



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Análisis de la teoría de medios equivalentes de Hudson para  
medios fracturados y anisótropos con simetría VTI

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA**

por

Carlos Emmanuel Peral Altamirano

Asesorado por

Dr. Jonás De Dios De Basabe Delgado

Dr. Jorge Velázquez Castro

Puebla Pue.  
28 de mayo de 2021



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Análisis de la teoría de medios equivalentes de Hudson para  
medios fracturados y anisótropos con simetría VTI

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA**

por

Carlos Emmanuel Peral Altamirano

Asesorado por

Dr. Jonás De Dios De Basabe Delgado

Dr. Jorge Velázquez Castro

Puebla, Pue.  
28 de mayo de 2021

**Título:** Análisis de la teoría de medios equivalentes de Hudson para medios fracturados y anisótropos con simetría VTI

**Estudiante:** CARLOS EMMANUEL PERAL ALTAMIRANO

COMITÉ

---

Dra. Beatriz Bonilla  
Capilla  
Presidente

---

Dr. José Jacobo Oliveros  
Oliveros  
Secretario

---

M.C. Julio César González  
Hernández  
Vocal

---

Dr. Andrés Anzo  
Hernández  
Suplente

---

Dr. Jonás De Dios De  
Basabe Delgado  
Asesor

---

Dr. Jorge Velázquez Castro  
Coasesor

# Resumen

Las fracturas son pequeñas discontinuidades muy comunes en el subsuelo. Éstas determinan en gran medida las propiedades mecánicas de las rocas, así como el desplazamiento de fluidos contenidos en ellas. La caracterización de medios fracturados tiene una gran importancia en el desarrollo y producción de yacimientos petroleros, monitoreo de mantos acuíferos y gestión de contaminantes y desechos nucleares, entre otros. Existen dos principales formas de caracterizar un medio fracturado, su uso depende de los datos sísmicos con los que se cuenta. Un enfoque es mediante la Teoría de Medios Equivalentes (TME) que utiliza varias suposiciones que no siempre corresponden con la física real del medio, mientras que la otra aproximación es mediante simulaciones numéricas con rocas digitales fracturadas (incluir directamente las fracturas) donde generalmente se utilizan menos supuestos. En este proyecto se evaluará la efectividad y las limitaciones de la TME de Hudson en medios con anisotropía axisimétrica (VTI) que contienen fracturas verticales con distribución espacial uniforme. Para ello se simularán numéricamente rocas digitales fracturadas, después se construirá su modelo equivalente utilizando la teoría de Hudson y se compararán los resultados. Posteriormente se variarán las características del medio (cantidad de anisotropía y densidad de fracturas) con el fin de determinar las limitaciones de esta TEM. Los resultados muestran que no existe una dependencia entre la precisión de la teoría de Hudson y la cantidad de anisotropía VTI intrínseca (al menos hasta un 15%) del medio.

# Agradecimientos

Al CICESE por permitir el uso de sus instalaciones para el desarrollo de éste trabajo.

Al Dr. Jonás De Dios De Basabe Delgado, que desde mi estancia en el delfín se ha mostrado muy atento, por ayudarme durante todo el proceso de investigación.

Al Dr. Jorge Velázquez Castro por toda su valiosa ayuda en la elaboración de este trabajo y durante sus cursos.

# Dedicatoria

A mi familia por siempre apoyarme en todo.

A Puyo por asesorarme en todo aspecto de la vida.

En general a todos mis amigos que me han acompañado en ésta hermosa aventura: Marlenecita, el líder, El Ian, Pamelona, Garza, Nestorito, Pablito, Builli y Tavito.

# Nomenclatura y Abreviaciones

$\rho$	Densidad volumétrica
$V_s$	Velocidad asociada a la onda S
$V_p$	Velocidad asociada a la onda P
$\sigma$	Tensor de esfuerzos
$\epsilon$	Tensor de deformación
$c$	Tensor de rigidez
$s$	Tensor de conformidad
$e$	Densidad de fracturas
$\nu$	Relación de Poisson
$E$	Módulo de Young
$\mathbf{z}$	Matriz de conformidad de una fractura
$Z_N$	Constante de conformidad normal de la fractura
$Z_T$	Constante de conformidad tangencial de la fractura
$\lambda_s$	Longitud de onda sísmica
$l$	Longitud de fractura
$h$	Separación entre fracturas
$\theta$	Apertura de fractura
<b>VTI</b>	Siglas en inglés para isotropía transversa vertical
<b>HTI</b>	Siglas en inglés para isotropía transversa horizontal
<b>NIA</b>	Siglas en inglés para aproximación de no interacción
<b>LSM</b>	Siglas en inglés para condiciones de frontera del tipo desplazamiento discontinuo
<b>DGM</b>	Siglas en inglés para método de Galerkin discontinuo
<b>TME</b>	Teorías de medios equivalentes
<b>RDF</b>	Rocas digitales fracturadas
<b>ME</b>	Medio equivalente

# Índice general

Resumen	IV
Agradecimientos	V
Dedicatoria	VI
Nomenclatura y Abreviaciones	VII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Resumen . . . . .	1
1.2. Relevancia de la investigación . . . . .	1
1.3. Antecedentes de la investigación . . . . .	2
1.4. Hipótesis . . . . .	3
1.5. Objetivo general . . . . .	3
1.6. Objetivos específicos . . . . .	3
<b>2. Propagación de Ondas</b>	<b>4</b>
2.1. Resumen . . . . .	4
2.2. Ondas sísmicas en medios isótropos . . . . .	4
2.2.1. Tensor de esfuerzos . . . . .	4
2.2.2. Tensor de deformación . . . . .	5
2.2.3. Tensor de Rigidez y ley de Hooke . . . . .	6
2.2.4. Ondas P y ondas S . . . . .	7
2.3. Anisotropía . . . . .	8
2.3.1. Tensor de rigidez . . . . .	8
2.3.2. Medios transversalmente isótropo con un eje de simetría vertical (VTI) . . . . .	9
2.3.3. Medios transversalmente isótropos con un eje de simetría horizontal (HTI) . . . . .	10
2.3.4. Simetría ortorrómbica . . . . .	11
2.3.5. Ondas qP y qS . . . . .	12
2.3.6. Anisotropía en la sismología . . . . .	12
<b>3. Teoría de Hudson</b>	<b>14</b>
3.1. Resumen . . . . .	14
3.2. Teorías de medios equivalentes . . . . .	14
3.3. Teorías populares bajo NIA . . . . .	15
3.4. Teoría de Hudson para materiales isótropos fracturados . . . . .	16
3.4.1. Condiciones específicas de las fracturas . . . . .	17
3.4.2. Múltiples conjuntos de fracturas . . . . .	18
3.4.3. Teoría de Hudson para materiales anisótropos fracturados . . . . .	18

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	IX
<b>4. Simulaciones numéricas en medios fracturados</b>	<b>20</b>
4.1. Resumen . . . . .	20
4.2. Fracturas en las simulaciones . . . . .	20
4.3. Condición de desplazamiento discontinuo (LSM) . . . . .	21
4.4. Método de Galerkin discontinuo (DGM) . . . . .	22
4.4.1. Formulación débil . . . . .	23
<b>5. Diseño Experimental</b>	<b>25</b>
5.1. Diagrama de flujo del trabajo . . . . .	25
5.2. Características de los modelos simulados . . . . .	28
<b>6. Resultados y discusión</b>	<b>30</b>
6.1. Resultados para densidad de fracturas del 0 . . . . .	30
6.2. Resultados para $e = 0.01$ . . . . .	30
6.3. Resultados para densidad de fracturas del 0.05 . . . . .	31
6.4. Resultados para densidad de fracturas del 0.1 . . . . .	32
6.5. Discusiones . . . . .	32
<b>7. Conclusiones</b>	<b>42</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>43</b>

# Índice de tablas

5.1. Parámetros de las simulaciones para todos los medios simulados. . . . .	25
5.2. Parámetros generales para todos los medios simulados. . . . .	27
5.3. Parámetros generales para el medio isótropo de partida. . . . .	27
5.4. Modelos de rocas digitales fracturadas a simular. . . . .	29
6.1. Distancias obtenidas para $e = 0.0$ para medios con anisotropía VTI del 0, 5, 10 y 15%. . . . .	30
6.2. Distancias obtenidas para $e = 0.01$ para medios con anisotropía VTI del 0, 5, 10 y 15%. . . . .	31
6.3. Distancias obtenidas para $e = 0.05$ para medios con anisotropía VTI del 0, 5, 10 y 15%. . . . .	31
6.4. Distancias obtenidas para $e = 0.1$ para medios con anisotropía VTI del 0, 5, 10 y 15%. . . . .	32

# Índice de figuras

2.1. Esfuerzos en un elemento de volumen. . . . .	4
2.2. Deformaciones infinitesimales. . . . .	6
2.3. Etapas y relación entre el esfuerzo y la deformación de una roca. . . . .	7
2.4. Medio con simetría VTI. . . . .	9
2.5. Medio con simetría HTI. . . . .	10
2.6. Medio con simetría ortorrómbica. . . . .	11
4.1. Superficie perfectamente acoplada. . . . .	21
4.2. Superficie imperfectamente acoplada. . . . .	21
5.1. Flujo de trabajo. . . . .	26
6.1. Desplazamiento total para cuatro anisotropías sin fracturas . . . . .	34
6.2. Fracturas en las rocas digitales para $e = 0.01, 0.05, 0.1$ . . . . .	35
6.3. Campo de desplazamientos de RDG y ME para densidad de fracturas $e = 0.01$ para VTi de 0% y 5% . . . . .	36
6.4. Campo de desplazamientos de RDG y ME para densidad de fracturas $e = 0.01$ para VTi de 10% y 15% . . . . .	37
6.5. Campo de desplazamientos de RDG y ME para densidad de fracturas $e = 0.05$ para VTi de 0% y 5% . . . . .	38
6.6. Campo de desplazamientos de RDG y ME para densidad de fracturas $e = 0.05$ para VTi de 10% y 15% . . . . .	39
6.7. Campo de desplazamientos de RDG y ME para densidad de fracturas $e = 0.1$ para VTi de 0% y 5% . . . . .	40
6.8. Campo de desplazamientos de RDG y ME para densidad de fracturas $e = 0.1$ para VTi de 10% y 15% . . . . .	41

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Resumen

En este capítulo se explica la importancia del estudio y caracterización de los medios fracturados, así como su relación con la producción de petróleo y muchas otras actividades de interés económico y ecológico. La presencia de anisotropía azimutal en la velocidad de las ondas sísmicas proporciona una forma de caracterizar medios fracturados de interés mediante las múltiples teorías de medios equivalentes. La teoría de medios equivalentes de Hudson, estudiada en este trabajo de tesis, es ampliamente utilizada por su relativa simplicidad y precisión pero su aplicabilidad se ve limitada debido a las suposiciones en su formulación. Por otra parte la inclusión de las fracturas bajo esquemas numéricos en los modelos, requiere de pocas suposiciones y es por ello que este método se convierte en una herramienta útil para validar los resultados obtenidos mediante las teorías de medios equivalentes, en particular la teoría de Hudson.

### 1.2. Relevancia de la investigación

Se calcula que para el año 2035 la demanda mundial de petróleo crecerá hasta alcanzar los 140 millones de barriles diarios a pesar de que los principales 800 campos que suministran la producción actual hayan pasado su máximo (Ikelle & Amundsen, 2018). Algunas estimaciones señalan que los yacimientos fracturados contienen un tercio de todas las reservas mundiales de petróleo (Tsvankin et al., 2010). Las fracturas son muy comunes en la corteza terrestre y definen en gran medida las propiedades mecánicas y de transporte del medio (Liu et al., 1995), es por ello que la detección y caracterización de distribuciones de fracturas son muy importantes en predicción de terremotos (Crampin, 1987; Crampin & Zatsepin, 1997), exploración y producción de petróleo y gas (Pérez et al., 1999; Liu et al., 2018), secuestro de CO<sub>2</sub> (Luo & Bryant, 2014) e ingeniería minera (Grenon & Hadjigeorgiou, 2012).

Una fractura puede definirse como una discontinuidad macroscópica plana resultado de un esfuerzo que excedió la fuerza de ruptura de la roca (Aguilera, 1998). La mayor parte del conocimiento que se tiene sobre la estructura de la corteza terrestre se obtiene mediante el análisis de las ondas sísmicas. Uno de los métodos más exitosos para la detección y caracterización de fracturas es el análisis de la anisotropía presente en la propagación de ondas sísmicas (Ass'ad et al., 1992). En la firma sísmica no se registran los efectos de una fractura individual, pero mediante las teorías de medios equivalentes se pueden obtener las propiedades generales de las fracturas con ayuda de los parámetros efectivos (Council, 1996).

La anisotropía azimutal presente en la velocidad de propagación de ondas sísmicas está directamente relacionada con fracturas alineadas presentes en el medio. Procesando los datos sísmicos se puede obtener información sobre las fracturas como su orientación y densidad (Helbig & Thom-

sen, 2005). En las simulaciones numéricas existen dos principales formas de incorporar los efectos que tienen las fracturas en la propagación de ondas sísmicas: (1) el uso de las teorías de medios equivalentes que permiten escribir los parámetros del medio como expresiones analíticas en función de parámetros de las fracturas a costa de múltiples suposiciones que no siempre corresponden con las características reales del medio (lo que limita su aplicabilidad) o (2) incluir fracturas discretas directamente en el modelo mediante esquemas numéricos. La principal ventaja del segundo método es que se requieren pocas suposiciones por lo que también resulta útil para validar el primer método (De Basabe et al., 2016).

La anisotropía no solo puede ser causada por fracturas alineadas, también puede ser el resultado de muchos mecanismos como lo son: Alineaciones cristalinas, alineaciones litológicas, estrés inducido en el material, secuencias regulares de capas delgadas, huecos, espacios vacíos o alineaciones de heterogeneidades de pequeña escala (Crampin, 1981; Ikelle & Amundsen, 2018). Las rocas sedimentarias tienen frecuentemente en su composición capas distinguibles, lo que ocasiona que sus propiedades elásticas sean anisótropas (Wang, 2002; Ikelle & Amundsen, 2018). En la caracterización de fracturas es importante poder distinguir entre la causada por las fracturas presentes en el medio y la anisotropía inherente al material de la roca (Hudson, 1994).

El presente trabajo de investigación busca comparar los resultados de analizar un medio anisótropo fracturado mediante TME de Hudson (Hudson, 1994) con su representación directa a través de modelos matemáticos.

### 1.3. Antecedentes de la investigación

Durante mucho tiempo la sismología petrolera ignoró la anisotropía en los modelos de la Tierra, debido a que los datos sísmicos eran dominados por las ondas P, las cuales tenían diferencias de velocidades de entre 3 y 5% y esa diferencia caía dentro del error de los modelos utilizados. Sin embargo con los avances en la adquisición de datos sísmicos, ignorar la anisotropía presentes en los medios ya no es un acercamiento válido (Ikelle & Amundsen, 2018). En la caracterización de yacimientos fracturados, las teorías de medios equivalentes (TME por sus siglas) se utilizan para entender la influencia que fracturas pequeñas tienen en la firma sísmica. Las TME tienen como objetivo remplazar un volumen de roca microheterogéneo que contiene fracturas por un medio homogéneo que tiene las mismas propiedades elásticas generales para la deformación estática (Tsvankin & Grechka, 2011). La caracterización de fracturas a partir de los datos sísmicos yace en el formalismo de las TME (Rioyos Romero, 2017) y últimamente su importancia en la geofísica está incrementando, por lo que es importante evaluar su precisión cuantitativamente y evaluar su aplicabilidad en la práctica (Shuai et al., 2020).

En 1980, Hudson analiza el problema dinámico de la propagación de onda plana a través de un medio isótropo fracturado, obteniendo los parámetros de su medio equivalente (Hudson, 1980). Experimentalmente la precisión de la teoría de Hudson fue evaluada comparando sus resultados con los de propagar ondas a través de una serie de medios hechos con resina epoxi con inclusiones de discos de goma (Ass'ad et al., 1992; Ass'ad et al., 1993, 1996; Shuai et al., 2020), de una manera similar se encontró que la interacción entre fracturas debe ser tomada en cuenta cuando la proporción entre la longitud de la onda S y el diámetro de las fracturas es menor a 5 (Wei et al., 2018). Conforme se crearon modelos de rocas sintéticas más realistas, se utilizaron para validar la teoría de Hudson para medios porosos (Tillotson et al., 2011; Amalokwu et al., 2015; Ding et al., 2017; Wang et al., 2018). La TME de Hudson también ha sido evaluada utilizando simulaciones matemáticas, bajo el esquema de las diferencias finitas (Saenger et al., 2004), con el método de elemento finito (Grechka & Kachanov, 2006) y Galerkin Discontinuo (Rioyos Romero, 2017).

Todos los trabajos anteriormente mencionados, analizan la precisión y evalúan la aplicabilidad de la teoría de Hudson bajo diferentes condiciones como la densidad de fracturas, relleno de las fracturas, porosidad o altas frecuencias pero siempre tomando a la matriz que contiene las fracturas como isótropa. Después de una serie de trabajos, Hudson aplica el método de homogeneización

para obtener las expresiones para los parámetros generales de elasticidad de un material anisótropo con fracturas circulares (Hudson, 1994). Pocos trabajos se han realizado considerando una matriz anisótropa. Con comparaciones experimentales, se ha encontrado que para medios fracturados con una matriz que presenta anisotropía VTI débil, la teoría es válida para una densidad de fracturas máxima de 0.06 % y un valor máximo de 0.2 para la relación de aspecto de las fracturas (De Figueiredo et al., 2019). Es por ello que en este trabajo de tesis se evaluará mediante simulaciones numéricas la efectividad de la teoría de Hudson para matrices con diferentes cantidades de anisotropía y densidades de fracturas.

## 1.4. Hipótesis

Los valores de:

1. Densidad de fracturas
2. Cantidad de anisotropía intrínseca

influyen en la precisión de la Teoría de Hudson para medios anisótropos fracturados.

## 1.5. Objetivo general

Evaluar la concordancia entre una simulación de rocas digitales fracturadas y un modelo teórico obtenido mediante la teoría de medios equivalentes de Hudson para un medio con anisotropía axisimétrica (VTI) que contiene fracturas verticales con distribución espacial uniforme.

## 1.6. Objetivos específicos

- Simular numéricamente rocas digitales fracturadas mediante el método de Galerkin discontinuo.
- Construir con la teoría de Hudson un modelo equivalente a las rocas digitales fracturadas.
- Simular numéricamente el modelo equivalente y comparar los resultados con los obtenidos mediante rocas digitales fracturadas.

## Capítulo 2

# Propagación de Ondas

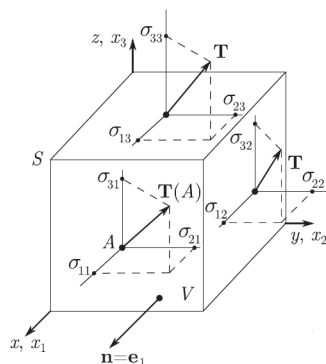
### 2.1. Resumen

Este capítulo contiene los conceptos básicos involucrados en la propagación de ondas elásticas. Se revisa la ley de Hooke y su representación para un medio isótropo y anisótropo, para éste último caso describen los tres tipos de anisotropía más sencillos que son VTI, HTI y ortorrómbica y por último se da un contexto general de la importancia de la anisotropía en la sismología.

### 2.2. Ondas sísmicas en medios isótropos

#### 2.2.1. Tensor de esfuerzos

Las ondas están asociadas con el movimiento local de las partículas que constituyen al medio sólido. El desplazamiento de una partícula impacta en las partículas adyacentes, empujándolas o jalándolas. Las fuerzas que regresan a una partícula a su posición inicial o de equilibrio son llamadas **fuerzas internas o esfuerzos**. Si se describen las partículas como un elemento de volumen, el esfuerzo en un punto  $\mathbf{x}$  se puede describir como un conjunto de fuerzas actuando sobre las caras del elemento de volumen a un tiempo  $t$ . En general para cada una de las caras del volumen las fuerzas serán distintas en dirección y magnitud por lo que cada cara necesitará una fuerza de superficie o de tracción (Ikelle & Amundsen, 2018).



**Figura 2.1.** Esfuerzos presentes en las caras de un elemento de volumen (Krebes, 2019)

De la figura 2.1 se puede deducir que las tracciones actuando en el área unitaria mirando en

las direcciones  $+x$ ,  $+y$  y  $+z$  son:

$$\mathbf{T}_x(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(\mathbf{x}, t) \\ \sigma_{yx}(\mathbf{x}, t) \\ \sigma_{zx}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_y(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \sigma_{xy}(\mathbf{x}, t) \\ \sigma_{yy}(\mathbf{x}, t) \\ \sigma_{zy}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_z(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \sigma_{xz}(\mathbf{x}, t) \\ \sigma_{yz}(\mathbf{x}, t) \\ \sigma_{zz}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Para simplificar la notación, se escribirán las cantidades sin su dependencia de  $\mathbf{x}$  y  $t$ . El esfuerzo que actúa en un plano es una cantidad vectorial. El esfuerzo ejercido en un punto se representa por el tensor de esfuerzos  $\boldsymbol{\sigma}$ . En general un esfuerzo arbitrario  $\boldsymbol{\sigma}$  es un tensor de segundo rango que se puede expresar en forma matricial como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Los componentes normales a las superficies  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  y  $\sigma_{33}$  son llamados esfuerzos normales y los componentes tangenciales a las superficies  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{21}$ ,  $\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{31}$  y  $\sigma_{32}$  se denominan esfuerzos cortantes. El tensor de esfuerzos es simétrico porque el elemento de volumen no debe experimentar aceleración angular (Krebes, 2019) i.e.:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \quad y \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}. \quad (2.3)$$

Usualmente el tensor de esfuerzos  $\boldsymbol{\sigma}$  se escribe en términos de la notación de Voigt (11  $\rightarrow$  1, 22  $\rightarrow$  2, 33  $\rightarrow$  3, 23  $\rightarrow$  4, 31  $\rightarrow$  5, 12  $\rightarrow$  6), que junto con la simetría del tensor, permite expresarlo de la siguiente manera (Cui et al., 2018):

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \sigma_6]^\top. \quad (2.4)$$

### 2.2.2. Tensor de deformación

Para una partícula que en equilibrio se ubica en  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ , su desplazamiento al tiempo  $t$  es un vector que se puede escribir como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} u_x = u_x(\mathbf{x}, t) \\ u_y = u_y(\mathbf{x}, t) \\ u_z = u_z(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

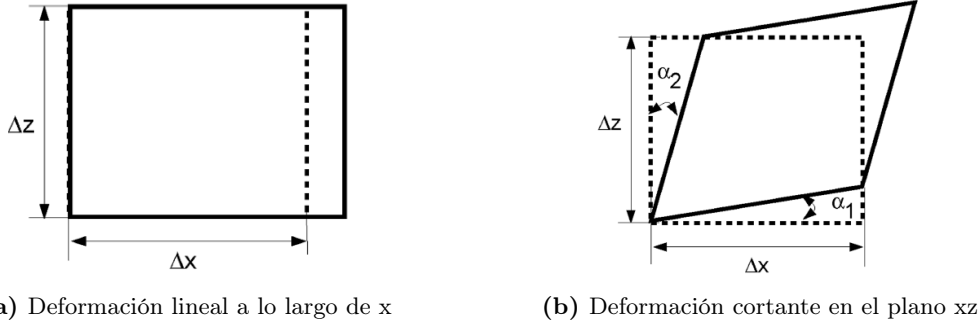
Así el vector  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  indica la posición, en el tiempo  $t$ , de una partícula que se encontraba en  $\mathbf{x}$  al tiempo cero. El vector de desplazamiento de una partícula no es suficiente para describir la deformación de un material. Para describir la deformabilidad de un material se utilizan un conjunto de desplazamientos relativos, llamados deformaciones. Así el tensor de deformación se definirá en términos de las derivadas espaciales de los componentes del campo de desplazamientos. Es importante mencionar que en ondas sísmicas las deformaciones en las rocas son muy pequeñas, alrededor de 0.001 % en longitud y 0.01 de rotación en radianes, por lo que deformaciones muy pequeñas se utilizan para el desarrollo de la teoría (Ikelle & Amundsen, 2018).

Una deformación se puede describir con el tensor de deformación. Tres componentes corresponden al gradiente del desplazamiento y las otras seis son promedios del gradiente de desplazamiento por pares. Para la deformación lineal, se tiene que el cambio en longitud por unidad de longitud a lo largo de  $x$ ,  $y$  y  $z$  es:

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (2.6)$$

Para la deformación cortante se tiene que el desplazamiento cortante por unidad de área en el plano  $xz$ ,  $yz$  y  $zy$  es:

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right), \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right), \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \quad (2.7)$$



**Figura 2.2.** Deformaciones infinitesimales de un elemento de volumen, la línea punteada corresponde al estado en equilibrio y la línea continua el estado deformado (Ikelle & Amundsen, 2018).

En el límite infinitesimal, el tensor de deformación en un punto dado  $\mathbf{x}$  y tiempo  $t$ , está dado por (Krebes, 2019):

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.8)$$

El tensor de deformación  $\boldsymbol{\epsilon}$  se puede escribir, utilizando la notación de Voigt y su simetría en sistemas coordenados cartesianos, como (Cui et al., 2018):

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_1 = \epsilon_{11} \quad \epsilon_2 = \epsilon_{22} \quad \epsilon_3 = \epsilon_{33} \quad \epsilon_4 = 2\epsilon_{23} \quad \epsilon_5 = 2\epsilon_{13} \quad \epsilon_6 = 2\epsilon_{12}]^T. \quad (2.9)$$

### 2.2.3. Tensor de Rigidez y ley de Hooke

Experimentalmente se ha observado (ver figura 2.3) que cuando una roca es sujeta a un esfuerzo en aumento, existen tres etapas sucesivas de la deformación (Ikelle & Amundsen, 2018; Cui et al., 2018; Krebes, 2019):

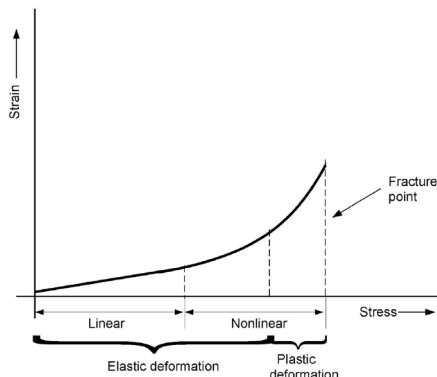
- **Deformación elástica lineal:** La deformación es reversible y la relación entre el esfuerzo y la deformación es lineal.
- **Deformación elástica no lineal:** La deformación es reversible y la relación entre el esfuerzo y la deformación es no-lineal.
- **Deformación plástica:** La deformación es irreversible.
- **Punto de fractura:** La deformación es irreversible y el material se rompe.

La ley generalizada de Hooke establece que para un punto dado  $\mathbf{x}$  al tiempo  $t$  el tensor de esfuerzos mantiene una relación lineal con el tensor de deformaciones (Ikelle & Amundsen, 2018):

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = c_{ijkl}(\mathbf{x}) \epsilon_{kl}(\mathbf{x}, t), \quad (2.10)$$

donde  $c_{ijkl} = c_{ijkl}(\mathbf{x})$  es el tensor de rigidez, que parametriza al medio y actúa como una medida de la resistencia del sólido a la deformación. Para deformaciones elásticas, el tensor de rigidez se considera independiente del tiempo. Un medio heterogéneo es aquel en donde sus propiedades físicas varían de un punto a otro en contraste a un medio homogéneo donde sus propiedades son iguales en cualquier posición por lo que el tensor  $c$  no dependería de  $\mathbf{x}$ . Los medios isótropos son aquellos donde sus propiedades no varían con la dirección al contrario de los medios anisótropos donde sus propiedades sí varían con la dirección (ver sección 2.3) (Krebes, 2019). Los medios isótropos se pueden describir completamente con solo 2 parámetros (Cui et al., 2018):

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (2.11)$$



**Figura 2.3.** Relación típica entre el esfuerzo y la deformación de un material sólido dividido en tres etapas: deformación elástica, deformación plástica y punto de fractura (Cui et al., 2018).

A  $\lambda$  y  $\mu$  se le conocen como constantes de Lamé. La constante  $\mu$ , también llamada módulo de cortante describe la resistencia del material a deformaciones cortantes, es un número positivo y tiene unidades de esfuerzo, mientras que  $\lambda$  no tiene una interpretación física directa pero simplifica la ley de Hooke (Ikelle & Amundsen, 2018). Para un medio heterogéneo se tiene  $\lambda = \lambda(x)$  y  $\mu = \mu(x)$ . En un material isótropo la relación entre el tensor de esfuerzos y el de deformaciones descrita por la ley de Hooke es (Mavko et al., 2020):

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{\alpha\alpha} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad (2.12)$$

donde  $\epsilon_{\alpha\alpha} =$  deformación volumétrica (suma sobre índices repetidos).

Dos parámetros con claros significados físicos son el módulo de Young ( $E$ ) y la relación de Poisson ( $\nu$ ) que usualmente son usados para caracterizar las propiedades elásticas de formaciones rocosas (Ikelle & Amundsen, 2018). La relación de Poisson es adimensional, tiene valor máximo de 0.5 cuando  $\mu$  es cero (no resistencia a movimientos cortantes) y valor mínimo de 0 cuando se tiene resistencia cortante infinita. Sus valores típicos para rocas sedimentarias son de  $0.2 < \nu < 0.4$  y es definida como:

$$\nu = -\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (2.13)$$

Por otra parte el módulo de Young es una medida de la resistencia del medio a sufrir cambios en su longitud. Tiene unidades de Pascales ( $\text{N}/\text{m}^2$  en el sistema MKS) y se define como:

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{\epsilon_{xx}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad (2.14)$$

#### 2.2.4. Ondas P y ondas S

La ecuación de onda elastodinámica para el campo de desplazamientos de un material anisótropo y heterogéneo es (Ikelle & Amundsen, 2018):

$$\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial u_k(\mathbf{x}, t)}{\partial x_l} \right) = f, \quad (2.15)$$

con  $\rho$  como la densidad de la roca y  $f$  la función fuente o función de fuerza motriz. Para un medio homogéneo e isótropo la ecuación de onda (con  $f = 0$ ) se puede escribir en notación de operadores como (Krebes, 2019):

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.16)$$

Una ecuación de onda plana para el desplazamiento elástico tiene la forma:

$$\mathbf{u} = A\mathbf{u}_0 \exp[ik(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) - vt]. \quad (2.17)$$

Sustituyendo **2.17** en **2.16** se obtiene:

$$(\mu - \rho V^2)\mathbf{u}_0 + (\lambda + \mu)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_0)\mathbf{n} = 0. \quad (2.18)$$

La ecuación anterior es cierta para dos casos:

- **Ondas P** ( $\mathbf{u}_0 = \pm\mathbf{n}$ ): Esto significa que el desplazamiento es paralelo a la dirección de propagación de la onda, este resultado también se puede obtener de tomar la divergencia de la ecuación **2.16**. La velocidad resultante de la onda es:

$$V = V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \quad (2.19)$$

A este tipo de ondas se les llaman ondas longitudinales, compresionales o simplemente ondas P.

- **Ondas S** ( $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_0 = 0$ ): El desplazamiento es normal a la dirección en la que se propaga la onda, este resultado también se puede obtener de calcular el rotacional de la ecuación **2.16**. La velocidad de la onda es:

$$V = V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.20)$$

. A este tipo de ondas se les conoce como ondas rotacionales, cortantes o simplemente ondas S.

En sismología se toma a los ejes  $x$  y  $y$  como horizontales (Paralelos a la superficie de la Tierra) y al eje  $z$  como vertical, así usualmente a la onda S se le divide en su componente vertical  $SV$  y en su parte horizontal  $SH$  (Krebes, 2019).

## 2.3. Anisotropía

### 2.3.1. Tensor de rigidez

Cualquier material elástico anisótropo y heterogéneo es caracterizado por su tensor de rigidez  $c_{ijkl} = c_{ijkl}(\mathbf{x})$  y por su densidad  $\rho = \rho(\mathbf{x})$ . Pero la simetría del tensor de rigidez y el tensor de deformaciones junto con la ley de Hooke permite reducir el número de componentes independientes del tensor de rigidez a 36 (Mavko et al., 2020):

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{jilk}, \quad (2.21)$$

debido a algunas consideraciones termodinámicas (Auld, 1973) que derivan la existencia de un único potencial de energía de esfuerzos ( $\partial^2 W / \partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl} = \partial^2 W / \partial \epsilon_{kl} \partial \epsilon_{ij}$ ) con  $W$  como el potencial de deformación (Mavko et al., 2020; Krebes, 2019) se reduce a 21 el número de componentes independientes de  $\mathbf{c}$ . Así con la representación matricial de Voigt se puede escribir al tensor  $\mathbf{c}$  como:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

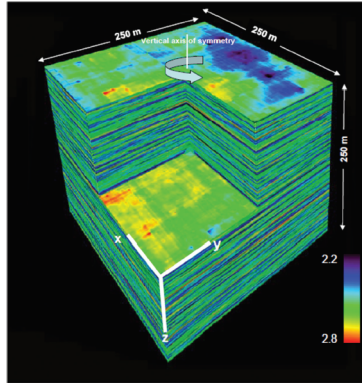
Utilizar la notación de Voigt para el tensor de esfuerzo, deformaciones y de rigidez, simplifica muchas ecuaciones importantes (Auld, 1973). La ley de Hooke con la notación de Voigt se escribe como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Cuando las 21 constantes son necesarias para describir un material, se dice que el medio tiene simetría mínima o simetría triclinica. Cualquier información acerca de la simetría de la roca, reducirá el número de constantes necesarias para describir el medio. Las rocas tienen un comportamiento mayoritariamente isótropo, transversalmente isótropo, ortorrómbico o monoclinico, pero en raras ocasiones será triclinico (Ikelle & Amundsen, 2018).

### 2.3.2. Medios transversalmente isótropo con un eje de simetría vertical (VTI)

El caso de simetría anisótropa más simple que existe es cuando las propiedades de un medio son independientes de la dirección dentro del plano perpendicular al eje de simetría. El eje de simetría coincide con el eje de invariancia rotacional, en el cual se puede realizar una rotación y el medio sería indistinguible a como estaba antes. Si el eje de simetría es vertical, se dice que el medio tiene un tipo de simetría llamado isotropía transversa Vertical (*VTI* por sus siglas en inglés). Los modelos *VTI* pueden ser causados por heterogeneidades horizontales de pequeña escala o por delgadas capas horizontales distinguibles (ver figura 2.4) (Ikelle & Amundsen, 2018; Helbig & Thomsen, 2005).



**Figura 2.4.** Medio con eje de simetría vertical causado por heterogeneidades o capas horizontales delgadas (Cui et al., 2018).

El tensor de rigidez de un medio con simetría VTI tiene 5 constantes de rigidez independientes y con la notación de Voigt se escribe como:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{11} - 2c_{66} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} - 2c_{66} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Consideraciones energéticas, que se traducen en mantener la velocidad de las ondas P mas rápida que las ondas S, requieren las siguientes relaciones (Mavko et al., 2020; Ikelle & Amundsen, 2018):

$$\begin{aligned}
 c_{11} &\geq c_{66} \geq 0, \\
 c_{33} &\geq 0, \\
 c_{44} &\geq 0, \\
 c_{13}^2 &\geq c_{33}(c_{11} - c_{66}).
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

En la notación de índices, **2.22** se puede escribir como:

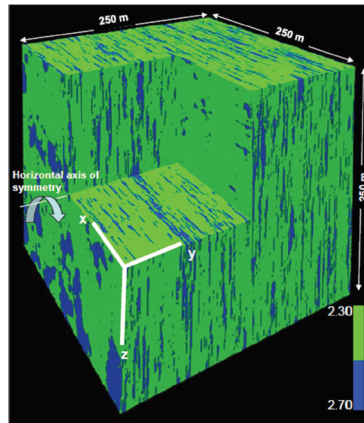
$$\begin{aligned}
 c_{ijkl} &= \lambda_{VTI} \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_{VTI} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\
 &+ (c_{11} + c_{33} - 2c_{13} - 4c_{44}) \delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{k3} \delta_{l3} \\
 &+ (c_{13} - c_{11} + 2c_{66}) (\delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{kl} + \delta_{ij} \delta_{k3} \delta_{l3}) \\
 &+ (c_{44} - c_{66}) (\delta_{il} \delta_{j3} \delta_{k3} + \delta_{i3} \delta_{l3} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{j3} \delta_{l3} + \delta_{i3} \delta_{k3} \delta_{jl}),
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

con:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{VTI} &= c_{11} - 2c_{66}, \\
 \mu_{VTI} &= c_{66}.
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

### 2.3.3. Medios transversalmente isótropos con un eje de simetría horizontal (HTI)

Cuando un medio es transversalmente isótropo respecto al eje horizontal, se dice que el material tiene isotropía tranversa horizontal (*HTI* por sus siglas en inglés). Es importante mencionar que la distinción de medios con simetría TI en VTI, HTI y TTI (isotropía transversa inclinada) tiene mayor sentido dentro de la sismología ya que en otras áreas científicas, un medio TI se define a partir del sistema de coordenadas elegido (Ikelle & Amundsen, 2018). Los modelos HTI pueden ser causados por fracturas paralelas verticales (Crampin, 1978) (ver figura **2.5**):



**Figura 2.5.** Medio con eje de simetría horizontal causado por fracturas verticales donde las propiedades elásticas son uniformes en planos verticales paralelos a las fracturas (Ikelle & Amundsen, 2018).

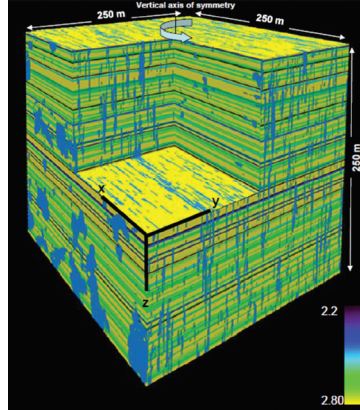
El tensor de rigidez para un medio con simetría HTI se escribe como:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{33} & c_{33} - 2c_{44} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{33} - 2c_{44} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Debido a que en la propagación de ondas a través de medios HTI, los tiempos de llegada de las ondas varían con el ángulo azimutal, también se dice que tiene anisotropía azimutal (Ikelle & Amundsen, 2018).

### 2.3.4. Simetría ortorrómbica

La simetría ortorrómbica describe el comportamiento de las ondas en cuencas sedimentarias y normalmente este tipo de simetría es causada por la combinación de fracturas verticales paralelas y la matriz anisótropa (VTI) que las contiene (ver figura 2.6) (Ikelle & Amundsen, 2018), otro de los casos más comunes en yacimientos fracturados es cuando existen dos conjuntos de fracturas ortogonales (Bakulin et al., 2000).



**Figura 2.6.** Medio con simetría ortorrómbica causada por finas capas horizontales de distintos materiales en una matriz con fracturas paralelas verticales. Uno de los planos de simetría es horizontal mientras que los otros dos corresponden los planos paralelos y perpendiculares a las fracturas (Ikelle & Amundsen, 2018).

Los modelos ortorrómbicos tienen tres planos mutuamente ortogonales de simetría de espejo. En el sistema de coordenadas cartesiano se requieren 9 constantes de rigidez independientes y si cada plano coordenado coincide con un plano de simetría, el tensor de rigidez se escribe como:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

### 2.3.5. Ondas qP y qS

En los medios isótropos la polarización de las ondas son paralelas o perpendiculares a la dirección de propagación pero en los medios anisótropos eso solo ocurre en ciertas ocasiones. Es por eso que en general para los medios anisótropos las ondas se denotan por  $qP$ ,  $qSV$ ,  $qSH$ , donde la  $q$  hace referencia a *quasi* indicando que la onda es casi polarizada (Winterstein, 1990). Para el caso de la simetría VTI tenemos que las llamadas velocidades verticales están dadas por (Ikelle & Amundsen, 2018):

$$V_P(0^\circ) = \sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}}, \quad (2.30)$$

$$V_{SV}(0^\circ) = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}, \quad (2.31)$$

$$V_{SH}(0^\circ) = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}, \quad (2.32)$$

aquí  $0^\circ$  es el ángulo que la dirección de propagación de la onda hace con el eje de simetría. Por otro lado las velocidades horizontales están dadas por (Ikelle & Amundsen, 2018):

$$V_P(90^\circ) = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}, \quad (2.33)$$

$$V_{SV}(90^\circ) = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}, \quad (2.34)$$

$$V_{SH}(90^\circ) = \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}}. \quad (2.35)$$

### 2.3.6. Anisotropía en la sismología

En sismología las propiedades anisótropas de un medio son clasificadas entre anisotropía intrínseca y anisotropía inducida (Cui et al., 2018). **La anisotropía intrínseca**, por ejemplo en rocas sedimentarias, puede ser causada por interacciones durante la reflexión o transmisión a través de delgadas capas anisótropas o minerales con orientaciones preferenciales (Thomsen, 1986). Los datos sísmicos indican que la anisotropía intrínseca en cuencas sedimentarias está mayormente asociada con simetría *VTI* y *TTI* (Tsvankin et al., 2010). Las velocidades horizontales y verticales en dichos casos pueden variar hasta un 40% (Crampin & Peacock, 2005). La importancia de tomar en cuenta los modelos anisótropos se puede observar en la notable mejoría de las imágenes en exploraciones en el Golfo de México, a pesar de que la región es considerada con anisotropía leve (Tsvankin et al., 2010).

Por otro lado la **anisotropía inducida** es la relacionada con esfuerzos regionales en el subsuelo (Cui et al., 2018). Las fracturas y esfuerzos orientados causan anisotropía azimutal (Crampin, 1978), es importante mencionar que la mayoría de las fracturas naturales de mayor importancia comercial son verticales o casi verticales (Aguilera, 1998). Crampin desarrolló una teoría llamada anisotropía de dilatación extensiva (EDA por sus siglas en inglés) donde se incluyen los siguientes puntos (Helbig & Thomsen, 2005; Crampin & Peacock, 2005):

- Las fracturas en una roca se alinean preferentemente con sus caras planas perpendicular a la dirección de menos esfuerzo.
- En yacimientos, las grietas se alinean preferentemente con un plano vertical ya que a esas profundidades el mayor esfuerzo es la presión de sobrecarga.
- Las condiciones anteriores resultan en una anisotropía azimutal (el caso más simple es *HTI*).

- Observaciones de dos y tres componentes son adecuadas para medir la división de la onda S.
- Dichas observaciones son indicadores del estado de las microfracturas en las rocas.

Cuando dos ondas S viajan en la misma dirección con diferentes polarizaciones y velocidades, se dice que están divididas (Winterstein, 1990). Monitorear la propagación de ondas S en rocas anisótropas ha abierto una nueva ventana a la comprensión de la dinámica en la deformación de rocas y las propiedades del manto y la corteza (Crampin & Peacock, 2005). El estudio de las ondas S es uno de los métodos más exitosos para la caracterización de las fracturas e incluso la predicción del flujo de los fluidos contenidos en ellas (Liu et al., 2000). La teoría de medios equivalentes es aun hoy en día la principal fuente para la obtención de constantes elásticas para distribuciones de fracturas paralelas (Crampin & Peacock, 2005).

# Capítulo 3

## Teoría de Hudson

### 3.1. Resumen

En éste capítulo se presenta una definición para las teorías de medios equivalentes. Se revisan los supuestos de no interacción para después enlistar algunas de las principales teorías desarrolladas bajo dicho supuesto. Posteriormente se profundiza en la teoría de Hudson abordando las ecuaciones para el medio equivalente de Hudson para un medio con matriz isótropa que contiene uno o múltiples conjuntos de fracturas secas o llenas con un líquido y por último se aborda la teoría de Hudson para una matriz anisótropa fracturada.

### 3.2. Teorías de medios equivalentes

Las teorías de medios equivalentes o efectivos tienen como primer objetivo definir un material homogéneo que represente las propiedades elásticas efectivas de un sólido heterogéneo y el segundo objetivo es determinar qué información sobre el material heterogéneo se puede recuperar desde su equivalente homogéneo (Tsvankin & Grechka, 2011; Shuai et al., 2020). Un volumen  $V$  se dice representativo si sus propiedades elásticas promedio caracterizan al medio. El esfuerzo y deformación promedio en un volumen representativo están dados por (Shuai et al., 2020):

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{ij} \rangle &= \frac{1}{V} \int_{\mathbf{V}} \sigma_{ij}(x) dV, \\ \langle \epsilon_{ij} \rangle &= \frac{1}{V} \int_{\mathbf{V}} \epsilon_{ij}(x) dV.\end{aligned}\tag{3.1}$$

El tensor efectivo  $c_e$  se define con notación tensorial como (Hudson, 1991b):

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = c_e : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle.\tag{3.2}$$

Resolver la ecuación de equilibrio o también llamada la ecuación de campo de esfuerzos estáticos representa la principal dificultad de las teorías de medios equivalentes ya que no es simple para un medio general homogéneo (Shuai et al., 2020). La ecuación de equilibrio es:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(x)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3.\tag{3.3}$$

El desarrollo de las teorías de medios equivalentes empezó con un trabajo realizado por Eshelby (1957), donde analiza los efectos de una inclusión elipsoidal en un medio elástico homogéneo y posteriormente un estudio de Bristow (1960) donde se contemplan explícitamente fracturas delgadas (Grechka & Kachanov, 2006). Aunque muchos modelos teóricos se han desarrollado para

calcular las propiedades efectivas de medios, la principal forma de abordar el problema es mediante el supuesto de aproximación de no interacción (NIA por sus siglas en inglés) debido a las complicaciones que representa resolver las interacciones elásticas entre fracturas (Rioyos Romero, 2017; Shuai et al., 2020).

En general las TME, bajo los supuestos de NIA, son válidas cuando se cumplen los siguientes escenarios (Rioyos Romero, 2017):

- La longitud de la onda sísmica  $\lambda_s$  es mucho más grande que la longitud de la fractura  $l$ , la separación entre fracturas  $h$  y la apertura de la fractura  $\theta$ . En general los sistemas naturalmente fracturados ocurren en grandes poblaciones con orientaciones similares. Las aperturas de las fracturas varían desde las delgadas (0.001-0.01 mm) hasta anchas (0.1-0.5 mm). La intensidad de fractura es un parámetro utilizado para describir rocas fracturadas y se define como (Bakulin et al., 2000):

$$\text{intensidad de fractura} = \frac{\text{número de fracturas}}{\text{metro}} \quad (3.4)$$

Valores típicos de la intensidad de fracturas rondan entre  $0.75 \text{ m}^{-1}$  (distribuciones dispersas) hasta  $10 \text{ m}^{-1}$  (distribuciones densas), mientras que en yacimientos carbonatados, el rango es de 1 a  $20 \text{ m}^{-1}$  (Bakulin et al., 2000). Las ondas sísmicas son del orden de decenas o cientos de metros por lo que en general se puede utilizar la aproximación de longitud de onda larga (Grechka & Kachanov, 2006).

$$\text{longitud de onda sísmica} \gg \text{espacio entre fracturas} \gg \text{apertura de fracturas} \quad (3.5)$$

Por ejemplo el límite de la densidad de fracturas para la teoría de Hudson de primer y segundo orden es para menos de 0.1 (Mavko et al., 2020).

- En general la interacción entre fracturas no existe o se asume suficientemente pequeña que se puede despreciar (Rioyos Romero, 2017). Por ejemplo la teoría de Hudson de primer orden no contempla la interacción entre fracturas mientras que la de segundo orden toma en cuenta las interacciones que existen entre pares de fracturas (Shuai et al., 2020).

Los datos sísmicos de un medio fracturado no contienen información sobre las fracturas individuales, más bien retienen los efectos de las características promedio de múltiples fracturas (Council, 1996). Análisis de dichas firmas sísmicas demuestran que la respuesta sísmica de baja frecuencia de una roca fracturada puede ser reproducida por una roca homogénea, lo que justifica el uso de teorías de medios equivalentes (Grechka & Kachanov, 2006). En la actualidad las teorías de medios equivalentes son la base del entendimiento de la influencia de fracturas de pequeña escala en la firma sísmica (Tsvankin & Grechka, 2011) aunque también juegan un papel muy importante en áreas como ciencia de materiales y mecánica estructural (Kachanov, 1993).

### 3.3. Teorías populares bajo NIA

Algunas de las teorías de medios equivalentes que utilizan NIA, además de la de Hudson, son (Rioyos Romero, 2017):

- **Teoría de Schoenberg:** Schoenberg (1980, 1983) desarrolla una TME en base a las condiciones de frontera del tipo de desplazamiento discontinuo (LSM por sus siglas en inglés, ver sección 4.2). Para obtener el medio equivalente se tratan a las fracturas independientemente de su microestructura y su forma, además se consideran como capas infinitamente delgadas y altamente suaves (poca rigidez) (Bakulin et al., 2000).
- **Teoría de Kachanov:** La teoría de Kachanov (1980) y la teoría de Schoenberg (1980, 1983) comparten el mismo fundamento teórico pero Kachanov, a diferencia de Schoenberg, si toma en cuenta la microestructura y forma de las fracturas.

- **Teoría de Bakulin:** La teoría de Bakulin et al. (2000) se desarrolló con el objetivo de obtener los coeficientes de elasticidad efectivos de dos medios ortorrómbicos: (1) Medio que contiene fracturas verticales paralelas incrustadas en una matriz con anisotropía VTI y (2) un medio con dos conjuntos ortogonales de fracturas paralelas con invarianza rotacional. El principal propósito es representar las características reales de los yacimientos, lo cual incluye la simetría de los escenarios anteriormente mencionados. La teoría fue desarrollada bajo las suposiciones de anisotropía intrínseca débil y baja conformidad asociada a las fracturas.

### 3.4. Teoría de Hudson para materiales isótropos fracturados

La teoría de medios equivalentes más usada en la actualidad es la teoría de Hudson (Grechka & Kachanov, 2006). Hudson (1980) hace un análisis de la propagación de una onda plana a través de un medio fracturado con un conjunto de incrustaciones paralelas elipsoidales (con forma de moneda) distribuidas homogéneamente en el sólido (Bakulin et al., 2000). El desarrollo de la teoría sigue cercanamente el método de Keller (1964) para obtener el promedio del campo de desplazamiento en el medio. La teoría de Hudson (1980, 1981) toma las siguientes suposiciones (Wei et al., 2018):

- El medio tiene fracturas alineadas espaciadas y su escala es mucho más pequeña que la longitud de la onda sísmica.
- Las fracturas están llenas de fluido estático, están aisladas la una de la otra y tienen forma elipsoidal.
- Las fracturas son muy delgadas y con forma de moneda, esto es que el ratio del eje mayor y el menor es menor a 0.3.
- Las fracturas están llenas de materiales débiles con módulos elásticos pequeños (gases, fluidos o sólidos suaves).

Con estas suposiciones, el tensor efectivo se puede expresar como (Hudson, 1991b):

$$c^{eff} = c^0 + ec^1 + e^2c^2. \quad (3.6)$$

Donde  $c^0$  es el tensor de rigidez de la matriz isótropa,  $c^1$  y  $c^2$  son las correcciones de primer y segundo grado respectivamente, asociadas a las fracturas en el medio. La densidad de fracturas  $e$  se define como  $e = \xi \langle a^3 \rangle$  con  $\xi$  como el número de fracturas por unidad de volumen y  $\langle a \rangle$  siendo la apertura promedio de las fracturas. Si se asume que las fracturas tienen las mismas características, se puede escribir la densidad de fracturas  $e$  como:

$$e = \frac{na^3}{V}, \quad (3.7)$$

con  $n$  siendo el número de fracturas en el volumen equivalente  $V$ . Para un solo conjunto de fracturas paralelas alineadas cuya normal es paralela al eje  $x$ , el término de corrección  $c^1$  es (Tsvankin & Grechka, 2011):

$$c^1 = -\frac{1}{\mu_b} \begin{bmatrix} (\lambda_b + 2\mu_b)^2 U_{33} & \lambda_b(\lambda_b + 2\mu_b)U_{33} & \lambda_b(\lambda_b + 2\mu_b)U_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_b(\lambda_b + 2\mu_b)U_{33} & \lambda_b^2 U_{33} & \lambda_b^2 U_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_b(\lambda_b + 2\mu_b)U_{33} & \lambda_b^2 U_{33} & \lambda_b^2 U_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_b^2 U_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_b^2 U_{11} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$\lambda_b$  y  $\mu_b$  las constantes de Lamé de la matriz isótropa donde están incrustadas las fracturas. Las características físicas de las fracturas están reflejadas en los parámetros  $U_{11}$  y  $U_{33}$ :

$$U_{11} = \frac{16}{3(3 - 2g_b)(1 + M)}, \quad U_{33} = \frac{4}{3(1 - g_b)(1 + K)}, \quad (3.9)$$

$$M = \frac{4\mu_i}{\pi\theta(3 - 2g_b)\mu_b}, \quad K = \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{\pi\theta(1 - g_b)\mu_b}, \quad (3.10)$$

$$g_b = \frac{V_{S,b}^2}{V_{P,b}^2} = \frac{\mu_b}{\lambda_b + 2\mu_b}, \quad (3.11)$$

donde  $\lambda_i$  y  $\mu_i$  corresponden a los parámetros de Lamé del contenido isótropo de baja rigidez de las fracturas,  $\theta$  es la relación de aspecto de las fracturas (que se asume igual en todas) y  $V_{S,b}$  y  $V_{P,b}$  son las velocidades de las ondas S y P en la matriz respectivamente.

El tercer término en la ecuación **3.6** corresponde a perturbaciones de segundo orden. Para densidades altas de fracturas la predicción de la teoría de segundo orden de Hudson exhibe un comportamiento no real (Grechka & Kachanov, 2006). El término  $c^2$  está dado por (Crampin, 1984):

$$c^2 = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} (\lambda_b + 2\mu_b)qU_{33}^2 & \lambda_b qU_{33}^2 & \lambda_b qU_{33}^2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_b qU_{33}^2 & \lambda_b^2 \frac{q}{\lambda + 2\mu} U_{33}^2 & \lambda_b^2 \frac{q}{\lambda + 2\mu} U_{33}^2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_b qU_{33}^2 & \lambda_b^2 \frac{q}{\lambda + 2\mu} U_{33}^2 & \lambda_b^2 \frac{q}{\lambda + 2\mu} U_{33}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & XU_{11}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & XU_{11}^2 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

donde:

$$X = 2\mu_b \frac{3\lambda_b + 8\mu_b}{\lambda_b + 2\mu_b}, \quad (3.13)$$

$$q = 15 \left( \frac{\lambda_b}{\mu_b} \right)^2 + 28 \left( \frac{\lambda_b}{\mu_b} \right) + 28. \quad (3.14)$$

Es importante notar que en  $c^2$  el 2 no se refiere al cuadrado de  $c$ . La inclusión del término de segundo orden no requiere información adicional de las fracturas (Grechka & Kachanov, 2006). De manera general, el término  $c^2$  se puede calcular partiendo de  $c^1$  con:

$$c^2 = c_{ijkl}^2 = \frac{1}{\mu_b} c_{ijmn}^1 \chi_{mnqr} c_{qrkl}^1, \quad (3.15)$$

con  $c_{ijmn}^1$  como el tensor de cuarto orden equivalente a  $c^1$  de la ecuación **3.12** con:

$$\chi_{ijkl} = \frac{1}{15} [\delta_{ik}\delta_{jl}(4 + g_b) - (\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ij}\delta_{kl})(1 - g_b)], \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \quad (3.16)$$

### 3.4.1. Condiciones específicas de las fracturas

La teoría de Hudson contempla que cada conjunto de fracturas se puede modelar con diferente contenido. Las expresiones para  $U_{11}$  y  $U_{33}$  presentes en la ecuación **3.9** se pueden expresar como (Hudson, 1981; Garbin & Knopoff, 1973):

- **Fracturas secas o saturadas con un gas:** Para fracturas secas o llenas de gas, los dos coeficientes del contenido de la fractura son igual a cero ( $\lambda_i = \mu_i = 0$ ) por lo que (Bakulin et al., 2000):

$$U_{11} = \frac{16}{3(3 - 2g_b)}, \quad U_{33} = \frac{4}{3(1 - g_b)}. \quad (3.17)$$

- **Fracturas llenas con un líquido:** En este caso el módulo cortante  $\mu_i = 0$ , pero  $\lambda_i$  en el caso del agua o el aceite puede ser comparable con el parámetro  $\lambda_b$  y para el caso de fracturas con  $\theta \ll 1$  se tiene:

$$U_{11} = \frac{16}{3(3 - 2g_b)}, \quad U_{33} = 0. \quad (3.18)$$

### 3.4.2. Múltiples conjuntos de fracturas

Hudson (1981) propone que si el modelo incluye varios conjuntos de fracturas, cada uno con una inclinación respectiva, simplemente se calcula  $c^1$  para cada tipo de fractura por separado para posteriormente sumar los resultados y así obtener el valor final de  $c^1$ . Si se tienen L conjuntos de fracturas:

$$ec^1 = \sum_{l=1}^L e^{(l)} c^{1(l)}. \quad (3.19)$$

Posteriormente Hudson (1986) calcula las propiedades efectivas de un material con múltiples conjuntos de fracturas y concluye que para el término de corrección  $c^1$  basta con sumar las contribuciones de cada conjunto de fracturas como si los demás grupos estuvieran ausentes. Esta relación lineal resulta intuitiva debido a que el cálculo de  $c^1$  solo involucra dispersión simple. El resultado peculiar es que el término de corrección  $c^2$ , correspondiente a la teoría de segundo orden, se calcula exactamente igual a como si solo existiese un único conjunto de fracturas. Esto es no sumar  $c^2$  calculado para cada grupo, sino calcularlo a partir de la expresión **3.15** donde  $c^1$  se obtiene a partir de la ecuación **3.18**. Es importante mencionar que lo anterior supone que las fracturas están homogéneamente separadas la una de la otra por lo que la posibilidad de encontrar dos fracturas con cualquier orientación en un mismo punto es cero, también se asume que el campo de difracción causado por cualquier fractura será uniforme en la cara de cualquier otra.

### 3.4.3. Teoría de Hudson para materiales anisótropos fracturados

Un material anisótropo se puede modelar como una matriz isótropa que contiene fracturas (Hudson, 1991a) por lo que la anisotropía intrínseca de un material (no relacionada a fracturas), puede tomarse en cuenta en la teoría de Hudson hasta de segundo orden. Esto se traduce a que si un material anisótropo contiene una distribución de fracturas, el efecto total es igual a un material isótropo con tensor  $c^0$  con dos conjuntos de fracturas: (1) el primero siendo hipotético con contribución a la corrección de primer orden  $\hat{c}^1$  y (2) las fracturas reales con corrección  $c^1$ . La corrección de primer orden en la teoría de Hudson para estos dos conjuntos de fracturas es:

$$\hat{c}^1 + c^1, \quad (3.20)$$

mientras que la corrección de segundo orden es:

$$\frac{1}{\mu_b} (\hat{c}^1 + c^1) \chi (\hat{c}^1 + c^1), \quad (3.21)$$

por lo que para un material isótropo con tensor  $c^0$  que contiene estos dos conjuntos de fracturas se tiene que su tensor equivalente es:

$$c^{eff} = c^0 + \hat{c}^1 + c^1 + \frac{1}{\mu_b} (\hat{c}^1 + c^1) \chi (\hat{c}^1 + c^1), \quad (3.22)$$

**CAPÍTULO 3. TEORÍA DE HUDSON**  
**3.4. TEORÍA DE HUDSON PARA MATERIALES ISÓTROPAS FRACTURADOS**

---

Las constantes para el material con anisotropía causada por las fracturas ficticias están dadas como:

$$c^m = c^0 + \hat{c}^1 + \frac{1}{\mu_b} \hat{c}^1 \chi \hat{c}^1, \quad (3.23)$$

con las ecuaciones **3.22** y **3.23** se tiene:

$$c^{eff} = c^m + c^1 + \frac{1}{\mu_b} (\hat{c}^1 \chi c^1 + c^1 \chi \hat{c}^1 + c^1 \chi c^1), \quad (3.24)$$

despejando  $\hat{c}^1$  de **3.23**, sustituyéndolo en **3.24** y descartando los términos de tercer orden se obtiene:

$$c^{eff} = c^m + c^1 + \frac{1}{\mu_b} [(c^m - c^0) \chi c^1 + c^1 \chi (c^m - c^0) + c^1 \chi c^1], \quad (3.25)$$

estas ecuaciones funcionan para los mismos límites en la densidad de fracturas que contempla la teoría de Hudson, de al rededor de 0.1, lo que corresponde a una anisotropía de alrededor del 10% (Hudson, 1991a).

El análisis se extendió aplicando el método de homogeneización para el caso de una matriz anisótropa con fracturas circulares. Las propiedades efectivas resultan tener la misma forma que en el caso isótropo pero con las cantidades  $U_{ij}$  y  $\chi_{ijkl}$  mucho más complejas por lo que si la anisotropía intrínseca del medio es pequeña, la técnica de asociarla con una distribución de fracturas imaginarias puede usarse (Hudson, 1994).

## Capítulo 4

# Simulaciones numéricas en medios fracturados

### 4.1. Resumen

En éste capítulo se ofrece un panorama general sobre cómo se integran las fracturas en las simulaciones numéricas, profundizando en la LSM. Posteriormente se describe el método de Galerkin discontinuo (DGM por sus siglas en inglés) y se desarrolla la formulación débil para la implementación de medios anisótropos fracturados bajo dicho método.

### 4.2. Fracturas en las simulaciones

En la geología las fracturas se definen como un par de superficies claramente separadas, las cuales están relacionadas con la deformación permanente de las rocas. Fundamentalmente las fracturas están caracterizadas en términos de su radio, longitud, densidad, orientación y tamaño de apertura (Cui et al., 2018). En general existen dos formas de incluir los efectos de las fracturas en las simulaciones numéricas (De Basabe et al., 2016), mediante el uso de teorías de medios equivalentes (capítulo 3) o utilizando esquemas numéricos para incluir fracturas discretas en el modelo. Algunos ejemplos de modelos que incluyen directamente las fracturas en esquemas numéricos son: (1) usar teorías de medios equivalentes de manera local, (2) dentro del esquema numérico, incluir condiciones locales de baja velocidad y densidad y por último, (3) usar explícitamente condiciones de desplazamientos discontinuos.

Múltiples modelos se han desarrollado para representar las propiedades físicas de una fractura y así calcular el campo de desplazamiento a lo largo de la discontinuidad de la fractura, en general estos modelos de fracturas se pueden dividir en tres grupos(Liu et al., 1995):

- El modelo más simple es el de una capa delgada de fluido viscoso con paredes limitantes paralelas.
- Considerar a la fractura como una frontera plana con una distribución de huecos con formas de grietas.
- La representación de una fractura como una interfaz en la cual los esfuerzos son continuos pero los desplazamientos pueden ser discontinuos, a esta condición se le llama LSM.

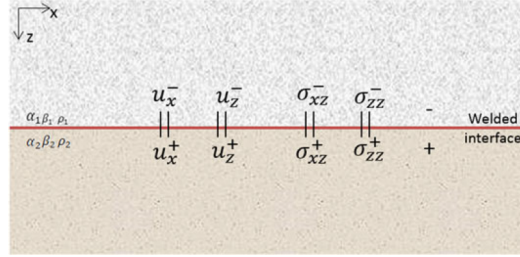
La principal ventaja de estos esquemas numéricos es que requieren de pocas suposiciones, por lo que tienen una amplia aplicabilidad e incluso son útiles para validar otros métodos como las teorías de medios equivalentes. En especial las condiciones de LSM son las que requieren de menos supuestos (De Basabe et al., 2016).

### 4.3. Condición de desplazamiento discontinuo (LSM)

Las condiciones de frontera están representadas por funciones de constricción que se cumplen a lo largo de ella. Toda onda, a lo largo de la frontera, está sujeta a las relaciones que existen entre el campo de desplazamientos y el de esfuerzos de un lado de la frontera con el otro. Las propiedades de contacto de los dos lados de la frontera, deciden las nuevas expresiones de la onda en términos de desplazamiento y el esfuerzo (Cui et al., 2018). Las condiciones de frontera se dividen entre las de una interfaz perfectamente o imperfectamente unida. Una interfaz perfectamente unida es una superficie donde los campos de desplazamientos y el de esfuerzos son continuos (figura 4.1). Si se denota a  $\mathbf{u}^+$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^+$  como los campos en la parte inferior y a  $\mathbf{u}^-$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^-$  los correspondientes a la parte superior, se tiene que las condiciones de frontera son:

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}^-, \quad (4.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \boldsymbol{\sigma}^-. \quad (4.2)$$

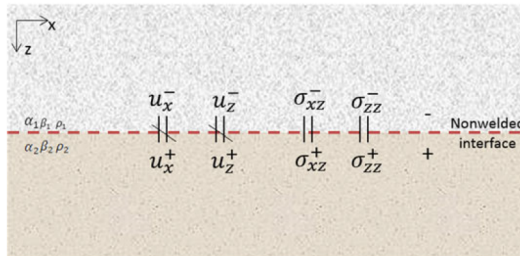


**Figura 4.1.** Medio separado por una superficie perfectamente acoplada, se muestran dos de los tres componentes de  $\mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  (Cui et al., 2018).

Un acoplamiento imperfecto consiste en que los esfuerzos a lo largo de la interfaz son continuos pero los pequeños desplazamientos no (figura 4.2). La diferencia vectorial entre los desplazamientos se asume depende linealmente del esfuerzo, a esa restricción se le llama LSM y por lo general se escribe en términos de la conformidad, en lugar de la rigidez (Schoenberg, 1980):

$$\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = [\mathbf{u}] = \mathbf{Z}\boldsymbol{\sigma}_\gamma, \quad (4.3)$$

si  $\mathbf{u}$  está dada en metros y  $\boldsymbol{\sigma}$  en Pascales, entonces  $\mathbf{Z}$  está dada en m/Pa. La matriz  $\mathbf{Z}$  es simétrica y



**Figura 4.2.** Medio separado por una superficie imperfectamente acoplada, se muestran dos de los tres componentes de  $\mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  (Cui et al., 2018).

sus componentes se ven reducidas dependiendo de las simetrías existentes en la fractura (Schoenberg & Douma, 1988):

- **Fractura con simetría triclínica:** Este es el caso más general y las seis componentes de  $\mathbf{Z}$  son requeridas:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{12} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{13} & Z_{23} & Z_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

- **Fractura con simetría monoclínica:** Si la fractura es invariante bajo reflexiones sobre algún plano que contenga al eje  $z$ ,  $\mathbf{Z}$  toma la forma:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_N & 0 & Z_{N1} \\ 0 & Z_2 & 0 \\ Z_{N1} & 0 & Z_1 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

- **Fractura con simetría ortorrómbica:** Si la fractura se encuentra a lo largo de  $z$  y es invariante bajo reflexiones sobre el plano  $x$ - $y$ , la matriz  $\mathbf{Z}$  toma la forma:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_N & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & Z_{12} \\ 0 & Z_{12} & Z_1 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

- **Fractura con simetría transversal:** Si el comportamiento de la fractura es invariante con respecto a la rotación sobre el eje  $z$ , la matriz  $\mathbf{Z}$  toma la forma:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_T & 0 & 0 \\ 0 & Z_T & 0 \\ 0 & 0 & Z_N \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

donde  $Z_N$  y  $Z_T$  corresponden con la conformidad normal y tangencial sobre la fractura respectivamente. La forma de  $\mathbf{Z}$  es independiente de si el medio es isotrópico o anisótropo (Schoenberg & Douma, 1988). Dependiendo del tipo de fracturas, los factores  $Z_T$  y  $Z_N$  se pueden calcular a partir de las características de la fractura y la matriz que la contiene. Para fracturas secas y con forma de moneda se tiene (Tsvankin & Grechka, 2011):

$$Z_N = \frac{16a(1 - \nu_b^2)}{3\pi E_b}, \quad (4.8)$$

$$Z_T = \frac{Z_N}{1 - \nu_b/2}, \quad (4.9)$$

donde  $a$  es el radio de la fractura,  $\nu_b$  y  $E_b$  son la razón de Poisson y el módulo de Young respectivamente de la matriz.

## 4.4. Método de Galerkin discontinuo (DGM)

El Método de Galerkin discontinuo es una generalización del método de elementos finitos (FEM por sus siglas en inglés) que permite discontinuidades en las funciones en la frontera de los elementos. El DGM ha ganado importancia en el modelado de fracturas ya que es posible incluir el campo de desplazamientos con este tipo de discontinuidades y cuando el campo se requiere continuo, se puede imponer en la formulación débil con unos términos extras (De Basabe et al., 2016). El DGM tiene diferentes formulaciones que dependen de la forma en que se impone la continuidad en la formulación débil. La formulación utilizada en este trabajo de tesis es la llamada penalización interior (IP-DGM por sus siglas en inglés), la cual se divide en tres tipos dependiendo del término de simetría elegido (ver ecuación 4.19) (De Basabe et al., 2008):

- **Galerkin de penalización interior simétrico (SIPG):** El parámetro de simetría  $S = -1$ , formulación utilizada en este trabajo de tesis. Para más información sobre el análisis de estabilidad y dispersión numérica de SIPG revisar los trabajos de De Basabe et al. (2008) y De Basabe & Sen (2010).
- **Galerkin de penalización interior no simétrico (NIPG):** El parámetro de simetría  $S = 1$ .
- **Galerkin de penalización interior incompleto (IIPG):** El parámetro de simetría  $S = 0$ .

Para poder presentar la formulación débil de la ecuación de onda elástica se empleará la notación estándar en la literatura sobre IP-DGM (Wheeler, 1978), el dominio físico se representa con  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d$  indica el número de dimensiones físicas,  $\Omega_h$  describe una partición de elemento finito de  $\Omega$ ,  $\Gamma_h$  denota al conjunto de todas las caras entre los elementos de  $\Omega_h$ . Al subconjunto de caras donde el campo de desplazamientos es continuo se le denota  $\Gamma_c \subset \Gamma_h$  por otra parte, al subconjunto de caras que corresponden a las fracturas se le llama  $\Gamma_f \subset \Gamma_h$  con  $\Gamma_c \cup \Gamma_f = \Gamma_h$  y  $\Gamma_c \cap \Gamma_f = \emptyset$ . El promedio de una función se denota por  $\{ \cdot \}$  y el salto por  $[ \cdot ]$  por lo que si  $\gamma$  es la interfaz entre los elementos  $E_1$  y  $E_2$  se tiene que la función promedio y salto de  $u$  está dada por:

$$\{u\} = \frac{1}{2}(u|_{E_1} + u|_{E_2}), \quad (4.10)$$

$$[u] = (u|_{E_1} - u|_{E_2}). \quad (4.11)$$

#### 4.4.1. Formulación débil

La ecuación de onda elástica para un medio heterogéneo anisótropo, usando la convención de suma de Einstein, se escribe como:

$$\rho \partial_{tt} u_i - \partial_j (c_{ijkl} \partial_l u_k) = f_i \quad \text{en } \Omega \times (0, T] \quad \text{con } i, j = 1, \dots, d, \quad (4.12)$$

$$T_i(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (4.13)$$

$$u_i = \partial_t u_i = 0 \quad \text{para } t = 0, \quad (4.14)$$

donde  $\partial\Omega$  es la frontera de  $\Omega$ ,  $(0, T]$  es el dominio del tiempo,  $u_i$  es una componente del campo de desplazamientos,  $\rho = \rho(\mathbf{x})$  la densidad del medio,  $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$  y  $\mu = \mu(\mathbf{x})$  los parámetros de Lamé. El vector de tracción  $T_i$  está dado por:

$$T_i = \sigma_{ij} \cdot n_j, \quad (4.15)$$

con  $n_j$  como el vector que apunta normal a la superficie  $\partial\Omega$ .

Para obtener la formulación débil de la ecuación 4.12 apropiada para DGM, se define el espacio vectorial  $\mathbf{X} = X^d$ , con  $X = \text{span}\{\phi_i\}_{i=1}^N$  donde  $\phi_i$  son funciones base y  $N$  es el número total de funciones base. Las funciones base no necesitan ser continuas en todo el dominio pero si dentro de los elementos. Para obtener la formulación débil se multiplica por la llamada función prueba  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$ , se integra sobre los elementos y se suman todas las contribuciones de los elementos, lo que lleva a (De Basabe et al., 2016; Riviere & Wheeler, 2003):

$$\sum_{E \in \Omega_h} ((\rho \partial_{tt} \mathbf{u}, \mathbf{v})_E + \mathbf{B}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v})) + \sum_{\gamma \in \Gamma_c} \mathbf{J}_\gamma^c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{E \in \Gamma_h} (\mathbf{f}, \mathbf{v})_E, \quad (4.16)$$

donde:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_E = \int_E u_i v_i \, d\mathbf{x}, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{B}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_E c_{ijkl} e_{k,l}(\mathbf{u}) e_{i,j}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \quad (4.18)$$

**CAPÍTULO 4. SIMULACIONES NUMÉRICAS EN MEDIOS FRACTURADOS**  
**4.4. MÉTODO DE GALERKIN DISCONTINUO (DGM)**

---

$$\mathbf{J}_\gamma^c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = - \int_\gamma \{T_i(\mathbf{u})\}[v_i] d\gamma + S \int_\gamma \{T_i(\mathbf{v})\}[u_i] d\gamma + \frac{R}{|\gamma|} \int_\gamma \{c_{11}\}[u_i][v_i] d\gamma. \quad (4.19)$$

Si se supone que las fracturas se encuentran entre las interfaces de los elementos de la malla de elementos finitos, la condición de LSM se impone en la formulación débil con el término (De Basabe et al., 2016):

$$\mathbf{J}_\gamma^f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\gamma Z_{ij}^{-1}[u_j][v_i] d\gamma, \quad (4.20)$$

de esta forma, la formulación débil que incluye los efectos de las fracturas es:

$$\sum_{E \in \Omega_h} ((\rho \partial_{tt} \mathbf{u}, \mathbf{v})_E + \mathbf{B}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v})) + \sum_{\gamma \in \Gamma_c} \mathbf{J}_\gamma^c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \sum_{\gamma \in \Gamma_f} \mathbf{J}_\gamma^f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{E \in \Gamma_h} (\mathbf{f}, \mathbf{v})_E. \quad (4.21)$$

## Capítulo 5

# Diseño Experimental

Se presenta el procedimiento realizado para comparar los resultados de la teoría de medios equivalentes de Hudson contra la implementación directa de fracturas, cuando se propaga una onda sísmica en una matriz fracturada con anisotropía intrínseca VTI y un conjunto de fracturas verticales paralelas. Se diseña un medio para posteriormente obtener por una parte, su equivalente con la teoría de Hudson y por otra su representación con rocas digitales. Se presentan diferentes medios, variando los parámetros de densidad de fracturas y cantidad de anisotropía intrínseca para analizar su posible influencia en los resultados.

### 5.1. Diagrama de flujo del trabajo

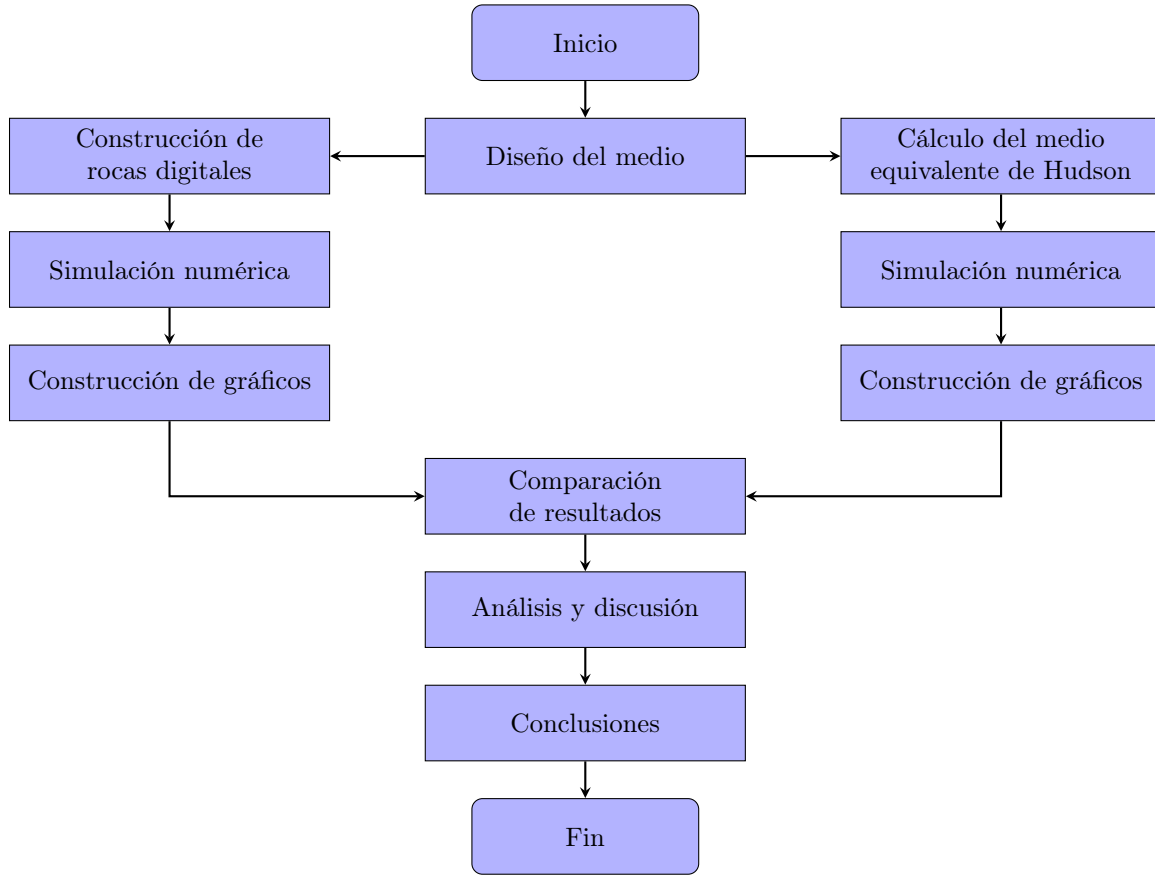
Para estudiar el efecto que tiene la cantidad de anisotropía intrínseca de los medios, la densidad de fracturas y la combinación de estos dos parámetros en la calidad de la predicción de la teoría de Hudson, se propusieron 4 medios con diferente porcentaje de anisotropía VTI. Para cada uno de estos medios se incluyeron 3 densidades de fracturas para obtener un total de 12 medios. Para cada uno de estos medios se siguió el flujo de trabajo de la figura 5.1. Los parámetros de las simulaciones para todos los medios tratados en este trabajo de tesis se muestran en la tabla 5.1.

Parámetro de la simulación	Descripción
Número de elementos	600×600
Fuente sísmica	Vertical
Función fuente	Ricker
Frecuencia	30 [HZ]
Localización de la fuente	Centro del medio
Tiempo total de simulación	0.16 [s]
Gráficas del desplazamiento	t = 0.16 [s]

**Tabla 5.1.** Se muestran los parámetros de las simulaciones utilizados en este trabajo de tesis para todos los medios simulados.

Las características anteriores fueron tomadas del trabajo de Rioyos Romero (2017), el valor de la frecuencia de la fuente se encuentra entre los rangos de frecuencias sísmicas usadas en la exploración petrolera y el tipo de fuente utilizada genera ondas S y P. El campo de desplazamientos de todas las simulaciones fue graficado con el software ParaView.

**CAPÍTULO 5. DISEÑO EXPERIMENTAL**  
**5.1. DIAGRAMA DE FLUJO DEL TRABAJO**



**Figura 5.1.** Flujo de trabajo para cada uno de los 12 medios propuestos.

Por otro lado, todas las simulaciones numéricas se realizaron bajo los siguientes parámetros del medio:

De acuerdo con uno de los resultados de Rioyos Romero (2017), la longitud de las fracturas no es un factor determinante para la propagación sísmica siempre y cuando la densidad de fracturas  $e$  se mantenga constante, por lo que la longitud de 2.33m se eligió pensando en obtener el menor tiempo de cómputo y mejor resolución en el frente de onda de las ondas P y S. Es importante notar que en la implementación directa de las fracturas en el esquema numérico, la longitud de los elementos de la malla determina la longitud de las fracturas, por lo que se tomarán  $600 \times 600$  elementos para que en el medio de  $1400\text{m} \times 1400\text{m}$ , cada elemento corresponda a 2.3m de largo. Se toma al radio de la fractura  $a$  como  $l/2$  con  $l = 2.33\text{m}$ .

Para calcular el número de fracturas ( $nf_i$ ) que la roca digital debe tener a partir de una densidad de fracturas  $e_i$  dada para el medio  $i$ , se parte de la ecuación 3.7. Despejando  $nf_i := n_i$ , tomando la raíz cúbica (densidad lineal) y elevando al cuadrado (densidad en el plano):

$$nf_i = \left( \frac{e_i V}{\left(\frac{l}{2}\right)^3} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (5.1)$$

Para calcular la matriz de rigidez para los diferentes valores de anisotropía intrínseca, se parte del medio isotrópico con las características de la tabla 5.3 La matriz de rigidez para dicho medio

**CAPÍTULO 5. DISEÑO EXPERIMENTAL**  
5.1. DIAGRAMA DE FLUJO DEL TRABAJO

Parámetro del medio	Descripción
Espacio del modelo	2D
Dimensiones	1400 [m] × 1400 [m]
Distribución de fracturas	Aleatoria
Longitud de fracturas	2.33 [m]
Orientación de fracturas	Verticales
$Z_N$	$9.89 \times 10^{-11}$ [m/Pa]
$Z_T$	$1.19 \times 10^{-10}$ [m/Pa]

**Tabla 5.2.** Características compartidas por todos los medios simulados en este trabajo de tesis.

Parámetro del medio isótropo	Descripción
Densidad del medio	2500[Kg/m <sup>3</sup> ]
Parámetro de Lamé $\lambda_b$	14.2[GPa]
Parámetro de Lamé $\mu_b$	6.56[GPa]
Velocidad de onda P	3310[m/s]
Velocidad de onda S	1620[m/s]

**Tabla 5.3.** Características del medio isótropo del cual se calcularán las matrices de rigidez para los medios anisótropos.

isótropo (en unidades GPa) es:

$$c = \begin{bmatrix} 27.32 & 14.2 & 14.2 & 0 & 0 & 0 \\ 14.2 & 27.32 & 14.2 & 0 & 0 & 0 \\ 14.2 & 14.2 & 27.32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.56 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

En la sismología comúnmente se emplea el concepto de porcentaje de la anisotropía en la onda P y en la onda S. Para simetría VTI se define como sigue (Ikelle & Amundsen, 2018):

- El porcentaje  $x\%$  de anisotropía en la onda P es una medida de la diferencia relativa:

$$V_P(90^\circ) = \left(1 + \frac{x}{100}\right) V_P(0^\circ), \quad x\% = 100 \left( \frac{V_P(90^\circ) - V_P(0^\circ)}{V_P(0^\circ)} \right), \quad (5.3)$$

con lo cual se puede reescribir a  $c_{33}$  en términos del porcentaje de anisotropía como:

$$c_{11} = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 c_{33}. \quad (5.4)$$

- De manera muy similar se tiene que el porcentaje  $y\%$  de anisotropía en la onda S es una medida de la diferencia relativa:

$$V_{SH}(90^\circ) = \left(1 + \frac{y}{100}\right) V_{SH}(0^\circ), \quad y\% = 100 \left( \frac{V_{SH}(90^\circ) - V_{SH}(0^\circ)}{V_{SH}(0^\circ)} \right). \quad (5.5)$$

con lo cual se puede reescribir a  $c_{44}$  en términos del porcentaje de anisotropía como:

$$c_{66} = \left(1 + \frac{y}{100}\right)^2 c_{44}. \quad (5.6)$$

## 5.2. Características de los modelos simulados

A partir de la matriz de la expresión 5.2 y utilizando las ecuaciones 5.4 y 5.6 se calcularon las matrices (en unidades GPa) de rigidez de 3 medios con anisotropía VTI del 5, 10 y 15 %:

- **Anisotropía del 5 %:**

$$c = \begin{bmatrix} 27.32 & 14.2 & 14.2 & 0 & 0 & 0 \\ 14.2 & 27.32 & 14.2 & 0 & 0 & 0 \\ 14.2 & 14.2 & 24.78 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.95 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.56 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

- **Anisotropía del 10 %:**

$$c = \begin{bmatrix} 27.32 & 14.2 & 14.2 & 0 & 0 & 0 \\ 14.2 & 27.32 & 14.2 & 0 & 0 & 0 \\ 14.2 & 14.2 & 22.57 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.42 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.56 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

- **Anisotropía del 15 %:**

$$c = \begin{bmatrix} 27.32 & 14.2 & 14.2 & 0 & 0 & 0 \\ 14.2 & 27.32 & 14.2 & 0 & 0 & 0 \\ 14.2 & 14.2 & 20.65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.96 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.56 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Para cada uno de los cuatro medios anteriores (0 %, 5 %, 10 % y 15 % de anisotropía) se consideraron tres densidades de 0.01, 0.05 y 0.1. Para poder incorporar las fracturas en las rocas digitales fracturadas (RDF) se utilizó la ecuación 5.1. Con todo esto se obtuvieron los 12 modelos para las RDF y se muestran en la tabla 5.4

Por otro lado, para el cálculo de cada uno de los medios equivalentes de la tabla 5.2, se partió del caso de fracturas verticales paralelas llenas de gas o vacías con el fondo isótropo 5.2, en la ecuación 3.6 la matriz  $c^1$  (en unidades GPa) es:

$$c^1 = \begin{bmatrix} -200.24 & -104.08 & -104.08 & 0 & 0 & 0 \\ -104.08 & -54.09 & -54.09 & 0 & 0 & 0 \\ -104.08 & -54.09 & -54.09 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13.84 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13.84 \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

a partir de lo anterior y multiplicando por la densidad correspondiente de fracturas se obtiene que la corrección de primer grado es:

- **Densidad de fracturas  $e = 0.01$ :**

$$ec^1 = \begin{bmatrix} -2 & -1.04 & -1.04 & 0 & 0 & 0 \\ -1.04 & -0.54 & -0.54 & 0 & 0 & 0 \\ -1.04 & -0.54 & -0.54 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.13 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

**CAPÍTULO 5. DISEÑO EXPERIMENTAL**  
**5.2. CARACTERÍSTICAS DE LOS MODELOS SIMULADOS**

---

Modelo	% de anisotropía intrínseca	e	No. de fracturas
$0A_{0.01}$	0	0.01	67063
$0A_{0.05}$	0	0.05	196094
$0A_{0.1}$	0	0.1	311280
$5A_{0.01}$	5	0.01	67063
$5A_{0.05}$	5	0.05	196094
$5A_{0.1}$	5	0.1	311280
$10A_{0.01}$	10	0.01	67063
$10A_{0.05}$	10	0.05	196094
$10A_{0.1}$	10	0.1	311280
$15A_{0.01}$	15	0.01	67063
$15A_{0.05}$	15	0.05	196094
$15A_{0.1}$	15	0.1	311280

**Tabla 5.4.** Características de los medios simulados en este trabajo de tesis para la implementación RDF, todos los modelos comparten las características de la tabla 5.2.

- Densidad de fracturas  $e = 0.05$ :

$$ec^1 = \begin{bmatrix} -10.12 & -5.20 & -5.20 & 0 & 0 & 0 \\ -5.20 & -2.70 & -2.70 & 0 & 0 & 0 \\ -5.20 & -2.70 & -2.70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.692 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.692 \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

- Densidad de fracturas  $e = 0.1$ :

$$ec^1 = \begin{bmatrix} -20.02 & -10.40 & -10.40 & 0 & 0 & 0 \\ -10.40 & -5.40 & -5.40 & 0 & 0 & 0 \\ -10.40 & -5.40 & -5.40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.38 \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

para obtener el medio equivalente con la teoría de Hudson de primer orden, bastó con sumar la matriz del medio correspondiente con la matriz de corrección.

Por último se midieron las distancias entre la fuente y el frente de onda de las ondas P y S al tiempo  $t = 0.17s$  con la finalidad de notar discrepancias entre las predicciones de la teoría de Hudson para diferentes anisotropías intrínsecas de los medios.

## Capítulo 6

# Resultados y discusión

### 6.1. Resultados para densidad de fracturas del 0

Los campos de desplazamientos obtenidos para los diferentes medios anisótropos se muestran en la figura 6.1. En la tabla 6.1 se muestran las distancias que hay desde el centro del medio, que coincide con la fuente, hasta los diferentes frentes de onda en la dirección vertical y horizontal.

Distancia/VTI	0 %	5 %	10 %	15 %
$d_xP$ [m]	513	515	513	515
$d_zP$ [m]	513	488	466	446
$d_xS$ [m]	250	238	227	217
$d_zS$ [m]	250	237	225	218

**Tabla 6.1.** Distancias obtenidas con el software Paraview a partir de la figura 6.1.

Los resultados obtenidos coinciden con lo dictado por las ecuaciones 2.30 a la 2.35. Se puede observar un cambio claro en la posición del frente de onda P respecto a la dirección de propagación, mientras que para la onda S la diferencia se ve amortiguada debido a la dependencia de la velocidad horizontal con los términos  $c_{44}$  y  $c_{66}$ .

### 6.2. Resultados para $e = 0.01$

Las rocas digitales fracturadas correspondientes a las tres densidades de fracturas contempladas en éste trabajo, se muestran en la figura 6.2.

Los campos de desplazamiento obtenidos para las RDF y su medio equivalente, calculado con la teoría de Hudson, se muestran en las figuras 6.3 y 6.4. Todos los medios comparten una densidad de fracturas  $e = 0.01$ . Es importante mencionar que el porcentaje de anisotropía descrito hace referencia a la anisotropía intrínseca de cada medio y no a la obtenida en las simulaciones.

Se observa una reducción en las velocidades horizontales a comparación de los medios no fracturados. Este comportamiento se atribuye a la presencia de las fracturas verticales presentes en el medio. Gráficamente los resultados de la teoría de Hudson aparentan estar muy cercanos a los obtenidos mediante RDF.

En la tabla 6.2 se muestran las distancias que hay desde el centro del medio, que coincide con la fuente, hasta los diferentes frentes de onda en la dirección vertical y horizontal:

La diferencia entre lo predicho por las RDF y la teoría de Hudson para la onda P en la dirección horizontal, presenta una ligera disminución para los casos VTI del 5 y 10% respecto al 0% sin embargo para el caso del 15% se observa un incremento respecto al 0%. Tanto para la onda P

**CAPÍTULO 6. RESULTADOS Y DISCUSIÓN**  
**6.3. RESULTADOS PARA DENSIDAD DE FRACTURAS DEL 0.05**

d[m] \ VTI%	0 %			5 %		
	<b>RDF</b>	<b>ME</b>	<b>DIF</b>	<b>RDF</b>	<b>ME</b>	<b>DIF</b>
d <sub>x</sub> P	478	495	-17	474	487	-13
d <sub>z</sub> P	504	508	-4	479	483	-4
d <sub>x</sub> S	245	247	-2	234	236	-2
d <sub>z</sub> S	250	250	0	237	237	0
d[m] \ VTI%	10 %			15 %		
	<b>RDF</b>	<b>ME</b>	<b>DIF</b>	<b>RDF</b>	<b>ME</b>	<b>DIF</b>
d <sub>x</sub> P	477	490	-13	471	495	-24
d <sub>z</sub> P	456	460	-4	435	440	-5
d <sub>x</sub> S	223	224	-1	213	214	-1
d <sub>z</sub> S	225	228	-3	216	218	-2

**Tabla 6.2.** Distancias obtenidas con el software Paraview a partir de las figuras 6.3 y 6.4.

en la dirección vertical como para la onda S, no existen diferencias notables relacionadas con la cantidad de anisotropía VTI.

### 6.3. Resultados para densidad de fracturas del 0.05

Los campos de desplazamiento obtenidos para las RDF y su medio equivalente, calculado con la teoría de Hudson, se muestran en la figura 6.5 y 6.6. Todos los medios comparten una densidad de fracturas  $e = 0.05$ .

Se observan frentes de onda con una forma elíptica más alargada en la vertical a comparación de las presentadas en las figuras 6.3 y 6.4. Esto se debe a que entre más fracturas, mayor es el efecto de ellas sobre las propiedades elásticas generales del medio. Gráficamente se observa mucha concordancia entre los resultados obtenidos mediante RDF y su medio equivalente, ésta similitud se aprecia incluso mayor que para lo obtenido con una densidad de fracturas  $e = 0.01$ .

d[m] \ VTI%	0 %			5 %		
	<b>RDF</b>	<b>ME</b>	<b>DIF</b>	<b>RDF</b>	<b>ME</b>	<b>DIF</b>
d <sub>x</sub> P	405	407	2	405	405	0
d <sub>z</sub> P	487	487	0	460	460	0
d <sub>x</sub> S	235	235	0	225	223	2
d <sub>z</sub> S	241	241	0	228	228	0
d[m] \ VTI%	10 %			15 %		
	<b>RDF</b>	<b>ME</b>	<b>DIF</b>	<b>RDF</b>	<b>ME</b>	<b>DIF</b>
d <sub>x</sub> P	411	411	0	412	409	3
d <sub>z</sub> P	437	437	0	415	415	0
d <sub>x</sub> S	216	212	4	206	201	5
d <sub>z</sub> S	220	216	4	211	204	7

**Tabla 6.3.** Distancias obtenidas de las figuras 6.3 y 6.4

Se observa una concordancia casi perfecta entre los resultados de las RDF y los medios equivalentes de Hudson. La mayor diferencia que se obtuvo fue de 7m para el caso con anisotropía VTI

**CAPÍTULO 6. RESULTADOS Y DISCUSIÓN**  
**6.4. RESULTADOS PARA DENSIDAD DE FRACTURAS DEL 0.1**

---

del 15 % pero esta distancia solo representa una variación de las velocidades entre los modelos del 3 %, por lo que no se observa una dependencia clara, entre la calidad de las predicciones obtenidas mediante la teoría de Hudson con la cantidad de anisotropía VTI.

### 6.4. Resultados para densidad de fracturas del 0.1

Los campos de desplazamiento obtenidos para las RDF y sus medios equivalentes, calculados con la teoría de Hudson, se muestran en las figuras **6.7** y **6.8**. Todos los medios comparten una densidad de fracturas  $e = 0.1$ .

Se puede observar una clara discrepancia entre los resultados de las RDF con su correspondiente medio equivalente, esto indica que el rango de densidades para las cuales la teoría de Hudson es aplicable es menor a  $e = 0.1$ . En la representación gráfica la onda P y S de los medios equivalentes parecieran tener la misma velocidad, lo cual carece de sentido físico.

En la tabla **6.4** se muestran las distancias que hay desde el centro del medio, que coincide con la fuente, hasta los diferentes frentes de onda en la dirección vertical y horizontal: Para una

d[m] \ VTI %	0 %			5 %		
	RDF	ME	DIF	RDF	ME	DIF
$d_xP$	359	240	119	359	272	87
$d_zP$	475	460	15	450	433	17
$d_xS$	225	211	14	216	202	14
$d_zS$	230	225	5	220	213	7
d[m] \ VTI %	10 %			15 %		
	RDF	ME	DIF	RDF	ME	DIF
$d_xP$	356	268	88	355	268	87
$d_zP$	424	407	17	402	383	19
$d_xS$	207	192	15	200	181	19
$d_zS$	211	200	11	201	188	13

**Tabla 6.4.** Distancias obtenidas de las figuras **6.7** y **6.8**

anisotropía VTI del 0 % se observa la mayor discrepancia entre los resultados de RDF y ME para la velocidad horizontal de la onda P. Para todos los demás medios no se observa una dependencia entre las diferencias y la cantidad de anisotropía.

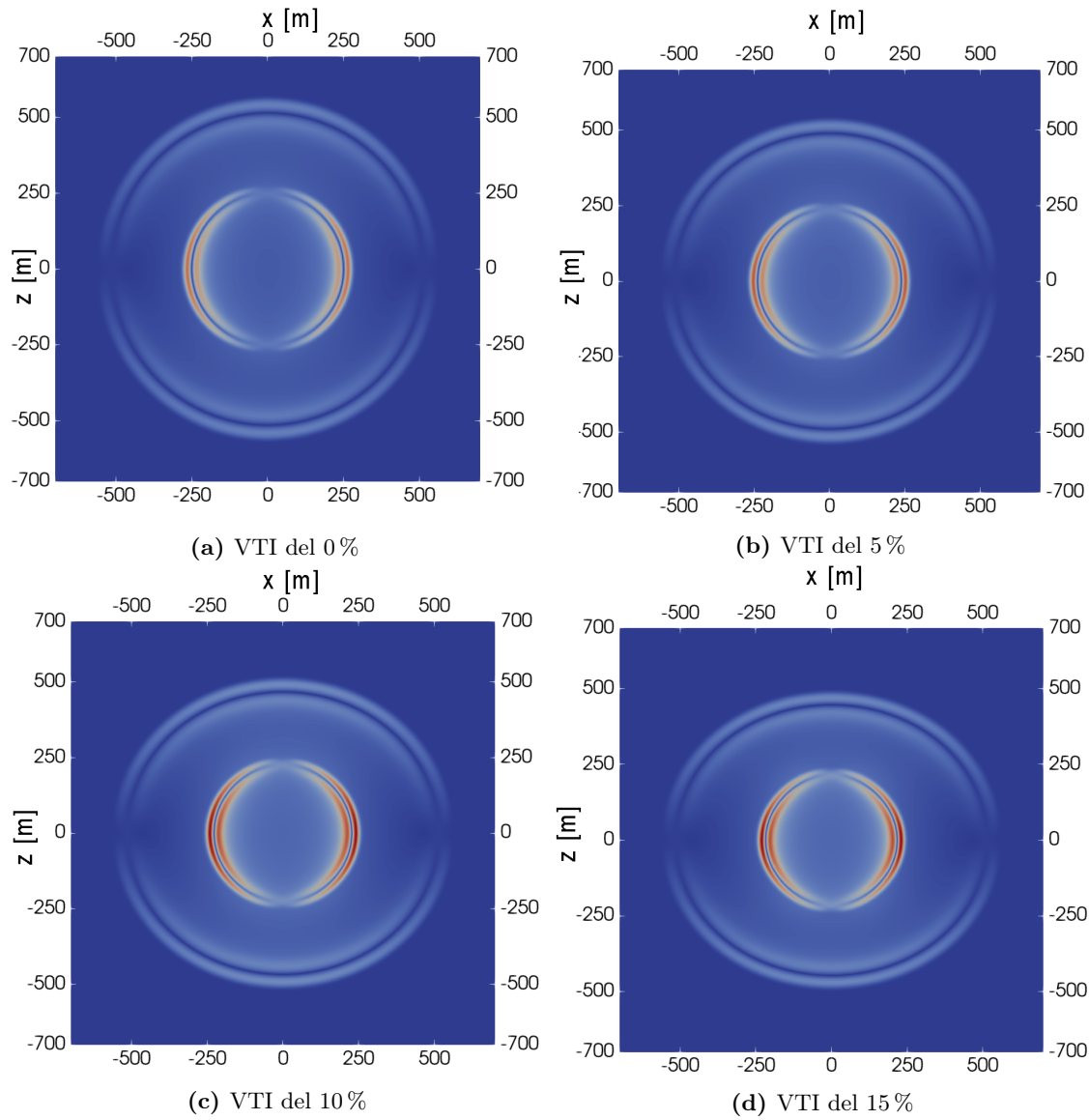
### 6.5. Discusiones

En el presente trabajo se estudió la calidad en las predicciones de la teoría de Hudson en comparación con los resultados obtenidos mediante RDF. Se realizaron múltiples experimentos variando la cantidad de anisotropía intrínseca del medio y la densidad de fracturas para encontrar una posible relación entre estos dos parámetros y la eficacia de la teoría de Hudson. Respecto a esta comparación entre las RDF y la teoría de Hudson se puede destacar lo siguiente:

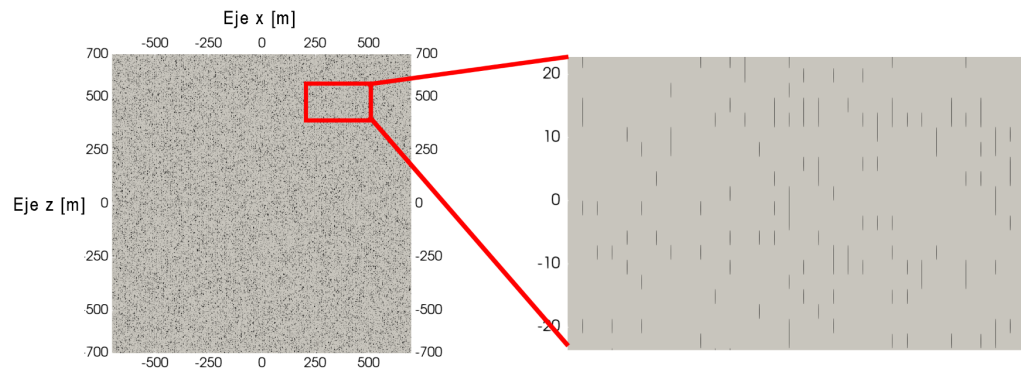
- Grechka & Kachanov (2006) realizaron un análisis para los coeficientes  $c_{11}$  y  $c_{22}$  (los cuales están relacionados con la onda P) y encontraron que la teoría de Hudson mantiene buenos resultados para una densidad de  $e = 0.05$ , aquí se analizó el desplazamiento total producido por las ondas P y S y se encontró que el rango en donde la teoría de Hudson tiene gran precisión en sus predicciones es para una densidad de fracturas de al rededor de  $e = 0.05$ . Se observa que a densidades bajas la calidad de los resultados disminuye levemente y para la

densidad  $e = 0.1$  se obtiene un comportamiento errático especialmente notorio en la onda P para la dirección horizontal, esto coincide con lo reportado por Rioyos Romero (2017) donde menciona que la teoría de Hudson empieza a perder precisión en el intervalo  $0.058 < e < 0.103$  y además se reporta un incremento de la discrepancia alrededor de  $e = 0.023$ .

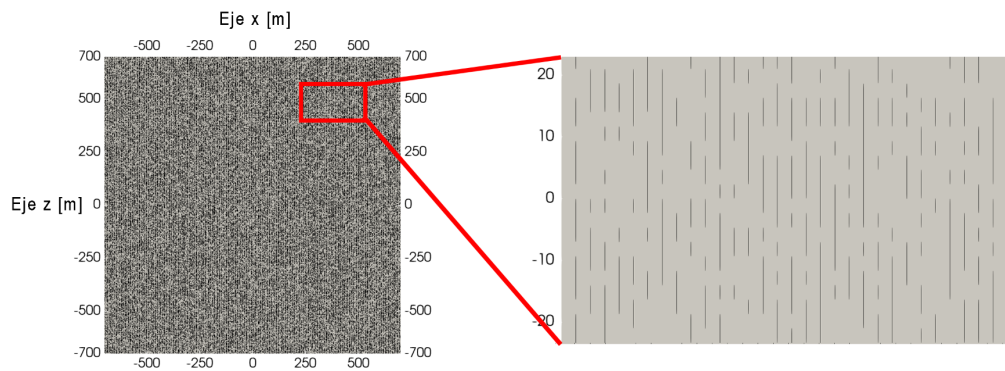
- De acuerdo a los resultados encontrados en las simulaciones, no se observa una clara relación entre la precisión de la teoría de Hudson con la cantidad de anisotropía intrínseca del medio, al menos hasta una cantidad del 15% para anisotropía VTI. Esto contrasta con los supuestos empleados en el desarrollo de la teoría de Hudson (1980, 1981) ya que se emplea explícitamente una matriz isótropa en su desarrollo.
- La inclusión directa de una matriz anisótropa complica en gran medida el cálculo del medio equivalente de Hudson (1994), es por eso que Hudson (1991a) propone calcular las propiedades generales de materiales anisótropos fracturados, atribuyendo esa anisotropía VTI a un conjunto de fracturas ficticias. En la comparación del medio isótropo no fracturado y fracturado con densidad de fracturas del 0.05, los resultados arrojan que un conjunto de fracturas verticales tienen un efecto tanto en la dirección vertical y horizontal para las ondas P y S, por lo que atribuir la anisotropía intrínseca de un medio a una densidad de fracturas ficticias puede ser un procedimiento complejo.
- Atribuir la anisotropía intrínseca a una densidad de fracturas en la teoría de Hudson limita la cantidad de anisotropía que la matriz puede tener a los mismos rangos donde la teoría de Hudson es precisa. En los cálculos descritos en el método se explica que las matrices anisótropas utilizadas en este medio fueron calculadas partiendo de una isotrópica, recalculando los coeficientes para una diferencia elegida en las velocidades horizontales y verticales, por otra parte, el término de corrección de Hudson para las fracturas fue calculado a partir de la matriz isótropa original. De Figueiredo et al. (2019) comprobaron experimentalmente la aplicabilidad de la teoría de Hudson para un medio con anisotropía VTI débil del 2% y reportaron que para la velocidad de la onda S, las mejores predicciones se encontraban para densidades menores al 0.04, mientras que para la velocidad de la onda P, el rango era para densidades por debajo de 0.06. En este trabajo de tesis se extienden esos valores hasta un 15% para VTI ya que no se observaron variaciones en la viabilidad de la teoría de Hudson en relación con cantidad de anisotropía. Es importante mencionar que esto puede deberse a la forma en la que se calculó el medio equivalente.



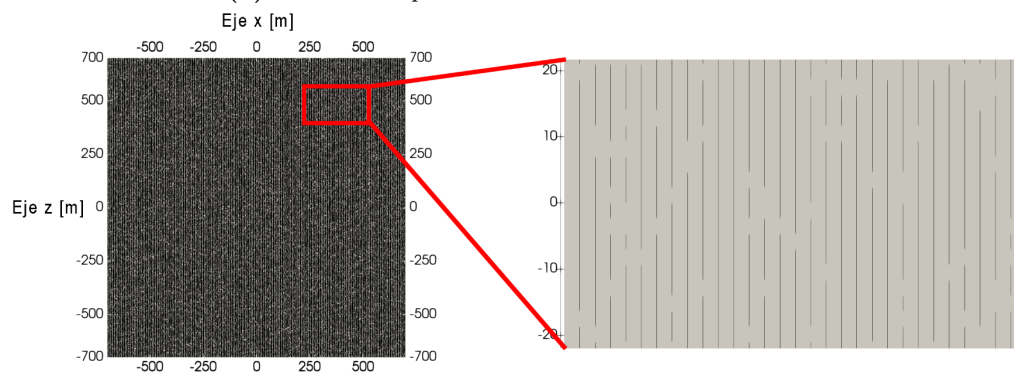
**Figura 6.1.** Se muestra el desplazamiento total para los cuatro medios sin fracturas ( $e = 0$ ) en el tiempo  $t = 0.17$  s.



(a) Medio correspondiente a  $e=0.01$

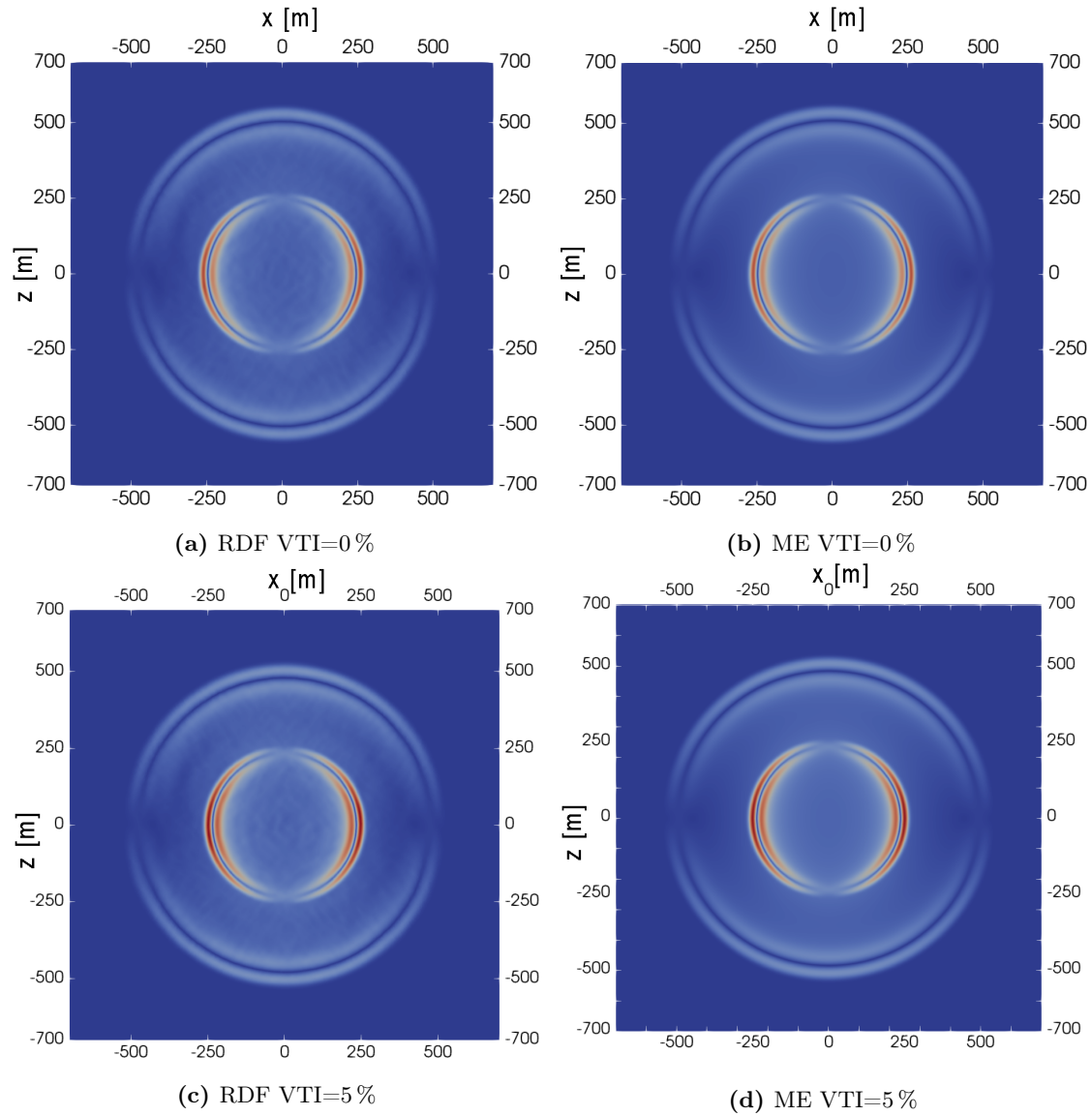


(b) Medio correspondiente a  $e=0.05$

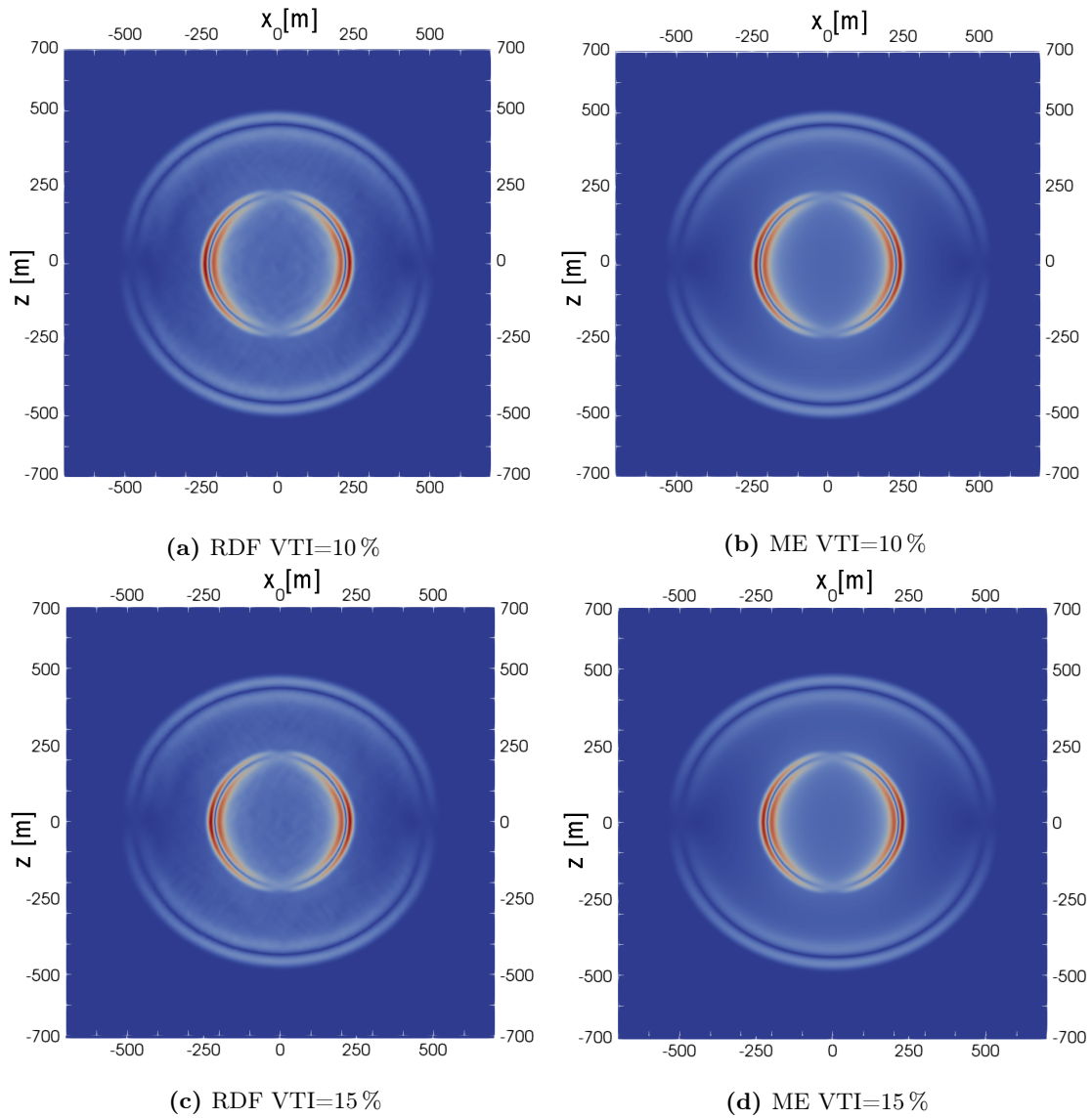


(c) Medio correspondiente a  $e=0.1$

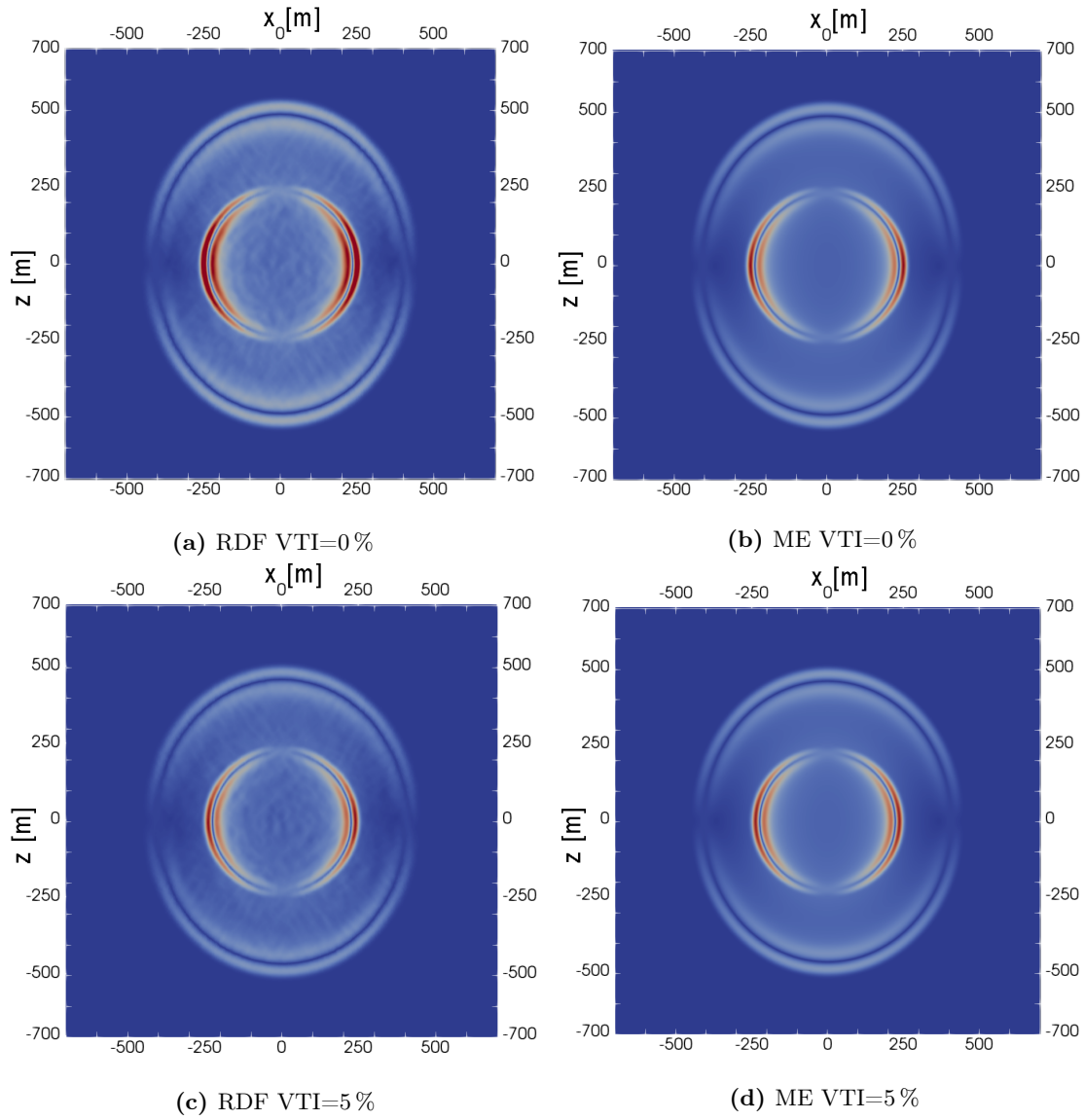
Figura 6.2. Fracturas de las rocas digitales que se utilizaron para este trabajo de tesis.



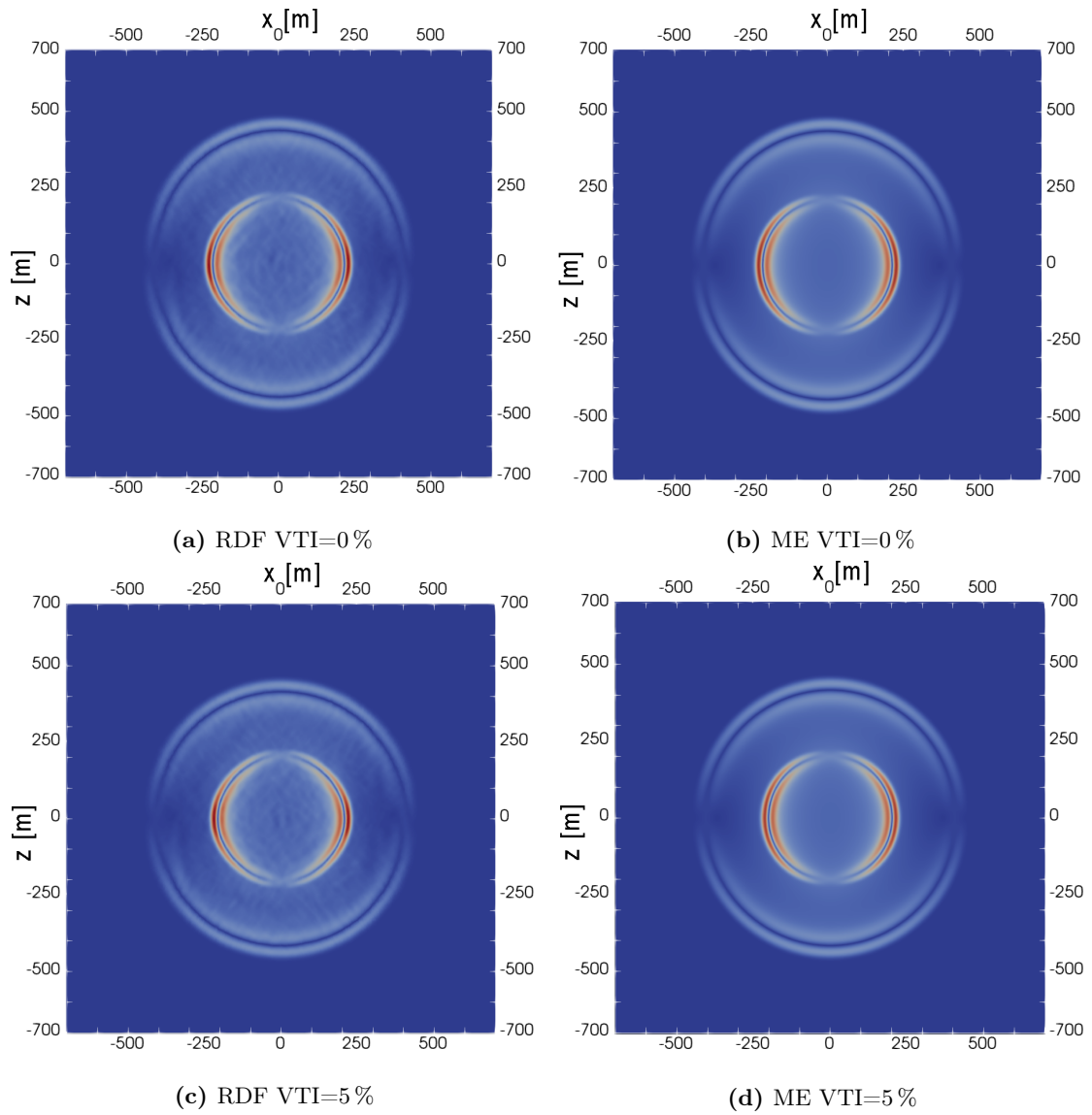
**Figura 6.3.** Comparación gráfica de los campos de desplazamiento entre las RDF y su respectivo medio equivalente para los medios con anisotropía intrínseca VTI del 0 y 5% con una densidad de fracturas de  $e = 0.01$ .



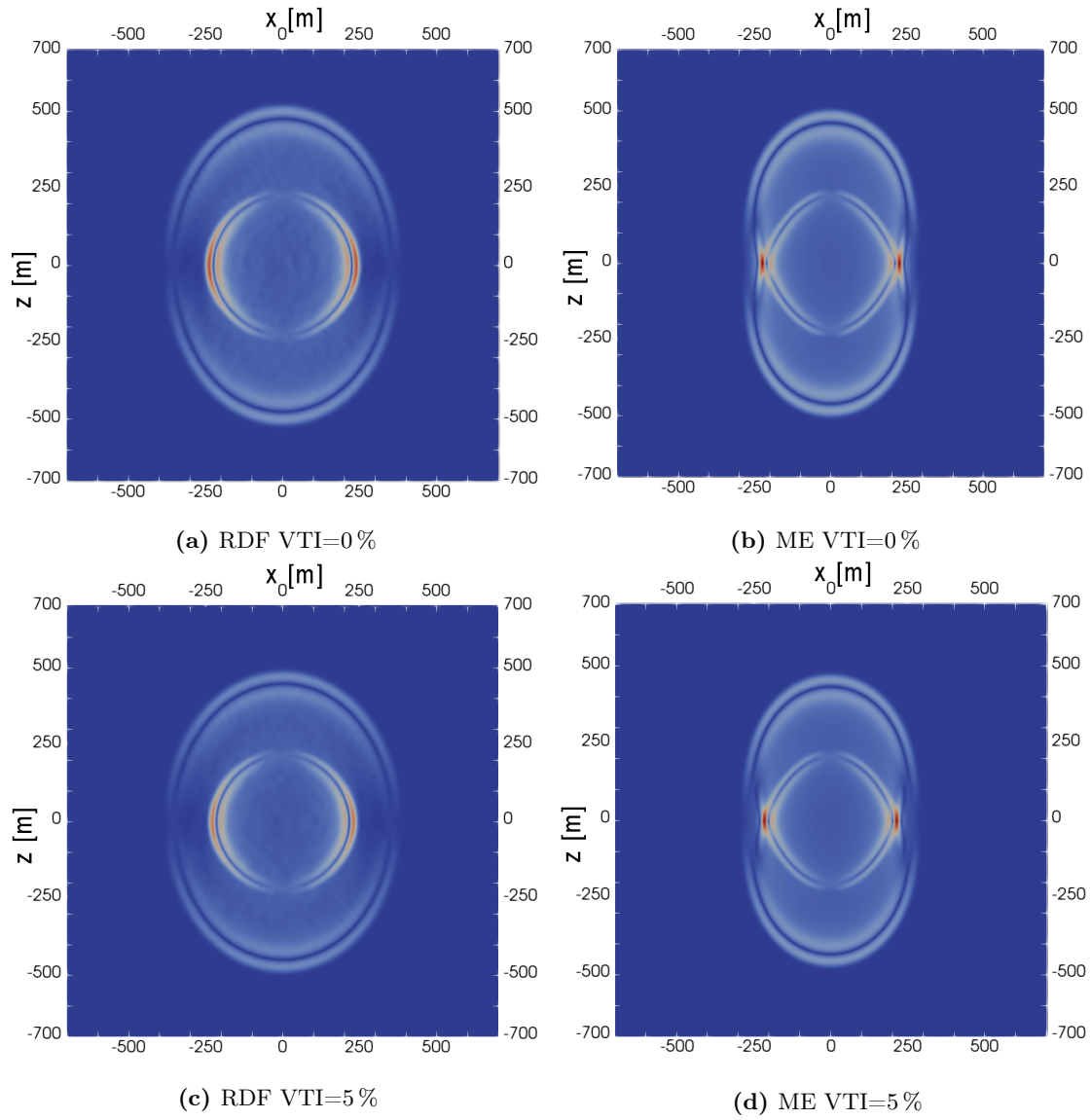
**Figura 6.4.** Comparación gráfica de los campos de desplazamiento entre las RDF y su respectivo medio equivalente para los medios con anisotropía intrínseca VTI del 10 y 15 % con una densidad de fracturas  $e = 0.01$ .



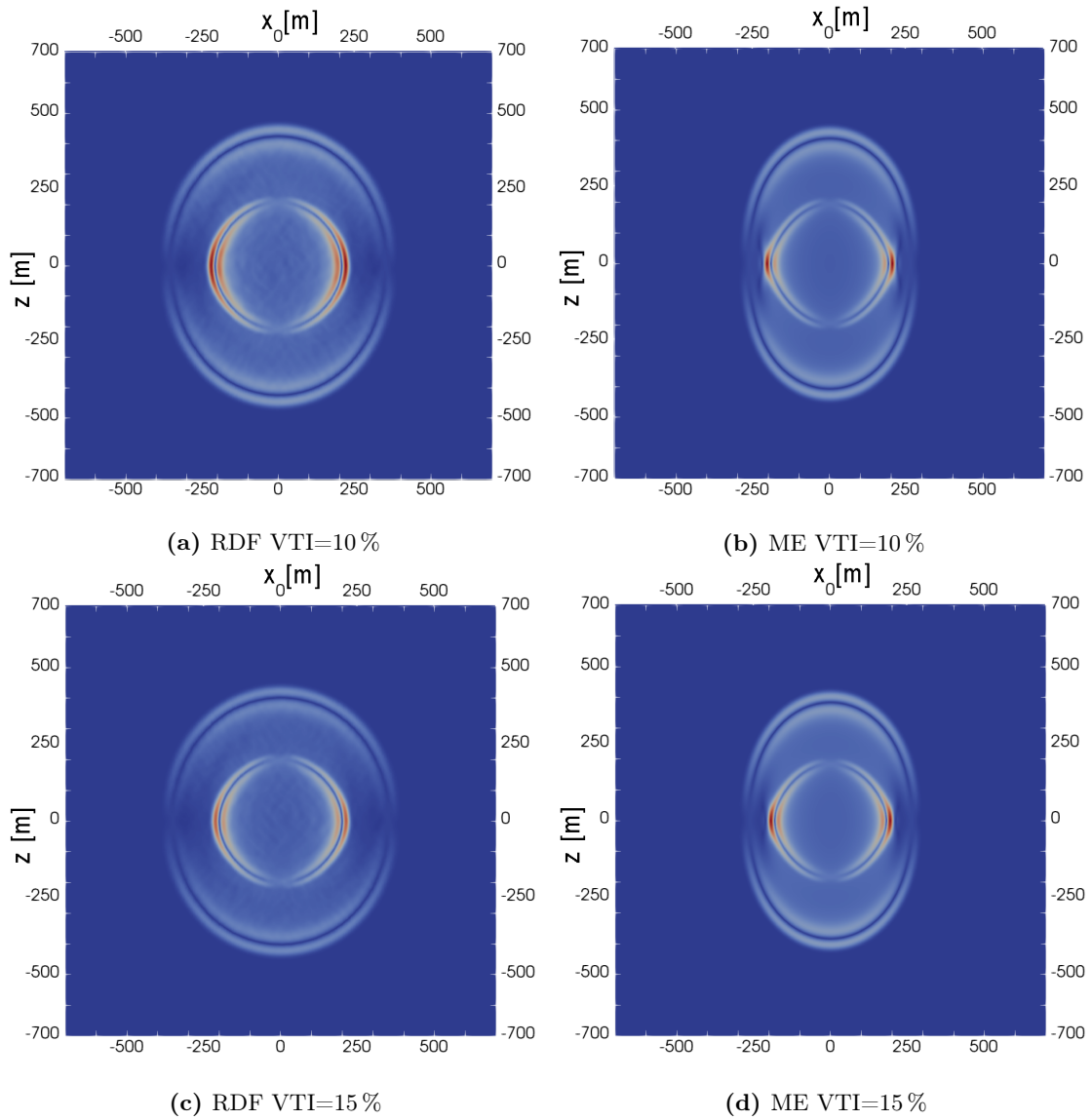
**Figura 6.5.** Comparación gráfica de los campos de desplazamiento entre las RDF y su respectivo medio equivalente para los medios con anisotropía intrínseca VTI del 0 y 5% con una densidad de fracturas ( $e = 0.05$ ).



**Figura 6.6.** Comparación gráfica de los campos de desplazamiento entre las RDF y su respectivo medio equivalente para los medios con anisotropía intrínseca VTI del 10 y 15% con una densidad de fracturas ( $e = 0.05$ ).



**Figura 6.7.** Comparación gráfica de los campos de desplazamiento entre las RDF y su respectivo medio equivalente para los medios con anisotropía intrínseca VTI del 0 y 5% con una densidad de fracturas ( $e = 0.1$ ).



**Figura 6.8.** Comparación gráfica de los campos de desplazamiento entre las RDF y su respectivo medio equivalente para los medios con anisotropía intrínseca VTI del 10 y 15 % con una densidad de fracturas ( $e = 0.1$ ).

## Capítulo 7

# Conclusiones

En éste trabajo de tesis se compararon los campos de desplazamiento total, para un medio fracturado, obtenido mediante dos métodos: (1) Implementación directa de las fracturas bajo el esquema de LSM y (2) su medio equivalente obtenido con la teoría de Hudson. Las comparaciones se hicieron para medios con anisotropía intrínseca VTI del 0 % (medio isótropo), 5 %, 10 % y 15 % con tres densidades de fracturas distintas con valores de 0.01, 0.05 y 0.1.

La densidad de fracturas es un factor clave en la calidad de las predicciones hechas por la teoría de Hudson. Se encontró que para una densidad de 0.05 las simulaciones en RDF y los medios equivalentes de Hudson arrojan prácticamete los mismos resultados. Se observa un ligero descenso en la precisión para densidades bajas y resultados completamente diferentes para densidades de 0.1.

La cantidad de anisotropía intrínseca del medio parece no tener un efecto en la precisión de la teoría de Hudson, al menos hasta el 15 % de anisotropía VTI. Esto es calculando el término de corrección en base a un medio isotrópico para después modificar  $c^0$  para una anisotropía VTI como se muestra en el método.

Este trabajo solo investigó las velocidades de onda en direcciones particulares (verticales y horizontales) y no en cualquier dirección arbitraria lo que restringe su aplicabilidad para direcciones paralelas y verticales a las fracturas.

# Bibliografía

- Aguilera, R., 1998. Geologic aspects of naturally fractured reservoirs, *The Leading Edge*, **17**(12), 1667–1670.
- Amalokwu, K., Chapman, M., Best, A. I., Sothcott, J., Minshull, T. A., & Li, X.-Y., 2015. Experimental observation of water saturation effects on shear wave splitting in synthetic rock with fractures aligned at oblique angles, *Geophysical Journal International*, **200**(1), 17–24.
- Ass'ad, J., Tatham, R., McDonald, J., Kusky, T., & Jech, J., 1993. A physical model study of scattering of waves by aligned cracks: Comparison between experiment and theory 1, *Geophysical Prospecting*, **41**(3), 323–339.
- Ass'ad, J., McDonald, J., Tatham, R., & Kusky, T., 1996. Elastic wave propagation in a medium containing oriented inclusions with a changing aspect ratio: A physical model study, *Geophysical Journal International*, **125**(1), 163–172.
- Ass'ad, J. M., Tatham, R. H., & McDonald, J. A., 1992. A physical model study of microcrack-induced anisotropy, *Geophysics*, **57**(12), 1562–1570.
- Auld, B. A., 1973. *Acoustic fields and waves in solids*, Wiley.
- Bakulin, A., Grechka, V., & Tsvankin, I., 2000. Estimation of fracture parameters from reflection seismic data—part i: Hti model due to a single fracture set, *Geophysics*, **65**(6), 1788–1802.
- Bristow, J., 1960. Microcracks, and the static and dynamic elastic constants of annealed and heavily cold-worked metals, *British Journal of Applied Physics*, **11**(2), 81.
- Council, N., 1996. Rock fractures and fluid flow.
- Crampin, S., 1978. Seismic-wave propagation through a cracked solid: polarization as a possible dilatancy diagnostic, *Geophysical Journal International*, **53**(3), 467–496.
- Crampin, S., 1981. A review of wave motion in anisotropic and cracked elastic-media, *Wave motion*, **3**(4), 343–391.
- Crampin, S., 1984. Effective anisotropic elastic constants for wave propagation through cracked solids, *Geophysical Journal International*, **76**(1), 135–145.
- Crampin, S., 1987. The basis for earthquake prediction, *Geophysical Journal International*, **91**(2), 331–347.
- Crampin, S. & Peacock, S., 2005. A review of shear-wave splitting in the compliant crack-critical anisotropic earth, *Wave motion*, **41**(1), 59–77.
- Crampin, S. & Zatsepin, S. V., 1997. Changes of strain before earthquakes: the possibility of routine monitoring of both long-term and short-term precursors, *Journal of Physics of the Earth*, **45**(1), 41–66.

- Cui, X., Lines, L., Krebs, E. S., & Peng, S., 2018. *Seismic forward modeling of fractures and fractured medium inversion*, Springer.
- De Basabe, J. D. & Sen, M. K., 2010. Stability of the high-order finite elements for acoustic or elastic wave propagation with high-order time stepping, *Geophysical Journal International*, **181**(1), 577–590.
- De Basabe, J. D., Sen, M. K., & Wheeler, M. F., 2008. The interior penalty discontinuous galerkin method for elastic wave propagation: grid dispersion, *Geophysical Journal International*, **175**(1), 83–93.
- De Basabe, J. D., Sen, M. K., & Wheeler, M. F., 2016. Elastic wave propagation in fractured media using the discontinuous galerkin method, *Geophysics*, **81**(4), T163–T174.
- De Figueiredo, J., Chiba, B. F., do Nascimento, M. J., da Silva, C. B., & Santos, L. K., 2019. Can hudson-crampin effective model be applied in cracked medium in which the background is weakly anisotropic (vti)?, *Journal of Applied Geophysics*, **161**, 255–260.
- Ding, P., Di, B., Wang, D., Wei, J., & Li, X., 2017. Measurements of seismic anisotropy in synthetic rocks with controlled crack geometry and different crack densities, *Pure and Applied Geophysics*, **174**(5), 1907–1922.
- Eshelby, J. D., 1957. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proceedings of the royal society of London. Series A. Mathematical and physical sciences*, **241**(1226), 376–396.
- Garbin, H. & Knopoff, L., 1973. The compressional modulus of a material permeated by a random distribution of circular cracks, *Quarterly of Applied Mathematics*, **30**(4), 453–464.
- Grechka, V. & Kachanov, M., 2006. Effective elasticity of fractured rocks: A snapshot of the work in progress, *Geophysics*, **71**(6), W45–W58.
- Grenon, M. & Hadjigeorgiou, J., 2012. Applications of fracture system models (fsm) in mining and civil rock engineering design, *International Journal of Mining, Reclamation and Environment*, **26**(1), 55–73.
- Helbig, K. & Thomsen, L., 2005. 75-plus years of anisotropy in exploration and reservoir seismics: A historical review of concepts and methods, *Geophysics*, **70**(6), 9ND–23ND.
- Hudson, J., 1980. Overall properties of a cracked solid, in *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 88, pp. 371–384, Cambridge University Press.
- Hudson, J., 1986. A higher order approximation to the wave propagation constants for a cracked solid, *Geophysical Journal International*, **87**(1), 265–274.
- Hudson, J., 1991a. Crack distributions which account for a given seismic anisotropy, *Geophysical Journal International*, **104**(3), 517–521.
- Hudson, J., 1991b. Overall properties of heterogeneous material, *Geophysical journal international*, **107**(3), 505–511.
- Hudson, J., 1994. Overall properties of anisotropic materials containing cracks, *Geophysical Journal International*, **116**(2), 279–282.
- Hudson, J. A., 1981. Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks, *Geophysical Journal International*, **64**(1), 133–150.

- Ikelle, L. T. & Amundsen, L., 2018. *Introduction to petroleum seismology*, Society of Exploration Geophysicists.
- Kachanov, M., 1980. Continuum model of medium with cracks, *Journal of the engineering mechanics division*, **106**(5), 1039–1051.
- Kachanov, M., 1993. Elastic solids with many cracks and related problems, *Advances in applied mechanics*, **30**, 259–445.
- Keller, J. B., 1964. Stochastic equations and wave propagation in, *Stochastic processes in mathematical physics and engineering*, **16**, 145.
- Krebes, E. S., 2019. *Seismic wave theory*, Cambridge University Press.
- Liu, C., Mehrabian, A., & Abousleiman, Y. N., 2018. Poroelastic dual-porosity/dual-permeability after-closure pressure-curves analysis in hydraulic fracturing, *Spe Journal*, **22**(01), 198–218.
- Liu, E., Hudson, J., Crampin, S., Rizer, W., Queen, J., & Rossmannith, H., 1995. Seismic properties of a general fracture, in *Mechanics of jointed and faulted rock*, pp. 673–678, Balkma Rotterdam.
- Liu, E., Hudson, J. A., & Pointer, T., 2000. Equivalent medium representation of fractured rock, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **105**(B2), 2981–3000.
- Luo, Z. & Bryant, S., 2014. Impacts of injection induced fractures propagation in co2 geological sequestration—is fracturing good or bad for co2 sequestration, *Energy Procedia*, **63**, 5394–5407.
- Mavko, G., Mukerji, T., & Dvorkin, J., 2020. *The rock physics handbook*, Cambridge university press.
- Pérez, M. A., Grechka, V., & Michelena, R. J., 1999. Fracture detection in a carbonate reservoir using a variety of seismic methods, *Geophysics*, **64**(4), 1266–1276.
- Rioyos Romero, R., 2017. *Simulación numérica de los efectos de las fracturas en los datos sísmicos*, Master’s thesis, CICESE.
- Riviere, B. & Wheeler, M. F., 2003. Discontinuous finite element methods for acoustic and elastic wave problems, *Contemporary Mathematics*, **329**(271-282), 4–6.
- Saenger, E. H., Krüger, O. S., & Shapiro, S. A., 2004. Effective elastic properties of randomly fractured soils: 3d numerical experiments, *Geophysical Prospecting*, **52**(3), 183–195.
- Schoenberg, M., 1980. Elastic wave behavior across linear slip interfaces, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **68**(5), 1516–1521.
- Schoenberg, M., 1983. Reflection of elastic waves from periodically stratified media with interfacial slip, *Geophysical prospecting*, **31**(2), 265–292.
- Schoenberg, M. & Douma, J., 1988. Elastic wave propagation in media with parallel fractures and aligned cracks1, *Geophysical prospecting*, **36**(6), 571–590.
- Shuai, D., Wei, J., Di, B., Guo, J., Li, D., Gong, F., & Stovas, A., 2020. Experimental study of crack density influence on the accuracy of effective medium theory, *Geophysical Journal International*, **220**(1), 352–369.
- Thomsen, L., 1986. Weak elastic anisotropy, *Geophysics*, **51**(10), 1954–1966.
- Tillotson, P., Chapman, M., Best, A. I., Sothcott, J., McCann, C., Shangxu, W., & Li, X.-Y., 2011. Observations of fluid-dependent shear-wave splitting in synthetic porous rocks with aligned penny-shaped fractures, *Geophysical Prospecting*, **59**(1), 111–119.

- Tsvankin, I. & Grechka, V., 2011. *Seismology of azimuthally anisotropic media and seismic fracture characterization*, Society of Exploration Geophysicists.
- Tsvankin, I., Gaiser, J., Grechka, V., Van Der Baan, M., & Thomsen, L., 2010. Seismic anisotropy in exploration and reservoir characterization: An overview, *Geophysics*, **75**(5), 75A15–75A29.
- Wang, D., Ding, P.-b., & Ba, J., 2018. Analysis of dynamic fracture compliance based on poroelastic theory. part ii: results of numerical and experimental tests, *Pure and Applied Geophysics*, **175**(8), 2987–3001.
- Wang, Z., 2002. Seismic anisotropy in sedimentary rocks, part 2: Laboratory data, *Geophysics*, **67**(5), 1423–1440.
- Wei, J.-X., Zhao, J.-G., Shuai, D., Di, B.-R., & Qin, S.-Y., 2018. Estimations of p-and s-wave velocities and anisotropy from measurements on artificial fractured samples, *Geophysics*, **83**(3), MR107–MR121.
- Wheeler, M. F., 1978. An elliptic collocation-finite element method with interior penalties, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **15**(1), 152–161.
- Winterstein, D., 1990. Velocity anisotropy terminology for geophysicists, *Geophysics*, **55**(8), 1070–1088.