BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA PROMOVER EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS ALGEBRAICOS

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
ING. GERARDO IRWIN TÉLLEZ VEGA

DIRECTOR DE TESIS

DR. JOSÉ DIONISIO ZACARÍAS FLORES

CO-DIRECTOR

DR. JOSÉ ANTONIO JUÁREZ LÓPEZ

PUEBLA, PUE. Mayo. 2021

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

TELLEZ VEGA GERARDO IRWIN

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 08 de diciembre de 2020, con la tesis titulada:

"UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA PROMOVER EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS ALGEBRAICOS"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 04 de junio de 2021

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

DRA´LAHR/l´agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico en el periodo de enero 2019 a diciembre de 2020, para la realización de esta investigación, esto ha sido posible gracias a ustedes.

CVU: 967294

Agradecimientos

Le agradezco mucho a Dios por permitirme este momento en mi vida.

A mi pareja por impulsarme, ya que gracias a ella es que llegué a esta maestría y me convenció de este gran paso en mi carrera, por sus consejos, su apoyo incondicional y su compañía, muchas gracias.

A mis padres y mi hermano por su apoyo en toda mi carrera y ahora mi maestría, por sus consejos, su escucha y toda la motivación que me dieron, les agradezco de todo corazón**.**

A mis asesores de tesis:

Dr. José Dionisio Zacarias Flores, que se nos adelantó en esta vida. Le estaré siempre agradecido por sus consejos, sus historias y por compartir su calidez humana. Gracias por todo el apoyo que me dio en este proyecto.

Dr. José Antonio Juárez López, le agradezco mucho por todo su apoyo en este trabajo de tesis, sus aportaciones, su tiempo, por sus clases y sus enseñanzas y por compartir su sabiduría, muchas gracias.

A mis profesores, Dr. Eric Flores Medrano, Dr. José Gabriel Sánchez Ruiz, Dr. José Martín Estrada Analco y Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruiz, les agradezco mucho por sus enseñanzas, sus correcciones y toda la sabiduría que compartieron conmigo dentro de la maestría, muchas gracias.

A los miembros del jurado, Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar, Dr. Gerardo Rocha Feregrino y Dra. María Araceli Juárez Ramírez, que se encargaron de revisar mi trabajo, les agradezco mucho por sus consejos, sus correcciones y el tiempo que le dedicaron a leer este documento. Muchas gracias por su dedicación y sus contribuciones a este trabajo de investigación.

A mis compañeros de generación, Luis, Paul, Daniel, Jesús Josafat, Omar, Alberto, Brian, Modemar, Lisset, Adriana, Eumir, Fernando, les agradezco por compartir su compañerismo, sus experiencias y su profesionalismo que me retroalimento como docente, como investigador y como persona. Y por su compartir su amistad, sus pláticas, sus consejos y convivencia fuera del aula, muchas gracias.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS.

ÍNDICE DE FIGURAS

Resumen

El presente trabajo de investigación fue motivado por los errores cometidos por estudiantes de educación media superior en la factorización de polinomios. Por lo que se hace una recopilación de información acerca de errores en álgebra detectados por diversos autores y se seleccionan los relacionados con el tema en cuestión, con el propósito de analizar y comprender los obstáculos que presentan y, con base en una revisión metodológica, dar una propuesta de enseñanza que les facilite aprehensión de conceptos. Después de revisar algunos artículos que hablaban sobre las factorizaciones, se hace la propuesta de un cambio en la enseñanza, tomando como referencia a algunos trabajos sobre la instrucción de factorizar con áreas, con la finalidad de que esto pueda ayudar en las dificultades relacionadas con el tema. Se piensa que al emplear un modelo geométrico ayude a la abstracción de las operaciones y que rompan con los obstáculos que se generan con el simple manejo sintáctico de las operaciones. Esto se hace basándonos en la teoría de Duval cambiando el registro de representación para que los estudiantes puedan acceder al estudio del objeto matemático a través de algo tangible como las figuras geométricas. Además de esto el uso del material es a través de un software de computadora desarrollado por Fernando Soto, Edwin Insuasty y colaboradores del grupo GESCAS de la Universidad de Nariño. Este software denominado *Caja de Polinomios* será utilizado por los participantes de este estudio con actividades basadas en el aprendizaje significativo de David Ausubel, creando actividades previas a la interacción con el programa para conseguir que los participantes tuvieran las ideas y conceptos previos en su estructura cognitiva. Este estudio contiene el análisis de la aplicación de las actividades y las conclusiones de esta propuesta.

Palabras clave: Caja de polinomios, factorización, aprendizaje significativo.

Abstract

The present research was motivated by the errors made by high school students in the factorization of polynomials. Therefore, a compilation of information about errors in algebra detected by various authors is made and those related to the subject in question are selected, in order to analyze and understand the obstacles they present and, based on a methodological review, give a teaching proposal that facilitates the apprehension of concepts. After reviewing some articles that talked about factorizations, a proposal is made for a change in teaching, taking as reference some works on the instruction of factoring with areas, in order that this may help in the difficulties related to the theme. It is thought that by using a geometric model it helps the abstraction of the operations and that they break the obstacles that are generated with the simple syntactic handling of the operations. This is done based on Duval's theory by changing the register of representation so that students can access the study of the mathematical object through something tangible such as geometric figures. In addition to this, the use of the material is through computer software developed by Fernando Soto, Edwin Insuasty and collaborators of the GESCAS group of the University of Nariño. This software called Polynomial Box will be used by the participants of this study with activities based on the meaningful learning of David Ausubel, creating activities prior to the interaction with the program to get the participants to have the previous ideas and concepts in their cognitive structure. This study contains the analysis of the application of the activities and the conclusions of this proposal.

Keywords: Polynomial box, factoring, meaningful learning.

INTRODUCCION

El rendimiento escolar es un dilema que comprende desde lo individual hasta lo colectivo, pasando por los alumnos, docentes, instituciones de enseñanza básica, hasta las de educación superior y posgrado. A nivel mundial es un reto que todos los gobiernos tienen que resolver (Morales et al., 2016, p.1).

Nuestro país, como otras naciones en el mundo, se encuentra impulsando una Reforma Educativa de gran calado, cuyo objetivo central es el lograr que todos los niños y jóvenes ejerzan su derecho a una educación de calidad, y reciban una enseñanza que les permita obtener los aprendizajes necesarios para enfrentar los desafíos del siglo XXI (Programa de Estudios Del Componente Básico Del Marco Curricular Común de La Educación Media Superior, 2019)

Es por ello que en el primer capítulo de este trabajo de investigación se aborda el problema desde el punto de vista de diversos autores que señalan una clara deficiencia en álgebra por parte de estudiantes de diferentes niveles. Aclarando que es un tema que hay que abordar con una dinámica fuera de lo tradicional.

En el segundo capítulo se empieza la descripción teórica que servirá de sustento para proponer una idea que se pueda implementar en el alumnado de nivel medio superior para auxiliarlos en el aprendizaje de la factorización de polinomios.

En el tercer capítulo se hace la descripción de la propuesta y las actividades que se llevaron a cabo para probar la propuesta educativa en jóvenes de nivel medio superior.

Posteriormente, en el capítulo 4 se realiza el análisis de los resultados obtenidos en las actividades para llegar al capítulo 5 con las conclusiones obtenidas de los efectos producidos por el material educativo.

Capítulo 1

1. Antecedentes teóricos y planteamiento del problema

1.1. Revisión de la literatura

Para el apropiamiento de nuevos conceptos, el ser humano comete errores como parte natural del proceso de formación de conocimientos, y aprender matemáticas no es la excepción. Dentro del aprendizaje de las matemáticas se generan dificultades que recaen en el transcurso de instrucción o el proceso de adquisición de las nuevas ideas que se van generando. En el desarrollo de ejercicios que realizan los estudiantes se pueden observar los errores cometidos y también detalles que nos pueden llevar a las causas. Dependiendo del enfoque que se plantee para estudiar los errores y dificultades que se presenten en los estudiantes se abordará un tema en particular como la formación de conceptos de los alumnos, la manera de enseñar y los temas que se abordan en el aula (García, 2010)

En la materia de álgebra, se presentan dificultades cuando al estudiante se le presenta una letra como la representación de un número general, como un elemento que cambia de valor o como una relación entre valores. Este paso de la aritmética al álgebra marca una referencia en dificultades matemáticas por parte de los escolares. Inicia en la educación secundaria y continúa en grados superiores dentro del marco curricular.

En el caso del álgebra, hablando de las letras como números generales, se toca un tema llamado factorización de polinomios, concepto que se abordará en el segundo capítulo de este trabajo, y cuyo tópico presenta diversos obstáculos en la captación de los tratamientos necesarios para la resolución de operaciones de carácter algebraico. Como lo mencionan Caballero y Juárez (2016):

> … los alumnos de nivel superior efectivamente tienen problemas de maduración, tales como aplicar parcialmente una fórmula, omitir signos, desarrollar expresiones algebraicas. Estos problemas no son de fácil solución, sin embargo, el profesor puede detectar y resolver si existe la cooperación del alumno. No obstante, otras veces se han observado problemas de maduración de tal magnitud que pareciera que se originaron desde varios niveles anteriores. (p. 35)

En el trabajo mencionado, se hace referencia a la factorización de polinomios ya que, en algunos casos, es necesaria para realizar la adición o sustracción de fracciones algebraicas, entre otras operaciones matemáticas que requieren de un manejo algebraico.

En el artículo de Baltazar et al. (2015), reportan las dificultades de estudiantes de octavo grado (un equivalente a segundo de secundaria) en la factorización de polinomios. Dicho trabajo hace una descripción de observaciones relacionadas con las dificultades y errores que presentan algunos alumnos al enfrentarse a los procesos que son necesarios para factorizar los términos algebraicos que se le plantean. La mayoría de las equivocaciones cometidas por los estudiantes y que son expresadas en el artículo están relacionados con la utilización de los signos, el valor que atribuyen a las letras y a la forma de trabajo en grados anteriores así como también por la concentración e interés por la asignatura; los desaciertos más frecuentes analizados por los investigadores se dan por la mala utilización e interpretación de los signos y por la alteración de las operaciones lo cual generó conflictos en los estudiantes a la hora de resolver ejercicios.

Un ejemplo lo da García (2010) acerca de errores cometidos en la factorización y es, en la aplicación parcial de la regla de factorización por factor común: Este error se presenta cuando el alumno intenta separar los factores comunes, pero no recuerda el paso siguiente del procedimiento dejando inconclusa la operación o no verifica la validez del factor común, así como no respetar las reglas de los exponentes del citado factor.

Otro ejemplo lo da Méndez (2012):

> …al factorizar polinomios cuadráticos: primero, no comprenden que deben encontrar dos polinomios irreducibles, que al multiplicarlos den la expresión original y el segundo aspecto, encontrar dos números, que dependen de operaciones claramente establecidas, entre los coeficientes del polinomio y que permitan su factorización. Estas dos dificultades no pueden ser resueltas solo considerando el marco algebraico, como se evidencia en el análisis de los procedimientos y conocimientos que hay que poner en juego al factorizar. (p.1396)

Los análisis de errores que cometen los estudiantes de matemáticas dentro de operaciones matemáticas sirven para observar el aprendizaje del estudiante, darle un seguimiento y en el caso docente, identifica la problemática acerca de los temas que les presentan mayor dificultad. Ya que la enseñanza de factorización en ambiente de lápiz y papel requiere de reglas que clasifican los polinomios y necesitan de su manejo sintáctico (Mejía, 2010).

De acuerdo con Baltazar et al. (2015), “se deben implementar metodologías que contengan recursos didácticos y clases teórico prácticas más dinámicas que despierten el interés en el estudiante y, a través de esto, lograr que desarrollen habilidades mentales que fortalezcan su aprendizaje” (p.678).

Dentro del tratamiento de factorización de polinomios aparecen errores que el estudiante comete, existe información y clasificación de estos errores, algunos de ellos se mencionan en la sección siguiente:

1.2. Errores en álgebra relacionados a la factorización

Dada tal problemática, se hizo una revisión acerca de los errores y dificultades relacionados con el tema. Heinze (2005) afirma que, aunque se aceptan errores como una parte natural del proceso de aprendizaje, para los alumnos, es desagradable incurrir en ellos, o ser sorprendidos cometiendo errores. Sin embargo, el uso de la información que nos aportan los detalles encontrados por las equivocaciones que se cometen, ayuda a pensar en cómo está el alumno usando la metodología que uno le da, nos ayuda a analizar las deficiencias en temas previos y como están construyendo su conocimiento. Los procesos mentales no son visibles, y sólo es posible conjeturar su ocurrencia a través de manifestaciones indirectas.

Los errores cometidos por los alumnos, la regularidad con que éstos aparecen, los patrones comunes a que obedecen, son algunos de los elementos que permiten hacer inferencias acerca de estos procesos mentales, y acerca de las estructuras en que se van organizando los conocimientos (Del Puerto et al, 2004).

Las causas posibles por las que el estudiante cometa errores en la factorización de términos algebraicos, además de la falta de dominio del concepto y de las propiedades de los números reales, son también de lenguaje matemático utilizado, la comprensión de la escritura algebraica, comprensión del tipo de tratamiento (operación) que requiera el ejercicio, el manejo de signos, el manejo de la jerarquía de operaciones, entre otros (Baltazar et al., 2015).

Carrión (2007) menciona las causas de los errores como el lenguaje hablado y la lectura del ejercicio, dado que es muy diferente la percepción del estudiante a la del autor. La visión de lo escrito es otra causa, se refiere a que el alumno identifique el tratamiento para un ejercicio determinado, como lo es identificar el método de factorización. Y en cuanto al tratamiento, el estudiante debe saber utilizar los recursos conceptuales que le ayuden a resolver el ejercicio de una manera correcta, esto ya referido a la utilización de reglas de signos, leyes de exponentes, manejo de signos de agrupación, entre otras. Si el alumno ha desarrollado una correcta comprensión de las operaciones, se reflejará en el número de errores que cometa.

Se realizó una revisión de autores que identifican en sus escritos algunos tipos de errores y se mencionan a continuación, presentando solo los que se relacionan con el tema de factorización:

Del Puerto et al. (2004) citan en su artículo a Radatz (1979) en la descripción de errores debidos al lenguaje o vocabulario matemático, manejo de algoritmos, símbolos y la aplicación de reglas que se aplican en contenidos diferentes.

Davis (1984) mencionado en Kilpatrick et al. (1998), presenta algunos errores clásicos como son reversiones binarias (ejemplo: $4 \times 4 = 8;\ 2^3 = 6$), errores inducidos por el lenguaje o la notación (Ej. 2 x - x = 2), errores producidos por una representación inadecuada de las expresiones algebraicas y así como la mala interpretación de reglas, reproduciendo otras reglas.

Movshovitz-Hadar et al. (1987), citados en Kilpatrick et al., (1998), hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizada por expertos. Entre ellas también hacen alusión a interpretación incorrecta del lenguaje distinto al común, teoremas o definiciones deformados, la falta de verificación en la solución y errores técnicos como errores de cálculo, errores al tomar datos de una tabla, errores en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos.

Mejía (2004) hace una revisión de literatura con respecto a los errores y los menciona en su trabajo, algunos son: errores de procedimientos, como el mal uso de la propiedad distributiva, como $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Errores debidos a falsas generalizaciones sobre números, en donde enmarca que se generalizan reglas o teoremas sin comprender que solo se usa en casos específicos. Errores ocasionados del paso de la aritmética al álgebra, como la lectura de las operaciones (en la aritmética vertical y en el álgebra horizontal), la naturaleza dual de la igualdad (en aritmética para relacionar un problema con su respuesta numérica y en el álgebra como operador y equivalencia), entre otros como el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos.

Carrión (2007, como se citó en Baltazar et al., 2015) clasifica 3 tipos de errores como errores de entrada, errores de operación y errores de escritura. En estos, enmarca los procedimientos que realiza el alumno y los tratamientos erróneos con los que el alumno procede en sus cálculos.

García (2010), hizo una clasificación de los diferentes errores detectados en su investigación, de los cuales los que interesan para la investigación son: Errores al realizar operaciones aritmético-algebraicas, procedimiento inconcluso: En este tipo de errores, el procedimiento estaba parcialmente correcto, pero no se terminó o se interpretaba de manera incorrecta el resultado. Procedimientos propios incorrectos e inferencias no válidas: errores al transcribir datos, aplicación de métodos de tanteo y otras operaciones que aparentemente se realizan por el simple hecho de desarrollar algún procedimiento. Aplicación parcial de regla de factorización por factor común: Este error se presenta cuando el alumno intenta separar los factores comunes, pero no recuerda el paso siguiente dejando inconclusa la operación o no verifica la validez del factor común o por no respetar las reglas de los exponentes. Asociación incorrecta de productos notables: En este caso los alumnos intentan asociar las formas y fórmulas de productos notables para resolver la operación. Uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra y error de cálculo simple.

Jiménez et al. (2012) utilizan el modelo SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes) elaborado por Biggs y Collis (1982, como se citó en Jiménez et al., 2012) para examinar las dificultades que presentan los estudiantes en el tema de factorizaciones. Clasificándolas de la siguiente manera: preestructural, uniestructural, multiestructural y relacional. En cada nivel el estudiante tiene un grado de conocimiento desarrollado, pero carece de otro, cada nivel examina el avance de complejidad alcanzado.

Como se puede notar, existen extensas investigaciones acerca de las dificultades y errores cometidos en procesos matemáticos y algebraicos. Por lo que se realizó una tabla canalizando estos errores en 4 ejes, que separan a los errores según los tipos de descripciones que presentan cada uno. En dicha tabla se han clasificado como:

Errores de operaciones algebraicas: referente a los errores que, descritos en la revisión de literatura, son aquellos que involucran el mal uso de reglas, la interpretación incorrecta de símbolos u operaciones, la falta de identificación de métodos, entre otros.

Errores de naturaleza aritmética: relativos a los procesos de operaciones aritméticas. Como confusión en los signos, problemas con leyes de exponentes, errores en la multiplicación o en la potenciación.

Errores por errónea interpretación de conceptos: que son los que se producen al malinterpretar reglas, confundirlas la no aclarar dudas en el tratamiento de una determinada operación.

Procedimientos erróneos o mal escritos: son los que se derivan de una mala escritura, propia del individuo, que puede confundir al momento de la realización de sus ejercicios, como escribir mal un número, dejar una operación inconclusa, confundir un exponente con un número entero, entre otras.

La siguiente tabla sintetiza lo descrito anteriormente:

1.2.1. Tipos de errores en la factorización

Se hace una separación para acoplar los tipos de errores encontrados en la revisión de la literatura con sus semejantes, mostrando la siguiente relación:

Tipo de Error	Autores
Errores de operaciones algebraicas • Interpretación incorrecta de los símbolos • Mal uso del lenguaje algebraico: $2x - x = 2$ • Asociación incorrecta de productos notables • No puede identificar el método de factorización • Poco dominio de las reglas de factorización	➢ Radatz ➢ Davis ➢ Movshovitz-Hadar et al. ➢ Mejía ➢ Carrión ➢ García ➢ Jiménez et al.
Errores de naturaleza aritmética • Reversiones binarias: $4 \times 4 = 8$ • Incorrecto uso de las operaciones básicas • Desconoce las reglas de exponentes	➢ Davis ➢ Movshovitz-Hadar et al. ➢ Carrión ➢ García
Errores por incorrecta interpretación de conceptos • Deformación de principios o de reglas de naturaleza matemática	➢ Radatz ➢ Davis

• Generalización de reglas ○ $(x-2)(x-3) = 0 \to x = 2$ ó $x = 3$ ○ $(x-2)(x-3) = 2 \to x = 4$ ó $x = 5$ • Interpretación errónea de conceptos • Mal uso de fórmulas	➢ Movshovitz-Hadar et al. ➢ Mejía ➢ Carrión ➢ García
Procedimientos incorrectos o mal escritos • Errada representación • Falta de verificación en la solución • Desconocen la obtención de resultados • Procedimientos inconclusos • Cambia términos en el tratamiento • Sabe a lo que hay que llegar, pero no sabe cómo.	➢ Radatz ➢ Davis ➢ Movshovitz-Hadar et al. ➢ Carrión ➢ García ➢ Jiménez et al.

Tabla 1. Tipos de errores encontrados en la literatura.

Para corroborar la información que se presenta, se hizo la propuesta de examinar a dos grupos de estudiantes, de nivel medio superior, con un cuestionario diagnóstico con el objetivo de encontrar dificultades mencionadas en la literatura y clasificar sus errores.

1.3. Antecedentes

Revisando trabajos de investigación y artículos referentes al tema de factorización, se encontró que hay estudios en habla hispana que promueven una mejora en la enseñanza de la factorización. Se mencionan tales estudios a continuación:

- *La caja de polinomios* de Soto et al. (2005). Quienes ilustran la herramienta didáctica, basados en las ideas del matemático árabe Thábit Ibn Qurra al-Harrani. Esta herramienta muestra la utilización de fichas rectangulares planas para representar polinomios de grado 2, la utilización del plano cartesiano como marco de referencia y la unión de estos para realizar operaciones con polinomios.

- *Marco figural como medio para factorizar polinomios cuadráticos* de Méndez (2012). Quien en su artículo hace una propuesta de factorización de polinomios cuadráticos bajo la teoría de Dialéctica Herramienta Juego, basada en trabajos de Regine Douady. Propone un marco figural que sirve de herramienta para representar un objeto matemático bajo condiciones establecidas. Este trabajo se realiza con ayuda de figuras geométricas como lo son cuadrados y rectángulos relacionándolos con los términos algebraicos.
- *Proceso de estudio de la Factorización de polinomios mediante el uso de Algeblocks desde la TAD* de Rubio (2013) . En su trabajo de investigación propone el uso de materiales manipulativos denominados "Algeblocks" para la enseñanza del álgebra basado también en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Que, en síntesis, estudia la actividad matemática, las condiciones de su difusión y transmisión.
- *Tabletas algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización* de Salazar et al. (2013), redactan sobre una investigación basada en los bloques de Zoltán Dienes, además se basan en la teoría de representaciones semióticas de Duval proponiendo que el tránsito de diferentes formas de representar un objeto matemático contribuye a la aprehensión del concepto. Los materiales que desarrollan se enfocan en la factorización de polinomios.
- *Guía didáctica para el aprendizaje de la factorización en estudiantes del CLEI IV del ITM* de Ospina (2015), realiza una investigación que fomenta la resolución de problemas de factorización con materiales didácticos manipulativos y se basa en las teorías de aprendizaje significativo de David Ausubel que trata sobre la asimilación de conocimientos previos con los nuevos conceptos.
- *Propuesta para la enseñanza de las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) y el proceso de factorización de polinomios, con la herramienta didáctica "caja de polinomios", en estudiantes de grado octavo de la I.E María Cano del municipio de Medellín* de Villarroel (2014), en dicho trabajo de maestría hace la propuesta de utilizar la caja de polinomios propuesta por Soto, para la enseñanza de las operaciones con polinomios y la factorización.

En toda la literatura mencionada, se hace referencia a que los materiales manipulativos sirven de ayuda para la comprensión de las operaciones básicas y las factorizaciones de polinomios. En perspectiva propia, los trabajos de Viviana Salazar y Gilberto Rubio se enfocan a la utilización de un material manipulativo, basándose solo en el uso representativo. Estos autores establecen la referencia a Thábit Ibn Qurra en cuanto al diseño y uso de los materiales.

El trabajo de Ospina (2015), establece la creación de un material para usarlo en las factorizaciones algebraicas y sus propuestas de manejo las conecta con la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel. Menciona que se basa en los trabajos de Euclides, pero no hay referencia a Thábit o a un marco de referencia matemático para su uso.

Por último, el trabajo de Méndez (2012) describe un desarrollo de la investigación muy completo en cuanto a las descripciones matemáticas y su marco de referencia, aunque solo se limita al uso para la factorización de trinomios.

Los trabajos de Soto et al. (2005) y Villarroel (2014) proponen la “caja de polinomios” como herramienta didáctica para el aprendizaje en operaciones con polinomios y factorización, que al parecer se muestra como la clave para lograr un aprendizaje significativo. Éste trabajo se ajusta a las necesidades de los estudiantes, con mayor soporte matemático y con el uso del plano cartesiano como referencia, permitiendo así que, el estudiante abarque el uso de 3 objetos matemáticos como son: el uso de términos algebraicos, la geometría euclidiana y el uso del plano cartesiano.

Ante este conjunto de referencias acerca del tema planteamos:

1.4. Pregunta de Investigación

¿Qué beneficios o limitaciones tendrá la implementación de la Caja de Polinomios en jóvenes de nivel medio superior para el aprendizaje de la factorización de polinomios?

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo General

Determinar los beneficios y limitaciones que se generarán al implementar la Caja de Polinomios en jóvenes de bachillerato con actividades de factorización de polinomios.

1.5.2. Objetivos particulares

Diseñar las actividades que formen en los estudiantes los subsumidores u organizadores previos necesarios para la implementación del material didáctico.
Aplicar la herramienta didáctica Caja de Polinomios con los estudiantes.
Analizar las ventajas y desventajas del uso de este material didáctico.
Presentar el trabajo en un evento académico apropiado para enriquecimiento del mismo.

1.6. Justificación

El trabajo didáctico que se propone tiene el objetivo de apoyar el aprendizaje de los estudiantes de nivel medio superior, en primera instancia de la ciudad de Puebla y después considerándolo a nivel regional. El material no se aparta del marco curricular de bachillerato y contribuye a un tema que es útil para temas posteriores, ya que es base en otro tipo de conceptos como lo son:

- Solución a ecuaciones de segundo grado
- Encontrar las raíces de funciones polinómicas.
- Operaciones con fracciones algebraicas.
- Determinar elementos en ecuaciones de cónicas en geometría analítica.
- Factorización de expresiones en límites.
- Aplicación de métodos de factorización en funciones polinómicas en cálculo.
- Aplicación de métodos de integración en cálculo.

Como lo muestran Caballero y Juárez (2016), se nota que una parte de los errores que presentan los estudiantes se deben al mal uso de los métodos de factorización y a la dificultad de identificar el tratamiento a usar.
Con lo ya descrito, la presente investigación intenta generar conocimiento acerca de una propuesta que sea posible considerar para ayudar a la comprensión del tema de factorización.

1.7. Método

La metodología será un estudio instrumental de casos de tipo cualitativo, donde se utilizará la descripción para comprender el estudio de caso. Para este trabajo se desarrollarán actividades para trabajar con la Caja de Polinomios, la versión digital, software desarrollado en la Universidad de Nariño, y se plantearán ejercicios tomados de los libros recomendados en el plan de estudios de la Subsecretaría de Educación Media Superior. En esta fase del trabajo se identificarán los tipos de tareas y las técnicas que se les plantean a los estudiantes con el uso del software caja de polinomios. Con estas actividades se pretende observar posibles técnicas que los estudiantes produzcan, así como posibles dificultades con la representación de la caja de polinomios, es decir, la valencia instrumental y semiótica.

Las actividades permitirán revisar características del objeto matemático que se está analizando y observar cómo se ve afectado el aprendizaje de la factorización de polinomios por el tipo de tarea que el estudiante realiza. Se aclara que esta observación hará parte de la última fase, donde se analizarán los resultados de la investigación.

La población de estudio serán jóvenes de nivel medio superior de la región de Puebla y Tlaxcala que cuenten con computadora, conexión a internet desde casa y las aplicaciones y requisitos del programa. La vía de contacto con los participantes será a través de la plataforma Zoom ya que permite la interacción con las computadoras de los participantes, ellos podrán compartir pantalla y se podrá observar lo que realizan, además de que la plataforma permite la grabación de las sesiones que se llevarán a cabo.

El análisis de resultados se presentará al final con las actividades contestadas por los participantes y las evidencias enviadas por ellos.

1.7.1. Cuestionario diagnóstico

El cuestionario diagnóstico (Anexo 1) se propone con el objetivo de registrar y comparar los inconvenientes que se presentan con temas previos antes de la factorización de polinomios, tal como se propone en Jiménez et al. (2012):

> … en la enseñanza y aprendizaje de la factorización de polinomios, los estudiantes deben comprender correctamente los términos factor, divisor, múltiplo, mínimo común múltiplo, máximo común divisor, monomio, polinomio, binomio, trinomio cuadrado, raíz cuadrada, factores primos y polinomio irreducible, entre otros. (p.39)

Esta comparación se hace con base en la revisión bibliográfica acerca de los errores cometidos en álgebra.

El cuestionario consta de 8 ejercicios los cuales fueron extraídos de los libros de la bibliografía recomendada en el plan de estudios de la Subsecretaría de Educación Media Superior. Lo que se pretende averiguar con cada ejercicio es observar el tipo de estrategias y errores en la manipulación de expresiones algebraicas.

Parte de los libros recomendados son:

- Allen, Á. (2008). Álgebra intermedia. México: Editorial Pearson.
- Colegio Nacional de Matemáticas (2009). Álgebra. México: Editorial Pearson Educación.
- Cuéllar, J. (2008). Matemáticas I Álgebra. México: Mc Graw Hill.

De la relación con ejercicios y temas, queda la organización de los ítems de la siguiente forma:

Número de Ejercicio	Error a explorar
1, 2	Errores de naturaleza aritmética (reglas de signos y multiplicaciones, ley distributiva, jerarquía de operaciones) Errores de escritura

3	Álgebra. Errores que tienen que ver con una comprensión baja del uso de la variable como número general y las operaciones de suma y resta.
4, 6, 7	Álgebra. Errores con el concepto de leyes de exponentes, la multiplicación y división de polinomios, así como del uso de la regla de signos.
5, 8	Errores con procesos que vienen de álgebra como son el desarrollo de productos notables, el manejo de variables, uso de exponentes con literales y la regla de los signos.

Tabla 2. Relación de reactivos diagnóstico con errores a explorar.

Los resultados del diagnóstico están en el análisis de resultados de la presente investigación.

Capítulo 2

2. Marco Teórico

En este capítulo enmarcamos la propuesta sobre una parte de las teorías que sustentarán el trabajo de investigación. Así como los conceptos matemáticos a utilizar.

2.1. Concepto de factorización

La factorización es un cambio en la representación de términos algebraicos, representando un polinomio como el producto de sus factores o divisores.

Aguilar et al. (2015) establecen que factorizar es expresar una suma o diferencia de términos como el producto indicado de sus factores; éstos se presentan de la forma más simple. La factorización de términos algebraicos es algo usado en la operación con polinomios para simplificar operaciones.

En matemáticas, la definición de polinomio es:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Donde n representa el grado del polinomio.

En el dominio de los polinomios, podemos expresar dos polinomios de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

$$Con\ a_n, b_m \neq 0, \qquad n \geq m$$

De acuerdo con Kurosch (1968), se le llama producto de los polinomios $f(x)$ y $g(x)$, al polinomio:

$$f(x) \cdot g(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_{n+m-1} x^{n+m-1} + d_{n+m} x^{n+m}$$

Cuyos coeficientes se determinan del modo siguiente:

$$d_i = \sum_{k+l=i} a_k b_l, i = 0,1, \dots, n+m-1, n+m$$

Donde denominaremos $q(x)$ al producto de los factores $f(x)$ y $g(x)$.

Dados los dos polinomios $q(x)$ y $f(x)$. Si $q(x)$ se divide (o es divisible) por $f(x)$, entonces el polinomio $f(x)$ se llama divisor del polinomio $q(x)$. Entendiendo que el polinomio $f(x)$ es divisor del polinomio $q(x)$ si, y solo si, existe un polinomio $g(x)$ que satisfaga a la igualdad:

$$q(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Entonces podremos llamar a $f(x)$ y $g(x)$ factores y divisores del polinomio $q(x)$ (Kurosch, 1968). Si decimos que $f(x)$ y $g(x)$ dividen a $q(x)$, entonces $f(x), g(x) \neq 0$.

El concepto de factorización se desarrolla de forma operacional desde la secundaria, observándose como una manipulación de expresiones, porque antes de realizar cualquier tratamiento, uno debe de reconocer el tipo de expresión que se va a cambiar, tomando en cuenta que existe un procedimiento individual para un determinado polinomio.

Por ejemplo, si al alumno se le presenta el término $5x^2y$, puede saberse que sus factores quedarían como: $5x^2y \rightarrow 5 \cdot x \cdot x \cdot y$; pero si se le presentara el polinomio $x^2 + 6x + 9$, se descompone en factores de distinta naturaleza (Méndez, 2012).

Dentro de la clasificación de factorizaciones, existen varios métodos en la literatura, los cuales de manera general se pueden clasificar como:

- Factor común
- Agrupación de términos
- Diferencia de cuadrados
- Trinomios, que engloba tres casos, los cuales enumeraré como:
    - Caso I: Trinomio cuadrado perfecto: $a^2 \pm 2ab + b^2$
    - Caso II: Trinomio de la forma: $x^2 + bx + c$
    - Caso III: Trinomio de la forma: $ax^2 + bx + c$
- Suma o diferencia de cubos

Como parte del proceso de factorizar polinomios, un primer paso del estudiante es que reconozca el tipo de polinomio que tiene a tratar para así después seleccionar el método o métodos (dependiendo del ejercicio).

> Ante una expresión general, dada o construida por el propio estudiante, éste tiene que interpretar los símbolos involucrados como números generales, los cuales representan cantidades indeterminadas que no se pueden, ni es necesario, determinar. Tienen que manipular este tipo de expresiones (por ejemplo, factorizar o simplificar) cuando así lo requiere el problema, sin necesidad de asignarle valores específicos a las variables. (Ursini et al., 2005, p.31).

Como se menciona, las variables tienen usos distintos, como incógnitas, números generales y las relaciones funcionales. En este trabajo se mencionará el uso de nuestras variables como números generales. Dado que un número se puede representar de ciertas formas como:

$$36 = 6^2,\ 36 = (9)(4) \text{ ó } 36 = \frac{180}{5}$$

En álgebra existen también formas distintas de representar un polinomio. Las distintas formas en que un polinomio se puede manipular para expresarlos de una manera distinta, dependerán del dominio y usos de saberes en álgebra como: reducción de términos semejantes, multiplicación y división de polinomios. Además de conocer reglas o leyes que desde la aritmética se manejan, tales como: reglas de signos para multiplicar o dividir, leyes de exponentes y radicales.

2.2. Teoría de Representaciones Semióticas

Como parte de este trabajo, se propone representar a los polinomios de manera geométrica como lo plantea Soto et al. (2005) en su investigación. Usaremos las representaciones geométricas con la homogeneización que realizó Thábit para tener expresiones algebraicas dentro de un marco de figuras geométricas.

2.2.3. Representaciones

De acuerdo con el diccionario de la Real Academia Española, las definiciones de representación que se tienen son:

1) Imagen o idea que sustituye la realidad.
2) *En psicología.* Imagen o concepto en que se hace presente la conciencia.
3) *En matemáticas.* Representación gráfica. Figura con la que se expresa la relación entre diversas magnitudes.

En la figura 1, podemos notar las diferentes formas de representar el número 7, una vez que se comprende:

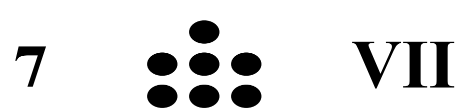


Figura 1. Representaciones del número 7.

La teoría de representaciones de Duval (1993, como se citó en Oviedo et al., 2011) nos dice que: *… "las representaciones semióticas son importantes tanto para los fines de comunicación como para el desarrollo de la actividad matemática"* (p. 30).

Duval (2006) nos señala que la actividad matemática se realiza necesariamente en un "contexto de representación", la actividad ligada a la producción de una representación se le llama *semiosis* y a la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos *noesis*. No hay semiosis sin noesis. En este planteamiento, una vez lograda la aprehensión de conceptos, es posible hacer una representación semiótica en diferentes tipos de registros. La formación identificable de representaciones, en primera instancia una representación mental, un tratamiento, que es una transformación interna y una conversión que es una representación distinta al registro original.

Esto nos indica que, al llevar a cabo la representación de un objeto matemático en distintos registros, se logrará una mejor comprensión de éste. Dado que al pasar de un registro a otro se pueden apreciar características diferentes que no se aprecian en una sola y única representación. Y para que la aprehensión de conceptos se dé, es necesaria una coordinación entre los diversos registros.

Según Duval (1993, como se citó en Oviedo et al., 2011) la adquisición conceptual de un objeto matemático se basa sobre dos de sus características fuertes:

- El uso de más de un registro de representación semiótica
- La creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos se constituye en un símbolo de progreso de conocimiento.

Según Duval (1998, como se citó en Oviedo et al., 2011), un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

1. La presencia de una representación identificable.
2. El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada.
3. La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial...". Es decir, con dos tipos de registros disímiles, con diferentes representaciones.

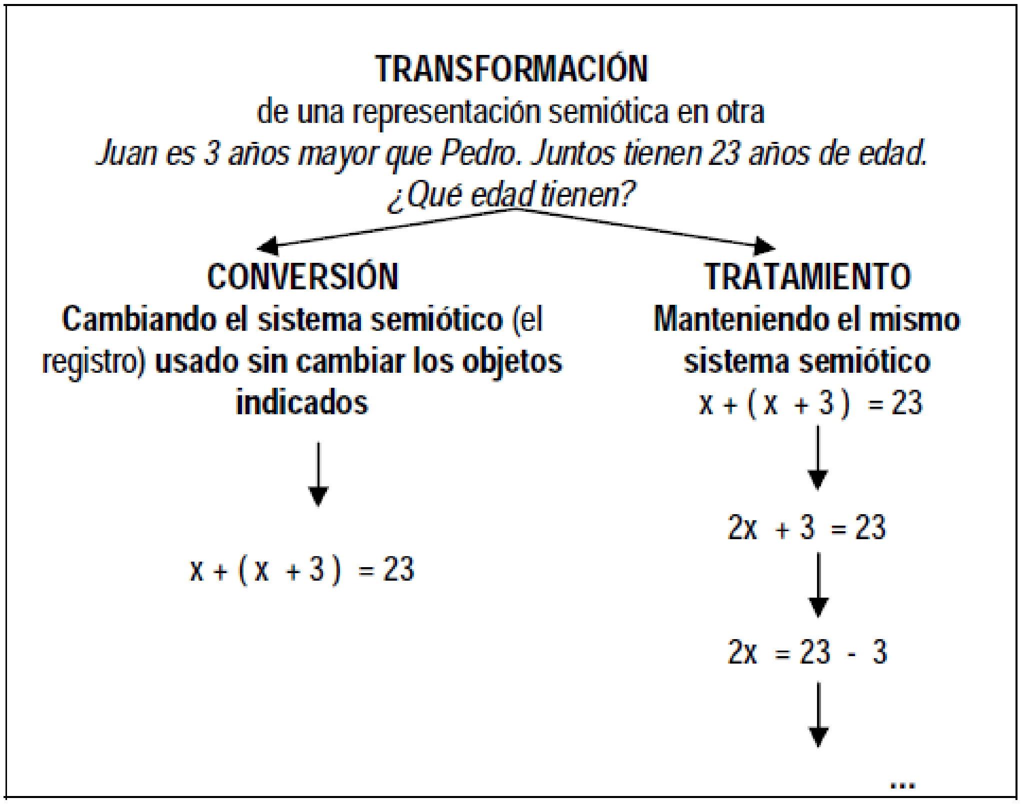


Figura 2. Transformación, conversión y tratamiento (Duval, 2006).

Ningún tipo de procesamiento matemático se puede realizar sin utilizar un sistema semiótico de representación, porque el procesamiento matemático siempre implica la sustitución de alguna representación semiótica en otra (Martínez y Hernández, 2016).

2.3. Aprendizaje Significativo

De las teorías del aprendizaje que existen, analizaremos el material descrito y propuesto en esta investigación sobre la teoría del aprendizaje significativo de David P. Ausubel. Esta teoría establece que para que el aprendizaje del alumno sea significativo dependerá de la estructura cognitiva previa del estudiante (referido como el conjunto de conceptos, ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización) y al material que debe ser potencialmente significativo. (Ausubel et al., 1983)

Según Ausubel et al. (1983):

> …la esencia del proceso de aprendizaje significativo es que ideas expresadas simbólicamente se relacionen, de manera sustantiva (no literal) y no arbitraria, con lo que el aprendiz ya sabe, o sea, con algún aspecto de su estructura cognitiva específicamente relevante (i.e., un subsumidor) que puede ser, por ejemplo, una imagen, un símbolo, un concepto o una proposición ya significativos. (p. 41)

Por asimilación, entendemos el proceso mediante el cual "*la nueva información es vinculada con aspectos relevantes y preexistentes en la estructura cognoscitiva, proceso en que se modifica la información recientemente adquirida y la estructura preexistente*"(Ausubel et al., 1983, p.71). Esto implica que, las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de "anclaje" a las primeras. El subsumidor prácticamente no se modifica, la nueva información se hace parte de esa estructura de conocimiento.

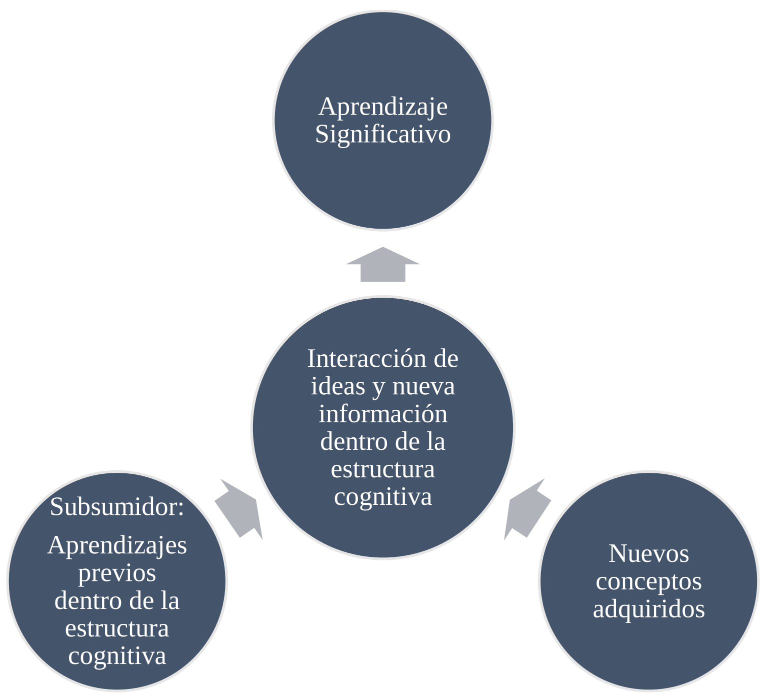


Figura 3. Esquema del aprendizaje significativo.

De acuerdo con la teoría de Ausubel, estos conceptos previos del estudiante que se hacen presentes cuando se está aprendiendo un nuevo conocimiento le ayudarán a relacionar las nuevas ideas.
En caso de ser necesario el docente tendría que previamente, construir organizadores que le sirvan de anclaje para enseñar el nuevo concepto (Ospina, 2015). Se espera con esto, manipular la estructura cognitiva con el fin de facilitar el aprendizaje significativo, y que sirva de puente entre lo que el aprendiz ya sabe y lo que él precisa saber. Los organizadores previos pueden ser discusiones, demostraciones, videos, experimentos, ejemplos cotidianos, etc.

2.4. La Caja de Polinomios

El material utilizado se denomina *"Caja de polinomios",* es una herramienta didáctica que, de acuerdo con Soto, F. et al. (2005), permite el desarrollo del álgebra de polinomios.
La Caja de Polinomios conjuga los aportes de cuatro matemáticos famosos:

- Euclides, quien con su libro de Los Elementos y la proposición 43 del Libro I permite la construcción de fichas rectangulares de distintas dimensiones, pero de igual área y que se apoya en la proposición 34 del mismo texto en la que demuestra que cualquier diagonal de un paralelogramo lo divide en partes iguales; así mismo se utiliza una noción común en la cual Euclides asevera: "Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales".
- El segundo matemático es Thábit Ibn Qurra al Harrani, matemático dedicado a la contemplación de las cantidades y quien de manera generosa presenta el concepto de homogeneización, concepto que permite tratar a los polinomios a través del manejo de las áreas de rectángulos, atendiendo a las dimensiones de la base y de la altura.
- Por último, el juego extiende su aplicación a polinomios con coeficientes negativos con la utilización del plano cartesiano, cuya creación aparece referida a Pierre de Fermat y a René Descartes (Villaroel, 2014).

Los autores rescatan el pensamiento matemático de Thábit Ibn Qurra. Thábit al observar que una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + px + q = 0$, no adquiere una representación geométrica adecuada por la imposibilidad de sumar áreas con longitudes y con puntos. Thábit propone utilizar una unidad de medida μ para expresar la ecuación anterior como $x^2 + p\mu x + q\mu^2 = 0$, con lo cual ésta puede interpretarse geométricamente como suma de áreas.

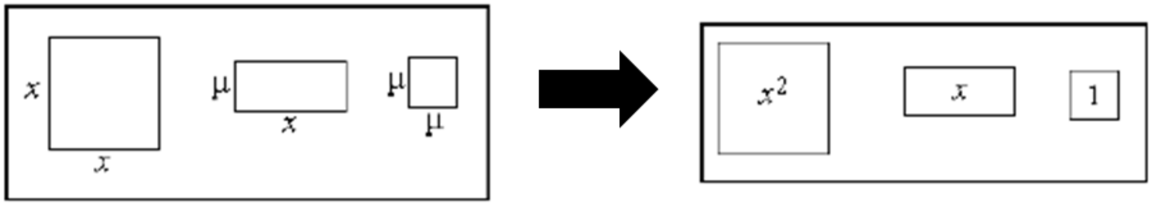


Figura 4. Idea de homogenización de Thábit (Soto et al., 2005).

Esta imagen sintetiza la idea de la homogenización de Thábit, dando origen a los rectángulos $x^2, x, 1$. Con estos rectángulos básicos es posible representar geométricamente un polinomio cuadrático con coeficientes enteros.

De esta manera podremos representar geométricamente un polinomio $x^2 + 4x + 4$ como:

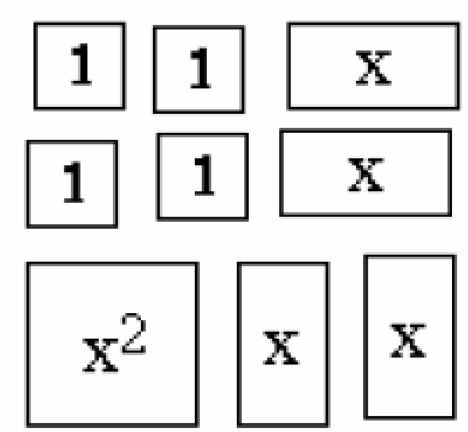


Figura 5. Representación de un polinomio con figuras rectangulares (Villarroel, 2014).

Sin embargo, existe la situación de representar polinomios con coeficientes negativos. Ante este escenario Soto et al. (2005) proponen en su trabajo la utilización del plano cartesiano como un sistema auxiliar para la factorización de términos negativos. Los autores mencionan que las áreas de los rectángulos que se ubiquen en el primer o tercer cuadrante se consideran con coeficientes positivos y los que se ubiquen en el segundo y cuarto cuadrante se considerarán con coeficientes negativos.

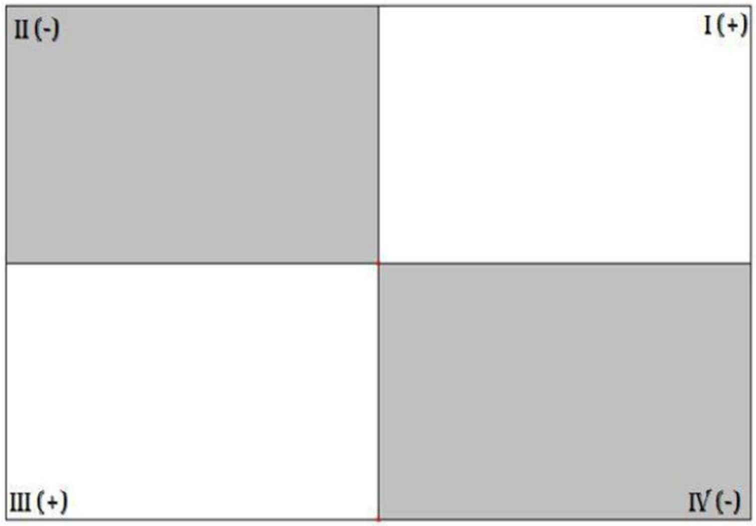


Figura 6. Tablero de la caja de polinomios (Villaroel, 2014).

Con este complemento auxiliar ahora podremos representar el polinomio $-2x^2 + 3x - 1$ como:

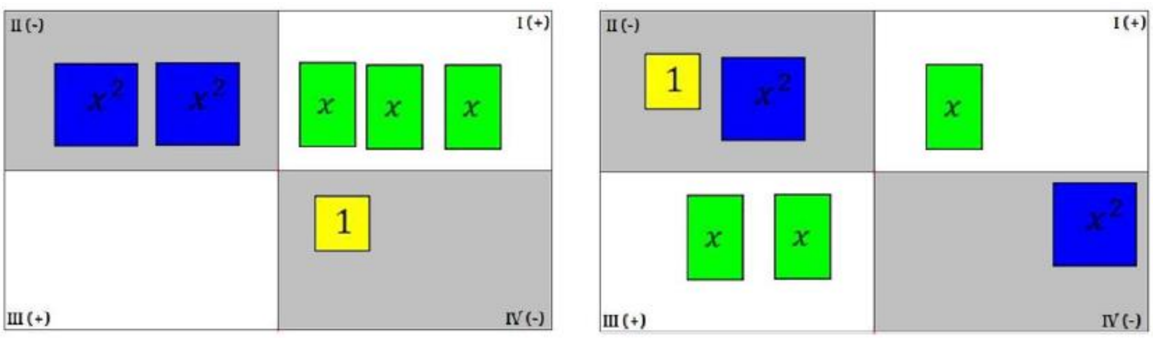


Figura 7. Representación del polinomio $-2x^2 + 3x - 1$ (Villaroel, 2014).

Con esto se constituye que el material logra hacer la transformación de las expresiones algebraicas utilizando un registro con figuras geométricas, obteniendo la conversión y utilizamos un sistema para hacer los tratamientos necesarios para las operaciones.

Para esto, el material que se propone consta de cuadrados y rectángulos que se relacionan por medio de la longitud de sus lados, y hallar el valor del área de las figuras sirve para la representación de los términos algebraicos, por lo que los estudiantes irán relacionándolo en su estructura cognitiva por asimilación dado que son temas que el estudiante ya ha visto en grados anteriores.

Los conocimientos previos para el desarrollo y utilización de los materiales que se pretenden en esta investigación, son los conceptos de área de figuras planas, el plano cartesiano y escritura de polinomios.

Desde la educación básica y media se ha enseñado el concepto de áreas y perímetros de figuras geométricas con fórmulas, donde las letras representan la longitud de los lados de una figura, éstas ya son una representación algebraica con operaciones básicas.

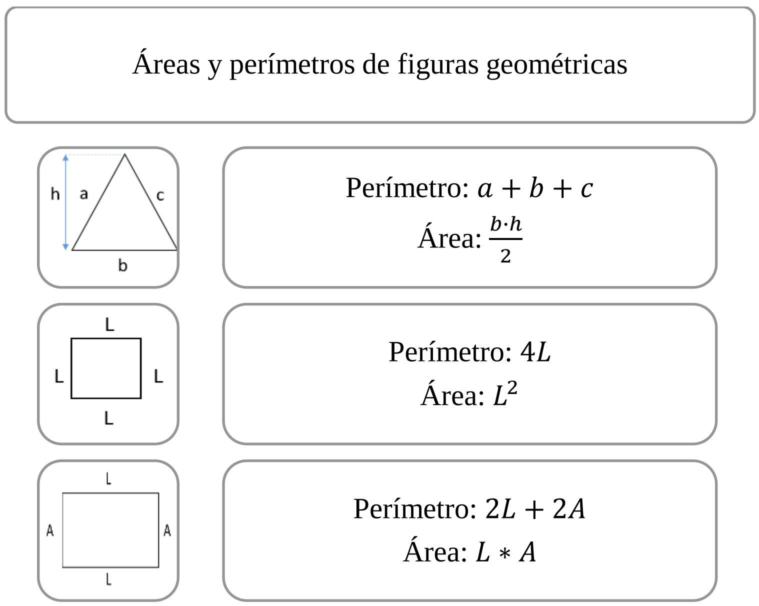


Figura 8. Áreas y perímetros de algunas figuras geométricas.

Al ir realizando este tipo de actividades, se pretende que el estudiante vaya relacionando sus conceptos previos de geometría con los de álgebra básica. El objetivo se centra en que pueda manejar hasta dos tipos de representaciones y que, al ir relacionando la herramienta con las figuras de cuadrados y rectángulos, además de la obtención de áreas, este material le dará un aprendizaje significativo.

Este material fue desarrollado por Fernando Soto y ampliado después por José Martín Villarroel. Ambos trabajos contienen las aplicaciones lúdicas y guías de implementación para su uso. De acuerdo con Fernández y Ocoró (2015) la "*Caja de Polinomios* es un proyecto colectivo de docentes y estudiantes de la Universidad de Nariño encabezado por Óscar Fernando Soto y Librado Jácome" (p.23); su principal fundamento es la resolución de problemas algebraicos, específicamente operatividad con polinomios y su factorización, dando a conocer las ventajas que trae su uso al ser acogido por las comunidades estudiantiles tanto de bachillerato como de los primeros semestres de las universidades. De este proyecto se desarrolló una versión digital.

2.4.1. La Caja de Polinomios GESCAS. Versión digital

Fernando Soto, Edwin Insuasty y Jesús Insuasti, profesores adscritos a los grupos de investigación GESCAS y Galeras.NET de la Universidad de Nariño, diseñaron una versión digital que fue puesta a disposición de la comunidad educativa. (Fernández y Ocoró, 2015)

Esta versión fue presentada en diferentes eventos de carácter local, regional y nacional, con gran acogida entre los interesados en innovar estrategias didácticas en el aula de matemáticas y puede ser solicitada al correo electrónico FSOTO@UDENAR.EDU.CO (Villaroel, 2014).

Esta herramienta digital tiene sus bases en la *Caja de Polinomios* y uno de sus principales objetivos es servir como recurso para el trabajo dentro y fuera del aula, además de promover actitudes positivas hacia las matemáticas, propiciar la participación, la integración y vencer los obstáculos emocionales responsables del aburrimiento; permitiendo ver las matemáticas de una manera muy viva, llena de interés (Fernández y Ocoró, 2015).
Este software es el instrumento que utilizaré para auxiliar en el tema de factorización, y se desarrollarán actividades con los estudiantes para analizar el alcance sobre el avance de la comprensión del tema.

2.4.2. La instalación e interfaz del programa

El software fue solicitado al Dr. Fernando Soto Agreda y provisto a través de la monitora de flexibilidad curricular Alejandra Patricia Hernández Alvis. Este software se descargó e instaló para ser explorado y usado.
En primera instancia, los archivos están en extensión .rar (Roshal ARchive), por lo que se necesita de un programa (WinRAR o 7Zip para sistemas Windows y iZip para sistemas iOS, u otro similar que sirva para tal efecto) para descargar los archivos.
El software se puede abrir tanto para sistemas operativos Windows y sistemas iOS, en Windows se puede usar programas como Flash o Internet Explorer para abrir los archivos que están en

formato .swf (small web format). Cuando se inicia el demo de la caja de polinomios, casi siempre en Internet Explorer "pregunta" (dependiendo de las configuraciones del navegador de internet), si desea desbloquear algunas acciones que el programa necesita para poder funcionar, a esta pregunta se debe responder o seleccionar *permitir contenido bloqueado*.

En los sistemas iOS, el paquete de archivos trae una versión en HTML (HyperText Markup Language), que al igual que en los sistemas Windows, se puede abrir para acceder a la ventana de inicio del programa.

Figura 9. Ventana de inicio del software.

2.4.3. Tutorial

Una vez iniciado, se debe presionar el botón *continuar* para acceder al tutorial, a la pantalla siguiente que muestra las fichas que contiene el programa y las pestañas que tiene el tutorial, como se muestra en la figura 10.

Figura 10. Menú del tutorial.

Los tutoriales son explicativos y contienen animaciones gráficas para ayudar a la comprensión de las operaciones con la caja. Una vez que se encuentre dentro del tutorial, el docente debe ir guiando al estudiante por las secciones que marca. Para el estudio del presente trabajo, son necesarios los tutoriales de fichas, multiplicación y factorización para que el estudiante vaya conociendo la interfaz del programa.

2.4.4. Las Fichas

Para la creación de fichas dentro de la caja de polinomios de Soto y Villarroel se debe tomar en cuenta los teoremas 34 y 43 de Euclides para construir fichas de igual área, pero de diferentes dimensiones. Esto lo desarrolla Villarroel (2014) de la siguiente manera:

2.4.4.1. Demostración

Para atender a la demostración, se construye un rectángulo, después se traza una recta que lo corte diagonalmente por los vértices. Una vez que tenemos dos áreas iguales se prosigue a trazar dos rectas perpendiculares que se intersecan con la diagonal trazada. Este paso nos llevará a tener 6 nuevas áreas como se muestra en la figura 11:

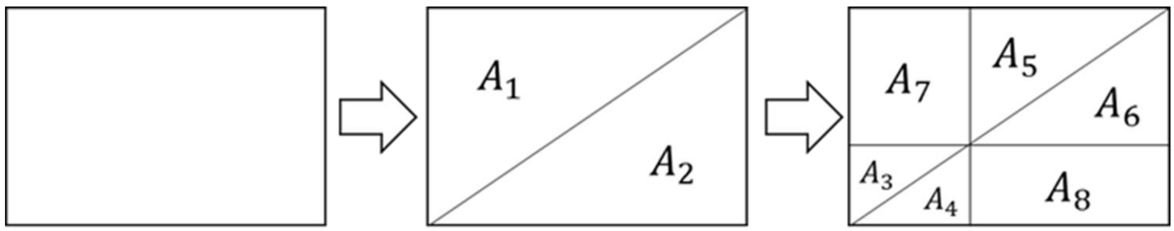


Figura 11. Demostración (Villaroel, 2014).

Dado que $A_1 = A_2$, entonces $A_1 = A_3 + A_7 + A_5$ y $A_2 = A_4 + A_6 + A_8$

Por lo tanto $A_3 + A_7 + A_5 = A_4 + A_6 + A_8$. Teniendo también que $A_3 = A_4$ y $A_5 = A_6$, entonces $A_7 = A_8$.

De esta manera se demuestra la posibilidad de crear fichas de misma área, pero de formas diferentes. Soto et al (2005) mencionan que:

> …la ficha correspondiente a x^2 puede reemplazarse algebraicamente por una ficha rectangular de lados x^2 y 1. Así mismo, la representación geométrica de x^3 que corresponde a un cubo de arista x puede transformarse, a partir de la aplicación inversa de la idea de Thábit, en un rectángulo cuyos lados son x^2 y x. En este sentido, el proceso de homogeneización se puede generalizar a grados superiores. (p. 93)

Los autores crean también un esquema para darse una idea de cómo sería la creación de fichas de grados superiores:

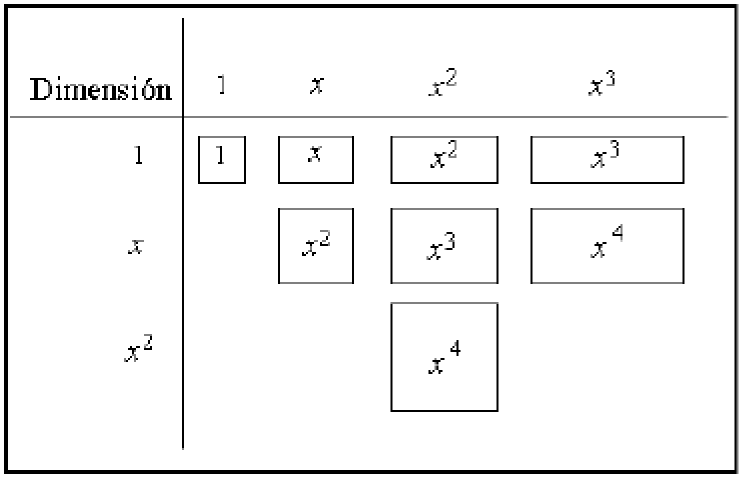


Figura 12. Esquema para fichas de grados superiores (Soto et al., 2005).

Tanto en el trabajo de Fernando Soto como en el de Villarroel se muestran las limitaciones y el alcance de este material, en el caso del software, este fue diseñado para que se pudiese trabajar con polinomios de la forma $P(x) = ax^2 - bx + c$ con $a,\ b,\ c\ en\ \mathbb{Z}$, es decir polinomios de segundo grado en una sola variable con coeficientes enteros.

2.4.4.2. Las fichas del Software

Las fichas que utiliza la versión virtual, representan cuadrados y rectángulos cuyas áreas están representadas en el centro de color rojo. Las longitudes de los lados de las fichas están con tintado negro.

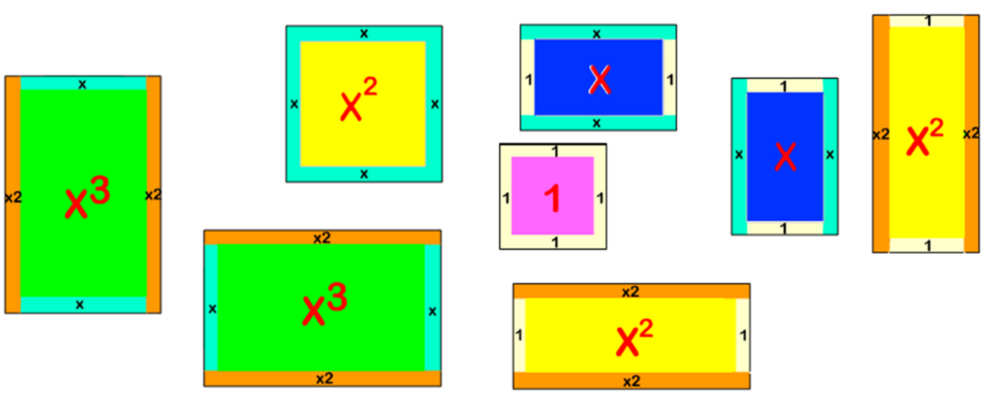


Figura 13. Fichas del software Caja de polinomios Grupo GESCAS.

Como se mencionó, el planteamiento anterior muestra que se pueden construir dos fichas de la misma área, pero de dimensiones diferentes:

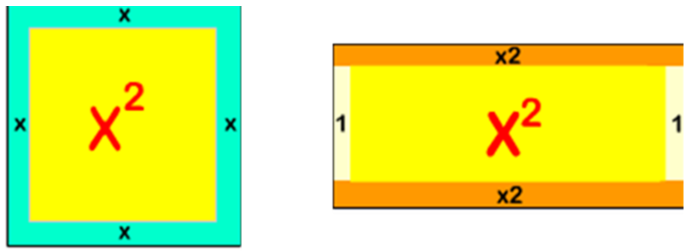


Figura 14. Ejemplo de fichas con misma área, pero distinta forma.

Las operaciones en la herramienta didáctica, tanto para la multiplicación, división y factorización, se basan en la construcción de figuras rectangulares alrededor del origen de coordenadas.

Cada ficha individual puede enlazarse con otra que comparta la misma longitud de lados. De esta manera se pueden formar los rectángulos. Los colores en el contorno de las fichas sirven de ayuda para identificar los lados correspondientes con otra figura, como lo muestra la figura 15.

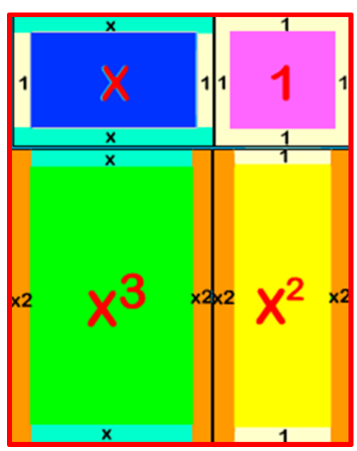


Figura 15. Enlace de fichas por la longitud de los lados iguales.

2.4.5. Entrar al DEMO digital y botones

Para poder acceder al DEMO digital (la versión demostrativa de la Caja de Polinomios), se debe hacer clic en el ícono superior derecho *"Entrar al DEMO"* como se ve en la figura 16.

Figura 16. Ventana del tutorial, señalando el ícono para acceder al DEMO.

Una vez dentro del DEMO, podrán leer la breve introducción acerca de la caja de polinomios, con las instrucciones, una ventana de ayuda y un panel del lado derecho que contiene las fichas, una sección de operaciones y procesos que contiene las operaciones que podemos realizar en el programa, un apartado para procedimientos, otro para escala y un ícono de bote de basura. Se debe seleccionar un botón de operaciones para acceder a un tablero, para fines prácticos, se seleccionará el botón de *Factorización* dado que es el propósito de esta investigación.

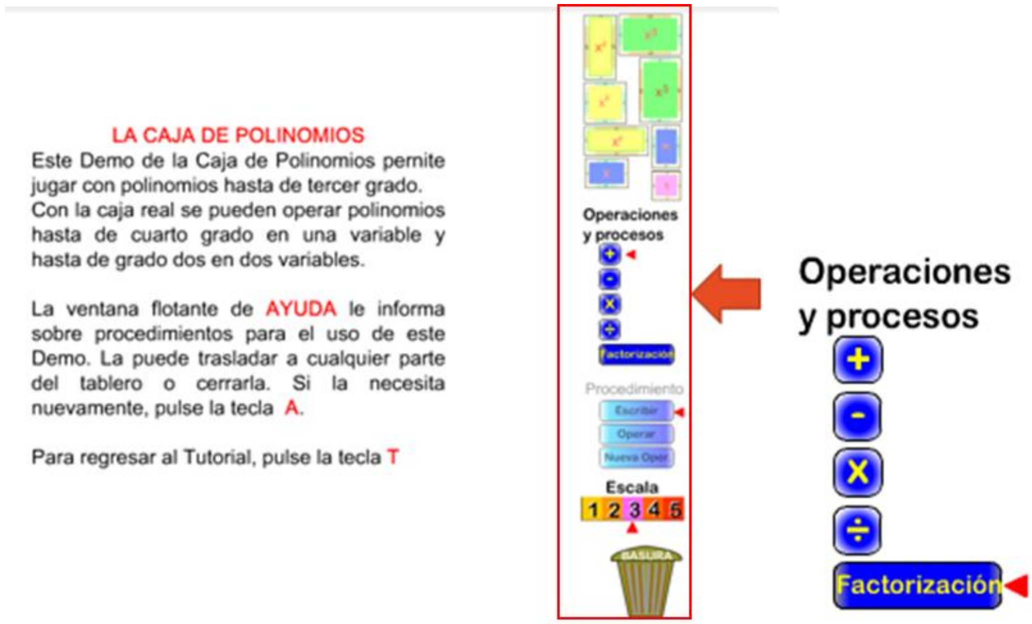


Figura 17. Ventana del DEMO, panel derecho y selección del botón Factorización.

Esto nos llevará a una ventana con un tablero con el mismo panel del lado derecho, que funciona como el menú de opciones del programa, en la sección de procedimiento se debe oprimir el botón *Escribir* para empezar colocar las fichas como se muestra en la figura 18.

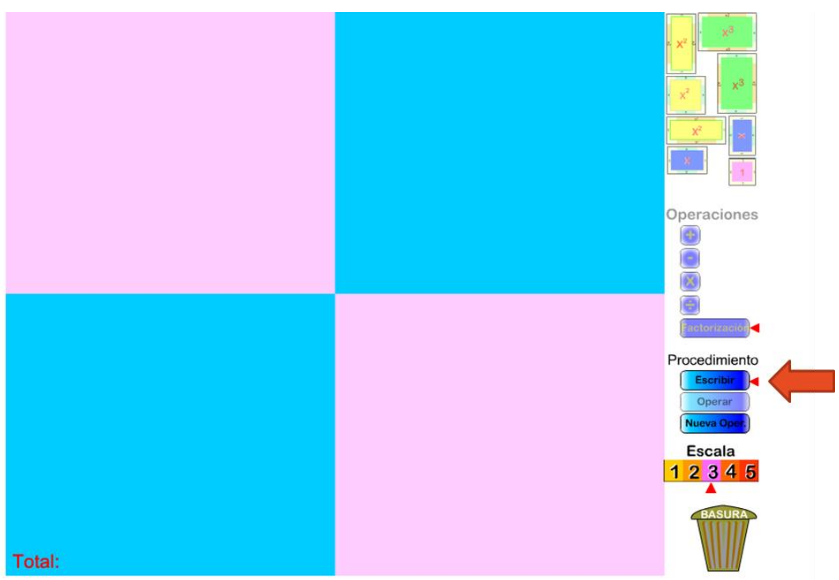


Figura 18. Tablero y selección del botón Escribir.

Una vez realizada esta operación, las fichas cambiarán de un color opaco a un color vivo, indicando que las podremos seleccionar.

Para colocar las fichas en el tablero, primero de debe de dar un clic sobre la ficha que quiera colocar en el tablero, la ficha sobresaldrá de las demás y hay que seleccionarla manteniendo presionado el botón izquierdo del mouse o touchpad sobre la ficha y arrastrarla hacia el lugar que elija dentro del tablero.

a) b)

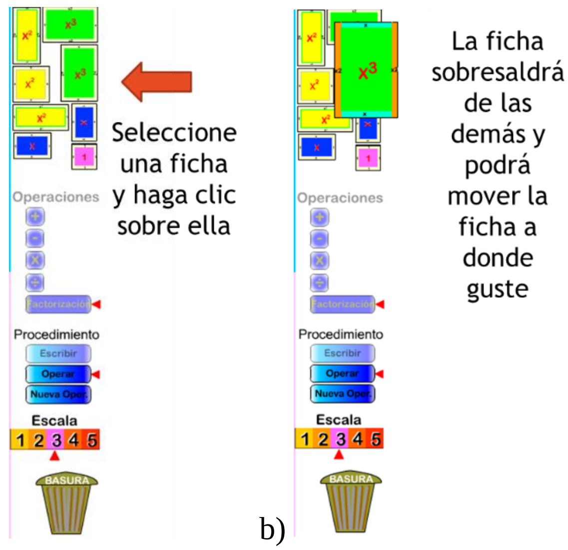


Figura 19. Selección de fichas.

Una vez colocada una ficha en el tablero, notará que en la parte superior izquierda del tablero se visualizará el polinomio que forme.

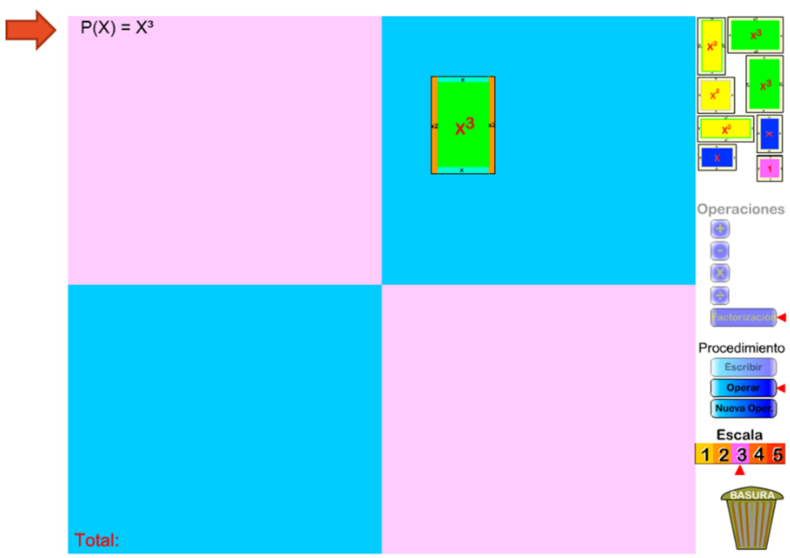


Figura 20. Colocación de ficha y lectura en el tablero.

El botón *Operar* dentro de la sección de *Procedimiento* del menú del software, se presiona después de haber formado un polinomio, sirve para fijar el polinomio escrito en la parte superior izquierda y en la parte inferior derecha aparece en rojo lo que debemos de obtener de la operación como total. El botón de *Nueva Oper.* (abreviado como Nueva Operación), nos regresa a la ventana inicial del demo de la Caja de Polinomios, empezando nuevamente una operación.

El botón de escala sirve para cambiar el tamaño de las fichas, siendo 1 la escala menor y 5 la mayor escala que se puede tener dentro del tablero.

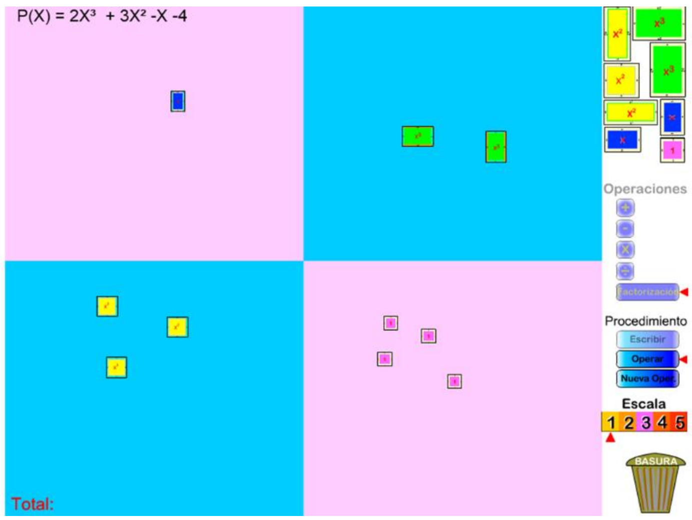


Figura 21. Escala 1.

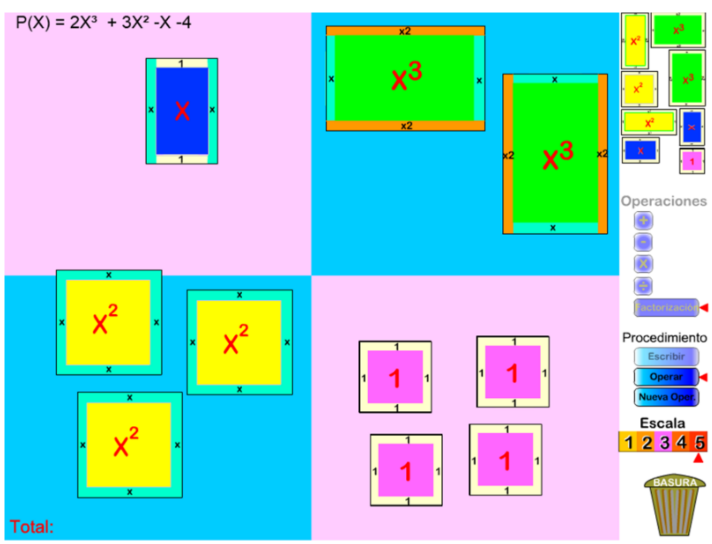


Figura 22. Escala 5.

El ícono de *BASURA* sirve para desechar las piezas de más que hayamos colocado en el tablero o simplemente para descartar fichas. Basta con seleccionar la ficha y arrastrarla hasta este ícono, soltar la ficha y en automático desaparecerá de la ventana.

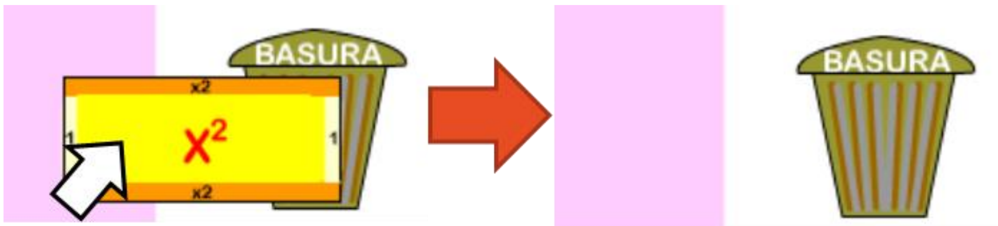


Figura 23. Eliminación de una ficha.

2.4.6. Tablero

El tablero que utiliza el software caja de polinomios emula a un plano cartesiano, por lo que está dividido en cuatro regiones (cuadrantes) y a cada región le asignará un signo (positivo o negativo) a las fichas. Por lo que los cuadrantes I y III dotarán de signo positivo y los cuadrantes II y IV dotarán de signo negativo.

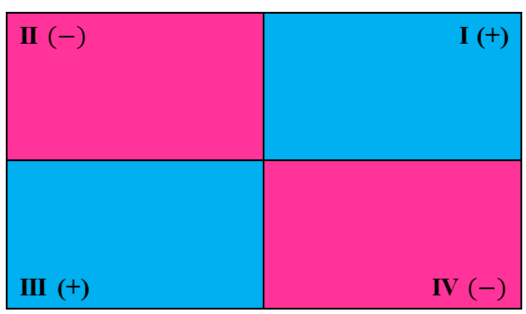


Figura 24. Tablero de la caja de polinomios.

Como lo explican Soto et al. (2005) y Villarroel (2014), las fichas se colocan en cada región para representar los signos que correspondan a los términos de un polinomio, por ejemplo, para representar en el tablero el polinomio $2x^2 - 3x + 1$, se puede establecer como:

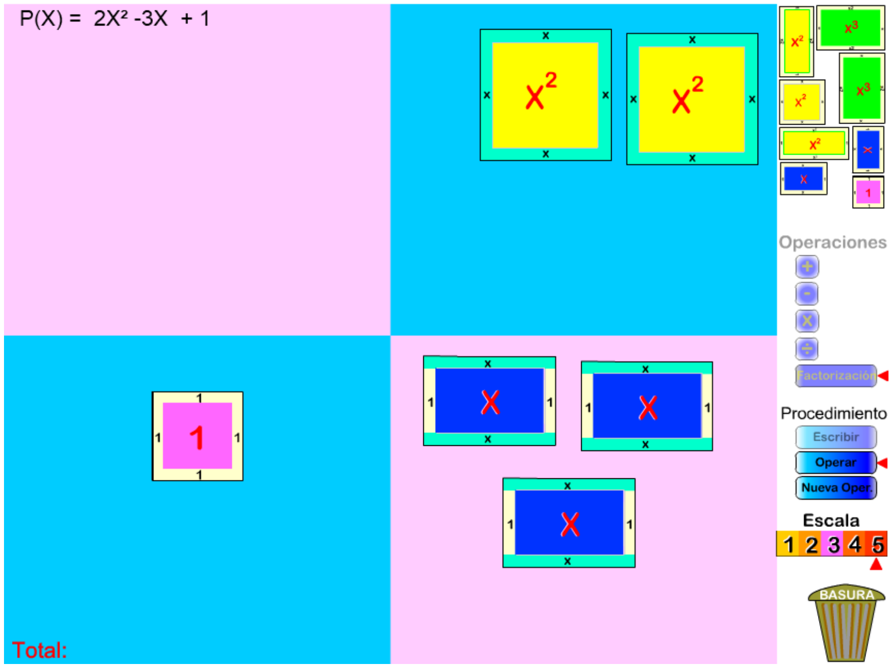


Figura 25. Representación del polinomio $2x^2 - 3x + 1$.

De acuerdo con Villarroel (2014), las fichas deben de estar contenidas en su totalidad dentro de la región del tablero para que represente su signo.

2.4.7. Concepto de ceros en la Caja de Polinomios

Definición: Propiedad invertible de la adición de números reales, Villarroel (2014):

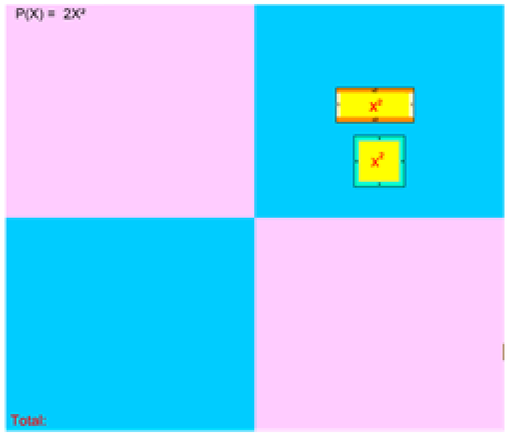
Sea $(\mathbb{R},\oplus)$ el conjunto de los números reales sobre el cual se define la operación de adición.
La operación $\oplus$ cumple que:

$$\forall x \ \in \mathbb{R}, \exists\ y \in \mathbb{R}\ tal\ que\ x\ \oplus y = 0 = y \oplus x$$

La anterior definición significa que a todo número real le corresponde un único número real tal que su suma tiene como resultado el elemento neutro (cero). Cada uno de estos números se conoce como el inverso aditivo del otro o en ocasiones también es llamado el opuesto.
Esta propiedad se utiliza en la Caja de Polinomio de tal manera que, al colocar fichas de misma área en cuadrantes de signo opuesto, se anulan por la propiedad. Es decir que si coloco una ficha

en el cuadrante I (+) y otra ficha de mismo peso en un cuadrante negativo (II o IV) se anulan al sumarse.

Esto se puede representar en el software de la siguiente manera:

a) 

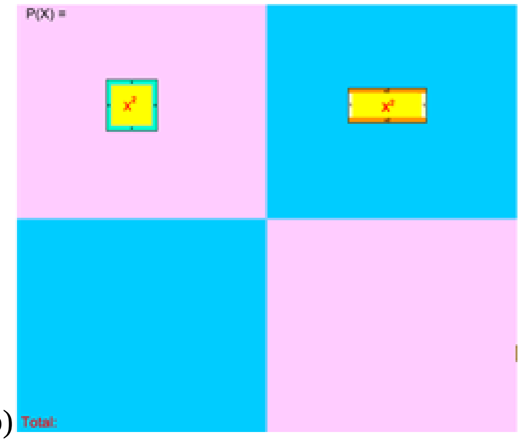
b) 

Figura 26. Acomode de las fichas para representar ceros en pantalla.

Al colocar dos fichas de mismo peso x^2 (figura 26-a) en el mismo cuadrante, en la pantalla aparece la suma de ellas $2x^2$. Al colocarlas en cuadrantes de signos opuestos, la suma nos da un cero (figura 26-b). Nótese que, en la parte superior izquierda de la pantalla, en la figura 26-a, aparece la operación, pero en el tablero de la figura 26-b, no aparece nada, dando a entender que la función de esto en el tablero es representar la suma de fichas y respetando los signos de los cuadrantes en los que se hallen.

Esta propiedad se debe de tomar en cuenta para se pueda atender dudas que surjan en los ejercicios posteriores debido a esta propiedad.

2.4.8. Construcción de rectángulos en la Caja de Polinomios

Para las operaciones de multiplicación y factorización en la Caja de Polinomios se realiza construyendo una figura rectangular o cuadrada con la unión de fichas individuales. De acuerdo con Soto et al. (2005) la base es uno de los factores lineales y la altura el otro, las fichas se unen como rompecabezas encajando con lados que tengan la misma dimensión, y completando el rectángulo con las fichas que sean necesarias.

Para la construcción de los rectángulos, se necesitan que las fichas se relacionen por sus lados, como se muestra en la figura 27.

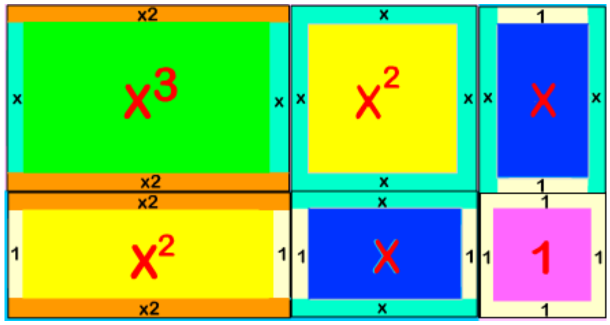


Figura 27. Unión de fichas.

Nótese que los lados de las fichas coinciden por la longitud de sus lados y que las fichas del software tienen colores en los lados para su identificación.

Las fichas deben de colocarse empezando por el centro del tablero, que es considerado como el origen y extendiéndose por los ejes, de la siguiente forma:

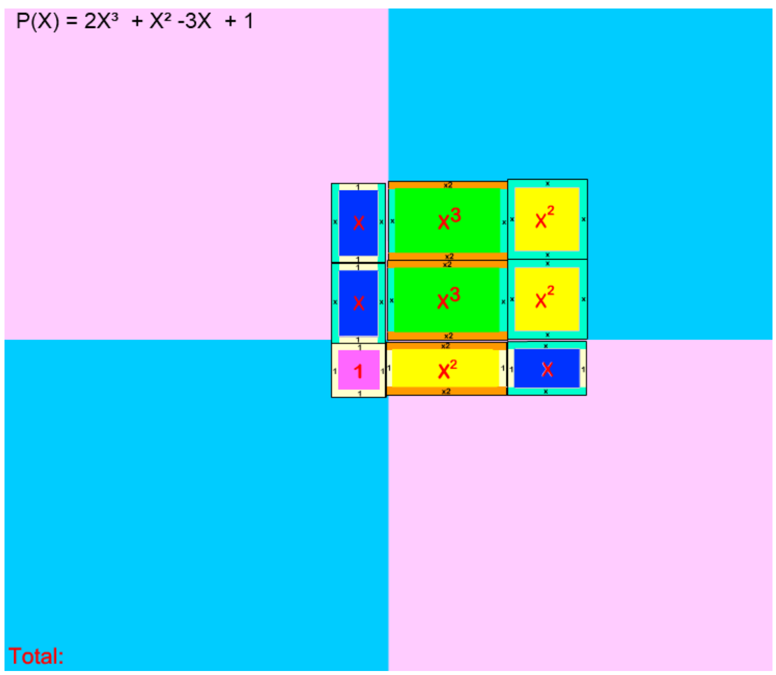


Figura 28. Colocación de fichas en el tablero.

Dado que la factorización es reescribir un polinomio como el producto mínimo de sus factores, la operación tiene una relación con la multiplicación, por lo que la caja de polinomios utiliza la construcción de rectángulos para factorizar expresiones algebraicas.

2.4.9. La multiplicación de polinomios en la Caja de Polinomios

Dado que vamos a buscar los factores de un polinomio, es necesario repasar el concepto de una multiplicación de polinomios. En esta sección y como es mencionado anteriormente, se debe de construir una figura rectangular, la base corresponderá con uno de los factores y la altura con el otro.

Ahora, para la construcción de rectángulos, se hace uso del concepto de signos en los ejes del plano cartesiano, en el cual está basado el tablero. Por lo que la construcción del término que represente la base del rectángulo estará apegado al acomodo de fichas sobre el "eje x" del tablero y la altura al acomodo sobre el "eje y". De manera que del origen y hacia la derecha se tomará como longitudes positivas y hacia la izquierda como negativas. Para la altura se considerará del origen hacia arriba como longitudes positivas y del origen hacia abajo como negativas.

Por ejemplo, para multiplicar los términos $(2x - 1)(x + 1)$, debemos de seleccionar cuál de los dos será la base de la figura y cuál la altura. Tomaremos a $2x - 1$ como base, por lo que para construirla debemos de tomar dos fichas con valor de área de x y una ficha de área igual a la unidad. Estas fichas las colocaremos sobre el eje X, de tal forma que las dos fichas de x queden del origen hacia la derecha, para que las longitudes de sus lados de x se consideren como positivas y la ficha de 1, del origen hacia la izquierda para que el lado se considere como negativo, como se ve en la figura 29.

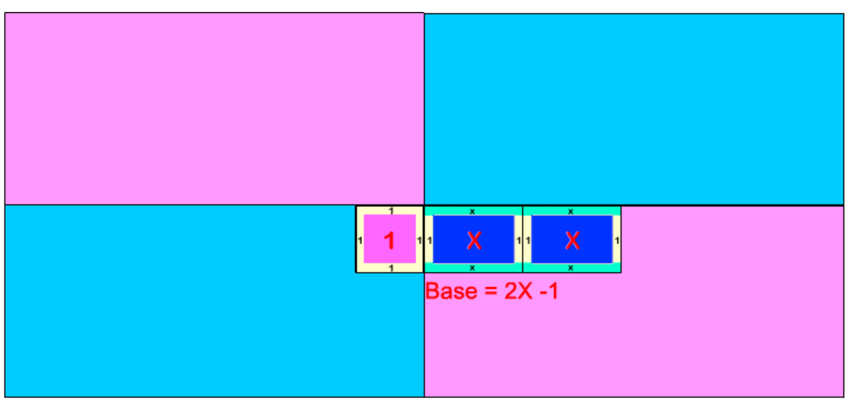


Figura 29. Colocación de la base $2x - 1$.

Ahora debemos fijarnos en el eje vertical (eje Y) para la construcción de la altura $x + 1$, como podemos observar en la figura, las fichas que colocamos como base tienen una altura de 1, sin embargo, del centro hacia arriba se consideran longitudes positivas y del centro hacia abajo negativas sobre el eje vertical. Por lo que esto se considera como altura -1, entonces subiremos la construcción para lograr que la altura sea $+1$, como se muestra en la figura 30.

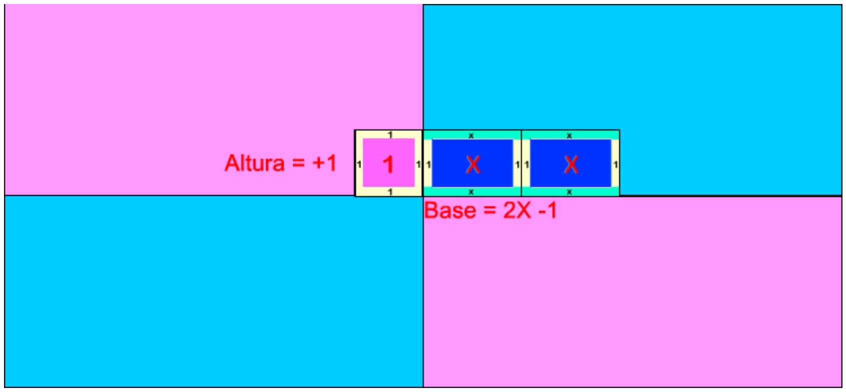


Figura 30. Altura de la construcción igual a: $+1$.

A partir de esto seleccionaremos una ficha con valor de área x y que tenga de lado x correspondiente a la altura que empatará con el eje vertical, como se muestra en la figura 31.

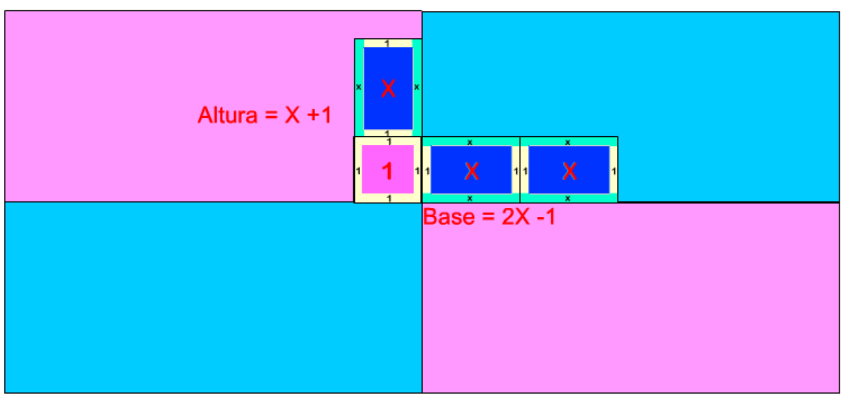


Figura 31. Altura de la construcción igual a $x + 1$.

Teniendo formadas la base y altura, procedemos a completar el rectángulo con las fichas que calcen correctamente, es necesario observar los lados de las figuras para realizar esta acción.

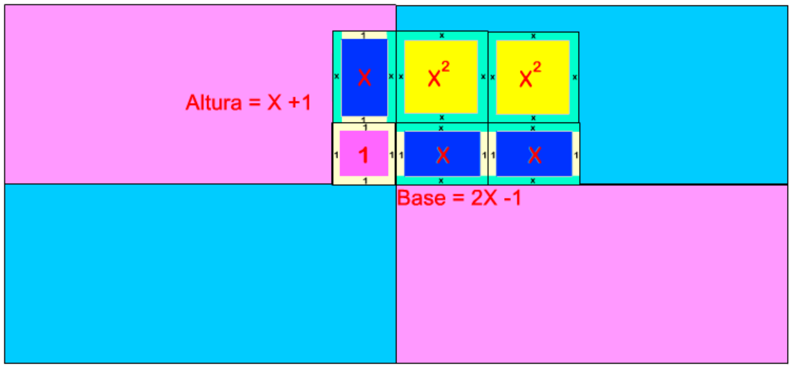


Figura 32. Completando la figura rectangular.

Una vez completada la figura, es necesario hacer una revisión de fichas de igual valor de área que estén colocadas en cuadrantes opuestos, dado que representan ceros. Eliminamos estas fichas (si las hay) como las fichas de x en nuestro ejemplo. Solo eliminaremos dos fichas como se muestra en la imagen.

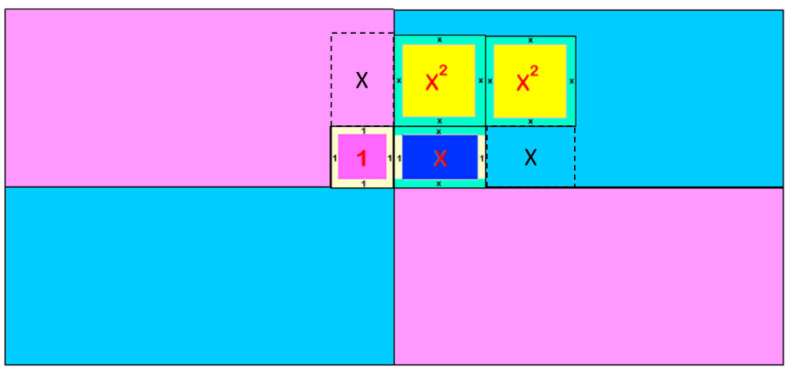


Figura 33. Eliminación de ceros.

Ahora leeremos el polinomio resultante, según los valores algebraicos de las fichas y los cuadrantes donde se encuentren, teniendo el resultado: $2x^2 + x - 1$.

2.4.10. Factorización de polinomios

Un concepto que se debe entender en esta sección es lo que Soto et al. (2005) llaman el "encuadre minimal", entendido como la representación del polinomio en el plano cartesiano, a partir de la cual es posible completar un rectángulo por agregación del mínimo número de parejas de fichas que algebraicamente sumen cero.

Este proceso se basa en la construcción de figuras rectangulares o cuadradas con las fichas y en caso de ser necesario, hay que agregar pares de fichas (dos fichas de valor algebraico igual pero ubicadas en cuadrantes distintos, como rosa y azul) que sumen cero para no alterar el polinomio original.

Por ejemplo, haremos la factorización del polinomio $2x^2 + x - 1$, por lo que primero de deben de colocar las fichas que representen a este polinomio e iremos formando una estructura rectangular a manera de "esqueleto", desde el centro del tablero, tratando de que sea una figura minimal, viable.

Comenzaremos con el primer acomodo de fichas, como se muestra en la figura 34.

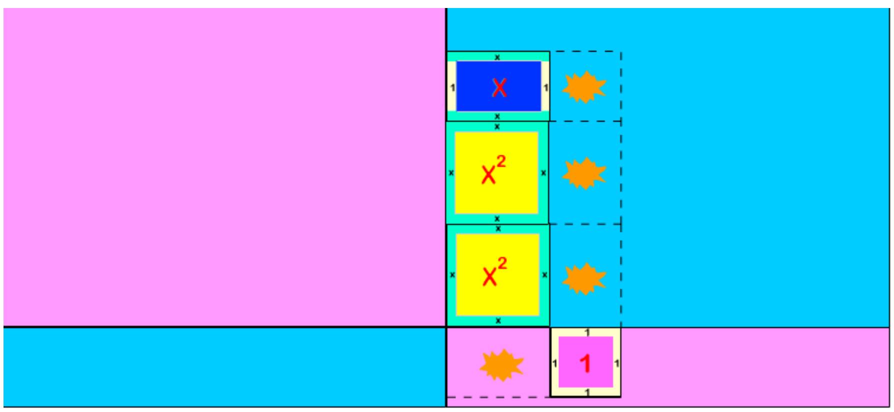


Figura 34. Primer acomodo de fichas.

En este primer acercamiento a la formación de la figura rectangular observamos que, las fichas efectivamente representan al polinomio $2x^2 + x - 1$, pero para completar la figura rectangular no se ocupará el mínimo de fichas, dado que ocuparemos 4 y solo dos fichas quedarían en cuadrantes opuestos.

Continuamos con un segundo acomodo.

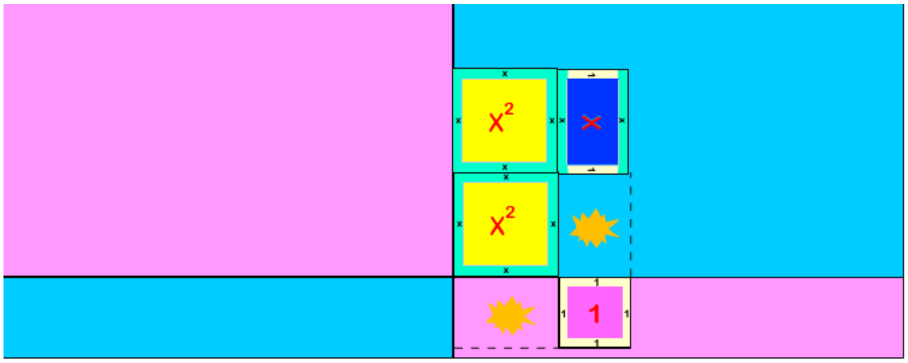


Figura 35. Segundo acomodo de fichas.

Esta forma de acomodar las fichas es efectivamente viable, ya que solo se ocuparán dos fichas de valor X y que se podrán hacer cero al colocarlas en cuadrantes distintos en el tablero. Por lo que se forma la estructura correcta, dado que utiliza el mínimo de fichas (minimal) y el par de fichas que se agregarán se harán cero, es viable. Quedando completado como queda en la figura 36.

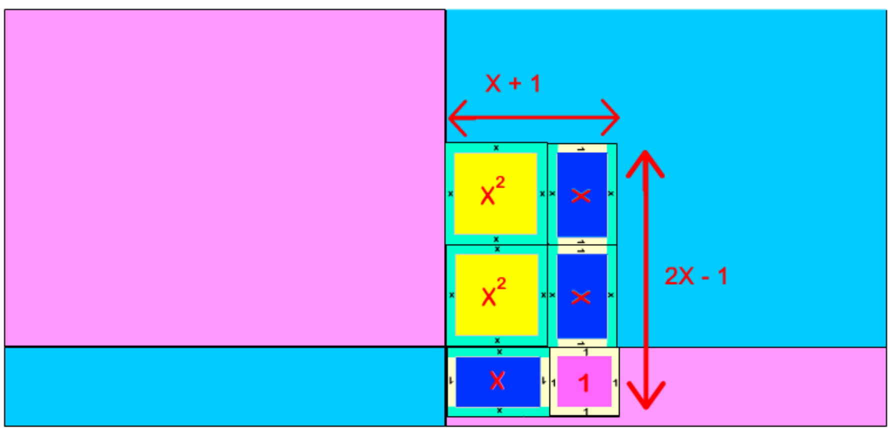


Figura 36. Rectángulo completo.

El resultado de la factorización sería la lectura de la longitud de su base y altura, quedando como $x + 1$ como la base y $2x - 1$ como altura, así concluiremos que la factorización del polinomio $2x^2 + x - 1$ es $(x + 1)(2x - 1)$.

Como segundo ejemplo se factorizará el polinomio $x^3 + 1$. Como en el ejemplo anterior, lo primero es empezar a formar la figura rectangular con las fichas. Cabe mencionar que las fichas de

x^3 no tienen lados que coincidan con lados de la ficha 1, por lo que habrá que colocarlas tocándose únicamente por el vértice, como se ve en la figura 37.

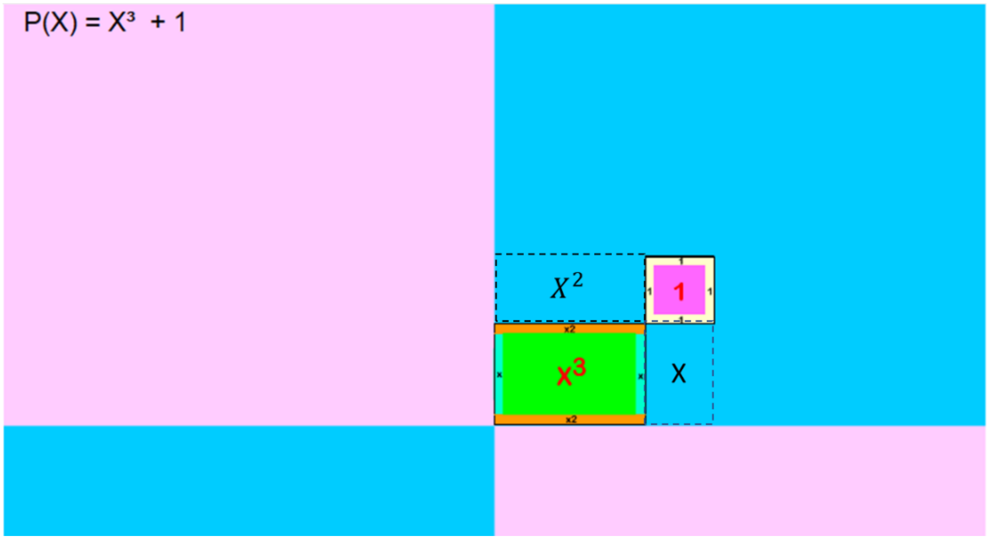


Figura 37. Primer acomodo de fichas para $x^3 + 1$.

Como se puede observar en la figura 37, las fichas que completarían la figura son de valor de área x^2 y x, por lo que la figura queda de la siguiente manera:

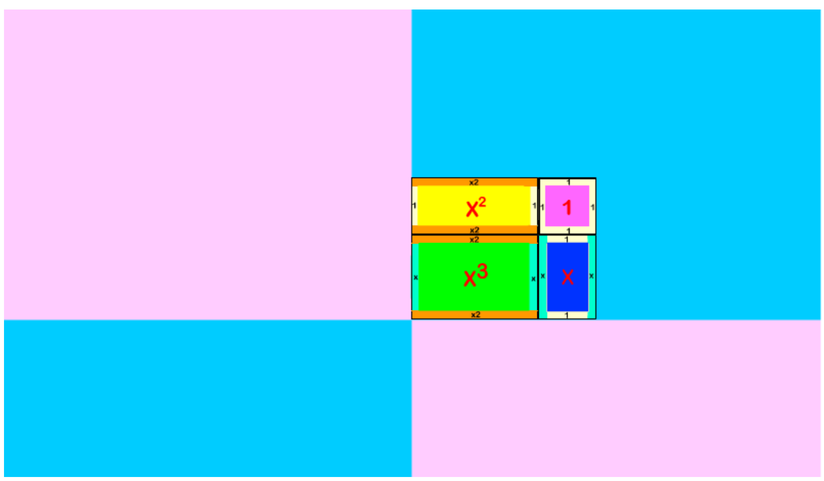


Figura 38. Completando espacios.

Una vez colocadas estas fichas, se debe pensar en la posición donde se colocarán sus fichas opuestas, ya que debemos colocar otras 2 fichas de valores x^2 y x, pero en cuadrantes negativos (en las zonas rosas). Lo que lleva a pensar en utilizar una ficha cuadrada de área x^2, para que al colocarla utilizando el cuadrante rosa de la izquierda, quede colocar una ficha de x y así cumplimos que la estructura sea mínima y viable.

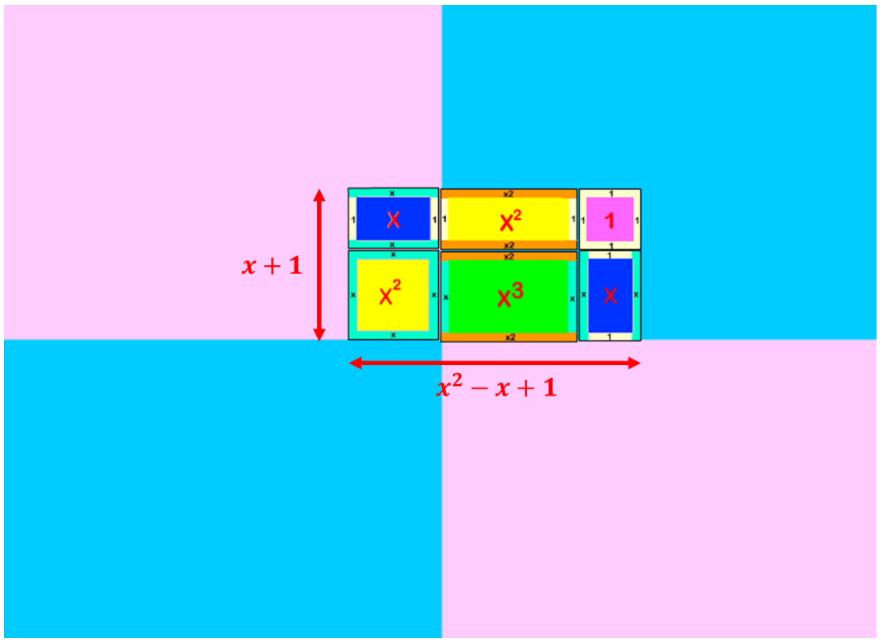


Figura 39. Factorización del ejemplo $x^3 + 1$.

Como podemos apreciar en la figura 39, la forma rectangular está completa y los factores son $x^2 - x + 1$ y $x + 1$ como resultado de la factorización del polinomio $x^3 + 1$.

2.4.10.1. Consideraciones de la Factorización

En la Caja de Polinomios, es posible factorizar polinomios en $\mathbb{Z}$, siempre que se pueda armar una estructura rectangular con el mínimo de fichas, lo que Soto et al. (2005) llama minimal y que las fichas que se tengan que agregar sean colocadas en cuadrantes distintos formando ceros, lo que se le llamará viable.

Tomando en cuenta estos dos aspectos, no es posible factorizar el polinomio x^2+1 en $\mathbb{Z}$, dado que ninguna representación permite agregar fichas que determinen ceros para formar la forma rectangular, como se muestra en las figuras 40 y 41.

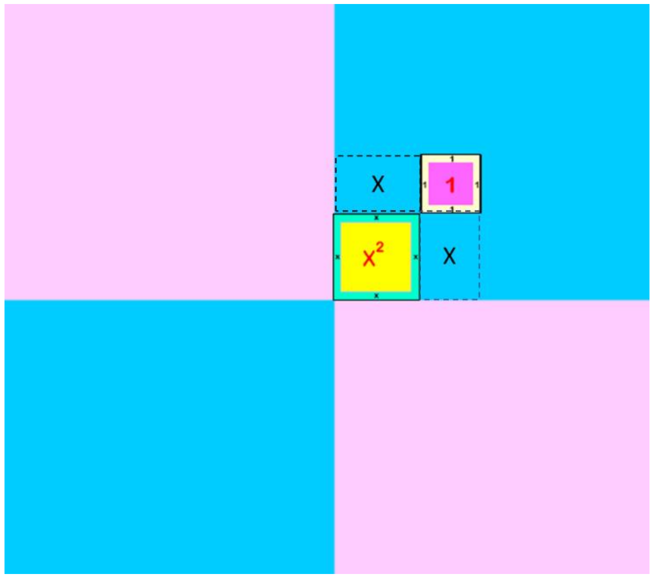


Figura 40. Primer intento de representar x^2+1.

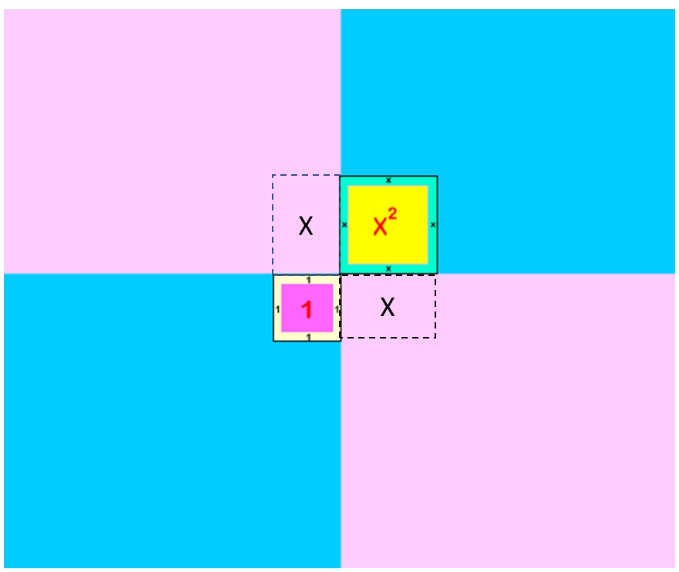


Figura 41. Segundo intento de representar x^2+1.

Capítulo 3

3. Implementación del software y de actividades

Aunque el trabajo consiste en proporcionar una alternativa didáctica para la enseñanza de la factorización de polinomios, resultó interesante realizar una prueba piloto con el fin de experimentar, de cierta manera, qué tan viable es la propuesta. Para ello se propusieron unas actividades a estudiantes de nivel bachillerato.

Inicialmente, las actividades fueron planeadas para aplicarse en una escuela de forma presencial, pero debido a la contingencia sanitaria por COVID-19, se tuvo que realizar con un grupo de 10 participantes, todos estudiantes de nivel bachillerato de edades entre los 15 y 18 años, de diversas instituciones como: Colegio de Bachilleres del Estado de Puebla planteles U-06 y U-15, Preparatoria Lic. Benito Juárez García BUAP, Preparatoria Lic. Enrique Cabrera Barroso BUAP, Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Tlaxcala plantel 15, Benemérito Instituto Normal del Estado, entre otros.

Las actividades se realizaron a través de la plataforma Zoom, el cuestionario de organizadores previos y la encuesta de experiencia de los participantes se hizo por Formularios de Google y el contacto con los estudiantes fue a través de correo electrónico y en algunos casos vía WhatsApp.

La propuesta está estructurada en tres fases: Asimilación del material y manejo de la interfaz del programa, Aplicación de ejercicios y Encuesta de la experiencia.

Los trabajos de Soto y Villarroel estaban dirigidos a auxiliar en el aprendizaje de operaciones básicas con polinomios como suma, resta, multiplicación, división y factorización. Sin embargo, la atención de este trabajo de investigación es solo a la factorización y las clasificaciones propuestas.

Se empezó con información previa para el estudiante como los conceptos de área y cambios de representación, el uso del plano cartesiano con las fichas que utiliza el software, la multiplicación de términos algebraicos y la formación de rectángulos para la factorización. Además de que se estará enfocando en factorizar términos reducibles o factorizables sin tomar en cuenta los polinomios con raíces imaginarias, o con números racionales.

3.1 Obtención de áreas de figuras planas. Organizador Previo

El objetivo de la actividad es que los estudiantes identifiquen y relacionen las variables con los lados de los polígonos, que puedan proponer otras y dar la formula correspondiente al área de cada figura. Es decir, que puedan hacer sus representaciones y aplicar el tratamiento.

3.1.1 Área de un cuadrado

El área de un cuadrado se obtiene al multiplicar la longitud de sus lados iguales y de forma general se obtiene como el cuadrado del valor de sus lados, es decir, si se tiene un cuadrado tiene de lado $2cm$, el área de dicho cuadrado es $2^2 = 2 \times 2 = 4cm^2$. Si el cuadrado tuviera $3cm$ de lado, su área sería $3^2 = 9cm^2$, y si tuviera 4 cm de lado, sería $4^2 = 16cm^2$. De forma general n^2 representa el área de un cuadrado cuyo lado sea n.

Esta longitud representada por la literal n, puede cambiar dependiendo del autor, pero la obtención del área se mantiene igual. De forma geométrica, podemos representar la obtención del área de un cuadrado de las siguientes formas:

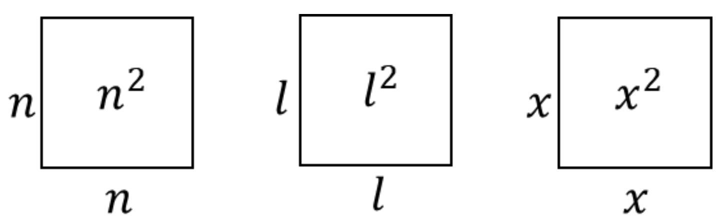


Figura 42. Diferentes representaciones del área de un cuadrado.

3.1.2 Área de un rectángulo

El área de un rectángulo se obtiene al multiplicar la longitud del largo por el ancho de la figura, o en diversas literaturas, la base por la altura. Es decir que si tenemos un rectángulo de 3 cm de base y 9 cm de altura, su área se obtiene como $A = 3 \times 9 = 27cm^2$. De forma general, en diversos textos de geometría, podemos representar la medida de la base de un rectángulo como b y la altura como h, teniendo como fórmula para obtener el área de un rectángulo $A = bh$.

Estas longitudes representadas por las literales b, h, pueden cambiar dependiendo del autor, pero la obtención del área se mantiene igual. De forma geométrica, podemos representar la obtención del área de un rectángulo de las siguientes formas:

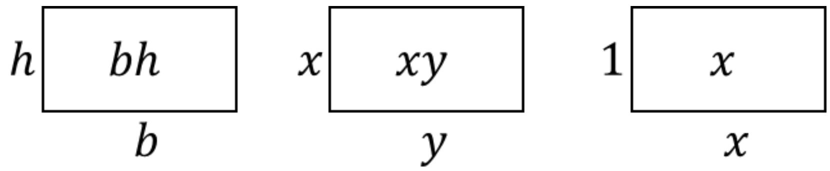


Figura 43. Diferentes representaciones del área de un rectángulo.

3.1.3 Área de figuras planas

Unificando esta información, se comprende que los lados de una figura plana se pueden generalizar con literales para la obtención de áreas de manera general, y que está implícito en las fórmulas.
En esta primera actividad, se les da a los estudiantes una lista con figuras geométricas y sus fórmulas correspondientes para hallar su área, esta tarea la dividiremos en dos apartados. En la primera parte se le da al estudiante cinco figuras similares a las contenidas en su formulario y se le pide que determine el área de estas.
Por ejemplo:

Área: $A = \frac{(nb)c}{2}$
Donde:

$n = Número\ de\ lados\ del\ polígono$
$b = Lado\ del\ polígono$
$c = Apotema$

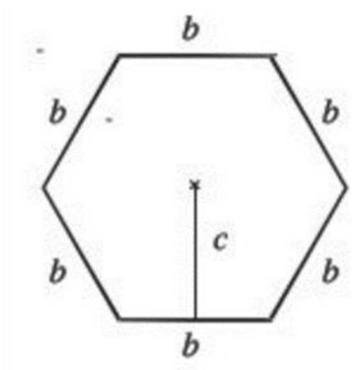


Figura 44. Fórmula para el área de un pentágono (formulario).

Escribe la fórmula que determinaría el área de la siguiente figura:

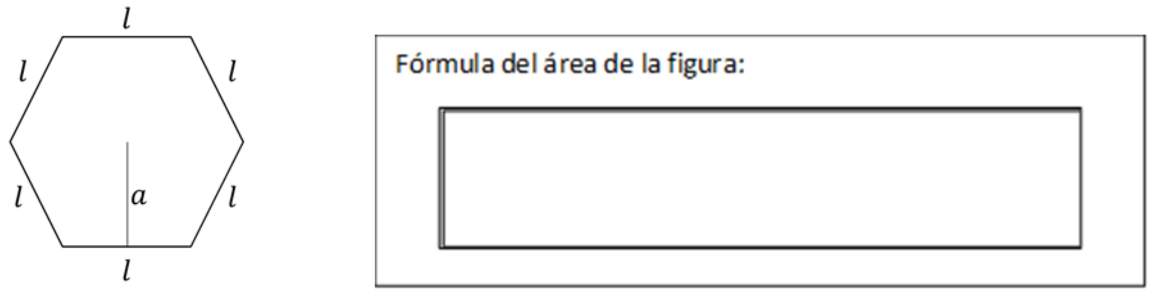


Figura 45. Ejemplo de la primera actividad.

En la segunda fase, se le da al estudiante la misma figura, pero sin literales en los lados, pidiendo que cambie las longitudes de la figura por letras diferentes a las anteriores y que determine la fórmula que corresponde al área de esta nueva figura:

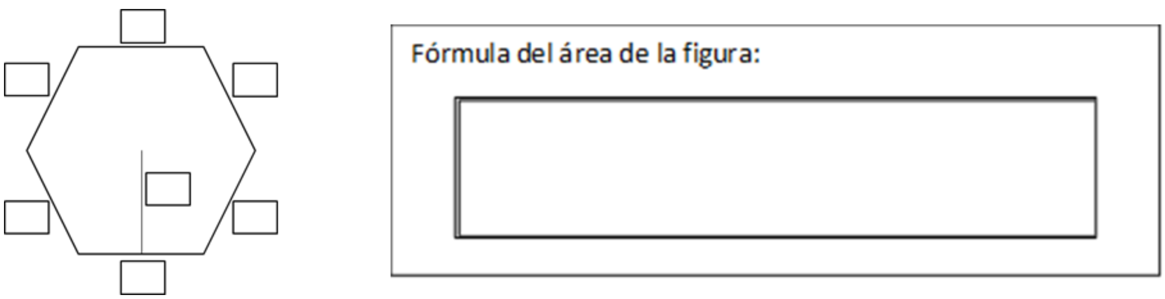


Figura 46. Ejemplo de la segunda actividad.

El objetivo de esta actividad es que es estudiante pueda expresar las áreas de distintas figuras cambiando las formas de representar las longitudes de las mismas. Esta actividad se está considerando como un organizador previo para usar las fichas de la caja de polinomios.
La información completa de este cuestionario se encontrará en los anexos.

3.2. Sesión 1: Interfaz del programa

La interfaz es el mecanismo o herramienta que posibilita esta comunicación mediante la representación de un conjunto de objetos, iconos y elementos gráficos que vienen a funcionar como símbolos de las acciones o tareas que el usuario puede realizar en la computadora. En este caso, la forma en que podrán interactuar los participantes con el software *Caja de Polinomios* y sus diversos íconos.

Previamente a los participantes se les envió el programa en formato .rar para que lo instalaran en sus computadoras. En sesiones previas se resolvieron dudas con respecto a la instalación debido a que había quienes tenían un sistema operativo Windows y quienes tenían un sistema iOS. Una vez que se logró que los participantes tuvieran instalado el programa en sus computadoras y que pudieran compartir (vía zoom) sus pantallas mostrando la pantalla de inicio con el logo de GESCAS, se continuó con la primera sesión de actividades.

A los participantes se les informó que las sesiones en zoom serían grabadas bajo su consentimiento, que compartirían su pantalla en el momento que se requiera y que debían mandar capturas de pantalla de las actividades, que ellos realizarían, con datos como su escuela de procedencia y su grado escolar.

3.2.1 Tutorial

Se les explicó a los estudiantes que el programa cuenta con un tutorial explicativo, con animaciones y ejemplos, pero para efectos de la investigación, solo se les fue guiando por los tutoriales de fichas, multiplicación y factorización. Se les comentó que si ellos lo deseaban podrían seguir explorando las demás pestañas en forma independiente.

Figura 47. Ventana y pestañas del tutorial.

Para la primera sesión se les explicó, con el tutorial, las fichas que se utilizarían, la relación que existe entre los lados de las fichas, su área y los colores de las fichas. Y es en esta parte donde se les hace la explicación de que pueden existir dos fichas de misma área, pero de longitudes diferentes, como se explicó en el capítulo 2, gracias a los teoremas de Euclides.

También se incluye una breve explicación acerca del tablero, se profundizará más acerca del uso del tablero en la segunda sesión, pero es aquí donde verán que en las zonas azules del tablero las fichas toman valores positivos y en las zonas rosas valores negativos.

Incluye, además, una animación de la unión de dos fichas y su lectura de longitudes con respecto a los ejes centrales del tablero, que en la segunda sesión se explicará.

3.2.2. Entrar al DEMO y formar un polinomio

Después de haber visto el tutorial de fichas se procede a ingresar al DEMO digital de la caja de polinomios, dando un clic al ícono que aparece en la parte superior derecha con la leyenda *"Entrar al DEMO"* como se ve en la figura 48.

Figura 48. Ventana del tutorial, señalando el ícono para acceder al DEMO.

Una vez dentro del DEMO se les dirige a abrir un tablero, para fines prácticos, se les indica que abran el tablero correspondiente a factorización ya que es el que estaremos trabajando como objetivo central dentro de las actividades.

Figura 49. Ventana del DEMO y selección del botón Factorización.

Una vez que el estudiante está en el tablero de la factorización se le da una explicación acerca de los botones que tiene del lado derecho, la selección de fichas, los botones, las escalas y el ícono de “BASURA”, toda esa información la puede consultar en el capítulo 2.

Una vez que se terminó la explicación, se los botones y se les mostró como seleccionar fichas, se seleccionan a algunos de los participantes para que formen polinomios en el tablero, como se muestra en la figura 50.

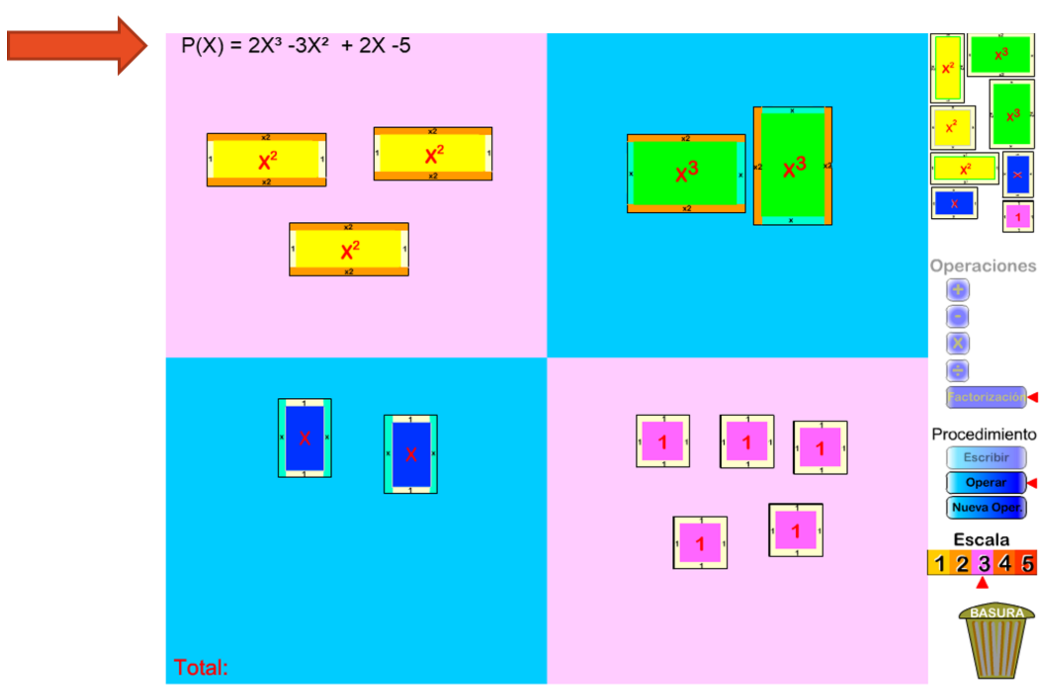


Figura 50. Escritura de polinomios en el tablero y pantalla.

En esta parte de la interacción con los participantes, se les pidió que compartieran su pantalla para que se observara como trabajaban desde su computadora con el software, teniendo algunos resultados como el mostrado en la figura 51.

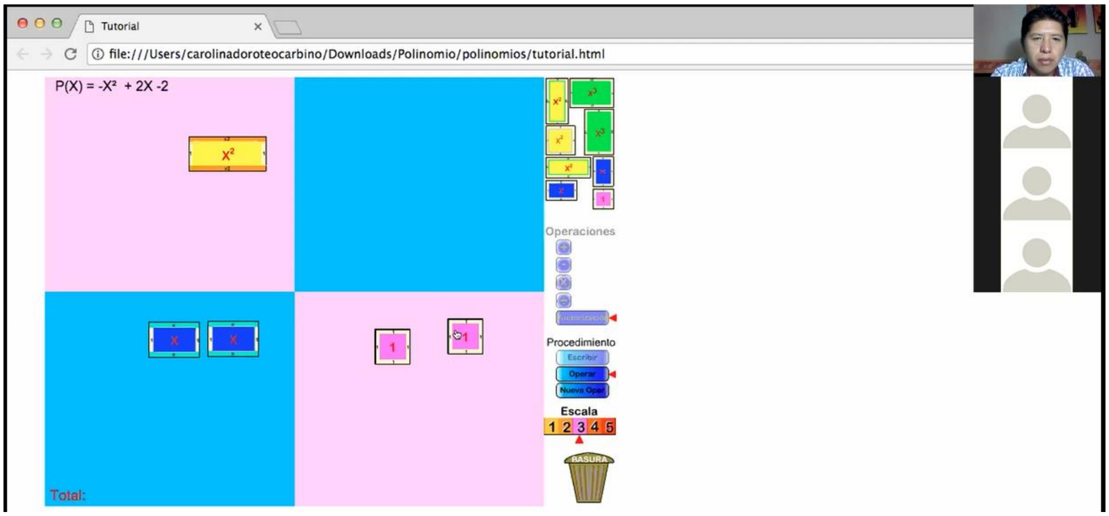


Figura 51. Representación del polinomio $-x^2 + 2x - 2$, por una participante.

3.2.3. Formación de Ceros en el tablero

Cuando se concluye la participación de los estudiantes en la formación de polinomios, se procede con la explicación de por qué dos fichas de misma área que se colocan en cuadrantes diferentes, es decir, una ficha en un cuadrante azul y otra en un cuadrante rosa, no tienen un valor representativo en la pantalla. Esto, como se explica en el capítulo 2, se debe a que dos fichas de mismo valor de área, ubicadas en cuadrantes diferentes (rosa y azul) obtendrán signos opuestos si se colocan, una en una zona azul y otra en una zona rosa, por lo que la programación del tablero hace que se sumen y se obtenga un cero, como se muestra en la figura 52.

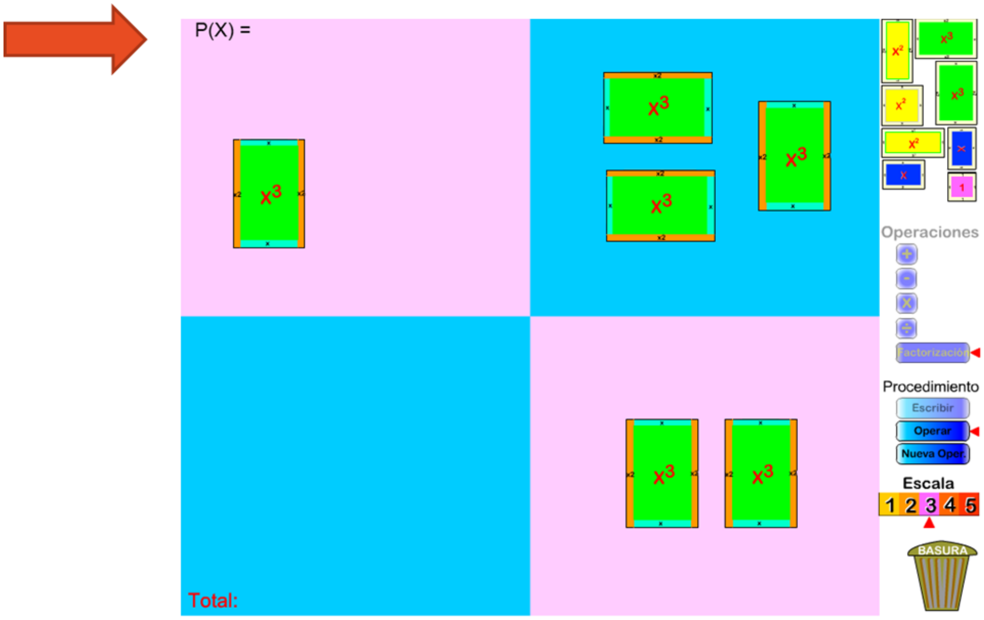


Figura 52. Formación de ceros en la pantalla del tablero.

Esto se puede representar de diversas formas, pero para ver la comprensión de los participantes, se les pidió que fueran ellos los que formaran los ceros en pantalla y que compartieran su trabajo como se muestra en la figura 53.

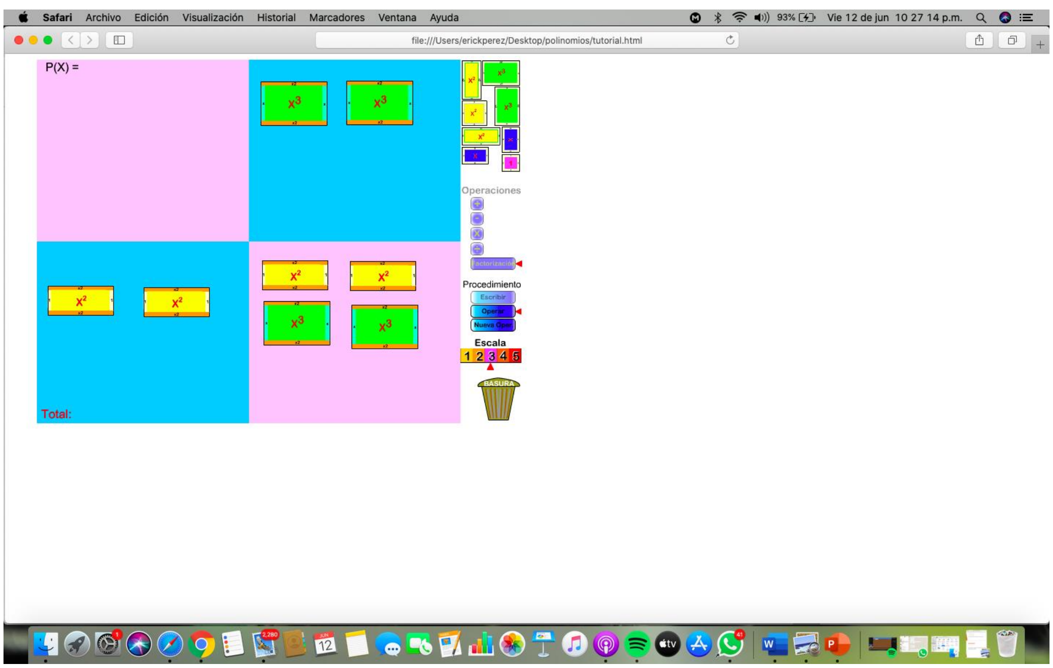


Figura 53. Ceros en pantalla, trabajo de un participante.

3.2.4. Armado de figuras rectangulares

En esta última parte de la primera sesión con los participantes se les pidió que exploraran las fichas y observaran detenidamente sus lados. Después se les explicó que se pueden agrupar y emparejar cada ficha con los lados correspondientes para armar figuras compuestas. Estas figuras compuestas podían ser cuadrados o rectángulos como se muestra en la figura 54.

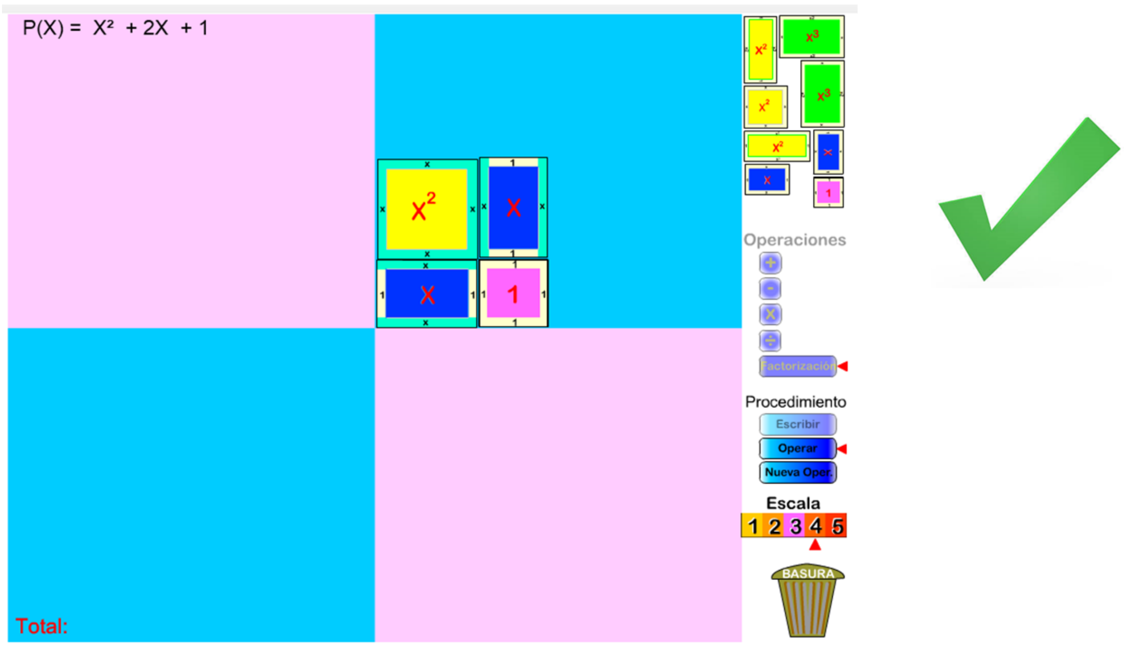


Figura 54. Armado correcto de figuras compuestas.

Cabe mencionar que se les dijo a los estudiantes que empezaran la formación de figuras desde el centro del tablero y a los ejes centrales para formar sus figuras, ya que en la segunda sesión veríamos como darles valores a sus figuras de base y altura para las operaciones de multiplicación y factorización. Se les pidió la participación de nuestros estudiantes por medio de compartir pantallas de la plataforma Zoom para que se resolvieran dudas o incertidumbres que pudieran tener con este tópico, logrando tener las observaciones que se muestran en la figura 55.

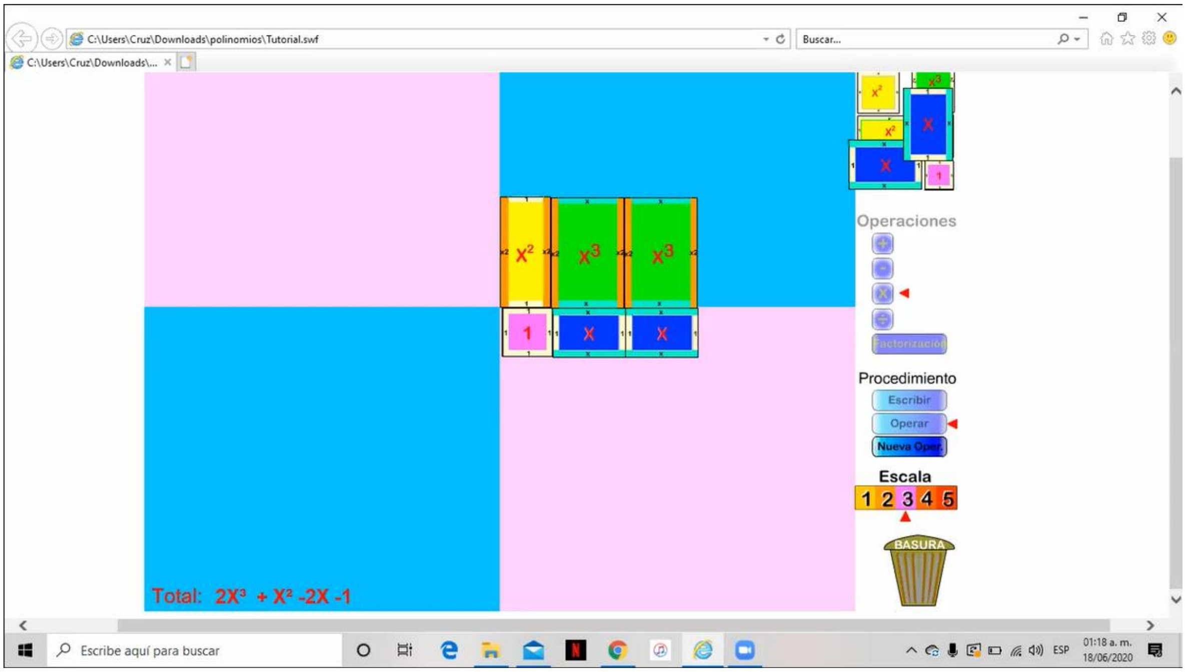


Figura 55. Armado de una figura compuesta por una participante.

Con este último ejercicio se concluyó la sesión 1 con los participantes, se les asignaron ejercicios para que continuaran practicando en casa y que mandaran evidencia de su trabajo. Las dudas que les surgieran serían revisadas en la segunda sesión.

3.3. Sesión 2: Ejercicios con las figuras compuestas y multiplicación

En la segunda sesión se toca el tema del plano cartesiano y como se emula en software de la Caja de Polinomios. Este será el sistema de referencia que se usará para designarle valores de base y altura a las figuras compuestas que se formaron en la sesión 1. Antes de iniciar la Sesión, se les preguntó a los participantes si aún quedaban dudas con el armado de las figuras compuestas con las fichas de la Caja de Polinomios, al esclarecer esto, se prosiguió con la lección.

3.3.1. El plano cartesiano

Este es uno de los elementos matemáticos que corresponde con la caja de polinomios, por lo que la explicación acerca de su uso como nuestro sistema de referencia es parte de las actividades a realizar con los estudiantes.

Está compuesto por dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto llamado origen. Sobre el eje horizontal (X) del lado derecho se muestran enteros positivos y en la izquierda enteros negativos; sobre el eje vertical (Y), la parte superior tiene enteros positivos y en la inferior hay enteros negativos. Y se forman 4 cuadrantes como se muestra en la figura 56.

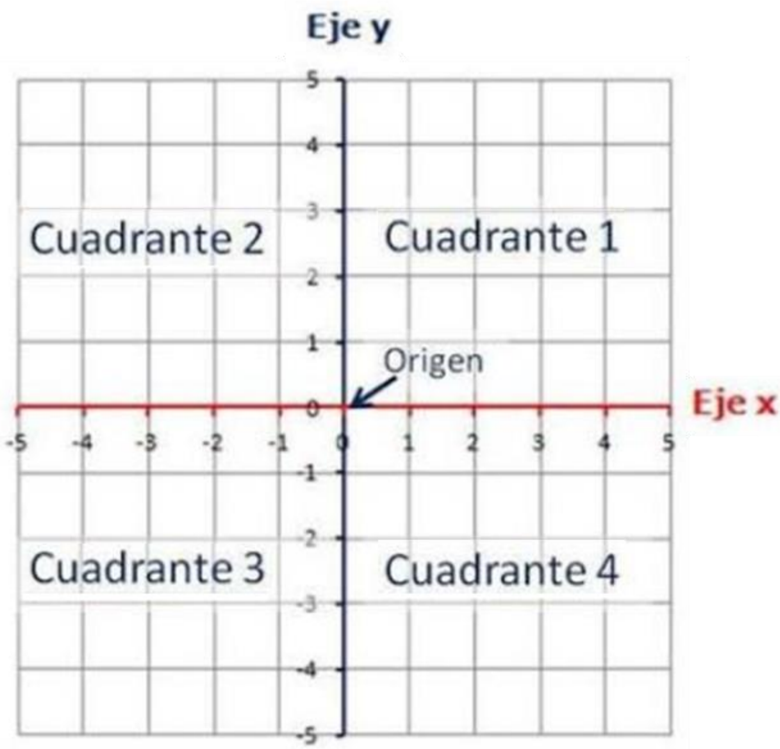


Figura 56. Plano cartesiano.

Recordemos a los participantes que del origen hacia la derecha hay valores positivos y hacia arriba también. Si multiplicamos los valores obtendremos un signo positivo en todo el cuadrante 1.

Ahora, del origen hacia arriba hay valores positivos sobre el eje Y, y del origen hacia la izquierda, sobre el eje X, hay valores negativos. Si multiplicamos los valores obtendremos un signo negativo en todo el cuadrante 2.

Si repetimos estos pasos, obtendremos los signos de los cuadrantes 3 y 4, como aparecen en la figura 57.

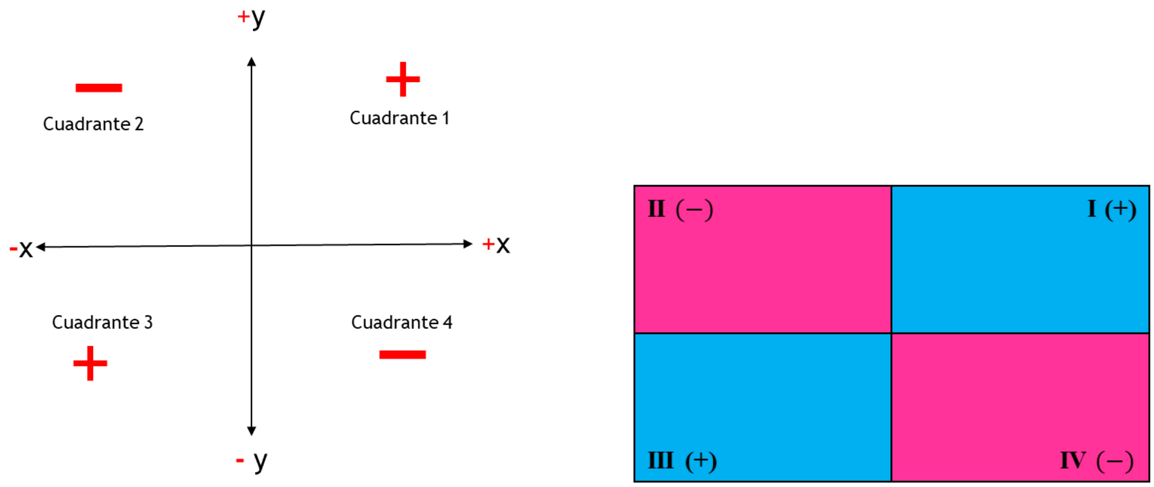


Figura 57. Signos en el plano cartesiano y el tablero de la Caja de Polinomios.

Y concluimos que esta es la razón por la cual las zonas azules le dan valores positivos a las fichas y las rosas valores negativos.

3.3.2. Multiplicación de expresiones algebraicas

El docente puede ir guiando al estudiante con ayuda del tutorial del software y realizar los ejemplos de multiplicación para satisfacer las dudas de sus educandos. En esta sección es importante la formación de formas rectangulares y la obtención de la base y altura de dichas figuras.

Se les mencionó a los chicos acerca de apoyarse del eje horizontal (eje X) para dar la base de la figura, observando el valor que corresponde a la base de las fichas individuales. Y la altura con ayuda del eje vertical (eje Y) para dar la altura del rectángulo, apoyándose de los lados de las figuras que estén sobre este eje y que corresponda con la altura de las fichas individuales.

Por ejemplo, se dio la multiplicación de los factores $(-x + 3)$ con $(2x - 2)$, por lo que se constituyó que la construcción de la base fuera con el factor $-x + 3$, quedando como:

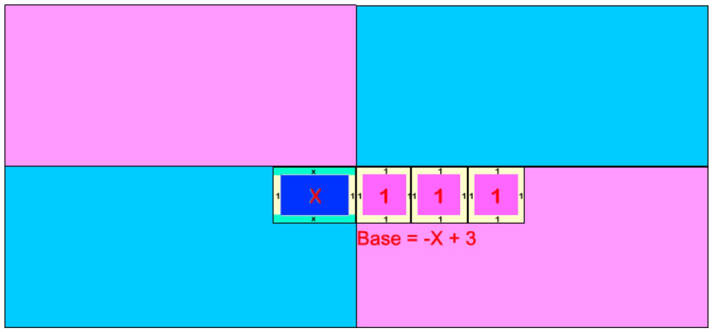


Figura 58. Armado de la base.

Como se puede observar, la ficha que corresponde a $-x$, está tocando el eje horizontal en la sección que corresponde a valores negativos (del centro hacia la izquierda) y las 3 fichas de 1 que corresponden al +3, están sobre el eje y en la sección que corresponde a valores positivos (del centro y hacia la derecha).

Para el caso de la altura, todas las fichas tienen altura de 1, para que correspondan con la expresión $2x - 2$, habrá que recorrer las figuras que serán la base un ligar hacia abajo para agregar otra ficha de 1 y que la altura pueda corresponder a -2, dado que serán colocadas del centro y hacia abajo, representando los valores negativos sobre el eje vertical (eje Y).

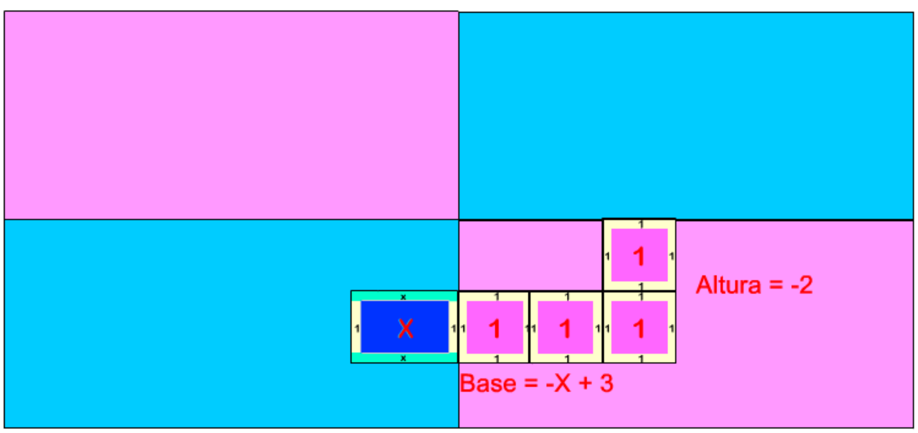


Figura 59. Construcción de la altura de la figura.

Por lo que solo faltaría agregar dos ficas de altura X, que representarán al $2x$ del término. Que se puede apreciar en la figura 60.

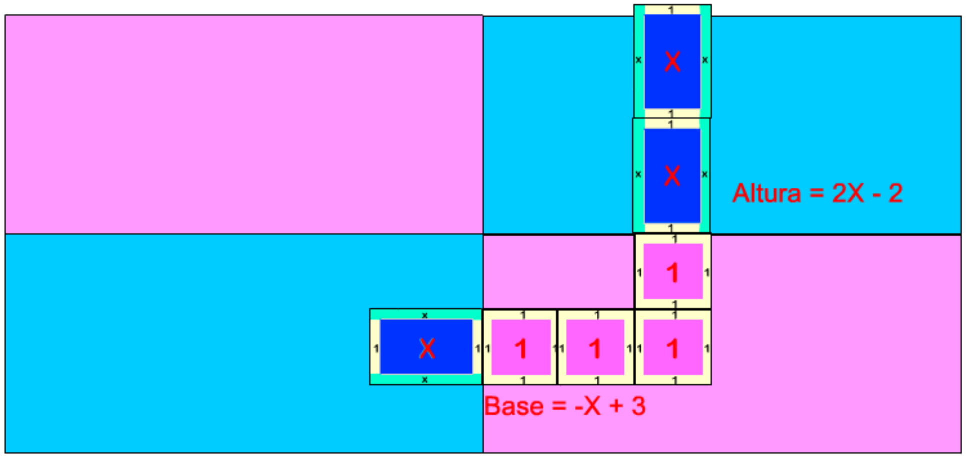


Figura 60. Construcción de la base y altura de la figura.

Teniendo formadas la base y altura de la figura, se procede a completar con las fichas que calcen correctamente en los lugares faltantes, como se ve en la figura 61.

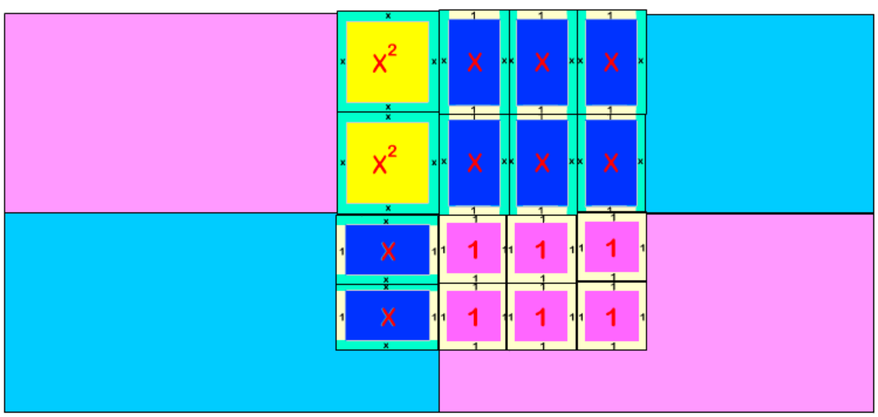


Figura 61. Figura rectangular completa.

En una última observación, se tendrían que quitar las fichas de mismo valor algebraico (de área) que determinen ceros al estar colocadas en cuadrantes opuestos. Pero para este ejemplo, no hubo alguna, dejando la respuesta de la multiplicación de $(-x + 3)(2x - 2)$ como $2x^2 + 8x - 6$.

Para reforzar un poco esta parte de la multiplicación, se les puso ejercicio a los participantes de formar figuras rectangulares y escribir las longitudes de la base y altura, como se muestra en la figura 62.

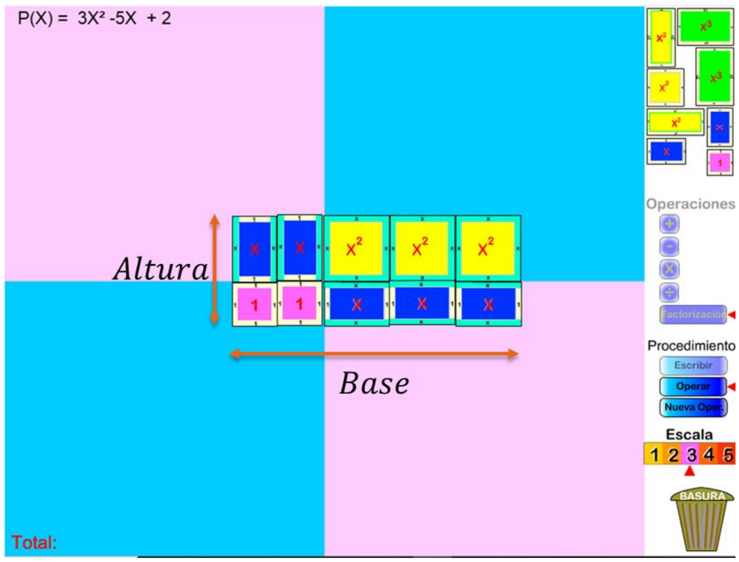


Figura 62. Lados correspondientes a Base y Altura.

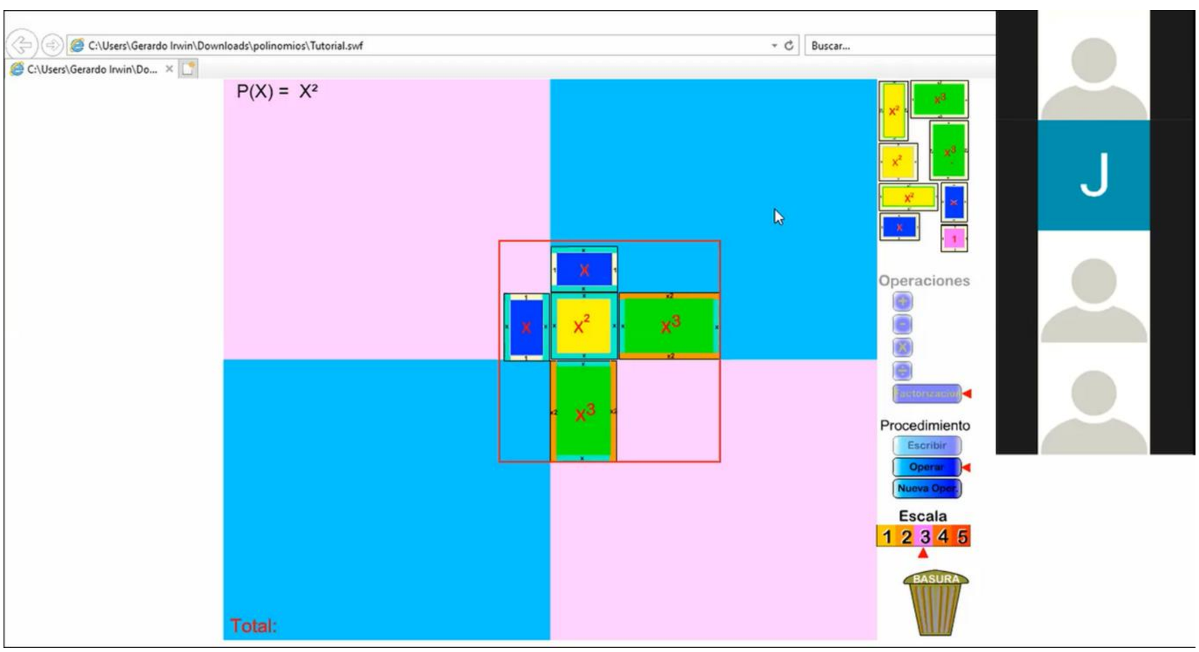


Figura 63. Interacción con los participantes en el armado de figuras.

3.4. Sesión 3. Ejercicios de factorización de polinomios y encuesta

En esta última sesión a los participantes se les guio por el tutorial de la Caja de Polinomios, para que observaran las operaciones que tendrían que realizar para factorizar con el software. Se les recordó que, al igual que en la multiplicación vista en la segunda sesión, aquí tienen que armar figuras rectangulares.

En esta parte de la sesión, se les introduce acerca del armado con el mínimo de fichas posible en la construcción de sus rectángulos para factorizar. Al igual se les dio a conocer que el armado se puede completar agregando pares de fichas que se hagan ceros al colocarlas en zonas (azul o rosa) opuestas. Esto hace que la construcción de rectángulos sea viable.

Concluyendo que en sus actividades deben de cumplir con estos dos conceptos, que la figura esté construida con el mínimo número de fichas y que las fichas que agreguen se puedan descartar o hacer cero, formando una estructura viable.

Los pasos que se explicaron para que pudieran factorizar sus polinomios fue que primero debían de seleccionar las fichas que representarán a sus polinomios.

Como segundo paso debían ordenar sus fichas de tal manera que si tenían que completar con otras fichas fuera usando las mínimas posibles y que fueran pares de fichas que se colocaran en zonas opuestas para que representaran ceros en la pantalla.

Como último debían de examinar que su rectángulo cumpliera con lo visto en el segundo paso, una vez que se aceptara que es una figura viable, se procedía a encontrar las longitudes de la base y altura del rectángulo apoyándose de los ejes horizontal (para la base) y vertical (para la altura).

Con esto se concluía el ejercicio y se obtenían los factores del polinomio dado. Estos fueron algunos ejemplos que se trabajaron en la sesión:

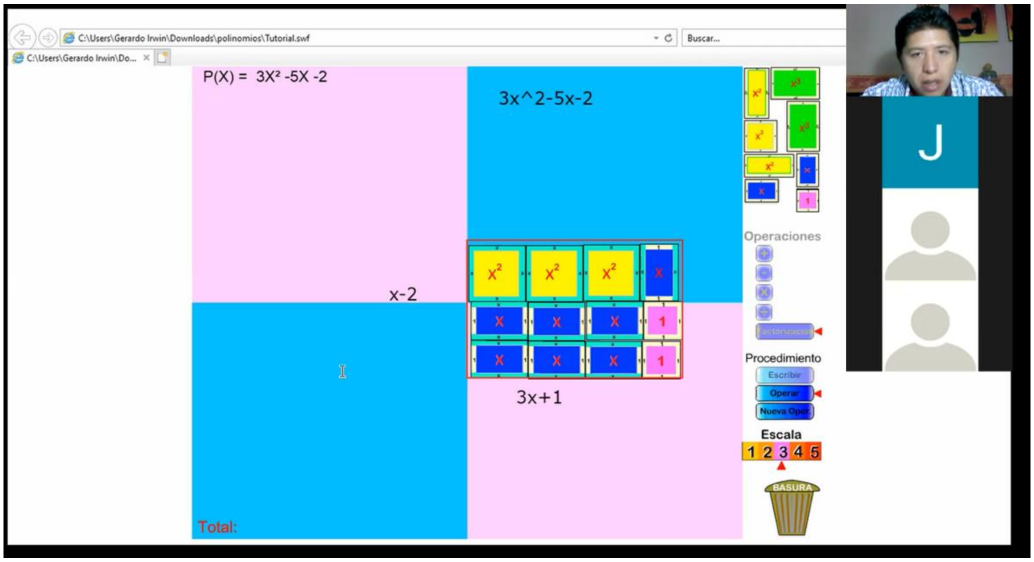


Figura 64. Factorización del polinomio $3x^2 - 5x - 2$.

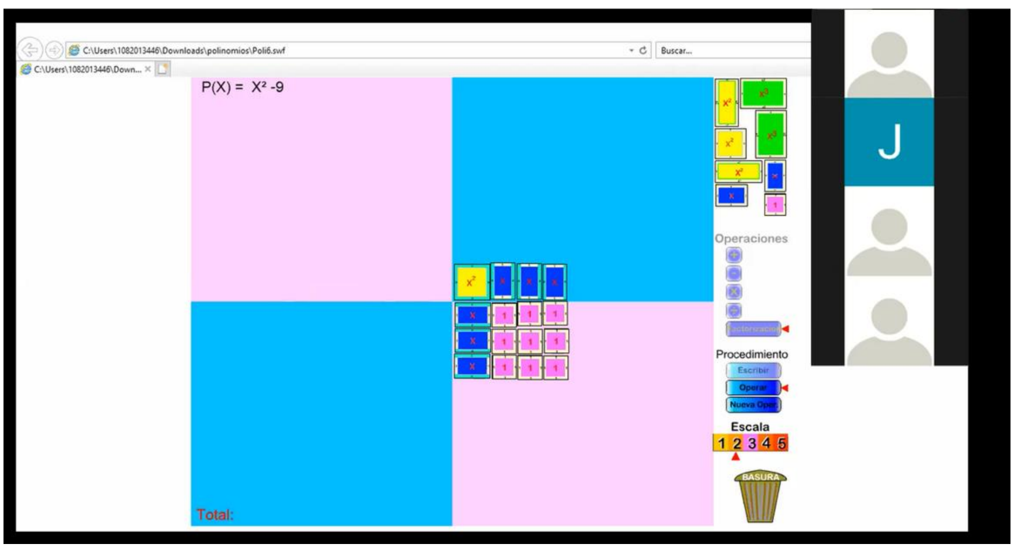


Figura 65. Factorización del polinomio $x^2 - 9$.

Al concluir la sesión se les dejó a los participantes que realizaran los ejercicios siguientes:

1. $x^3 - x^2 - 6x =$
2. $x^3 - 3x^2 + x - 3 =$
3. $4x^2 - 1 =$
4. $9x^2 - 12x + 4 =$
5. $-x^2 + 6x - 8 =$
6. $2x^2 + 3x - 2 =$
7. $x^3 - 1 =$

Tomando en cuenta que cada ejercicio corresponde a un ejemplo de la clasificación de los métodos para factorizar. Las evidencias fueron recabadas por capturas de pantalla que los participantes enviaron vía correo electrónico.

Finalmente se realizó una encuesta diseñada para conocer la experiencia que tuvieron los participantes son el uso del software de la Caja de Polinomios. Esta encuesta fue realizada en Formularios de Google y enviada vía correo electrónico.

Capítulo 4

4. Análisis de Resultados y Conclusiones

En este capítulo se presenta el análisis de los resultados de la prueba diagnóstica aplicada, de las actividades que se realizaron con los participantes y de las respuestas a la encuesta de la experiencia que tuvieron con la Caja de Polinomios.

4.1. Resultados del diagnóstico.

Se aplicó el diagnóstico a 74 estudiantes, de tercer semestre de bachillerato, del Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Tlaxcala, plantel Huactzinco. Se tomó en cuenta las características planteadas para cada ítem mostradas en la tabla 3. Los resultados se muestran a continuación:

Ítems	*No contestados*	*Correctos*	*Problemas en jerarquía de operaciones*	*Errores con Leyes de exponentes*	*Errores de procesos o de escritura*	*Errores de operaciones algebraicas*
1	3	47	22		2	
2	8	4			62	
3	26	10				38
4	32	0		6		36
5	9	3			34	28
6	57	1		2		14
7	48	3				23
8	39	6			4	25

Tabla 3. Resultados de la prueba diagnóstica.

Como se describe en la tabla 4.1 acerca de los errores a explorar, el ítem 1 y 2, explora errores con jerarquía de operaciones y errores de naturaleza aritmética. En los resultados se muestra que el

63.5% contestó acertadamente, pero hubo un 29.72% que tuvo errores porque no aplican la jerarquía de operaciones correctamente.

En el caso del ítem 3, solo 13.51% completó correctamente, pero el 51.35% tuvo dificultades para realizar la reducción de términos semejantes. Agruparon letras, agregaron exponentes y hubo confusión de signos al realizar las diferencias. Mientras que el 35.13% no supo qué hacer.

En los ítems 4, 6 y 7, hubo un alto porcentaje (43.24%, 77.02% y 64.86% respectivamente) de estudiantes que dejaron en blanco el ejercicio o redactaron que no sabían qué hacer.

Por último, los ítems 5 y 8 exploraban el reconocimiento de los productos notables. En el ítem 5, el 45.94% tuvo errores en escritura por olvidar colocar un exponente u olvidó reducir términos semejantes.

El 37.83% tuvo errores de carácter algebraico al confundir procesos de las multiplicaciones de polinomios. Y por último en el ítem 8, el 33.78% tuvo errores al desarrollar el binomio, elevaban los términos al cuadrado, pero olvidaron que existía un tercer término en el desarrollo. Y un 52.7% no concretó el ejercicio.

En conclusión, existen errores marcados en la literatura y que corresponden a conocimientos de álgebra básica previa al tema de factorización.

4.2. Organizador Previo

Se aplicaron a los participantes un cuestionario previo a las sesiones con la Caja de Polinomios, que funcionó como organizador previo para que recordaran las fórmulas de área y el manejo de las literales como representaciones de lados de las figuras.

La primer actividad denominada Organizador previo contiene lo descrito en el capítulo 3 de este trabajo, se les mandó a los participantes una serie de figuras geométricas donde tenían que reescribir fórmulas y proponer otras, con el fin de que relacionaran las letras con un aspecto como, altura, base, apotema, perímetro o área. Se estableció comunicación con los participantes por medio de correo electrónico, se les mandó instrucciones, el software, un video de instalación y el enlace al formulario que se puede apreciar en la figura 66.

Figura 66. Formulario de Google: Organizador previo.

En las siguientes capturas observaremos las respuestas de algunos de ellos, se mostrarán los que los participantes propusieron, cambiaron las literales de los lados de las figuras y relacionaron con la aplicación de la fórmula de área que correspondía con cada una.

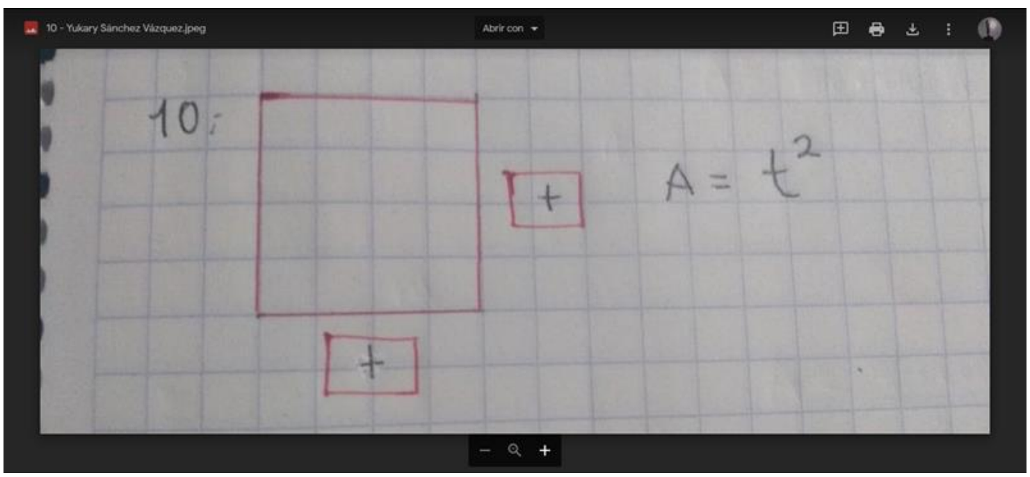


Figura 67. Respuesta de estudiante para la obtención del área de un cuadrado.

En la figura 68, la estudiante, muestra que puede cambiar las literales que representan los lados del polígono que se le da y aplicar la fórmula correcta para determinar su área.

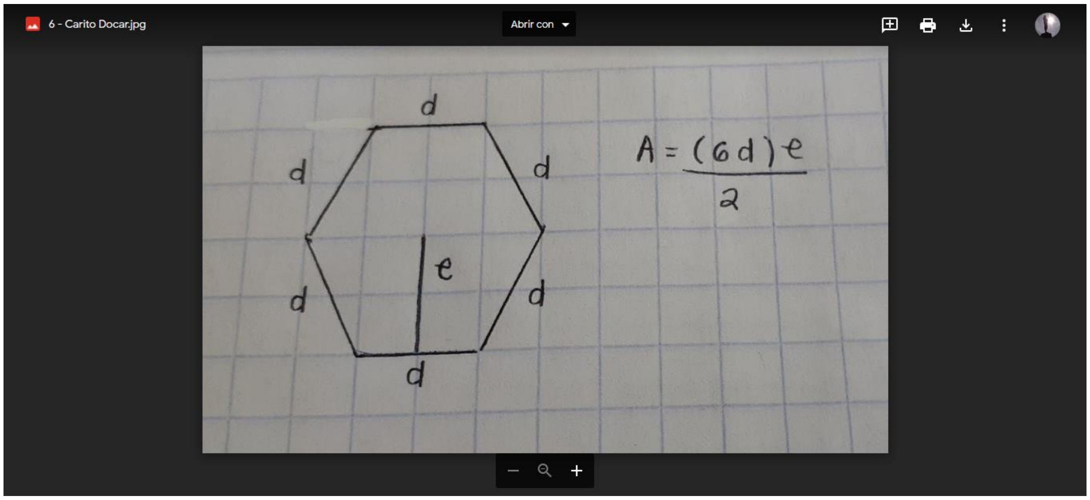


Figura 68. Respuesta de estudiante para la obtención del área de un hexágono regular.

La tercera estudiante, también muestra facilidad al cambiar los registros de representación de los lados del trapecio llegando a una respuesta aceptada para determinar el área de la figura plana como se ve en la figura 69.

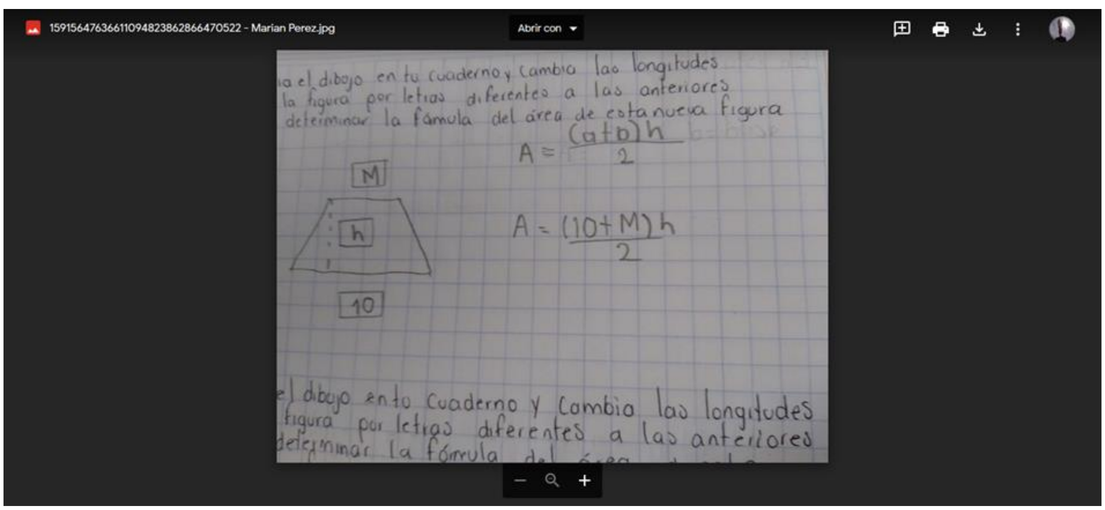


Figura 69. Respuesta de estudiante para la obtención del área de un trapecio.

4.3. Aplicación de las actividades con el software *Caja de Polinomios* vía plataforma Zoom

La aplicación de las actividades se realizó a través de la plataforma Zoom, elegida por las diversas formas que ofrece el software para interactuar con los participantes como compartir pantalla, grabar las sesiones e incluso los participantes pueden obtener permiso del anfitrión para controlar el mando de la computadora y realizar las actividades personalmente. Esto da suficiente interacción con los integrantes dentro de la actividad. Cabe mencionar que la mayoría de las sesiones fueron grabadas para retomarlas y analizar las actividades que realizaban los estudiantes.

En la primera sesión, descrita en el capítulo 3, las actividades que se les dejó como trabajo a los integrantes que probaron el software, además de estar interactuando con el programa, fueron:

- La formación de polinomios
- La representación de ceros en el tablero del programa.

La mayoría de ellos mandaron sus evidencias en un documento de PowerPoint con la captura de pantalla. Algunos resultados fueron:

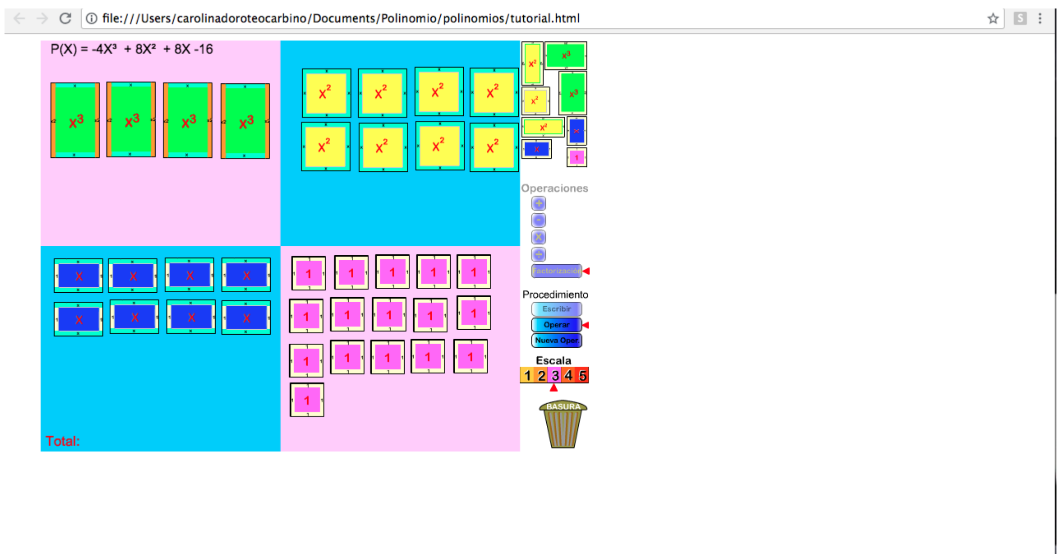


Figura 70. Representación del polinomio $-4x^3 + 8x^2 + 8x - 16$.

Como lo muestra la imagen, la estudiante no tuvo problemas en representar los polinomios que se le asignaron.

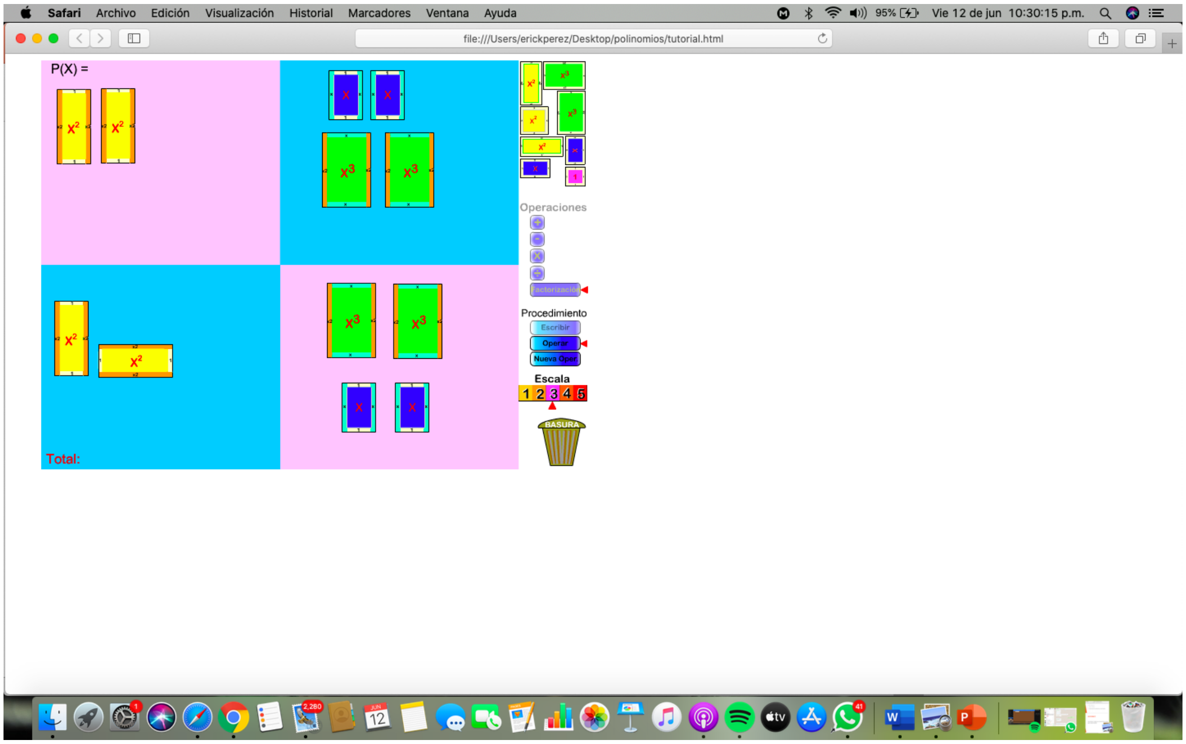


Figura 71. Representación de ceros en pantalla.

Este estudiante representa varias fichas en el tablero que se anulan al tener pares iguales en zonas opuestas del tablero.

Para la segunda sesión, las actividades que se les dejaron a los participantes fueron:

- Multiplicaciones con términos algebraicos y
- Construcción de figuras rectangulares

Las actividades completas se especifican en los anexos. Algunos trabajos que mandaron los participantes los muestro a continuación:

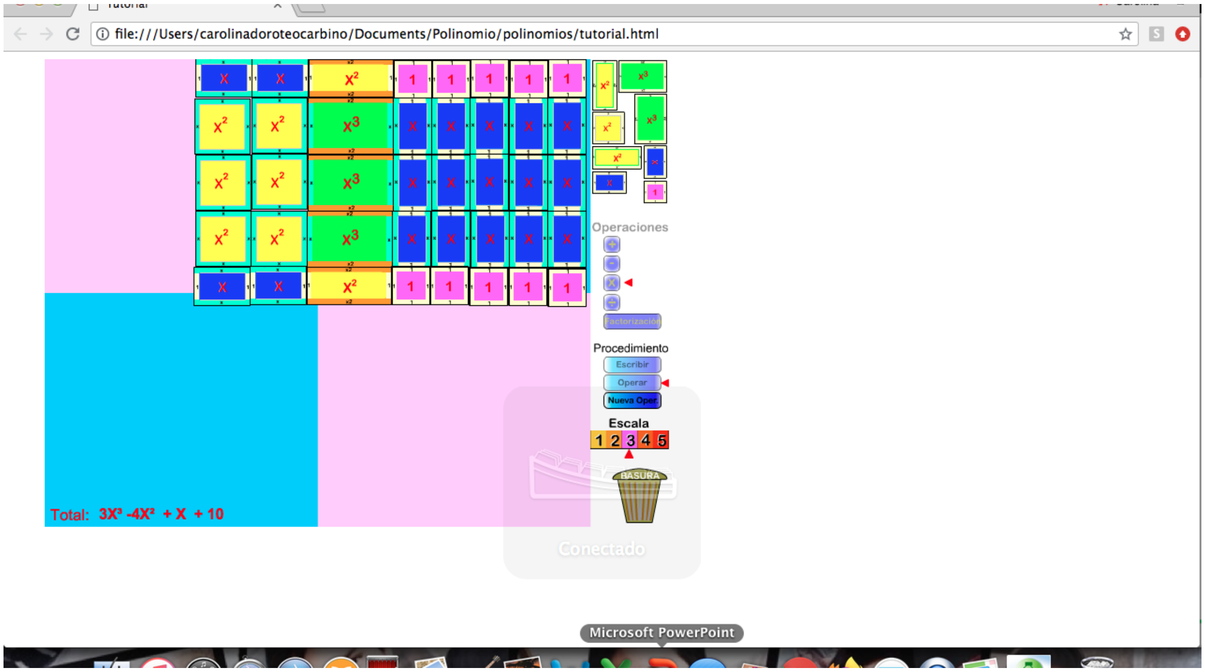


Figura 72. Representación de la multiplicación $(x^2 - 2x + 5)(3x + 2)$.

La participante muestra su representación de la multiplicación, y sin problema pudo construir su figura rectangular. Incluso ella muestra su versión de la operación. Sin embargo, aquí cabe resaltar un error del software que los estudiantes pudieron detectar y es acerca de la lectura en pantalla. El software no puede leer en pantalla más de 10 piezas de un mismo color, como se muestra en este ejercicio desarrollado por la estudiante, la respuesta correcta es $3x^3 - 4x^2 + 11x + 10$, pero en pantalla, bajo la leyenda de **Total,** se puede leer $3x^3 - 4x^2 + x + 10$.

Esto no fue un inconveniente para los participantes, ya que en la exploración de los ejercicios se enfocaban más en la construcción de sus figuras rectangulares. Se les instruyó para que fueran conocedores de ese mal funcionamiento del software, y que enfocaran sus esfuerzos en la construcción de rectángulos usando el tablero y las fichas, para finalmente hacer la comprobación de sus ejercicios. También se comenta acerca de esto en las conclusiones.

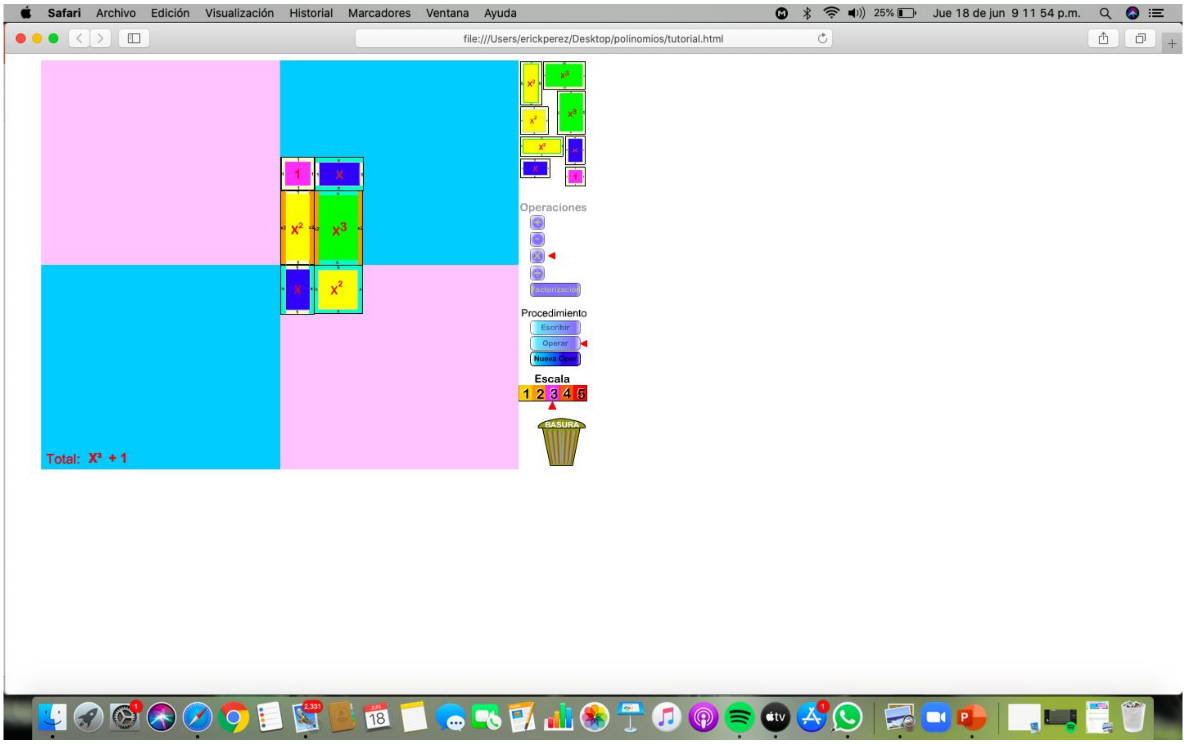


Figura 73. Representación de la multiplicación $(x + 1)(x^2 - x + 1)$.

En la figura 73 observamos la multiplicación del participante, la cual ejecuta correctamente con el software y en pantalla le muestra el resultado correcto de esta multiplicación.

Para la tercer y última sesión se les dio a los participantes una serie de ejercicios donde tendrían que factorizar expresiones. Estos son algunos de los resultados que presentaron:

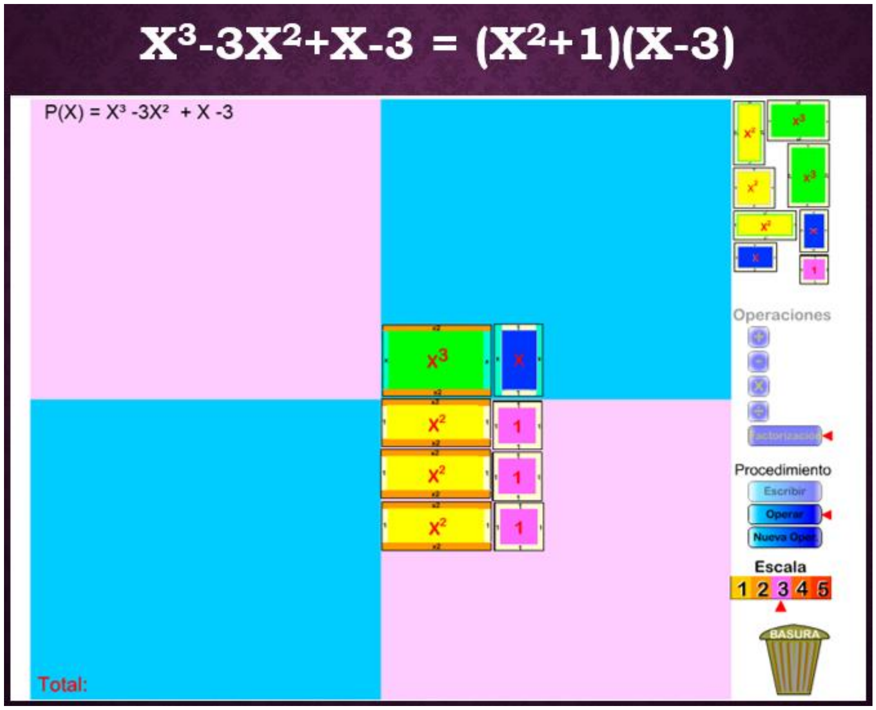


Figura 74. Factorización hecha por participante.

En el caso de la figura 74, la participante pudo factorizar el polinomio $x^3 - 3x^2 + x - 3$ con el programa de la Caja de Polinomios de una manera correcta, siendo este polinomio perteneciente a la clasificación de factorización por agrupación de términos.

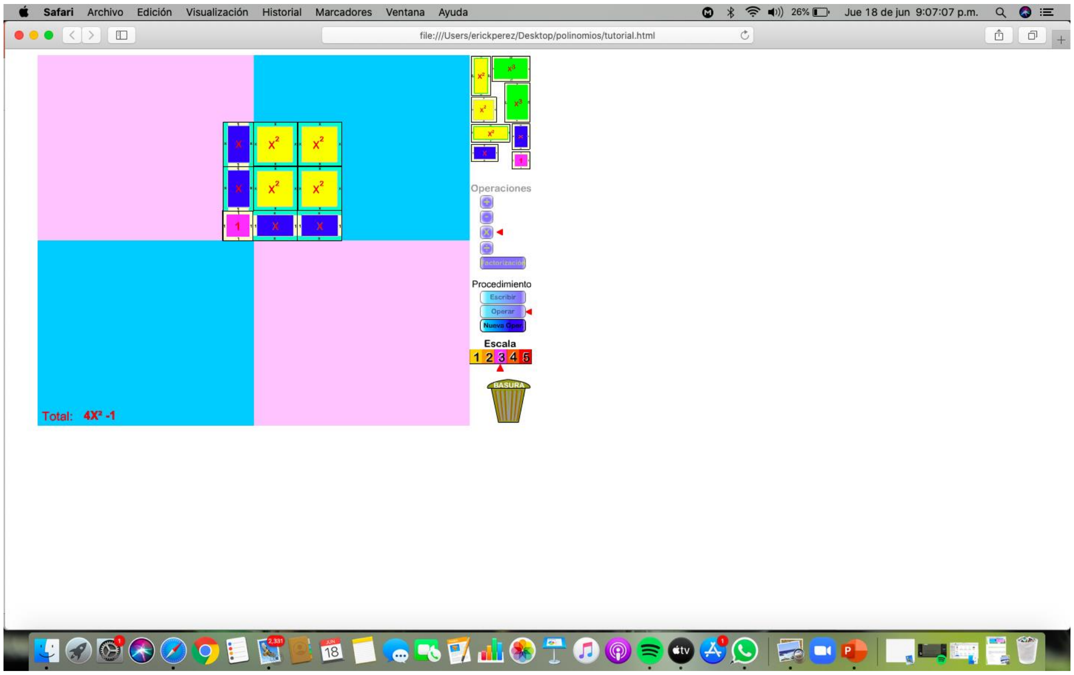


Figura 75. Factorización hecha por participante.

En la figura 75, el participante realizó la factorización del polinomio $4x^2 - 1$, obteniendo una figura con el menor número de fichas y los pares de fichas que agregó se encuentran en zonas opuestas, por lo que su estructura si es viable.

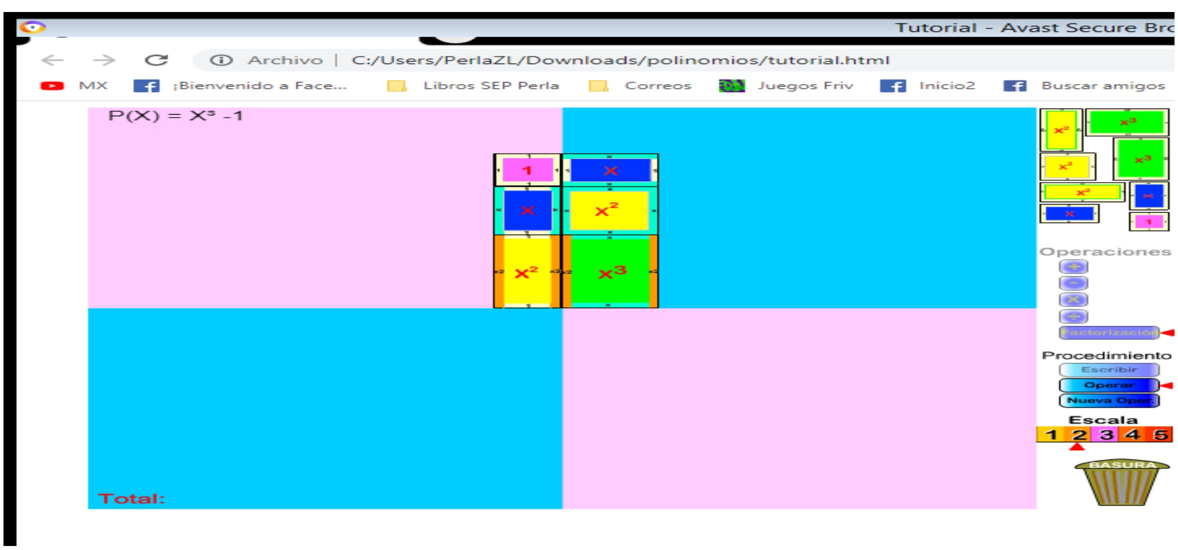


Figura 76. Factorización hecha por participante.

En la figura 76, la participante logra factorizar el polinomio $x^3 - 1$ con software, siendo este término perteneciente a la clasificación de diferencia de cubos. Se puede ver que cumplió correctamente con su estructura, siendo está construida con el menor número de fichas y viable al colocar los pares de fichas agregados en zonas opuestas del tablero.

4.4. Cuestionario de indagación de la experiencia de los participantes

Finalmente, analizaremos la experiencia de los participantes con el cuestionario que se redactó en Formularios de Google y que fue enviado a los participantes para que nos compartieran sus ideas acerca de trabajar estos temas de álgebra con la Caja de Polinomios.
Las primeras 3 preguntas que se les hicieron fue acerca del tipo de aplicaciones que ellos usan en su clase de matemáticas o que el profesor también usa, o que solo el estudiante usa. También acerca de las actividades que realizan en clase y los materiales que usa el docente.

Pregunta 1: ¿Qué tipo de materiales usa tu profesor(a) de matemáticas en la escuela?
Los porcentajes de respuesta a estas preguntas son:

a) 90% Marcador y pintarrón
b) 60% Libros y/o antología
c) 40% Computadora
d) 0% Calculadora
e) 50% Aplicaciones de celular
f) 0% Caja de Polinomios

Análisis
El uso del pintarrón y marcador es de uso común entre los profesores. Los libros y antologías son aún un recurso usual en la clase más que las aplicaciones del celular, la computadora, la calculadora o la Caja Polinomios.

Pregunta 2: ¿Qué tipo de programa de cómputo o aplicación utilizan como recurso en la clase de matemáticas?

Respuestas de los participantes:

- Ninguna.
- En la escuela ninguna, pero yo personalmente utilizo aplicaciones como “GeoGebra”.
- Geo Math
- GeoGebra
- Photomath
- Navegador

Análisis

Una parte de los estudiantes no usan una aplicación o programa como recurso de la clase, sin embargo, hay quienes usan GeoGebra, ya sea dentro de la clase de matemáticas o de forma individual. Además de otras aplicaciones.

Pregunta 3: ¿Qué tipo de actividades realizas en la clase de matemáticas?

Los porcentajes de respuestas a estas preguntas son:

a) 100% Resolución de problemas.
b) 80% Ejercicios a lápiz y papel.
c) 70% Trabajos individuales.
d) 50% Trabajo en equipo.
e) 50% Resolución del libro.
f) 20% Actividades con juegos.

Análisis.

Es muy habitual que en la clase de matemáticas se base en la resolución de problemas y ejercicio que se deben resolver a lápiz y papel a comparación del uso de actividades lúdicas o gamificación.

Pregunta 4: ¿Es fácil escribir un polinomio con las fichas de la caja de polinomios?

La respuesta más frecuente: Sí

- Complicado al principio, con la práctica mejoras mucho
- Si, al tener la posibilidad de mover las fichas para poder crear los polinomios hay facilidad de escribir el que sea.
- Si muy fácil
- Claro, es muy didáctica
- No es tan fácil pero tampoco tan complejo.

Análisis.
El grupo presentó un buen manejo de la Caja de Polinomios en cuanto a la escritura de cualquier polinomio sobre el tablero de juego.

Pregunta 5: ¿Cómo identificabas las cantidades negativas y positivas con la caja de polinomios?
Respuestas:

- Por los colores del tablero, de los cuadrantes del plano cartesiano.
- Depende de en qué lugar se establezcan las fichas.
- Por los colores y lado derecho e izquierdo.
- Al identificar los cuatro cuadrantes en el plano cartesiano
- Por los cuadrantes

Pregunta 6: ¿Qué dificultades encuentras al escribir los polinomios sobre el tablero del programa?
Respuestas:

- Ninguno
- Que no hace caso a la primera para agarrar las fichas.
- El sacar la ficha a ocupar en la parte lateral.
- Que las fichas son muy limitadas.
- Ninguno, solo que no lee más de 11 o 12 coeficientes de X
- Ninguno, es muy completo.
- La manera en cómo se tienen que unir o cuando no se unen correctamente.
- Es muy tardado.

Análisis.

En esta parte los estudiantes, hablan acerca de la programación del software en cuanto a la colocación de fichas, varias de sus respuestas tienen que ver con el diseño del programa y algunas de las características de manipulación que no son tan sencillas. En algunos casos hay que esforzarse por colocar bien la ficha, es mucho más manual y se piensa que se podría automatizar más el proceso.

Pregunta 7: ¿Qué tan fácil era unir las fichas de la caja de polinomios para formar figuras rectangulares o cuadradas?

Respuestas:

- Fácil, pero si queríamos que se viera simétrico a veces era un poco más difícil.
- No era tan fácil, tenías que observar muy bien los tamaños e ir colocando poco a poco los rectángulos.
- Muy fácil.
- Era fácil.
- Bastante fácil
- Era un poco complicado pero entendible
- Sencillo
- Si identificabas los lados iguales podías unir las figuras
- En realidad, no es un trabajo tan complejo.

Análisis.

La mayoría de los participantes notó que era sencillo el armado de las formas rectangulares, solo era cuestión de la observación de los lados de las figuras y la manipulación de las mismas.

Pregunta 8: ¿Qué dificultades encontrabas al hallar la base y altura de las figuras rectangulares o cuadradas que formabas con las fichas?

Respuestas:

- Al principio era un poco confuso, pero ahora ninguna.
- A veces no daba la base o altura exacta y tenías que volver a acomodar los rectángulos
- No había mucho problema, solo era cuestión de saber cómo formar las fichas

- Pues que recuerde creo que ninguna
- No tenía dificultades
- Ninguna, en si solo era pensar bien cuales multiplicar.
- Se me hacia un poco difícil ya que no podía encontrar la altura.
- Un poco, tal vez cuando no podía mover toda una figura
- Si no contaba bien las "x" y los números podía equivocarme al encontrar la base y la altura.
- En realidad, no encontré algún defecto o una dificultad.

Análisis.
La mayoría de los participantes no tuvo dificultad en hallar la base y la altura, pero hubo una parte de ellos que notó que había que poner atención debido al acomodo de las fichas, o que no se pueden mover todas las fichas a la vez, que eso recae en el diseño y configuraciones del software.

Pregunta 9: ¿Qué diferencias encuentras entre hacer la multiplicación de polinomios en tu cuaderno con lápiz y papel, a realizarla con la caja de polinomios?
Respuestas:

- Es más rápido y automático en la caja de polinomios.
- Al hacerla manualmente es más tardado, en la caja de polinomios con la práctica puede llegar a ser más rápido.
- En que te dan el resultado automático y es más interesante a diferencia del lápiz y papel.
- Que en la caja de polinomios era más fácil ya que veías las unidades que ocupas y resultaba más fácil realizarlas, y en el cuaderno tenías que imaginar como serían o como se verían.
- La forma gráfica es más fácil para mí.
- Que es más dinámico, practico y sirve de apoyo.
- En que en la libreta es un poco más tardado y en la caja de polinomio es más sencillo.
- En la caja de polinomios es más completo, más didáctico, sencillo y llamativo.
- La caja de polinomios es más interactiva y fácil que realizarlas en el cuaderno.
- Que es más fácil a lápiz y papel, también que es más fácil entenderlo con la caja de Polinomios.

Análisis.

Los estudiantes encontraron que es mucho más fácil, sencillo, dinámico y les ayuda a comprender la operación con la Caja de Polinomios que a diferencia del uso del lápiz y papel.

Pregunta 10: ¿Qué diferencias encuentras entre hacer la factorización de polinomios en tu cuaderno con lápiz y papel, a realizarla con la caja de polinomios?

Respuestas:

- Igual es más rápido y automático en la caja de polinomios.
- La diferencia es que con lápiz y papel tenías que pensar los números para factorizar, y en la caja de polinomios bastaba con armar el polinomio para hallarla.
- Me reduce bastante el procedimiento.
- Que el software te ayudaba a ver si estabas bien, ya que si estabas mal el software te lo marcaba y en la libreta, el único que te dice que estas mal es el maestro cuando te revisa.
- Es más fácil imaginar a raíz de practicarlo en la caja de polinomios.
- Que es más dinámico, practico y sirve de apoyo.
- Se factoriza más rápido en la caja.
- Lo mismo, es buena porque permite hacerlo más fácil.
- La caja de polinomios sirve de guía para realizar la operación, en la libreta si no te sabias el procedimiento podías cometer errores.
- Es más fácil de realizarla a lápiz y papel, pero es más dinámico con la caja.

Análisis

Las diferencias encontradas en los dos procesos son muchas y aparece mayor preferencia en los estudiantes por utilizar la Caja de Polinomios por la facilidad que presenta en calcular las factorizaciones, unido a esto va el ahorro en la escritura formal, permite mirar y comprobar de inmediato sus respuestas, el dinamismo de la caja permite que el proceso sea más fácil. Los procesos simbólicos les resultan largos y confusos lo que permite el equívoco, lo que remarca una respuesta al indicar que él puede comprobar sus resultados por medio del programa.

Después se aplicó la encuesta de satisfacción sacada de Villarroel (2010) para indagar acerca de la percepción con la caja, mostrando los siguientes resultados:

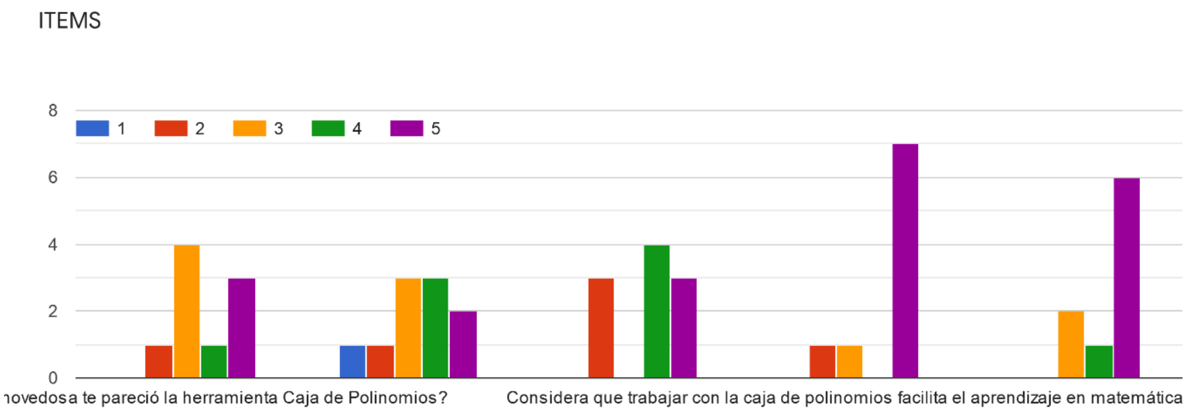


Figura 77. Gráfico de respuestas.

Análisis.

En el gráfico se muestran los siguientes aspectos:

1: ¿Que tan novedosa te pareció la herramienta Caja de Polinomios?, la respuesta en mayoría fue medianamente novedosa.

2: ¿Que tan fácil le pareció la manipulación de la herramienta en las diferentes operaciones (1: muy difícil; 5: muy fácil)? Las respuestas con mayor calificación fueron: medianamente fácil y algo fácil.

En el aspecto 3: El aprendizaje con la caja de los polinomios fue... La mayor parte de los estudiantes la clasificaron como medianamente alta y alta.

El aspecto 4: Considera que trabajar con la caja de polinomios facilita el aprendizaje en matemáticas. Gran parte de los estudiantes considera como alto este aspecto.

Y finalmente el aspecto 5: En términos generales, el trabajo con la caja de polinomios fue…

La mayoría lo calificó como alto este aspecto.

Por último, se les pidió su opinión a los participantes acerca de las ventajas y desventajas que tenía el software y que mencionaran algunas propuestas de mejora hacia el programa. Las cuales se muestran en la siguiente tabla:

Ventajas	Desventajas
Facilidad al resolver ejercicios	Muy pocas fichas
Te ayuda bastante al momento de hacer algún ejercicio y poder comprenderlo.	El menú puede verse un poco simple
Te pronuncia que estas mal	No te dice en dónde *(hace referencia a que el software no especifica la pieza mal colocada)*
Se puede trabajar con cualquier software, tanto iOS como Windows, es fácil de entender con los instructivos	Me parece que se necesita de internet para abrir la aplicación
Aprendes mejor	Ninguna
Rápido, automático, sencillo	Las fichas no se movían tan fácil
Con solo mover las fichas podías obtener el resultado	Al realizar operaciones grandes podías confundirte
Es más fácil y práctico para armar los polinomios logrando hacer la suma, resta, división y multiplicación de estos.	No coloca más de 10 de coeficiente de X
Muy práctico, es sencillo de usar, funciona solo con descargarlo en la computadora.	No se puede en móvil
Puede hacer más fácil y dinámico el aprendizaje.	Es muy tardado acomodar las figuras y demás.

Tabla 4. Ventajas y desventajas del software, de acuerdo a los participantes.

Propuestas de los participantes:

- Agregar más fichas
- Darle más vista a la presentación
- Que se agregue ese aspecto en el que te diga qué ficha está mal
- Poder hacer más rápido la eliminación de rectángulos
- Deberían usarlas en todas las escuelas es una aplicación bastante practica
- Agilizar el movimiento de las fichas
- Reforzar el planteamiento de la guía para que instruya mejor y no haya dudas
- Implementar más operaciones
- Más cantidades.
- Podrían hacer más rápido y facilitar el proceso.

4.5. Conclusiones y recomendaciones

Con la aplicación del diagnóstico se corrobora que los estudiantes de nivel medio superior tienen dificultades de comprensión del álgebra y que necesitan un apoyo didáctico para romper con los obstáculos que se generan por el exceso del uso sintáctico en el aula.

Como lo mencionan los autores de la Caja de Polinomios, este material, conducido adecuadamente por el profesor lleva a que la clase de matemáticas deje de ser aburrida y que el estudiante despierte interés por lo que está haciendo.

Varios participantes mencionan que se les hizo más dinámico el trabajo con la caja de polinomios, les sirvió para ver otra forma de hacer sus operaciones, que es más rápido, sencillo, que pueden retroalimentar sus operaciones ya que el software está programado para advertirles que presentan un error, esto sirve para que ellos solos se vayan corrigiendo y así construyan su aprendizaje.

Podemos concluir que se cumple lo relacionado a la teoría de las representaciones semióticas, ya que, con este material se hizo una transformación de una representación semiótica en otra, se hizo una conversión al pasar de la escritura algebraica a una representación geométrica y se realizaron tratamientos de las operaciones en la Caja de Polinomios que es el sistema semiótico que se mantuvo.

Ahora, dado que las figuras geométricas que utilizamos son cuadrados y rectángulos, estas son de fácil asimilación para los estudiantes, ya que estaban presentes en su estructura cognitiva. Los términos algebraicos y la relación con las fórmulas de área fueron dadas de forma estructurada y no arbitraria, esto se trabajó gradualmente con los jóvenes dentro de las sesiones. Por lo que podemos concluir que el material presenta características potencialmente significativas y que el material es potencialmente significativo.

Con esta propuesta, también se deja como base para la investigación o creación de software para el aprendizaje del álgebra y para el aprendizaje de otros conceptos matemáticos que se puedan expresar en otro registro de representación para su mejor comprensión.

Tal y como lo mencionan los participantes, existen una gran cantidad de mejoras que se le podrían implementar a este software. Por ejemplo, el arrastre de las fichas al tablero, que se puedan empalmar las fichas unas con otras, que se puedan mover todas las fichas a la vez, que, si cambian la escala de las fichas, estas puedan no perder su posición y haya que hacer un reacomodo, que cuando se coloquen más de 11 fichas de X, la pantalla las represente correctamente, etcétera. Como se menciona, este programa es útil, pero se puede mejorar o bien que este sirva de base para la creación de uno nuevo.

Sin embargo, lo que se pretende es que los docentes de matemáticas busquemos materiales como este para implementar en el aula como recurso didáctico para combatir el rezago escolar, la apatía y el desinterés hacia la materia de matemáticas.

En este trabajo, así como en el de los autores, se recomienda que si se va implementar el uso de la Caja de Polinomios sea desde el punto de vista matemático para que no se convierta en un juego más, que conserve su riqueza matemática y poder didáctico que conlleva.

Como se mencionó en capítulos anteriores, en esta herramienta solo se pueden trabajar polinomios en una sola variable y hasta de tercer grado, queda a expensas de quien la quiera implementar este material, el diseño de secuencias o metodologías que puedan ampliar estas posibilidades, como se menciona en el capítulo dos, se pueden crear más fichas, pero ya dependerá de la creatividad, la enseñanza y los objetivos que se planteen.

Hace falta un estudio a largo plazo, con una secuencia didáctica dentro del programa escolarizado para medir el aprovechamiento y el aprendizaje del álgebra básica con la Caja, dado que este estudio solo se centró en una sola temática.

Referencias

Aguilar-Márquez, A., Bravo-Vázquez, F., Gallegos-Ruíz, H., Cerón-Villegas, M., & Reyes Figueroa, R. (2015). Álgebra. In M. E. Zahar Arellano (Ed.), *Matemáticas Simplificadas* (Cuarta Edi, pp. 308–328).

Ausubel, D. P., Novak, J. D., y Hanesian, H. (1983). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo* (2da ed.). Trillas, S.A. de C.V.

Baltazar, A., Rivera, J., Martínez, R., Cárdenas, H., y Amaya, T. (2015). Errores y dificultades que presentan los estudiantes de octavo grado al factororizar polinomios. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *28*, 678–684.

Caballero, E., & Juárez, J. A. (2016). Análisis y clasificación de errores en la adición de fracciones algebraicas con estudiantes que ingresan a la universidad. *Números*, *91*, 33–56.

Carrión Miranda, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. *Unión*, *11*, 19–57. http://www.fisem.org/www/union/revistas/2007/11/Union_011_007.pdf

Del Puerto, S. M., Minnaard, C. L., y Seminara, S. A. (2004). Análisis de los errores : una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación*, 1–12.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española*, *9*, 143–168. http://cmapspublic.ihmc.us/rid=1JM80JJ72-G9RGZN-2CG/La habilidad para cambiar el registro de representaci?n.pdf

Fernández, D. Y., y Ocoró, D. F. (2015). *Caja de Polinomios Web Móvil* [Informe final de grado, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia]. http://biblioteca.udenar.edu.co:8085/atenea/biblioteca/91288.pdf

García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura* [Trabajo de fin de máster, Universidad de Granada, España]. https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Jose_Garcia.pdf

Heinze, A. (2005). Mistake-Handling Activities in the Mathematics Classroom. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, 105–112.

Jiménez-Montero, L. F., Jiménez-Montero, M., Pereira-Alvarado, J. C., y Soto-Cascante, E. (2012). *Factores que impactan negativamente el aprendizaje de la factorización de polinomios: El caso de un grupo de décimo año de un colegio académico de la región Atlántica* [Universidad Nacional,Heredia, Costa Rica]. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Kilpatrick, J., Gómez, P., y Rico, L. (1998). *EDUCACIÓN MATEMÁTICA Errores y dificultades de los estudiantes Resolución de problemas Evaluación Historia* (J. Kilpatrick, P. Gómez, & L. Rico (eds.)). Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. en México.

Kurosch, A. G. (1968). *Curso de Álgebra Superior*. MIR.

Martínez, M. E., y Hernández, L. A. (2016). *Importancia de las representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas*. https://saberesyciencias.com.mx/2016/04/18/importancia-de-las-representaciones-semioticas-en-el-aprendizaje-de-las-matematicas/

Mejía, M. F. (2004). *Análisis didáctico de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas*.[Tesis de Licenciatura, Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia] http://funes.uniandes.edu.co/1761/1/TesisCompletaMar%C3%ADaFernandaMej%C3%ADaPalomino.pdf.

Mejía, M. F. (Octubre de 2008). La factorización de polinomios en un ambiente CAS y lápiz/papel [Taller]. 9° Encuentro Colombiano de Matemática Edicativa. Valledupar, Colombia. http://funes.uniandes.edu.co/947/1/16Taller.pdf.

Méndez, T. (2012). Marco Figural como Medio para Factorizar Polinomios Cuadráticos. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *26*(44), 1395–1416. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000400013

Morales, L. A., Morales, V., y Quiñones, S. H. (2016). Rendimiento escolar. *Humanidades, Tecnología y Ciencia Del Instituto Politécnico Nacional*, *15*, 5. http://revistaelectronica-ipn.org/Contenido/16/HUMANIDADES_16_000382.pdf

Ospina, M. (2015). *Guía didáctica para el aprendizaje de la factorización en estudiantes del CLEI IV del ITM*. [Trabajo final de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio institucional de la Universidad Nacional de Colombia. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/56850

Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., y Gorrochategui, M. (2011). Los registros semióticos de representación en matemática. *Aula Universitaria*, *13*, 29–36. https://doi.org/10.14409/au.v1i13.4112

Rubio, G. (2013). *Proceso de estudio de la factorización de polinomios mediante el uso de Algeblocks desde la TAD*. [Proyecto de grado para Licenciatura, Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia] https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/6759.

Salazar, V. P., Jiménez, S. M., y Mora, L. C. (Noviembre 2013). Tabletas algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización [Contribución a Actas de congreso]. *I Congreso de Educación Matemática de América Central y del Caribe, Santo Domingo, República Dominicana.* http://funes.uniandes.edu.co/2791/.

Soto, F., Mosquera, S., & Gómez, C. P. (2005). La caja de polinomios. *Matemáticas : Enseñanza Universitaria*, *13*(1), 83–97.

Subsecretaría de Educación Media Superior (2019). *Programa de estudios del componente básico del marco curricular común de la educación media superior*. Recuperado de http://www.sems.gob.mx/curriculoems/programas-de-estudio

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra Elemental Una propuesta alternativa* (Primera ed). Trillas.

Villaroel, J. M. (2014). *Propuesta para la enseñanza de las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) y el proceso de factorización de polinomios, con la herramienta didáctica "caja de polinomios", en estudiantes de grado octavo de la I.E María Cano de*. Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia [Tesis o trabajo de investgación, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio institucional de la Universidad Nacional de Colombia. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/51789.

Anexo 1: Examen diagnóstico

DIAGNÓSTICO

Nivel escolar: ______________________ Grado: _____________________ Edad: ______________

Escuela de procedencia: ____

Instrucciones: Realiza los ejercicios de acuerdo a lo que se te pide y coloca tus procedimientos.

1. Contesta la siguiente pregunta sólo observando la siguiente operación:

$$3 \times 4 + 3 \times 5 = 3 \times (4 + 5)$$

   a. ¿Se obtiene el mismo resultado en la derecha y en la izquierda de la igualdad? ____
   b. Comprueba tu respuesta:

2. Observa las siguientes operaciones y en relación con lo anterior, ¿cómo las expresarías del lado derecho de la igualdad para que correspondan (como en el ejercicio 1)?

   a. $8 \times 3 + 8 \times 5 + 8 \times 2 =$
   b. $5 \times 11 - 5 \times 3 + 5 \times 7 =$
   c. $4 \times 1 + 4 \times 9 + 5 \times 1 + 5 \times 9 =$

3. Si cambiamos de números a literales; determina el resultado de la siguiente operación:
   $7xy - 2x + y - 8 + xy + 2x - 5y - 9xy + 6 =$

4. ¿Cuál será el resultado de la siguiente multiplicación: $-3x^2y(-2x^4y^2 + 5xy^3 + 4)$?

5. ¿Cómo quedará el producto de multiplicar las siguientes expresiones?:

   a. $(2x + 5)(2x + 5) =$

   b. $(2x + 5)(2x - 5) =$

6. Realiza la división: $\frac{6x^3y^5 - 4x^2y^3 - 8x^4y^3}{-2x^2y^3} =$

7. Expresa el resultado de dividir: $\frac{6x^2-7x-5}{2x+1} =$

8. ¿Cuál sería el resultado de desarrollar $(y-3)^2 =$

Anexo 2: Organizador Previo

Representación de áreas de figuras planas

Antes de iniciar trabajaremos los conceptos previos de áreas, sobre todo de un cuadrado y un rectángulo qué van a ser la base fundamental para la implementación de la caja de polinomios.

¿Cuál es el objetivo de la lección?

Que los estudiantes recuerden o repasen el concepto de perímetro o longitud de un lado, superficie o área y la obtención de las mismas

¿Por qué es importante?

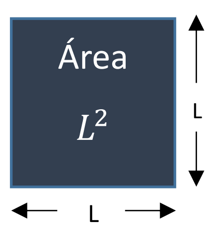
Porque reconocerán estos aspectos de las figuras geométricas que le serán de utilidad en el manejo del material.

Conceptos clave

Longitudes y áreas

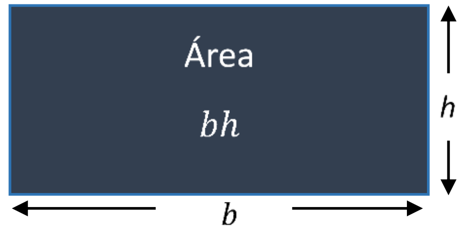
Área del cuadrado

El cuadrado es una figura geométrica dentro de la clasificación de paralelogramo. Tiene todos sus lados iguales y sus ángulos rectos. Para la obtención de la superficie, se deben de multiplicar los lados del cuadrado y se puede representar de la siguiente manera:



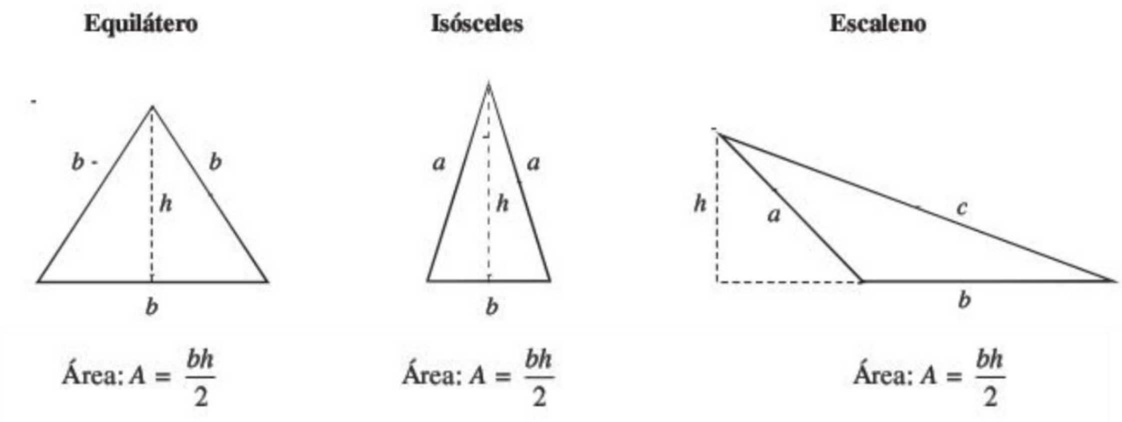
Área del rectángulo

El rectángulo es también un paralelogramo que tiene sus lados contiguos desiguales y los cuatro ángulos rectos. La obtención del área del rectángulo resulta de la multiplicación de la longitud de su base (b) y su altura (h).



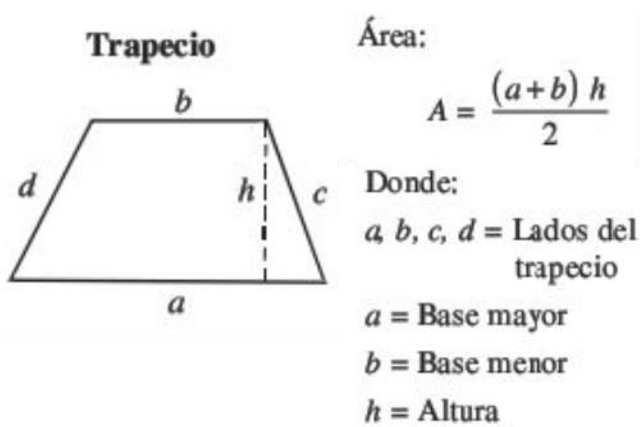
Área de un triángulo

La superficie de un triángulo se obtiene como el semiproducto de la base(b) por la altura (h) del triángulo.



Área de un trapecio

El cálculo del área de un trapecio, se realiza como el semiproducto de la suma de su base mayor y su base menor por la altura del cuadrilátero.



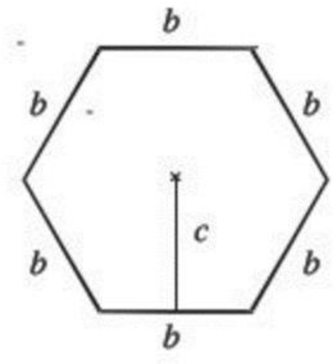
Área de un polígono regular

Para determinar el área de un polígono regular, se obtiene como el semiproducto de la longitud de los lados por el número de lados del polígono y por la apotema. Siendo la apotema la medida que hay del punto medio de uno de los lados del polígono hacia el centro del mismo.

Área: $A = \frac{(nb)c}{2}$

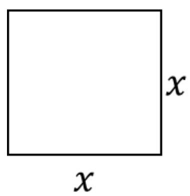
Donde:

$n = Número\ de\ lados\ del\ polígono$
$b = Lado\ del\ polígono$
$c = Apotema$

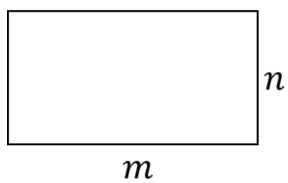


Actividad 1. Parte I.

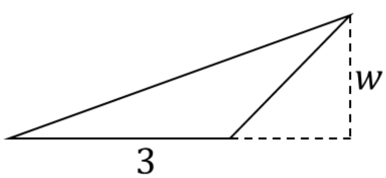
En esta actividad, escribe en los espacios en blanco la fórmula que determinaría el área de cada figura que se te presenta:

1. 

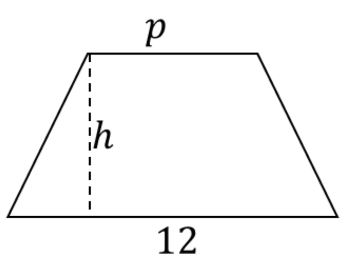
Escribe en este espacio la fórmula:

2. 

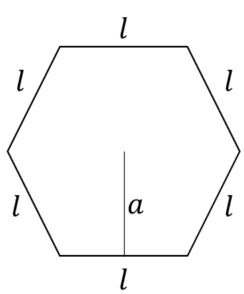
Escribe en este espacio la fórmula:

3. 

Escribe en este espacio la fórmula:

4. 

Escribe en este espacio la fórmula:

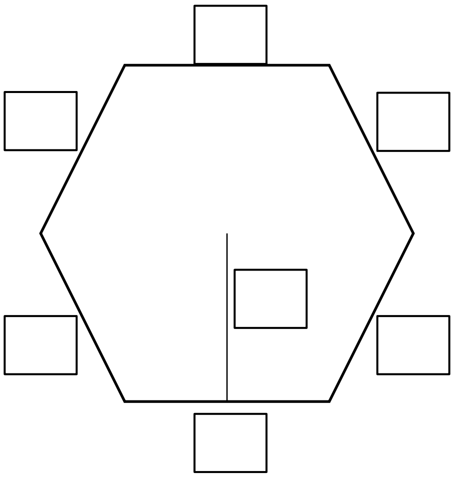
5. 

Escribe en este espacio la fórmula:

Actividad 1. Parte II

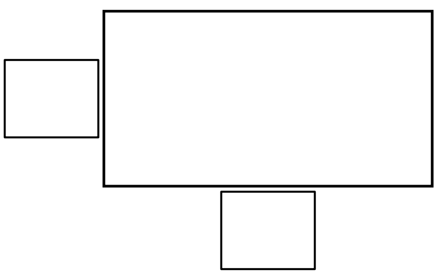
En esta sección, cambia las longitudes de la figura por letras diferentes a las anteriores y determina la fórmula del área de esta nueva figura:

1.



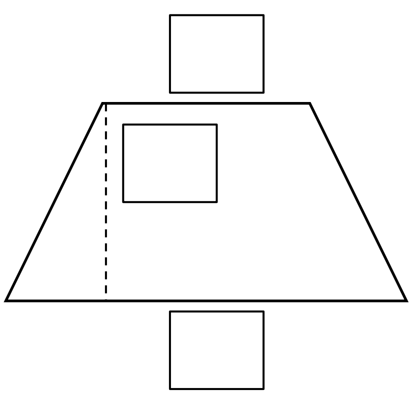
Escribe en este espacio la fórmula:

2.



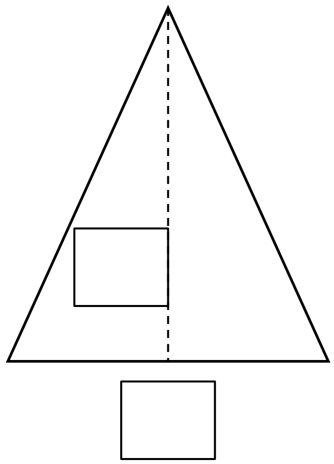
Escribe en este espacio la fórmula:

3.



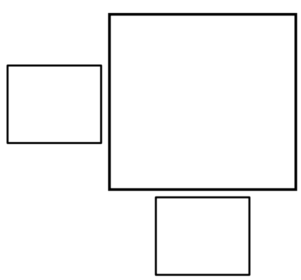
Escribe en este espacio la fórmula:

4.



Escribe en este espacio la fórmula:

5.



Escribe en este espacio la fórmula:

Puede encontrar este trabajo en la versión de Formularios de Google:

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSe3sU06fBqJV602pxHBrtTuigWNQmjpyMshpJ9mH4OkRcH2zQ/viewform?usp=sf_link

Anexo 3: Sesión 1.

Construcción de polinomios y concepto de ceros en la caja de polinomios

Nombre: ____

Grado escolar: ____

Escuela: ____

Para empezar a usar el software de la caja de polinomios, se te plantea la siguiente actividad para que practiques lo aprendido en el tutorial.

¿Cuál es el objetivo de la lección?

Que los estudiantes puedan representar polinomios algebraicos con las fichas y el tablero.

¿Por qué es importante?

Porque reconocerán las fichas y los cuadrantes del tablero

Conceptos clave

Polinomios, cuadrantes, signos

Instrucciones: Dentro de la caja de polinomios, selecciona el botón factorizar y después el botón escribir. Esto te permitirá seleccionar fichas para colocarlas en el tablero y se escribirá un polinomio en la pantalla.

1. Escribe los siguientes polinomios, toma capturas de pantalla para guardarlas como evidencia de tu trabajo.

a) $x^2 + 3x - 4$

b) $3x^3 - 2x^2 + 5x - 9$

c) $-3x^3 - x^2 + 5x + 2$

d) Escribe 2 propuestas tuyas.

2. Ahora determina 3 ejemplos tuyos colocando fichas que representen cero en la pantalla:

Ejemplo 1

Ejemplo 2

Ejemplo 3

Anexo 4: Sesión 2.

Armado de rectángulos compuestos por las fichas de la caja de polinomios

En el proceso de reconocer fichas, unirlas por correspondencia de lados y uso del tablero, se necesitan armar rectángulos para las operaciones de multiplicación y factorización.

¿Cuál es el objetivo de la lección?

Que los estudiantes puedan representar polinomios algebraicos con un rectángulo dentro del tablero.

¿Por qué es importante?

Porque podrán usar la caja de polinomios para multiplicar y factorizar polinomios en lecciones posteriores

Conceptos clave

Unión de fichas, origen, polinomios

Instrucciones: Une de 4 fichas en adelante, relacionándolas por medio de sus lados, para formar rectángulos o cuadrados empezando por el origen dentro del tablero. Intenta que sean diferentes fichas y forma 3 propuestas diferentes entre sí, toma capturas de pantalla como evidencia.

Ejemplo 1

Ejemplo 2

Ejemplo 3

Anexo 5: Multiplicación.

Multiplicación con la caja de polinomios

La operación previa a la factorización es la multiplicación, así que para comprender lo que es factorización, se les propone a los estudiantes multiplicar con la caja de polinomios.

¿Cuál es el objetivo de la lección?

Que los estudiantes puedan multiplicar factores con la caja de polinomios.

¿Por qué es importante?

Porque podrán usar la caja de polinomios para multiplicar y conocer como son las representaciones de las figuras rectangulares para la factorización.

Conceptos clave

Multiplicación de polinomios, unión de fichas, ceros

Instrucciones: Una vez que concluyas de ver el tutorial de la multiplicación con la caja de polinomios, te recomendamos compartir tus dudas. Después de esclarecer cualquier comentario, te proponemos resolver las siguientes multiplicaciones con la caja de polinomios. Realiza captura de pantalla para evidenciar tu trabajo y anota tus resultados.

1. $(x^2 + x)(x - 3) =$
2. $(x^3 - 2x + 5)(3x + 2) =$
3. $(x - 3)(x - 3) =$
4. $(2x - 1)(2x + 1) =$
5. $(x + 1)(x^2 - x + 1) =$

Anexo 6: Factorización.

Factorización de términos algebraicos con la caja de polinomios

Ahora es tiempo de poner a prueba el software para que el estudiante empiece a realizar factorizaciones y se puedan observar los alcances que logra.

¿Cuál es el objetivo de la lección?

Que los estudiantes puedan factorizar términos con la caja de polinomios.

¿Por qué es importante?

Porque podrán usar la caja de polinomios factorizar y conocer como son las representaciones que pueden hacer de los términos.

Conceptos clave

Factorización de polinomios, unión de fichas, ceros

Instrucciones: Una vez que concluyas de ver el tutorial de factorización te recomendamos compartir tus dudas. Después de esclarecer cualquier comentario, te proponemos comenzar a factorizar los polinomios propuestos en esta actividad. Realiza captura de pantalla para evidenciar tu trabajo y anota tus resultados.

1. $x^3 - x^2 - 6x =$
2. $x^3 - 3x^2 + x - 3 =$
3. $4x^2 - 1 =$
4. $9x^2 - 12x + 4 =$
5. $-x^2 + 6x - 8 =$
6. $2x^2 + 3x - 2 =$
7. $x^3 - 1 =$

Anexo 7. Cuestionario.

Cuestionario para explorar la experiencia con la caja de polinomios

Escuela de Procedencia: ____

El siguiente cuestionario tiene el objetivo de indagar acerca de tu experiencia con la caja de polinomios y tus clases de matemáticas.

Experiencia recibida en la clase de matemáticas

1. ¿Qué tipo de materiales usa tu profesor de matemáticas en la escuela?

a) Marcador y pintarrón
b) Libros y/o antología
c) Computadora
d) Calculadora
e) Aplicaciones de celular
f) Caja de polinomios
g) Otros: __________

2. ¿Qué tipo de programa de cómputo o aplicación utilizan como recurso en la clase de matemáticas?

3. ¿Qué tipo de actividades realizas en la clase de matemáticas?

a) Resolución de problemas
b) Ejercicios a lápiz y papel
c) Trabajos individuales
d) Trabajos en equipo
e) Resolución de libro
f) Actividades con juegos
g) Otras actividades: ____

Experiencia con la caja de polinomios

En esta sección comparte tu experiencia al realizar las actividades con el software.

4. ¿Es fácil es escribir un polinomio con las fichas de la caja de polinomios?

5. ¿Cómo identificabas las cantidades negativas y positivas con la caja de polinomios?

6. ¿Qué dificultades encuentras al escribir los polinomios sobre el tablero del programa?

7. ¿Qué tan fácil era unir las fichas de la caja de polinomios para formar figuras rectangulares o cuadradas?

8. ¿Qué dificultades encontrabas al hallar la base y altura de las figuras rectangulares o cuadradas que formabas con las fichas?

9. ¿Qué diferencias encuentras entre hacer la operación en tu cuaderno con lápiz y papel a realizarla con la caja de polinomios?

10. ¿Qué diferencias encuentras entre hacer la operación en tu cuaderno con lápiz y papel a realizarla con la caja de polinomios?

Encuesta de satisfacción.

Califique los siguientes aspectos de 1 a 5, siendo 1 la calificación más baja y 5 la calificación más alta.

ITEM	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
¿Qué tan novedosa te pareció la herramienta Caja de Polinomios?					
¿Qué tan fácil le pareció la manipulación de la herramienta en las diferentes operaciones (1: muy difícil; 5: muy fácil)?					
El aprendizaje con la caja de los polinomios fue…					
Considera que trabajar con la caja de polinomios facilita el aprendizaje en matemáticas.					
En términos generales, el trabajo con la caja de polinomios fue…					

Respecto de la Caja de Polinomios escriba tres ventajas, tres desventajas y propuestas que harías.

Esta encuesta se pude encontrar en su versión digital en Formularios de Google:

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSc2mylnHKVxWwGm1hx16ZWz_to7ow7r77U6qdI0mIbvTXrnhw/viewform?usp=sf_link