



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA “LUIS RIVERA TERRAZAS”

**“LOCALIZACIÓN DE LA LUZ EN CRISTALES FOTÓNICOS
UNIDIMENSIONALES MODULADOS APERIÓDICAMENTE”**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

(EN LA ESPECIALIDAD DE CIENCIA DE MATERIALES)

PRESENTA:

LIC. CARLOS ANTONIO CORONA GARCÍA

ASESOR(ES):

DRA. XÓCHITL INÉS SALDAÑA SALDAÑA

DR. ELÍAS LÓPEZ CRUZ

ENERO 2017

Agradecimientos

Me gustaría empezar agradeciendo a mi familia ya que sin ellos no hubiera llegado hasta este punto, fueron quienes me alentaron en primer lugar para que estudiara un posgrado, quienes me dieron ánimos y siempre me apoyaron durante todo el proceso de la maestría y sobre todo en el tiempo que me llevó terminar esta tesis, además siempre me trataron de distraer y aguantaban mi mal carácter cuando me frustraba y estresaba porque mis programas no funcionaban de manera correcta, por todo esto y mucho más les agradezco muchísimo a mis papás Atilano y Rocío y a mis hermanas Erika y Verónica.

También me gustaría agradecer a los grandes amigos que hice dentro del Instituto, vivimos muchas experiencias juntos y entre todos nos ayudamos en los momentos de estrés, tanto los que pasamos durante nuestras clases como durante la elaboración de nuestras tesis o mientras unos estudiaban para presentar sus exámenes generales para el doctorado.

No podía faltar el agradecimiento a mis asesores, a la Dra. Xóchitl Inés Saldaña Saldaña y al Dr. Elías López Cruz, gracias por invertir tanto tiempo conmigo y en este trabajo de tesis, obtuvimos resultados muy interesantes que abren las puertas a futuras investigaciones muy prometedoras.

Por último me gustaría agradecer al CONACYT por la beca otorgada para realizar mis estudios de maestría, número (CVU/Becario): 629800/330436 y también a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla y a su Departamento de Vicerrectoría y Estudios de Posgrado (VIEP) por el apoyo otorgado para conclusión de tesis.

Resumen

Los sistemas de multicapas son estudiados en fotónica debido tanto a su interés científico como a las múltiples aplicaciones tecnológicas que estos sistemas tienen, gracias a los adelantos tecnológicos que hoy existen para la fabricación de estos sistemas con películas delgadas semiconductoras, metálicas, dieléctricas, etc.. Es sabido que la respuesta óptica de estos sistemas se puede modificar a voluntad cambiando los parámetros que los caracterizan como son los índices de refracción, el número de capas o los anchos de las mismas.

Los sistemas construidos en base a una regla determinista o relación de recurrencia, también llamados cuasicristales, se han estudiado muy poco y por consiguiente se sabe de manera limitada el comportamiento óptico que presentan las ondas electromagnéticas en dichos sistemas, a diferencia de los sistemas aperiódicos y periódicos, en los cuales para el primer caso las ondas de luz experimentan múltiples procesos de dispersión lo cual da como resultado efectos de interferencia inesperados. Al contrario de los sistemas periódicos en los cuales la interferencia es constructiva en direcciones de propagación bien definidas, mientras que los cuasicristales presentan distribuciones autosimilares en las bandas permitidas de energía, efecto que no se aprecia en los sistemas mencionados anteriormente, además de que se ha demostrado que en sistemas de Fibonacci, Thue-Morse y Cantor se obtienen mayor número de bandas permitidas y prohibidas con menor número de capas totales que conformen al sistema en comparación de sistemas periódicos, además de que conforme se va aumentando la generación del sistema determinista, es decir, se va aumentando el tamaño del sistema, se observa que los anchos de banda se vuelven muy excluyentes en cuanto a las energías tanto permitidas como prohibidas.

En este trabajo se presenta el diagrama de bandas, el cual nos ayudará a estudiar las propiedades ópticas y el grado de localización de sistemas de multicapas con modulaciones de Fibonacci, Thue-Morse y Cantor, los cuales presentan propiedades de autosimilaridad que no se observan en los sistemas periódicos o en los desordenados. Existen muchos

estudios de la respuesta óptica de este tipo de sistemas clásicos donde se consideran ordenamientos aperiódicos de las capas siguiendo las relaciones de recurrencia correspondientes a cada sistema. En este trabajo se propone introducir la aperiodicidad de manera distinta, se considera un sistema periódico de bicapas dieléctricas A y B en donde se modula de manera aperiódica el ancho de las capas de material B siguiendo las secuencias de Fibonacci, Thue-Morse y Cantor, dejando el acomodo de índices de refracción periódico, y se hace un estudio teórico y numérico de la influencia que tiene la modulación aperiódica del ancho de una de las capas en los diagramas de bandas, la respuesta óptica y el grado de localización de la luz que presenta cada una de las estructuras propuestas.

Índice

Introducción	1
Objetivos generales.....	4
Objetivos particulares	4
Metodología	4
Capítulo 1. Marco Teórico	7
1.1 Ecuaciones de Maxwell	7
1.2 La ecuación de onda.....	8
1.3 Condiciones en la frontera	8
1.4 Método de la matriz de transferencia.....	9
1.5 Reflectancia y transmitancia	13
1.6 Teorema de Bloch y estructura de bandas.....	14
1.7 Aproximación racional	17
1.8 Campo eléctrico dentro de la estructura y localización de la luz	18
Capítulo 2. Modelado de sistemas de multicapas	23
2.1 Secuencias recurrentes	23
2.2 La secuencia de Fibonacci	23
2.3 La secuencia de Thue-Morse.....	26
2.4 La secuencia de Cantor	28
2.5 Modelado	29
2.5.1 Secuencia binaria de Fibonacci.....	31
2.5.2 Secuencia binaria de Thue-Morse	32
2.5.3 Secuencia binaria de Cantor	33
Capítulo 3. Resultados y discusión	36
3.1 Ecuaciones importantes	36
3.2 Sistemas modulados de Fibonacci	38
3.3 Sistemas modulados de Thue-Morse	63
3.4 Sistemas modulados de Cantor.....	86
3.5 ¿Qué sistema presenta mayor localización de la luz?.....	103
Conclusiones	114
Referencias	118
Apéndice A: Eventos	12

Introducción

Para hablar de cristales fotónicos se debe empezar definiendo lo que es un cristal, ya que los cristales fotónicos son la analogía óptica de éstos. Un cristal es un arreglo periódico de átomos, moléculas o iones (también conocidos como elementos constitutivos del cristal), es decir, dichos elementos siguen un patrón espacial bien definido y ordenado para formar la red cristalina. Otra característica que presentan los cristales es la existencia de un potencial periódico que afecta la propagación de un electrón a través de él, entonces las propiedades de conducción electrónica que presentan los cristales están definidos tanto por los constituyentes del cristal como de la geometría de la red. Sin embargo, la red también puede impedir la propagación dentro del cristal, dando lugar a las bandas prohibidas (gaps), esto quiere decir que los electrones no pueden propagarse con ciertas energías en algunas direcciones. Si el potencial de la red es lo suficientemente fuerte, el gap puede extenderse para cubrir todas las posibles direcciones de propagación, resultando en una banda prohibida completa. Como por ejemplo, un semiconductor tiene una banda prohibida completa entre la banda de valencia y la banda de conducción.

Como se mencionó anteriormente la analogía óptica de los cristales son los cristales fotónicos, en los cuales los elementos constitutivos del cristal son reemplazados por un medio macroscópico con constantes dieléctricas diferentes y el potencial periódico es reemplazado por una función dieléctrica periódica (equivalentemente, un índice de refracción periódico). Si las constantes dieléctricas de los materiales son lo suficientemente distintas, y si la absorción de la luz por los materiales es mínima, entonces las refracciones y reflexiones de la luz de las diferentes interfaces pueden producir varios fenómenos para fotones similares a los que produce el potencial atómico en los electrones, tal es el caso de las bandas prohibidas fotónicas completas, las cuales se obtienen cuando se impide la propagación de ondas electromagnéticas para un rango de frecuencias sin importar la polarización ni la dirección incidente de la onda. Para poder obtener un gap fotónico

completo se debe arreglar la red dieléctrica periódica en los tres ejes, en otras palabras, construir un cristal fotónico tridimensional.

Debido a que la energía de la luz visible es disipada rápidamente por componentes metálicos (como las guías de ondas, las cuales permiten la propagación de ondas electromagnéticas solamente a través de su eje; o las cavidades metálicas, que prohíben la propagación de ondas electromagnéticas con frecuencias por debajo de cierta frecuencia umbral), los cristales fotónicos son el sustituto ideal para dichas aplicaciones, debido a que abarcan un rango de frecuencias más amplio que las guías de ondas y cavidades metálicas, que son usadas ampliamente para microondas.

Uno de los dispositivos ópticos ampliamente usado es el espejo dieléctrico, tal como la estructura de un cuarto de onda en la que, cuando la luz con una longitud de onda apropiada incide sobre el arreglo de multicapas es completamente reflejada, convirtiéndose este fenómeno en la base de muchos dispositivos como: los filtros dieléctricos de Fabry-Perot y láseres de retroalimentación distribuida. Todos contienen dieléctricos periódicos en una dimensión y debido a eso son cristales fotónicos unidimensionales [1].

A partir del trabajo de Merlin et al. [2] publicado en 1985, en donde se reportan por primera vez resultados experimentales para una heteroestructura unidimensional (1D) de Fibonacci, se despierta el interés tanto científico como tecnológico en el estudio de otros sistemas deterministas aperiódicos 1D, tales como los de Thue-Morse o Cantor que se construyen considerando dos tipos de capas: A, B. La construcción de estas heteroestructuras se realiza mediante el uso de las reglas sustitucionales de recurrencia correspondiente a cada sistema.

La estructura de estos sistemas se encuentra en una posición intermedia entre los sistemas periódicos y los aleatorios, esto hace que el diagrama de bandas, la transmitancia de radiación electromagnética, propiedades de transporte de electrones, propiedades elásticas etc., presenten características como la multifractalidad y la autosimilaridad que no se presentan en las estructuras periódicas o las aleatorias unidimensionales, en particular,

la localización de la radiación electromagnética en este tipo de sistemas es distinta a la de los sistemas periódicos o aleatorios.

En las referencias [3-12], encontramos algunos trabajos representativos en donde se hacen estudios detallados sobre la propagación o localización de la radiación electromagnética en estructuras 1D construidas con dos tipos de placas ordenadas siguiendo las reglas sustitucionales de Fibonacci, Thue-Morse o Cantor, en particular, se encuentra que en estos sistemas es necesario la introducción de lo que llaman modos críticamente localizados; los cuales son estados intermedios entre los modos localizados y los extendidos (modos que se propagan en la estructura); y que se caracterizan por presentar fuertes fluctuaciones espaciales en longitudes características de cada tipo de multicapa [12], a diferencia de los sistemas periódicos o aleatorios en donde los estados son extendidos o localizados, respectivamente. También se ha reportado que en un mismo sistema es posible encontrar dos tipos de comportamiento, es decir, se presentan modos extendidos y críticamente localizados, esto es como resultado de considerar dos tipos de bandas prohibidas: las bandas tradicionales prohibidas o a las bandas fractales prohibidas, en el primer caso se obtuvo que las ondas electromagnéticas se propagan como una onda de Bloch mientras que para el segundo caso depende de la generación de Thue-Morse que se considere, ya que si se elige una generación pequeña se obtienen estados críticamente localizados, por otro lado si se considera una banda permitida como en las referencias [9 y 11] se obtiene que la intensidad de campo eléctrico se distribuye de manera autosimilar de acuerdo a la secuencia de Thue-Morse, sin embargo en ambas investigaciones reportan que conforme la generación de Thue-Morse aumenta las ondas electromagnéticas tienden a comportarse como ondas periódicas pero con fluctuaciones, lo cual confirman calculando el grado de localización y demostrando que para Thue-Morse los estados pasan de ser críticamente localizados a estados extendidos conforme aumenta la generación de Thue-Morse.

El interés creciente sobre los sistemas mencionados y sus propiedades, es por las posibles aplicaciones tecnológicas para la manipulación de la luz o de otras propiedades como las acústicas, etc., usando sistemas 1D, ya que las tecnologías disponibles actualmente para la construcción de multicapas se encuentran muy desarrolladas [10, 16, 17 y 18] .

Objetivos Generales

Se propone en este estudio introducir la aperiodicidad en un sistema de multicapas dieléctricas modulando los parámetros de la estructura [19] que de otra manera sería periódica. En particular, se propone analizar la localización de luz en el caso en el que se modula de manera aperiódica (según Fibonacci, Thue-Morse y Cantor) el ancho de las capas que forman el sistema y se comparan los resultados con los resultados que se conocen para sistemas de multicapas de Fibonacci, construidos según su regla substitucional dejando fijos los parámetros correspondientes a las capas que formen el sistema, lo que permitirá ver qué tipos de sistemas tienen una mayor o menor localización de la luz. Considerando las características de los sistemas modulados estudiados, estos podrían incorporarse a chips ópticos para realizar diferentes funciones.

Objetivos Particulares

- Cálculo del diagrama de bandas, la transmitancia y los parámetros que caracterizan la localización de la luz en cada caso.
- Cálculo del campo eléctrico para cada una de las estructuras propuestas.
- Realización del software necesario para los cálculos numéricos correspondientes haciendo uso del programa computacional MATLAB.
- Comparar los resultados obtenidos para cada tipo de estructura propuesta con un sistema periódico.

Metodología

Los sistemas de multicapas que se proponen se formarán con dos tipos de capas dieléctricas, la capa A con índice de refracción y ancho n_A y d_A mientras que la capa B con índice de refracción n_B y ancho d_B modulado aperiódicamente de acuerdo a la siguiente ecuación: $d_B = d_{B0}(1 + \Delta * S)$ en donde d_{B0} es un ancho fijo, Δ es un incremento y S es una secuencia determinista aperiódica de ceros y unos que se forman según la regla

sustitucional de Fibonacci: $1 \rightarrow 10$, $0 \rightarrow 1$ [20]; la regla sustitucional de Thue-Morse: $1 \rightarrow 10$, $0 \rightarrow 01$ [21 y 22] y la regla sustitucional de Cantor: $1 \rightarrow 101$, $0 \rightarrow 000$ [23]. De esta forma se obtendrán las tres estructuras propuestas en la tesis.

El trabajo se divide en 3 capítulos:

En el capítulo 1 se estudiarán los conceptos básicos de la teoría electromagnética [24] como: las ecuaciones de Maxwell y las condiciones a la frontera que se aplicarán para el análisis de los sistemas propuestos, seguido de esto se desarrollará el método de la matriz de transferencia y cómo a partir de éste obtener la transmitancia, el vector de onda de Bloch y la intensidad de campo eléctrico de un sistema de multicapas periódico, después de esto se explicará la aproximación racional [25], con la cual es posible aplicar la teoría de un sistema periódico en un sistema aperiódico o cuasiperiódico y para finalizar el capítulo se presentará el método para determinar el grado de localización de la luz.

En el capítulo 2 se presentará una breve introducción de las secuencias deterministas aperiódicas utilizadas en esta investigación y cómo a partir de éstas obtener los sistemas modulados de Fibonacci, Thue-Morse y Cantor.

En el capítulo 3 se muestran los resultados más representativos de los diagramas de bandas, transmitancia, vector de onda de Bloch, la distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura y el grado de localización que se obtuvieron para los 3 sistemas estudiados y su dependencia con el parámetro Δ .

En las conclusiones se hace hincapié en los resultados más importantes que se obtuvieron en este trabajo de investigación.

Capítulo 1

Marco Teórico

1.1 Ecuaciones de Maxwell

Las cuatro ecuaciones fundamentales del electromagnetismo son las ecuaciones de Maxwell, la cuales en unidades MKS son:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.1-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (1.1-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.1-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.1-4)$$

En estas ecuaciones \mathbf{E} y \mathbf{H} son el vector de campo eléctrico y el vector de campo magnético respectivamente, los cuales describen un campo electromagnético. Las cantidades \mathbf{D} y \mathbf{B} son llamadas el desplazamiento eléctrico y la inducción magnética respectivamente, las cuales son introducidas para incluir el efecto del campo en la materia. La carga eléctrica ρ y la densidad de corriente \mathbf{J} se consideran como fuentes externas, las cuales para esta investigación se consideran nulas, es decir, no existen cargas externas, entonces $\rho = 0$ y $\mathbf{J}=0$.

Para poder obtener una solución del vector de campo eléctrico o magnético es necesario introducir la relación existente entre \mathbf{B} y \mathbf{H} y la relación entre \mathbf{E} y \mathbf{D} , usando las llamadas ecuaciones constitutivas o ecuaciones de los materiales apropiadas a nuestro sistema, las cuales son:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (1.1-5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.1-6)$$

donde los parámetros constitutivos ε y μ son conocidos como el tensor dieléctrico (o tensor de permitividad) y el tensor de permeabilidad respectivamente. Si el material es isotrópico, tanto la permitividad eléctrica ε como la permeabilidad magnética μ se reducen a escalares, además si se considera que es homogéneo tanto ε y μ serán constantes [24].

1.2 La ecuación de onda

Dos de los resultados más importantes de las ecuaciones de Maxwell son las ecuaciones de onda y la existencia de ondas electromagnéticas que son las soluciones de éstas. La ecuación de onda para el campo eléctrico y magnético están dadas por las ecuaciones (1.2-1) y (1.2-2) respectivamente:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}, \quad (1.2-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.2-2)$$

Estas son las ecuaciones de ondas electromagnéticas estándar. La cuales son satisfechas por las ondas planas monocromáticas:

$$\psi = Ae^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (1.2-3)$$

y $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ es la fase de la onda plana. Si $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{constante}$ se obtiene la ecuación de un plano que en este caso se conoce como frente de onda que es perpendicular al vector de propagación \mathbf{k} , donde A es la amplitud de la onda, ω es la frecuencia angular, \mathbf{k} es el vector de onda y \mathbf{r} es el vector de posición [24].

1.3 Condiciones en la frontera

Uno de los problemas más importantes es determinar la reflexión y transmisión de la radiación electromagnética a través de un medio de multicapas es la continuidad de algunos componentes de los vectores de campo en las interfaces dieléctricas entre las capas. Aunque las propiedades físicas (ε y μ) pueden cambiar abruptamente a través de las interfaces dieléctricas, existe una relación de continuidad de algunos componentes de los vectores de campo en la frontera dieléctrica. Estas condiciones de continuidad pueden ser

derivadas directamente de las ecuaciones de Maxwell, donde la carga eléctrica y la densidad de corriente no existen, para conocer los componentes del campo eléctrico \mathbf{E} , del desplazamiento eléctrico \mathbf{D} , de la inducción magnética \mathbf{B} y del campo magnético \mathbf{H} que permanecerán constantes al atravesar una interfaz entre dos medios dieléctricos:

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}, \quad (1.3-1)$$

$$\mathbf{D}_{1n} = \mathbf{D}_{2n}, \quad (1.3-2)$$

$$\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}, \quad (1.3-3)$$

$$\mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}, \quad (1.3-4)$$

donde los subíndices 1t y 1n representan la componente transversal y la componente normal, respectivamente, del campo vectorial incidente; los subíndices 2t y 2n representan la componente transversal y la componente normal del campo vectorial transmitido, respectivamente.

De las ecuaciones (1.3-1) y (1.3-4) se puede deducir que las componentes transversales del campo eléctrico \mathbf{E} y del campo magnético \mathbf{H} permanecerán constantes en ambos lados de la frontera. Esto quiere decir que las componentes \mathbf{E}_t y \mathbf{H}_t son continuas de un lado a otro de la frontera.

Y de las ecuaciones (1.3-2) y (1.3-3) se obtiene que las componentes normales del desplazamiento eléctrico \mathbf{D} y de la inducción magnética \mathbf{B} son continuas en ambos lados de la interfaz [24].

1.4 Método de la matriz de transferencia

El método de la matriz de transferencia nos permite analizar la forma en que cambian las amplitudes del campo eléctrico y magnético al propagarse por un sistema de multicapas. Considerando la reflexión y transmisión de una onda electromagnética para un sistema con N interfaces, como el de la *figura 1.1*:

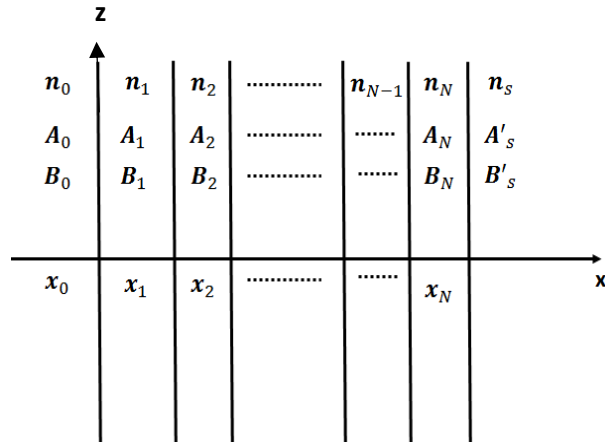


Figura 1.1: Sistema de multicapas de medios dieléctricos. A_l y B_l representan las amplitudes del campo, n_l son los índices de refracción de cada capa y x_l la posición de cada capa. Imagen tomada de [24].

El sistema de la *figura 1.1*, está descrito por:

$$n(x) = \begin{cases} n_0, & x < x_0, \\ n_1, & x_0 < x < x_1, \\ n_2, & x_1 < x < x_2, \\ \vdots & \\ n_N, & x_{N-1} < x < x_N, \\ n_s, & x_N < x, \end{cases} \quad (1.4-1)$$

donde n_1, n_2, \dots, n_N es el índice de refracción correspondiente a cada capa, el subíndice N se refiere al número total de capas de la estructura, x_l es la posición de la interfaz que se encuentra entre la capa l y la capa $(l + 1)$, n_0 es el índice de refracción del medio incidente y n_s es el índice de refracción del sustrato.

Debido a que todo el medio es homogéneo en la dirección z , el campo eléctrico que satisface las ecuaciones de Maxwell tiene la forma:

$$E = E(x)e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad (1.4-2)$$

donde se supone que la onda electromagnética se propaga en el plano xz , ω es la frecuencia angular y β es la componente en z del vector de propagación perpendicular a la interfaz que está definida por:

$$\beta = k_{lz} = n_l \frac{\omega}{c} \text{sen}\theta_l, \quad (1.4-3)$$

con $l = 1, 2, \dots, N$. El campo eléctrico $E(x)$ consiste en una onda viajera derecha y una onda viajera izquierda que pueden escribirse como:

$$E(x) = R e^{-ik_x x} + L e^{ik_x x} = A(x) + B(x), \quad (1.4-4)$$

siendo $A(x)$ la amplitud de la onda viajera derecha, $B(x)$ la amplitud de la onda viajera izquierda, R y L son constantes, θ_l es el ángulo incidente de la onda electromagnética en cada interfaz y k_x (ecuación 1.4-5) es la componente en x del vector de onda:

$$k_{lx} = \sqrt{\left(\frac{n_l \omega}{c}\right)^2 - \beta^2} = n_l \frac{\omega}{c} \text{cos}\theta_l. \quad (1.4-5)$$

Teniendo lo anterior en cuenta, la distribución de campo eléctrico en la estructura de la figura 1.1 quedaría descrita por la siguiente ecuación:

$$E(x) = \begin{cases} A_0 e^{-ik_{0x}(x-x_0)} + B_0 e^{ik_{0x}(x-x_0)} & x < x_0, \\ A_l e^{-ik_{lx}(x-x_l)} + B_l e^{ik_{lx}(x-x_l)} & x_{l-1} < x < x_l, \\ A'_s e^{-ik_{sx}(x-x_N)} + B'_s e^{ik_{sx}(x-x_N)} & x_N < x, \end{cases} \quad (1.4-6)$$

La relación existente entre las amplitudes de la onda plana incidente A_0, B_0 en el medio incidente, *i.e.* $x < x_0$, y las amplitudes de la onda plana transmitidas A'_s, B'_s en el medio del sustrato, *i.e.* $x > x_N$, puede ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} A'_s \\ B'_s \end{pmatrix}, \quad (1.4-7)$$

con la matriz \mathbf{M} definida como:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = D_0^{-1} [\prod_{l=1}^N Q_l] D_s, \quad (1.4-8)$$

donde:

$$Q_l = D_l P_l D_l^{-1} = \begin{pmatrix} \text{cos}\theta & \frac{i}{\alpha} \text{sen}\theta \\ i\alpha \text{sen}\theta & \text{cos}\theta \end{pmatrix}. \quad (1.4-9)$$

Recordando que N es el número total de capas de la estructura, D_l es la matriz dinámica que está definida por las ecuaciones (1.4-10) para la polarización transversal eléctrica (TE)¹ y (1.4-11) para la polarización transversal magnética (TM)², P_l es la matriz de propagación dada por la ecuación (1.4-12), y α , ecuación (1.4-13) y (1.4-14), se define tanto para la polarización TE como para la polarización TM:

$$D_s(l) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{\epsilon_l}{\mu_l}} \cos\theta_l & \sqrt{\frac{\epsilon_l}{\mu_l}} \cos\theta_l \end{pmatrix}, \quad (1.4-10)$$

$$D_p(l) = \begin{pmatrix} \cos\theta_l & \cos\theta_l \\ \sqrt{\frac{\epsilon_l}{\mu_l}} & \sqrt{\frac{\epsilon_l}{\mu_l}} \end{pmatrix}, \quad (1.4-11)$$

$$P_l = \begin{pmatrix} e^{i\phi_l} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_l} \end{pmatrix}, \quad (1.4-12)$$

$$\alpha_{ls} = n_l \cos\theta_l = k_{lx} d_l \frac{c}{\omega}, \quad (1.4-13)$$

$$\alpha_{lp} = \frac{n_l}{\cos\theta_l} = \frac{n_l^2}{k_{lx}} \frac{\omega}{c}, \quad (1.4-14)$$

con

$$\phi_l = k_{lx} d_l. \quad (1.4-15)$$

Dado que se está analizando un sistema muy general, no necesariamente periódico, con N capas de materiales distintos, cada uno con sus propiedades características como índices de refracción y anchos de capa, entonces se tendrán N matrices Q , una para cada capa. Por consiguiente la matriz de transferencia total se obtendría del resultado de multiplicar la matriz individual de cada capa de acuerdo a la ecuación (1.4-8) siguiendo el ordenamiento del sistema ya sea un ordenamiento periódico o aperiódico [24].

¹ Las ondas con polarización perpendicular s también son conocidas como ondas transversal eléctricas (TE), porque el vector de campo eléctrico \mathbf{E} es transversal al plano de incidencia.

² Las ondas con polarización paralela son también llamadas ondas transversal magnéticas (TM) debido a que el vector de campo magnético \mathbf{H} es perpendicular al plano de incidencia.

1.5 Reflectancia y transmitancia

Para obtener la relación entre los coeficientes de reflexión y transmisión, usando el método de la matriz de 2x2, se considerará que la onda electromagnética incide desde el medio 0:

$$r = \left(\frac{B_0}{A_0} \right)_{B_s=0}, \quad (1.5-1)$$

$$t = \left(\frac{A_s}{A_0} \right)_{B_s=0}, \quad (1.5-2)$$

usando la matriz de la ecuación (1.4-7) y siguiendo las definiciones (1.5-1) y (1.5-2), se obtiene:

$$r = \frac{M_{21}}{M_{11}}, \quad (1.5-3)$$

$$t = \frac{1}{M_{11}}, \quad (1.5-4)$$

de este modo, la reflectancia está dada por:

$$R = |r|^2 = \left| \frac{M_{21}}{M_{11}} \right|^2. \quad (1.5-5)$$

Si el medio incidente (0) y el sustrato (s) son ambos dieléctricos puros con índices de refracción reales n_0 y n_s , respectivamente, la transmitancia queda definida como:

$$T = \frac{n_s \cos \theta_s}{n_0 \cos \theta_0} |t|^2 = \frac{n_s \cos \theta_s}{n_0 \cos \theta_0} \left| \frac{1}{M_{11}} \right|^2. \quad (1.5-6)$$

Y la absorción está definida de acuerdo a la siguiente relación:

$$A = 1 - R - T \quad (1.5-7)$$

pero como nosotros consideramos medios dieléctricos no absorbentes, la relación anterior se reduce a [24]:

$$T = 1 - R. \quad (1.5-8)$$

1.6 Teorema de Bloch y estructura de bandas

La propagación de las ondas en un medio periódico es muy similar al movimiento de los electrones en sólidos cristalinos. De hecho, la formulación del modelo de Kronig-Penney usando la teoría de bandas elementales de sólidos es matemáticamente idéntica al de la radiación electromagnética en un medio de multicapas periódico. De esta forma, algunos conceptos de física usados en la física de estado sólido tales como la onda de Bloch y las bandas prohibidas pueden ser usados en este estudio. Un medio de multicapas periódico es equivalente a tener una red unidimensional que es invariante bajo traslaciones de red. En otras palabras:

$$n^2(x + \Lambda) = n^2(x), \quad (1.6-1)$$

donde Λ es el período.

De acuerdo con el teorema de Floquet, las soluciones de las ecuaciones de onda para un medio periódico son de la forma:

$$E_K(x, z) = E_K(x)e^{-i\beta z}e^{-iKx}, \quad (1.6-2)$$

donde $E_K(x)$ es una función periódica con período Λ :

$$E_K(x + \Lambda) = E_K(x). \quad (1.6-3)$$

K es una constante llamada vector de onda de Bloch y en la ecuación (1.6-3), al ser usada como subíndice, indica una dependencia de la función $E_K(x)$ con respecto a dicha constante. El problema a considerar es determinar K y $E_K(x)$.

La condición para poder resolver el teorema de Bloch y también obtener la estructura de bandas radica en tener un sistema periódico, entonces si se cambia la estructura de la figura 1.1 por una estructura periódica, como la de la figura 1.2, es posible obtener una ecuación equivalente a la ecuación (1.4-7), para llegar a dicha ecuación, se considera una distribución de campo eléctrico como se muestra a continuación:

$$E(x) = \begin{cases} a_n e^{-ik_{lx}(x-n\Lambda)} + b_n e^{ik_{lx}(x-n\Lambda)} & n\Lambda - a < x < n\Lambda, \\ c_n e^{-ik_{lx}(x-n\Lambda+a)} + d_n e^{ik_{lx}(x-n\Lambda+a)} & (n-1)\Lambda < x < n\Lambda - a, \end{cases} \quad (1.6-4)$$

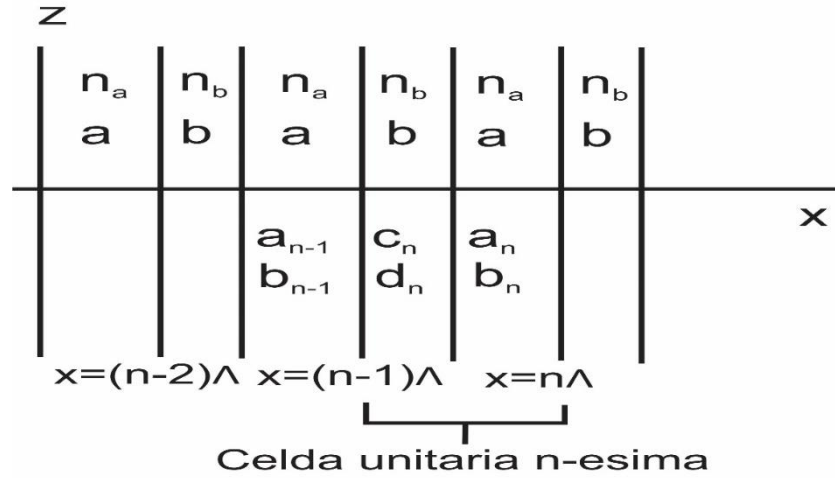


Figura 1.2: Dibujo esquemático de un medio de multicapas periódico. a_i , b_i , c_i y d_i representan las amplitudes del campo en cada capa, n_i son los índices de refracción y a y b representan el ancho de cada capa. La celda unitaria está construida por dos capas diferentes (a y b) con período Λ , repetida n veces para generar el sistema periódico completo. Imagen tomada de [24].

Como en el caso anterior, para un sistema de multicapas general, se puede obtener la relación que existe entre las amplitudes de campo a_n y b_n con las amplitudes c_n y d_n haciendo uso del método de la matriz de 2x2, quedando como:

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = D_1^{-1} D_2 P_2 \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} \quad (1.6-5)$$

y

$$\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = D_2^{-1} D_1 P_1 \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (1.6-6)$$

Sustituyendo la ecuación (1.6-6) en (1.6-5) obtenemos:

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = D_1^{-1} D_2 P_2 D_2^{-1} D_1 P_1 \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (1.6-7)$$

De la ecuación (1.6-7), al hacer las multiplicaciones de las matrices dinámicas D y de las matrices P , podemos llegar a la siguiente ecuación reducida:

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad (1.6-8)$$

donde A, B, C y D son los elementos que conforman la matriz.

Una vez obtenidas las ecuaciones que relacionan las amplitudes de campo incidente con las amplitudes transmitidas, se prosigue a representar la onda de Bloch en términos del método matricial, para esto se aplica la condición (1.6-3) en (1.6-2) y se sustituye en la distribución de campo eléctrico (1.6-4) para así obtener, en términos de la matriz de 2x2, la relación existente entre las amplitudes del campo en una capa de la celda unitaria (a_{n-1} , b_{n-1}) con las amplitudes de una capa equivalente de la siguiente celda unitaria (a_n , b_n):

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = e^{-iK\Lambda} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (1.6-9)$$

Siguiente a esto, de la ecuación (1.6-8) y (1.6-9), se observa que el vector columna de la onda de Bloch satisface:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = e^{iK\Lambda} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (1.6-10)$$

Donde el vector de fase $e^{iK\Lambda}$ es el eigenvalor de la matriz de transferencia (A, B; C, D) y está dado por:

$$e^{iK\Lambda} = \frac{1}{2}(A + D) \pm \left\{ \left[\frac{1}{2}(A + D) \right]^2 - 1 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.6-11)$$

La ecuación anterior da la relación de dispersión entre ω , β y K para la función de onda de Bloch, la cual se obtiene de la suma de los dos posibles valores que arroja la ecuación (1.6-11), obteniendo:

$$K(\beta, \omega) = \frac{1}{\Lambda} \cos^{-1} \left[\frac{1}{2}(A + D) \right]. \quad (1.6-12)$$

Para los valores donde $\left| \frac{1}{2}(A + D) \right| < 1$ corresponden a una K real y en consecuencia las ondas de Bloch se propagan; cuando $\left| \frac{1}{2}(A + D) \right| > 1$ las ondas de Bloch tienen una parte compleja, esto significa que la onda de Bloch es evanescente, en otras palabras la onda no

se propaga por el medio. Estas son las llamadas bandas prohibidas o gaps de un medio periódico. Los límites de las bandas se encuentran cuando $\left| \frac{1}{2}(A + D) \right| = 1$.

Es interesante notar que las bandas prohibidas de la polarización transversal magnética (TM) se reducen a cero cuando $\beta = \left(\frac{\omega}{c} \right) n_2 \text{sen} \theta_B$, donde θ_B es el ángulo de Brewster [24].

1.7 Aproximación racional

La aproximación racional consiste en aplicar el teorema de Bloch a un sistema periódico cuya celda unitaria contiene generaciones sucesivas del sistema de multicapas aperiódico que se desea estudiar, considerando que entre más alta es la generación que se considere, más exacto será el resultado obtenido. En algunos casos podemos observar que las propiedades de autosimilaridad y de multifractalidad que caracterizan a estos sistemas pueden obtenerse con un número relativamente bajo de capas, lo que los hace potencialmente útiles para nuevas aplicaciones tecnológicas que no es posible obtener con sistemas periódicos o desordenados. Donde la celda unitaria es un tipo de celda o celda unidad, que llenará todo el espacio mediante la repetición de operaciones de traslación del cristal adecuadas, una celda unitaria es una celda de volumen mínimo

Por consiguiente la matriz de transferencia para la celda unitaria será [25]:

$$Q_T = \prod_{l=1}^N Q_l, \quad (1.7-1)$$

recordando que N es el número de capas que formarán la celda unitaria y la matriz Q_l es la matriz correspondiente a cada capa de la celda unitaria definida por la ecuación (1.4-9) y la ecuación que relaciona las amplitudes incidentes con las transmitidas es la (1.4-7).

Acoplando el teorema de Bloch de un sistema periódico a un sistema aperiódico, desordenado o en general cualquier tipo de sistema, haciendo uso de esta aproximación racional, la ecuación (1.6-12) y las condiciones para las bandas permitidas, prohibidas y los límites de éstas, quedarían descritas por:

$$K(\beta, \omega) = \frac{1}{\lambda} \cos^{-1} \left[\frac{1}{2}(M_{11} + M_{22}) \right] \quad (1.7-2)$$

$$\left| \frac{1}{2}(M_{11} + M_{22}) \right| < 1 \quad (1.7-3)$$

$$\left| \frac{1}{2}(M_{11} + M_{22}) \right| = 1 \quad (1.7-4)$$

$$\left| \frac{1}{2}(M_{11} + M_{22}) \right| > 1 \quad (1.7-5)$$

donde Λ es ahora un período aproximado, es decir, $\Lambda = a + b$, aunque también puede considerarse como el valor de la celda unitaria, en otras palabras, la suma de los anchos de cada capa que forma al sistema [24 y 25].

1.8 Campo eléctrico dentro de la estructura y localización de la luz

La ecuación (1.4-6) describe la propagación electromagnética dentro de un sistema de multicapas:

$$E(x) = \begin{cases} A_0 e^{-ik_{0x}(x-x_0)} + B_0 e^{ik_{0x}(x-x_0)} & x < x_0, \\ A_l e^{-ik_{lx}(x-x_l)} + B_l e^{ik_{lx}(x-x_l)} & x_{l-1} < x < x_l, \\ A'_s e^{-ik_{sx}(x-x_N)} + B'_s e^{ik_{sx}(x-x_N)} & x_N < x, \end{cases}$$

donde los subíndices 0 corresponden a las amplitudes y la componente en x del vector de propagación del medio incidente, los subíndices S están relacionados al medio del sustrato y los subíndices l representan cada una de las capas que conforman al sistema desde $l = 1, 2, \dots, N$, como se explicó anteriormente.

Para poder graficar la intensidad del campo eléctrico dentro de la estructura, únicamente se necesita conocer el valor de k_{lx} y de las amplitudes de campo A_l y B_l , recordando la componente en x del vector de propagación dado por la ecuación (1.4-5):

$$k_{lx} = \sqrt{\left(\frac{n_l \omega}{c}\right)^2 - \beta^2}.$$

Es posible resolver la ecuación (1.4-6) a partir de las gráficas que se obtienen del diagrama de bandas, el vector de onda de Bloch o de la transmitancia, en dichas gráficas se

seleccionan un par de valores para β y ω y se sustituyen en la ecuación anterior, tomando en cuenta que ambos valores serán constantes para toda la estructura y la única variable será el índice de refracción (n_l).

Para obtener las amplitudes del campo eléctrico en cada capa del sistema se hace uso de la matriz de transferencia y de las ecuaciones (1.6-5) y (1.6-6), siguiendo el esquema presentado en la figura 1.2:

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = D_{n-1}^{-1} D_n P_n \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = D_n^{-1} D_{n-1} P_{n-1} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix},$$

donde las matrices D_l y P_l son las matrices dinámicas y de propagación respectivamente.

Una vez que se obtienen todos los valores del componente en x del vector de propagación y las amplitudes del campo eléctrico, éstos se sustituyen en la ecuación (1.4-6) para así determinar el campo eléctrico en cada capa de la estructura [24]. Se ha reportado el comportamiento del campo eléctrico dentro de la estructura a partir de los espectros de transmisión, principalmente en tres zonas que comprenden estos espectros, la primera es dentro de una banda prohibida tradicional o una banda tradicional, la segunda dentro de una banda prohibida fractal y por último dentro de una banda de transmisión perfecta.

De acuerdo a Xunya Jiang y sus colaboradores [11], una banda tradicional nunca cambia de posición energética pero sí aumenta la magnitud de la banda prohibida conforme aumenta la generación del sistema estudiado, es decir, el porcentaje de radiación electromagnética transmitido disminuye conforme aumenta la generación, y proponen que estas bandas tradicionales son debidas a interferencias destructivas que se generan debido a interfaces de capas A y B, es decir, supóngase el siguiente sistema de Thue-Morse: A|BB|A|B|AA|B, donde cada interfaz dividida por | es entre una capa de material A y una de material B, entonces las bandas tradicionales son debido a este tipo de interfaces; por otro lado, las bandas prohibidas fractales o bandas fractales dependen de la generación del sistema estudiado y tienen correlaciones más complejas que el de las bandas tradicionales, sin

embargo, conforme el sistema aumenta en tamaño, es decir, cuando se consideran generaciones mayores, aumenta el número de bandas fractales sin modificar la posición energética de las bandas fractales que se obtuvieron en generaciones previas, además de que las bandas tradicionales siempre son las de menor porcentaje de transmisión permitido, es decir, son las bandas predominantes; por último las bandas de transmisión perfecta son bandas donde, como su nombre lo indica, la transmisión es casi del 100%. Sin embargo cabe recalcar que dichas investigaciones y los resultados que se obtuvieron son para sistemas clásicos de Thue-Morse, donde encontraron estados localizados y cuasi-localizados o críticamente localizados dentro de una banda fractal, estados extendidos o comportamiento tipo Bloch dentro de bandas tradicionales. Por otro lado Nian-hua Liu [9] obtuvo comportamientos autosimilares dentro de una banda de transmisión perfecta, esto se debe considerar ya que los sistemas estudiados en este trabajo de investigación presentan una periodicidad en el acomodo de los índices de refracción y una aperiodicidad determinista en los anchos de las capas B, generando un sistema cuasi-periódico, entonces es de esperar comportamientos diferentes a los reportados en [9 y 11].

En un sistema determinista aperiódico, las funciones de onda no presentan estados extendidos tipo Bloch como es el caso de los sistemas periódicos, ni presenta estados exponencialmente localizados como en los sistemas desordenados. Entonces para estudiar las propiedades de localización de la luz en los sistemas deterministas aperiódicos y en general para sistemas aperiódicos, es necesario introducir las llamadas funciones de onda críticamente localizadas. Este tipo de funciones críticamente localizadas son parcialmente oscilatorias, por consiguiente, no es suficiente caracterizar las propiedades de localización únicamente por la longitud de localización. Por esta razón para describir las propiedades de localización en sistemas no periódicos se introduce el grado de localización (γ), el cual está definido, de acuerdo a Nian-hua Liu [9], por:

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^N I_i^2}{(\sum_{i=1}^N I_i)^2}, \quad (1.8-1)$$

donde N es el número total de capas del sistema y definimos a I_i como la intensidad de campo eléctrico distribuida en la capa i de acuerdo a la ecuación (1.8-2):

$$I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} |E(x)|^2 dx, \quad (1.8-2)$$

donde x es el eje de crecimiento del sistema (figura 1.2).

De la ecuación (1.8-1) se pueden obtener dos casos extremos, el primero es cuando Υ alcanza su valor mínimo, que es $\Upsilon_{\min}=1/N$, en este caso se obtiene el estado más extendido y es debido a que la intensidad de campo eléctrico es la misma en cada capa que conforma al sistema. Por otro lado cuando Υ alcanza su máximo valor ($\Upsilon_{\max}=1$) se tienen estados demasiado localizados, porque la distribución de intensidad de campo eléctrico se concentra únicamente en una capa del sistema. Generalmente el valor de Υ oscila entre $1/N < \Upsilon < 1$, entre más grande el valor del grado de localización más localizado es el sistema [9].

Capítulo 2

Modelado de sistemas de multicapas

2.1 Secuencias recurrentes

Las secuencias cuyos elementos se forman mediante alguna regla que se establece de los elementos que le anteceden, se conocen como secuencias recurrentes y la regla o ecuación que las describe es una relación de recurrencia como la siguiente:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}. \quad (2.1-1)$$

Esta ecuación es válida únicamente para $n > 1$, esto quiere decir que es necesario introducir ciertas condiciones iniciales, basta con conocer o proponer el valor de u_0 y u_1 y así generar la secuencia completa, pero existen secuencias en las que es suficiente proponer solo una condición inicial [18].

2.2 La secuencia de Fibonacci

Existen diversos caminos para generar y representar la secuencia de Fibonacci, como por ejemplo, sea la secuencia F_n , conformada por los números $F_n=0, 1, 1, 2, 3, 5, 8...$ etc. De este modo el número N_i es la suma de los dos números previos, es decir, N_{i-1} y N_{i-2} , como se describe en la ecuación (2.1-1). En términos matemáticos, la secuencia F_n de los números de Fibonacci está definida por la relación de recurrencia $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, la cual es equivalente a la ecuación (2.1-1), con valores iniciales $F_0=0$ y $F_1=1$.

También es posible obtener cualquier número de Fibonacci sin necesidad de conocer los dos números que le preceden mediante el uso de la ecuación de Binet:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\varphi^n - (-1)^n\varphi^{-n}], \quad (2.2-1)$$

en donde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es la razón dorada.

Asimismo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi, \quad (2.2-2)$$

la cual significa que entre más grandes sean dos números consecutivos de Fibonacci, el cociente de éstos se acerca más a la relación Dorada (descubierta en 1611 por Johannes Kepler).

Como se mencionó anteriormente existen múltiples representaciones de la secuencia de Fibonacci y cómo generarla, en este apartado solo abordaremos dos métodos, uno de los cuales es el más utilizado en el estudio de sistemas de multicapas de Fibonacci [2, 3, 6, 8, 16] y el otro es el que se implementará en esta investigación [19]. El primer método consiste en utilizar la regla de sustitución definida por $A \rightarrow AB$ y $B \rightarrow A$, la cual aplicada sucesivamente genera la secuencia A, AB, ABA,....., y es mostrada de manera más detallada en la *tabla 2.2*. De este modo, obtenemos una “palabra” perfectamente ordenada la cual no es periódica en absoluto, donde se puede observar que no existe un patrón o celda unitaria capaz de formar la “palabra” completa como sucede en los sistemas periódicos (donde se puede definir una celda unitaria formada por AB que se repita N veces). Podemos observar que el proceso de construcción garantiza que el número total de letras en una palabra de Fibonacci es un número de Fibonacci y que el cociente de número de letras A sobre el número de letras B se aproxima a la relación Dorada conforme el tamaño de la cadena de Fibonacci se incrementa progresivamente [20 y 26], las relaciones anteriores son representadas en la *tabla 2.1*.

El segundo método consiste en hacer uso de la Secuencia Dorada o la Secuencia Binaria del Conejo, que es la que se aplicará en el presente trabajo, está definida matemáticamente por la relación de recurrencia:

$$S_j = S_{j-1} \& S_{j-2} \quad (2.2-3)$$

la cual empieza con $S_0=0$ y $S_1=1$ como sus condiciones iniciales, y el tercer término, el cual se obtiene mediante la concatenación o combinación de los dos términos anteriores

(operación representada por el símbolo &), es 10 y siendo j el número de la generación de Fibonacci, cumpliendo con las condiciones descritas anteriormente. Ambas representaciones de la secuencia de Fibonacci cumple que el número total de términos, ya sean números binarios o letras, en la secuencia es un número de Fibonacci y además el cociente del número de letras A (1) sobre el número de letras B (0) tiende a la Razón Dorada conforme crece la generación de Fibonacci, como se muestra en la tabla 2.1.

Tabla 2.1: Secuencia Binaria del Conejo y de la regla de sustitución de Fibonacci, el número de Fibonacci y la relación Dorada.

Generación de Fibonacci n (j)	No. de Fibonacci	Secuencia Dorada	Regla de sustitución	No. total	No. de A's / No. de B's $\approx \varphi$
0	1	1	A	1	
1	2	10	AB	2	1
2	3	101	ABA	3	2
3	5	10110	ABAAB	5	1.5
4	8	10110101	ABAABABA	8	1.666
5	13	1011010110110	ABAABABAABAAB	13	1.6

Como podemos apreciar, la única diferencia que existe entre ambas maneras de representar la secuencia de Fibonacci de forma simbólica, es que para el primer método solo se necesita de una condición inicial, la cual es la letra A, y a partir de la regla de sustitución se pueden obtener todos los términos de la secuencia de Fibonacci, y para el segundo método es necesario definir dos condiciones iniciales, S_0 y S_1 [20 y 26].

Una propiedad bastante notable en éste y otros sistemas, como el de Thue-Morse y Cantor, es la autosimilaridad; “la autosimilaridad se refiere a que la estructura global del sistema como se observa a cierta escala es repetida o encontrada sucesivamente a escalas menores o mayores” [26]; por ejemplo, supóngase la cuarta generación de Fibonacci ($n=4$):

$$F_4 = \text{ABAABABA}$$

si se define $A=A_0$ y $B=B_0$, se obtiene:

$$F_4 = A_0 B_0 A_0 A_0 B_0 A_0 B_0 A_0,$$

ahora si renombramos $A_1=A_0B_0$ y $B_1=A_0$, el cual es equivalente a la regla de sustitución original:

$$F_4=A_1B_1A_1A_1B_1.$$

Siguiendo el mismo procedimiento definimos $A_2=A_1B_1$ y $B_2=A_1$ y también $A_3=A_2B_2$ y $B_3=A_2$, para llegar a:

$$F_4=A_2B_2A_2,$$

$$F_4=A_3B_3,$$

Lo cual indica que cualquier generación de Fibonacci contiene a todas las generaciones que le preceden, ya que lo que se hizo en este ejemplo fue escribir una generación mayor en términos de las generaciones anteriores [20 y 26].

2.3 La secuencia de Thue-Morse

Al igual que para Fibonacci, en el caso de la secuencia de Thue-Morse existen diversos caminos para generarla, pero sólo se abordarán dos métodos, el método clásico [9, 11, 13, 14, 16, 21 y 22] que consta también de un alfabeto que contiene las letras A y B pero su relación de recurrencia es muy diferente a la de Fibonacci, y el segundo método es el binario. La secuencia de números decimales de Thue-Morse está descrita por $TM=1, 2, 4, 8, 16, \dots$, etc, esta secuencia no puede describirse en términos de la ecuación (2.1-2), y su tasa de crecimiento es igual a 2^n donde n es el número de generación que se desea [21 y 22].

Observamos que si se realiza el cociente de números sucesivos de la secuencia de Thue-Morse siempre va a tender al valor de 2.

Para generar la secuencia de Thue-Morse partimos de un alfabeto que como en el caso de Fibonacci, contiene únicamente las letras A y B, o los números binarios 1 y 0, ambos tipos de representación siguen la misma relación de recurrencia (2.3-1), además de que para Thue-Morse se necesita únicamente de una condición inicial, ya sea que se escoja a A (1)0 o B (0) como condición inicial de la secuencia.

$$S_j = S_{j-1} \& \overline{S_{j-1}} \quad (2.3-1)$$

donde el símbolo “&” indica la concatenación o unión de ambos términos y $\overline{S_{j-1}}$ representa el conjugado de S_{j-1} , en otras palabras, si se escoge a A (1) como condición inicial su conjugado se define como B (0), de esta manera es posible obtener dos palabras diferentes con la misma longitud en una sola generación, como se ilustra en la tabla 2.2.

Tabla 2.2: Secuencia de Thue-Morse, partiendo de diferentes condiciones iniciales y número de Thue-Morse correspondiente a cada generación.

Generación	No. de Thue-Morse	Condición inicial A	Condición inicial B	Condición inicial 1	Condición inicial 0
0	1	A	B	1	0
1	2	AB	BA	10	01
2	4	ABBA	BAAB	1001	0110
3	8	ABBABAAB	BAABABBA	10010110	01101001
4	16	ABBABAABBAABAB BA	BAABABBAABBABA AB	1001011001101001	01101001100101 10
:	:	:	:	:	:

Como se puede observar, existe otra diferencia entre la secuencia de Thue-Morse y la de Fibonacci, la cual se puede apreciar en las tablas 2.1 y 2.2, y consiste en que en la secuencia de Fibonacci no se pueden encontrar B's o 0's consecutivos, es decir estos elementos se encuentran aislados, a diferencia de las A's o 1's los cuales si se pueden encontrar en pares, pero no en triadas o conjuntos mayores: mientras que para Thue-Morse tanto las B's (0) y las A's (1) si se pueden obtener de manera consecutiva, es decir en pares, lo cual es de mucha importancia, ya que más adelante servirá para describir un efecto que se observa en los diagramas de bandas [16 y 26].

Cabe señalar que las palabras de Thue-Morse presenta la misma autosimilaridad que se observó en Fibonacci, donde una generación mayor puede ser escrita en términos de las generaciones que le preceden [26].

2.4 La secuencia de Cantor

La secuencia de Cantor, así como las anteriores, presenta la propiedad de autosimilaridad, la cual se observa en la figura 2.1, donde la regla de construcción de este sistema radica en que, a partir de un segmento finito de longitud l se seccionará en tres partes iguales de longitud $l/3$, de los tres segmentos resultantes se eliminará el segmento de en medio, repitiendo de manera iterativa dicho proceso para los segmentos restantes, como lo ilustra la figura 2.1, entonces la autosimilaridad se observa que cuando el proceso es repetido n veces se obtendrán 2^n segmentos idénticos de longitud $l/3^n$ cada uno, así se presenta la autosimilaridad [10, 12, 14, 16, 23 y 26].

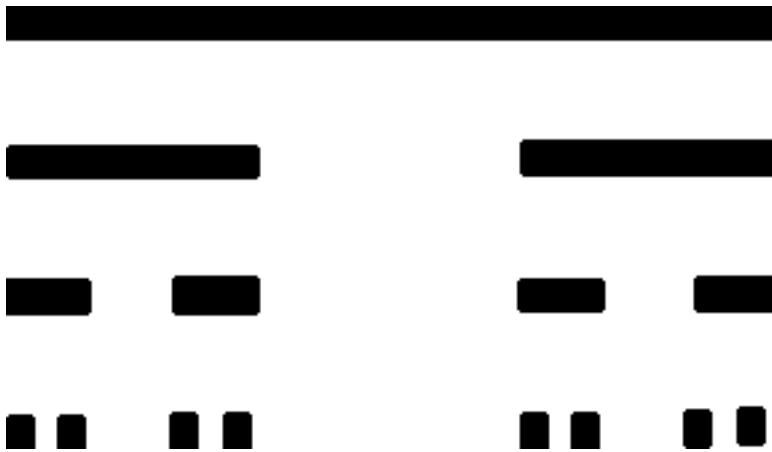


Figura 2.1: Construcción geométrica del conjunto de Cantor hasta el orden $n=3$. Imagen tomada de [26].

Otro método de obtener una estructura de Cantor aplicable para sistemas de multicapas se puede obtener mediante la siguiente regla de recurrencia: $A \rightarrow ABA$ y $B \rightarrow BBB$, forzosamente empezando con una A como condición inicial, donde para obtener la secuencia binaria como para el caso de Fibonacci y Thue-Morse, basta con utilizar la siguiente regla de sustitución: $A=1$ y $B=0$, para obtener:

$$1 \rightarrow 101 \quad (2.4-1)$$

$$0 \rightarrow 000. \quad (2.4-2)$$

A diferencia de las secuencias de Fibonacci y Thue-Morse, se puede observar que en la estructura de Cantor no es posible encontrar A's (0) sucesivas las cuales definen su patrón de autosimilaridad, mientras que las letras B's (0), viéndolo desde un punto de vista de bloques de construcción, simplemente conforman lo que es un sistema homogéneo y conforme crece la generación de Cantor este bloque homogéneo se vuelve más ancho, la tasa de crecimiento de bloques constructores (A y B) de Cantor crece como 3^n , donde n es el número de generación. En la tabla 2.3 se muestra la secuencia alfabética y numérica de Cantor [23 y 26].

Tabla 2.3: Secuencia de Cantor partiendo de la condición inicial 1 y A para obtener tanto la secuencia binaria como la alfabética.

Generación de Cantor n	No. de Cantor	Secuencia Binaria	Secuencia alfabética
0	1	1	A
1	3	101	ABA
2	9	101000101	ABABBBABA
3	27	10100010100000000101000101	ABABBBABABBBBBBBBABABB BABABBBABA
4	81	1010001010000000010100010100000 00000000000000000001010001010 00000000101000101	ABABBBABABBBBBBBBABABB BABABBBABABBBBBBBB BBBBBBBBBBBABABBBABA BBBBBBBBBABABBBABA

2.5 Modelado

La mayoría de los trabajos de investigación que se han realizado en base a alguna secuencia aperiódica o cuasiperiódica, como lo son la de Thue-Morse y Fibonacci, o con una secuencia fractal tipo Cantor, consisten en utilizar dichas secuencias para regir el acomodo de los bloques de construcción del sistema, es decir, supóngase un material A y B, cada uno con propiedades diferentes como índices de refracción, permeabilidad magnética y anchos de cada capa, entonces para obtener el sistema utilizan las secuencias alfabéticas, como se muestra en las tablas 2.2, 2.3 y 2.4 y de manera más gráfica se puede observar en la figura 2.2, donde se presenta un esquemático de dichos sistemas; otros sistemas muy estudiados consideran bloques de construcción basados en bicapas, es decir el bloque A contiene una capa de material a_1 y otra de un material b_1 , mientras que el bloque B está conformado por

una capa de material a_2 y b_2 , donde no necesariamente los 4 materiales son diferentes pero pueden poseer diferentes propiedades o incluso como el tipo de estructura que propuso Roberto Merlín y sus colaboradores [2], donde el cociente de los anchos del bloque A y el bloque B da como resultado la relación dorada, a diferencia de los sistemas propuestos para este trabajo de investigación, donde se genera un sistema híbrido mediante la combinación de un sistema periódico en cuanto al acomodo de los índices de refracción y la modulación del ancho de la capa de material B de acuerdo a una de las secuencias binarias mencionadas anteriormente [19], aunque en muchos trabajos de investigación usan el término “modular”, refiriéndose también al acomodo de los bloques de construcción siguiendo una secuencia determinista aperiódica[2-16].

Los sistemas de multicapas que se proponen tienen el siguiente número de capas cada una:

$$N=2 \cdot F_n, \quad (2.5-1)$$

$$N=2 \cdot TM_n, \quad (2.5-2)$$

$$N=2 \cdot C_n, \quad (2.5-3)$$

donde N es el número total de capas que constituyen el sistema, F_n , TM_n y C_n son los números de Fibonacci, Thue-Morse y Cantor correspondientes a la generación n .

Los sistemas a estudiar están formados por dos capas de materiales distintos A y B, con índices de refracción n_A y n_B y con anchos de cada capa d_A y d_B ; como se mencionó anteriormente, siguen un ordenamiento periódico en el acomodo de los índices de refracción, es decir $n_A|n_B|n_A|n_B|n_A|n_B$; mientras que se modulará únicamente el ancho de la capa B de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$d_B = d_{B0}(1 + \Delta \cdot S_j), \quad (2.5-4)$$

donde S_j es alguna de las secuencias binarias de Fibonacci, Thue-Morse o la regla de recurrencia binaria de Cantor y Δ representa un incremento en porcentaje del ancho de la capa B, donde el valor de Δ va desde 0% hasta 100%.

La manera en la que funcionarán las secuencias binarias se describirá a continuación con ejemplos específicos para cada secuencia y de manera ilustrativa para tratar de hacer más claras las diferencias de los sistemas propuestos para esta investigación con los que se han reportado en la literatura hasta ahora.

2.5.1 Secuencia binaria de Fibonacci

La secuencia binaria de Fibonacci está descrita por la ecuación (2.2-3), la cual es:

$$S_j = S_{j-1} \& S_{j-2}.$$

El sistema total de multicapas estará conformado por $N = 2 * F_n$ capas, donde $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$; entonces se tendrán F_{n-1} bicapas AB_1 y F_{n-2} bicapas AB_0 , y la secuencia S_j únicamente modulará los anchos de las capas de material B como se mencionó arriba. Ahora supóngase que se tiene la segunda generación de Fibonacci ($n=2$), la cual está representada por $F_2 = 3$, es decir, el sistema total contará con 6 capas, de las cuales 3 son de material A y las otras 3 de B, y $S_2 = 101$. Ahora la modulación de los anchos en B consistirá en que si se encuentra un 1, la ecuación 2.5-4 se reduce a

$$d_B = d_{B0}(1 + \Delta * 1) = d_{B0} + \Delta * d_{B0} \quad (2.5-5)$$

si por ejemplo $d_{B0}=1$ y $\Delta=50\%$, que es lo mismo que $\Delta=0.5$, la ecuación anterior queda como:

$$d_B = (1 + (0.5 * 1)) = 1.50, \quad (2.5-6)$$

generando un defecto en el sistema, teniendo en cuenta que un defecto no es sinónimo de una imperfección no deseada que presente el sistema, como en este caso, en el cual dicha imperfección es deseada, esto con el fin de observar si dicho incremento tiene algún efecto en los diagramas de banda, transmitancia, el vector de onda de Bloch, la intensidad de campo eléctrico y sobre todo en la localización de la luz, por otro lado, si se encuentra un 0 se obtiene:

$$d_B = d_{B0}(1 + \Delta * 0) = d_{B0}, \quad (2.5-7)$$

es decir, cuando $\Delta=0$ se tendrá el sistema periódico.

En la figura 2.2 se muestra de manera esquemática cómo quedaría el sistema de multicapas para la cuarta generación de Fibonacci en los casos cuando $\Delta=0$ y $\Delta\neq 0$, como se vería un sistema de Fibonacci clásico para la misma generación y la celda unitaria de un sistema periódico.

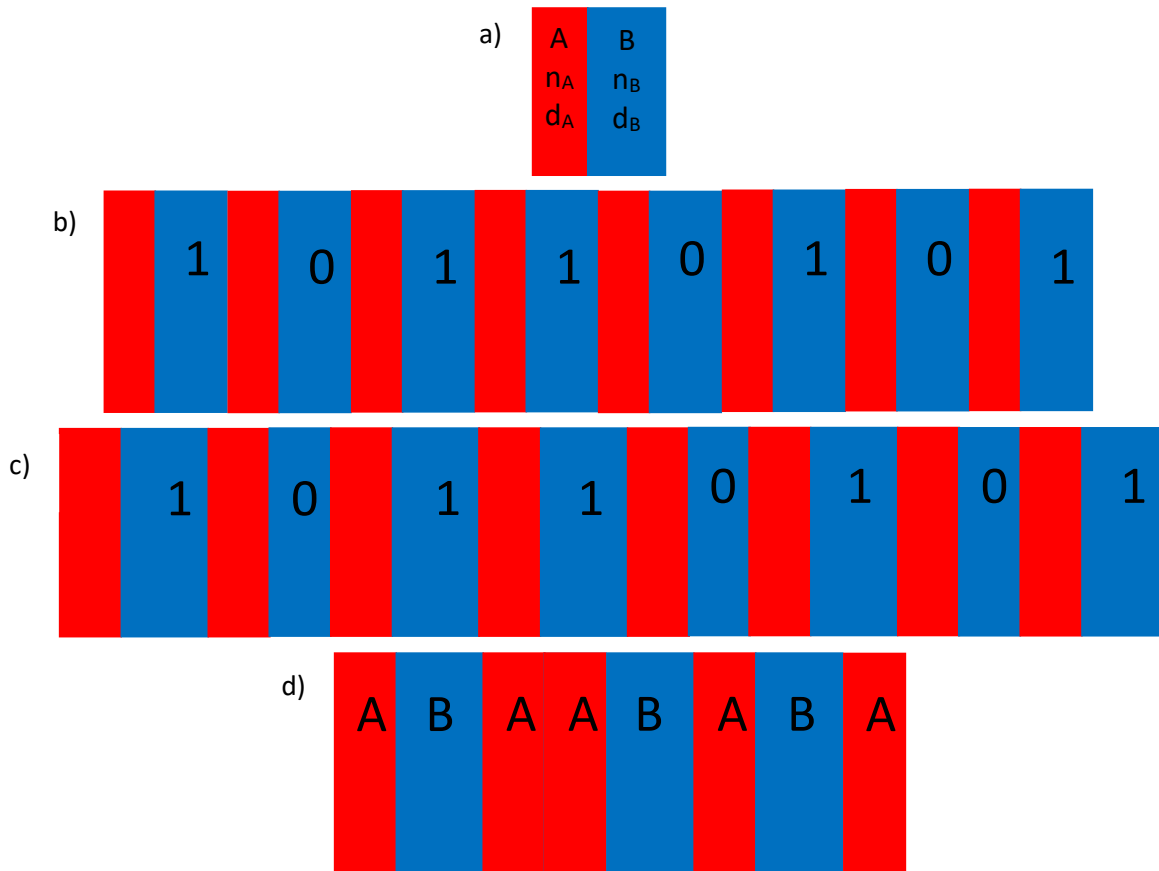


Figura 2.2: Esquemático de: a) Celda unitaria de un sistema periódico, la cual consta de dos capas de materiales A y B con sus respectivos índices de refracción (n_A y n_B) y anchos de cada capa (d_A y d_B), b) Sistema modulado de Fibonacci en el ancho de las capas B cuando $\Delta=0$, el cual es un sistema periódico similar al de la figura a, pero la celda unitaria se repite 8 veces, c) Sistema modulado de Fibonacci cuando $\Delta\neq 0$, en este caso la celda unitaria es todo el sistema en cuestión y d) Sistema clásico de Fibonacci, regido por el acomodo de las capas siguiendo la regla de recurrencia de Fibonacci. Para b y c los números 1 y 0 están colocados en las capas de material B y siguen la secuencia binaria de Fibonacci y las capas tienen las mismas propiedades que las de la celda unitaria, una capa roja es una capa de material A y una azul representa una capa de material B.

2.5.2 Secuencia binaria de Thue-Morse

Para construir y modular el sistema de multicapas de acuerdo a la secuencia binaria de Thue-Morse, se aplica exactamente la misma metodología que se describió para las multicapas de Fibonacci, con la única diferencia de que la regla de recurrencia que se utilizará será la ecuación (2.3-1):

$$S_j = S_{j-1} \& \overline{S_{j-1}}$$

En la figura 2.3 se muestra un esquemático de cómo se vería el sistema de Thue-Morse modulado cuando $\Delta=0$ y $\Delta \neq 0$ y un sistema de Thue-Morse clásico, para la tercera generación.

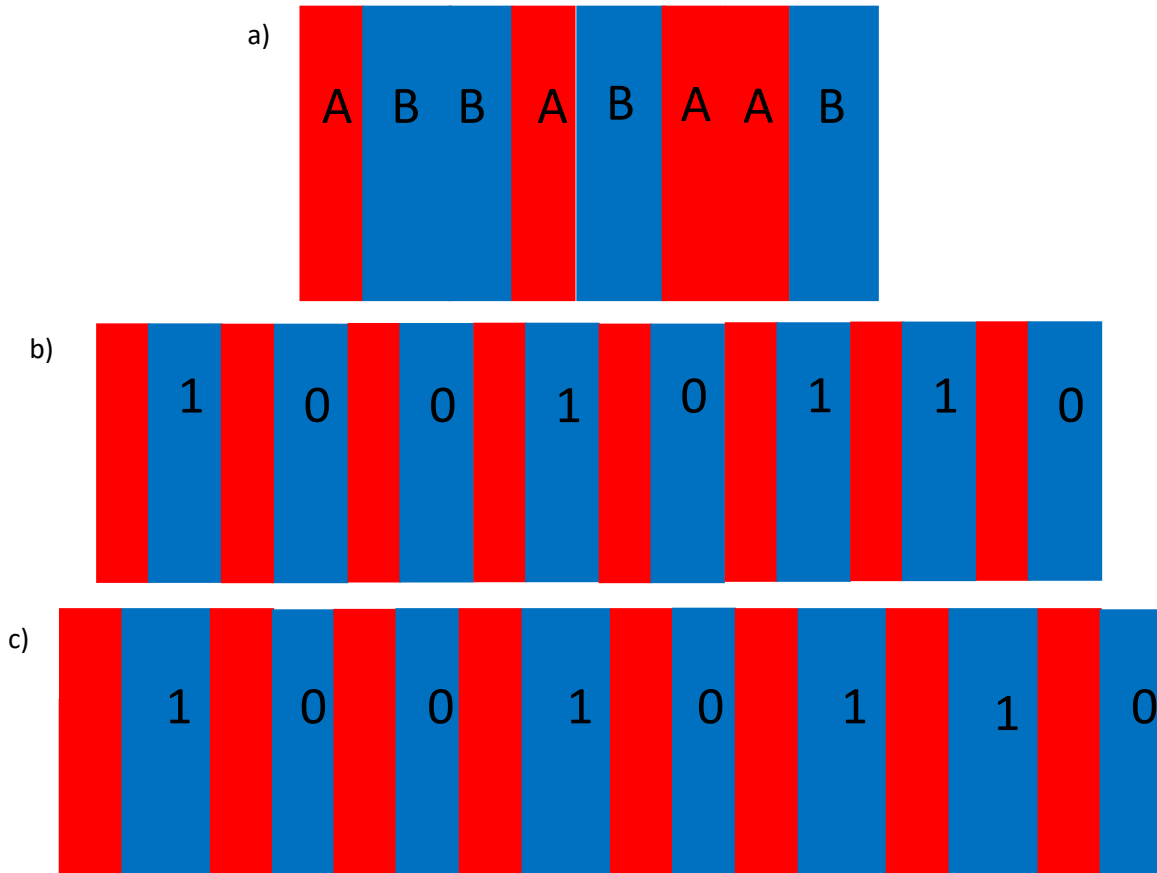


Figura 2.3: Esquemático de: a) Sistema clásico de Thue-Morse, regido por el acomodo de las capas siguiendo la regla de recurrencia de Thue-Morse b) Sistema modulado de Thue-Morse en el ancho de las capas B cuando $\Delta=0$, el cual es un sistema periódico similar al de la figura 2.2a, pero la celda unitaria se repite 8 veces, c) Sistema modulado de Thue-Morse cuando $\Delta \neq 0$, en este caso la celda unitaria también es todo el sistema en cuestión. Para b y c los números 1 y 0 están colocados en las capas de material B y siguen la secuencia binaria de Thue-Morse y las capas tienen las mismas propiedades que las de la celda unitaria (figura 2.2a), una capa roja es una capa de material A y una azul representa una capa de material B.

2.5.3 Secuencia binaria de Cantor

Al igual que para Fibonacci y Thue-Morse, los sistemas de Cantor que se estudiarán en esta tesis se forman haciendo uso del mismo método que ya se explicó con anterioridad para Fibonacci, pero aplicando la regla de recurrencia correspondiente a dicha secuencia (ecuaciones 2.4-1 y 2.4-2):

1→101

0→000.

En la figura 2.4 se presenta el sistema de multicapas de Cantor para la segunda generación cuando $\Delta=0$ y $\Delta\neq 0$ y también un sistema de Cantor clásico.

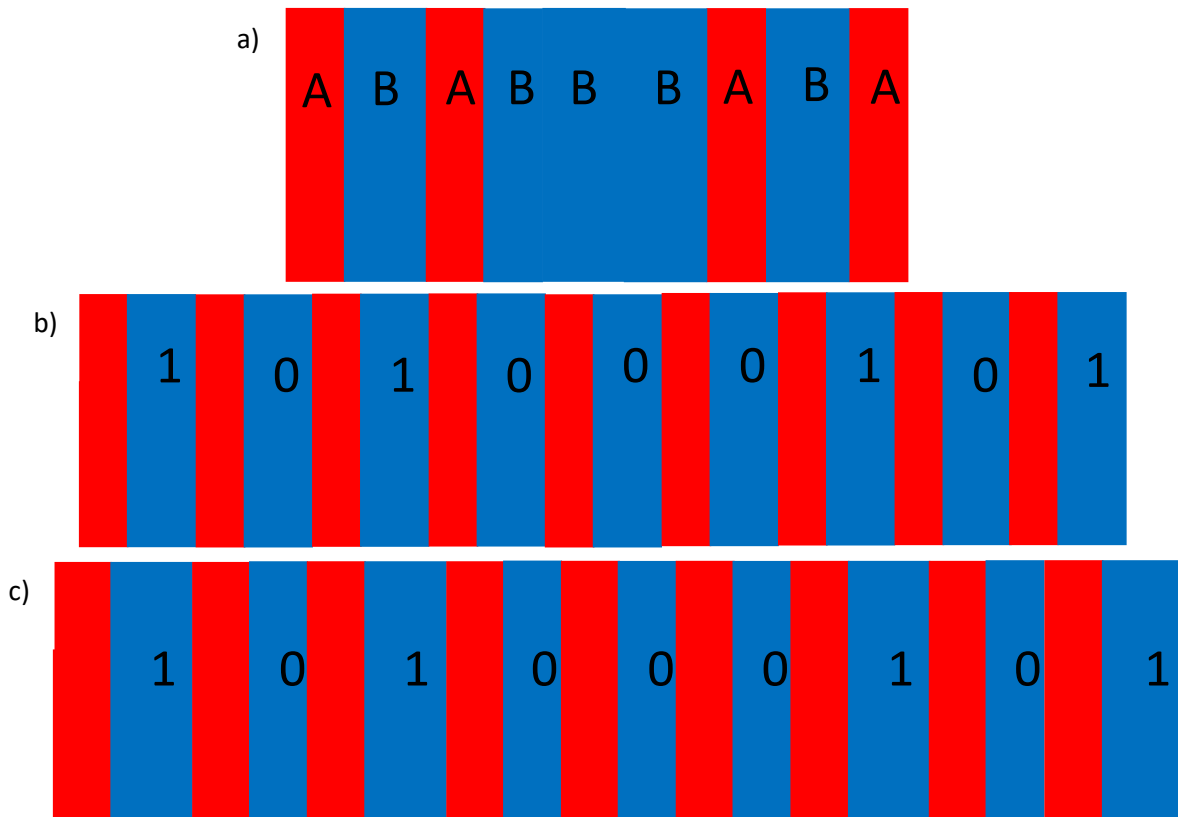


Figura 2.4: Esquemático de: a) Sistema clásico de Cantor, regido por el acomodo de las capas siguiendo su regla de recurrencia, b) Sistema modulado de Cantor en el ancho de las capas B cuando $\Delta=0$, el cual es un sistema periódico similar al de la figura 2.2a, pero la celda unitaria se repite 9 veces, c) Sistema modulado de Cantor cuando $\Delta\neq 0$, en este caso la celda unitaria también es todo el sistema en cuestión. Para b y c los números 1 y 0 están colocados en las capas de material B y siguen la secuencia binaria de Cantor y las capas tienen las mismas propiedades que las de la celda unitaria (figura 2.2a), una capa roja es una capa de material A y una azul representa una capa de material B.

Los sistemas clásicos se presentaron para tratar de mostrar la diferencia entre los sistemas propuestos en esta investigación con los que se han estado estudiando en otras investigaciones [2-16].

Capítulo 3

Resultados y discusión

3.1 Ecuaciones importantes

Para obtener los diagramas de banda, la transmitancia, la relación de dispersión, los modos guiados, la intensidad de campo eléctrico y el grado de localización se diseñaron una serie de programas computacionales con ayuda del software MatLab, véase anexo A, B C, D, E y F. Se decidió usar este software porque el método de la matriz de transferencia se complica demasiado cuando el número de matrices involucradas es muy alto, y este software permite trabajar con matrices de una forma muy sencilla, además porque es un software cuya licencia posee el Instituto de Física y que ya nos es familiar para utilizar.

Se presentarán los diagramas de bandas, la relación de dispersión y la transmitancia para un sistema cuasi-periódico con modulaciones de Fibonacci, Thue-Morse y Cantor, como se explicó en el capítulo anterior se modulará los anchos de las capas de material B que conformarán a la celda unitaria. Una vez realizado este análisis se procederá a comparar la distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de las estructuras dependiendo del parámetro delta (Δ), con el fin de observar si existen indicios de localización de la luz presentando estados extendidos, críticamente localizados o localizados. Por último se presentará el parámetro gama (Υ), el cual indica el grado de localización, esto con el fin de poder observar el impacto que tiene el parámetro Δ en Υ , ya que si $\Delta=0$ se tendría un sistema periódico, los cuales no presentan localización de la luz, así que se esperaría que presente un mínimo para Υ , y cuando Δ tome su valor máximo se espera que las estructuras presenten un grado mayor de localización debido a la naturaleza aperiódica de las secuencias utilizadas.

El diagrama de bandas nos indica las energías con las que se propaga o no se propaga la onda electromagnética a través del material, se grafica un barrido de frecuencia contra diferentes valores de β , es decir diferentes ángulos de incidencia. El diagrama de bandas se

obtiene de las condiciones descritas por las ecuaciones (1.7-3) y (1.7-4) para bandas permitidas y para bandas prohibidas de la ecuación (1.7-5), recordando que se hace uso de la aproximación racional vista en el capítulo 1.

$$\left| \frac{1}{2} (M_{11} + M_{22}) \right| \leq 1, \quad (3.1-1)$$

$$\left| \frac{1}{2} (M_{11} + M_{22}) \right| > 1, \quad (3.1-2)$$

Todas las gráficas que se presentan de los diagramas de banda están normalizadas de acuerdo a las ecuaciones (3.1-3) para ω y (3.1-4) para β :

$$W = \frac{\omega \lambda}{2\pi c}, \quad (3.1-3)$$

$$B = \frac{\beta \lambda}{2\pi}, \quad (3.1-4)$$

donde W es la frecuencia normalizada, ω es la frecuencia en Hz, B es el valor de la componente en z del vector de onda normalizada, β es el valor de la componente en z del vector de onda en unidades de longitud inversa, c es la velocidad de la luz y λ es el periodo en unidades de longitud definida como:

$$\lambda = d_A + d_{B0}, \quad (3.1-5)$$

donde d_A es el ancho de la capa de material A y d_{B0} es el ancho inicial de la capa de material B.

La relación de dispersión nos dice cómo se propaga la onda electromagnética en la dirección donde tenemos la variación de los índices de refracción del sistema de multicapas, es decir la propagación de la onda a través del eje x , dicho de otra manera, nos dice cómo influye el acomodo de los índices de refracción en la propagación de la onda electromagnética en esa dirección, para este caso en particular se propone $\beta = 0$, es decir, el ángulo de incidencia es igual cero, pero también se puede obtener la relación de dispersión a incidencia oblicua, en el caso particular en que $\beta = 0$ se obtiene que el comportamiento para ambas polarizaciones (S y P) es exactamente el mismo. La relación de dispersión se obtiene de la

ecuación (1.7-2). Las gráficas de la relación de dispersión están normalizadas de acuerdo a la ecuación (3.1-3) para el eje vertical y para el eje horizontal:

$$K = \frac{k\lambda}{2\pi'} \quad (3.1-6)$$

donde K es el número de onda de Bloch normalizada y k el número de onda en unidades de longitud inversa.

La transmitancia se define como la fracción de energía que logra propagarse a través de la estructura dieléctrica y se obtiene de la ecuación (1.5-6), al igual que el diagrama de bandas y la relación de dispersión, la transmitancia se obtiene al aplicar la aproximación racional al sistema de multicapas:

$$T = \frac{n_s \cos \theta_s}{n_0 \cos \theta_0} \left| \frac{1}{M_{11}} \right|^2. \quad (3.1-7)$$

Las gráficas correspondientes a la transmitancia están normalizadas en el eje vertical de acuerdo a la ecuación (3.1-3) y T es la porción de la onda electromagnética que se transmite, que va desde 0 hasta 1.

Recordando que la intensidad de campo eléctrico se define como:

$$I = |E(x)|^2, \quad (3.1-8)$$

está intensidad no es la misma que la obtenida mediante la ecuación (1.8-2). El campo eléctrico $E(x)$ esta descrito por la ecuación (1.4-6), recordando que las amplitudes del campo A_l y B_l se obtienen mediante el método de la matriz de transferencia, entonces la intensidad del campo eléctrico queda en unidades arbitrarias, debido a que las matrices de transferencia están normalizadas.

3.2 Sistemas modulados de Fibonacci

Se presentarán los resultados únicamente para tres generaciones de Fibonacci, que serán la generación n=2, 4 y 8, cuyas celdas unitarias constarán de 6, 16 y 110 capas, respectivamente.

Se consideran materiales no magnéticos ($\mu=1$), con índices de refracción reales y positivos, se tomarán en cuenta dos casos: el primero cuando $n_A=2$ y $n_B=3.35$ y el segundo con $n_A=3.35$ y $n_B=2$, esto para poder observar si las estructuras presentan diferentes comportamientos ópticos dependiendo del acomodo periódico de los índices de refracción; y con anchos de cada capa $d_A=1$ y $d_{B0}=1$ donde el valor de Δ de la ecuación (2.5-4) tomará los valores $\Delta=0$, 0.4 y 1 , recordando que el ancho de la capa B será modulado de acuerdo a la ecuación (2.5-4), es decir, $d_B=d_{B0}(1+\Delta*S_j)$.

En las figuras 3.1 se muestra el diagrama de bandas de la segunda generación de Fibonacci para la polarización P, en la figura 3.2 para la polarización S, para ambos casos del acomodo de los índices de refracción (cuando $n_A=2$ y $n_B=3.35$ y cuando $n_A=3.35$ y $n_B=2$), para la cuarta generación de Fibonacci se presentan en las figuras 3.3 y 3.4 respectivamente, y para la octava generación de Fibonacci en las figuras 3.5 y 3.6. Todas las figuras de diagramas de bandas que se muestran en a) y d) son los diagramas de bandas del sistema periódico en un rango normalizado de 0 a 1 en frecuencia y en β , mientras que las figuras restantes son de los sistemas modulados pero para un rango menor, es decir, se consideró un rango del sistema periódico en donde se presentará una banda permitida completa, por ejemplo, el rango en frecuencia que va de 0 a 0.3 aproximadamente (figura 3.2 y 3.3), realizamos este acercamiento con la finalidad de mostrar en mejor detalle la propiedad de autosimilaridad que presentan los sistemas deterministas aperiódicos.

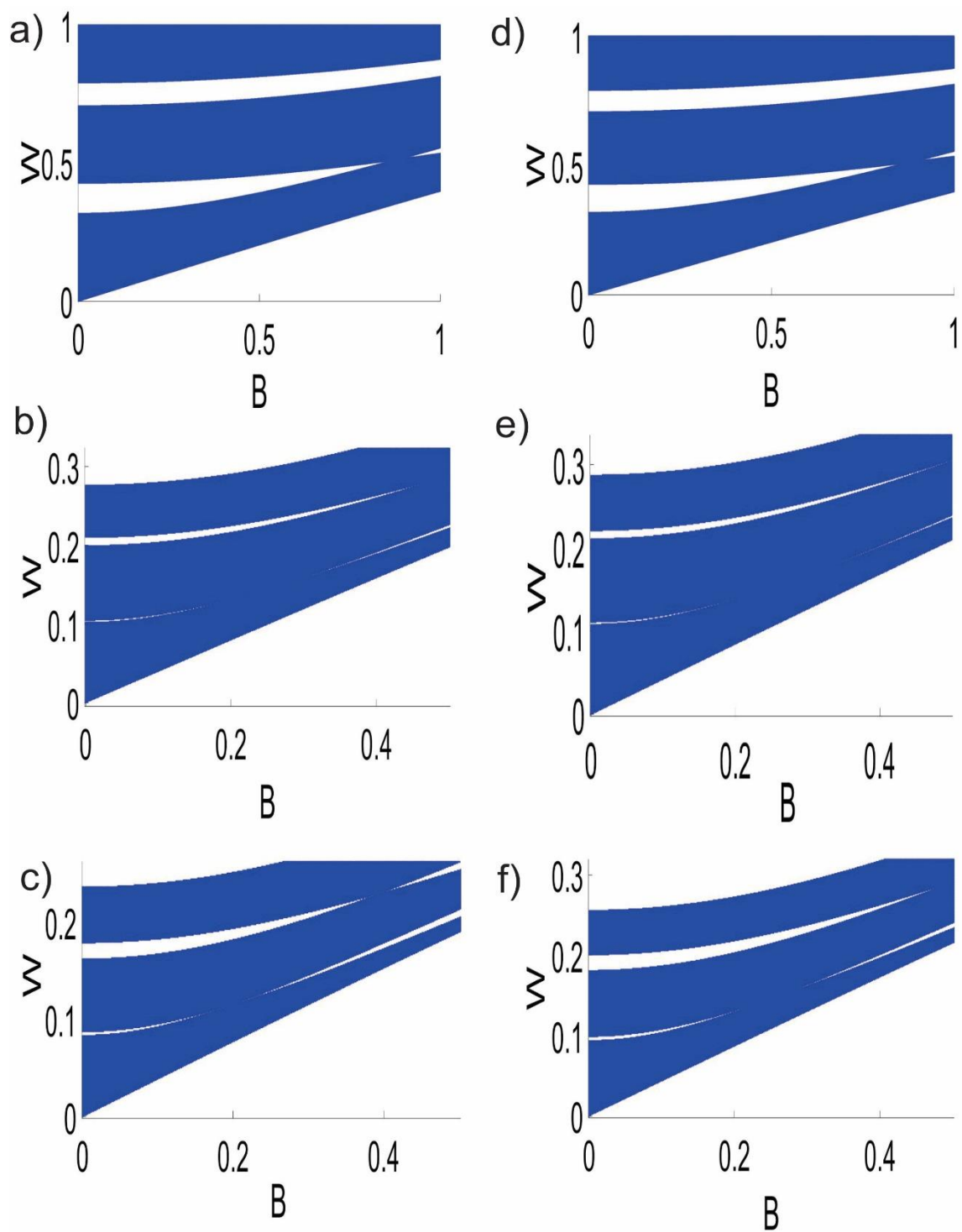


Figura 3.1: Diagrama de bandas polarización P para la segunda generación de Fibonacci, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$

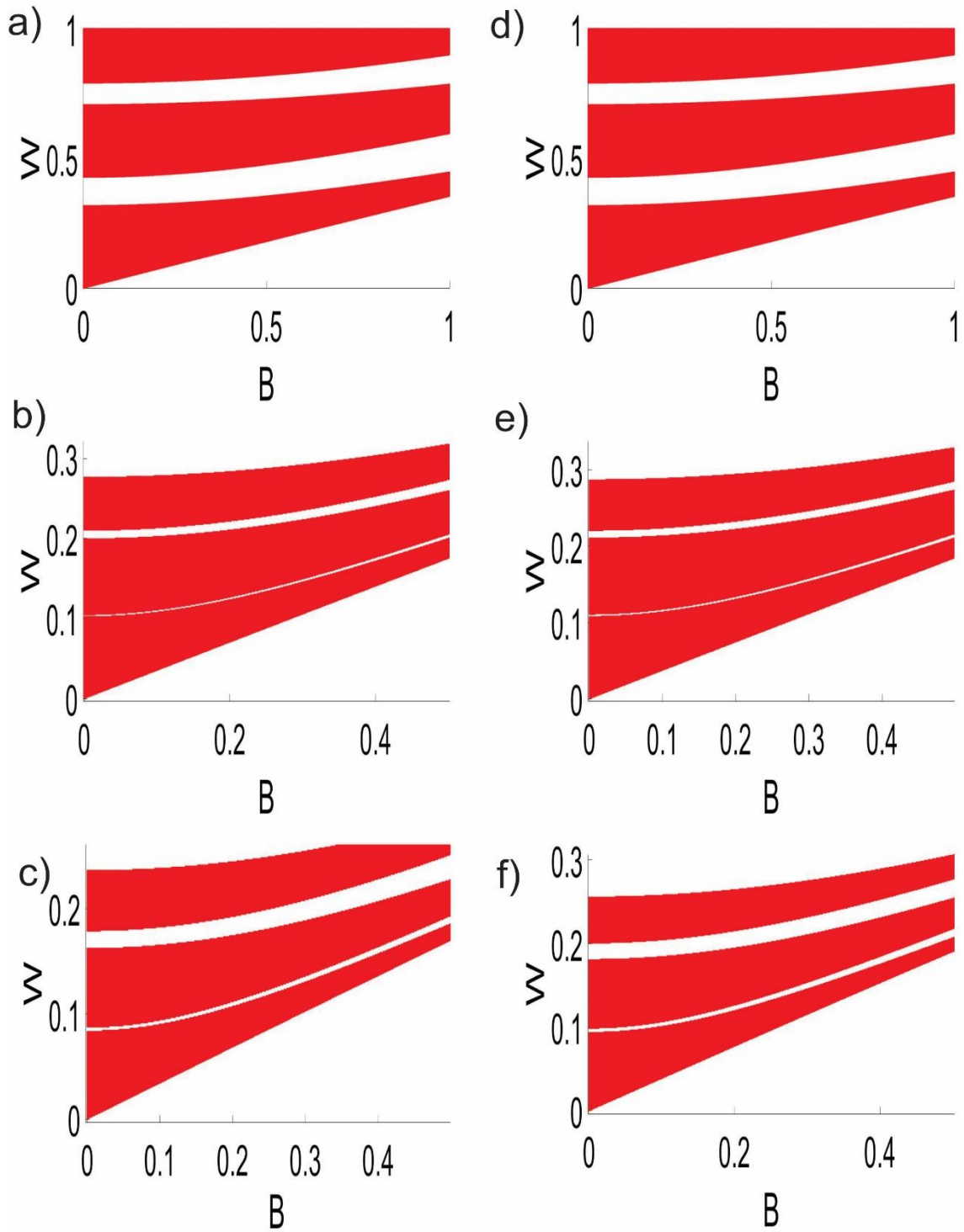


Figura 3.2: Diagrama de bandas polarización S para la segunda generación de Fibonacci, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$

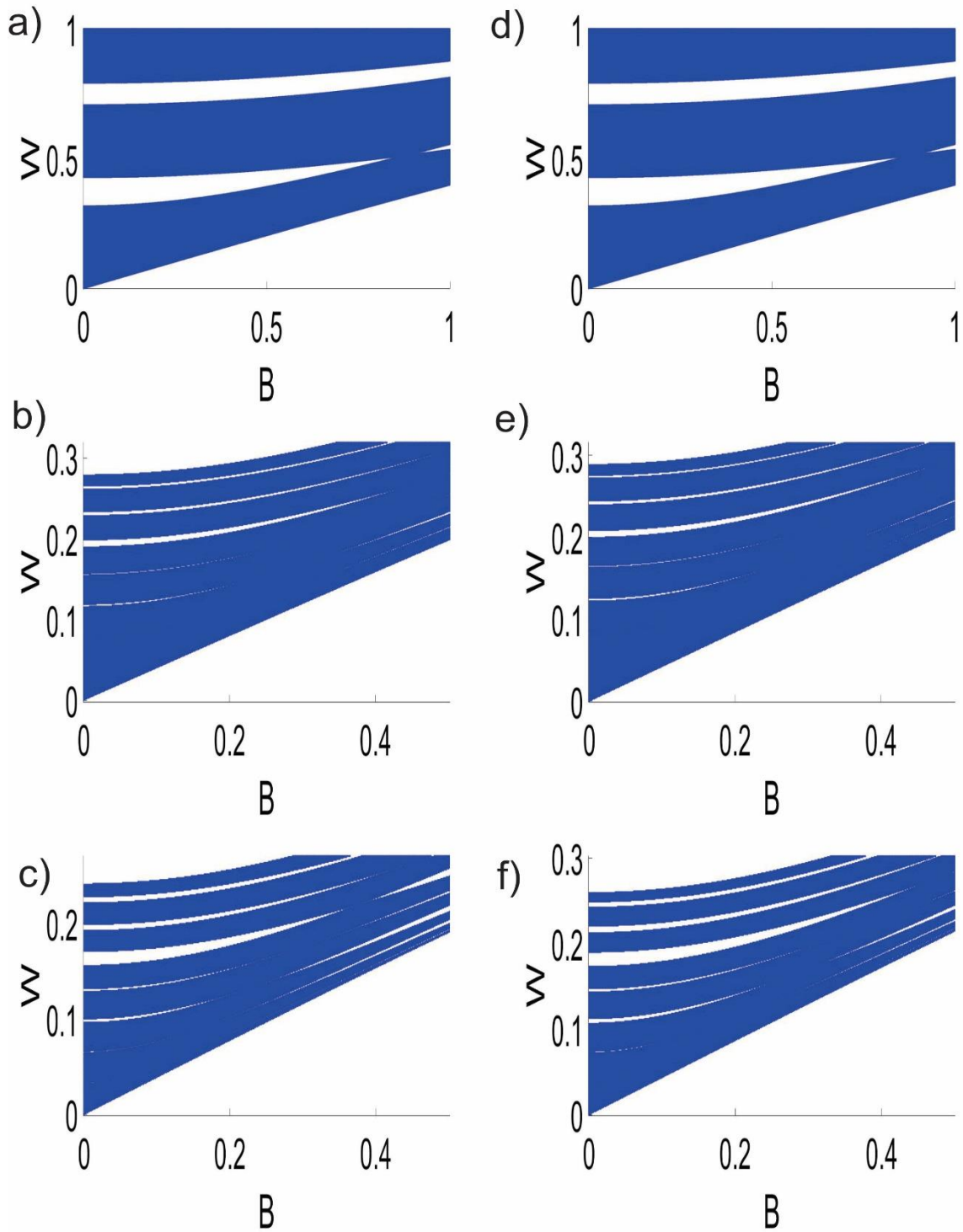


Figura 3.3: Diagrama de bandas polarización P para la cuarta generación de Fibonacci, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$

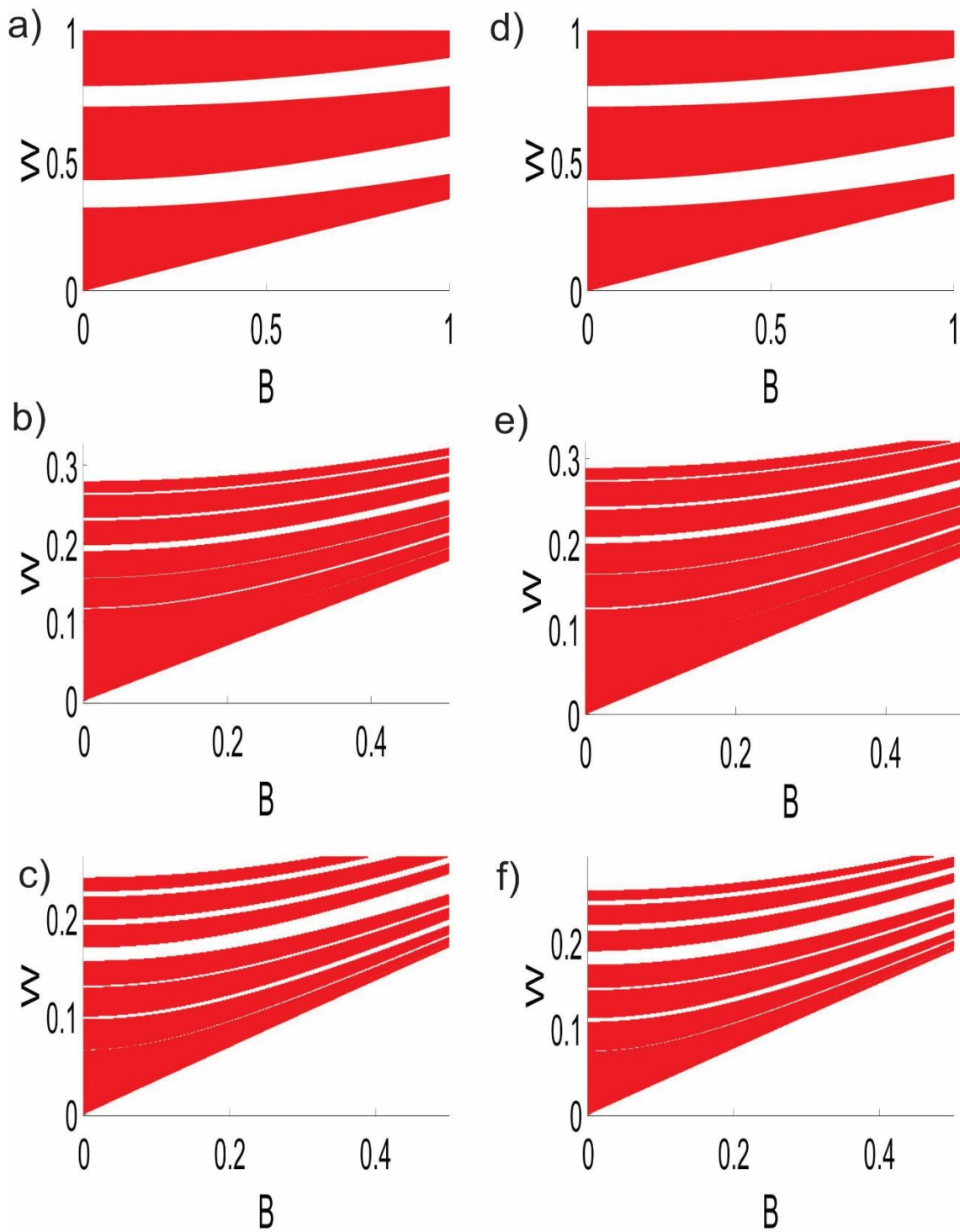


Figura 3.4: Diagrama de bandas polarización S para la cuarta generación de Fibonacci, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$

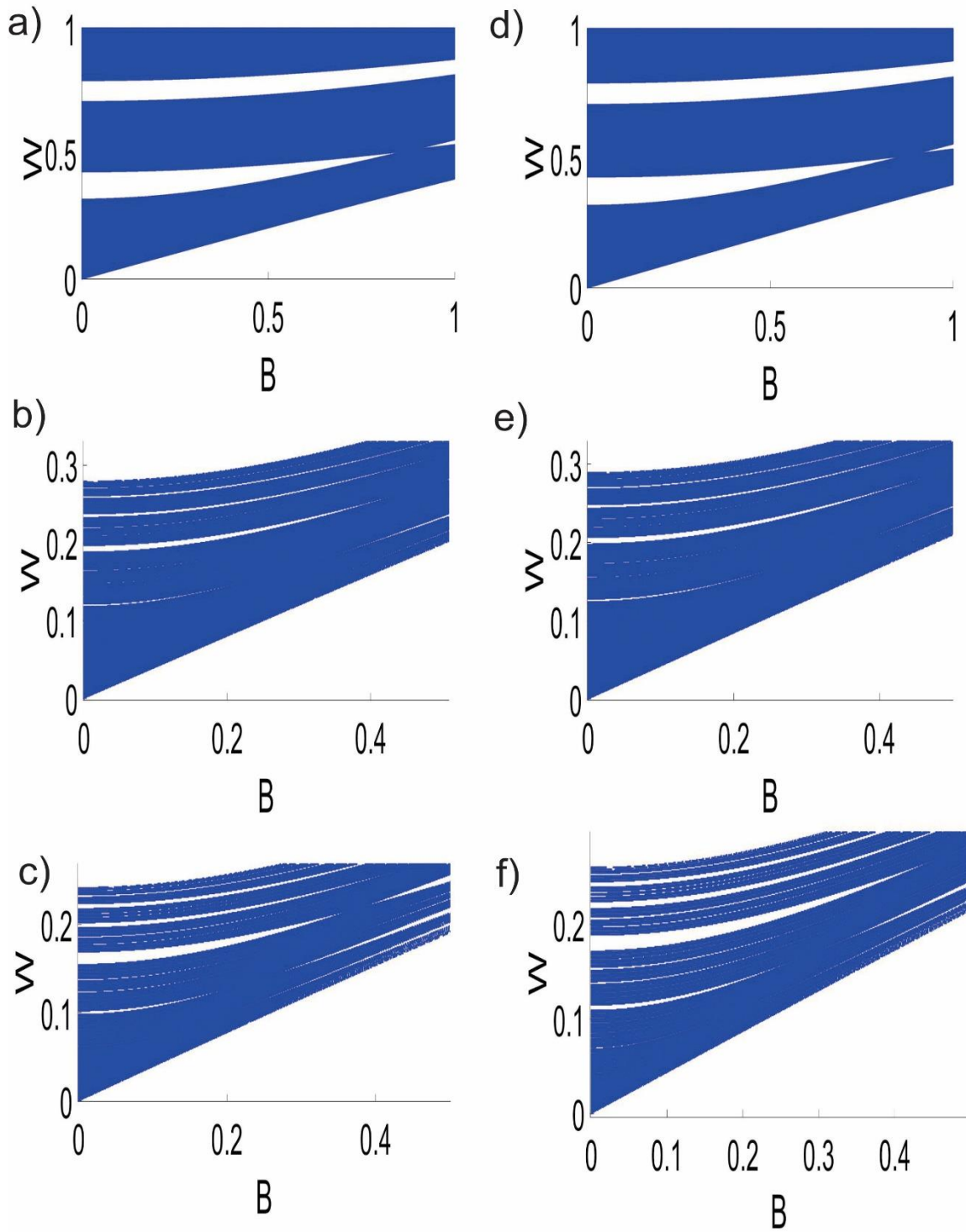


Figura 3.5: Diagrama de bandas polarización P para la octava generación de Fibonacci, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$

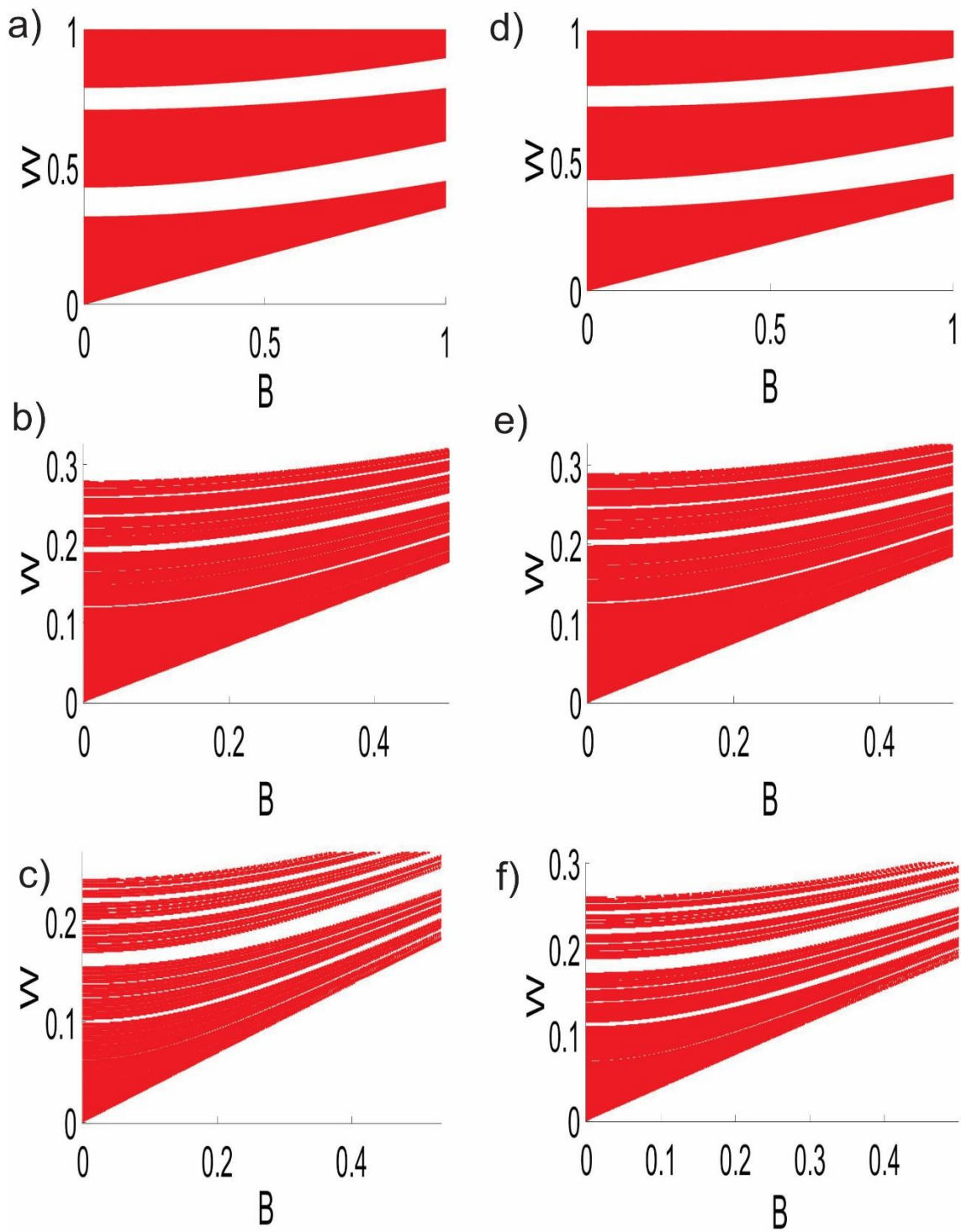


Figura 3.6: Diagrama de bandas polarización S para la octava generación de Fibonacci, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$

Como se puede observar en los diagramas de bandas de ambas polarizaciones y de cualquier generación cuando $\Delta=0$ se obtienen bandas permitidas completas, esto es debido a que se tiene un sistema periódico formado por dos capas A y B que conforman la celda unitaria la cual se repite n veces, pero cuando el valor de Δ es diferente de 0 se observa que las bandas principales que presenta el sistema periódico se comienzan a fraccionar además de que se agrupan de acuerdo al número de Fibonacci correspondiente a dicha generación (3, 8 y 55), pero conforme el valor de Δ aumenta los anchos de las bandas prohibidas comienzan a crecer y a su vez las bandas permitidas se “adelgazan” pero siempre manteniendo la autosimilaridad de Fibonacci, este efecto se puede observar un poco mejor en las figuras 3.1 y 3.2, pero conforme el valor del Δ aumenta se debe tener precaución para determinar las bandas permitidas que se obtienen debido al fraccionamiento de la banda principal y poder observar el efecto de la autosimilaridad de manera correcta, esto debido a que las bandas prohibidas presentan un corrimiento en el rango de la frecuencia y también porque las bandas permitidas empiezan a agruparse con las bandas permitidas que surgieron debido a otra banda principal, aunque para los casos presentados en las figuras anteriores cuando $\Delta \neq 0$ solo se presenta el fraccionamiento de una banda principal que se obtiene cuando $\Delta=0$.

La diferencia que se presenta debido al acomodo de los índices de refracción es bastante notable, primero cuando se tiene el sistema periódico ($\Delta=0$) el diagrama de bandas es exactamente el mismo en ambos casos, esto se debe a que el camino óptico en ambos sistemas es equivalente, conforme el valor de Δ aumenta se puede observar que el paquete de bandas permitidas o prohibidas fraccionadas a partir de una banda principal presenta una distribución más compacta cuando $n_A=2$ y $n_B=3.35$ que cuando $n_A=3.35$ y $n_B=2$, tomemos como ejemplo la figura 3.1 c y d, cuando $\Delta=1$ se observa que las tres bandas permitidas formadas están dentro del rango de frecuencia de 0 a 0.25 cuando $n_A=2$ y $n_B=3.35$, mientras que cuando $n_A=3.35$ y $n_B=2$ las mismas tres bandas permitidas están por encima de 0.25W.

También se puede observar la principal diferencia entre la polarización P y S, la cual es que, conforme aumenta el valor de β , en la polarización P las bandas permitidas se traslapan, es

decir, desaparecen las bandas prohibidas, este efecto es debido al ángulo de Brewster, mientras que para la polarización S no ocurre dicho fenómeno, esto es debido a que cuando se hace incidir luz con el ángulo de Brewster, únicamente permite la transmisión de una sola polarización que es la polarización P.

Para la transmitancia y el vector de onda de Bloch se presentará solamente la polarización S, ya que como se mencionó anteriormente cuando $\beta=0$ ambas polarizaciones presentan comportamientos iguales y para esta investigación se consideró incidencia normal, la transmitancia se presenta en las figuras 3.7 a 3.9 y las figuras 3.10 a 3.12 para el vector de onda de Bloch.

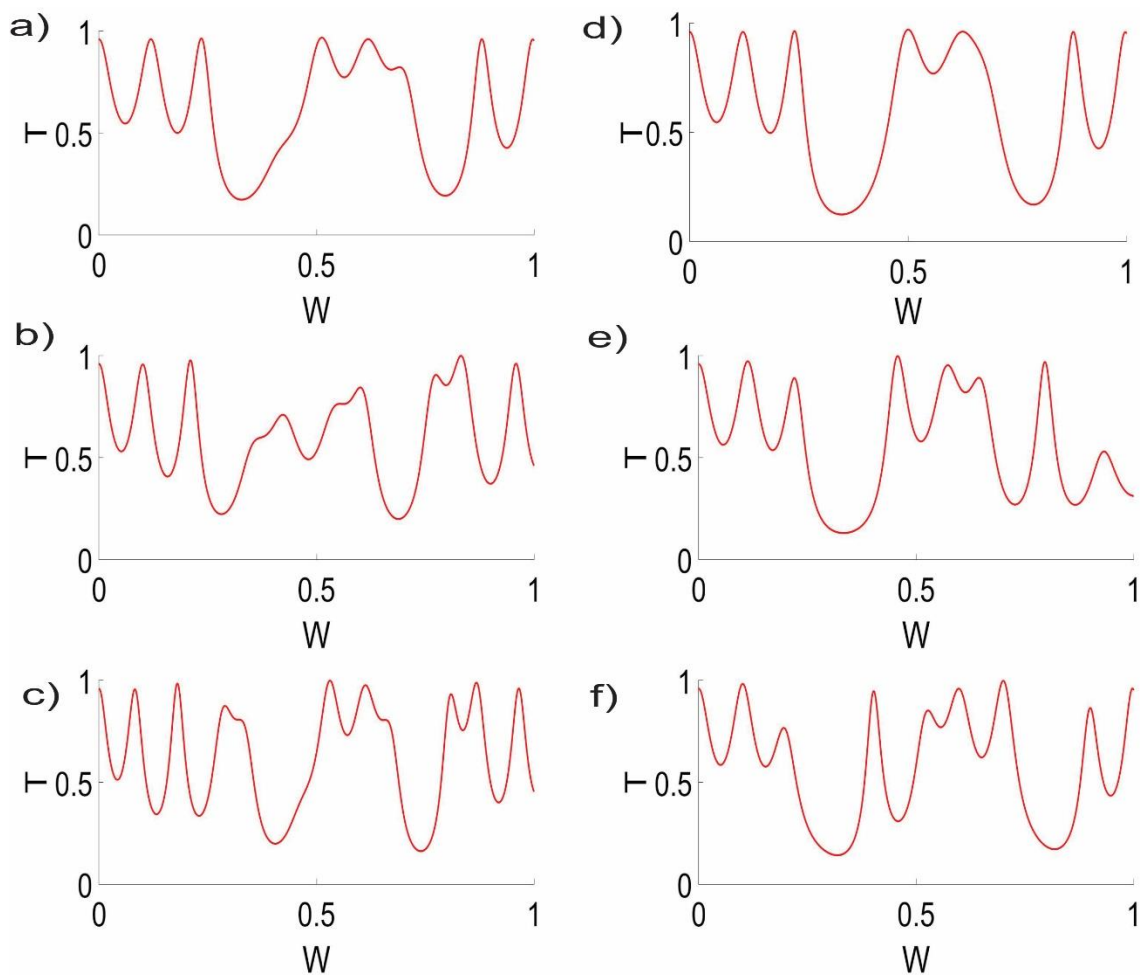


Figura 3.7: Transmitancia para la segunda generación de Fibonacci, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$

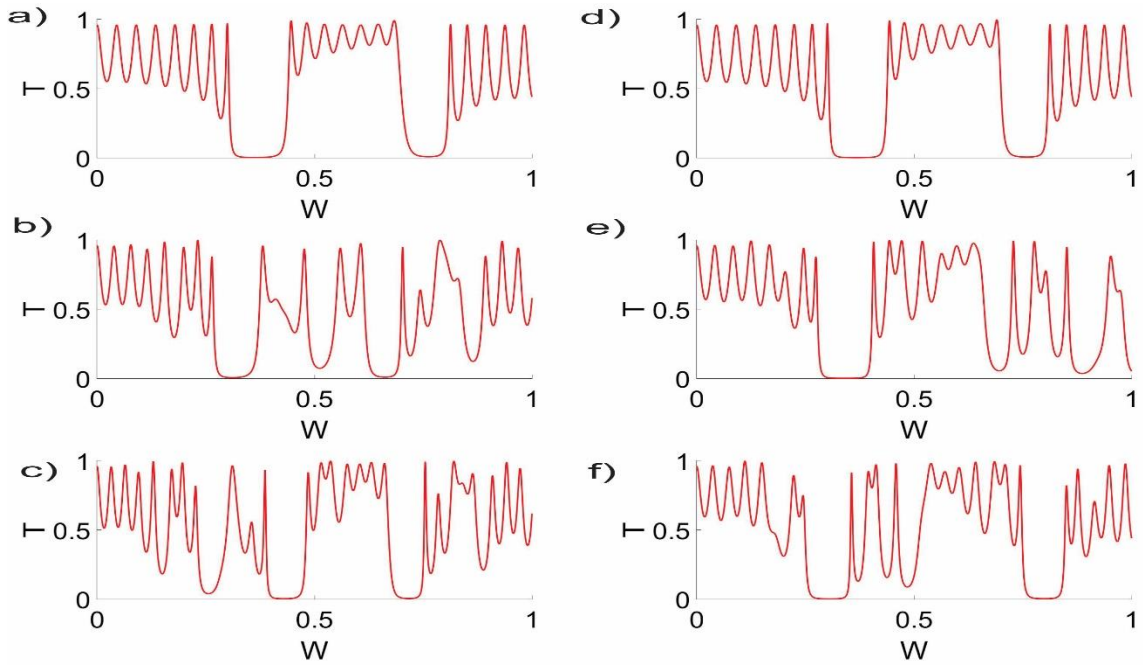


Figura 3.8: Transmitancia para la cuarta generación de Fibonacci, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$

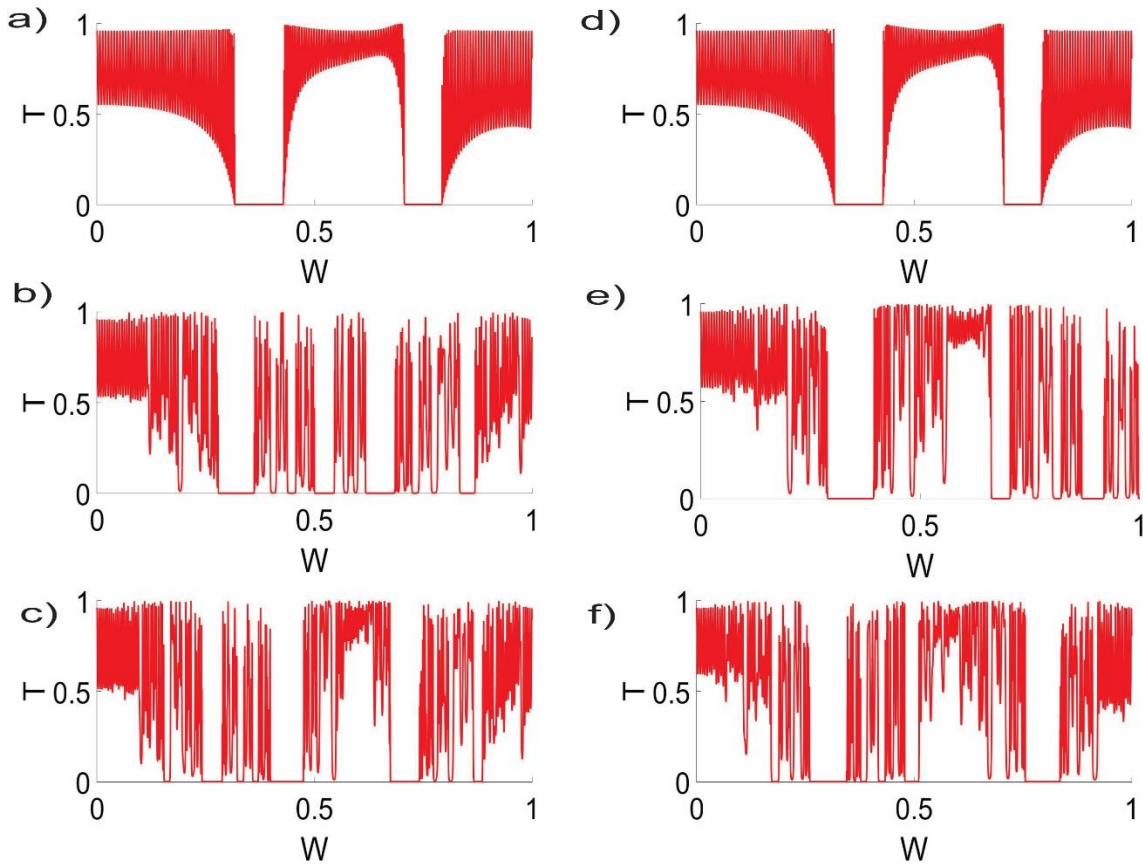


Figura 3.9: Transmitancia para la octava generación de Fibonacci, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$

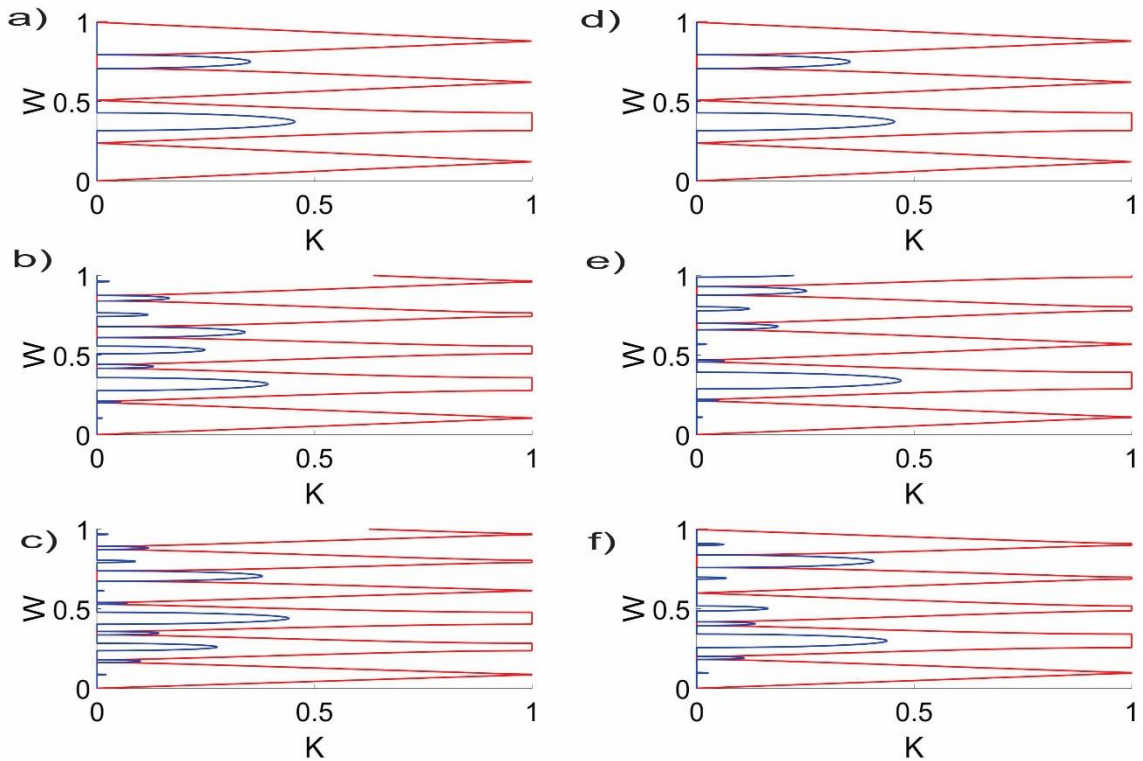


Figura 3.10: Vector de onda de Bloch para la segunda generación de Fibonacci, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$. Líneas rojas representa el vector de onda real y las azules el vector de onda imaginario.

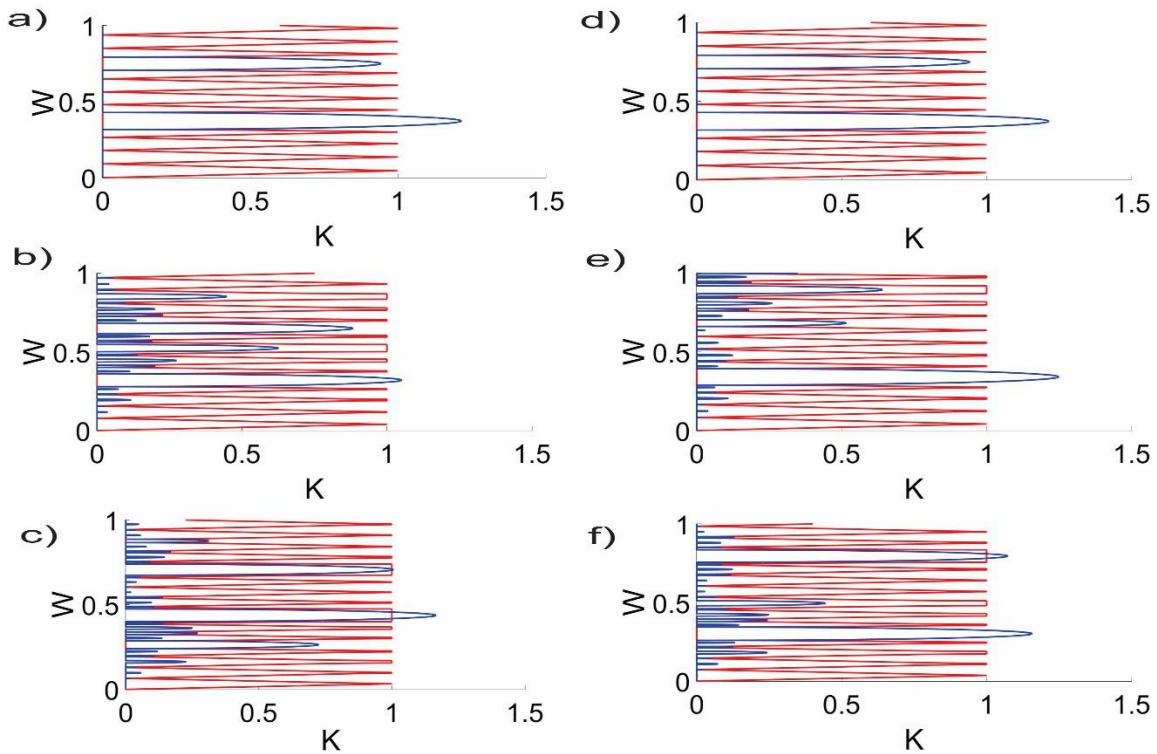


Figura 3.11: Vector de onda de Bloch para la cuarta generación de Fibonacci, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$. Líneas rojas representa el vector de onda real y las azules el vector de onda imaginario.

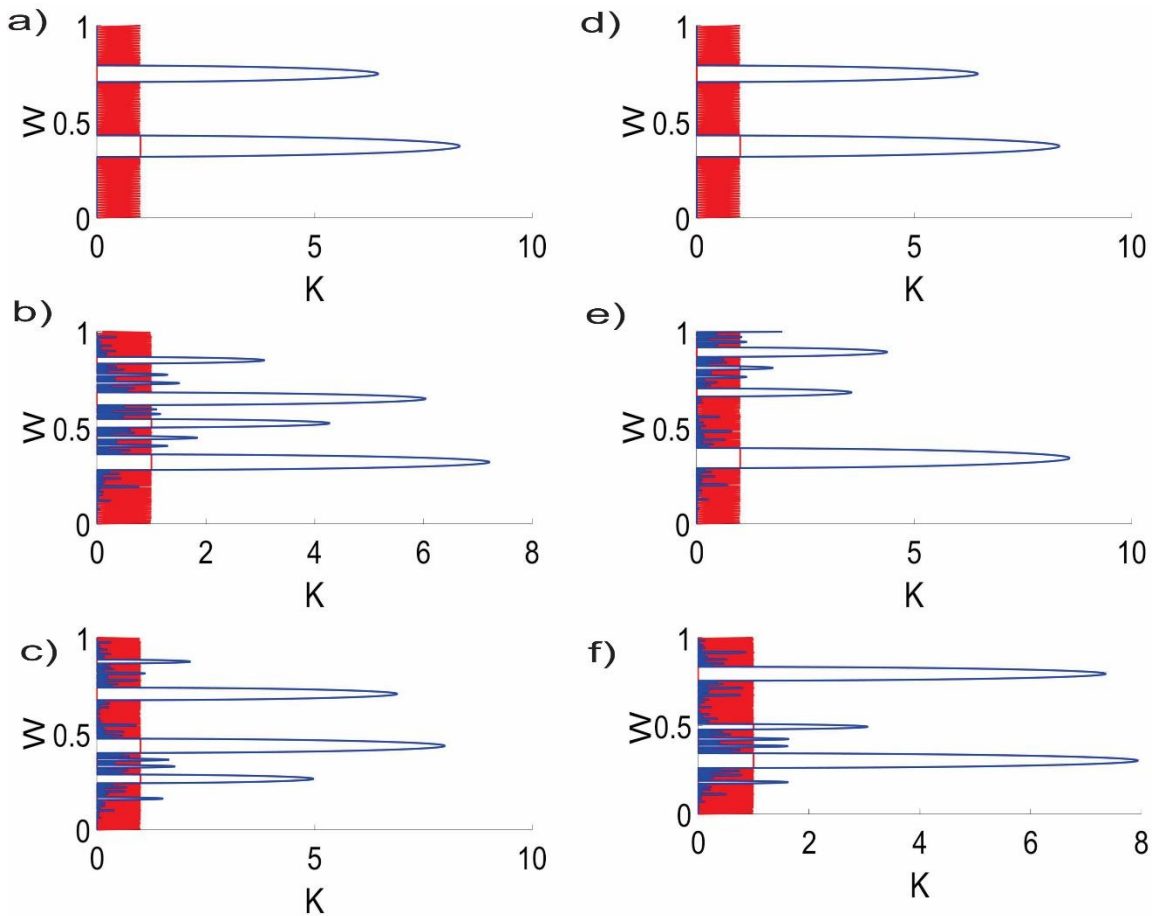


Figura 3.12: Vector de onda de Bloch para la octava generación de Fibonacci, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$. Líneas rojas representa el vector de onda real y las azules el vector de onda imaginario.

En las gráficas de transmitancia y del vector de onda de Bloch se puede observar un fenómeno que en los diagramas de banda es un poco difícil de notar, en algunas investigaciones se hace mención de la existencia de bandas prohibidas que siempre estarán presentes en todas las estructuras ya sean aperiódicas e incluso en las aleatorias, dichas bandas les llaman bandas tradicionales, aunado a esto en los sistemas aperiódicos y aleatorios existen bandas fractales, las cuales son generadas debido a un mecanismo equivalente que el fraccionamiento de las bandas permitidas, es decir, se deben a las múltiples interferencias destructivas que se presentan como resultado de la diferencia en los caminos ópticos y, en el caso de los sistemas deterministas aperiódicos, es debido a su propia naturaleza fractal el que se generan dichas interferencias, el sistema propuesto para esta investigación se considera como un sistema cuasi-periódico, como se mostró en el diagrama de bandas al introducir un valor diferente de 0 para Δ la respuesta que se obtiene

es debido a la naturaleza fractal que presenta la secuencia de Fibonacci, entonces al modular el ancho del material B lo que se produce es un cambio en el camino óptico, dicho cambio es el responsable del fraccionamiento de las bandas, y al mismo tiempo dando lugar a las bandas fractales. Las bandas tradicionales son las bandas que aparecen cuando $\Delta=0$ y presentan un mínimo de transmitancia, estas bandas siempre están presentes, las bandas fractales son las que van tendiendo a un mínimo de transmitancia conforme el valor de Δ aumenta. En el caso de la transmitancia es posible notar diferencias en la respuesta debido al acomodo de los índices de refracción, estas diferencias se observan en los anchos de las bandas prohibidas y en el rango de frecuencias en los que se encuentran los mínimos de transmitancia, además de que todas las bandas, tanto prohibidas como permitidas, presentan corrimientos en la frecuencia, se corren a frecuencias menores, es decir si observamos la banda tradicional cuando tenemos los sistemas periódicos que se encuentra aproximadamente en el rango de frecuencia de 3 a 4 y lo comparamos con el rango de frecuencia cuando $\Delta=1$ es posible notar que ahora la banda tradicional se encuentra antes de $3W$ y el ancho de banda disminuyó además de que ya no es el mínimo predominante, es decir, puntos donde la transmitancia estaba por arriba del 60% cuando $\Delta=0$ se convirtieron en bandas fotónicas unidimensionales ($T=0$), en contraste, cuando $\Delta=1$ y la banda tradicional se encuentra con transmitancias arriba del 40%. Entonces las bandas tradicionales si están presentes siempre pero en diferente rango de frecuencias y con diferentes amplitudes que las iniciales.

Se puede observar de las figuras del vector de onda de Bloch que se cumple la aparición de las bandas tradicionales y las fractales, pero a su vez se puede observar el efecto que el parámetro Δ presenta en las estructuras, se nota a simple vista que dependiendo el valor de Δ la amplitud de la K de Bloch imaginaria varía, entonces como se puede observar que para valores pequeños de Δ las amplitudes de las bandas tradicionales son más dominantes que el resto, pero cuando Δ aumenta y toma su valor máximo se puede notar que las bandas tradicionales siguen presentes pero que la amplitud de algunas bandas fractales supera a la de las tradicionales, debido a esto es que se complica el poder definir las bandas permitidas fraccionadas a partir de una banda principal, esto es porque al aumentar el valor de Δ se

provoca un ensanchamiento en los rangos de frecuencia de las bandas prohibidas ocasionando que las bandas permitidas fraccionadas de una banda principal empiezan a agruparse con otras bandas fraccionadas de la siguiente banda principal. En estas figuras también es posible observar las diferencias en cuanto al acomodo de los índices de refracción, ya que para el primer caso se tiene que las amplitudes de la K de Bloch imaginaria son menores que para el segundo caso, además de que la posición en frecuencia de las bandas tanto permitidas como prohibidas no es la misma, es decir ambos sistemas manejan diferentes rangos de frecuencias que se propagan a través de éstos.

Para obtener la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura se escogieron valores de frecuencia (recordando que $\beta=0$ porque se considera incidencia normal) en las gráficas de transmitancia que estuvieran dentro de las bandas tradicionales, fractales y en una banda de transmisión casi perfecta, es decir transmisión arriba del 99.7% (0.997 de acuerdo a las gráficas), se decidió seguir este procedimiento porque en la referencia [11] reportaron que obtuvieron comportamientos muy distintos si se graficaba la intensidad de campo eléctrico cerca de una banda tradicional o cerca de una banda fractal. Recordando lo que se mencionó anteriormente, que las ondas electromagnéticas se comportan como ondas de Bloch cerca de las bandas tradicionales, a diferencia del comportamiento de las ondas electromagnéticas cerca de una banda fractal el cual presenta estados críticamente localizados que muestran el fenómeno de la autosimilaridad, mientras que el comportamiento cerca de las bandas de transmisión también presentaba un comportamiento autosimilar de acuerdo a [9].

En las figuras 3.13 a 3.15 se presenta la intensidad de campo eléctrico para las tres generaciones de Fibonacci, variando el valor de Δ , cerca de una banda tradicional.

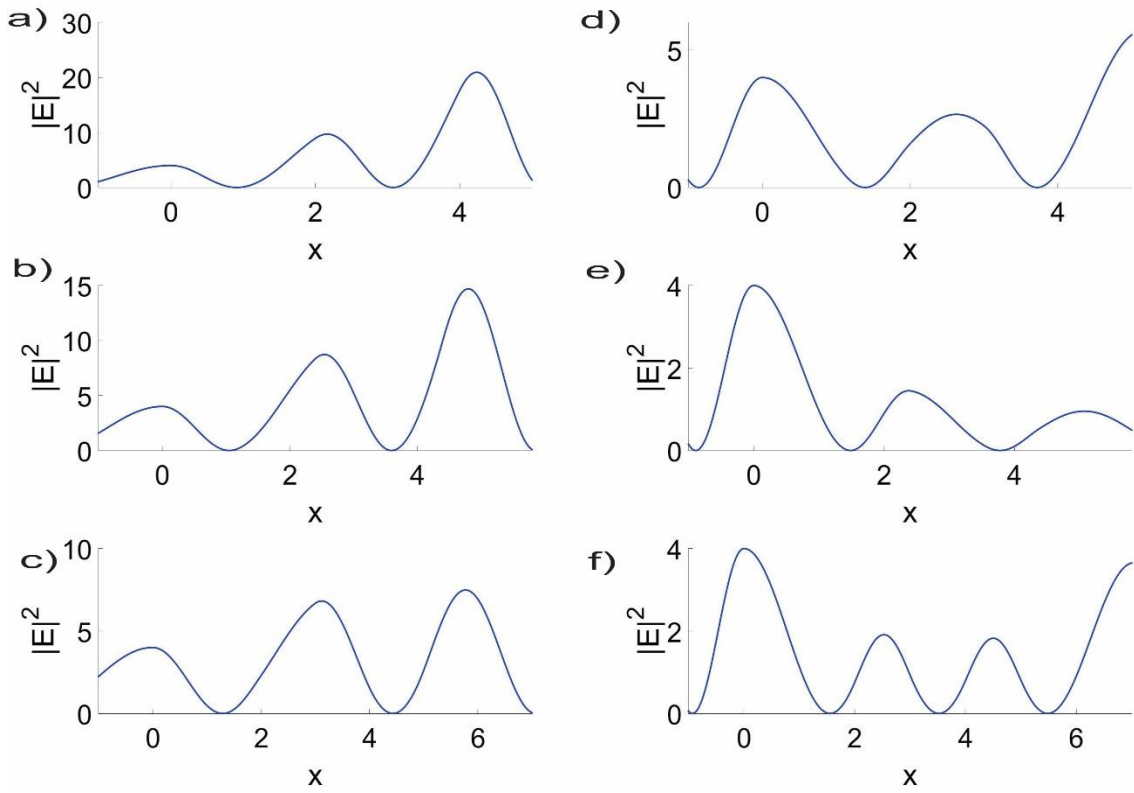


Figura 3.13: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la segunda generación de Fibonacci cerca de una banda tradicional, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.3268$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.2840$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.2310$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.3478$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.3360$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.3214$.

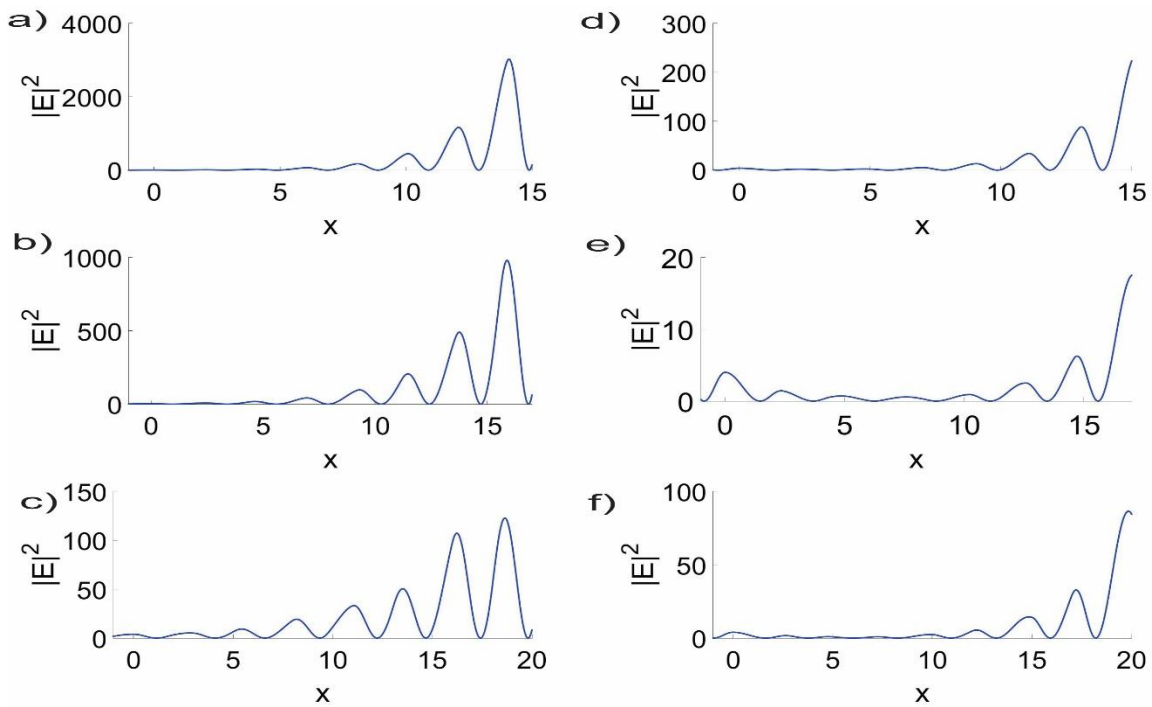


Figura 3.14: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la cuarta generación de Fibonacci cerca de una banda tradicional, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.3710$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.3114$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.2568$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.3710$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.3408$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.3046$.

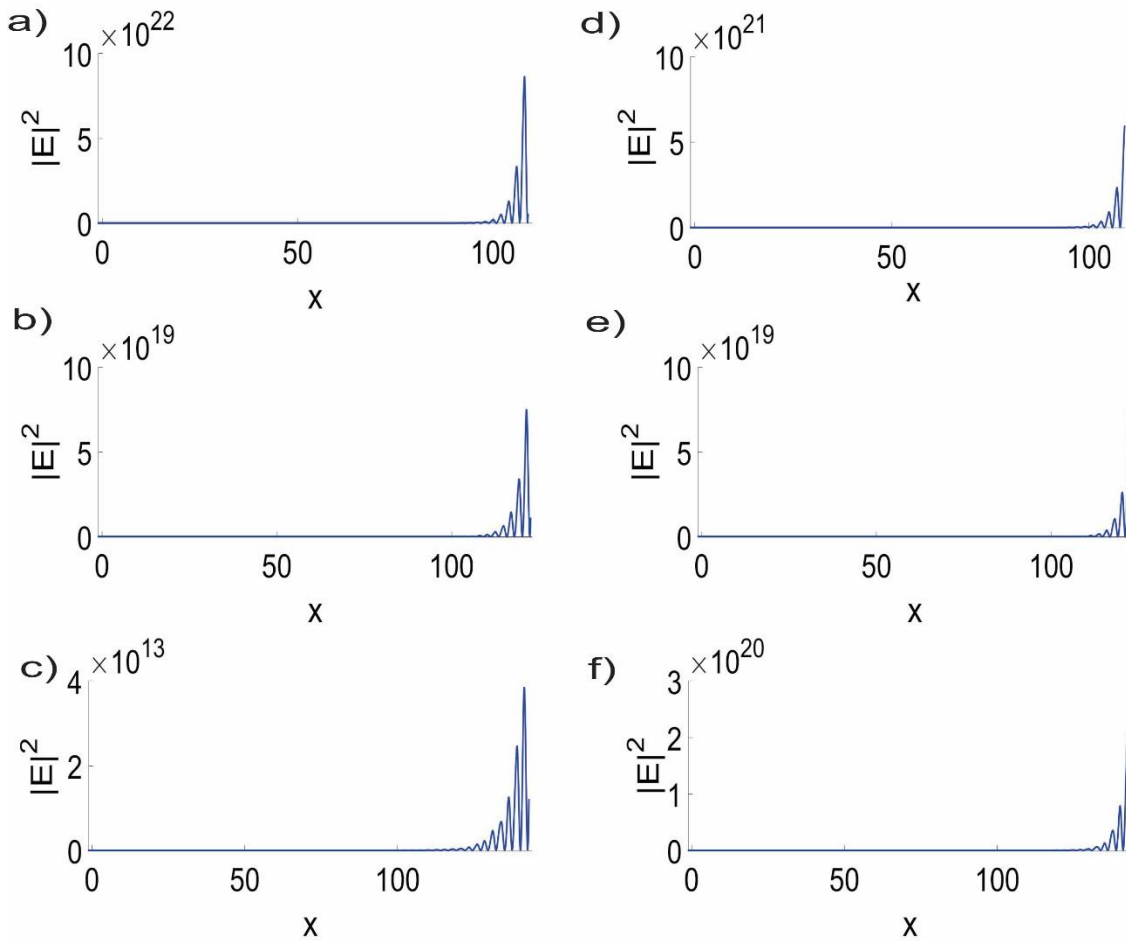


Figura 3.15: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la octava generación de Fibonacci cerca de una banda tradicional, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.3734$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.3196$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.2684$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.3722$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.3454$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.3026$.

De las figuras anteriores se puede observar que la intensidad de campo eléctrico se localiza en las últimas capas de la estructura. Cuando se tiene una generación pequeña de Fibonacci al parecer la distribución es más equilibrada, mientras que para una generación mayor la distribución es prácticamente cero en el 75% de la estructura confinándose la onda electromagnética en las ultimas capas, pero conforme aumenta el valor de Δ el grado de localización de la luz disminuye, esto se observa debido a las intensidades que presenta. Se dice que la onda electromagnética esta confinada porque los valores de frecuencia que se tomaron son valores donde la transmitancia era mínima, por ejemplo para el caso cuando $\Delta=0$ la transmitancia es casi 0, mientras que cuando $\Delta=1$ la transmitancia es aproximadamente de un 40%. Esto se debe a que, como se mencionó en los resultados

anteriores, conforme el valor de Δ aumenta también aumenta el porcentaje de transmitancia permitida dentro de una banda tradicional. Entonces los resultados obtenidos son de esperar, ya que, la banda tradicional deja de ser una banda fotónica unidimensional ($T=0$), esto quiere decir que un porcentaje de la onda es transmitida y por consiguiente la localización de la luz debe disminuir. Otro fenómeno que se puede apreciar pero para generaciones pequeñas es que, dependiendo del acomodo de los índices de refracción, la onda tiende a localizarse en un extremo u otro de la estructura, como podemos observar en la figura 3.13, cuando $\Delta=0.4$. Para el primer caso de acomodo de índices de refracción, la onda se localiza al final de la estructura, mientras que para el segundo caso la onda se localiza en las primeras capas de la estructura, aunque cuando $\Delta=1$ el primer caso tiende a parecerse más a una onda de Bloch que se propaga a través de la estructura, es decir la intensidad de campo eléctrico es casi la misma en toda la estructura, mientras que para el segundo caso se alcanza a observar que la onda se localiza más en los extremos de la estructura.

Para corroborar esto, se obtuvo el grado de localización de la luz para cada generación de Fibonacci en función del parámetro Δ , los resultados se muestran en las figuras 3.16. Como se puede observar, para el primer caso de acomodo de índices de refracción la tendencia es que el grado de localización decae conforme aumenta el valor de Δ sin importar la generación de Fibonacci, lo cual es consistente con lo que se mencionó anteriormente, sin embargo, para el segundo caso de acomodo de índices de refracción no se puede describir una tendencia en específico, cuando se tiene una generación pequeña de Fibonacci lo que se obtuvo es que el grado de localización empieza a aumentar hasta llegar a un valor máximo asociado con un Δ , pero conforme sigue aumentando el Δ ahora empieza a decaer el grado de localización, para la siguiente generación lo que se observa es que el grado de localización empieza a decaer hasta llegar al valor máximo de Δ donde aumenta abruptamente, pero cuando ya se tienen generaciones mayores de Fibonacci se observa que el grado de localización tiende a crecer conforme aumenta Δ .

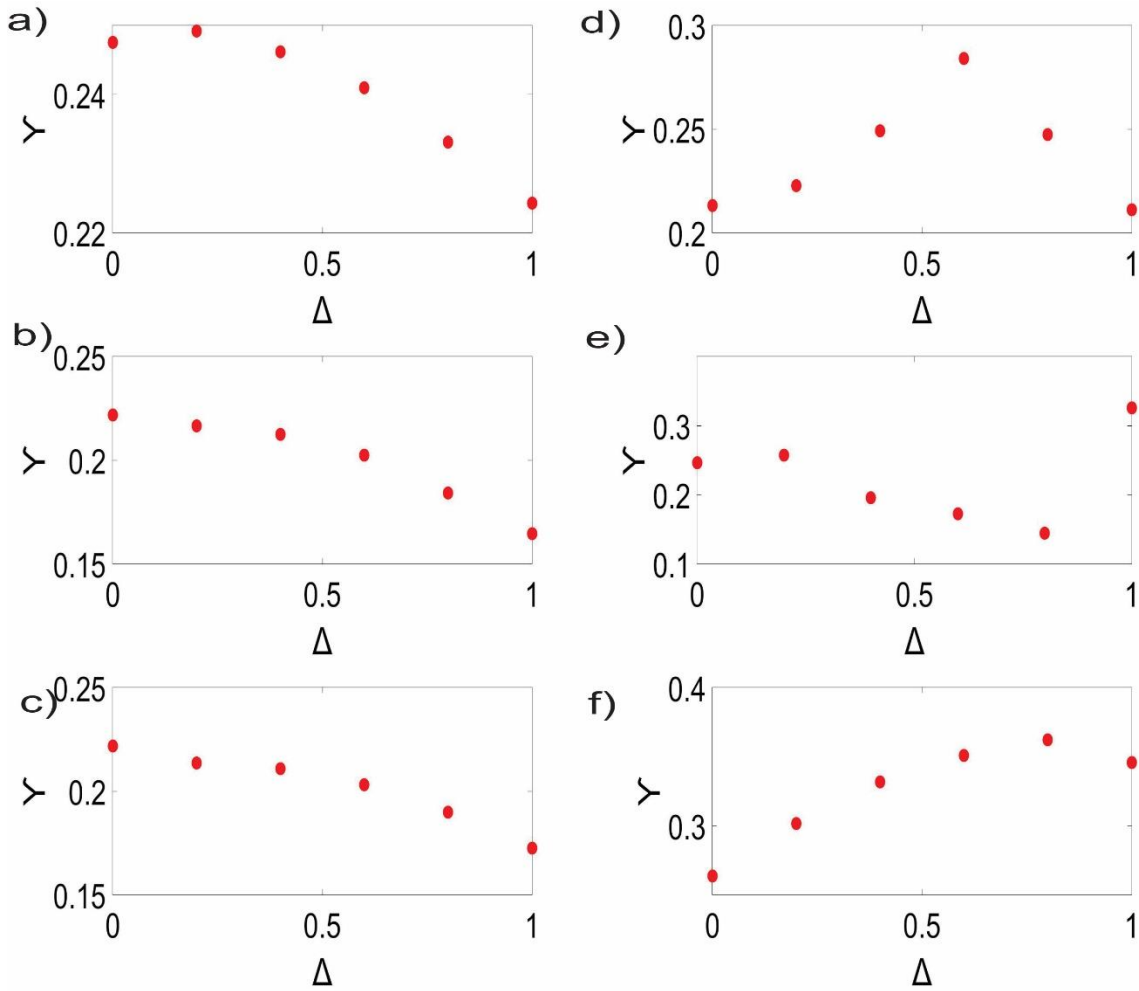


Figura 3.16: Grado de localización en función de Δ cerca de una banda tradicional, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) Segunda generación de Fibonacci, b) Cuarta generación de Fibonacci y c) Octava generación de Fibonacci, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) Segunda generación de Fibonacci, e) Cuarta generación de Fibonacci y f) Octava generación de Fibonacci.

En las figuras 3.17 a 3.19 se presenta la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura pero cerca de una banda de transmisión casi perfecta. Como se puede observar de las figuras 3.17 y 3.18, aunque son bandas de transmisión no se observa un comportamiento tipo onda de Bloch, ni siquiera cuando se tiene el sistema periódico ($\Delta=0$), pero tal vez podría decirse que se obtiene comportamiento tipo Bloch con fluctuaciones, como proponen en las referencias [9 y 11]. En la figura 3.18f sí se obtiene una onda tipo Bloch, que es el comportamiento esperado, pero en la figura 3.19 cuando se tiene el sistema periódico sí se observa comportamiento tipo Bloch, su comportamiento es como si tuviera una envolvente; además, para el primer caso de acomodo de índices de refracción este

comportamiento se pierde rápidamente conforme aumenta Δ , sin embargo para el segundo caso de acomodo de índices de refracción, el comportamiento no se pierde hasta que $\Delta=1$ y sigue siendo una onda de Bloch como la que obtuvieron en la referencia [9 y 11].

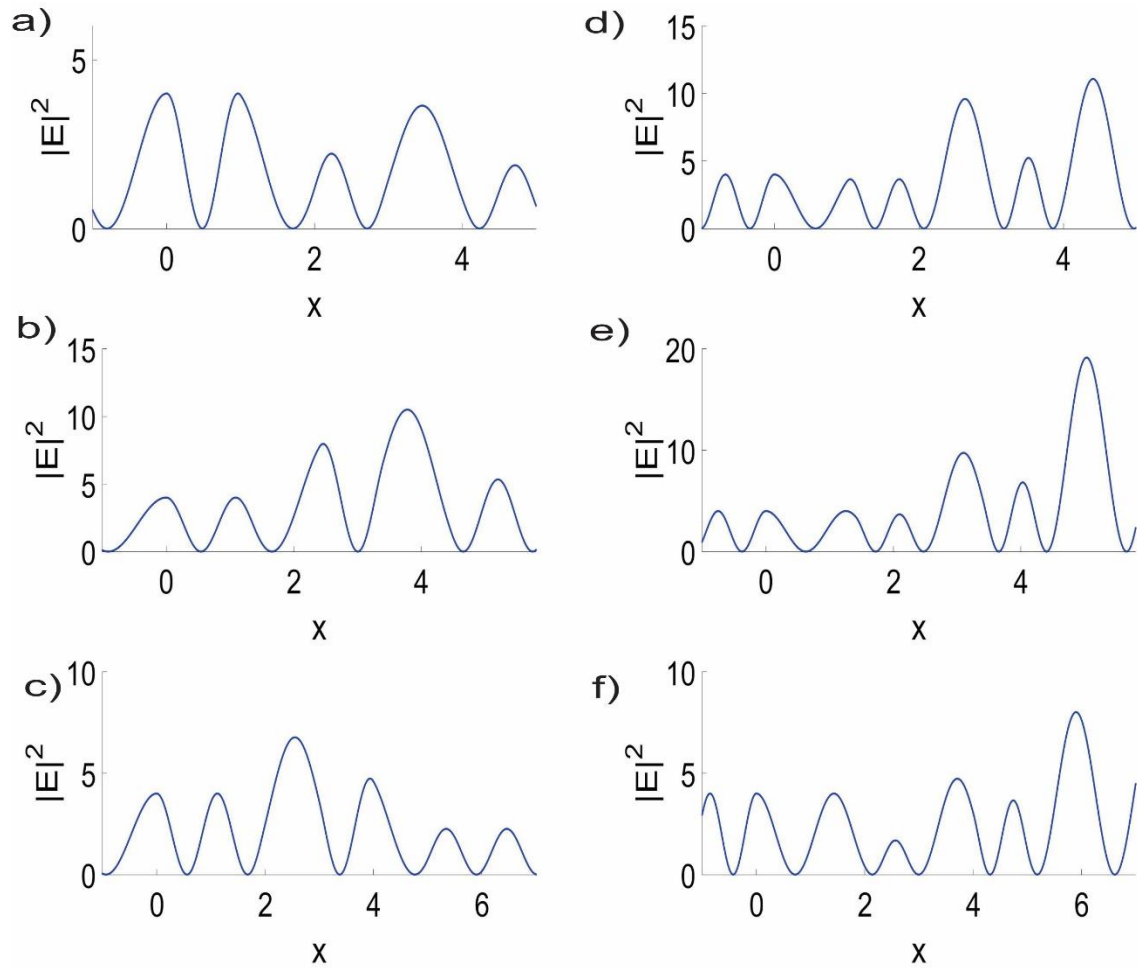


Figura 3.17: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la segunda generación de Fibonacci cerca de una banda de transmitancia casi perfecta, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.6190$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.5484$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.5335$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.8796$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.7966$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.6984$.

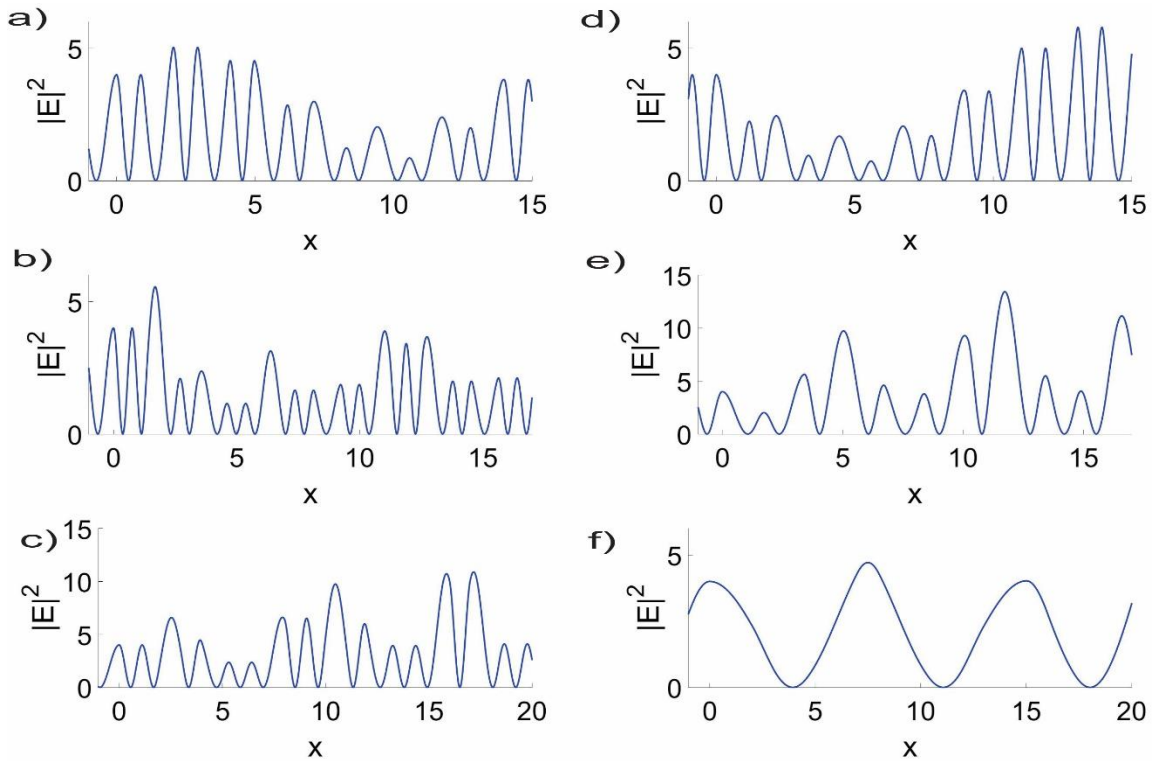


Figura 3.18: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la cuarta generación de Fibonacci cerca de una banda de transmitancia casi perfecta, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.6826$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.7872$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.5360$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.6904$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.4712$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.1112$.

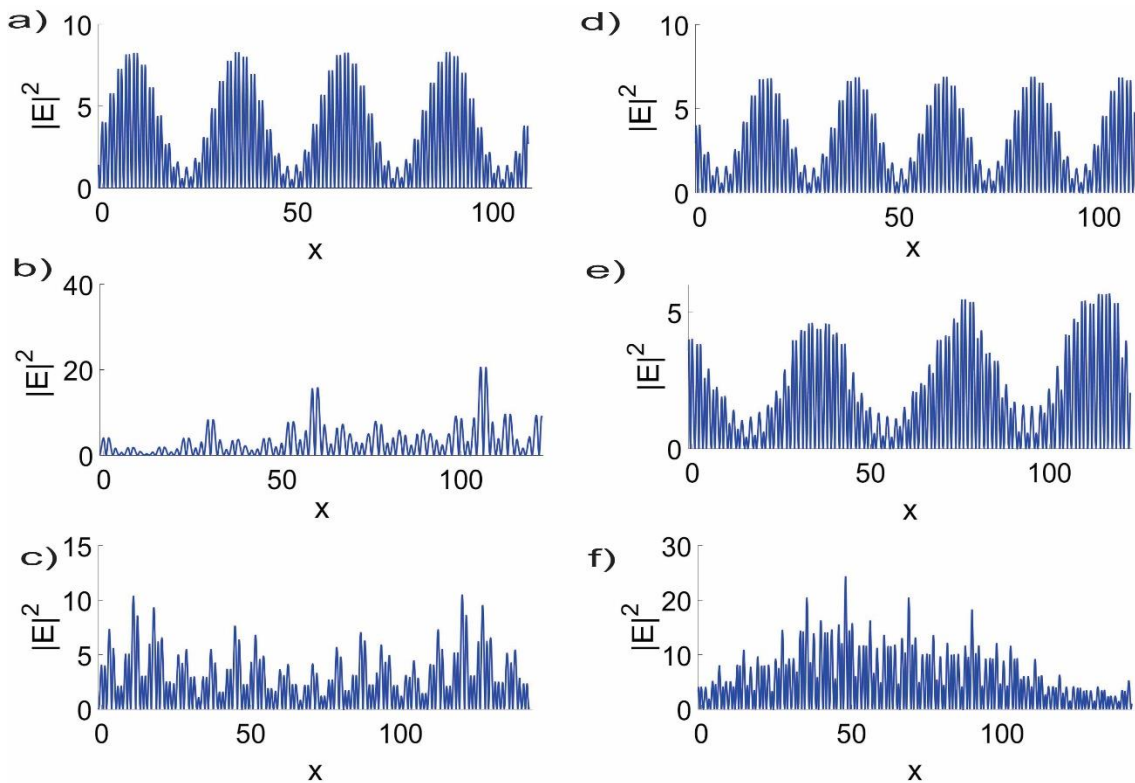


Figura 3.19: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la octava generación de Fibonacci cerca de una banda de transmitancia casi perfecta, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.6988$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.4234$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.5262$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.6956$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.6556$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.6804$.

Las gráficas correspondientes al grado de localización de la luz se presentan en la figura 3.20. Para este caso no se tiene una tendencia en cuanto al grado de localización, pero sí se puede observar que para el segundo caso de acomodo de índices de refracción para la segunda generación de Fibonacci el grado de localización tiende a subir conforme Δ crece, al contrario de la cuarta generación, en la cual el grado de localización disminuye conforme Δ aumenta.

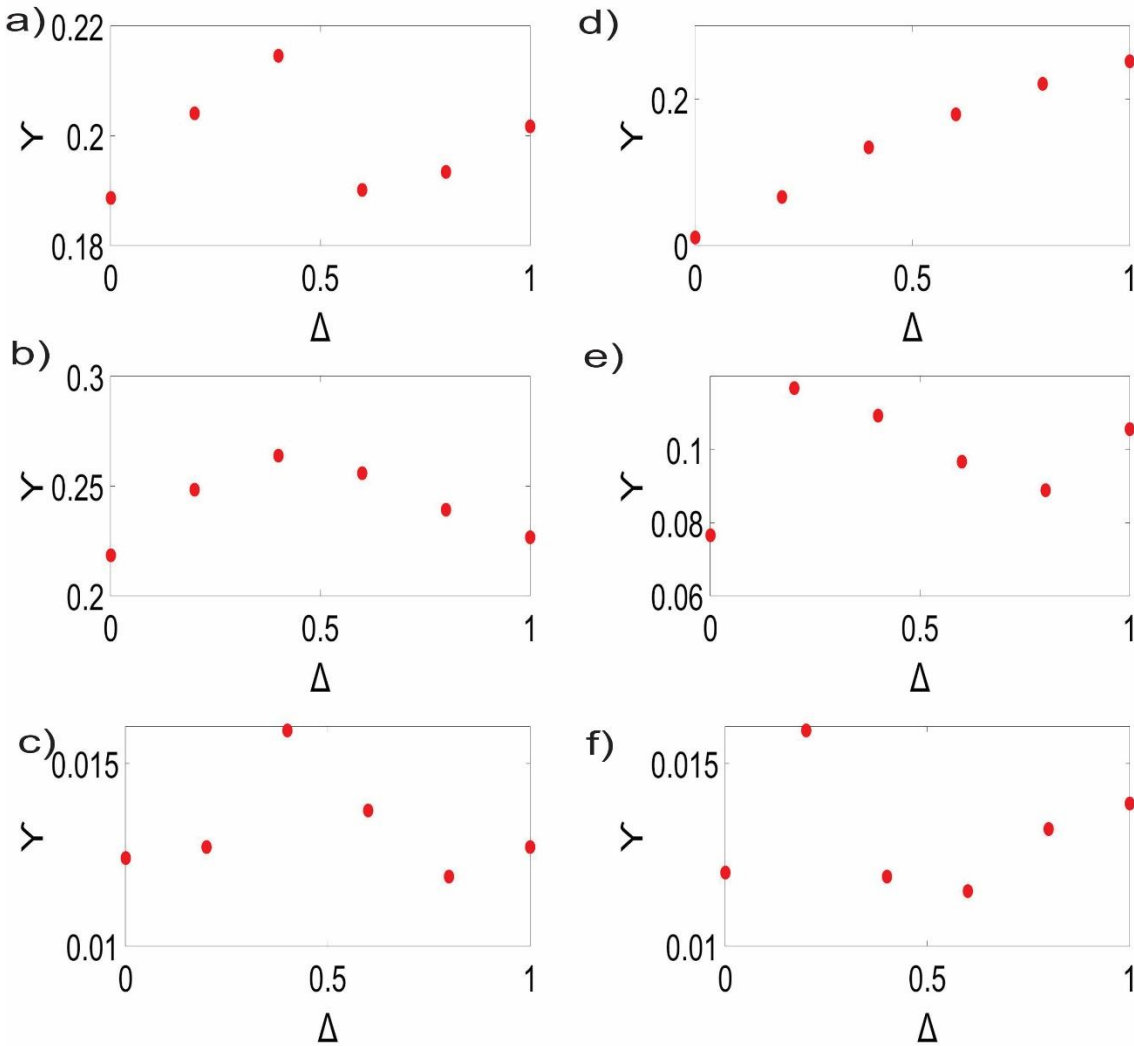


Figura 3.20: Grado de localización en función de Δ cerca de una banda de transmitancia casi perfecta, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) Segunda generación de Fibonacci, b) Cuarta generación de Fibonacci y c) Octava generación de Fibonacci, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) Segunda generación de Fibonacci, e) Cuarta generación de Fibonacci y f) Octava generación de Fibonacci.

Se decidió presentar primero el comportamiento del campo en una banda permitida antes que cerca de una banda fractal (figuras 3.21 a 3.23), porque como se mostrará a continuación, la distribución de la intensidad de campo eléctrico para la octava generación de Fibonacci cuando $\Delta=0$ es similar a la que se obtuvo en una banda permitida pero en este caso presenta fluctuaciones, pero también para las generaciones menores de Fibonacci se puede observar el mismo comportamiento, aunque no es tan notorio. Cuando el valor de Δ aumenta también se puede observar que tiende a presentar el mismo comportamiento que se obtuvo en las bandas tradicionales, es decir, de pasar a tener un comportamiento similar a una onda de Bloch pasa a un comportamiento en el que la radiación electromagnética se localiza en las últimas capas de la estructura, comportamiento que se observa mejor para la cuarta y octava generación de Fibonacci, para la segunda generación se observa que en el primer caso de acomodo de índices de refracción se comporta igual, la luz se localiza en las últimas capas de la estructura, sin embargo, para el segundo caso de acomodo de índices de refracción la luz tiende a localizarse en ambos extremos de la estructura.

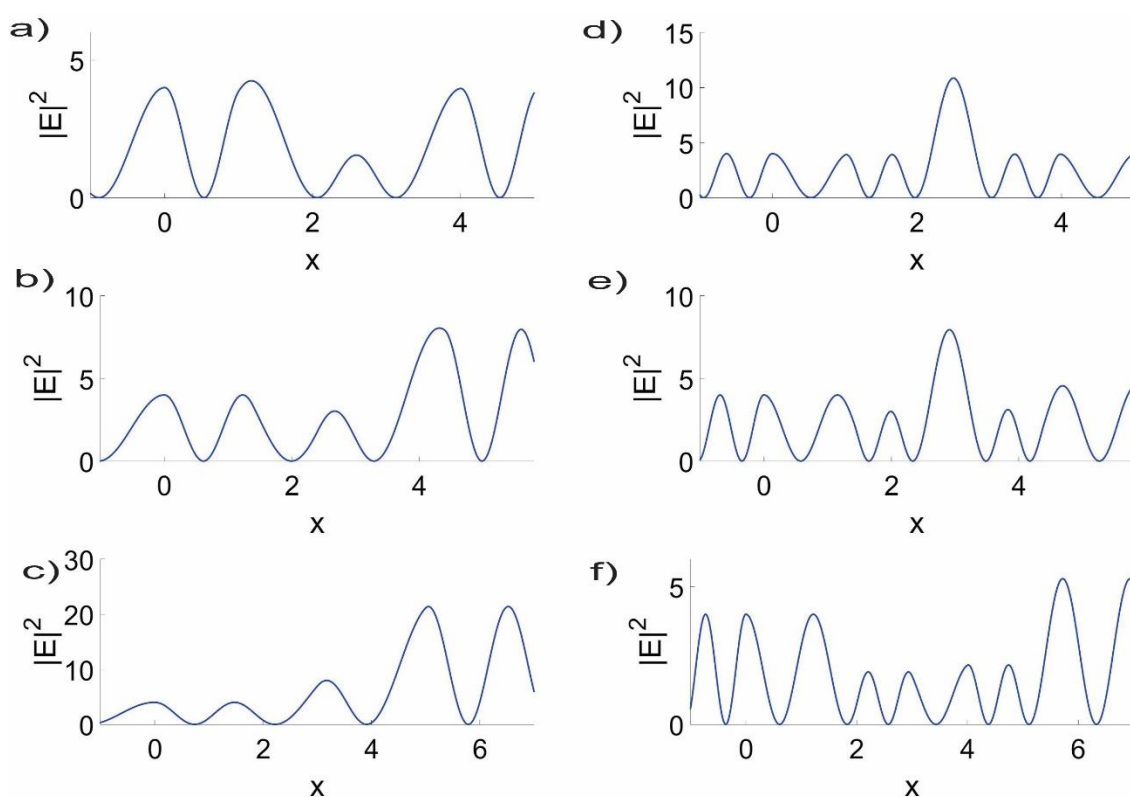


Figura 3.21: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la segunda generación de Fibonacci cerca de una banda fractal, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.5616$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.4856$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.4052$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.9408$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.8674$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.8210$.

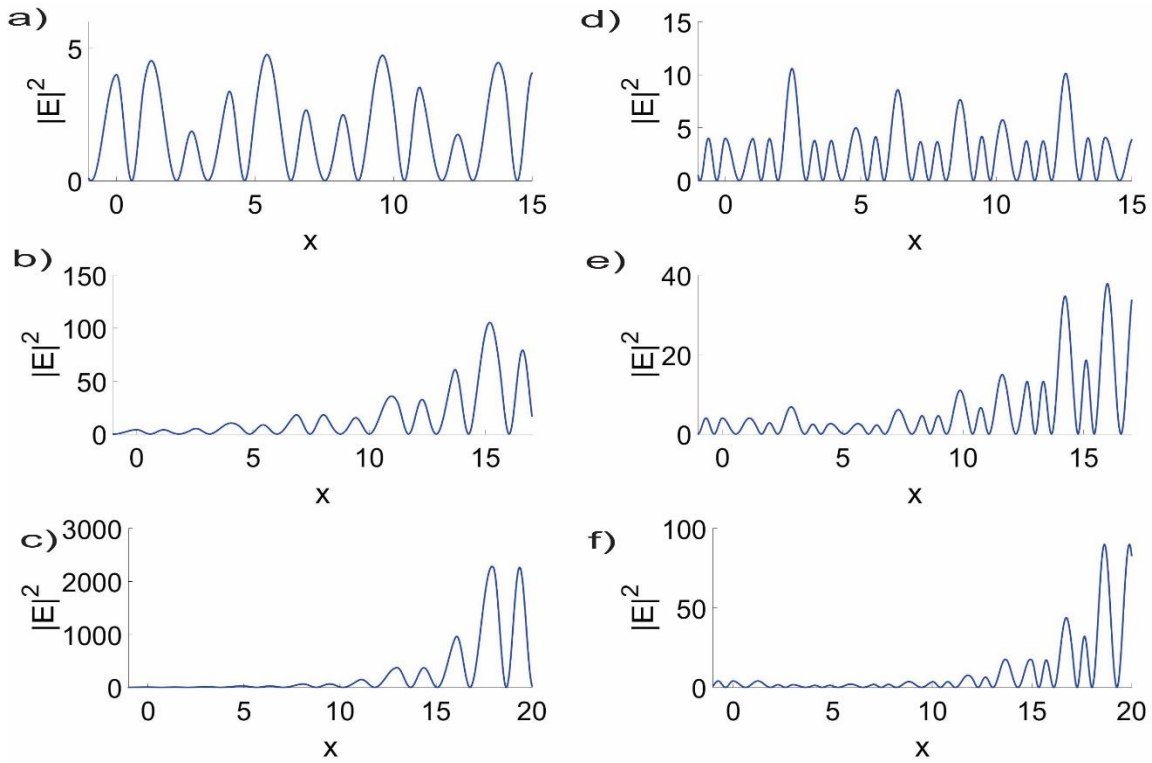


Figura 3.22: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la cuarta generación de Fibonacci cerca de una banda fractal, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.5450$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.5142$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.4310$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.9620$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.8856$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.7988$.

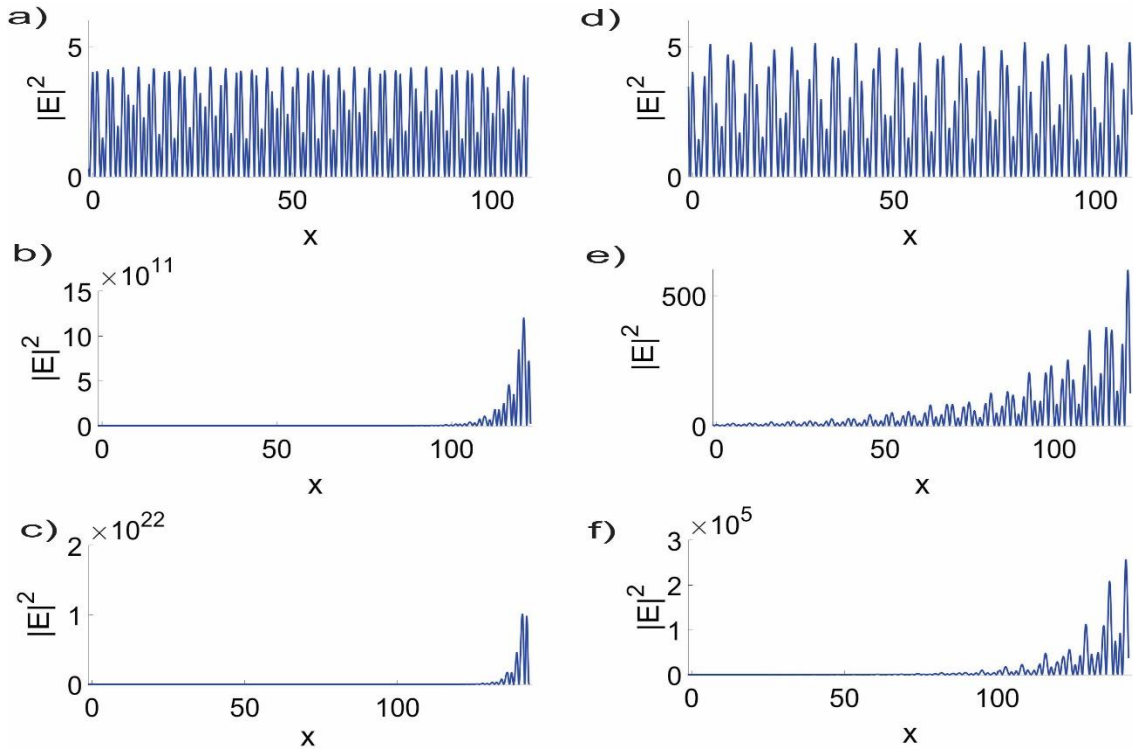


Figura 3.23: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la octava generación de Fibonacci cerca de una banda fractal, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.5824$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.5238$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.4382$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.5236$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.4836$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.4256$.

En la figura 3.24 se presentan los resultados que se obtuvieron para el grado de localización cerca de una banda fractal. De esta figura se puede observar que para el primer caso de índices de refracción se tiene que el grado de localización aumenta conforme Δ aumenta para la segunda generación de Fibonacci, para la cuarta generación se tiene que el grado de localización disminuye conforme Δ aumenta, pero llega a un valor en el que desaparece esta tendencia y para la octava generación se tiene una dependencia casi lineal del grado de localización con Δ . Por otro lado para el segundo acomodo de índices de refracción el grado de localización es creciente hasta llegar a un máximo relativo, para después volver a crecer.

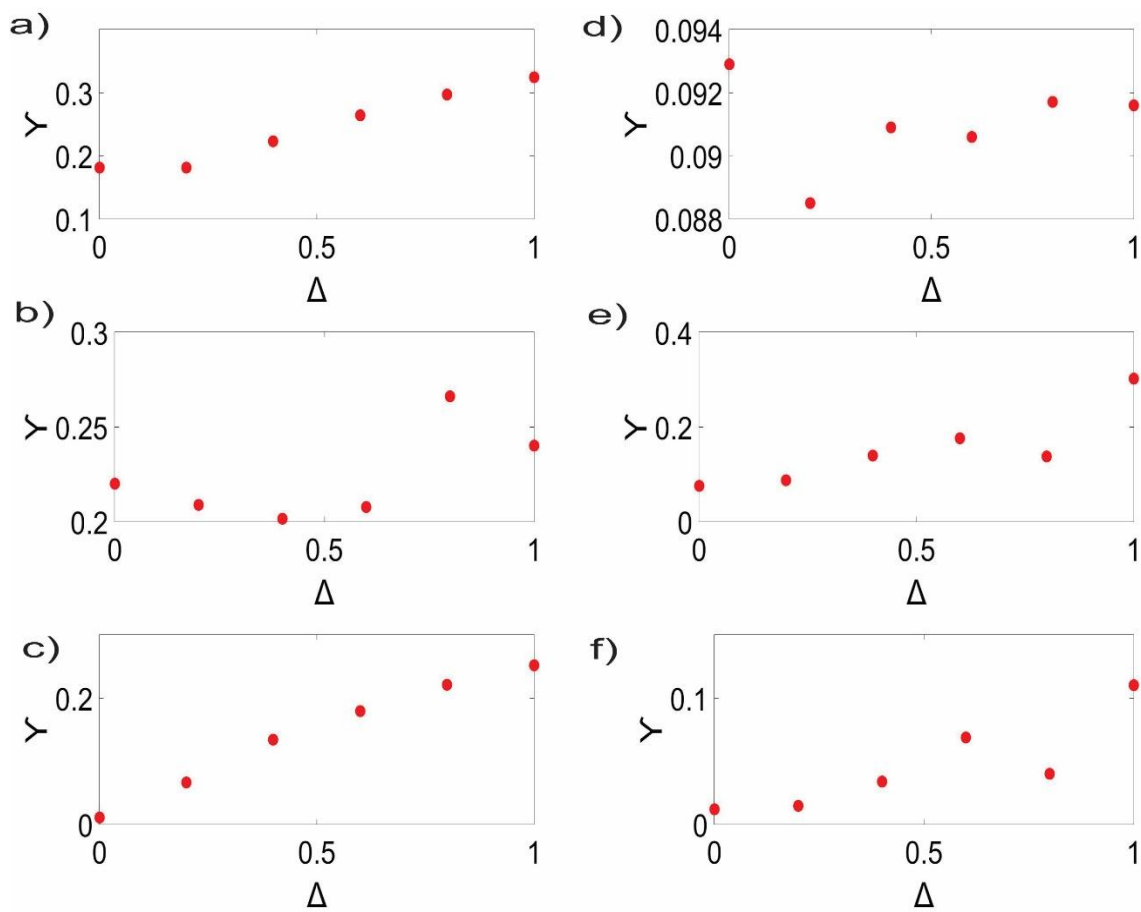


Figura 3.24: Grado de localización en función de Δ cerca de una banda fractal, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) Segunda generación de Fibonacci, b) Cuarta generación de Fibonacci y c) Octava generación de Fibonacci, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) Segunda generación de Fibonacci, e) Cuarta generación de Fibonacci y f) Octava generación de Fibonacci.

3.3 Sistemas modulados de Thue-Morse

Al igual que para el sistema de Fibonacci, para el sistema de Thue-Morse se presentarán únicamente los resultados que se obtuvieron para tres generaciones, en este caso son para $n=2, 3$ y 6 lo que equivale a una celda unitaria conformada por $8, 16$ y 128 capas.

Para este sistema modulado también se consideran materiales no magnéticos ($\mu=1$), con índices de refracción reales y positivos (los mismos dos casos que para Fibonacci), y con anchos de cada capa $d_A=d_{B0}=1$ donde el ancho de la capa B también está definido por la ecuación (2.5-4) $d_B=d_{B0}(1+\Delta*S_j)$ y el valor del Δ tomará los valores $\Delta=0, 0.4$ y 1 .

En las figuras 3.25, 3.27 y 3.29 se muestra el diagrama de bandas para la polarización P y en las figuras 3.26, 3.28 y 3.30 para la polarización S, para los casos cuando $n_A=2$ y $n_B=3.35$ y cuando $n_A=3.35$ y $n_B=2$. Para los diagramas de banda de Thue-Morse se puede observar el mismo efecto del ángulo de Brewster para ambos casos de los acomodos de los índices de refracción, pero la autosimilaridad está presente de manera distinta que para Fibonacci, a excepción de la segunda generación de Thue-Morse (figuras 3.25 y 3.26) en la cual el número de bandas permitidas que se forman a partir de una banda principal es igual al número de Thue-Morse correspondiente a dicha generación, es decir, el número de Thue-Morse es 4 y el número de bandas permitidas formadas es también 4 , pero para generaciones mayores de Thue-Morse, como la tercera y la sexta (figuras 3.27 a 3.30), las bandas permitidas presentan otro tipo de agrupamiento, el cual se puede observar con más detalle para la tercera generación en las figuras 3.27 y 3.28, el número de Thue-Morse para dicha generación es 8 pero el número de bandas permitidas que se forman cuando $\Delta \neq 0$ son 6 , pero si observamos las figuras en más detalle podemos notar que de las 6 bandas que se forman 2 de éstas poseen un ancho de banda mayor, es decir, el rango de frecuencias que abarca es mayor en comparación a las otras 4 , esto se le atribuye al acomodo de 1 's y 0 s que presenta Thue-Morse, recordando que la secuencia binaria para esta generación es 10010110 , entonces para esta secuencia determinista aperiódica se propone que las dos bandas permitidas con mayor ancho de banda son debidas a que, como se mencionó en capítulos anteriores, en Thue-Morse se pueden encontrar pares de 0 's y 1 's, es decir:

10010110, y para el tipo de sistema que se propuso en esta investigación estos pares de 0's y 1's que se encuentran serían equivalentes a tener dos diferentes celdas unitarias repetidas dos veces cada una. Representando dicha generación en términos de los anchos de los materiales A y B, se puede escribir como:

$$d_{AD_B} d_{AD_{B0}} d_{AD_{B0}} d_{AD_B} d_{AD_{B0}} d_{AD_B} d_{AD_B} d_{AD_{B0}}$$

y expresado en términos de la repetición de la celda unitaria quedaría como:

$$d_{AD_B} (d_{AD_{B0}})^2 d_{AD_B} d_{AD_{B0}} (d_{AD_B})^2 d_{AD_{B0}}$$

recordando que d_B se obtiene cuando en la secuencia binaria se encuentra un 1 y por consiguiente el ancho de dicha capa es modulado y d_{B0} es el ancho inicial que es resultado de encontrar un 0 en la secuencia binaria.

La explicación anterior se basa en el hecho de que, cuando se tiene la celda unitaria repetida 8 veces (es decir $\Delta=0$), las interferencias constructivas generan una sola banda permitida, efecto que también se observa cuando la celda unitaria se repite 4 y 64 veces, ya que en todos los casos cuando $\Delta=0$ sin importar el número de veces que se repita la celda unitaria se obtiene el mismo diagrama de bandas (figuras a y b de 3.26 y 3.27), entonces se piensa que este comportamiento también se presenta en este caso al no fragmentarse las bandas en el número correspondiente de Thue-Morse. Pero para corroborar esto se tendría que hacer un análisis matemático más profundo o un análisis como el que mencionan en [9 y 11], donde mencionan que las bandas permitidas y prohibidas son generadas por interferencias debido a diferentes interfaces como por ejemplo: AB, BA, AA o BB.

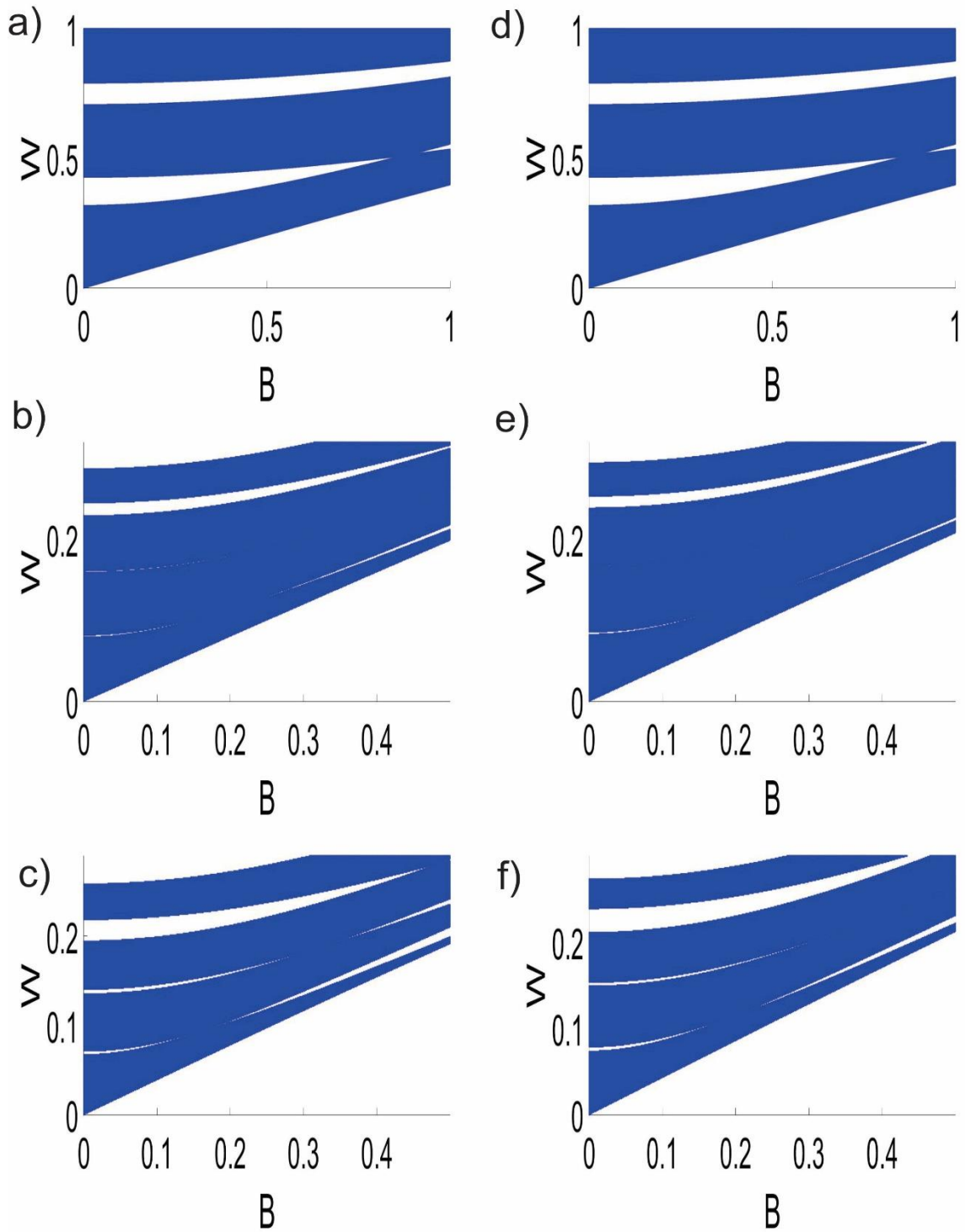


Figura 3.25: Diagrama de bandas polarización P para la segunda generación de Thue-Morse, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$

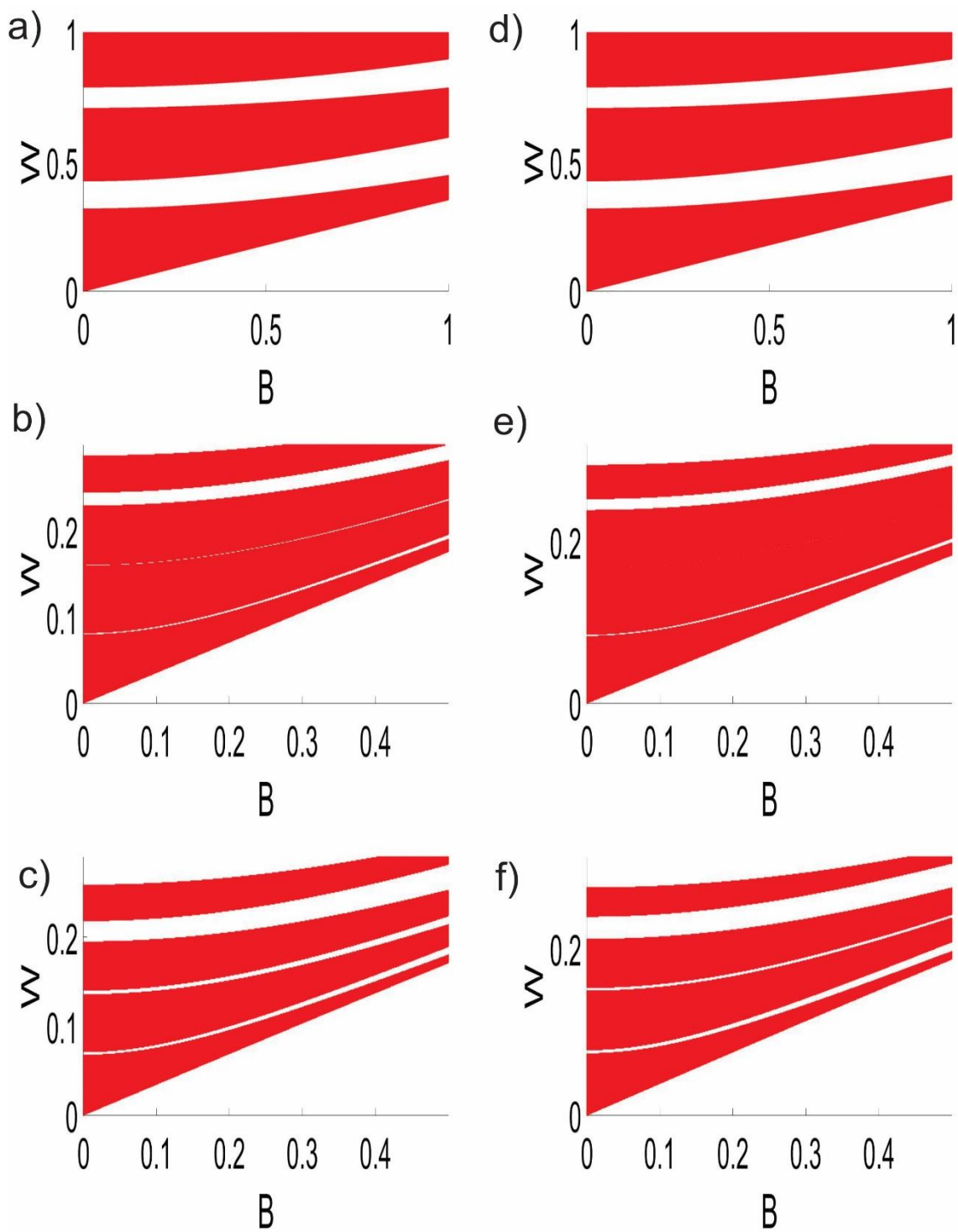


Figura 3.26: Diagrama de bandas polarización S para la segunda generación de Thue-Morse, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$

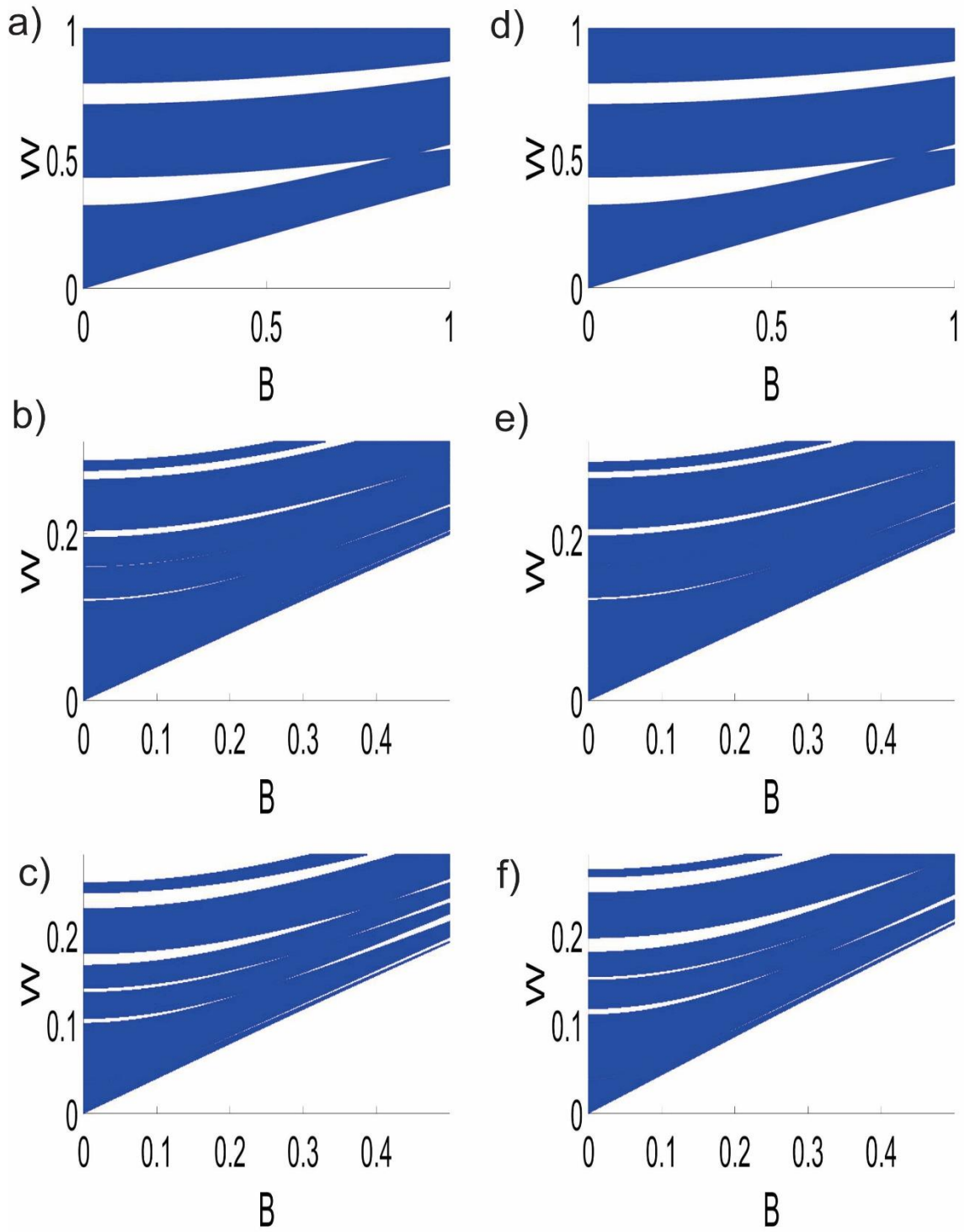


Figura 3.27: Diagrama de bandas polarización P para la tercera generación de Thue-Morse, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$

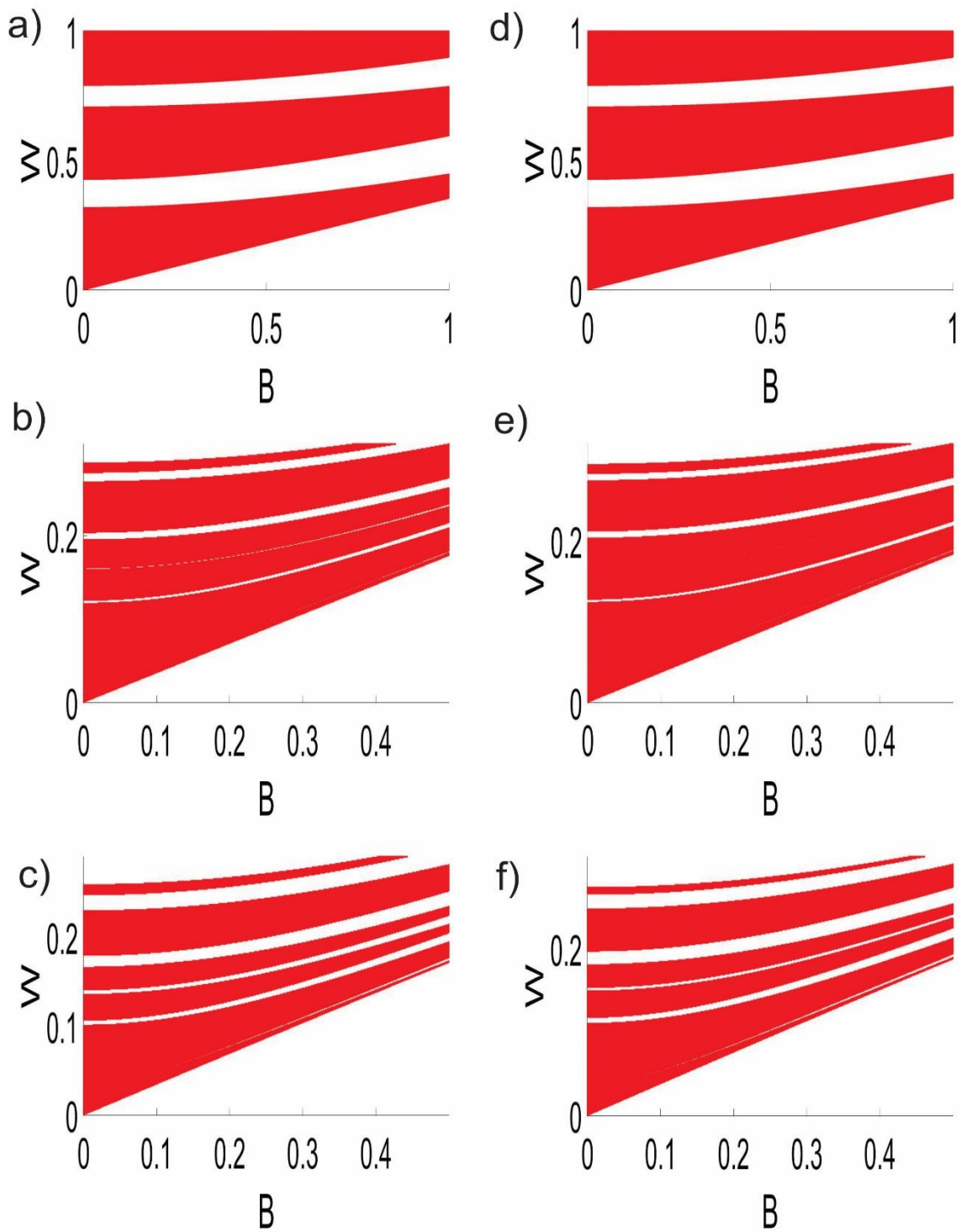


Figura 3.28: Diagrama de bandas polarización S para la tercera generación de Thue-Morse, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$

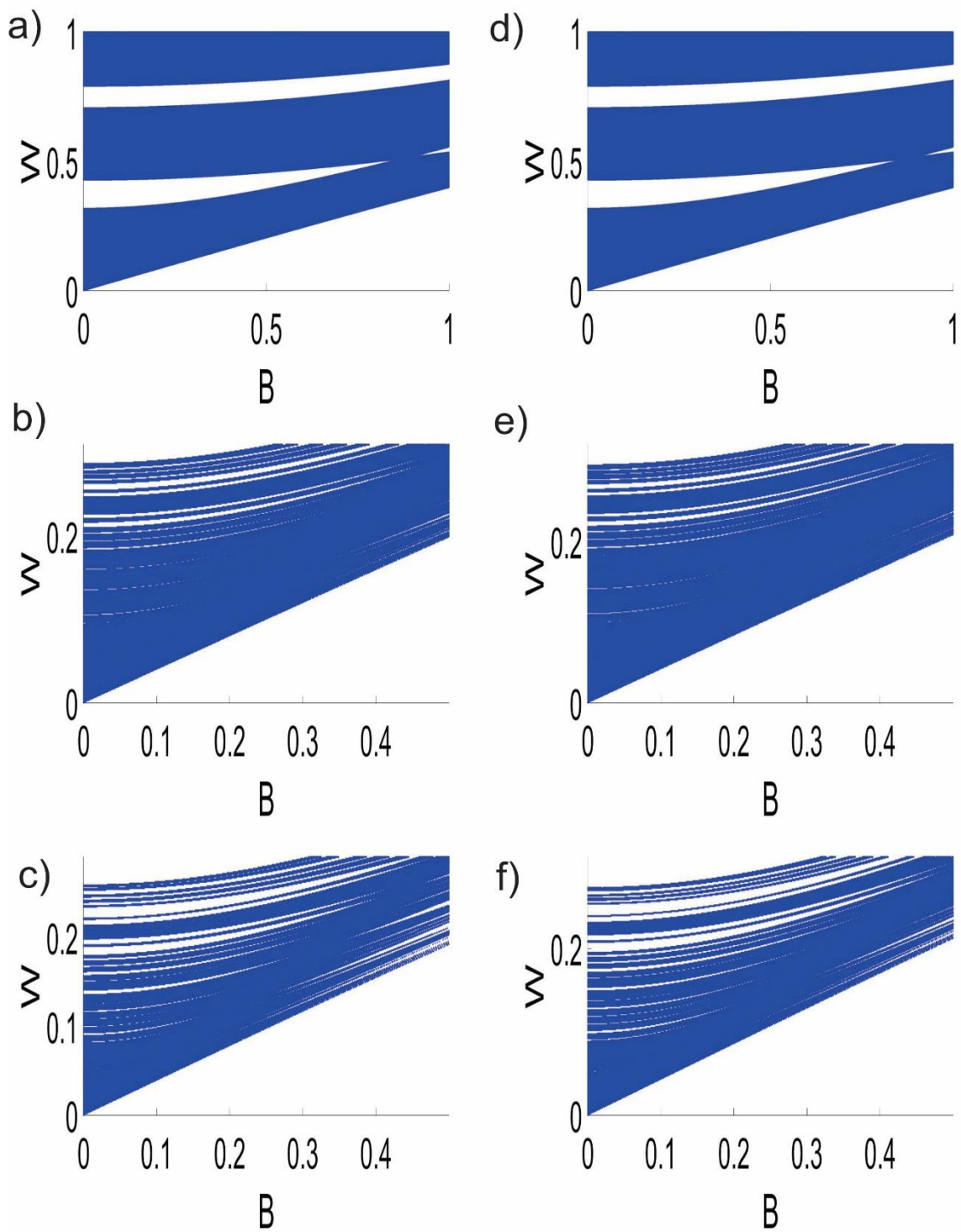


Figura 3.29: Diagrama de bandas polarización P para la sexta generación de Thue-Morse, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$

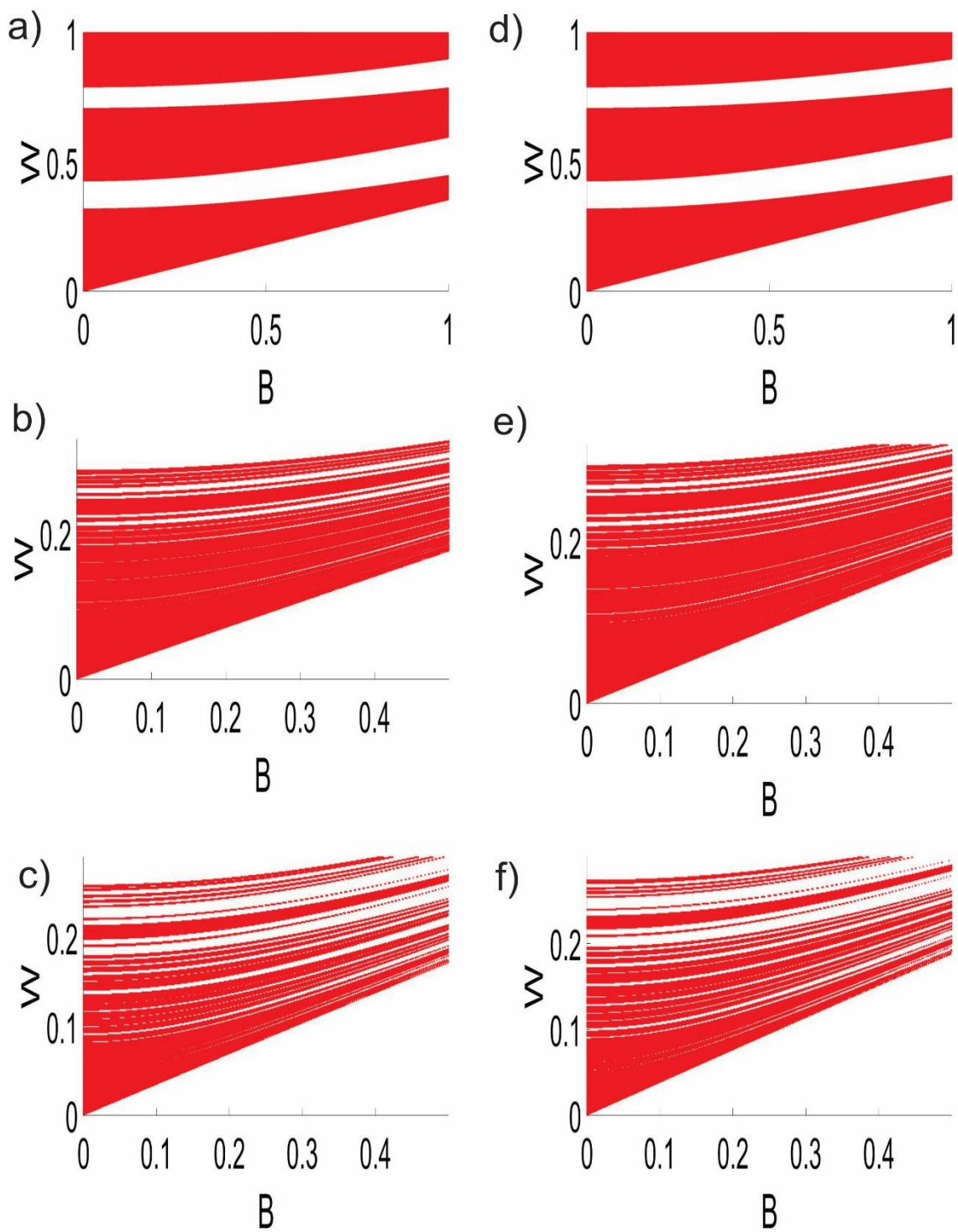


Figura 3.30: Diagrama de bandas polarización S para la sexta generación de Thue-Morse, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$

En las figuras 3.31 a 3.33 se presentan la transmitancia para este sistema y en las figuras 3.34 a 3.36 el vector de onda de Bloch. En estas figuras también se puede observar que conforme aumenta el valor de Δ se genera un corrimiento en frecuencia de las bandas tradicionales además de que la amplitud de las bandas fractales llega a superar al de las tradicionales, es la misma tendencia que presenta el sistema de Fibonacci, además de que presenta el mismo comportamiento predicho que en la referencia [11] de que no importa el tipo de sistema siempre presentarán bandas tradicionales y fractales, y varios autores dicen que Thue-Morse es un sistema más aperiódico que Fibonacci [9, 11 y 13].

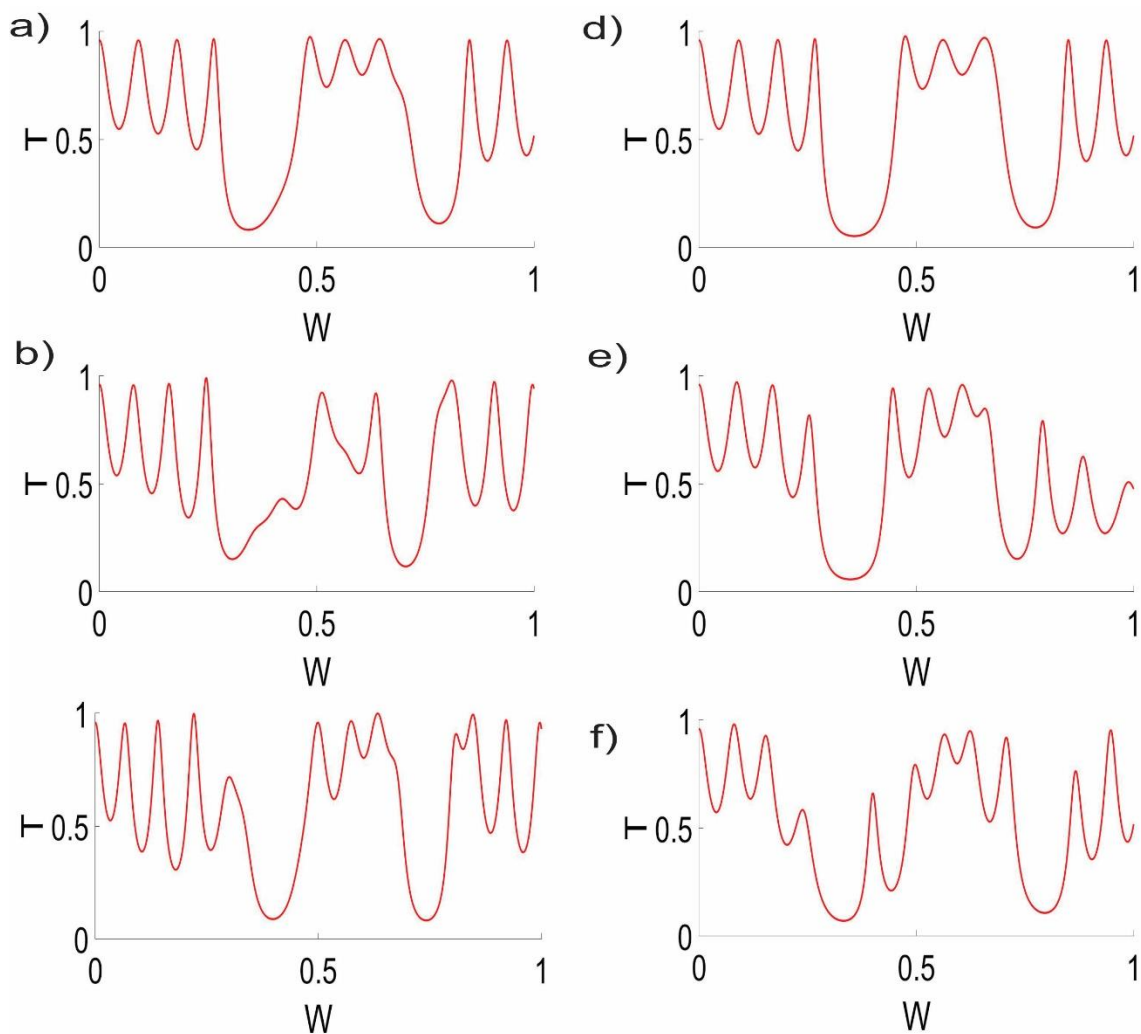


Figura 3.31: Transmitancia para la segunda generación de Thue-Morse, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$.

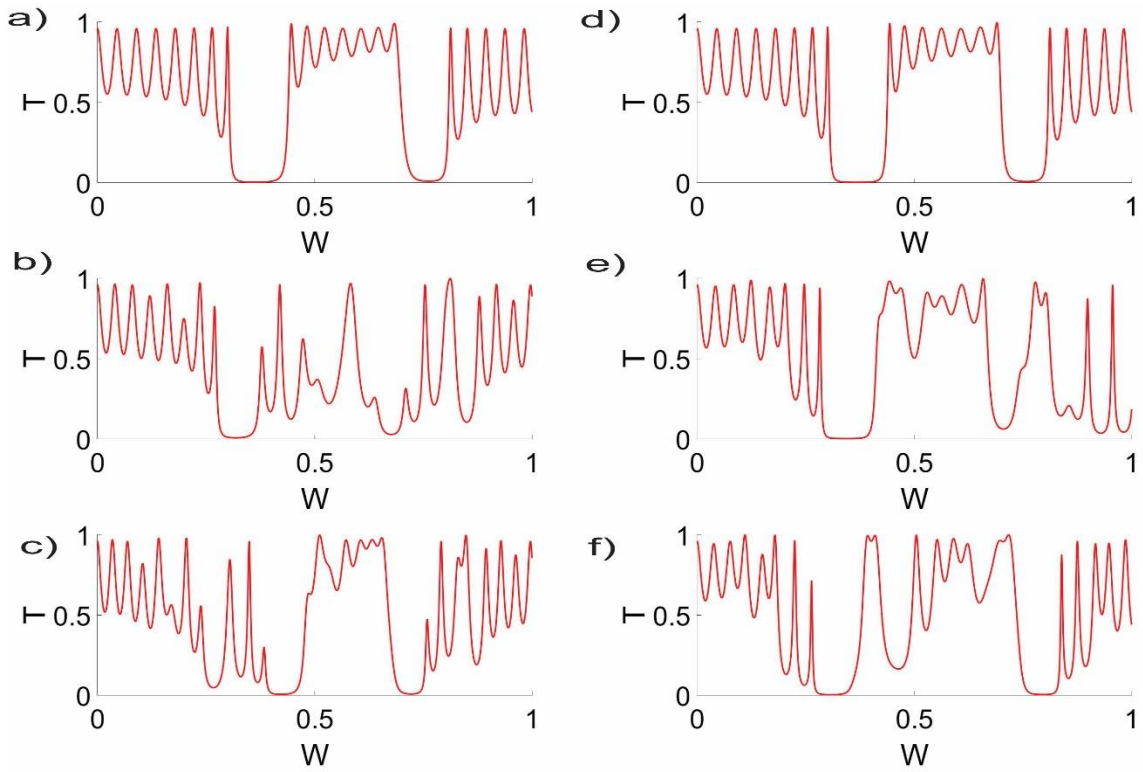


Figura 3.32: Transmitancia para la tercera generación de Thue-Morse, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$.

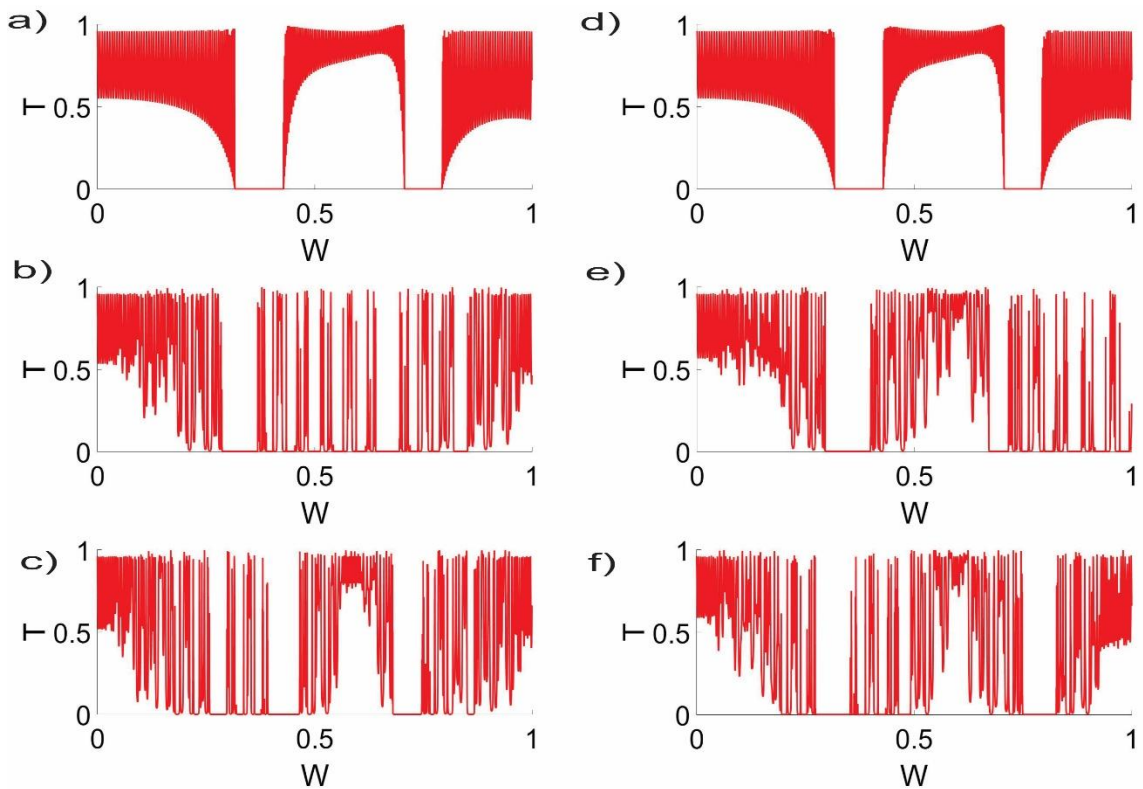


Figura 3.33: Transmitancia para la sexta generación de Thue-Morse, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$.

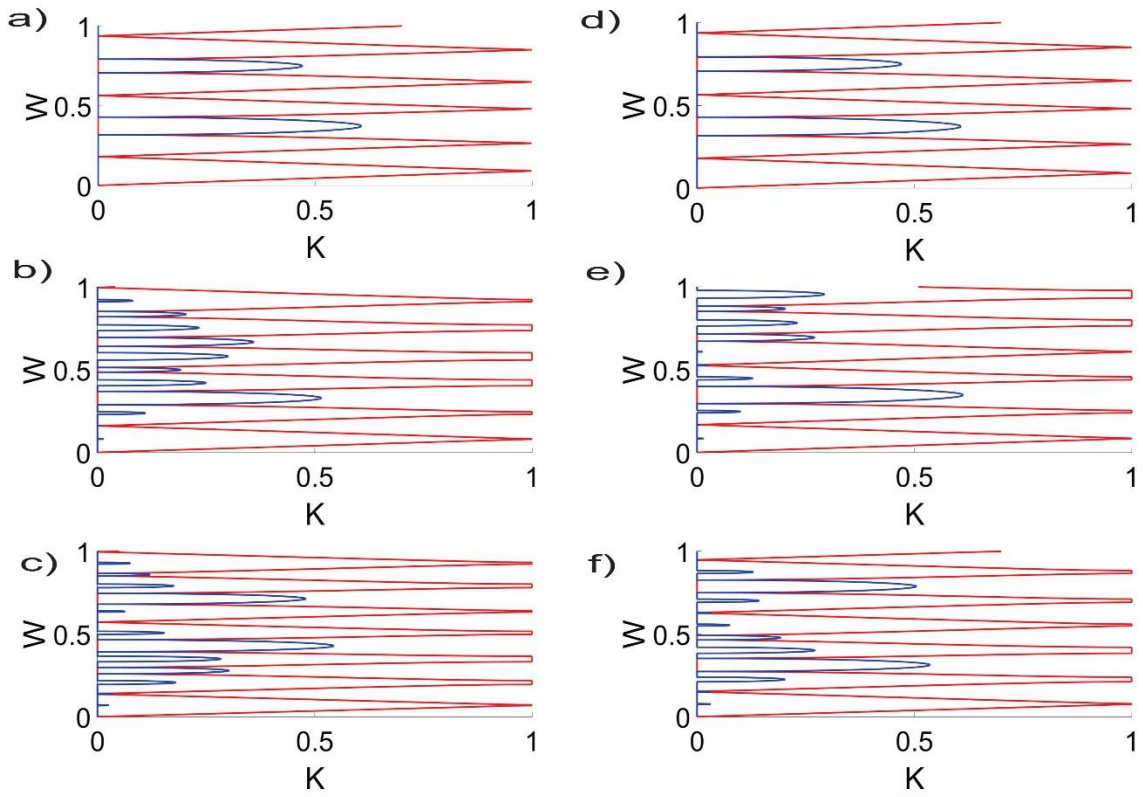


Figura 3.34: Vector de onda de Bloch para la segunda generación de Thue-Morse, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$. Líneas rojas representa el vector de onda real y las azules el vector de onda imaginario.

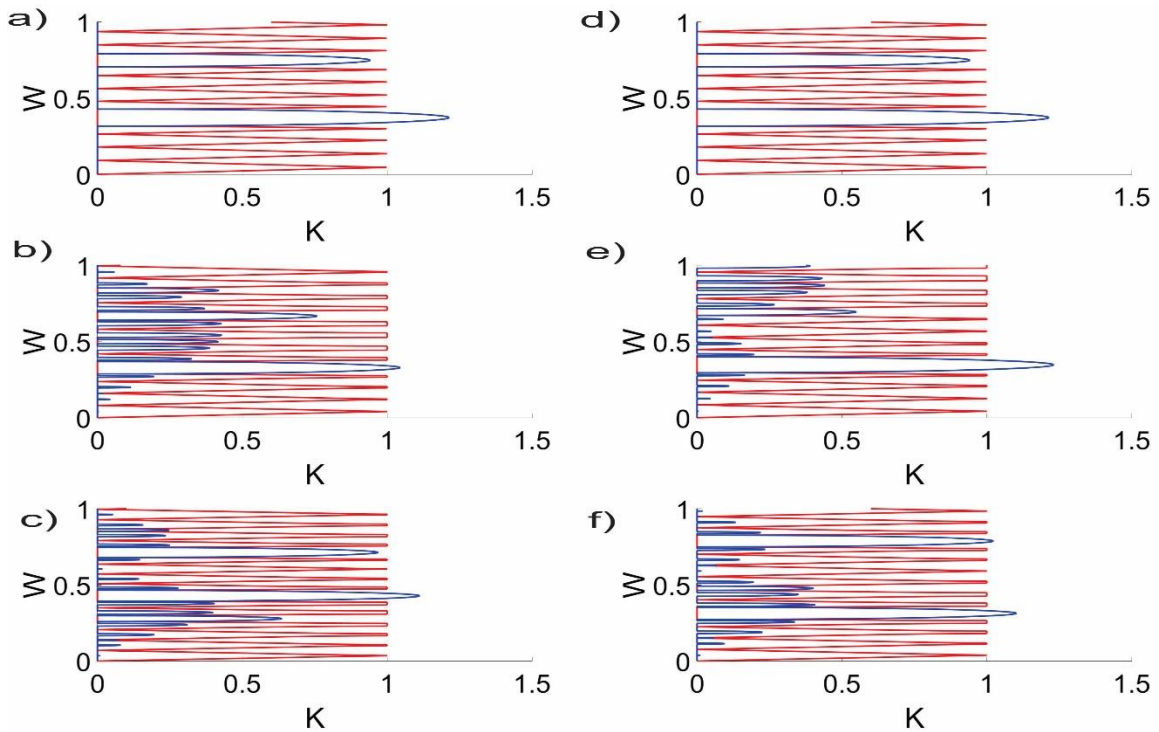


Figura 3.35: Vector de onda de Bloch para la tercera generación de Thue-Morse, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$. Líneas rojas representa el vector de onda real y las azules el vector de onda imaginario.

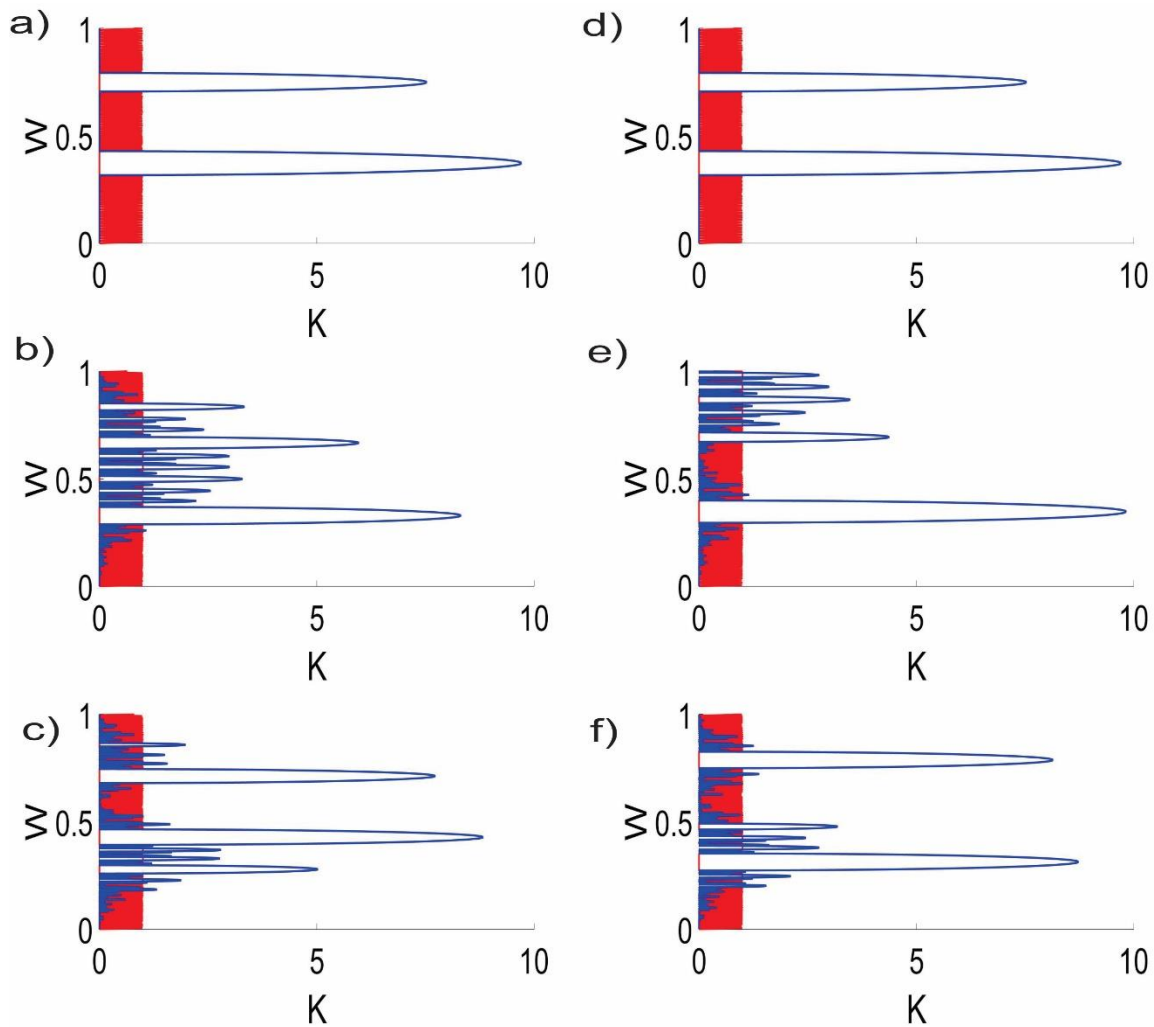


Figura 3.36: Vector de onda de Bloch para la sexta generación de Thue-Morse, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$. Líneas rojas representa el vector de onda real y las azules el vector de onda imaginario.

Como se puede observar en todas las figuras presentadas para Thue-Morse es necesario tener cuidado al momento de querer agrupar las bandas permitidas y prohibidas que se generan a partir de las bandas principales, también a la hora de identificar las bandas tradicionales y las fractales, debido a que tanto en la transmitancia como en la K de Bloch ambos tipos de bandas presentan corrimientos en el rango de frecuencias y no siempre las bandas tradicionales son las de transmitancia mínima y, en el caso del vector de onda de Bloch, no son las de mayor amplitud.

También se destaca el hecho de que el ancho de banda prohibido y permitido depende mucho de dos factores, el primero es el parámetro Δ y el segundo es el acomodo de los índices de refracción, ambos factores van de la mano, porque si $\Delta=0$ no importa el acomodo de los índices de refracción, se obtiene la misma respuesta debido a que, como ya se mencionó anteriormente, los caminos ópticos son equivalentes, pero cuando $\Delta \neq 0$ y conforme aumenta este valor se encuentra que la separación entre bandas permitidas de un mismo conjunto va creciendo, es decir los anchos de banda prohibidos crecen, pero también se observa que dependiendo el acomodo de los índices de refracción es posible obtener anchos de banda prohibidos mayores aun con valores de Δ pequeños o anchos de banda prohibidos de menor magnitud.

En las figuras 3.37 a 3.39 presentamos las gráficas de intensidad de campo eléctrico para las tres generaciones de Thue-Morse cerca de una banda tradicional, tal como se presentó para el caso de Fibonacci.

Se puede observar de las figuras que la intensidad de campo eléctrico se distribuye de manera similar que en Fibonacci, para generaciones menores de Thue-Morse (figuras 3.37 y 3.38) y cuando $\Delta=0$ el campo tiende a localizarse en las últimas capas de la estructura pero, conforme Δ va aumentando sí se tienen dos comportamientos, para el primer caso de acomodos de índice de refracción la distribución se vuelve más uniforme por toda la estructura aunque sigue presentando cierta preferencia por localizarse en las últimas capas; por otro lado, cuando se tiene el segundo acomodo de índices de refracción, se puede observar que para valores intermedios de Δ el campo se concentra también en las primeras capas de la estructura y conforme Δ aumenta la distribución no se vuelve tan uniforme como en el primer caso, pero la intensidad del campo eléctrico vuelve a concentrarse mayormente al final de la estructura.

Cuando la generación de Thue-Morse es muy grande (figura 3.39), ambos casos de acomodo presentan la misma tendencia, el campo se localiza más en las últimas capas de la estructura, el segundo acomodo de los índices pierde el comportamiento que presentó para generaciones menores.

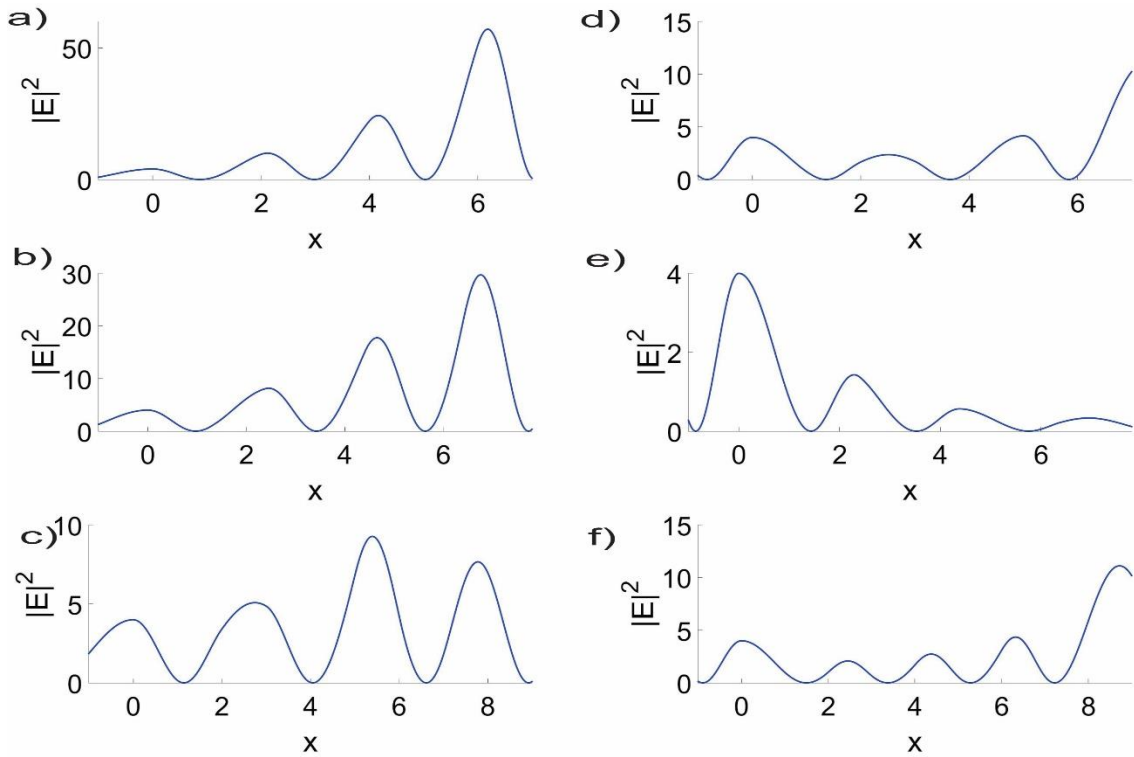


Figura 3.37: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la segunda generación de Thue-Morse cerca de una banda tradicional, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.3440$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.3072$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.2608$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.3572$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.3488$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.3340$.

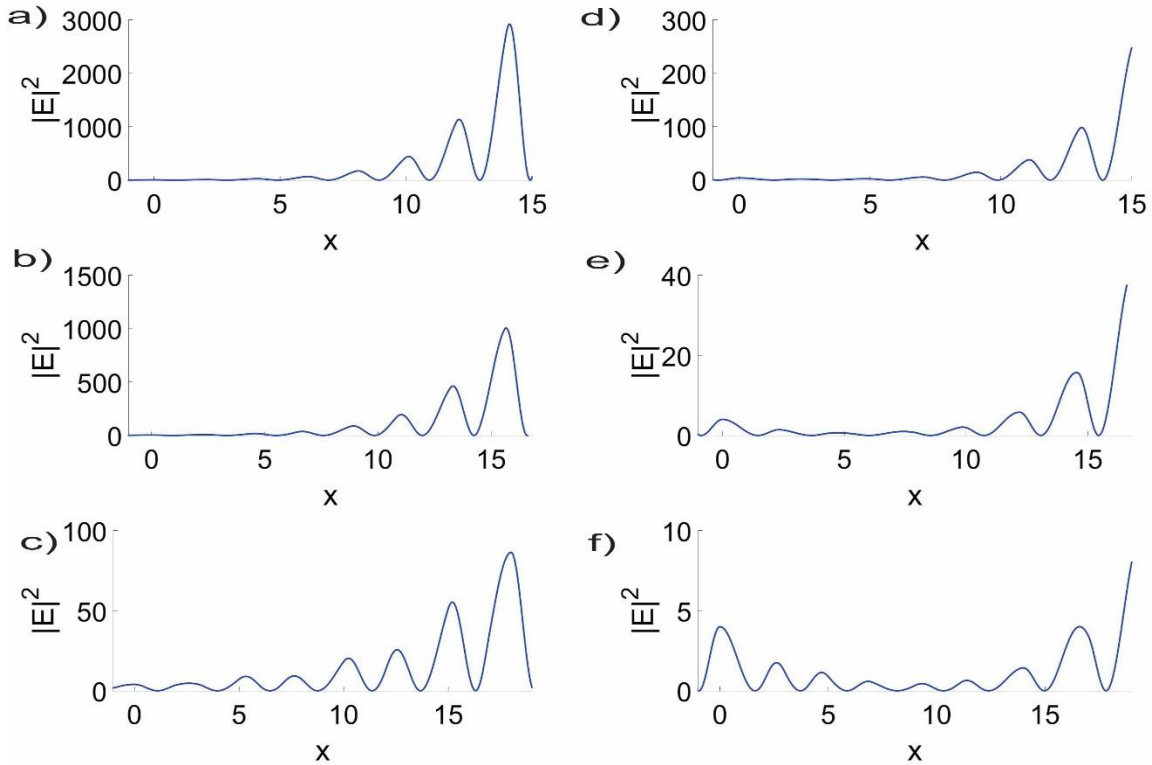


Figura 3.38: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la tercera generación de Thue-Morse cerca de una banda tradicional, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.3646$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.3218$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.2682$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.3694$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.3426$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.3082$.

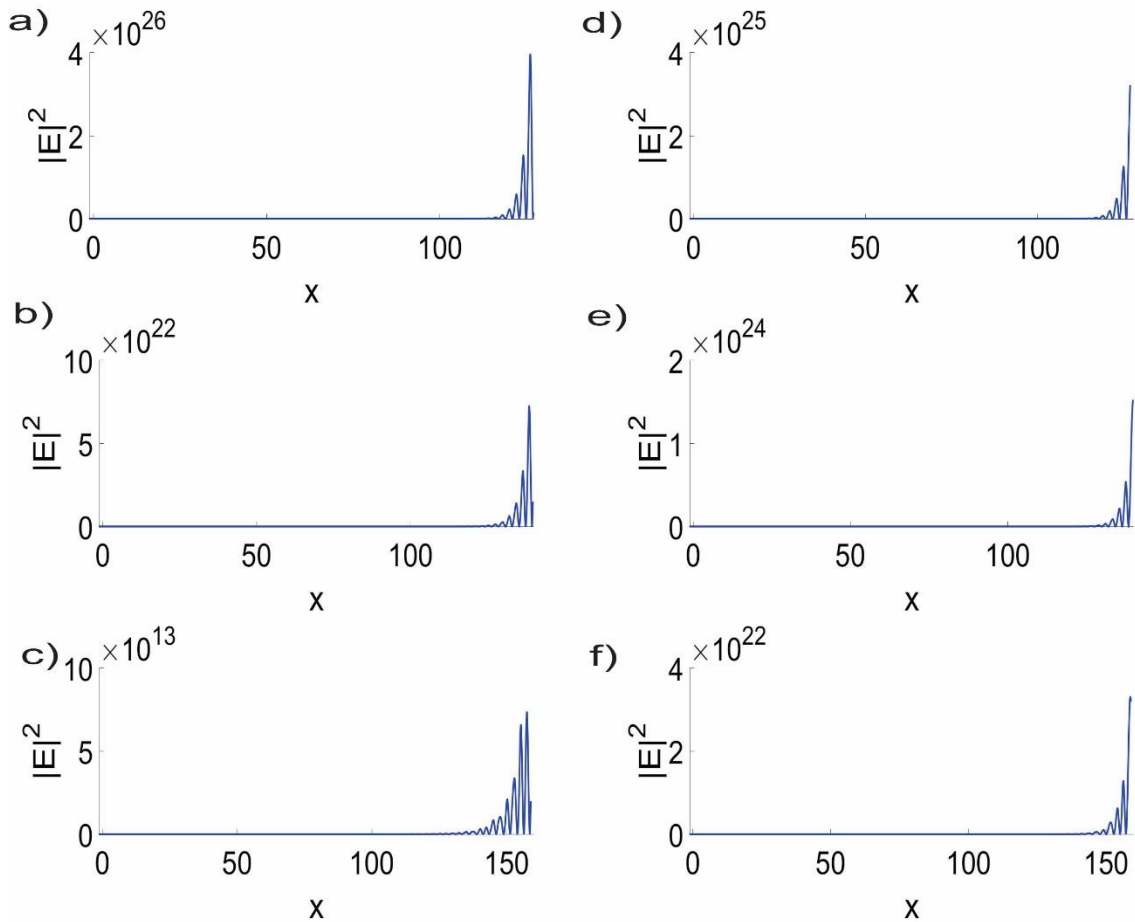


Figura 3.39: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la sexta generación de Thue-Morse cerca de una banda tradicional, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.3682$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.3302$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.2800$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.3720$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.3486$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.3266$.

A continuación, en la figura 3.40, se muestran los resultados que se obtuvieron para el grado de localización que presentó el sistema de Thue-Morse cerca de una banda tradicional. Como se puede observar, en el primer caso de acomodo de índices se presenta la misma tendencia para cualquier generación de Thue-Morse, conforme aumenta el valor de Δ el grado de localización tiende a decaer, es decir, mientras más periódico más localizado es el sistema, comportamiento que es congruente con lo que se obtuvo para Fibonacci, la razón de este comportamiento es la misma que se explicó anteriormente, la banda tradicional permite mayor transmisión de la radiación electromagnética conforme aumenta el valor de Δ , dicho comportamiento se puede observar tanto en la transmitancia y en el vector de onda de Bloch. Por otro lado, para el segundo caso de acomodo de índices de refracción se obtuvieron diferentes comportamientos en el grado de localización, cuando se tiene una

generación menor de Thue-Morse el grado de localización tiende a decaer únicamente en los valores de Δ que conforman el rango de 0.4 a 0.8, antes de este rango el grado de localización se mantiene casi igual y por encima de este rango el grado de localización toma un máximo. Para la tercera generación el grado de localización tiende a decaer conforme Δ aumenta, mientras que para la sexta generación el grado de localización aumenta conforme Δ aumenta, este último comportamiento no se esperaba, lo que nos hace pensar es que para generaciones mayores de Thue-Morse las bandas tradicionales siguen presentando una transmitancia cercana a cero, lo cual podemos corroborar en las gráficas de transmitancia y en el vector de onda de Bloch figuras 3.33 y 3.36 respectivamente.

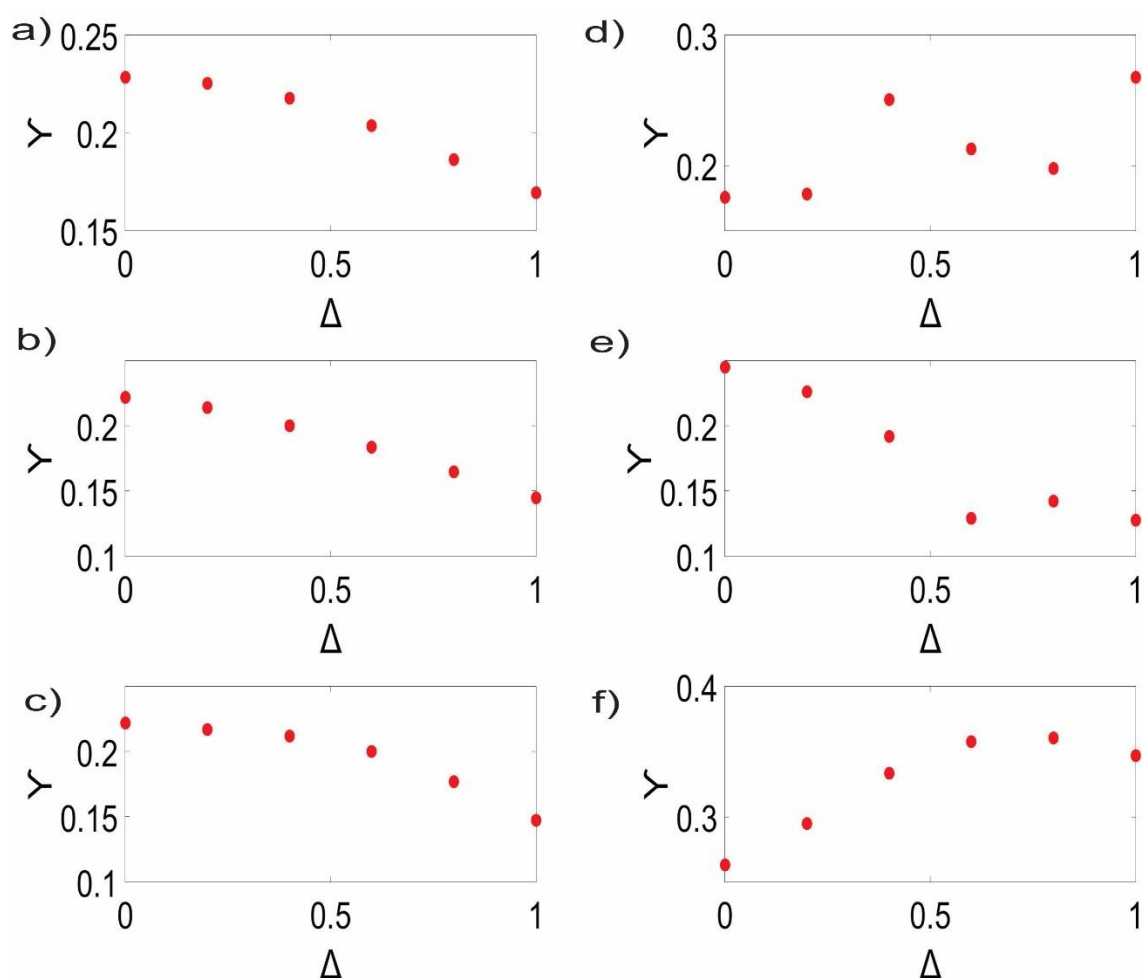


Figura 3.40: Grado de localización en función de Δ cerca de una banda tradicional, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) Segunda generación de Thue-Morse, b) Tercera generación de Thue-Morse y c) Sexta generación de Thue-Morse, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) Segunda generación de Thue-Morse, e) Tercera generación de Thue-Morse y f) Sexta generación de Thue-Morse.

En las figuras 3.41 a 3.43 se presentan la distribución de campo eléctrico para las tres generaciones de Thue-Morse cerca de una banda de transmisión casi perfecta ($T > 99.7\%$).

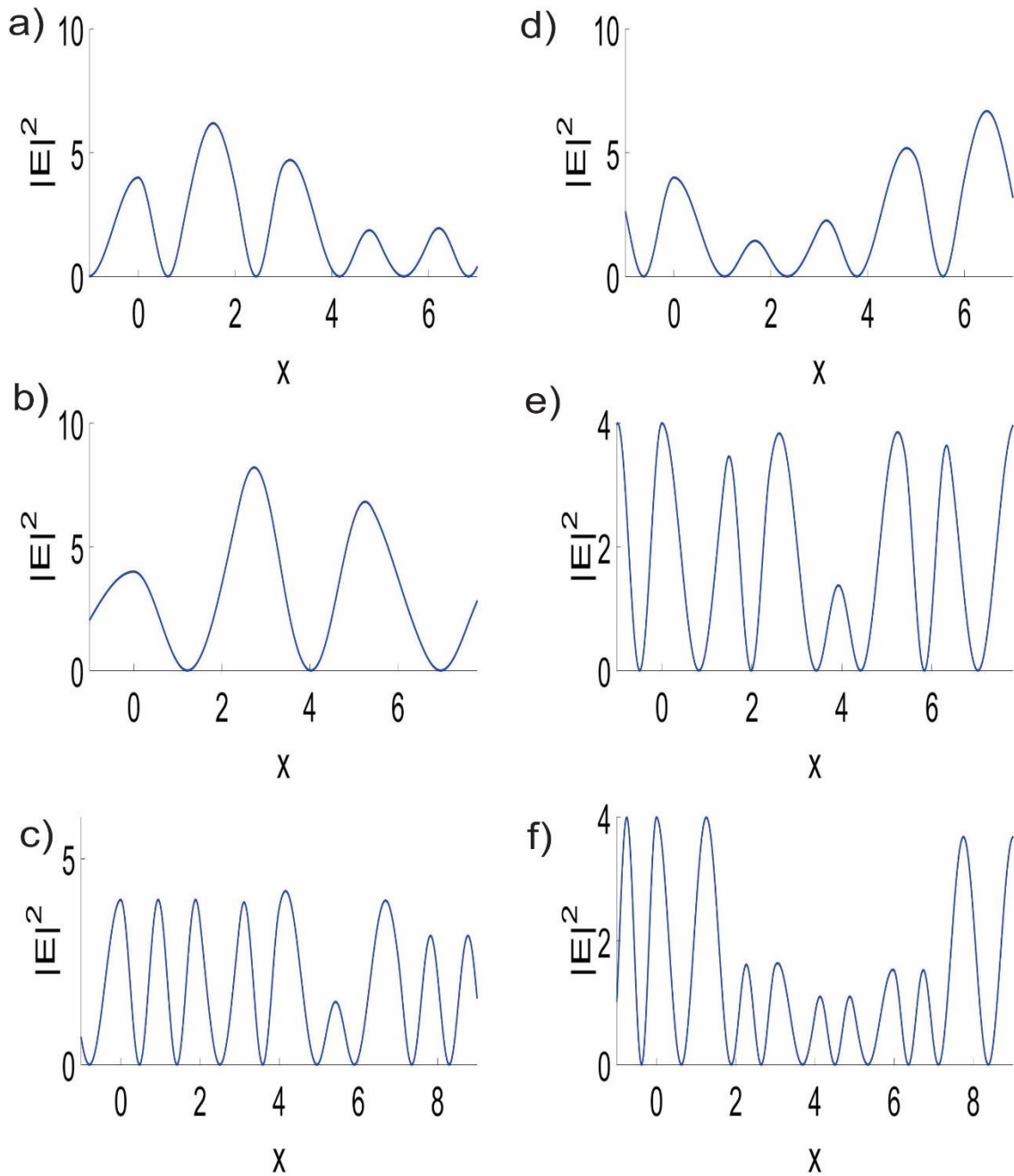


Figura 3.41: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la segunda generación de Thue-Morse cerca de una banda de transmitancia casi perfecta, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.4860$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.2450$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.6316$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.4766$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.6066$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.7940$.

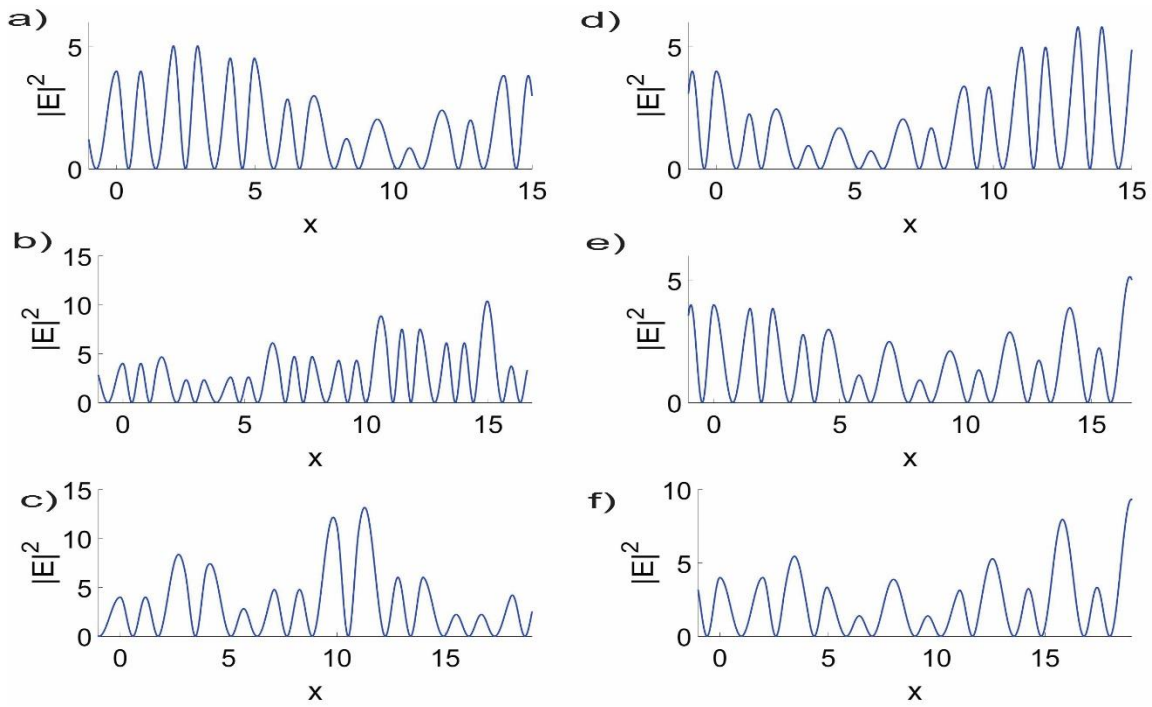


Figura 3.42: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la tercera generación de Thue-Morse cerca de una banda de transmitancia casi perfecta, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.6826$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.8110$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.5124$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.6906$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.6590$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.5050$.

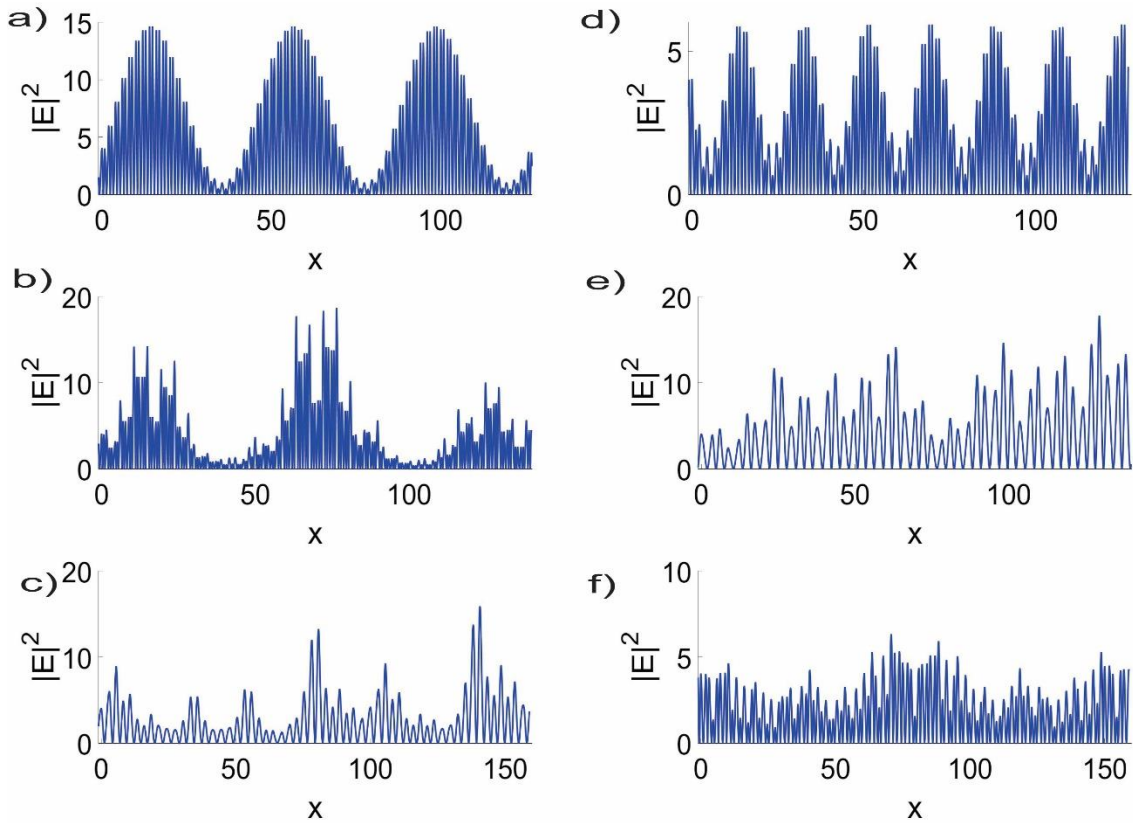


Figura 3.43: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la sexta generación de Thue-Morse cerca de una banda de transmitancia casi perfecta, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.7032$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.8168$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.2464$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.6912$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.2502$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.5490$.

De las figuras 3.41 a 3.43 se observa que cuando se tienen generaciones pequeñas de Thue-Morse, para el primer caso de acomodo de índices de refracción la radiación electromagnética se distribuye casi homogéneamente sobre toda la estructura cuando $\Delta \neq 0$, pero cuando $\Delta = 0$ se distribuye un poco más en la primera mitad de toda la estructura, sin embargo, esto no significa que no se comporte como una onda tipo Bloch, ya que si comparamos la distribución de campo eléctrico de las tres generaciones cuando $\Delta = 0$ se puede notar que la distribución tiende a comportarse como el de la sexta generación, es decir, como si se tratara de una onda modulada, por otro lado, para el segundo acomodo de índices de refracción se puede observar que la distribución es mayor en los extremos de la estructura conforme Δ crece, sin embargo, al observar la distribución de la sexta generación podemos notar que también se comporta como una onda modulada y que las generaciones que le preceden presentan un comportamiento similar solo que a diferente escala. También es posible observar que para la sexta generación, cuando Δ aumenta la distribución homogénea que presenta el sistema periódico no se pierde del todo, sigue presentando un comportamiento similar pero con fluctuaciones, tal como se indica en la referencia [9 y 11].

A continuación en la figura 3.44 se presentan los resultados obtenidos para el grado de localización de la luz de las tres generaciones cerca de una banda de transmitancia casi perfecta. Como se puede observar de las gráficas siguientes, no se tiene una dependencia lineal del grado de localización con respecto del valor de Δ , donde conforme aumenta Δ el grado de localización disminuye o aumenta, en esta caso lo único que se observa es que el grado de localización depende del valor de Δ .

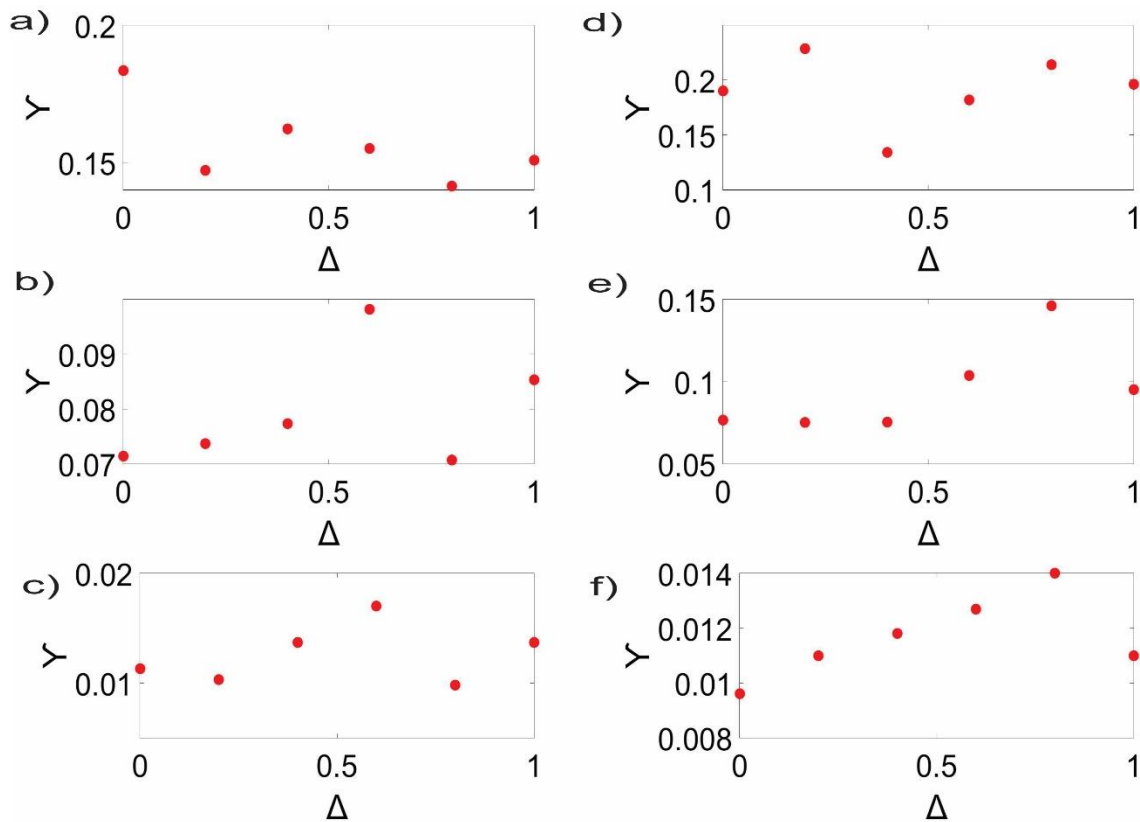


Figura 3.44: Grado de localización en función de Δ cerca de una banda de transmitancia casi perfecta, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) Segunda generación de Thue-Morse, b) Tercera generación de Thue-Morse y c) Sexta generación de Thue-Morse, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) Segunda generación de Thue-Morse, e) Tercera generación de Thue-Morse y f) Sexta generación de Thue-Morse.

En las figuras 3.45 a 3.47 se presentan la distribución de intensidad de campo eléctrico cerca de una banda fractal para las tres generaciones de Thue-Morse. Se puede observar que cuando se tienen $\Delta=0$ en las tres generaciones, la distribución es muy similar al que se obtuvo cerca de una banda de transmisión casi perfecta, esto es de esperar, debido a que en este caso las bandas fractales están lejos de la transmitancia nula, es decir, estas bandas permiten arriba del 40% de transmitancia, entonces el comportamiento debería de ser similar al de una onda que se propaga a través de la estructura, sin embargo, en las tres generaciones cuando se tiene el primer acomodo de los índices de refracción la radiación electromagnética tiende a localizarse en las últimas capas de la estructura, presenta comportamiento similar al que se obtuvo cerca de una banda tradicional, pero por otro lado, cuando se tiene el segundo acomodo de índices de refracción dicho comportamiento solo se observa para la sexta generación, ya que para la segunda generación el

comportamiento es muy similar cuando se tiene $\Delta=0$ y $\Delta=0.4$, en este caso el campo se concentra o localiza un poco más en el centro de la estructura. Cuando $\Delta=1$ el campo tiende a localizarse más en los extremos de la estructura, mientras que para la tercera generación el comportamiento es muy similar para todos los valores de Δ , como si el campo se distribuyera de manera homogénea a lo largo de toda la estructura.

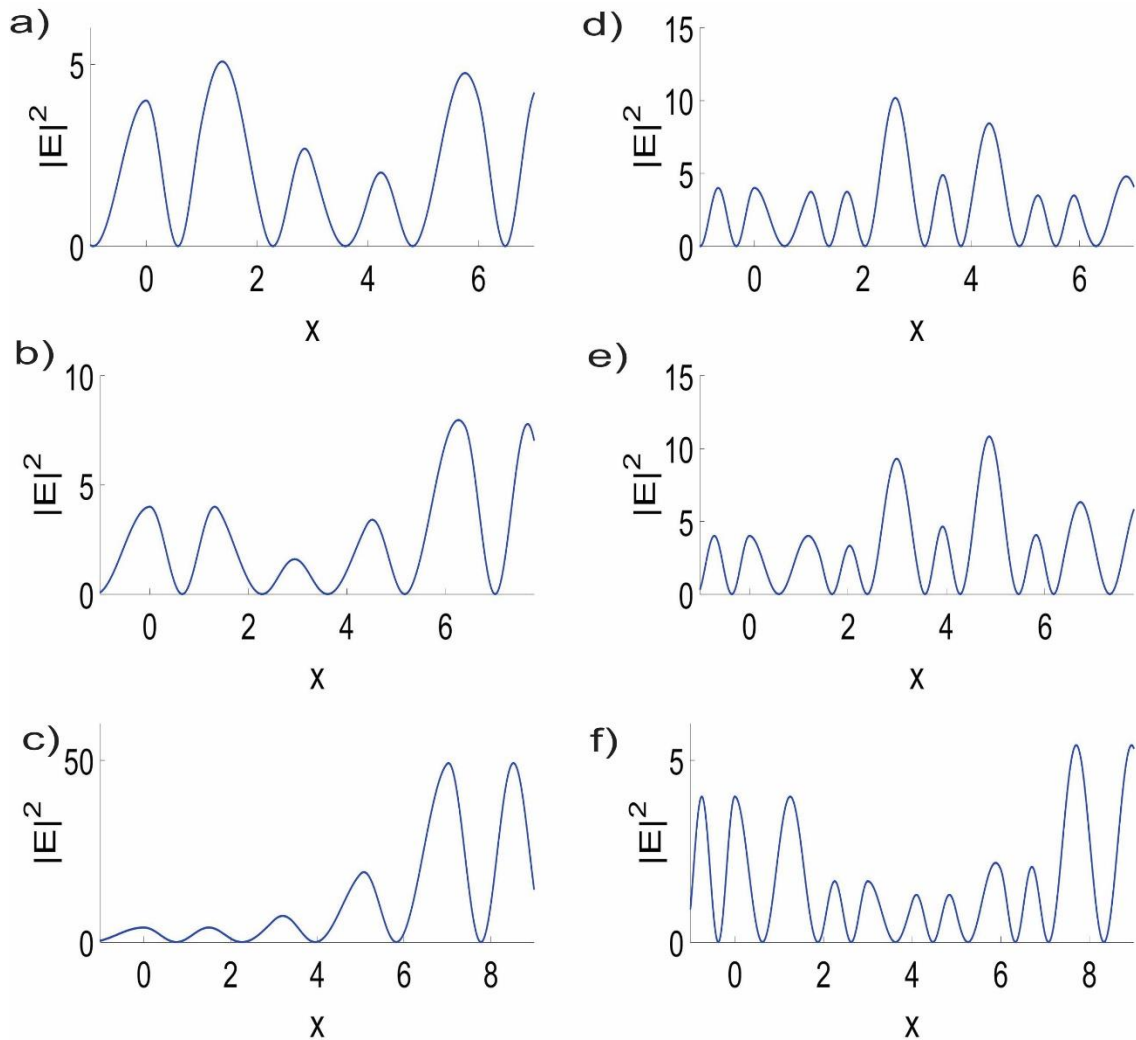


Figura 3.45: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la segunda generación de Thue-Morse cerca de una banda fractal, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.5218$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.4528$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.3982$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.8950$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.8372$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.8002$.

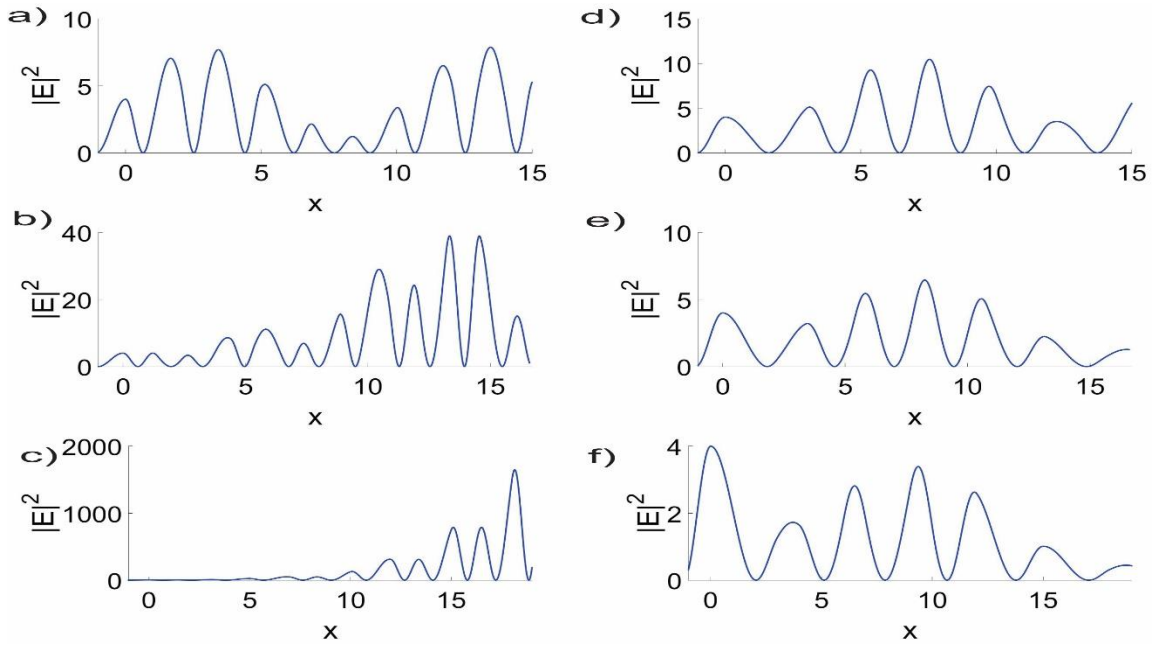


Figura 3.46: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la tercera generación de Thue-Morse cerca de una banda fractal, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.4624$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.4906$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.4256$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.2880$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.2702$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.2442$.

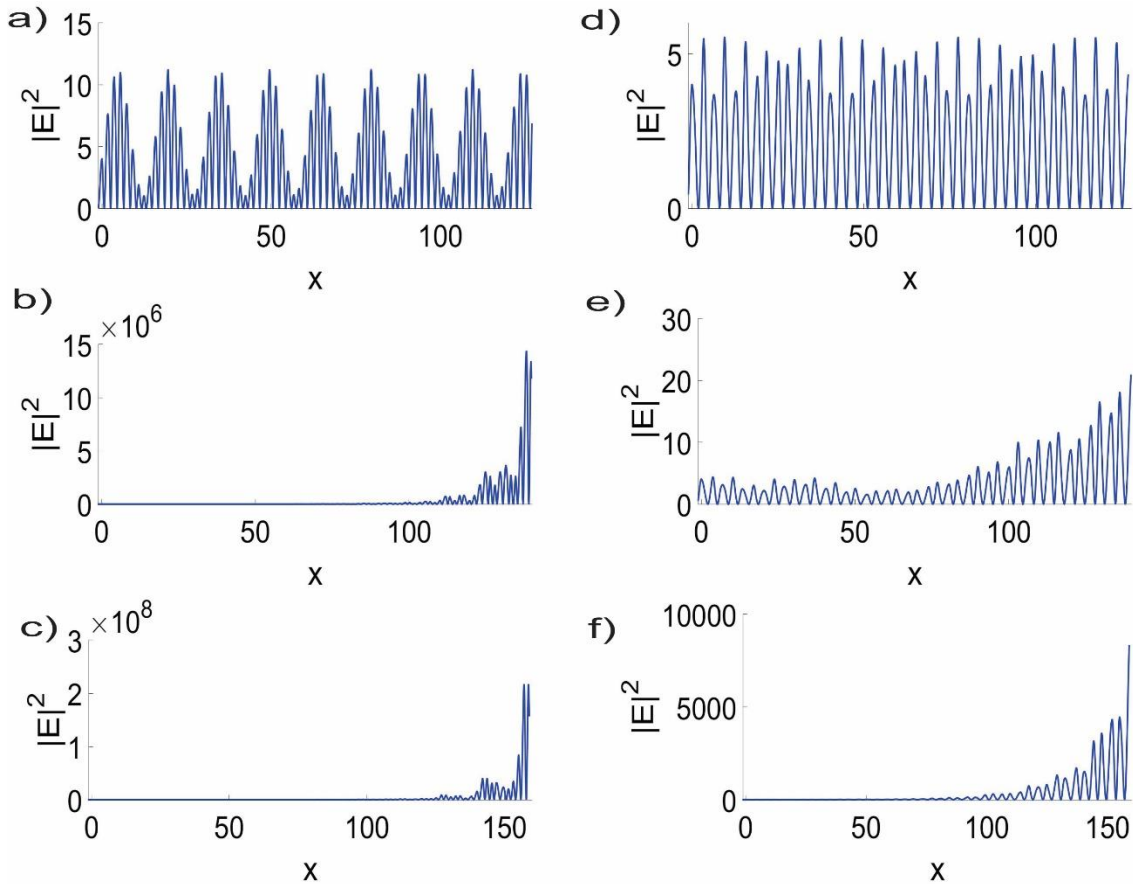


Figura 3.47: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la sexta generación de Thue-Morse cerca de una banda fractal, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.4468$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.4458$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.3710$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.2312$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.2220$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.2004$.

En la figura 3.48 se presenta el grado de localización que se obtuvo para las 3 generaciones de Thue-Morse cerca de una banda fractal.

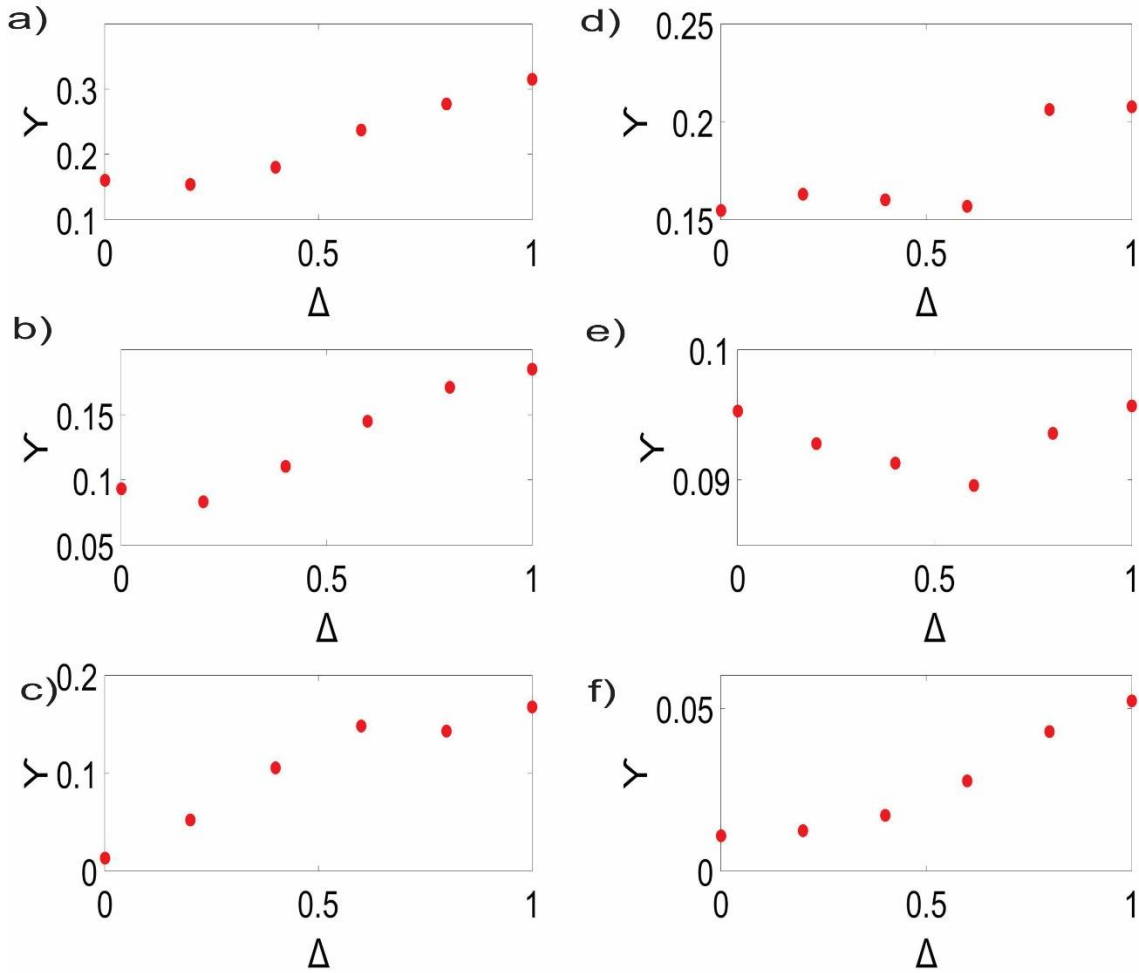


Figura 3.48: Grado de localización en función de Δ cerca de una banda de transmitancia casi perfecta, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) Segunda generación de Thue-Morse, b) Tercera generación de Thue-Morse y c) Sexta generación de Thue-Morse, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) Segunda generación de Thue-Morse, e) Tercera generación de Thue-Morse y f) Sexta generación de Thue-Morse.

Como podemos observar de la figura 3.48, para la tercera generación y el primer caso de índices de refracción se tiene una dependencia casi lineal del grado de localización con respecto a Δ , conforme el valor de Δ aumenta el grado de localización del sistema también aumenta, resultado que era previsto debido al comportamiento que se observó en las distribuciones de campo eléctrico. Por otro lado, para el segundo caso de acomodados de índices de refracción, se tienen tres comportamientos distintos, uno para cada generación, para la segunda generación se obtuvo que para valores de 0 hasta 0.6 de Δ el grado de

localización es muy cercano, es decir, no influye en gran medida el valor de Δ ; sin embargo cuando se tiene la tercera generación la localización tiende a disminuir, igual en el rango de Δ que comprende de 0 a 0.6, pero para ambas generaciones se observa que cuando $\Delta > 0.6$ el grado de localización tiende a crecer, y para la sexta generación de Thue-Morse el grado de localización crece conforme Δ crece.

3.4 Sistemas modulados de Cantor

Para el sistema de Cantor se presentarán los resultados obtenidos únicamente para la segunda y cuarta generación ($n=2$ y 4), por consiguiente la celda unitaria consta de 18 y 162 capas de materiales A y B alternados periódicamente en los índices de refracción y modulando su ancho de acuerdo a la ecuación $d_B = d_{B0}(1 + \Delta * S_j)$, donde $\Delta = 0, 0.4$ y 1 , donde al igual que para los casos anteriores los índices de refracción son reales y positivos y se consideran los mismos acomodos de éstos, es decir, caso 1: $n_A = 2$ y $n_B = 3.35$ y caso 2: $n_A = 3.35$ y $n_B = 2$, ambos materiales son no magnéticos ($\mu = 1$) y los anchos de cada capa considerados para los cálculos fueron $d_A = d_{B0} = 1$. Únicamente se realizaron los cálculos para estas generaciones porque la primera generación de Cantor es idéntica a la segunda generación de Fibonacci.

En las figuras 3.49 y 3.51 se presentan los diagramas de bandas para la polarización P y en las figuras 3.50 y 3.52 para la polarización S para ambos casos del acomodo de los índices de refracción. Para el sistema de Cantor tal vez uno esperaría obtener una respuesta similar que para Thue-Morse, esto en base a que si representamos la secuencia binaria (para $n=2$) en términos de los anchos de las capas como se realizó para Thue-Morse se obtendría lo siguiente (tomando en cuenta que un 1 es equivalente a d_{AB} y un 0 a d_{AB0}):

$$d_{AB} d_{AB0} d_{AB} d_{AB0} d_{AB0} d_{AB0} d_{AB} d_{AB0} d_{AB}$$

y si también hacemos la consideración de tomar una celda unitaria repetida n veces dentro de esta secuencia, se reduce a:

$$d_{AB} d_{AB0} d_{AB} (d_{AB0})^3 d_{AB} d_{AB0} d_{AB}$$

entonces siguiendo el mismo argumento que para Thue-Morse, se esperaría que en los diagramas de banda, en la transmitancia y en el vector de onda de Bloch apareciera una banda permitida no fraccionada rodeada de bandas fraccionadas dentro de una banda permitida principal, dichas bandas fraccionadas se formarían debido a las interferencias que cada interfaz provoca como se explicó anteriormente y como lo reportan en las referencias [9 y 11], en otras palabras, se esperaría un comportamiento grafico similar al que se observa en Thue-Morse, sin embargo el sistema de Cantor no presenta una respuesta equivalente a la de Thue-Morse, en realidad se observa un comportamiento similar al de Fibonacci, es decir, el fraccionamiento de las bandas corresponde al número de Cantor asociado a la generación analizada, dicho comportamiento es muy curioso ya que como podemos observar de la tabla 2.4, conforme aumenta la generación de Cantor el número de 1's comparado con el de 0's es muy pequeño, es decir, para el tipo de sistema de Cantor propuesto se puede considerar que los 1's son defectos puntuales, se ha mencionado anteriormente que la modulación en los anchos se considera como un defecto deseado, pero para el sistema de Cantor se dice que son defectos puntuales porque, a diferencia de Thue-Morse y Fibonacci, la aparición de los 1's en relación a los 0's es casi esporádica (este comportamiento se puede apreciar con más detalle en la tabla 2.4 generación 4), mientras que en Fibonacci el número de 1's presentes en la secuencia es casi igual al número de 0's multiplicado por la relación dorada y para Thue-Morse el número de 1's y 0's es el mismo.

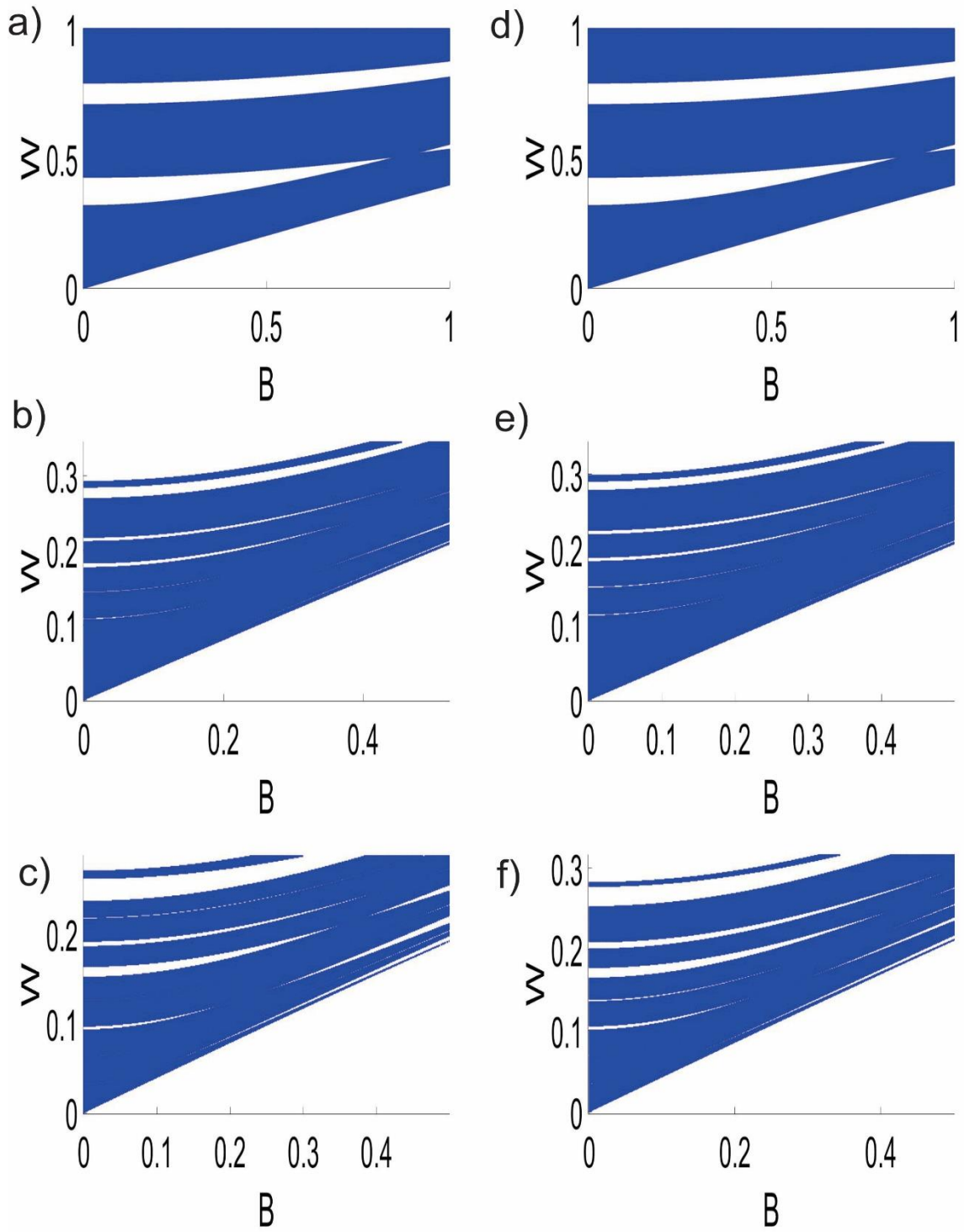


Figura 3.49: Diagrama de bandas polarización P para la segunda generación de Cantor, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$

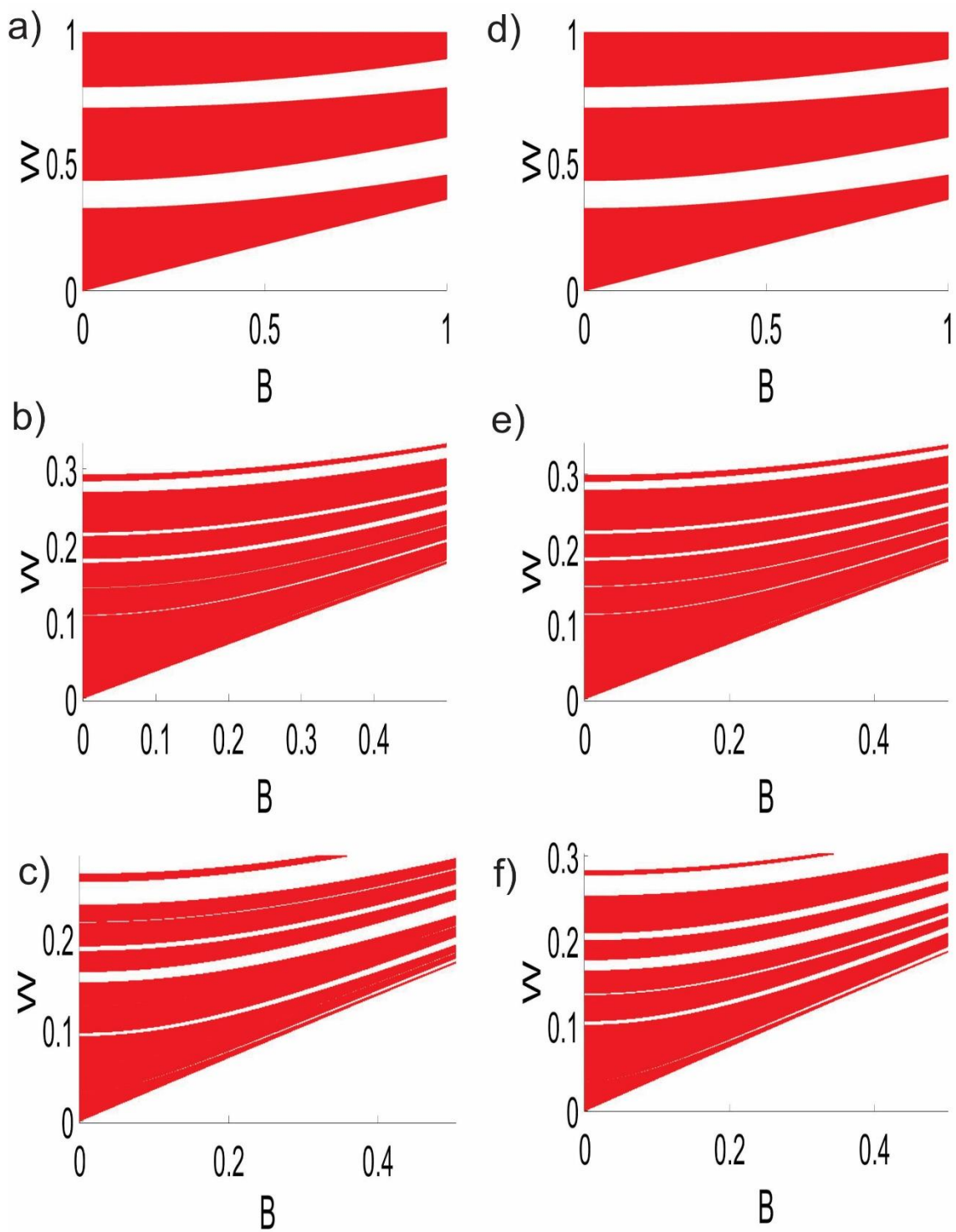


Figura 3.50: Diagrama de bandas polarización S para la segunda generación de Cantor, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$

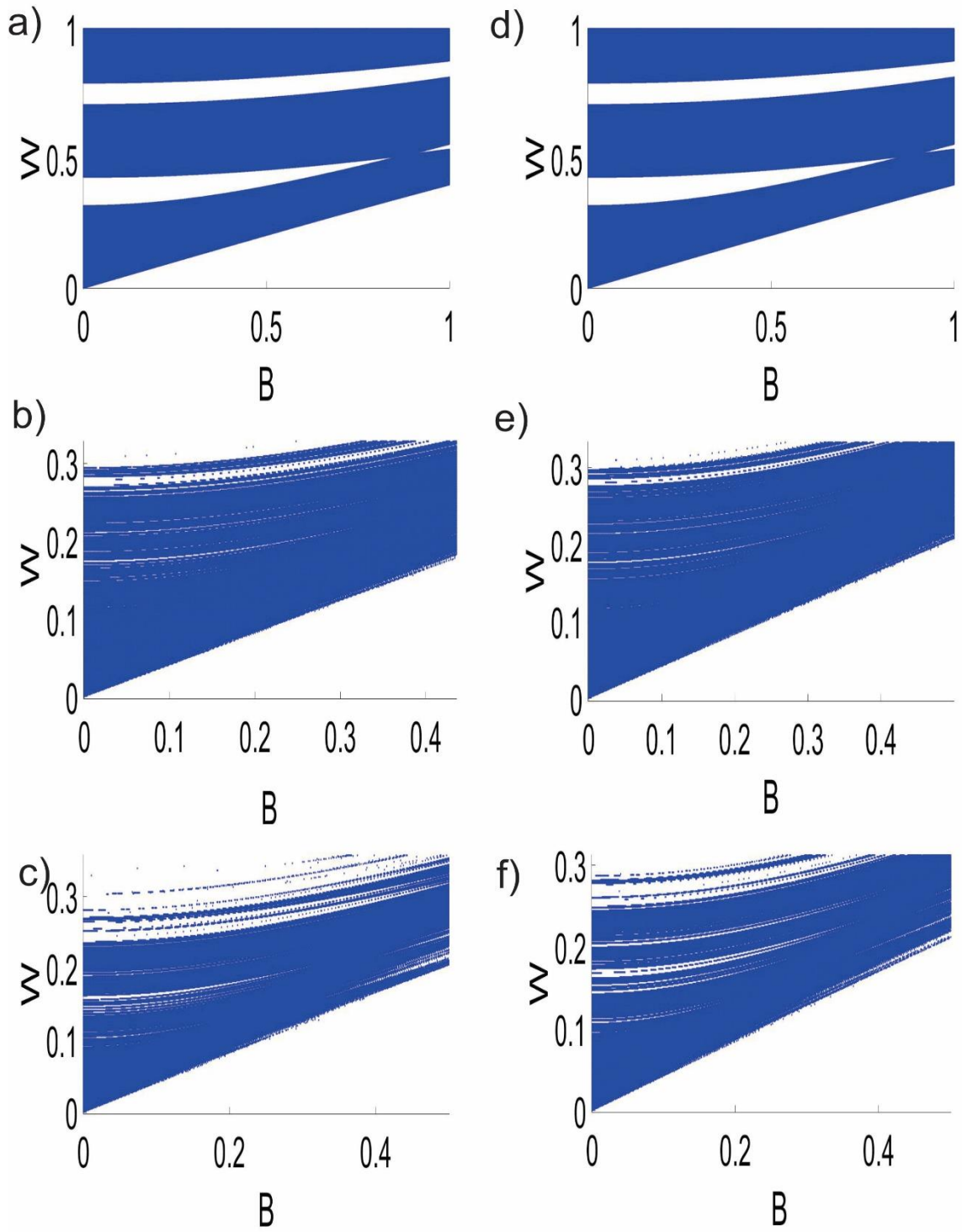


Figura 3.51: Diagrama de bandas polarización P para la cuarta generación de Cantor, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$

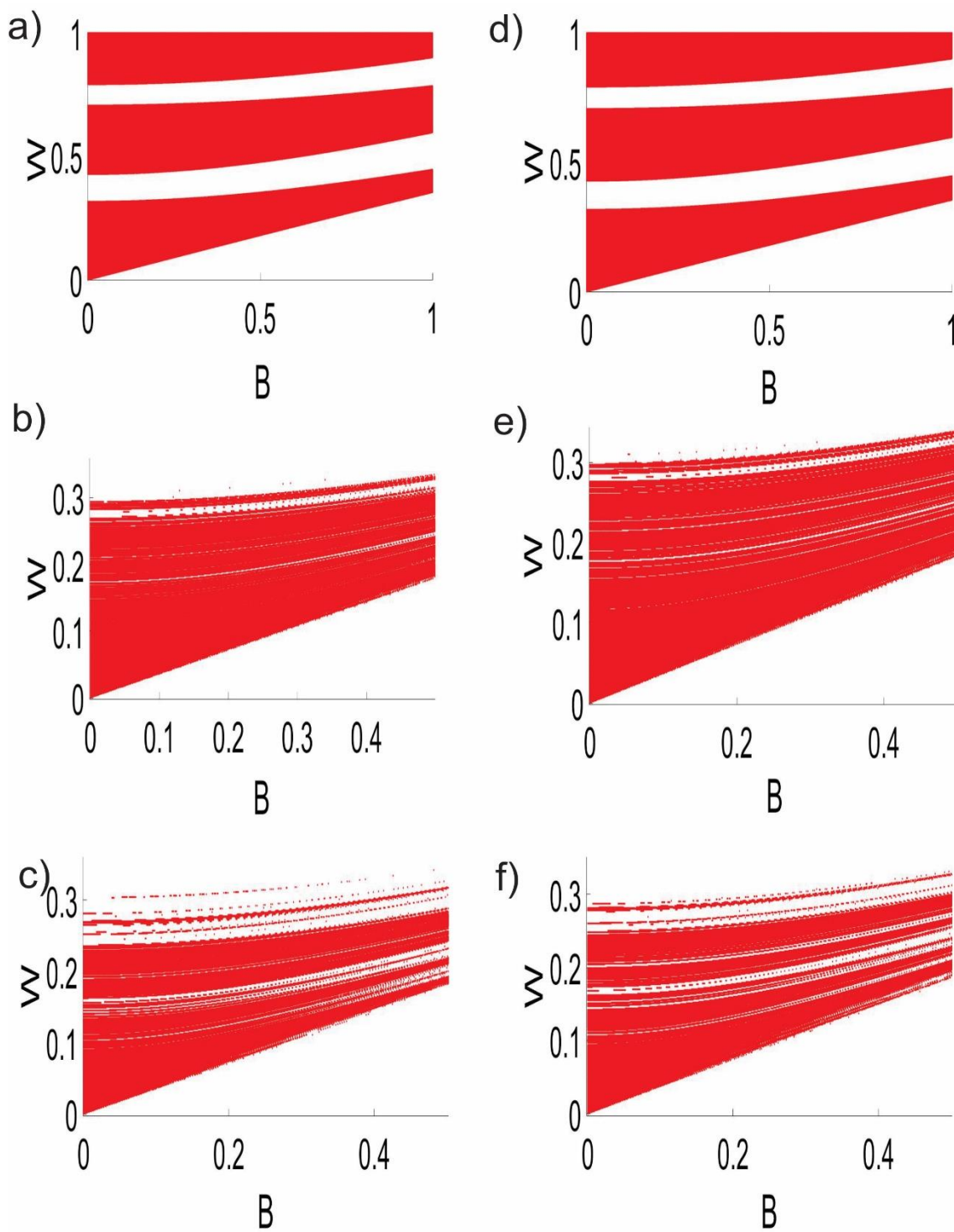


Figura 3.52: Diagrama de bandas polarización P para la cuarta generación de Cantor, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$

En las figuras 3.53 a 3.54 se presentan las gráficas de la transmitancia y en las figuras 3.55 a 3.56 las del vector de onda de Bloch. En estas gráficas se puede observar el mismo comportamiento que para Fibonacci y Thue-Morse, el valor del Δ modifica en la transmitancia la amplitud de las bandas prohibidas, como se puede observar en las figuras, las bandas tradicionales no siempre son las de mayor amplitud o las que están más cercanas a transmitancia nula, si no que conforme el valor de Δ aumenta las bandas fractales también tienden a llegar a cero transmitancia, también se puede observar en éstas y todas las gráficas de transmitancia de los otros sistemas que, cuando se tiene un $\Delta=0$ y $\Delta=1$ la respuesta es muy similar y pareciera que las bandas tradicionales siguen siendo las predominantes pero con un pequeño corrimiento en la frecuencia, pero realmente lo que sucede es que estas bandas predominantes en amplitud ahora son las bandas fractales, no por esto desaparecen las bandas tradicionales, éstas siguen presentes y como se explicó anteriormente la banda periódica pierde amplitud debido al fraccionamiento de bandas, porque las bandas permitidas fraccionadas a partir de una banda principal empiezan a invadir o a combinarse con las bandas permitidas de otra banda principal adyacente, lo mismo sucede para el vector de onda de Bloch.

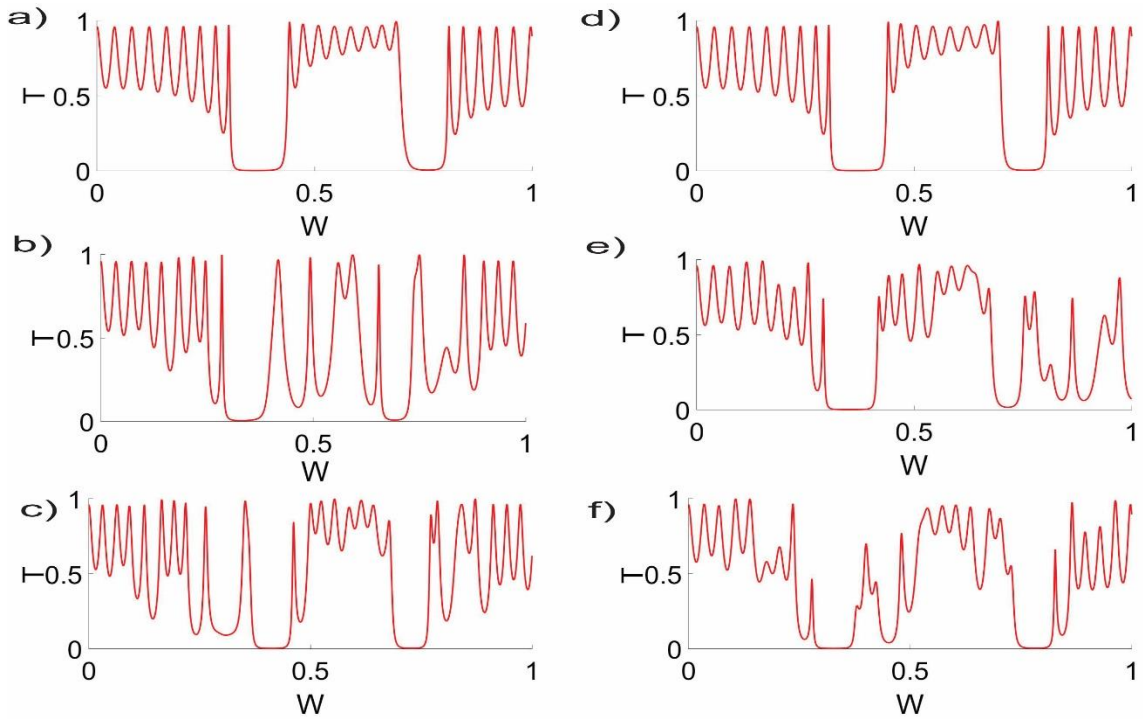


Figura 3.53: Transmitancia para la segunda generación de Cantor, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$.

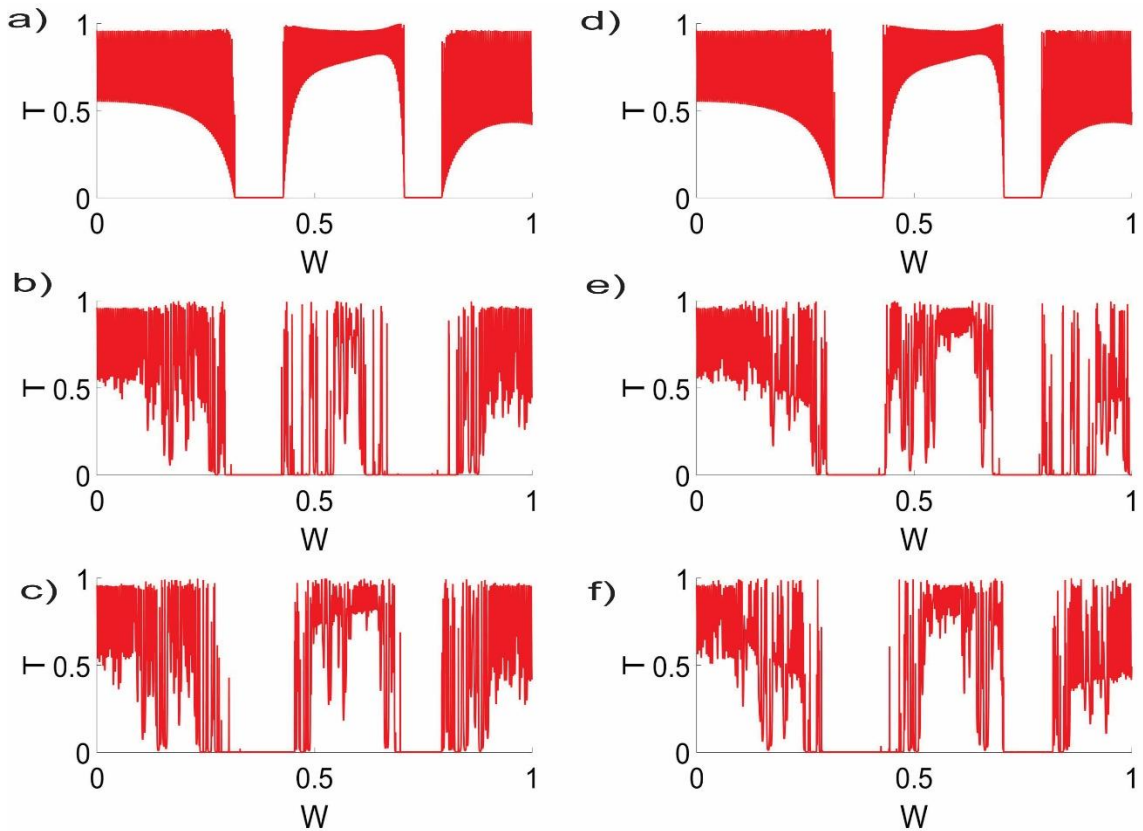


Figura 3.54: Transmitancia para la cuarta generación de Cantor, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$.

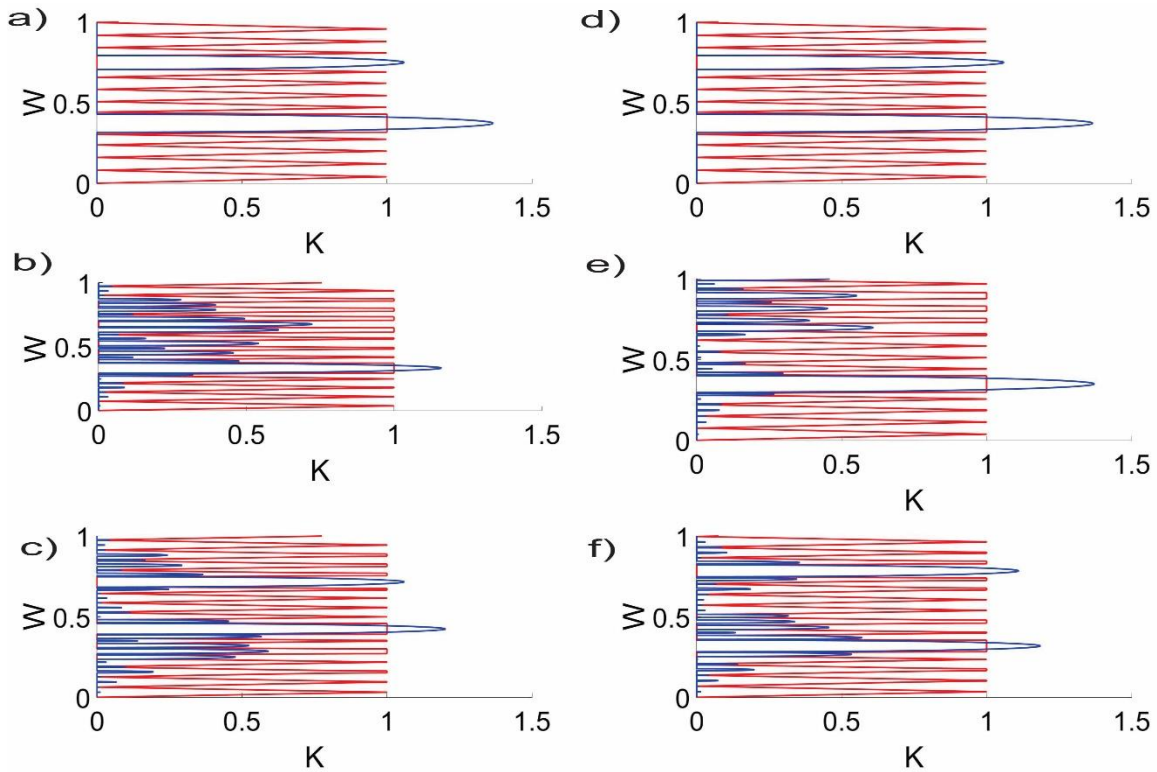


Figura 3.55: Vector de onda de Bloch para la segunda generación de Cantor, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$. Líneas rojas representa el vector de onda real y las azules el vector de onda imaginario.

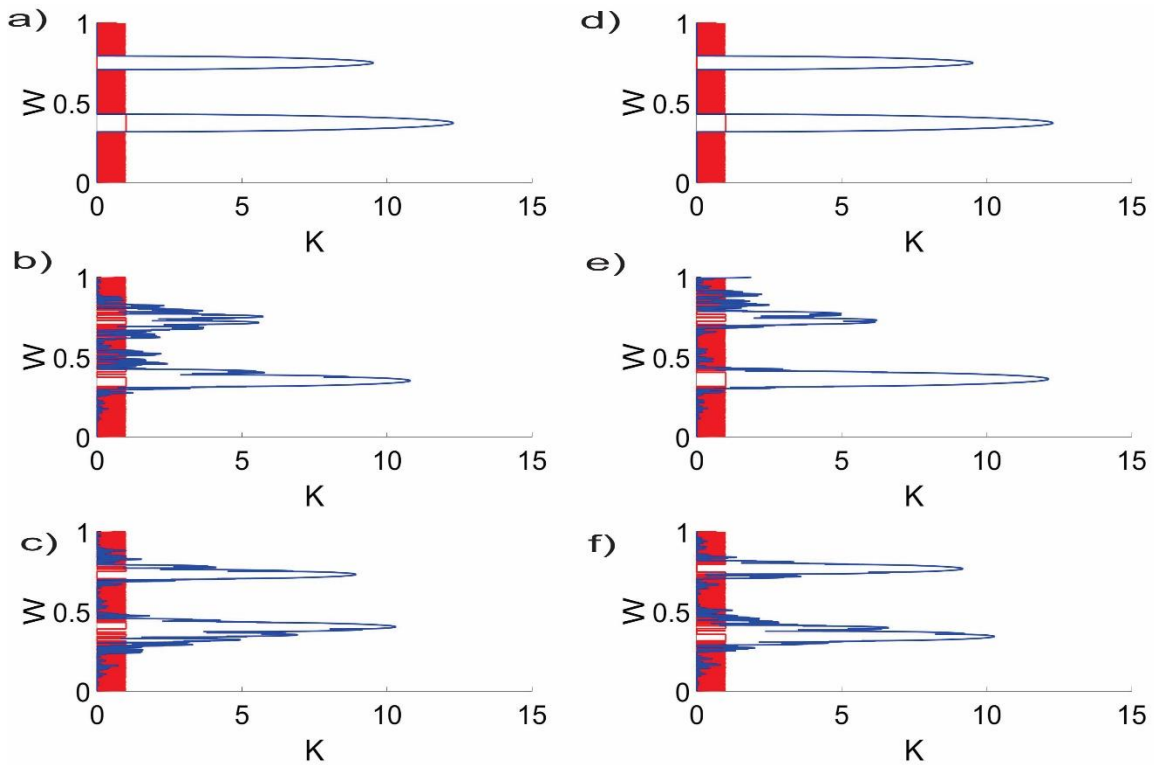


Figura 3.56: Vector de onda de Bloch para la cuarta generación de Cantor, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$, b) $\Delta=0.4$ y c) $\Delta=1$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$, e) $\Delta=0.4$ y f) $\Delta=1$. Líneas rojas representa el vector de onda real y las azules el vector de onda imaginario.

En las figuras 3.57 y 3.58 se presentan la distribución de intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura cerca de una banda tradicional, para la segunda y cuarta generación de Cantor.

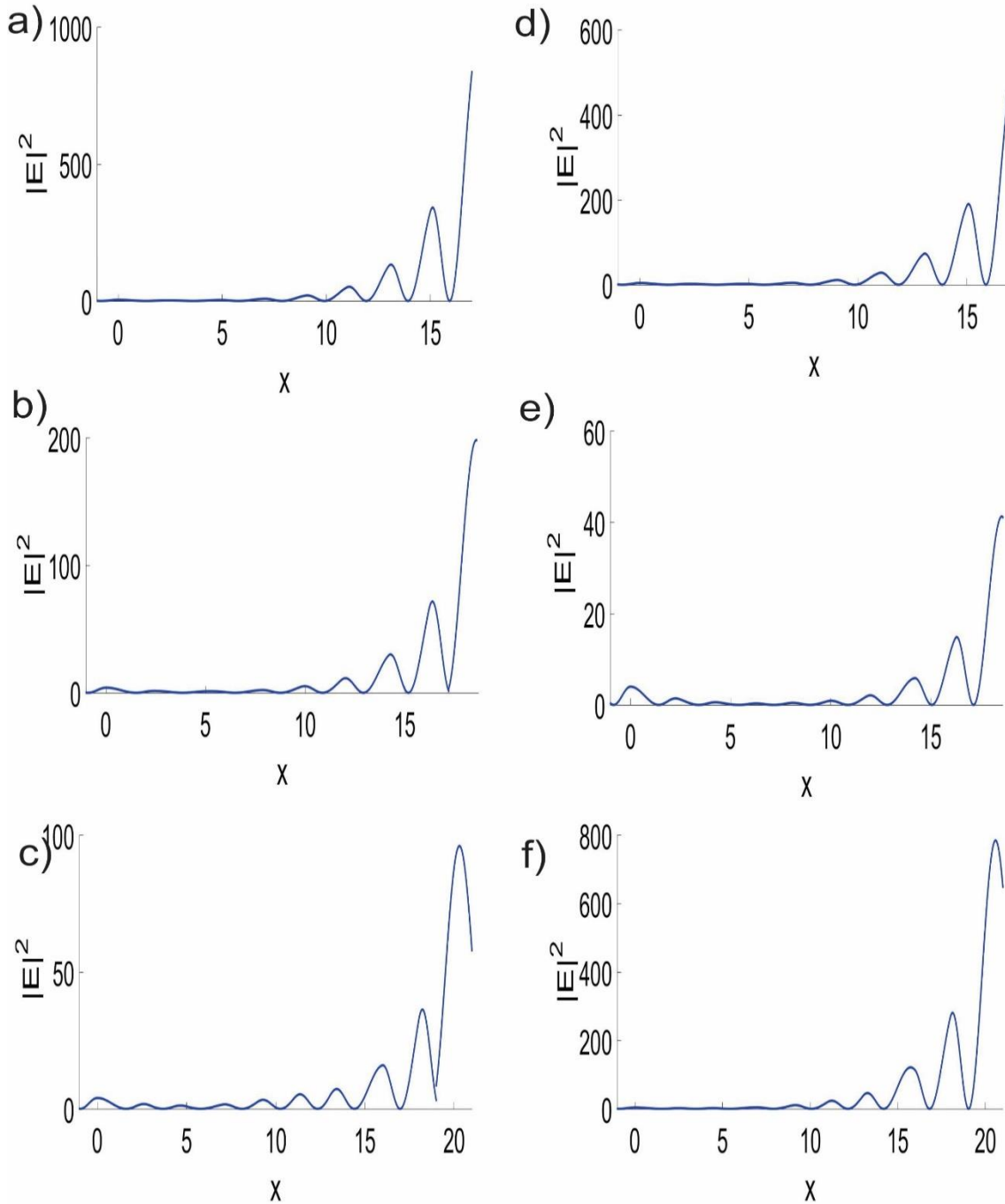


Figura 3.57: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la segunda generación de Cantor cerca de una banda tradicional, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.364$, b) $\Delta=0.4$ y $W=3322$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.3102$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.3734$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.3548$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.3256$.

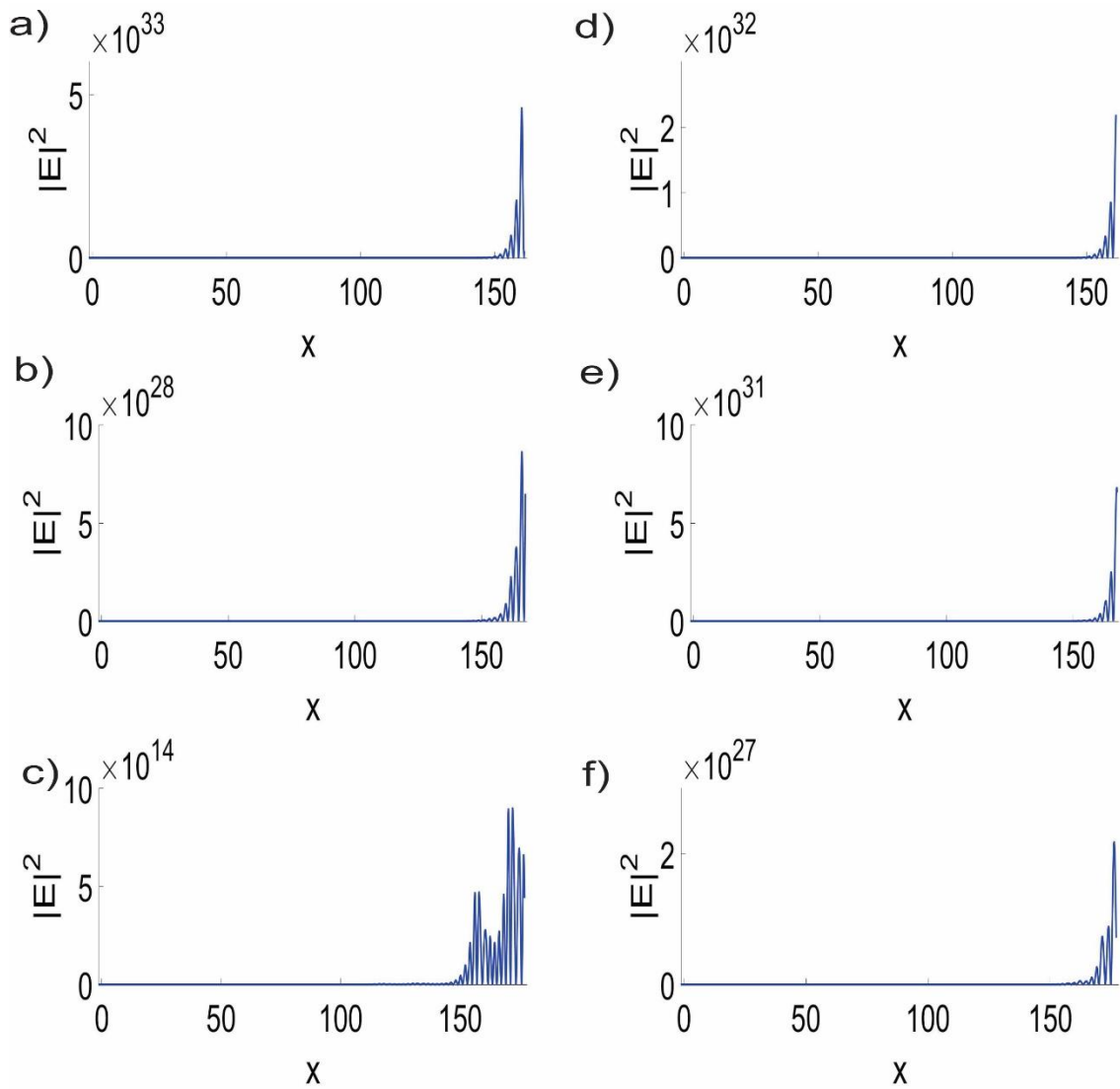


Figura 3.58: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la segunda generación de Cantor cerca de una banda tradicional, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.3694$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.3640$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.3406$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.3760$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.3628$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.3600$.

De las figuras 3.57 y 3.58 podemos observar que no importa el acomodo de los índices de refracción, se obtiene el mismo comportamiento, la radiación electromagnética tiende a localizarse en las últimas capas de la estructura.

En la figura 3.59 se muestran el grado de localización que presentan estas estructuras cerca de una banda tradicional.

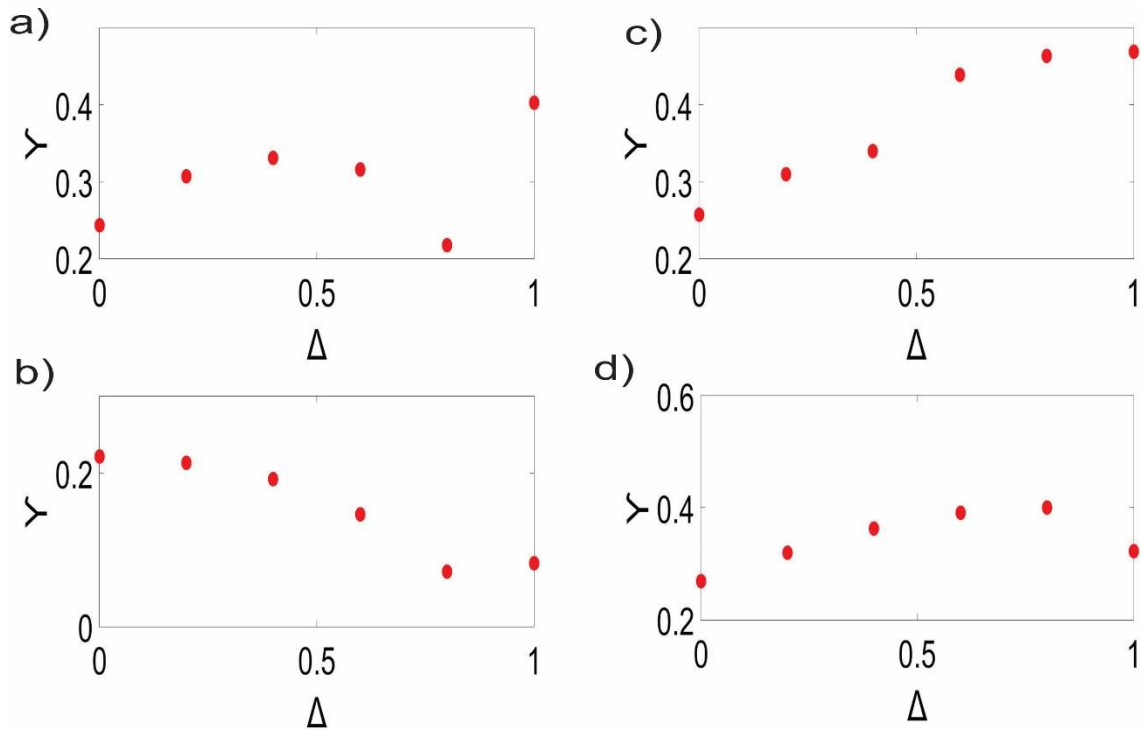


Figura 3.59: Grado de localización en función de Δ cerca de una banda de tradicional, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) Segunda generación de Cantor y b) Cuarta generación de Cantor, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) Segunda generación de Cantor, e) Cuarta generación de Cantor.

De la figura 3.59, podemos notar que en el primer caso de índices de refracción, para la segunda generación de Cantor, el valor de Δ influye mucho en el grado de localización, pero no de manera lineal o casi lineal como se presenta en el segundo caso de acomodado de índices para la misma generación (figura 3.59c), donde se observa que conforme Δ aumenta el grado de localización también aumenta, mismo comportamiento que está presente para la cuarta generación de Cantor (a excepción de cuando $\Delta=1$), por otro lado para la misma cuarta generación y primer acomodado de índices de refracción, se observa un comportamiento decreciente, es decir, conforme Δ aumenta el grado de localización tiende a disminuir. Ambos comportamientos también se presentaron en los sistemas de Fibonacci y Thue-Morse para generaciones mayores, lo curioso es que, en Cantor, incluso la segunda generación tiende a crecer el grado de localización para el segundo acomodado de índices de refracción mientras que para Fibonacci y Thue-Morse presentaban una tendencia decreciente, y el número de bicapas de cada sistema era muy parecido, para Fibonacci y Thue-Morse constan de 8 bicapas y Cantor está conformado por 9 bicapas, lo que nos indica

que no es tanto el número de elementos que conforma el sistema si no el tipo de secuencia determinista aperiódica la que dicta el comportamiento en el grado de localización.

En las figuras 3.60 y 3.61 se presentan la distribución de intensidad de campo eléctrico cerca de una banda de transmitancia casi perfecta. Se puede observar de la figura 3.60 para ambos casos de acomodo de índices de refracción cuando $\Delta=0$ la distribución de la intensidad de campo eléctrico es muy similar en ambos casos, además de que se ve un comportamiento equivalente al de la cuarta generación pero a diferente escala, tal como se presentó también para Fibonacci y Thue-Morse. Pero cuando Δ empieza a crecer el comportamiento se vuelve por completo diferente, para el primer caso de acomodo de índices de refracción se tiene que primero la distribución se vuelve casi homogénea en toda la estructura, es decir, se acerca más la distribución a una onda de Bloch y cuando $\Delta=1$ otra vez se ve que la distribución tiende a comportarse de manera similar que la cuarta generación cuando $\Delta=0$, por otro lado, para el segundo acomodo de índices de refracción si se comporta como una onda de Bloch. Para la cuarta generación de Cantor conforme aumenta Δ se pierde la distribución periódica de la intensidad de campo eléctrico que presenta.

En la figura 3.62 se presentan las gráficas del grado de localización correspondientes a la segunda y cuarta generación de Cantor cerca de una banda de transmitancia casi perfecta, en esta figura se puede observar que para el primer acomodo de índices de refracción el grado de localización no presenta una tendencia definida conforme aumenta el valor de Δ , mientras que para el segundo acomodo de índices de refracción presenta un comportamiento casi lineal creciente, pero no para todos los valores de Δ , por ejemplo para la segunda generación es a partir de 0.4 que el grado de localización aumenta conforme Δ crece y para la cuarta generación es a partir de 0.2 donde se puede observar dicho comportamiento.

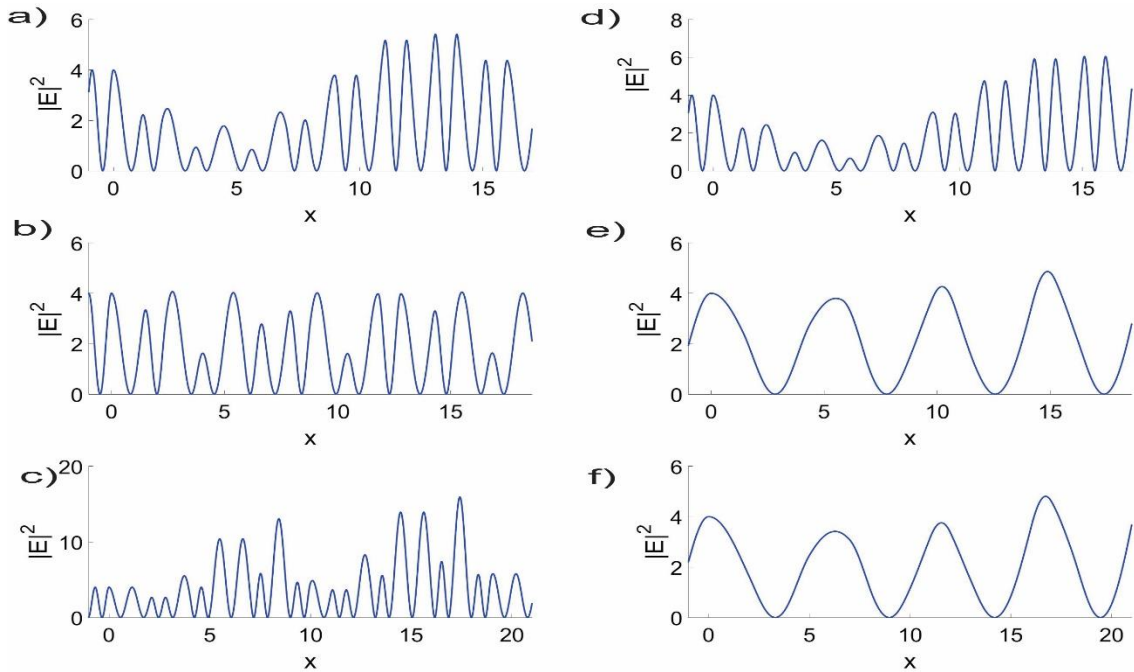


Figura 3.60: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la segunda generación de Cantor cerca de una banda de transmitancia casi perfecta, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.6878$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.5936$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.8712$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.6924$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.1515$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.1390$.

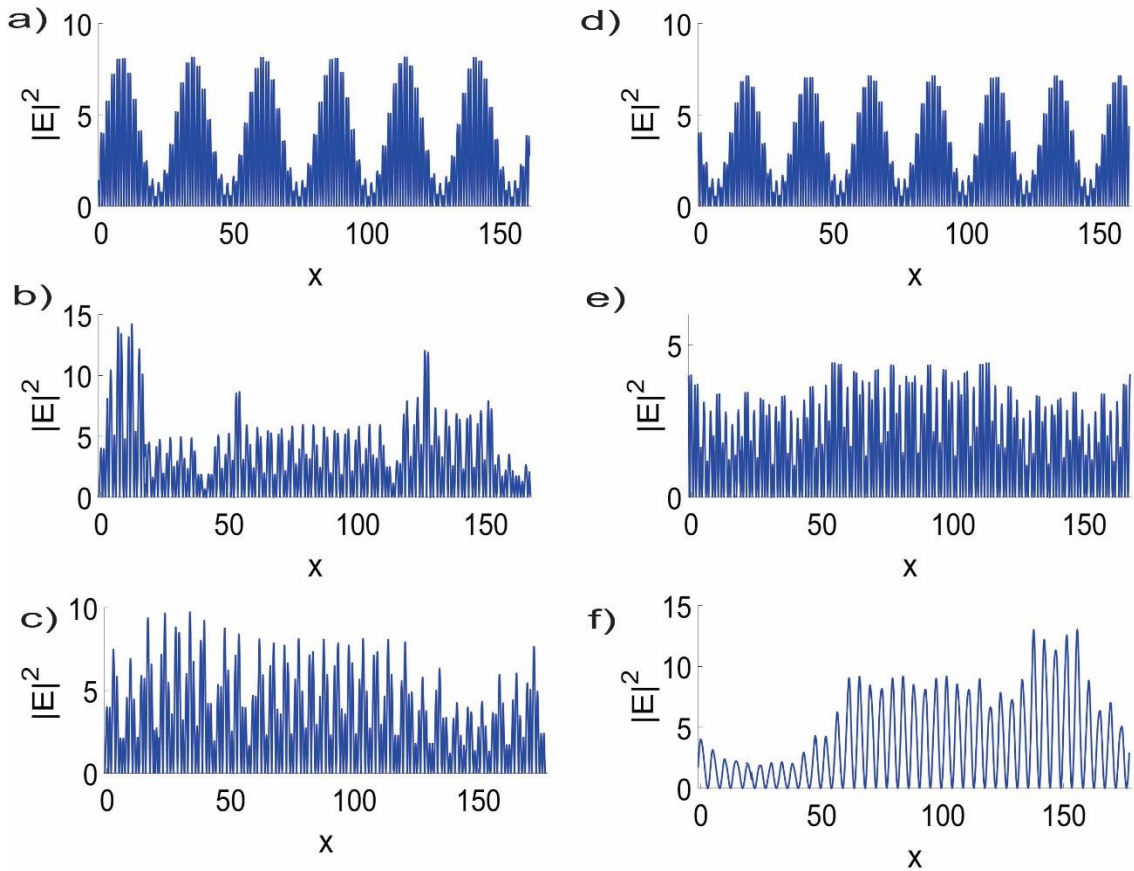


Figura 3.61: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la cuarta generación de Cantor cerca de una banda de transmitancia casi perfecta, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.6986$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.5504$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.5240$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.6964$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.6338$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.1604$.

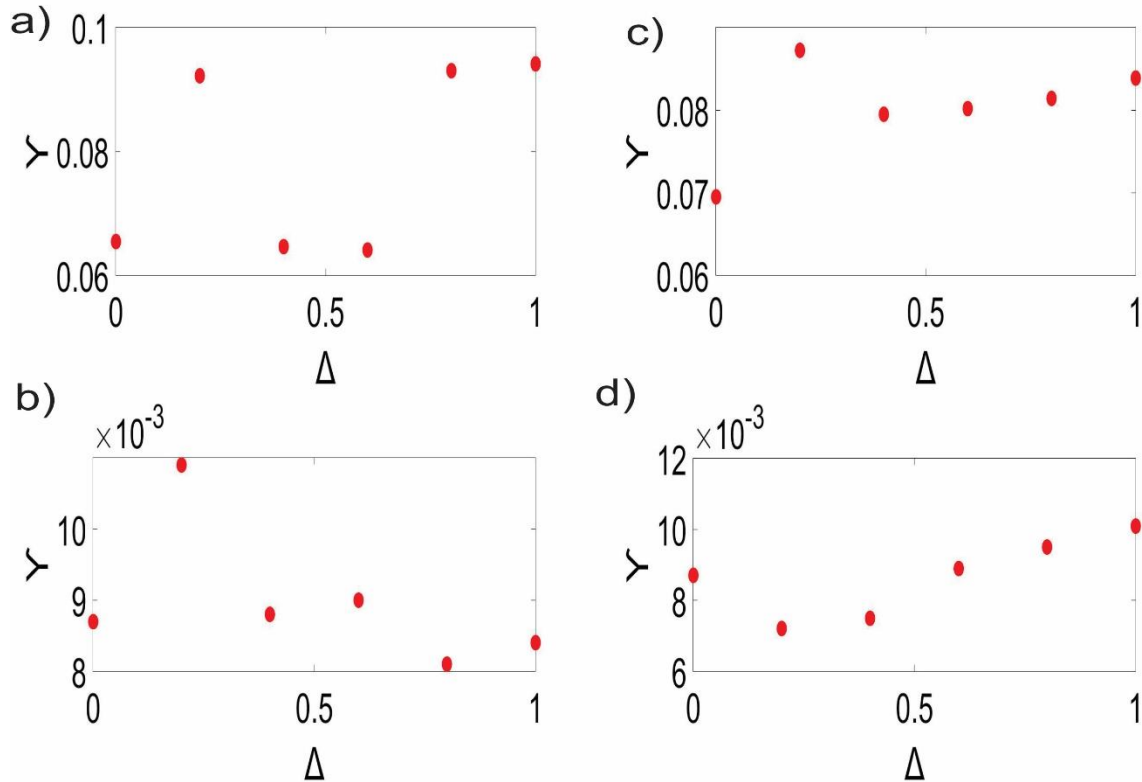


Figura 3.62: Grado de localización en función de Δ cerca de una banda de transmitancia casi perfecta, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) Segunda generación de Cantor y b) Cuarta generación de Cantor, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) Segunda generación de Cantor, e) Cuarta generación de Cantor.

En las figuras 3.63 y 3.64 se presenta la distribución de campo eléctrico cerca de una banda fractal, se puede observar que para la segunda generación cuando $\Delta=0$ y se tiene el primer acomodo de índices de refracción la radiación tiende a localizarse más en el centro de la estructura y conforme el valor de Δ aumenta primero empieza a correrse hacia la izquierda. Cuando Δ toma su valor máximo se vuelve a comportar como se observó en Fibonacci y Thue-Morse que la luz se localiza al final de la estructura. Por otro lado para el segundo acomodo de índices de refracción, cuando $\Delta=0$ se comporta como una onda de Bloch pero con fluctuaciones y conforme Δ crece la radiación tiende a localizarse al final de la estructura. Para la cuarta generación se puede notar para ambos casos de acomodo de índices de refracción que cuando $\Delta=0$ se distribuye de manera periódica la intensidad, conforme Δ aumenta la luz tiende a localizarse en el centro de la estructura y también se sigue comportando un poco como una onda de Bloch similar a la que presentan en la referencia [9 y 11], pero para el primer acomodo de índices de refracción también se localiza

un poco al final de la estructura y cuando $\Delta=1$, en el primer caso se observa localización al final de la estructura mientras que para el segundo caso la intensidad que se observa cuando $\Delta=0.4$ sigue presente cuando $\Delta=1$ pero con menor amplitud y también distribuyéndose al final de la estructura con mayor amplitud, la distribución es un poco más homogénea a partir del segundo cuarto de la estructura.

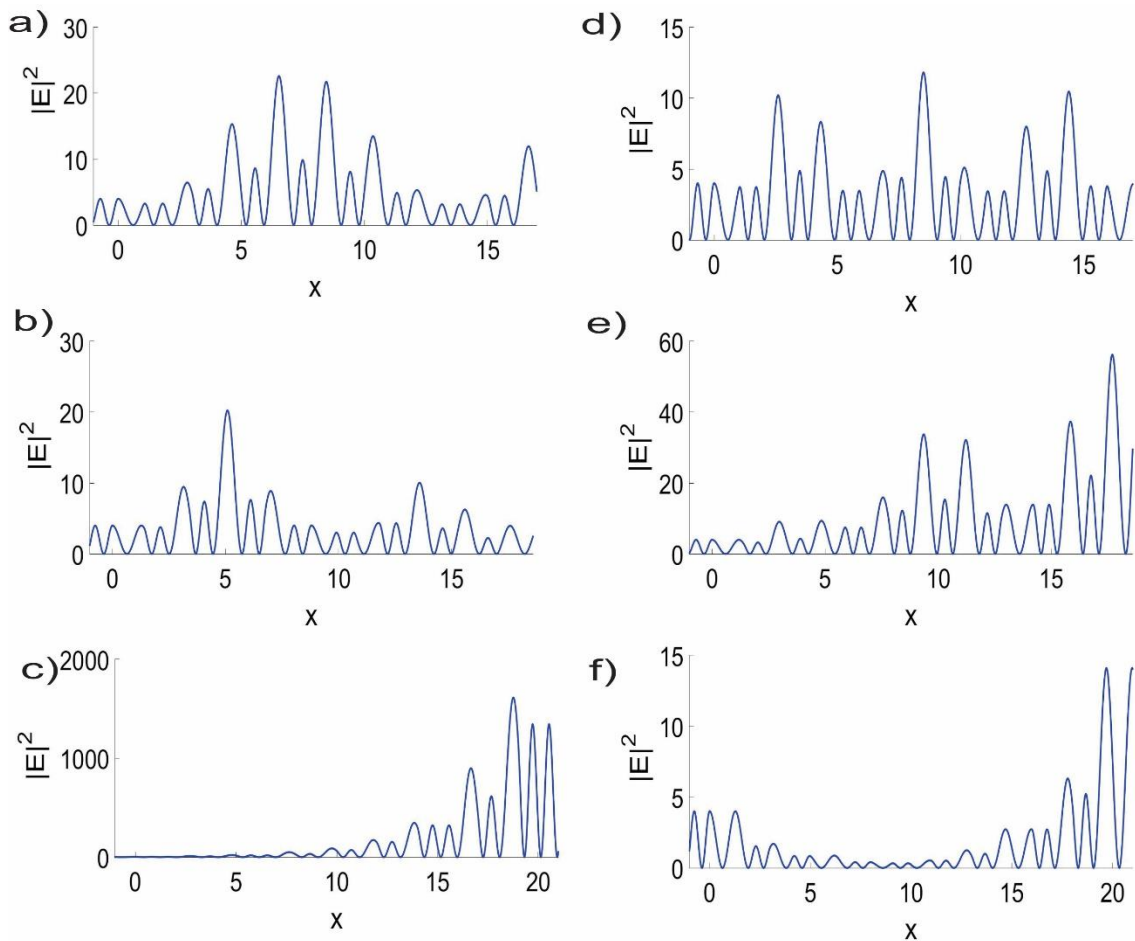


Figura 3.63: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la segunda generación de Cantor cerca de una banda fractal, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.8216$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.7814$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.7330$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.8956$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.8434$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.7978$.

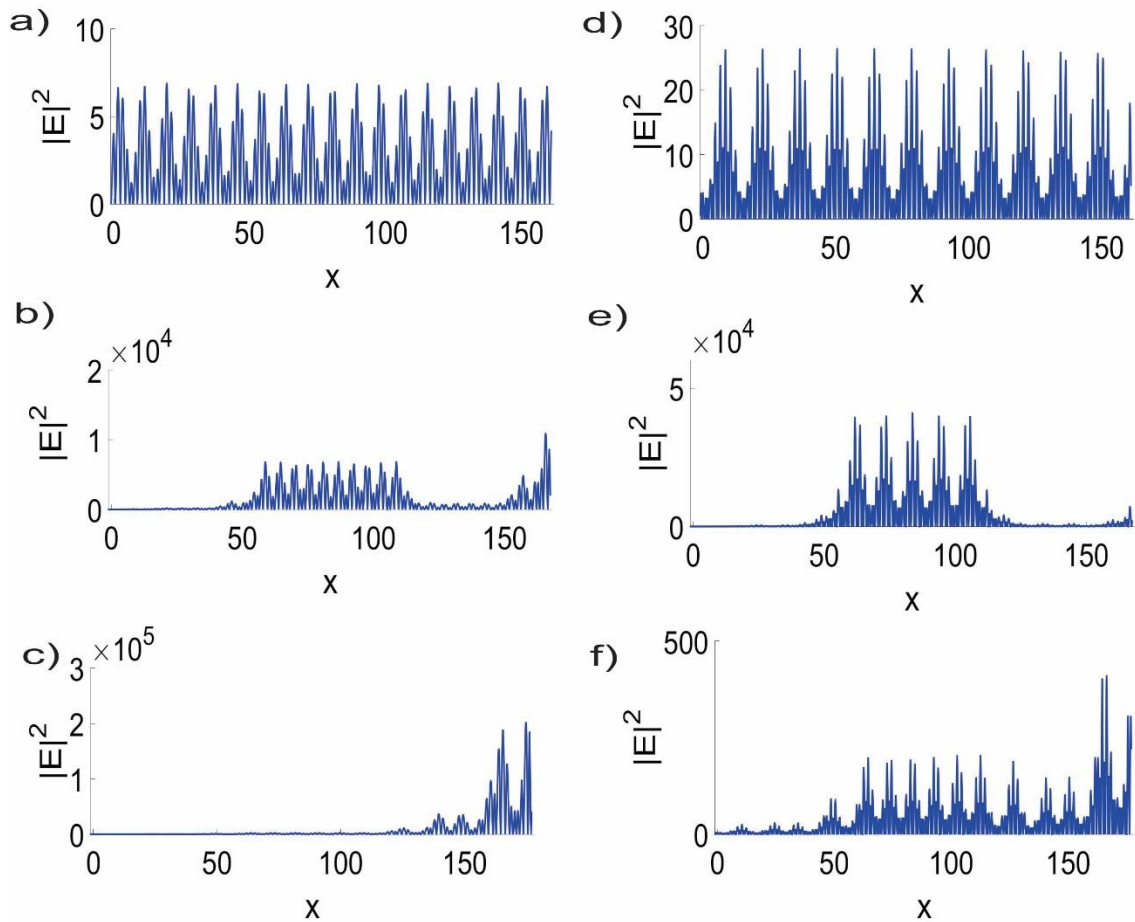


Figura 3.64: Distribución de la intensidad de campo eléctrico dentro de la estructura para la cuarta generación de Cantor cerca de una banda fractal, caso 1 $n_a=2$ y $n_b=3.35$: a) $\Delta=0$ y $W=0.4736$, b) $\Delta=0.4$ y $W=0.5160$ y c) $\Delta=1$ y $W=0.4714$, caso 2 $n_a=3.35$ y $n_b=2$: d) $\Delta=0$ y $W=0.8170$, e) $\Delta=0.4$ y $W=0.8308$ y f) $\Delta=1$ y $W=0.8364$.

En la figura 3.65 se presenta el grado de localización que se obtuvo cerca de una banda fractal. Como se puede observar, para la segunda generación de Cantor y el primer acomodo de índices de refracción el grado de localización se mantiene casi constante hasta llegar al valor de $\Delta=0.6$ donde el grado de localización empieza a crecer pero cuando toma su valor máximo Δ vuelve a decaer. Sin embargo para la cuarta generación de Cantor se podría decir que el grado de localización se mantiene casi constante a excepción del valor $\Delta=1$, donde el grado de localización aumenta un poco, por otro lado para la segunda generación de Cantor y el segundo acomodo de índices de refracción el grado de localización tiene un comportamiento creciente hasta alcanzar un máximo y para la cuarta generación el grado de localización se mantiene constante, excepto cuando $\Delta=0.6$.

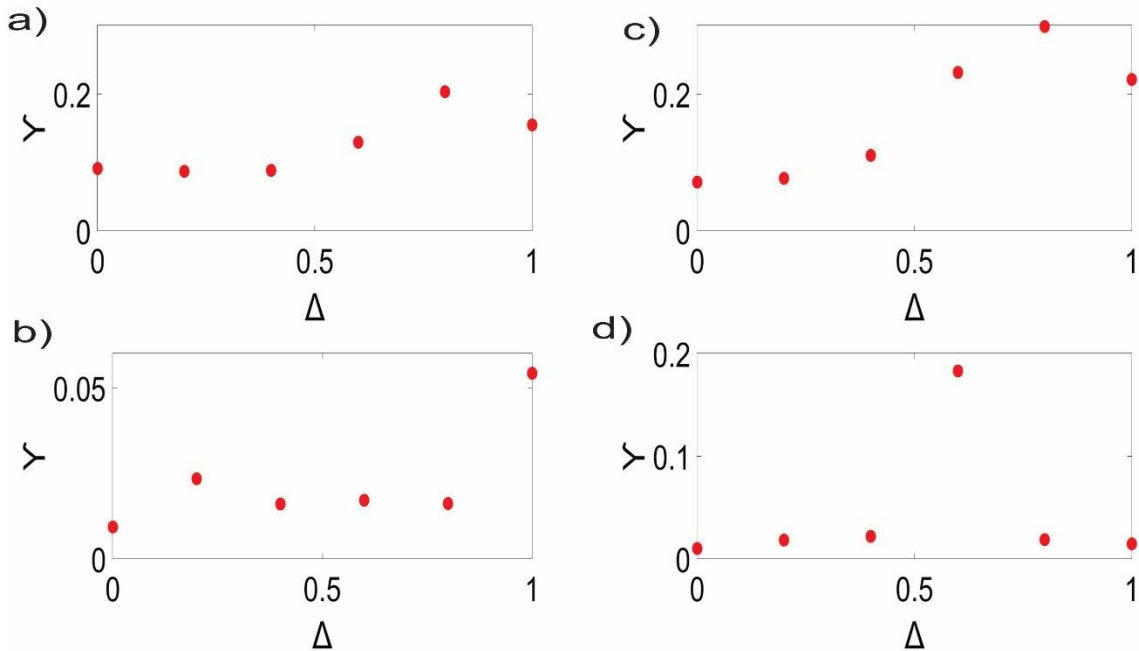


Figura 3.65: Grado de localización en función de Δ cerca de una banda fractal, caso 1 $n_o=2$ y $n_b=3.35$: a) Segunda generación de Cantor y b) Cuarta generación de Cantor, caso 2 $n_o=3.35$ y $n_b=2$: d) Segunda generación de Cantor, e) Cuarta generación de Cantor.

3.5 ¿Qué sistema presenta mayor localización de la luz?

Por último se presentará una comparativa del grado de localización de cada uno de los tres sistemas, con el fin de tratar de determinar si alguno de los sistemas presenta mayor localización que los demás, tomando en cuenta que los tres sistemas parten de un sistema periódico y la única diferencia son las posiciones de las capas moduladas siguiendo las secuencias deterministas aperiódicas correspondientes. Para este análisis se tomarán en cuenta los valores mínimos y máximos que puede tomar el grado de localización para cada sistema, recordando que el mínimo es el inverso del número total de capas del sistema ($\gamma_{\min}=1/N$) y el valor máximo siempre será $\gamma_{\max}=1$. El valor mínimo significa que la luz se encuentra localizada en una sola capa del sistema y el valor máximo quiere decir que la onda está distribuida de manera homogénea sobre toda la estructura.

Empezaremos con el sistema de Fibonacci, los resultados se mostrarán en tres diferentes tablas, una para cada uno de los valores de γ encontrados en las tres diferentes bandas analizadas anteriormente, en cada tabla se presentarán las tres generaciones de Fibonacci y los dos diferentes acomodos de índices de refracción para cada valor de Δ .

En la tabla 3.1 se muestran los resultados para el grado de localización cerca de una banda tradicional, en la tabla 3.2 cerca de una banda de transmitancia casi perfecta y en la tabla 3.3 para una banda fractal.

De la tabla 3.1 cerca de una banda tradicional, se puede notar que para el primer caso de acomodo de índices de refracción se tiene una tendencia decreciente en el grado de localización para las tres generaciones además de que los valores de Υ son muy cercanos entre una generación y otra, pero entre menor sea la generación mayor grado de localización tendrá, aunque se debe tener en cuenta que para la generación 2 se tienen 6 capas mientras que para la generación 8 se tienen 110 capas, por otro lado, los resultados obtenidos indican que para generaciones mayores el grado de localización está más alejado del mínimo correspondiente que para generaciones menores, entonces se podría pensar que realmente los sistemas más localizados son los de generaciones mayores ya que el número de capas donde se localiza la luz es menor en una generación mayor, tomando en cuenta el tamaño total del sistema.

Tabla 3.1: Valores del grado de localización en función de Δ dentro de una banda tradicional, para cada una de las generaciones de Fibonacci y para ambos casos de acomodos de índices de refracción. Se presentan además los valores mínimos y máximos que puede tomar Υ .

	Caso 1: $n_a=2$ y $n_b=3.35$			Caso 2: $n_a=3.35$ y $n_b=2$		
Δ	Generación 2	Generación 4	Generación 8	Generación 2	Generación 4	Generación 8
0	0.2476	0.2218	0.2217	0.2131	0.2461	0.2634
0.2	0.2492	0.2166	0.2135	0.2228	0.2569	0.3017
0.4	0.2462	0.2125	0.2109	0.2493	0.1955	0.3317
0.6	0.2410	0.2024	0.2030	0.2841	0.1723	0.3510
0.8	0.2331	0.1841	0.1898	0.2473	0.1440	0.3620
1	0.2243	0.1645	0.1725	0.2110	0.3254	0.3456
Υ_{\min}	0.166	0.0625	0.009	0.166	0.0625	0.009
Υ_{\max}	1	1	1	1	1	1

Para el segundo caso de acomodo de índices de refracción, no se observa una misma tendencia para las 3 generaciones, pero para la última generación se obtiene que el sistema es mucho más localizado comparado con las generaciones anteriores y también es más localizado que las tres generaciones del primer caso de acomodo de índices de refracción.

Tabla 3.2: Valores del grado de localización en función de Δ dentro de una banda de transmitancia casi perfecta, para cada una de las generaciones de Fibonacci y para ambos casos de acomodos de índices de refracción. Se presentan además los valores mínimos y máximos que puede tomar Υ .

Δ	Caso 1: $n_a=2$ y $n_b=3.35$			Caso 2: $n_a=3.35$ y $n_b=2$		
	Generación 2	Generación 4	Generación 8	Generación 2	Generación 4	Generación 8
0	0.1886	0.0714	0.0124	0.2184	0.0765	0.0120
0.2	0.2041	0.1113	0.0127	0.2483	0.1168	0.0159
0.4	0.2146	0.0742	0.0159	0.2639	0.1093	0.0119
0.6	0.1901	0.0828	0.0137	0.2558	0.0967	0.0115
0.8	0.1934	0.0799	0.0119	0.2392	0.0889	0.0132
1	0.2017	0.0764	0.0127	0.265	0.1055	0.0139
Υ_{\min}	0.166	0.0625	0.009	0.166	0.0625	0.009
Υ_{\max}	1	1	1	1	1	1

De acuerdo a la tabla 3.2, cerca de una banda de transmitancia casi perfecta, se puede observar que el grado de localización no se encuentra muy alejado del mínimo correspondiente a cada generación, esto era de esperar ya que al tratarse de esta banda la luz no queda atrapada dentro de la estructura, es decir, la estructura es transparente para la radiación electromagnética incidente. Además, aunque en ningún caso de acomodo de índices de refracción se presente una tendencia específica, ya sea creciente o decreciente, sí se puede observar que tanto para la segunda como cuarta generación se obtuvieron grados de localización mayores cuando se tiene el segundo acomodo de índices de

refracción, para todos los valores de Δ , mientras que para la octava generación no es predominante el segundo acomodo de índices de refracción.

Tabla 3.3: Valores del grado de localización en función de Δ dentro de una banda fractal, para cada una de las generaciones de Fibonacci y para ambos casos de acomodos de índices de refracción. Se presentan además los valores mínimos y máximos que puede tomar Υ .

	Caso 1: $n_a=2$ y $n_b=3.35$			Caso 2: $n_a=3.35$ y $n_b=2$		
Δ	Generación 2	Generación 4	Generación 8	Generación 2	Generación 4	Generación 8
0	0.1811	0.0792	0.0107	0.2199	0.0755	0.0117
0.2	0.1813	0.0824	0.0659	0.2089	0.0869	0.0147
0.4	0.2230	0.1528	0.1341	0.2014	0.1390	0.0336
0.6	0.2639	0.2038	0.1793	0.2077	0.1758	0.0687
0.8	0.2971	0.2357	0.2210	0.2661	0.1375	0.04
1	0.3245	0.2688	0.2514	0.2401	0.3018	0.1101
Υ_{\min}	0.166	0.0625	0.009	0.166	0.0625	0.009
Υ_{\max}	1	1	1	1	1	1

De la tabla 3.3 cerca de una banda fractal, se puede notar que para el primer acomodo de índices de refracción las tres generaciones presentan una tendencia creciente conforme aumenta el valor de Δ , sobre todo para la segunda generación, es el sistema más localizado comparado con los otros, además de que cuando $\Delta=0$ el valor de Υ es muy cercano al mínimo correspondiente, cuando $\Delta=1$ tiende a localizarse demasiado la luz; por otro lado el segundo acomodo de índices de refracción para la segunda generación no presenta algún comportamiento específico pero para la cuarta generación es creciente el grado de localización conforme crece Δ y para la octava generación el grado de localización no se aleja demasiado del valor mínimo pero si presenta un aumento de localización conforme aumenta Δ .

Para el sistema de Thue-Morse se presentará de la misma forma que para Fibonacci, en la tabla 3.4 se presentan los valores de Υ cerca de una banda tradicional, en la tabla 3.5 cerca de una banda de transmitancia perfecta y en la tabla 3.6 en una banda fractal.

Tabla 3.4: Valores del grado de localización en función de Δ dentro de una banda tradicional, para cada una de las generaciones de Thue-Morse y para ambos casos de acomodados de índices de refracción. Se presentan además los valores mínimos y máximos que puede tomar Υ .

	Caso 1: $n_a=2$ y $n_b=3.35$			Caso 2: $n_a=3.35$ y $n_b=2$		
Δ	Generación 2	Generación 3	Generación 6	Generación 2	Generación 3	Generación 6
0	0.2285	0.2218	0.2219	0.1754	0.2450	0.2630
0.2	0.2254	0.2142	0.2169	0.1781	0.2263	0.2950
0.4	0.2178	0.2002	0.2118	0.2504	0.1918	0.3333
0.6	0.2036	0.1836	0.2001	0.2127	0.1290	0.3577
0.8	0.1864	0.1649	0.1771	0.1978	0.1424	0.3604
1	0.1695	0.1450	0.1474	0.2676	0.1278	0.3469
Υ_{\min}	0.125	0.0625	0.007	0.166	0.0625	0.007
Υ_{\max}	1	1	1	1	1	1

El grado de localización cerca de una banda tradicional para el primer caso de acomodo de índices de refracción muestra una tendencia decreciente conforme aumenta el valor de Δ , también se observa que los valores del grado de localización son muy cercanos entre cada una de las generaciones, pero nos hace pensar lo mismo que con Fibonacci, dado que una generación mayor presente un grado de localización muy cercano al de una generación mayor es un indicador de que el sistema más grande es más localizado. Por otro lado para el segundo acomodo de índices de refracción la tercera generación tiene una tendencia decreciente mientras que la sexta generación presenta un grado de localización creciente, además de que para este caso, la sexta generación si presente valores mayores del grado de localización que la generación más pequeña, igual que en Fibonacci, además de que en

general, en una banda tradicional es mayor el grado de localización cuando se tiene el segundo acomodo de índices de refracción en comparación con el primer caso.

Para el grado de localización cerca de una banda de transmitancia casi perfecta se obtuvo el comportamiento esperado, los valores de Υ son muy cercanos al mínimo correspondiente para cada generación, sin embargo el valor de Δ sí afecta al grado de localización del sistema.

Tabla 3.5: Valores del grado de localización en función de Δ dentro de una banda de transmitancia casi perfecta, para cada una de las generaciones de Thue-Morse y para ambos casos de acomodos de índices de refracción. Se presentan además los valores mínimos y máximos que puede tomar Υ .

	Caso 1: $n_a=2$ y $n_b=3.35$			Caso 2: $n_a=3.35$ y $n_b=2$		
Δ	Generación 2	Generación 3	Generación 6	Generación 2	Generación 3	Generación 6
0	0.1835	0.0714	0.0113	0.1903	0.0766	0.0096
0.2	0.1470	0.0737	0.0103	0.2289	0.0751	0.0110
0.4	0.1622	0.0773	0.0137	0.1341	0.0753	0.0118
0.6	0.1550	0.0982	0.0170	0.1821	0.1038	0.0127
0.8	0.1414	0.0707	0.0098	0.2141	0.1461	0.0140
1	0.1508	0.0853	0.0137	0.1961	0.0952	0.0110
Υ_{\min}	0.125	0.0625	0.007	0.125	0.0625	0.007
Υ_{\max}	1	1	1	1	1	1

Cerca de una banda fractal el comportamiento que presenta el grado de localización de acuerdo a la tabla 3.6, si se tiene el primer acomodo de índices de refracción aumenta el valor de Υ conforme aumenta Δ y el sistema más localizado es el de la segunda generación, mientras que para el segundo caso tanto para la segunda como sexta generación el grado de localización es creciente, para la cuarta generación presenta dos comportamientos, primero empieza a decaer el grado de localización pero llega a un mínimo y se vuelve

creciente, además de que la segunda generación es más localizada que el resto mientras que la tercera generación podría parecer que se comporta como una distribución casi homogénea en toda la estructura ya que el valor de Υ siempre es muy cercano al mínimo correspondiente.

Tabla 3.6: Valores del grado de localización en función de Δ dentro de una banda fractal, para cada una de las generaciones de Thue-Morse y para ambos casos de acomodos de índices de refracción. Se presentan además los valores mínimos y máximos que puede tomar Υ .

Δ	Caso 1: $n_a=2$ y $n_b=3.35$			Caso 2: $n_a=3.35$ y $n_b=2$		
	Generación 2	Generación 3	Generación 6	Generación 2	Generación 3	Generación 6
0	0.1605	0.0935	0.0132	0.1547	0.0953	0.0108
0.2	0.1539	0.0834	0.0522	0.1629	0.0928	0.0124
0.4	0.1803	0.1105	0.1053	0.1602	0.0913	0.0171
0.6	0.2376	0.1451	0.1481	0.1569	0.0896	0.0276
0.8	0.2772	0.1714	0.1432	0.2062	0.0936	0.0428
1	0.3152	0.1852	0.1679	0.2077	0.0957	0.0522
Υ_{\min}	0.125	0.0625	0.007	0.125	0.0625	0.007
Υ_{\max}	1	1	1	1	1	1

Por ultimo para los sistemas de Cantor se presentan en las tablas 3.7, 3.8 y 3.9 los resultados de Υ cerca de una banda tradicional, de transmitancia casi perfecta y de una banda fractal respectivamente.

Tabla 3.7: Valores del grado de localización en función de Δ dentro de una banda tradicional, para cada una de las generaciones de Cantor y para ambos casos de acomodados de índices de refracción. Se presentan además los valores mínimos y máximos que puede tomar Υ .

Δ	Caso 1: $n_a=2$ y $n_b=3.35$		Caso 2: $n_a=3.35$ y $n_b=2$	
	Generación 2	Generación 4	Generación 2	Generación 4
0	0.2434	0.2219	0.2572	0.2689
0.2	0.3070	0.2136	0.3098	0.3193
0.4	0.3314	0.1919	0.3404	0.3627
0.6	0.3159	0.1462	0.4393	0.3910
0.8	0.2177	0.0714	0.4637	0.4004
1	0.4029	0.0825	0.4693	0.3222
Υ_{\min}	0.055	0.006	0.055	0.006
Υ_{\max}	1	1	1	1

Cerca de una banda tradicional, se observa que para el primer caso de acomodados de índices de refracción ocurre un comportamiento diferente comparándolo con Fibonacci y Thue-Morse, para una generación menor el grado de localización es creciente mientras que para una generación mayor éste tiende a decaer demasiado, por otro lado para el segundo caso de acomodados de índices de refracción se observa que tanto para la segunda como cuarta generación el grado de localización tiende a aumentar conforme Δ crece pero la segunda generación sigue presentando mayor grado de localización.

Para el grado de localización cerca de una banda de transmitancia casi perfecta se obtiene que el valor de Υ es muy cercano al mínimo correspondiente, lo cual era de esperar al igual que ocurrió en Fibonacci y Thue-Morse, ya que al ser una banda de transmitancia casi perfecta lo ideal es que la radiación electromagnética vea al sistema como transparente y por consiguiente se comporte como una onda de Bloch dentro de la estructura.

Tabla 8: Valores del grado de localización en función de Δ dentro de una banda de transmitancia casi perfecta, para cada una de las generaciones de Cantor y para ambos casos de acomodados de índices de refracción. Se presentan además los valores mínimos y máximos que puede tomar Υ .

Δ	Caso 1: $n_a=2$ y $n_b=3.35$		Caso 2: $n_a=3.35$ y $n_b=2$	
	Generación 2	Generación 4	Generación 2	Generación 4
0	0.0654	0.0087	0.0695	0.0087
0.2	0.0922	0.0109	0.0872	0.0072
0.4	0.0646	0.0088	0.0795	0.0075
0.6	0.0641	0.0090	0.0802	0.0089
0.8	0.0930	0.0081	0.0814	0.0095
1	0.0941	0.0084	0.0839	0.0101
Υ_{\min}	0.055	0.006	0.055	0.006
Υ_{\max}	1	1	1	1

Cerca de una banda fractal se obtuvo que para generaciones menores de Cantor el grado de localización es mayor que para generaciones más grandes, y únicamente para el segundo acomodo de índices de refracción la segunda generación se obtuvo que el grado de localización es creciente conforme aumenta el valor de Δ , para las demás generaciones y el otro caso de acomodo de índices de refracción no se tiene un comportamiento específico, pero si se puede observar que el valor de Δ influye mucho en el grado de localización.

Tabla 3.9: Valores del grado de localización en función de Δ dentro de una banda fractal, para cada una de las generaciones de Cantor y para ambos casos de acomodados de índices de refracción. Se presentan además los valores mínimos y máximos que puede tomar Υ .

Δ	Caso 1: $n_a=2$ y $n_b=3.35$		Caso 2: $n_a=3.35$ y $n_b=2$	
	Generación 2	Generación 4	Generación 2	Generación 4
0	0.0906	0.0093	0.0712	0.0100

0.2	0.0866	0.0233	0.0763	0.0182
0.4	0.0883	0.0159	0.1097	0.0216
0.6	0.1294	0.0170	0.2309	0.1830
0.8	0.2029	0.0161	0.2986	0.0187
1	0.1546	0.0542	0.2210	0.0146
Υ_{\min}	0.055	0.006	0.055	0.006
Υ_{\max}	1	1	1	1

En general se obtuvo mayor grado de localización dentro de bandas tradicionales, en la mayoría de los casos se pudo observar que para el segundo acomodo de índices de refracción el valor de Υ era mayor. En promedio el grado de localización dentro de bandas tradicionales resultó ser mayor en los sistemas modulados de Cantor, en las bandas de transmitancia casi perfecta se encontró que el sistema que presentaba mayor localización fue el de Thue-Morse y cerca de las bandas fractales el sistema modulado de Fibonacci presentó ligeramente mayor grado de localización de la luz que los sistemas de Thue-Morse y Cantor. Como se puede observar ningún sistema fue predominante dentro de las tres bandas analizadas, cada sistema en promedio fue más localizado únicamente en una de las tres bandas, esto debido a que presentaron muchas fluctuaciones sobre todo para generaciones menores.

Conclusiones

Los estudios tanto teóricos como experimentales que se han hecho hasta ahora en sistemas unidimensionales deterministas aperiódicos, consideran las capas A y B con anchos e índices de refracción fijos pero ordenadas de acuerdo a las reglas de recurrencia de Fibonacci Thue-Morse o Cantor y se concentran en aspectos específicos de la propagación de la radiación electromagnética en ellos como la transmitancia o la localización de la luz para algunos casos particulares como los que se citan en la bibliografía de este trabajo. En otros casos, los sistemas que se estudian son como los señalados el trabajo de Rihab Asmin et. al. [27] que son híbridos ya que se forman con bloques de multicapas (periódicos)(Thue-Morse)(periódicos) o (Thue-Morse)(periódicos) (Thue-Morse) con el fin de aumentar en ellos la localización de la luz en función del tamaño del sistema que se varía cambiando el número de capas de los diferentes bloques y también en este caso como en los otros citados en la literatura, las capas básicas A y B que los forman tiene anchos e índices de refracción o caminos ópticos fijos

En este trabajo se presenta por primera vez, un análisis numéricos del diagrama de bandas, la relación de dispersión, la transmitancia para sistemas finitos, la intensidad de campo eléctrico y el índice de localización en función del parámetro Δ de tres tipos de cristales fotónicos unidimensionales que se forman repitiendo de manera periódica una bicapa AB de dieléctricos homogéneos e isotrópicos sin absorción ni dispersión de luz con permeabilidad magnética $\mu = 1$; índices de refracción n_A y n_B fijos; el ancho $d_A = d_{B0}$ y se introduce una modulación del ancho de la capa B dado por $d_B = d_{B0}(1 + \Delta * S_j)$, siendo S_j una de las secuencias binarias de Fibonacci, Thue-Morse o Cantor, representando Δ un incremento en porcentaje del ancho de la capa B como se explica en el capítulo 2.

En el caso de los sistemas presentados en este trabajo, se obtiene una respuesta más compleja ya que al mismo tiempo que se obtiene un diagrama de bandas y una relación de dispersión para cada multicapa propuesta, con las propiedades de autosimilaridad propias de cada secuencia binaria aperiódica, que se pueden comparar en cada caso con el sistema

periódico que se obtiene con $\Delta = 0$, también, al modularse el ancho de la capa B se observa un corrimiento en energías debido a que aumenta de manera aperiódica el ancho de la capa B, esto es, si la capa que aumenta su ancho tiene un índice de refracción mayor, las bandas se bajan en energía y si tienen un índice de refracción menor, suben en energía. Se calcula la transmitancia en función de la frecuencia para sistemas finitos en función del parámetro Δ y varias generaciones de la secuencia S_j y se observa que al mismo tiempo que aparecen más máximos y mínimos distribuidos de manera autosimilar al aumentar Δ , estos se corren en energía de acuerdo a la tendencia observada en los diagramas de bandas y la relación de dispersión. Se calcula la intensidad de campo eléctrico para cada uno de los tres sistemas propuestos variando el parámetro Δ y en energías en donde la transmitancia es cero, casi uno y en energías correspondientes a resonancias de transmitancia que ocurren debido a la aparición de la fractalidad del espectro de transmitancia. Se observa que en el caso de energías correspondientes a transmisión cero, la intensidad del campo tiende a acumularse al final de la estructura aunque se acumula menos si se invierten los valores de los índices de refracción de la estructura. En energías de transmitancia casi uno, la intensidad de campo eléctrico es como la correspondiente a una onda que se propaga. En el caso de energías que corresponden a resonancias debidas a la fractalidad de las estructuras, la intensidad de campo eléctrico se distribuye en toda la estructura y es muy sensible al intercambio de índices de refracción. Para analizar la localización de la luz en estos sistemas se tiene en cuenta que los estados que aparecen no son ni ondas de Bloch que se propagan ya que estas aparecen en sistemas periódicos, ni son localizadas como en sistemas desordenados sino que son estados que se extienden en toda la estructura y son oscilatorios de una manera que refleja la estructura aperiódica de la que se trate por esto es que se consideró analizar la localización de la luz para estos estados con el índice de localización Υ (ecuación 1.8-1) para radiación electromagnética que es similar al IPR (inversión participation ratio) definido para estados electrónicos y que se considera en el estudio de la localización de Anderson y se deduce de una manera similar. El índice de localización nos permite saber si el estado electromagnético está más ($\gamma = 1$) o menos ($\gamma = 1/N$) localizado. En este trabajo se observa un comportamiento más complejo ya que hay una

dependencia de la localización de la radiación electromagnética tanto de la frecuencia como del parámetro Δ pero lo que destaca es el hecho de que para este tipo de estructuras moduladas que no han sido estudiadas antes, la localización de la luz se puede obtener con pocas capas haciendo estas estructuras atractivas para algunas aplicaciones tecnológicas en donde sea un factor importante un número reducido de capas. Se observa también que eligiendo adecuadamente el parámetro Δ , se puede controlar la localización de la luz.

Como continuación del trabajo presentado se propone analizar la localización de la luz con otros métodos [16] o las propiedades de escalabilidad para estos sistemas modulados.

Referencias

- [1] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, R. D. Meade, "Photonic Crystals: Modeling the Flow of light", Princeton University Press, 2th Ed, 2008.
- [2] R. Merlín, K. Bajema, R. Clarke, F. Y. Juang, P. K. Bhattacharya, "Quasiperiodic GaAs-AlAs Heterostructures", Physical Review Letters, 55(17), 1768-1770, 1985.
- [3] L. Dal Negro, C. J. Oton, Z. Gaburro, L. Pavesi, P. Johnson, A. Lagendijk, R. Righini, M. Colocci, D. S. Wiresma, "Light Transport through the Band-Edge States of Fibonacci Quasicrystals", Physical Review Letters, 90(5), 2003.
- [4] M. Kohmoto, "Localization problem and mapping of one-dimensional wave equations in random and quasiperiodic media", Physical Review B, 34, 8, 5043-5047, 1986.
- [5] M. Kohmoto, B. Sutherland, K. Iguchi, "Localization in Optics: Quasiperiodic Media", Physical Review Letters, 58, 23, 2436-2438, 1987.
- [6] X. Huang, Yong Wang and Changde Gong, "Numerical investigation of light-wave localization in optical Fibonacci superlattice with symmetric internal structure", Journal of Physics: Condensed Matter, 11, (39), p.7645, 1999.
- [7] M. S. Vasconcelos, E. L. Albuquerque and M. M. Mariz, "Optical localization in quasi-periodic multilayers", J. of Physics: Condensed Matter, 10, (26), p.5839, 1998.
- [8] W. Gellerman, M. Kohmoto, B. Sutherland and P. C. Taylor, "Localization of light waves in Fibonacci dielectric multilayers", Physical Review Letters, 72, p.633, 1994.
- [9] Nian-hua Liu, "Propagation of light waves in Thue-Morse dielectric multilayers", Physical Review B 55, p.3543, 1997.
- [10] A. V. Lavrinenko, S. V. Zhukovsky, K. S. Sandomirski and S. V. Gaponenko, "Propagation of classical waves in nonperiodic media: Scaling properties of an optical Cantor filter", Physical Review E, 65, p. 036621, 2002.
- [11] X. Jiang, Y. Zhang, S. Feng, K. Huang, Y. Yi and J. D. Joannopoulos, "Photonic band gaps and localization in the Thue-Morse structures", Appl. Phys. Letters, 86, p.201110, 2005.
- [12] M. Yamanaka and M. Kohmoto, "Propagation of Light in Cantor Media", Cornell University Library, 2014.
- [13] H. Lei, J. Chen, G. Nouet, S. Feng, Q. Gong and X. Jiang, "Photonic band gap structures in the Thue-Morse lattice", Physical Review B, 75, p. 205109, 2007.

- [14] E. Maciá, "Exploiting aperiodic designs in nanophotonic devices", Rep. Prog. Phys., 75, p.036502, 2012.
- [15] S. V. Zhukovsky, "Perfect transmission and highly asymmetric light localization in photonic multilayers", Phys. Review A, 81, p. 053808, 2002.
- [16] E. Maciá, "Aperiodic structures in condensed matter", CRC Press, Estados Unidos Americanos, 2009.
- [17] X. I. Saldaña, E. López-Cruz, D. A. Contreras-Solorio, "Self-similar optical transmittance of a deterministic aperiodic multilayer structure", J. Phys.: Condensed Matter, Vol. 21, p.155403, 2009.
- [18] J. O. Estevez, J. Arriaga, A. Mendez-Blas, M. G. Robles-Chairez, D. A. Contreras-Solorio, "Experimental realization of the porous silicon optical multilayers based on the 1s sequence", J. Appl.Phys., Vol. 111, p. 013103, 2012.
- [19] C. Corona, "Propiedades ópticas de un cristal fotónico 1D con modulación de Fibonacci", Tesis, BUAP, 2014.
- [20] N. N. Vorobyov, "Los números de Fibonacci", Editorial Limusa, México, 1963.
- [21] M. Thue, "Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen" (1912), Selected mathematical papers of Axel Thue, Universiteitsforlaget, 1977.
- [22] M. Morse, "Recurrent geodesics on a surface of negative curvature" Trans. Amer. Math. Soc., 22, 84–100, 1921.
- [23] Página web: <http://mathworld.wolfram.com/CantorSet.html>, tipo de acceso gratuito, fecha de último acceso: 02/09/2015.
- [24] P. Yeh, "Optical Waves in Layered Media", Estados Unidos Americanos: John Wiley & Sons, 1988.
- [25] P. Hawrylak, G. Eliasson, J. Quinn, "Critical plasmons of a Fibonacci semiconductor superlattice: Spectrum and optical properties", Phys. Rev. B, Vol. 36, p. 6501-6507, 1987.
- [26] W. T. Pardo, "Caracterización Matemática de las Sucesiones y Heteroestructuras Cuasirregulares", Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas, Universidad de La Habana, Cuba, 2005.
- [27] R. Asmi, N. B. Ali, M. Kanzari, "Enhancement of Light Localization in Hybrid Thue-Morse/Periodic Photonic Crystals", Journal of Materials, Vol. 2016, Hindawi Publishing Corporation, 2016.

Apéndice A: Eventos

Cartel para la participación en: IX International Conference on Surfaces, Materials and Vacuum, titulado "Light localization in aperiodically modulated one-dimensional photonic crystals", organizado por la Sociedad Mexicana de Ciencia y Tecnología de Superficies y Materiales A. C., presentado del 26 al 30 de septiembre de 2016.



Carlos Antonio Corona García⁽¹⁾, Xóchitl Ines Saldaña Saldaña⁽¹⁾, Elias López Cruz⁽¹⁾

⁽¹⁾Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postal J-48, Puebla 72570, Avenida San Claudio y 18 Sur, Edificio 1F, Colonia San Manuel, Código Postal 72570, Puebla, México.

Abstract

In this work we present a numerical analysis of some light localization properties for three types of deterministic aperiodically modulated one-dimensional photonic crystals: Fibonacci, Thue-Morse and Cantor structures. Using the transfer matrix theory [1] and the rational approximation [2], we calculate the optical response and the electric field magnitude as a function of the perpendicular distance to the interfaces in multilayer structures having a periodic index profile formed with bilayer units: a slab A with width and refractive index d_A, n_A ; and a slab B with refractive index n_B and a modulated width given by $d_B = d * (1 + D * Sg)$ where d is the B slab's width, D is a fixed width's increment and Sg represents consecutive generations of a Fibonacci, Thue-Morse or Cantor sequence formed following the Fibonacci substitutional rule: $1 \rightarrow 10, 0 \rightarrow 1$; the Thue-Morse substitutional rule: $1 \rightarrow 10, 0 \rightarrow 01$; and the Cantor substitutional rule: $1 \rightarrow 101, 0 \rightarrow 000$. The new structures we propose can be constructed with the available technologies for the fabrication of multilayers at a nanometric scale (see for example [3]), and can be considered for novel applications where the light localization is important as the design of multifrequency photonic quasicrystal lasers, optical cavities, etc...

What is a photonic crystal?

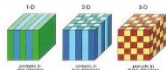


Fig. 1: Examples of photonic crystals [4].

Introduction

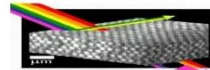


Fig. 2: Schematic of how a photonic crystal change the flow of light.

Since R. Merlín et al. [5], published for the first time in 1985 experimental results of a Fibonacci heterostructure, the scientific and technological interest in the physical properties of other deterministic aperiodic systems such as Thue-Morse Rudin-Shapiro and Cantor has been steadily growing. In all these cases, the one-dimensional structures are constructed with isotropic and homogeneous slabs of fixed parameters ordered according to the recurrence aperiodic rules mentioned before.

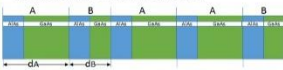


Fig. 3: Schematic arrangement of GaAs and AlAs bilayers deposited following the Fibonacci sequence ABAAB [5].

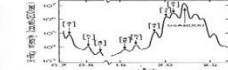


Fig. 4: High-resolution diffraction profile of the Merlín's Fibonacci superlattice [5].

Methodology

Multilayer structure

We present a new form of deterministic aperiodic one-dimensional photonic crystal where the multilayer structure has a periodic index profile formed with bilayer units: a slab A with fixed width and refractive index d_A, n_A ; and a slab B with fixed refractive index n_B and a modulated width given by $d_B = d * (1 + D * Sg)$, here d is the B slab's width, D is a fixed width's increment and Sg represents consecutive generations of a Fibonacci ($1 \rightarrow 10, 0 \rightarrow 1$), Thue-Morse ($1 \rightarrow 10, 0 \rightarrow 01$) or Cantor ($1 \rightarrow 101, 0 \rightarrow 000$) sequence.

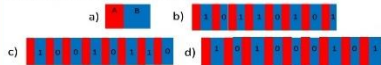


Fig. 5: a) Periodic system, b) Fibonacci modulated system, c) Thue-Morse modulated system and d) Cantor modulated system.

Transfer matrix method

This method allow us to analyze the way the field amplitude change through the finite layered system [1].

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_N \\ B_N \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_N \\ B_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = D_0^{-1} \prod_{j=1}^N Q_j D_j \quad Q_j = D_j P_j D_j^{-1}$$

$$Q_j = \begin{pmatrix} \cos \theta_j & \frac{i \sin \theta_j}{n_j} \\ \frac{i \sin \theta_j}{n_j} & \cos \theta_j \end{pmatrix} \quad Q_0 = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & \frac{i \sin \theta_0}{n_0} \\ \frac{i \sin \theta_0}{n_0} & \cos \theta_0 \end{pmatrix}$$

Fig. 6: A multilayer dielectric medium [1].

Electric field through the layered media

$$E(x) = \begin{cases} B_0 e^{ik_0 x} & x < 0 \\ A_1 e^{-ik_1(x-x_1)} + B_1 e^{ik_1(x-x_1)} & x_{1-1} < x < x_1 \\ A_N e^{-ik_N(x-x_N)} & x_N < x \end{cases}$$

Bloch theorem, band structure and the rational approximation

The numerical analysis is made using the transfermatrix method [1] and the rational approximation [2] which considers the Bloch theorem for periodic systems with a unit cell containing consecutive growing generations of layered structures formed with the aperiodic rules mentioned before. In this way, the larger the generation, the closer we are to the exact aperiodic infinite system. The main equations are:

$$\text{Maxwell wave equation: } \frac{\partial^2}{\partial z^2} E + \left[\frac{\omega^2}{c^2} n^2 - \beta^2 \right] E = 0 \quad \text{where } E_K(x, z) = E_K(x) e^{-i\beta z} e^{-iKx}$$

$$\text{Dispersion relation: } K(\beta, \omega) = \frac{1}{\Lambda} \cos^{-1} \left[\frac{1}{2} (M_{11} + M_{22}) \right] \quad \text{with: } \left| \frac{1}{2} (M_{11} + M_{22}) \right| \leq 1$$

Transmittance

For dielectric media with constant and positive refractive index the transmittance is given by [1]:

$$T = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_0 \cos \theta_0} |t|^2 = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_0 \cos \theta_0} \left| \frac{1}{M_{11}} \right|^2$$

Band structures and Bloch waves

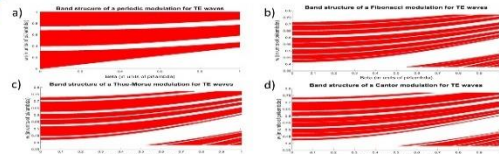


Fig. 7: Band structure for TE waves: a) Periodic modulation, b) Fibonacci modulation for the fifth generation, c) Thue-Morse modulation for the fourth generation and d) Cantor modulation for the third generation.

Results

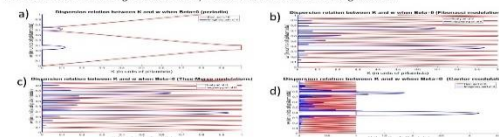


Fig. 8: Bloch wave vector for TE waves: a) Periodic modulation, b) Fibonacci modulation for the fifth generation, c) Thue-Morse modulation for the fourth generation and d) Cantor modulation for the third generation.

Transmittance

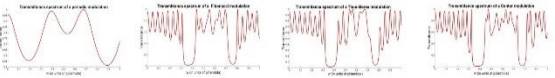


Fig. 9: Transmittance spectrum for TE waves at normal incidence: a) Periodic modulation, b) Fibonacci modulation for the fifth generation, c) Thue-Morse modulation for the fourth generation and d) Cantor modulation for the third generation.

Electric field

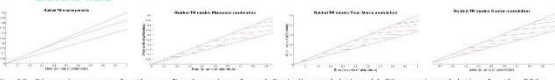


Fig. 10: Dispersion curves for the confined modes of: a) Periodic modulation, b) Fibonacci modulation for the fifth generation, c) Thue-Morse modulation for the fourth generation and d) Cantor modulation for the third generation.

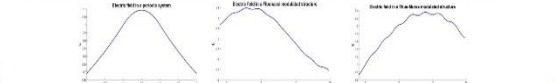


Fig. 10: Electric field through the structure of: a) Periodic modulation, b) Fibonacci modulation for the fifth generation, c) Thue-Morse modulation for the fourth generation.

Conclusions

- We show the optical response of periodic, Fibonacci, Thue-Morse and Cantor modulated systems and the difference between them.
- Self-similar properties can be seen for the aperiodic systems even for low generations
- New evidence of light localization in these systems can be observed in the transmittance spectrum.
- The next step will be the calculation of the $1/T$ coefficient to determine the degree of localization of the electromagnetic radiation in the structure.

Acknowledgements

Authors acknowledge CONACYT and VIEP-BUAP financial support.

References

- [1] P. Yeh, Optical Waves in Layered Media, Wiley, New York, 1988.
- [2] Hawleyak R. G. Eliasson and J. Guim, Phys. Rev. B, Vol. 36, No. 12, p. 6501-6507, 1987.
- [3] Enrique Merlín, Rep. Prog. Phys. Vol. 75, p.036502, 2012.
- [4] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn and K. D. Meade, Photonic Crystals Molding the Flow of Light, Princeton University Press, New Jersey, 2008.
- [5] Merlín, R., Bajema, K., Clarke, R., Juang, K.Y., Bhattacharya, P.K., "Quasiperiodic GaAs/AlAs Heterostructures", Physical Review Letters, 55(17), 1760-1770, 1985.



BUAP

MEMORANDUM

Para: Dr. Eduardo Jonathan Torres Herrera, (Presidente).
 Dra. Lilia Meza Montes.
 Dr. Alfredo Díaz De Anda.
 Dra. Xóchitl Inés Saldaña Saldaña. (Asesora).

De: Dr. Juan Francisco Rivas Silva, Director.

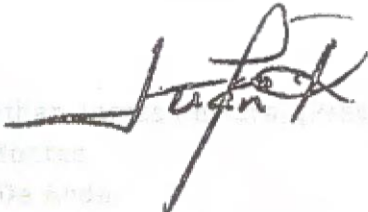
Asunto: **Se cita al Examen de Grado de Maestría en Ciencias (en la especialidad de Ciencia de Materiales) de Carlos Antonio Corona**

Fecha: 27 de Enero, 2017

Me permito informarles que el Comité Académico del IFUAP, los ha designado integrantes del Comité para el EXAMEN DE GRADO de Maestría en Ciencias (en la especialidad de Ciencia de Materiales) de Carlos Antonio Corona García, con su tesis intitulada: *"Localización de la luz en cristales fotónicos unidimensionales modulados aperiódicamente"*, que presentará el día martes 31 de enero de 2017 a las 09:00hrs. en el auditorio del IFUAP.



BUAP



Para: Dr. Eduardo Jonathan Torres Herrera, (Presidente).
 Dra. Lilia Meza Montes.
 Dr. Alfredo Díaz De Anda.
 Dra. Xóchitl Inés Saldaña Saldaña. (Asesora).

De: Dr. Juan Francisco Rivas Silva
DIRECTOR

Asunto: **Se cita al Examen de Grado de Maestría en Ciencias (en la especialidad de Ciencia de Materiales) de Carlos Antonio Corona**

Fecha: 27 de Enero, 2017



Me permito informarles que el Comité Académico del IFUAP, los ha designado integrantes del Comité para el EXAMEN DE GRADO de Maestría en Ciencias (en la especialidad de Ciencia de Materiales) de Carlos Antonio Corona García, con su tesis intitulada: *"Localización de la luz en cristales fotónicos unidimensionales modulados aperiódicamente"*, que presentará el día martes 31 de enero de 2017 a las 09:00hrs. en el auditorio del IFUAP.

Instituto de Física
 "Ing. Luis Rivera
 Terrazas"

Av. San Claudio esq. 18 sur, edif 110 A, B y C.
 Ciudad Universitaria, Col. San Manuel,
 Puebla, Pue. C.P. 72570
 01(222) 2295610, Fax: ext. 5611

/LAEhr