tau = \frac{12 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) e^{\sigma\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 t} + \frac{12\sigma\pi}{a^2} n^2 \left( \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) e^{\sigma\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 t} - 1 \right)}{\left(1 + \left(\frac{12\sigma\pi n^2}{a^2}\right)^2\right)}$$

$$\int_0^t e^{\sigma\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 \tau} \sin\left(\frac{\pi \tau}{12}\right) d\tau = \frac{12 \frac{12\sigma\pi n^2}{a^2} \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) e^{\sigma\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 t} + \left(1 - \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) e^{\sigma\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 t}\right)}{\left(1 + \left(\frac{12\sigma\pi n^2}{a^2}\right)^2\right)}$$

Finalmente queda:

$$\begin{aligned} C_n(t) &= \frac{\sqrt{2a} e^{-\sigma\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 t}}{\pi n \left(1 + \left(\frac{12\sigma\pi n^2}{a^2}\right)^2\right)} \left[ \left(\frac{12\sigma\pi n^2}{a^2} f_2 + f_1\right) \left(1 - \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) e^{\sigma\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 t}\right) - \left(f_2 - \frac{12\sigma\pi n^2}{a^2} f_1\right) \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) e^{\sigma\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 t} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2a}}{\pi n \left(1 + \left(\frac{12\sigma\pi n^2}{a^2}\right)^2\right)} \left[ \left(\frac{12\sigma\pi n^2}{a^2} f_2 + f_1\right) \left(e^{-\sigma\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 t} - \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)\right) - \left(f_2 - \frac{12\sigma\pi n^2}{a^2} f_1\right) \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

## 2.5. Cálculo de los coeficientes $f_1$ , $f_1$ , $f_2$ para datos reales de la temperatura diaria

Tomando de manera general tres temperaturas clave de distintas horas de un día cualquiera,  $\phi_0$  =(temperatura al inicio del día),  $\phi_{min}$  =(temperatura mínima del día),  $\phi_{max}$  =(temperatura máxima en el día) y sustituyendo en (2.4.1) se obtiene:

$$f(0) = f_0 + f_1 \cos\left(\frac{0\pi}{12}\right) + f_2 \operatorname{sen}\left(\frac{0\pi}{12}\right) = \phi_0$$

$$\Rightarrow f_0 + f_1 = \phi_0$$

$$f(6) = f_0 + f_1 \cos\left(\frac{6\pi}{12}\right) + f_2 \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{12}\right) = \phi_{min}$$

$$\Rightarrow f_0 + f_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + f_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \phi_{min}$$

$$\Rightarrow f_0 + f_2 = \phi_{min}$$

$$f(14) = f_0 + f_1 \cos\left(\frac{14\pi}{12}\right) + f_2 \operatorname{sen}\left(\frac{14\pi}{12}\right) = \phi_{max}$$

observar que  $\frac{7\pi}{6} = 210^\circ = 2 * 90^\circ + 30^\circ$  por tanto

$$f(14) = f_0 - \frac{f_2}{2} - \frac{f_1\sqrt{3}}{2} = \phi_{max}$$

de modo que el sistema conformado por las ecuaciones anteriores

$$f_0 + f_1 = \phi_0$$

$$f_0 + f_2 = \phi_{min}$$

$$f_0 - \frac{f_1\sqrt{3}}{2} - \frac{f_2}{2} = \phi_{max},$$

tiene por solución

$$f_0 = \frac{2\phi_{max} + \phi_0\sqrt{3} + \phi_{min}}{3 + \sqrt{3}},$$

$$f_1 = \phi_0 - \frac{2\phi_{max} + \phi_0\sqrt{3} + \phi_{min}}{3 + \sqrt{3}},$$

$$f_2 = \phi_{min} - \frac{2\phi_{max} + \phi_0\sqrt{3} + \phi_{min}}{3 + \sqrt{3}},$$

de modo que se obtiene:

$$f(t) = \frac{2\phi_{max} + \phi_0\sqrt{3} + \phi_{min}}{3 + \sqrt{3}} + \left(\phi_0 - \frac{2\phi_{max} + \phi_0\sqrt{3} + \phi_{min}}{3 + \sqrt{3}}\right) \cos\left(\frac{t\pi}{12}\right)$$

$$+ \left(\phi_{min} - \frac{2\phi_{max} + \phi_0\sqrt{3} + \phi_{min}}{3 + \sqrt{3}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{t\pi}{12}\right), \quad (2.5.1)$$

Para el caso en el que  $\phi_{max} = 25C^\circ$ ,  $\phi_{min} = 12C^\circ$  y  $\phi_0 = 15C^\circ$  se obtiene valores para  $f_0 = 18.5925$ ,  $f_1 = -3.5925$  y  $f_2 = -6.5925$ , de modo que al sustituirlos en (2.4.2) se tiene la siguiente expresión:

$$C_n(t) = \left[ \left( \frac{79.1102\sigma\pi n^2}{a^2} + 3.5925 \right) \left( e^{-\sigma\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 t} - \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) \right) - \left( -6.5925 + \frac{43.1102\sigma\pi n^2}{a^2} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right) \right] *$$

$$* \frac{\sqrt{2}ae^{-\sigma\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 t}}{\pi n \left( 1 + \left( \frac{12\sigma\pi n^2}{a^2} \right)^2 \right)}, \quad (2.5.2)$$

## 2.6. Expresiones analíticas para la temperatura y el flujo de calor

Como se ha visto, una buena aproximación de la distribución de temperatura a través de una pared de ancho  $a$ , hecha de ladrillos homogéneos con conductividad constante fija  $\sigma$  viene dada por la expresión:

$$\bar{T}(x, t) = T(x, t) + H_0(x, t), \quad (2.6.1)$$

donde:

$$H_0(x, t) = (T_{int} - f(t))\frac{x}{a} + f(t), \quad (2.6.2)$$

con  $T_{int}$  la temperatura constante que se mantiene mediante un equipo de aire acondicionado en la habitación limitada por la pared y

$$f(t) = f_0 + f_1 \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) + f_2 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right), \quad (2.6.3)$$

es la temperatura en la cara exterior de la pared que es calentada por el sol.

Los coeficientes  $f_0$ ,  $f_1$  y  $f_2$  fueron calculados por datos reales y en México en primavera-verano, en una ciudad como Puebla, toman aproximadamente los valores:  $f_0 = 18.5925$ ,  $f_1 = -3.5925$  y  $f_2 = -6.5925$

Además  $T(x, t)$  viene expresado por la serie convergente (2.3.6) donde los coeficientes  $C_n$  vienen dados en (2.3.13).

Se ha visto que los parámetros  $f_0$ ,  $f_1$ , y  $f_2$  toman valores aproximados iguales a 18.6, -3.6, -6.6 respectivamente. Entonces de la expresión (2.4.2) para los coeficientes  $C_n(t)$ , es decir

$$C_n(t) = \frac{\sqrt{2a}}{\pi n(1+x^2n^4)} \left[ (xn^2f_2 + f_1)(e^{-\sigma(\frac{\pi}{a})^2n^2t} - \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)) - (f_2 - xn^2f_1) \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) \right],$$

donde  $x = \frac{12\pi\sigma}{a^2}$ , se tienen los estimados:

$$\begin{aligned} |C_n(t)| &\leq \frac{\sqrt{2a}}{\pi n(1+x^2n^4)} [(f_2 - xn^2f_1)(1) - (xn^2f_2 + f_1)(2)] \\ &\leq \frac{\sqrt{2a}}{\pi n(x^2n^4)} [(|f_2| - xn^2|f_2|) - 2(xn^2|f_2| + |f_2|)] \\ &\leq \frac{\sqrt{2a}|f_2|}{\pi x^2n^5} [(1 - xn^2) - 2(xn^2 + 1)] \\ &\leq \frac{\sqrt{2a}|f_2|}{\pi x^2n^5} [xn^2 + 2n^2] \\ &\leq \frac{\sqrt{2a}|f_2|3xn^2}{\pi x^2n^5} \\ &\leq \frac{\sqrt{2a}|f_2|3}{\pi xn^3}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$|C_n(t)| \leq \frac{(3)(6.6)(\sqrt{2a})}{(12)\left(\frac{\pi^2\sigma}{a^2}\right)(n^3)},$$

y teniendo en cuenta los valores considerados para  $a$  y  $\sigma$  para un ladrillo de construcción:  $a = 0.1$  m,  $\sigma = 0.52 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$  (Ver tabla 2.1).

Y si se reduce a la escala temporal de horas en que está dada la función  $f(t)$  se obtiene que  $\sigma = 0.187 \times 10^{-2} \text{ m}^2/h$  y se llega al estimado:

$$|C_n(t)| \leq \frac{0.4}{n^3} \quad \forall n \geq 1, \quad (2.6.4)$$

si se utiliza el estimado (2.6.4) junto con la expresión (2.3.6) para  $T(x, t)$  se llega a que  $T(x, t)$  se puede escribir en la forma:

Material	Difusividad ( $\frac{m^2}{s}$ )
Aluminio	$97.5 \times 10^{-6}$
Hierro	$22.8 \times 10^{-6}$
Mármol	$1.2 \times 10^{-6}$
Hielo	$1.2 \times 10^{-6}$
Concreto	$0.75 \times 10^{-6}$
Ladrillo	$0.52 \times 10^{-6}$
Vidrio	$0.34 \times 10^{-6}$
Madera	$0.13 \times 10^{-6}$
Corcho	$0.038 \times 10^{-6}$
Lana de vidrio	$0.023 \times 10^{-6}$
Lana de mineral de roca	$0.022 \times 10^{-6}$
Poliestireno expandido	$0.035 \times 10^{-6}$
Poliestireno Extruido	$0.026 \times 10^{-6}$

Cuadro 2.1: Difusividad térmica de algunos materiales [5].

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^N C_n(t) \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) + R_N(t, x), \quad (2.6.5)$$

donde  $R_N(x, t) = \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n(t) \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right)$ ; y del estimado (2.6.4) se llega a que

$$|R_N(t, x)| \leq 0.4 \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3},$$

Pero es conocido que el resto de la serie de término general  $\frac{1}{n^3}$  a partir de  $n = N + 1$ , se puede acotar por  $\frac{M}{N^3}$  donde  $M$  es una constante menor o igual a 2 y, por lo tanto, tomando  $a = 0.10$  m, se obtiene:

$$|R_N(t, x)| \leq \frac{3.57}{N^3}, \quad (2.6.6)$$

De (2.6.5) se deduce que el término  $R_N(t, x)$  puede considerarse muy pequeño si se toma  $N$  suficientemente grande, por lo cual se puede despreciar el término  $R_N(x, t)$  en la expresión (2.6.5). Por ejemplo, hasta considerar  $N = 2$  para que la sumatoria  $\sum_{n=1}^2 C_n(t) \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right)$  sea una aproximación para  $T(x, t)$  con un error menor de  $0.4^\circ C$ .

Es decir que se ha llegado al primer resultado importante de este trabajo y es la siguiente:

La temperatura en cualquier punto interior de la pared a una profundidad  $x$  (medida del exterior al interior) con  $0 \leq x \leq a$  puede ser calculada con un error de  $0.4^\circ C$  por la fórmula:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^2 C_n(t) \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) + (T_{int} - f(t)) \frac{x}{a} + f(t), \quad (2.6.7)$$

donde  $C_n(t)$  viene dado por la fórmula (2.4.2) y  $f_0 = 18.6$ ,  $f_1 = -3.6$ ,  $f_3 = -6.6$

Observar que  $T(0, t) = f(t)$  y  $T(a, t) = T_{int}$

Notar que, utilizando la expresión (2.4.2) para los coeficientes  $C_n(t)$ , se puede escribir la fórmula (2.6.7) en la forma:

$$\begin{aligned} \bar{T}(x, t) = & \frac{2}{\pi} \left[ \left( \sum_{n=1}^2 \alpha_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{12} \right) + \left( \sum_{n=1}^2 \beta_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \right) \cos \left( \frac{\pi t}{12} \right) \right] - \\ & - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^2 \beta_n e^{-\sigma \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 n^2 t} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) + (T_{int} - f(t)) \frac{x}{a} + f(t), \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

Es fácil ver que se tienen las siguientes cotas:

$$\left| \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^2 \beta_n e^{-\sigma \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 t} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \right| \leq \frac{\sqrt{2a}}{6\pi\sigma} \left( \frac{a}{\pi} \right)^2 |f_1 + f_2| \sum_{n=1}^2 \frac{e^{-\sigma \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 t}}{n^3} \leq \frac{\sqrt{2a}(1.12)}{6\pi\sigma} \left( \frac{a}{\pi} \right)^2 |f_1 + f_2| e^{-\sigma \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 t},$$

Para los valores estándar de  $a = 0.1$ ,  $\sigma = 0.187 \times 10^{-2} m^2/h$ ,  $f_1 = -3.6$ ,  $f_2 = -6.6$ , se obtiene la cota

$$\left| \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^4 \beta_n e^{-\sigma \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 t} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \right| \leq 0.148 e^{-1.84t}, \quad (2.6.9)$$

Obviamente la parte derecha de la desigualdad (2.6.9) es menor que 0.15 para cualquier valor de  $t \geq 0$  y, por lo tanto, dado que la expresión (2.6.8) nos daba una aproximación de la temperatura  $\bar{T}(x, t)$  a lo ancho de la pared para todo  $t$  con un error de  $0.4^\circ C$ , si se elimina el  $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^4 \beta_n e^{-\sigma \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 t} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right)$ , el término restante en (2.6.8) estará dando una expresión aproximada de  $\bar{T}(x, t)$  con un error de  $0.55^\circ C$ .

De aquí obtener el segundo resultado importante:

La temperatura en cualquier punto interior de la pared a una profundidad  $x$  (medida del exterior al interior) con  $0 \leq x \leq a$  puede ser calculada con un error de  $0.55^\circ C$ , por la fórmula:

$$\begin{aligned} \bar{T}(x, t) = \frac{2}{\pi} \left[ \left( \sum_{n=1}^4 \alpha_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{12} \right) + \left( \sum_{n=1}^4 \beta_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \right) \cos \left( \frac{\pi t}{12} \right) \right] + \\ + (T_{int} - f(t)) \frac{x}{a} + f(t), \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

donde:

$$\alpha_n = \alpha_n(a, \sigma) = - \frac{\left( f_2 - \frac{12\sigma\pi n^2}{a} f_1 \right)}{n \left( 1 + \left( \frac{12\sigma\pi n^2}{a^2} \right)^2 \right)}; \quad \beta_n = \beta_n(a, \sigma) = - \frac{\left( \frac{12\sigma\pi n^2}{a} f_2 + f_1 \right)}{n \left( 1 + \left( \frac{12\sigma\pi n^2}{a^2} \right)^2 \right)}, \quad (2.6.11)$$

**NOTA:** Observar que se han efectuado los estimados suponiendo que  $a = 0.1m$  pero dado que estos estimados no son muy sensibles al valor de  $a$ , se podría suponer que (2.6.10) se mantiene válida aún para valores de  $a$  entre 0 y  $0.5m$ , lo que equivaldría a una pared con una profundidad de medio metro, lo suficiente para poder aplicar (2.6.10) a cualquier pared con un error aproximado de  $1^\circ C$ .

Se pasará ahora a encontrar una fórmula aproximada para el flujo de calor en la pared interior correspondiente a  $x = a$ .

Se observa que, el hecho de que la solución del problema original (2.2.1)-(2.2.5) dependa únicamente de las variables  $x$  y  $t$  nos dice que, en el caso de contacto perfecto, toda la pared se comporta igual que una celda, ya que desaparecen las condiciones de contorno periódicas en  $y$  y en  $z$  y, por lo tanto, si se quiere calcular el flujo de calor en  $x = a$  a través de una pared de grosor  $a$  por metro cuadrado (medido en  $Wats$  o  $Vatios/m^2$ ), al que se le denotará mediante  $J_a(t)$ , se tiene que:

$$J_a(t) = \sigma \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}(a, t),$$

Pero de (2.6.1), (2.6.2) y considerando la expresión (2.3.6), se tiene que:

$$J_a(t) = \frac{\sigma\pi\sqrt{2}}{a\sqrt{a}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n C_n(t) + \frac{T_{int} - f(t)}{a}, \quad (2.6.12)$$

Utilizando de nuevo (2.6.4) para  $C_n(t)$  se obtiene:

$$n|C_n(t)| \leq \frac{0.4}{n^2},$$

por lo cual, si se expresa (2.6.12) en la forma:

$$J_a(t) = \frac{\sigma\pi\sqrt{2}}{a\sqrt{a}} \sum_{n=1}^N (-1)^n n C_n(t) + \frac{T_{int} - f(0)}{a} + Q_N(t), \quad (2.6.13)$$

donde:

$$Q_N(t) = \frac{\sigma\pi\sqrt{2}}{a\sqrt{a}} \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n+1} n C_n(t),$$

se tiene que

$$|Q_N(t)| \leq \frac{0.4\sigma\pi\sqrt{2}}{a\sqrt{a}} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad (2.6.14)$$

Es también conocido que el resto de la serie de término general  $\frac{1}{n^2}$  se puede acotar por  $\frac{M}{N^2}$  donde la constante  $M \leq 2$  y de (2.6.14) se obtiene:

$$|Q_N(t)| \leq \frac{0.21}{N^2}, \quad (2.6.15)$$

donde  $a$  y  $\sigma$  han sido tomados en un valor estándar  $a = 0.1m$ ,  $\sigma = 0.187 \times 10^{-2}m^2/h$

De (2.6.15) se deduce que al eliminar  $Q_N(t)$  de la expresión (2.6.13) para  $N = 1$ , se está calculando el flujo de calor  $J_a(t)$  a través de la cara interior de la pared con un error de  $0.21 W/m^2$  en cualquier instante de tiempo.

Si también  $N = 2$ , el error será de  $0.0525 W/m^2$  y para  $N = 3$ , sería de  $0.023 W/m^2$ .

Por simplicidad de los cálculos se considera la aproximación con  $N = 1$  que, de por sí, ya es muy buena y así se llega a que, si se considera que el ancho de la pared puede variar entre 0 y 0.5 o sea hasta medio metro, se podrá calcular el flujo de calor, medido en  $W/m^2$  en cualquier instante de tiempo, en la cara interior de la pared, con un error del orden de  $0.2 W/m^2$ , mediante la fórmula:

$$J_a(t) = \frac{2\sigma}{a} \left( \frac{1}{1 + \left(\frac{12\sigma\pi}{a^2}\right)^2} \right) \left[ \left( f_2 - \frac{12\sigma\pi}{a^2} f_1 \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{12} \right) + \left( \frac{12\sigma\pi}{a^2} f_2 + f_1 \right) \cos \left( \frac{\pi t}{12} \right) \right] + \frac{T_{int} - f(t)}{a} + \frac{2\sigma}{a} \frac{\left( \frac{12\sigma\pi}{a^2} f_2 + f_1 \right)}{\left( 1 + \left( \frac{12\sigma\pi}{a^2} \right)^2 \right)} e^{-\sigma \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 t}, \quad (2.6.16)$$

Es fácil ver que el último sumando en (2.6.16) se puede acotar en valor absoluto por  $0.04e^{-1.84t}$  y, por lo tanto, si se elimina de la expresión (2.6.16), el resto de dicha expresión permite calcular el valor de  $J_a(t)$  en un orden de error de  $0.25 W/m^2$ , aún cuando la pared pueda tener un ancho mayor que  $0.1 m$ . Al fin se ha llegado al siguiente resultado.

El flujo de calor a través de la cara interior de una pared de ancho  $a > 0$ , medido en  $W/m^2$  se puede calcular en cualquier instante de tiempo  $t$ , con un error de  $0.25 W/m^2$ , mediante la fórmula:

$$J_a(t) = -\frac{2\sigma}{a} \left( \frac{1}{1 + \left(\frac{12\sigma\pi}{a^2}\right)^2} \right) \left[ \left( f_2 - \frac{12\sigma\pi}{a^2} f_1 \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{12} \right) + \left( \frac{12\sigma\pi}{a^2} f_2 + f_1 \right) \cos \left( \frac{\pi t}{12} \right) \right] + \frac{T_{int} - f(t)}{a}, \quad (2.6.17)$$

Dado que se está suponiendo que los valores de  $f_1$  y  $f_2$  correspondientes a la distribución diaria de la temperatura exterior no cambian durante la primavera-verano, se tiene que:

$$J_a(t) = \frac{2\sigma}{a} \left( \frac{1}{1 + \left(\frac{12\sigma\pi}{a^2}\right)^2} \right) \left[ \left( \frac{79.2\pi\sigma}{a^2} + 3.6 \right) \cos \left( \frac{\pi t}{12} \right) + \left( \frac{43.2\pi\sigma}{a^2} - 6.6 \right) \cos \left( \frac{\pi t}{12} \right) \right] + \frac{T_{int} - f(t)}{a}, \quad (2.6.18)$$

Dado que se ha definido  $J_a(t) = \sigma \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}(a, t)$  y el vector unitario en la dirección positiva del eje  $x$  apunta hacia el interior de la habitación asociada a la pared (ver Fig.2.2), entonces  $J_a(t)$  denota el valor algebraico del flujo de calor que sale de la habitación, es decir, si  $J_a(t) > 0$  entonces el flujo de calor va de dentro hacia afuera de la habitación y la habitación tiende a enfriarse, si  $J_a < 0$  entonces el flujo de calor está dirigido en dirección contraria, o sea de afuera de la habitación hacia adentro y la habitación tiende a calentarse.

**Así que, si  $J_a(t) > 0$  la habitación tiende a enfriarse y si  $J_a(t) < 0$ , tenderá a calentarse.**

Se hará un análisis del signo de  $J_a(t)$  y para ello se comenzará por transformar la expresión (2.6.17) a una expresión más conveniente.

Por simplicidad en la notación, se denotará  $x = \frac{12\sigma\pi}{a^2}$ ,  $y = \frac{a}{6\pi}$ . Entonces (2.6.17) se expresa en la forma:

$$J_a(t) = J_a(t, x, y, f_1, f_2) = -\frac{xy}{1+x^2} \left[ (f_2 - xf_1) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{12} \right) + (xf_2 + f_1) \operatorname{cos} \left( \frac{\pi t}{12} \right) \right] + \left( \frac{T_{int} - f(t)}{6\pi} \right) \frac{1}{y},$$

Notar que  $(f_2 - xf_1)^2 + (xf_2 + f_1)^2 = (f_1^2 + f_2^2)(1 + x^2)$  y para ello, si se denota

$$\phi(x, f_1, f_2) = \operatorname{arcsen} \left( \frac{xf_2 + f_1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} \right),$$

se podrá expresar  $J_a(t)$  en la forma:

$$J_a(t) = -xy \frac{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}{\sqrt{1+x^2}} \operatorname{sen} \left[ \phi(x, f_1, f_2) + \frac{\pi t}{12} \right] + \left( \frac{T_{int} - f(t)}{6\pi} \right) \frac{1}{y}, \quad (2.6.19)$$

A partir de la expresión (2.6.19) se pueden extraer varias conclusiones interesantes. En primer lugar la habitación tiende a calentarse si:

$$\operatorname{sen} \left[ \phi(x, f_1, f_2) + \frac{\pi t}{12} \right] > \frac{(T_{int} - f(t))\sqrt{1+x^2}}{6\pi xy^2 \sqrt{f_1^2 + f_2^2}}, \quad (2.6.20)$$

y tiende a enfriarse si

$$\operatorname{sen} \left[ \phi(x, f_1, f_2) + \frac{\pi t}{12} \right] < \frac{(T_{int} - f(t))\sqrt{1+x^2}}{6\pi xy^2 \sqrt{f_1^2 + f_2^2}}, \quad (2.6.21)$$

El flujo de calor se hará igual a cero cuando

$$\operatorname{sen} \left[ \phi(x, f_1, f_2) + \frac{\pi t}{12} \right] = \frac{(T_{int} - f(t))\sqrt{1+x^2}}{6\pi xy^2 \sqrt{f_1^2 + f_2^2}}, \quad (2.6.22)$$

En las relaciones (2.6.20)-(2.6.22) supondremos que  $T_{int}$  es una temperatura de confort en el interior de la habitación que se mantiene debido a algún equipo termorregulador (aire acondicionado o calentador) que funciona mediante suministro de energía.

Haremos un análisis a partir de dichas relaciones suponiendo una temperatura de confort  $T_{int} = 22^\circ C$  y una curva  $f(t)$  para describir la variación de la temperatura diaria como la descrita en la figura 2.4, que corresponde a la situación de un día común de primavera verano en una ciudad como Puebla.

De (2.6.20) se deduce que si la pared derecha de esta desigualdad se mantiene menor que  $-1$  en algún intervalo de tiempo, en ese intervalo siempre tendrá lugar esa desigualdad y, por lo tanto, durante todo el intervalo de tiempo la habitación tiende a calentarse, por lo que es necesario que esté encendido el dispositivo termorregulador durante todo ese tiempo para mantener la habitación en la temperatura de confort  $T_{int}$ .

Pero notemos que la parte derecha de la desigualdad (2.6.20) se mantiene menor que  $-1$  durante todo el tiempo  $t$  aunque

$$f(t) > T_{int} + \frac{6\pi xy^2 \sqrt{f_1^2 + f_2^2}}{\sqrt{1+x^2}}, \quad (2.6.23)$$

Si tomamos el valor de  $T_{int} = 22^\circ C$  y los valores para  $x, y, f_1$  y  $f_2$  dados a lo largo del texto concluimos que debe ocurrir que

$$f(t) > 22 + 0.003, \tag{2.6.24}$$

Si confrontamos esta desigualdad con la gráfica 2.4, llegamos las conclusiones en las cuales no se ha tenido en cuenta la posibilidad de que la habitación pueda refrescarse si está suficientemente ventilada para dejar pasar el flujo de calor en una u otra dirección.

Así que en una ciudad como Puebla en verano hay que mantener encendido el aire acondicionado durante 7 horas entre la 1 de la tarde y las 8 de la noche para poder mantener una temperatura de confort de  $22^\circ C$  en el interior de una habitación.

Consideremos ahora que la expresión

$$\frac{(T_{int} - f(t))\sqrt{1 + x^2}}{6\pi xy\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} = \frac{1}{0.003}(T_{int} - f(t)) = 333(T_{int} - f(t)), \tag{2.6.25}$$

se mantiene  $> 1$  durante algún intervalo de tiempo en el día. Entonces durante ese intervalo no podrá cumplirse (2.6.20) sino se cumpliría la desigualdad (2.6.21) y durante ese tiempo la habitación tiende a enfriarse dado que el flujo de calor iría en la dirección del interior de la habitación hacia el exterior. Pero entonces el intervalo de tiempo durante el día en que

$$f(t) < T_{int} - 0.003 = 22 - 0.003,$$

el flujo de calor va del interior de la habitación hacia el exterior y, si observamos la gráfica de la figura 2.4 entonces:

En una ciudad como Puebla se puede apagar el aire acondicionado alrededor de las 8 de la noche, y mantenerlo apagado hasta el otro día entre las 12 y la 1 de la tarde del día siguiente, pues durante ese intervalo de 16 a 17 horas el flujo de calor sale de la habitación hasta que se llegue al equilibrio (2.6.22), el cual se logrará en una temperatura entre  $22-0.003^\circ C$  y  $22+0.003^\circ C$ , que podemos considerar de confort. Entonces, de nuevo, entre las 12 del día y la 1 de la tarde del día siguiente hay que encender el aire acondicionado y mantenerlo encendido hasta las 8 de la noche y repetir el mismo procedimiento de apagado y encendido del aire acondicionado periódicamente.

Finalmente notemos que estas conclusiones podrían cumplirse en otro lugar donde la distribución diaria de la temperatura viniera descrita por otros parámetros diferentes a  $f_1$  y  $f_2$  y variaran quizás los valores de  $a$  y  $\sigma$  de acuerdo a la forma en que se construyen las casas y los materiales con que se construyen. Más aún, el objetivo de estudio será diferente si la temperatura del medio ambiente fuera muy baja y se quisiera "calentar", en lugar de "enfriar" la habitación. En ese caso podríamos suponer que la expresión (2.6.25) es de la forma:

$$\frac{1}{\alpha}(T_{int} - f(t)), \tag{2.6.26}$$

con un valor de  $\alpha$  que podría ser mucho mayor que el valor 0.003 que se obtiene en nuestro caso. Entonces, para los valores de  $t$  en que la expresión (2.6.26) tomara valores entre  $-1$  y  $1$ , es decir, cuando

$$T_{int} - \alpha < f(t) < T_{int} + \alpha, \tag{2.6.27}$$

habrá que ver además para cuales de estos se cumple que la función

$$\text{sen} \left[ \phi(x, f_1, f_2) + \frac{\pi t}{12} \right],$$

es mayor o menor que  $\frac{1}{\alpha}(T_{int} - f(t))$ .

Por tanto podemos ver que en los intervalos de tiempo en que además de cumplirse las desigualdades (2.6.27) se tuviera que

$$\text{sen} \left[ \phi(x, f_1, f_2) + \frac{\pi t}{12} \right] > \frac{1}{\alpha}(T_{int} - f(t)),$$

el flujo de calor va del exterior de la habitación hacia adentro, mientras que si se cumple la desigualdad en sentido contrario, el flujo de calor iría de la habitación hacia afuera.

En este caso, ya sea que lo que deseamos sea calentar o enfriar la habitación, tendría que estar apagado y encendido el dispositivo termostato en muchos intervalos de tiempo y ya no sería práctico.

## 2.7. Conclusiones

En este trabajo modelamos matemáticamente la transferencia de calor en el que una habitación es expuesta a temperaturas exteriores variantes con el tiempo e interiores con temperaturas constantes y se obtuvo una expresión analítica sencilla que describe el comportamiento de la temperatura en cualquier punto de la pared con un error menor a  $0.55^{\circ}C$ . Otro resultado importante al que se llegó fue obtener la expresión analítica para calcular el flujo de calor en la superficie interior de la pared con un error menor a  $0.25^{\circ}W$ .

Como sabemos en muchas partes del planeta los cambios de temperatura hacen necesario el uso de aparatos termoreguladores para mantener temperaturas agradables dentro de las casas, pero en muchas situaciones esto se hace costoso, es por eso que tomando como base los resultados que se obtuvieron en este trabajo, es posible determinar el tiempo necesario en el que se debe encender o apagar algún sistema termoregulador, así como los horarios adecuados para ello, con el fin de mantener un equilibrio en la temperatura de la habitación, evitar gastos y estar a una temperatura de confort.

# Bibliografía

- [1] A.Samarsky A.Tijonov. *Ecuaciones de la Fisica Matemática*. Mir, 1972.
- [2] H. Brézis and J.R. Esteban. *Análisis funcional: teoría y aplicaciones*. Alianza Universidad. Alianza, 1984.
- [3] NU CEPAL et al. *La economía del cambio climático en américa latina y el caribe: paradojas y desafíos del desarrollo sostenible*. 2015.
- [4] Latif M Jiji and Latif Menashi Jiji. *Heat convection*. Springer, 2006.
- [5] R. Karwa. *Heat and Mass Transfer*. Springer Singapore, 2016.
- [6] M. Kline. *El pensamiento matematico de la Antigüedad a nuestros dias, II*. Alianza Universidad. Alianza Editorial, 1994.
- [7] V.P. Mijailov. *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*. Mir, 1978.
- [8] T. Myint-U and L. Debnath. *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Birkhäuser Boston, 2007.
- [9] R. Perry and D. Green. *Perry's Chemical Engineers' Handbook, Eighth Edition*. Number v. 8, parte 2008 in McGraw Hill professional. McGraw-Hill Education, 2008.
- [10] I. Petrovsky. *Lecciones sobre ecuaciones en derivadas parciales*. InterscienceNew York, 1954.
- [11] Y. Pinchover and J. Rubinstein. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Number v. 10 in *An introduction to partial differential equations*. Cambridge University Press, 2005.