



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA

MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA, OPCIÓN
INSTRUMENTACIÓN ELECTRÓNICA

TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA

**” SÍNTESIS E IMPLEMENTACIÓN DE INTEGRADORES DE ORDEN
FRACCIONARIO ACTIVOS ”**

PRESENTA:

LIC. LUIS CARLOS LUJANO HERNÁNDEZ*

ASESORES:

DR. JESÚS MANUEL MUÑOZ PACHECO
DR. LUIS ABRAHAM SÁNCHEZ GASPARIANO

*BECARIO CONACYT

FECHA: NOVIEMBRE 2021

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico que ha hecho posible la conclusión de mis estudios y del trabajo presentado. También agradezco a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), a la Facultad de Ciencias de la Electrónica (FCE) y a la Maestría en Ingeniería en Electrónica por prestar todas las facilidades durante mi formación académica.

Quiero expresar mi mayor gratitud al director de tesis el Dr. Jesús Manuel Muñoz Pacheco, quien ha sido mi maestro desde hace cinco años, me apoyo de manera personal e institucional y me alentó para que concluya este proyecto. Su apoyo y confianza ha sido un aporte invaluable, no solamente en el desarrollo de esta tesis, sino también en mi formación. Le agradezco también el haberme facilitado siempre los medios suficientes para llevar a cabo todas las actividades propuestas durante el desarrollo de esta tesis y sobre ponerse a las dificultades que provocó esta pandemia. Muchas gracias Profesor.

También quiero agradecer a mi asesor el Dr. Luis Abraham Sánchez Gaspariano, quien contribuyó con su invaluable experiencia en el diseño, implementación y análisis de circuitos, en particular en el uso de dispositivos OTA. Sus conocimientos han alimentado y mejorado los míos, muchas gracias por su orientación y apoyo.

De igual forma, agradezco a mis sinodales, Dra. Luz del Carmen Gómez Pavón, MC. José Francisco Portillo Robledo y MC. Rodrigo Lucio Maya Ramírez por sus observaciones que sirvieron para mejorar este trabajo de tesis, gracias.

Gracias a mi familia, quienes me brindaron su asistencia continua y determinante, por el esfuerzo que realizan a diario y que sin ustedes no fueran posibles mis estudios. Sus consejos y experiencias me han ayudado a crecer como persona. Muchas gracias familia por su apoyo y cariño.

Dedicatoria

Dedico esta Tesis a mis padres Graciela Hernández Teutle y J. Jesús Lujano Delgado, por su apoyo y amor incondicional, y por acompañarme por éste camino tan importante para mí. Gracias.

A mi hermana Karina Nataly Lujano Hernández y tía Margarita Hernández Teutle por el apoyo que me brindaron día a día y por estar presentes en cada evento importante en mi vida. Estoy muy agradecido con ustedes.

A mi hermano Mario de Jesús Lujano Hernández y abuelo Carlos Hernández Reyes, que aunque no estuvieron presentes, sé que estarían orgullosos por este gran logro. Es por ustedes.

Luis Carlos Lujano Hernández.

Índice general

Resumen	1
1. Introducción.	2
1.1. Objetivo General.	2
1.2. Objetivos Específicos.	3
1.3. Justificación	3
1.4. Organización de la Tesis.	4
2. Marco Teórico.	5
2.1. Antecedentes del Cálculo de Orden Fraccionario.	5
2.2. Cálculo de Orden Fraccionario.	6
2.3. Definiciones.	6
2.3.1. Riemann-Liuoville	6
2.3.2. Grunwald-Letnikov	7
2.3.3. M. Caputo	7
2.4. Solución Numérica.	8
2.4.1. Solución Analítica.	9
2.5. Integradores de Orden Fraccionario.	10
2.6. Estado del arte de los integradores de orden fraccionario.	11
3. Métodos de Síntesis para Integradores Fraccionarios.	13
3.1. Integrador de Orden Fraccionario	13
3.2. Foster	15
3.3. Cauer	17
3.4. Butterworth	18
3.4.1. Pasa Bajas Butterworth	19
3.4.2. Pasa Altas Butterworth	23
3.4.3. Integrador de Orden Fraccionario	27
3.5. Chebyshev Tipo 1	29
3.5.1. Pasa Bajas Chebyshev Tipo 1	30
3.5.2. Pasa Altas Chebyshev Tipo 1	32
3.5.3. Integrador de Orden Fraccionario	35
3.6. Grafos de Señal	37
3.7. Análisis de Sensitividad	42
3.7.1. Foster y Cauer	42
3.7.2. Butterworth y Chebyshev Tipo I	43
3.7.3. Grafo de Señal	43
3.8. Análisis de Monte Carlo	45
3.8.1. Foster y Cauer	45
3.8.2. Butterworth y Chebyshev Tipo I	48
3.8.3. Grafo de Señal	51

4. Optimización del Integrador de Orden Fraccionario.	55
4.1. Butterworth y Chebyshev tipo I	55
4.1.1. Fase del integrador fraccionario	57
4.1.2. Análisis de Monte Carlo	58
4.1.3. Análisis de Sensitividad	62
4.2. Foster y Cauer	69
4.2.1. Fase del integrador fraccionario	71
4.2.2. Análisis de Monte Carlo	72
4.2.3. Análisis de Sensitividad	76
4.3. Grafo de Señal	83
4.3.1. Fase del integrador fraccionario	85
4.3.2. Análisis de Monte Carlo	85
4.3.3. Análisis de Sensitividad	90
5. Oscilador Caótico Lü .	98
5.1. Oscilador Caótico con Integradores Fraccionarios por Butterworth y Chebyshev tipo 1	100
5.1.1. Simulación en SPICE y resultados experimentales	104
5.2. Oscilador Caótico con Integradores Fraccionarios por Foster y Cauer	106
5.2.1. Oscilador Caótico con 2 Enrollamientos	107
5.2.2. Oscilador Caótico con 4 Enrollamientos	108
5.3. Oscilador Caótico con Integradores Fraccionarios por Grafo de Señal	110
5.3.1. Oscilador Caótico con 2 Enrollamientos	111
5.3.2. Oscilador Caótico con 4 Enrollamientos	112
6. Conclusión.	114
6.1. Trabajo futuro	116
Bibliografía	117
Apéndice 1: Requisitos de Diseño de los Filtros Pasa Bajas y Pasa Altas del Integrador Fraccionario por Filtros Butterworth y Chebyshev Tipo 1.	119
Apéndice 2: Valores de los Elementos en los Filtros Pasa Bajas y Pasa Altas del Integrador Fraccionario por Filtros Butterworth y Chebyshev Tipo 1.	120
Apéndice 3: Resultados Experimentales del Integrador Fraccionario por Butterworth y Chebyshev sin Ajuste.	121
Apéndice 4: Resultados Experimentales del Integrador Fraccionario por Butterworth y Chebyshev con Ajuste.	127
Apéndice 5: Valores de los Elementos en el integrador de Foster y Cauer.	133
Apéndice 6: Resultados Experimentales del Integrador Fraccionario por Foster y Cauer sin Ajuste.	134
Apéndice 7: Resultados Experimentales del Integrador Fraccionario por Foster y Cauer con Ajuste.	140
Apéndice 8: Valores de los Elementos en el integrador de Grafo de Señal.	146

Apéndice 9: Resultados Experimentales del Integrador Fraccionario por Grafo de Señal sin Ajuste.	147
Apéndice 10: Resultados Experimentales del Integrador Fraccionario por Grafo de Señal con Ajuste.	153
Apéndice 11: 1er. Artículo publicado en el 6to. congreso de COSCyS - UASLP.	159
Apéndice 12: 2do. Artículo publicado en la 7ma. Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada.	173

Índice de figuras

1.1. Esquemático de integrador fraccionario pasivo de orden $\alpha = 0.95$	3
2.1. Respuesta en frecuencia del integrador y derivador de orden fraccionario.	11
3.1. Polos y Ceros del integrador fraccionario con $\alpha = 0.9$	14
3.2. Diagrama de Bode del integrador fraccionario con $\alpha = 0.9$	15
3.3. Esquema del integrador fraccionario por el método de Foster.	16
3.4. Simulación del circuito equivalente de Foster.	17
3.5. Circuito del integrador fraccionario por el método de Cauer.	18
3.6. Diagrama de Bode del pasa bajas.	19
3.7. Diagrama de Bode del pasa bajas con ganancia unitaria.	20
3.8. Diagrama de Bode del pasa bajas de Butterworth.	20
3.9. Diagrama de Bode del pasa bajas de Butterworth con ganancia.	21
3.10. Circuito Pasa Bajas de Butterworth tipo T	22
3.11. Circuito Pasa Bajas de Butterworth tipo π	22
3.12. Diagrama de Bode del filtro pasa bajas del tipo T y π	22
3.13. Diagrama de bode del pasa altas.	23
3.14. Diagrama de bode del pasa altas con ganancia unitaria.	24
3.15. Diagrama de Bode del pasa altas de Butterworth.	24
3.16. Diagrama de Bode del pasa altas de Butterworth con ganancia.	25
3.17. Circuito Pasa Altas de Butterworth tipo T	26
3.18. Circuito Pasa Altas de Butterworth tipo π	26
3.19. Diagrama de Bode del filtro pasa altas del tipo T y π	26
3.20. Circuito del integrador de orden fraccionario	27
3.21. Diagrama de bode del integrador de orden fraccionario.	28
3.22. Polos y Ceros del integrador de orden fraccionario con filtros Butterworth.	29
3.23. Respuesta en frecuencia del integrador de orden fraccionario.	29
3.24. Diagrama de Bode del filtro pasa bajas Chebyshev Tipo 1.	30
3.25. Circuito Pasa Bajas de Chebyshev Tipo 1 y topología tipo T	31
3.26. Circuito Pasa Bajas de Chebyshev Tipo 1 y topología tipo π	31
3.27. Diagrama de Bode del filtro pasa bajas del tipo T y π	32
3.28. Diagrama de Bode del filtro pasa altas Chebyshev Tipo 1.	33
3.29. Circuito Pasa Bajas de Chebyshev Tipo 1 y topología tipo T	34
3.30. Circuito Pasa Bajas de Chebyshev Tipo 1 y topología tipo π	34
3.31. Diagrama de Bode del filtro pasa altas del tipo T y π	34
3.32. Circuito del integrador de orden fraccionario	35
3.33. Diagrama de Bode del integrador fraccionario con $\alpha = 0.9$ y con Chebyshev Tipo 1.	36
3.34. Polos y Ceros del integrador de orden fraccionario con filtros Chebyshev Tipo 1.	37
3.35. Acercamiento a Polos y Ceros del integrador de orden fraccionario con filtros Chebyshev Tipo 1.	37
3.36. Grafo de señal del integrador de orden fraccionario.	38

3.37. Grafo de señal del integrador de orden fraccionario.	38
3.38. Diagrama de bloques del integrador fraccionario.	39
3.39. Circuito sumador de voltajes V_{in} y V_2	39
3.40. Circuito sumador de voltajes V_1 y V_2	40
3.41. Integrador fraccionario por el método de Grafo de señal.	40
3.42. Simulación del integrador fraccionario con $\alpha = 0.90$	41
3.43. Simulación del integrador fraccionario con $\alpha = 0.95$	41
3.44. Histograma del análisis de Monte Carlo para integradores fraccionarios de 0.1 hasta 0.95.	47
3.45. Pendiente ideal frente a la pendiente media del análisis de Monte Carlo.	48
3.46. Histograma del análisis de Monte Carlo para integradores fraccionarios de 0.1 hasta 0.95.	50
3.47. Pendiente ideal frente a la pendiente media del análisis de Monte Carlo.	51
3.48. Histogramas del análisis de Monte Carlo para integradores fraccionarios desde 0.1 hasta 0.95.	53
3.49. Pendiente ideal frente a la pendiente media del análisis de Monte Carlo.	54
4.1. Pendientes del integrador fraccionario con ajuste, sin ajuste e ideal.	56
4.2. Valores de A sin ajuste y con ajuste.	56
4.3. Histograma del análisis de Monte Carlo para integradores fraccionarios de 0.1 hasta 0.95 con ajuste.	60
4.4. Media de la pendiente de Monte Carlo.	61
4.5. Pendiente máxima y mínima de Monte Carlo.	61
4.6. Circuito del integrador de orden fraccionario por filtros Butterworth y Chebyshev.	62
4.7. Sensitividad del integrador de orden 0.1	62
4.8. Sensitividad del integrador de orden 0.2	63
4.9. Sensitividad del integrador de orden 0.3	64
4.10. Sensitividad del integrador de orden 0.4	64
4.11. Sensitividad del integrador de orden 0.5	65
4.12. Sensitividad del integrador de orden 0.6	66
4.13. Sensitividad del integrador de orden 0.7	66
4.14. Sensitividad del integrador de orden 0.8	67
4.15. Sensitividad del integrador de orden 0.85	68
4.16. Sensitividad del integrador de orden 0.9	68
4.17. Sensitividad del integrador de orden 0.95	69
4.18. Pendientes del integrador fraccionario con ajuste, sin ajuste e ideal.	70
4.19. Valores de A sin ajuste y con ajuste.	71
4.20. Histograma del análisis de Monte Carlo para integradores fraccionarios de 0.1 hasta 0.95 con ajuste.	74
4.21. Media de la pendiente de Monte Carlo.	75
4.22. Pendiente máxima y mínima de Monte Carlo.	75
4.23. Integrador fraccionario por el método de Foster y Cauer.	76
4.24. Sensitividad del integrador de orden 0.1	76
4.25. Sensitividad del integrador de orden 0.2	77
4.26. Sensitividad del integrador de orden 0.3	77
4.27. Sensitividad del integrador de orden 0.4	78
4.28. Sensitividad del integrador de orden 0.5	79
4.29. Sensitividad del integrador de orden 0.6	79
4.30. Sensitividad del integrador de orden 0.7	80
4.31. Sensitividad del integrador de orden 0.8	81

4.32. Sensitividad del integrador de orden 0.85	81
4.33. Sensitividad del integrador de orden 0.9	82
4.34. Sensitividad del integrador de orden 0.95	83
4.35. Pendientes del integrador fraccionario con ajuste, sin ajuste e ideal.	84
4.36. Valores de A sin ajuste y con ajuste.	84
4.37. Histograma del análisis de Monte Carlo para integradores fraccionarios de 0.1 hasta 0.95 con ajuste.	88
4.38. Media de la pendiente de Monte Carlo.	89
4.39. Pendiente máxima y mínima de Monte Carlo.	89
4.40. Integrador fraccionario por el método de Grafo de señal.	90
4.41. Sensitividad del integrador de orden 0.1	90
4.42. Sensitividad del integrador de orden 0.2	91
4.43. Sensitividad del integrador de orden 0.3	91
4.44. Sensitividad del integrador de orden 0.4	92
4.45. Sensitividad del integrador de orden 0.5	93
4.46. Sensitividad del integrador de orden 0.6	93
4.47. Sensitividad del integrador de orden 0.7	94
4.48. Sensitividad del integrador de orden 0.8	95
4.49. Sensitividad del integrador de orden 0.85	95
4.50. Sensitividad del integrador de orden 0.9	96
4.51. Sensitividad del integrador de orden 0.95	97
5.1. Diagrama de Bloques del sistema caótico de Lü.	98
5.2. Oscilador fraccionario de Lü con integradores fraccionarios de Butterworth y Chebyshev.	100
5.3. Respuesta el integrador fraccionario con escalamiento en frecuencia	101
5.4. Respuesta el integrador fraccionario con escalamiento en frecuencia	102
5.5. Montaje del oscilador caótico de Lü de orden fraccionario.	103
5.6. Sistema Caótico de Lü con 2 atractores $\alpha = 0.90$	104
5.7. Sistema Caótico de Lü con 4 atractores $\alpha = 0.90$	104
5.8. Sistema Caótico de Lü con 2 atractores $\alpha = 0.95$	105
5.9. Sistema Caótico de Lü con 4 atractores $\alpha = 0.95$	105
5.10. Oscilador fraccionario de Lü con integradores Foster/Cauer.	106
5.11. Atractor caótico de 2 enrollamientos con integradores de orden 0.90	107
5.12. Atractor caótico de 2 enrollamientos con integradores de orden 0.95	108
5.13. Atractor caótico de 4 enrollamientos con integradores de orden 0.90	108
5.14. Atractor caótico de 4 enrollamientos con integradores de orden 0.95	109
5.15. Oscilador fraccionario de Lü con integradores de Grafo de Señal.	110
5.16. Atractor caótico de 2 enrollamientos con integradores de orden 0.90	111
5.17. Atractor caótico de 2 enrollamientos con integradores de orden 0.95	112
5.18. Atractor caótico de 4 enrollamientos con integradores de orden 0.90	112
5.19. Atractor caótico de 4 enrollamientos con integradores de orden 0.95	113
6.1. Integrador con $\alpha = 0.1$	121
6.2. Integrador con $\alpha = 0.2$	122
6.3. Integrador con $\alpha = 0.3$	122
6.4. Integrador con $\alpha = 0.4$	123
6.5. Integrador con $\alpha = 0.5$	123
6.6. Integrador con $\alpha = 0.6$	124
6.7. Integrador con $\alpha = 0.7$	124
6.8. Integrador con $\alpha = 0.8$	125

6.9. Integrador con $\alpha = 0.85$	125
6.10. Integrador con $\alpha = 0.9$	126
6.11. Integrador con $\alpha = 0.95$	126
6.12. Integrador con $\alpha = 0.1$	127
6.13. Integrador con $\alpha = 0.2$	128
6.14. Integrador con $\alpha = 0.3$	128
6.15. Integrador con $\alpha = 0.4$	129
6.16. Integrador con $\alpha = 0.5$	129
6.17. Integrador con $\alpha = 0.6$	130
6.18. Integrador con $\alpha = 0.7$	130
6.19. Integrador con $\alpha = 0.8$	131
6.20. Integrador con $\alpha = 0.85$	131
6.21. Integrador con $\alpha = 0.9$	132
6.22. Integrador con $\alpha = 0.95$	132
6.23. Integrador con $\alpha = 0.1$	134
6.24. Integrador con $\alpha = 0.2$	135
6.25. Integrador con $\alpha = 0.3$	135
6.26. Integrador con $\alpha = 0.4$	136
6.27. Integrador con $\alpha = 0.5$	136
6.28. Integrador con $\alpha = 0.6$	137
6.29. Integrador con $\alpha = 0.7$	137
6.30. Integrador con $\alpha = 0.8$	138
6.31. Integrador con $\alpha = 0.85$	138
6.32. Integrador con $\alpha = 0.9$	139
6.33. Integrador con $\alpha = 0.95$	139
6.34. Integrador con $\alpha = 0.1$	140
6.35. Integrador con $\alpha = 0.2$	141
6.36. Integrador con $\alpha = 0.3$	141
6.37. Integrador con $\alpha = 0.4$	142
6.38. Integrador con $\alpha = 0.5$	142
6.39. Integrador con $\alpha = 0.6$	143
6.40. Integrador con $\alpha = 0.7$	143
6.41. Integrador con $\alpha = 0.8$	144
6.42. Integrador con $\alpha = 0.85$	144
6.43. Integrador con $\alpha = 0.9$	145
6.44. Integrador con $\alpha = 0.95$	145
6.45. Integrador con $\alpha = 0.1$	147
6.46. Integrador con $\alpha = 0.2$	148
6.47. Integrador con $\alpha = 0.3$	148
6.48. Integrador con $\alpha = 0.4$	149
6.49. Integrador con $\alpha = 0.5$	149
6.50. Integrador con $\alpha = 0.6$	150
6.51. Integrador con $\alpha = 0.7$	150
6.52. Integrador con $\alpha = 0.8$	151
6.53. Integrador con $\alpha = 0.85$	151
6.54. Integrador con $\alpha = 0.9$	152
6.55. Integrador con $\alpha = 0.95$	152
6.56. Integrador con $\alpha = 0.1$	153
6.57. Integrador con $\alpha = 0.2$	154
6.58. Integrador con $\alpha = 0.3$	154

6.59. Integrador con $\alpha = 0.4$	155
6.60. Integrador con $\alpha = 0.5$	155
6.61. Integrador con $\alpha = 0.6$	156
6.62. Integrador con $\alpha = 0.7$	156
6.63. Integrador con $\alpha = 0.8$	157
6.64. Integrador con $\alpha = 0.85$	157
6.65. Integrador con $\alpha = 0.9$	158
6.66. Integrador con $\alpha = 0.95$	158

Índice de tablas

3.1. Valores de ganancia.	27
3.2. Valores comerciales por escalamiento en impedancia.	28
3.3. Valores de ganancia.	35
3.4. Valores comerciales por escalamiento en impedancia.	36
3.5. Sensitividad del integrador fraccionario por Foster y Cauer.	42
3.6. Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario por Butterworth y Chebyshev Tipo 1.	43
3.7. Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario por Grafos de Señal.	44
3.8. Comparativa de pendiente ideal y la media del análisis de Monte Carlo	48
3.9. Comparativa de pendiente ideal y la media del análisis de Monte Carlo	51
3.10. Comparativa de pendiente ideal y la media del análisis de Monte Carlo	54
4.1. Valores de ajuste en A.	55
4.2. Error en la Ecuación de ajuste.	57
4.3. Frecuencia de corte y fase del integrador fraccionario.	57
4.4. Media de la pendiente con ajuste.	58
4.5. Máximos y mínimos del análisis de Monte Carlo.	58
4.6. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.1	62
4.7. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.2	63
4.8. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.3	64
4.9. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.4	65
4.10. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.5	65
4.11. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.6	66
4.12. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.7	67
4.13. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.8	67
4.14. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.85	68
4.15. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.9	69
4.16. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.95	69
4.17. Valores de ajuste en A.	70
4.18. Error en la Ecuación de ajuste.	71
4.19. Frecuencia de corte y fase del integrador fraccionario.	72
4.20. Media de la pendiente con ajuste.	72
4.21. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.1	76
4.22. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.2	77
4.23. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.3	78
4.24. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.4	78
4.25. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.5	79
4.26. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.6	80
4.27. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.7	80
4.28. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.8	81

4.29. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.85	82
4.30. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.9	82
4.31. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.95	83
4.32. Valores de ajuste en A	83
4.33. Error en la Ecuación de ajuste.	85
4.34. Frecuencia de corte y fase del integrador fraccionario.	85
4.35. Media de la pendiente con ajuste.	86
4.36. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.1	90
4.37. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.2	91
4.38. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.3	92
4.39. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.4	92
4.40. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.5	93
4.41. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.6	94
4.42. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.7	94
4.43. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.8	95
4.44. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.85	96
4.45. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.9	96
4.46. Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.95	97
5.1. Tabla de valores para el oscilador caótico fraccionario de orden 0.90	102
5.2. Tabla de valores para el oscilador caótico fraccionario de orden 0.95	102
5.3. Tabla de valores para la función no lineal PWL	102
6.1. Pros y contras del diseño de Foster y Cauer.	115
6.2. Pros y contras del diseño de Butterworth y Chebyshev.	115
6.3. Pros y contras del diseño de Grafo de Señal.	116
6.4. Requisitos de diseño para el filtro pasa bajas del integrador fraccionario.	119
6.5. Requisitos de diseño para el filtro pasa altas del integrador fraccionario.	119
6.6. Valores de los elementos para el filtro pasa bajas tipo π	120
6.7. Valores de los elementos para el filtro pasa altas tipo T	120
6.8. Valores de los elementos del integrador de Foster y Cauer sin Ajuste.	133
6.9. Valores de los elementos del integrador de Foster y Cauer con Ajuste.	133
6.10. Valores de los elementos del integrador de Grafo de Señal sin Ajuste.	146
6.11. Valores de los elementos del integrador de Grafo de Señal con Ajuste.	146

Resumen

Esta tesis está orientada al diseño e implementación de integradores de orden fraccionario. A partir de la definición de integración fraccionaria de Riemann-Liouville y métodos de diseño habituales como Filtros Butterworth, (Chebyshev, Foster, Cauer y Grafos de Señal) obtenemos sistemas cuyo comportamiento en el dominio de la frecuencia asimila al comportamiento de los integradores de orden fraccionario.

Se diseñaron integradores de orden fraccionario con los métodos propuestos de orden α desde 0.1 hasta 0.95. Después de simular, se implementaron físicamente éstos diseños y obtuvimos resultados experimentales de 11 integradores fraccionarios de 3 diseños diferentes, un total de 33 resultados experimentales.

Se ajustó físicamente el parámetro **A** y obtuvimos una ecuación de ajuste, para disminuir el error existente en los integradores de orden fraccionario y lograr un comportamiento más cercano al ideal, alcanzando 66 resultados experimentales entre integradores fraccionarios sin ajuste y con ajuste.

Se realizaron análisis de Monte Carlo con 101 casos, tomando como parámetros el 5% de tolerancia en los resistores y del 20% de tolerancia en los capacitores, en el peor de los casos, además tomando una distribución Gaussiana de $\pm 3\sigma$, para predecir la pendiente presente en la implementación física tanto sin ajuste como con ajuste y asegurar el mínimo error en las pendientes.

Para montar los circuitos del integrador fraccionario es necesario identificar los elementos más sensibles y que pudieran afectar mayormente el voltaje de salida debido al cambio de en su tolerancia. El análisis de Sensibilidad se realiza en los 3 diseños obtenidos, tomando los valores de los elementos sin ajuste y con ajuste. Y documentando todos los resultados del análisis.

Posteriormente se amplificó, se escaló en frecuencia y se implementó el circuito del integrador fraccionario por Filtros Butterworth y Chebyshev de orden $\alpha = 0.9$ y $\alpha = 0.95$, para su integración al sistema caótico de orden fraccionario de Lü. Se obtuvieron resultados en simulación y experimentales del sistema caótico de orden fraccionario con 2 y 4 enrollamientos, obteniendo un total de 8 resultados con simulaciones y experimental. Mientras que los diseños de Foster, Cauer y Grafos de Señal, se amplificaron y se escalaron en frecuencia para obtener resultados del mismo sistema caótico en simulación.

1 | Introducción.

El cálculo fraccionario surge a partir del cálculo de orden entero, pero ha sido desarrollado con mayor interés en las últimas décadas. Desde el inicio de la teoría del cálculo diferencial e integral de orden entero, matemáticos como Euler y Leibniz desarrollaron sus ideas sobre el cálculo de derivadas e integrales de orden no entero. En 1812 Laplace definió una derivada fraccionaria por medio de una integral. Desde el nacimiento del cálculo de orden fraccionario han surgido varias definiciones de derivación e integración de orden no entero, esto se debe a que el concepto de cálculo fraccionario ha sido objeto de varios enfoques [1, 2].

El cálculo de orden fraccionario es utilizado en aplicaciones de múltiples disciplinas del conocimiento, una de ellas es la ingeniería electrónica. Los derivadores e integradores son esenciales para la construcción de bloques en el procesamiento de señales. Los circuitos de orden fraccionario, tienen aplicaciones en el control automático como también en el diseño de osciladores caóticos. El diseño de integradores y derivadores de orden fraccionario se realizan generalmente por dos métodos de aproximación, en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. Hay varias técnicas que buscan la racionalización del operador fraccionario, como el método Charef, el método de Carlson, el método de Oustaloup, entre otros.

El método de Charef, tiene una mejor relación entre complejidad y precisión. El método aproxima la pendiente del integrador de orden fraccionario $1/s^\alpha$, con un número de pendientes de -20dB/decada conectadas en zigzag con una pendiente de 0dB/decada. Con este método se obtiene la precisión deseada y que dependerá del orden de la función de transferencia que aproxima al integrador fraccionario [3]. El problema de estas realizaciones es su implementación física, puesto que los valores de los componentes que forman parte de la red pasiva son de valores no comerciales, al aproximar estos valores desvían la pendiente y agrega un error al orden en el que se diseña.

Otros métodos que existen en la literatura, es el diseño por medio de pasa bajas Butterworth, sin embargo, estas aproximaciones utilizan funciones de transferencia de segundo orden y únicamente exploran la realización activa [4, 5]. No se han explorado otros métodos de diseño de filtros, y tampoco abordan la realización pasiva. Además, no se ha realizado un estudio que indique las ventajas y desventajas en el uso de cada método. En este sentido, esta tesis se enfoca a abordar una aproximación en el dominio de la frecuencia de la definición de Riemann-Liouville, sintetizarla usando diferentes métodos y analizar las ventajas y desventajas de cada una de ellas, tanto en su realización pasiva como la activa.

1.1. Objetivo General.

Sintetizar e implementar integradores de orden fraccionario mediante métodos de aproximación de filtros analógicos para su posible aplicación en osciladores caóticos.

1.2. Objetivos Específicos.

- Definir las características del operador $\frac{1}{s^\alpha}$
- Sintetizar la función de transferencia mediante Foster, Cauer, Grafos de flujo de señal, aproximaciones Butterworth, Chebyshev de tipo 1, Chebyshev de tipo 2 y Elíptica.
- Mediante el uso de MATLAB simular la respuesta en frecuencia del operador $\frac{1}{s^\alpha}$ (ideal) y $\frac{1}{s^\alpha + k}$ (no ideal).
- Mediante el uso de SPICE(H-SPICE) simular la respuesta del operador $\frac{1}{s^\alpha}$ y $\frac{1}{s^\alpha + k}$ obtenidos a través de un circuito.
- Implementar con dispositivos electrónicos y circuitos eléctricos el operador $\frac{1}{s^\alpha + k}$
- Probar el integrador fraccionario en un sistema electrónico, por ejemplo en osciladores caóticos.

1.3. Justificación

Los integradores de orden fraccionario son bloques fundamentales para realizar el procesamiento de señales mediante la utilización de cálculos de orden fraccionario. Se utilizan en el diseño de filtros, en biología y biomedicina [4], y teoría de control [1] [7] [8] [9].

Se ha demostrado que el orden fraccionario puede representar más fielmente los diferentes fenómenos de la naturaleza que su contraparte de orden entero. Esto debido a que el orden fraccionario tiene propiedades hereditarias y de memoria del fenómeno que modela. Sin embargo para aprovechar estas ventajas en aplicaciones de ingeniería se requiere su implementación física.

En la literatura, existen varios métodos de aproximación para sistemas de orden fraccionario en el dominio de la frecuencia. Los métodos de dominio de la frecuencia se han utilizado para simular el comportamiento de los sistemas caóticos de orden fraccionario [2].

Los elementos de orden fraccionario se pueden racionalizar mediante varias técnicas iterativas, como son: el método de Charef, el método de Oustaloup, entre otros [2]. Estos métodos se utilizan para la realización de integradores fraccionarios pasivos como se muestra en la figura 1.1, donde se aprecia que el principal problema en el uso de estos integradores fraccionarios es la realización física puesto que los valores en los elementos que componen la red pasiva son valores no disponibles comercialmente [2] [8]. El tratar de aproximar los valores de los elementos puede provocar una desviación en el orden fraccionario buscado.

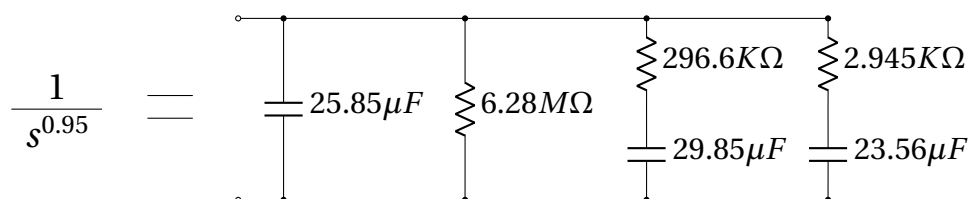


Figura 1.1: Esquemático de integrador fraccionario pasivo de orden $\alpha = 0.95$.

Varias de las propuestas de integradores y derivadores validan el concepto del cálculo fraccionario, pero no son viables a una aplicación útil, por el extenso espacio en su implementación y por los valores dispersos y no comerciales de sus elementos.

Dada esta problemática, se realizarán varias realizaciones que aproximen el comportamiento del integrador de orden fraccionario, identificar ventajas y desventajas de cada implementación, siendo el primer criterio de selección, que el integrador de orden fraccionario sea lo más preciso posible sobre el orden que se diseña y buscar su posible aplicación a sistemas caóticos.

1.4. Organización de la Tesis.

La tesis sigue el siguiente orden: el capítulo 1 se expone el planteamiento del problema igualmente los objetivos específicos y generales, como también la justificación.

El capítulo 2 describe los temas que intervienen directamente con el trabajo de tesis como son: los antecedentes del cálculo de orden fraccionario, las definiciones más importantes dentro del campo del cálculo de orden fraccionario y las diferencias más importantes de los integradores de orden entero contra los de orden fraccionario.

Después en el capítulo 3 se describen las características de la función de transferencia que aproxima al integrador fraccionario $1/s^\alpha$; el proceso de diseño de los circuitos obtenidos mediante los métodos de síntesis como son Foster, Cauer, filtros Butterworth, filtros Chebyshev tipo 1 y Grafos de flujo de señal. Además, se presentan los análisis de Monte Carlo, que nos ayuda a encontrar el error en la pendiente con una media de 101 casos para ordenes de integradores desde 0.1 hasta 0.95. Y el análisis de Sensitividad, que nos da una medida de sensibilidad de cada elemento dentro del circuito, y que la imprecisión puede afectar mayormente nuestra señal de salida en el armado experimental del circuito.

En el capítulo 4, presentamos los resultados experimentales del integrador fraccionario en el dominio de la frecuencia. Presentamos las pendientes obtenidas del integrador fraccionario por filtros Butterworth y Chebyshev tipo 1. Además presentamos una optimización para disminuir el error en la pendiente experimental y lo ahondamos con nuevos análisis de Monte Carlo y Sensitividad.

En el capítulo 5, se presentan las ecuaciones diferenciales del oscilador caótico de Lü de orden fraccionario, los circuitos con los integradores fraccionarios propuestos y los resultados en simulación y experimental de los osciladores caóticos con 2 y 4 enrollamientos.

Finalmente, en el capítulo 6 se explican las conclusiones del trabajo hasta ahora realizado.

2 | Marco Teórico.

2.1. Antecedentes del Cálculo de Orden Fraccionario.

El cálculo de orden fraccionario nació como resultado de una serie de correspondencias de parte de Leibniz hacia L'Hopital en el año de 1695. La pregunta que le realizó Leibniz a L'Hopital fue: "¿La derivada de orden entero puede ser generalizada a derivadas con orden no entero?", L'Hopital le respondió con otra pregunta interesante: "¿Que pasaría si el orden fuera de 1/2?". A este intercambio de ideas se le considera como el nacimiento del cálculo fraccionario [10, 11].

En años posteriores se hace referencia al cálculo de orden fraccionario, por ejemplo, en 1812 por Laplace, 1819 por Lacroix, 1822 por Fourier, 1847 por Riemann, 1867 por Grunwald, 1868 por Letnikov, y muchos otros. En 1819 Lacroix publica un libro con el calculo para la n-ésima derivada de $y = x^m$ con m siendo un entero positivo [12, 13]

$$D_x^n y = \frac{d^n}{dx^n} (x^m) = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, m \geq n \quad (2.1)$$

Remplazando el símbolo factorial por la función Gamma, él desarrolló la formula para una derivada fraccionaria:

$$D_x^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha} \quad (2.2)$$

donde α y β son números fraccionarios y donde la función Gamma $\Gamma(z)$ es definida para $z > 0$ como :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx \quad (2.3)$$

Deforma particular Lacroix calculó la derivada de orden 1/2:

$$D_x^{1/2} x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} \quad (2.4)$$

El problema con esta definición, es que el resultado de una derivada en una constante es diferente de cero, por lo que no puede ser considerada una definición general. Hasta 1832 Liouville se mostró interesado en el estudio del cálculo de orden fraccionario, la fórmula 2.5 se le conoce como *primera fórmula de Liouville* [10].

$$D_x^\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\alpha e^{a_n x} \quad (2.5)$$

Por esta razón Liouville comenzó a trabajar en una segunda definición llamada *la segunda fórmula de Liouville* [10].

$$D_x^\alpha s^{-\beta} = (-1)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} x^{-\alpha-\beta}, \beta > 0 \quad (2.6)$$

Esta definición tampoco fue adecuada y no fue hasta el año de 1853, cuando Riemann desarrolló una definición que involucra una integral definida y fue aplicada a series de potencias con exponentes no enteros.

$$D_{c,x}^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \Psi(x) \quad (2.7)$$

Tanto Riemann como Liouville pudieron resolver el problema de la función *complementaria* ($\Psi(x)$). Hasta que finalmente, Laurent elabora la definición conocida hasta el día de hoy como la definición de una *integral fraccionaria Riemann - Liouville*.

$$D_{c,x}^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (2.8)$$

La expresión 2.8 es parecida a la definición de Riemann pero sin el problema de la función *complementaria*. Cuando $c = -\infty$, la expresión 2.8 alude a la definición de una integral fraccionaria de Liouville; cuando $c = 0$, la expresión alude a la definición de una integral fraccionaria de Riemann; cuando c toma cualquier otro valor, entonces la expresión es llamada como definición de una integral fraccionario de Riemann - Liouville [10].

2.2. Cálculo de Orden Fraccionario.

La Ecuación 2.9, muestra el operador que representa al cálculo de orden fraccionario. Cuando α es mayor a cero, el operador representa una Derivada fraccionaria, cuando es menor a cero, representa una integral de orden fraccionaria.

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ \int_a^t & \alpha < 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

¿Qué es?

El cálculo de Orden Fraccionario es una generalización del cálculo de Orden Entero. Donde el operador ${}_a D_t^\alpha$ se le conoce como Operador Integrodiferencial, los parámetros a y t son los límites inferior y superior de la integral respectivamente.

Hôpital propuso que el cálculo de la derivada, no solo pertenezca a todos los números Naturales (\mathbb{N}), sino que también a los número Racionales (\mathbb{R}), pasando la derivada a formar parte del conjunto de números Reales (\mathbb{R}), es decir $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.3. Definiciones.

Existen diferentes definiciones que aproximan al cálculo de Orden Fraccionario, entre las más populares se incluyen [11]:

2.3.1. Riemann-Liouville

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{t-\tau}^{\alpha-n+1} d\tau \quad (2.10)$$

$$(n-1) \leq \alpha n$$

Donde n es un entero y α es un numero real.

2.3.2. Grünwald-Letnikov

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (2.11)$$

$$\left[\frac{t-a}{h} \right] \rightarrow ENTERO$$

2.3.3. M. Caputo

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \quad (2.12)$$

$$(n-1) \leq \alpha < n$$

Donde n es un entero y α es un numero real.

Estas definiciones tienen **backware**, es decir, que se puede calcular la derivada entera y fraccionaria. Estas definiciones pueden realizar la derivada entera y fraccionaria de funciones especiales como la función impulso y la función exponencial.

La definición de Grünwald-Letnikov es la definición más aplicada en señales y sistemas, como el procesamiento de señales, debido a que es posible obtener la transformada de Laplace. La demostración de la definición de Grünwald-Letnikov es la siguiente:

Demostración de la definición de Grünwald-Letnikov.

La definición del cálculo de una derivada de orden entero es la siguiente:

$$\frac{d}{dt} f(t) = f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (2.13)$$

Ejemplo:

El cálculo de la primera derivada es la función $f(t) = t^2$ es el siguiente:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t^2 - (t-h)^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t^2 - t^2 + 2th - h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2th - h^2}{h} \\ &= 2t \end{aligned} \quad (2.14)$$

Para obtener la expresión que calcula la segunda derivada de una función $f(t)$ se obtiene como:

$$\begin{aligned} f''(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} [f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Para obtener la expresión que calcula la tercera derivada de una función $f(t)$ se obtiene como:

$$\begin{aligned} f'''(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(t) - f''(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} - \frac{f(t-h) - 2f(t-2h) + f(t-3h)}{h^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} [f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)] \end{aligned} \quad (2.16)$$

De las ecuaciones 2.13, 2.15 y 2.16 se puede obtener la siguiente expresión:

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t-jh) \quad (2.17)$$

Donde $n \in \mathbb{N}$, $j > n$ y a la función $\binom{n}{j}$ se le conoce como coeficiente binomial.

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (2.18)$$

La definición de Grünwald-Letnikov surge a partir de la forma general de la derivada de orden entero (Ecuación 2.17), siendo esta la siguiente:

$$D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (2.19)$$

La función de coeficientes binomiales es la siguiente:

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)} \quad (2.20)$$

2.4. Solución Numérica.

La definición de Grünwald-Letnikov mostrada en la Ecuación 2.19 interviene una sumatoria infinita, por lo que es necesario realizar un truncamiento de la definición, llegando a un método numérico para darle una solución. El método numérico es el siguiente:

$${}_{k-\frac{L_m}{h}} D_{t_k}^\alpha f(t) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t_{k-j}) \quad (2.21)$$

Donde la función de coeficientes binomiales se muestra en la Ecuación 2.20. Esta solución numérica aproxima de la $\alpha - th$ derivada en los puntos kh ($k=1,2,3,\dots$) y $t_k = kh$ que representa al tiempo. h es el tamaño del paso de integración y L_m el tamaño de memoria.

$$C_0^{(\alpha)} = 1 \quad (2.22)$$

$$C_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{j + \alpha}{j}\right) C_{j-1}^{(\alpha)} \quad (2.23)$$

Entonces la solución para un sistema:

$$D_t^\alpha \mathbf{Y}(t) = f(\mathbf{Y}(t), t) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{Y} = [X, Y, Z]$$

Es una suma finita:

$$\mathbf{Y}(t_k) = f(\mathbf{Y}(t_k), t_k) h^\alpha - \sum_{j=1}^k C_j^{(\alpha)} \mathbf{Y}(t_{k-j}) \quad (2.25)$$

Donde $\mathbf{Y}(t_{k-1})$ es la variable de interés.

Ejemplo:

$$D^\alpha x = 35[y - x]$$

$$D^\alpha y = -7x - xz + 28y$$

$$D^\alpha z = xy - 3z$$

(2.26)

Con $\alpha = 0.1$ y $t_k = 1$ la solución es:

$$x(1) = (35[y(0) - x(0)])h^{0.9} - C_1^{0.9} x(0)$$

$$y(1) = (-7x(0) - x(0)z(0) + 28y(0))h^{0.9} - C_1^{0.9} y(0)$$

$$z(1) = (x(0)y(0) - 3z(0))h^{0.9} - C_1^{0.9} z(0)$$

Donde $x(0)$, $y(0)$ y $z(0)$ son las condiciones iniciales del sistema y la dependencia de $x(1)$ se le conoce como derivada fraccionaria.

2.4.1. Solución Analítica.

No es posible obtener una solución analítica usando la definición de Grünwald-Letnikov, debido a la sumatoria infinita, pero la definición de Riemman-Liouville si lo permite. La definición es la siguiente:

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \quad (2.27)$$

Donde $0 < \alpha < 1$.

Ejemplo: $f(t) = t$

$$\begin{aligned}
 D^{0.5}t &= \frac{1}{\Gamma(0.5)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t}{\sqrt{x-t}} du \\
 u &= x-t & t &= x-u \\
 du &= -dt & u(0) &= x \\
 u(x) &= 0 \\
 D^{0.5}t &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{x-u}{\sqrt{u}} du \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[2x^{3/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[\frac{4}{3}(x^{3/2}) \right] \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}
 \end{aligned}$$

2.5. Integradores de Orden Fraccionario.

Los sistemas de orden fraccionario prometen tener un mayor impacto en muchas áreas, aplicaciones críticas de tiempo y energía, como circuitos y dispositivos de alto rendimiento (moduladores delta-sigma y convertidores de potencia), mezclas líquidas, reacciones químicas, sistemas biológicos (en el cerebro humano, corazón y proceso perceptivo) [14], gestión de crisis (en electrónicos de potencia), procesamiento de información segura [15], y toma de decisiones críticas en política y economía [16]. Esta nueva y desafiante área de investigación y desarrollo se ha convertido en una disciplina científica, que involucra ingeniería en sistemas y control [17], teoría y experimentos físicos, matemáticas aplicadas y sobre todo, especialistas en circuitos y dispositivos [18–20]. Un ejemplo del uso de circuitos analógicos, específicamente de integradores fraccionarios es en la validación física de la regla que sugiere que las integrales de orden no entero son iterativas [21]. Pero sobre todo, los integradores de orden fraccionario son utilizados en la construcción de bloques que resuelven ecuaciones diferenciales de osciladores caóticos fraccionarios [3, 22].

A diferencia de los integradores del orden entero, el comportamiento en el dominio de la frecuencia de los integradores de orden fraccionario, la pendiente de la magnitud depende de α . El integrador de orden entero presenta una pendiente de $-20dB$ por década y la frecuencia de corte se obtiene en la magnitud máxima menos $3dB$. En caso de integradores y derivadores de orden fraccionario presentan una pendiente de $-20\alpha dB$ por década y la frecuencia de corte es la magnitud máxima menos $3\alpha dB$. [23]

En la figura 2.1 se presenta la magnitud de integradores y derivadores fraccionarios con ordenes α desde 0.1 hasta 0.9. Entre mayor sea el orden del integrador o derivador fraccionario mayor es su magnitud, por lo tanto la frecuencia de corte se recorre.

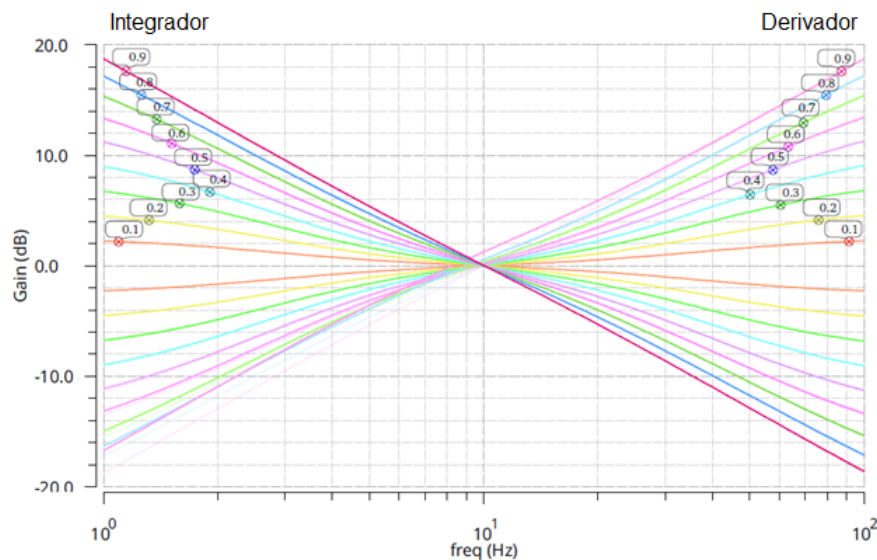


Figura 2.1: Respuesta en frecuencia del integrador y derivador de orden fraccionario.

En circuitos, cuando se utilizan varias operaciones como multiplicación, sumas, integración etc., es llamado Computadora Analógica. La Computadora Analógica puede ser convenientemente utilizado para resolver ecuaciones diferenciales. En la construcción de bloques son usados los inversores, sumadores, integradores e integradores sumadores. Es importante notar que la diferenciación es evitada y la integración es extensamente utilizada. [24] La razón por la que los integradores son preferidos son los siguientes:

- * La ganancia del integrador decrece cuando incrementa la frecuencia mientras que el diferenciador incrementa con el incremento en la frecuencia. Por lo tanto es muy fácil de estabilizar el integrador con respecto a oscilaciones.
- * La impedancia de entrada del integrador es constante y no depende de la frecuencia. Mientras que la impedancia de entrada del derivador disminuye como la frecuencia incrementa. Entonces a altas frecuencias la impedancia de entrada es reducida.
- * El derivador tiene una tendencia a amplificar el ruido y las desviaciones pueden dar lugar a oscilaciones. El ancho de banda de un integrador es pequeño, por lo tanto, el integrador es menos sensible al ruido del voltaje.

En general, el integrador es más estable que el derivador y menos sensible al ruido, por lo tanto, las posibilidades de oscilación son mucho menores en el integrador. Debido a estas razones, el integrador es preferido en implementaciones analógicas para la solución de ecuaciones diferenciales.

Debido a estas ventajas, el trabajo de esta tesis consiste en encontrar varias opciones de implementación electrónica de la función de transferencia que aproxima al integrador de orden fraccionario, utilizando diferentes métodos de síntesis. Simular y llevar a cabo experimentalmente cada diseño. Identificar las ventajas y desventajas de cada una de las propuestas y finalmente diseñar una aplicación para el integrador de orden fraccionario.

2.6. Estado del arte de los integradores de orden fraccionario.

El análisis del estado del arte del tema de los integradores de orden fraccionario, se realizó en revistas y fuentes internacionales. Las variables a considerar en el estado del arte son: el objetivo, la metodología y los resultados obtenidos.

Diseño de integradores de orden fraccionario con funciones de transferencia de 5to. orden.

Panagiotis Bertisias, Costas Psychalinos, Ahmed Elwakil, Leila Safari, Shahram Minaei. *Design and application examples of CMOS fractional-order differentiators and integrators*, Microelectronics Journal, Volumen 83, 2019.

Objetivo: Reduce la complejidad de la construcción de bloques de integradores y derivadores de orden fraccionarios, basados en funciones de transferencias de 2do. orden entero.

Metodología: Implementan bloques para construir filtros de orden fraccionario. Colocan en forma de cascada bloques de 1er. y 2do. orden entero, hasta obtener una función de transferencia de 5to. orden entero. Además, realizan una emulación de un capacitor e inductor de orden fraccionario.

Resultados: Este trabajo demuestran y verifican la realización de filtros de orden fraccionario aplicados en un modelo neurona y emulan capacitores e inductores de orden fraccionario. Su aplicación optimiza y reduce la complejidad de las etapas de integración y derivación de orden fraccionario, comparadas con las estructuras CMOS ya publicadas.

Construcción de integradores de orden fraccionario usando variables de estado.

Muñiz-Montero Carlos, García-Jiménez Luis V., Sánchez-Gaspariano, Luis A., Sánchez-López, Carlos, González-Díaz, Víctor R., Tlelo-Cuautle, Esteban. *New alternatives for analog implementation of fractional-order integrators, differentiators and PID controllers based on integer-order integrators*, Nonlinear Dynamics, Volumen 90, 2017.

Objetivo: Proponen una alternativa de construcción de integradores de orden fraccionario sin usar redes en escalera.

Metodología: La alternativa se basa en la manipulación matemática de una función racional, similar a la manipulación de síntesis en variables de estado de filtros.

Resultados: Este trabajo implementan integradores y derivadores de orden fraccionario. Su implementación incluye amplificadores operacionales, sumadores e integradores de orden entero. La propuesta la validan con pruebas en simulación, usando MATLAB y HSPICE, además de que la aplican en controladores PI y PID de orden fraccionario.

Diseño de integradores IIR de orden fraccionario.

Mekhnache, C., Ferdi, Y. *Using New Hybrid Integrators to Design IIR Fractional-Order Integrators via Impulse Invariance Method*. Circuits Syst Signal Process, Volumen 33, 2014.

Objetivo: Presentan un método para construir integradores digitales IIR de orden fraccionario.

Metodología: La idea principal del diseño se basa en interpolar las reglas de integración como Euler, Bilineal y Simpson, combinadas con técnicas de modelado de señales deterministas. Encontrando que el integrador Euler-Simpson obtiene una mayor precisión que los integradores existentes.

Resultados: Los autores mencionan que el diseño de integradores digitales de orden fraccionario, usando la interpolación de las reglas de diseño de filtros digitales y técnicas de modelado proveen una mayor precisión con el integrador Euler-Simpson. Sus diseños los validan con gráficas y simulaciones.

3 | Métodos de Síntesis para Integradores Fraccionarios.

Los filtros son largamente utilizados en sistemas electrónicos, como electrónicos, telecomunicaciones, electrónica de consumo, sistemas de instrumentación, etc. Los filtros son subsistemas físicos de tiempo continuo, que hacen una relación de la señal de entrada con la señal de salida en tiempo real.

El diseño de filtros comienza con un conjunto de parámetros que debe cumplir el filtro, a este conjunto se le llama *especificaciones*. El siguiente paso en el diseño de filtros, es el obtener una función de transferencia $H(s)$ que cumpla estas especificaciones.

El trabajo siguiente después de obtener la función de transferencia $H(s)$, es encontrar una red adecuada que realice esta función de transferencia. Este trabajo se guía a través de un método o técnica desarrollada de *síntesis* de redes pasivas o activas. La solución al paso de *síntesis* no es única, hay muchos trabajos que pueden ser usados para realizar la misma función de transferencia. [25]

El paso final en el diseño de filtros se le conoce como *desnormalización*. Consiste en aplicar un factor de escalamiento en frecuencia, k_f , y un escalamiento apropiado en impedancia, k_z de acuerdo con las necesidades en su aplicación. El resultado de este paso es el mismo circuito pero con cambios en los valores de sus elementos.

Este capítulo incluye el conjunto de *especificaciones*, la obtención de transferencia $H(s)$ y el proceso de *síntesis* con los métodos de **Foster**, **Cauer**, **Butterworth**, **Chebyshev Tipo 1** y **Grafo de Señal**.

3.1. Integrador de Orden Fraccionario

La función de transferencia que aproxima el comportamiento de un integrador de orden fraccionario es la que se muestra en la Ecuación 3.1.

$$\frac{1}{s^\alpha} = \frac{s + A}{As + 1} \quad (3.1)$$

Donde el factor **A** se obtiene con:

$$A = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \quad (3.2)$$

Los integradores, a causa de sus elementos, producen una pérdida. Esta pérdida se manifiesta en la ganancia, la cual es menor a un integrador ideal y genera un ancho de banda. Contemplando

las pérdida k en el integrador de orden fraccionario obtenemos el siguiente operador.

$$\begin{aligned}
 s^\alpha &= \frac{As + 1}{s + A} \\
 s^\alpha + k &= \frac{As + 1}{s + A} + k \\
 s^\alpha + k &= \frac{(A + k)s + (1 + kA)}{s + A} \\
 \frac{1}{s^\alpha + k} &= \frac{s + A}{(A + k)s + (kA + 1)}
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Donde el factor A se obtiene con la Ecuación 3.2 y k es el factor de pérdidas.

Las funciones de transferencia 3.1 y 3.3 tienen un único Cero ubicado en $s = -A$. El Polo del integrador sin pérdidas se ubica en $s = -1/A$, mientras que con pérdidas el Polo se encuentra en $s = -(kA + 1)/(A + k)$. En la Figura 3.1, se muestra la ubicación de polos y ceros del integrador de orden fraccionario. El integrador mantiene su Cero pero recorre el Polo a la izquierda conforme aumenta el factor de perdidas k y aporta mayor estabilidad al integrador fraccionario.

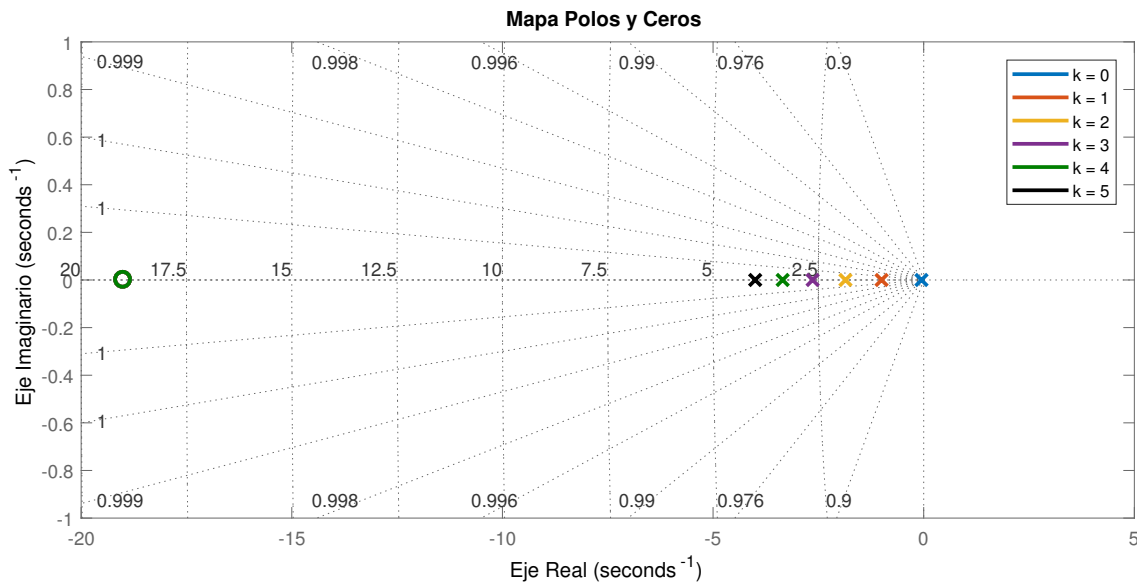


Figura 3.1: Polos y Ceros del integrador fraccionario con $\alpha = 0.9$.

En la Figura 3.2 se muestra la gráfica de Bode del integrador fraccionario con pérdidas k desde 0 (ideal) hasta 5. Con el incremento en el factor de perdida aumenta el ancho de banda pero disminuye la ganancia. Con $k = 1$ el integrador fraccionario se aproxima a una ganancia unitaria, pero con ganancias mas grandes la ganancia es negativa.

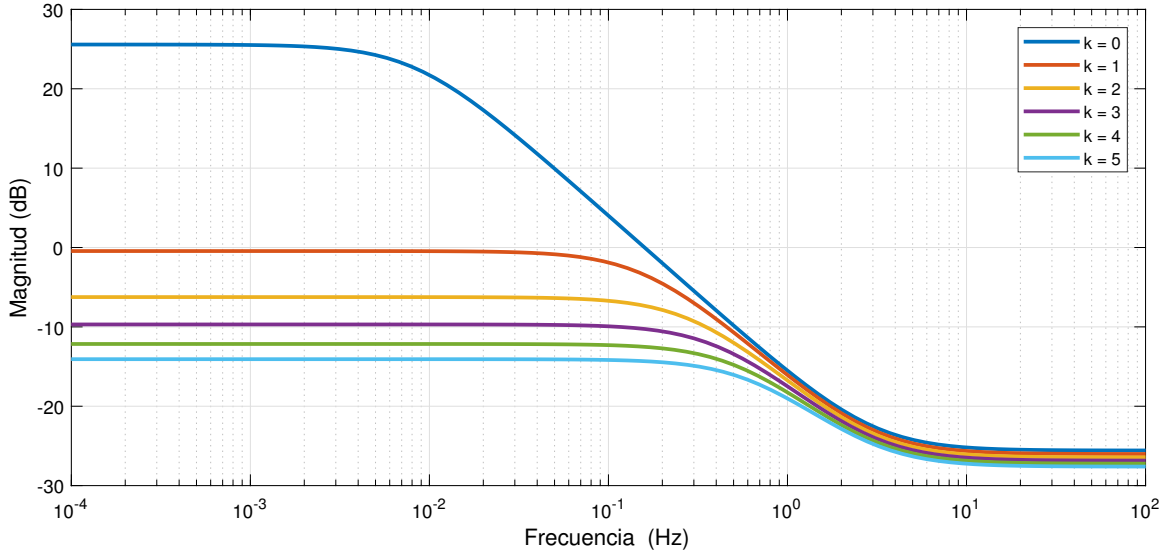


Figura 3.2: Diagrama de Bode del integrador fraccionario con $\alpha = 0.9$.

3.2. Foster

El primer paso para obtener un circuito equivalente con el método de Foster es representar la función de transferencia de la Ecuación 3.1, en una expansión en fracciones parciales, resultando de la siguiente forma:

$$\frac{1}{s^\alpha} = \frac{s+A}{As+1} = \frac{1 - \frac{1}{A^2}}{s + \frac{1}{A}} + \frac{1}{A} \quad (3.4)$$

El segundo paso es igualar la expansión de la Ecuación 3.4 a una impedancia.

$$Z_1 = \frac{1 - \frac{1}{A^2}}{s + \frac{1}{A}} + \frac{1}{A} \quad (3.5)$$

La expresión 3.5 es una suma de dos términos, el término $\frac{1}{A}$ representa una impedancia constante, mientras que el primer término se iguala a una admitancia para que sea posible separarse.

$$Y_1 = \frac{s + \frac{1}{A}}{1 - \frac{1}{A^2}} = \frac{s}{1 - \frac{1}{A^2}} + \frac{1}{A - \frac{1}{A}} \quad (3.6)$$

La Ecuación 3.6 representa la admitancia de un capacitor de valor $\frac{1}{1 - \frac{1}{A^2}}$, mientras que el segundo término es una constante, siendo una impedancia de valor $A - \frac{1}{A}$.

El circuito que aproxima la función de transferencia del integrador fraccionario (Ecu. 3.1) se muestra en la Figura 3.3. Donde:

$$R_1 = \frac{1}{A} \Omega$$

$$R_2 = A - \frac{1}{A} \Omega$$

$$C_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{A^2}} F$$

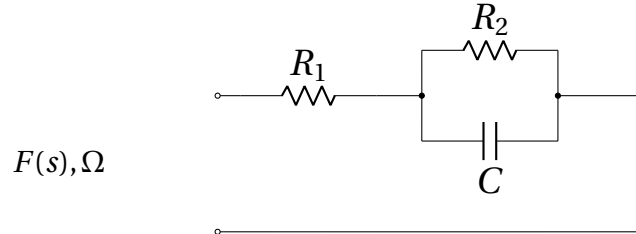


Figura 3.3: Esquema del integrador fraccionario por el método de Foster.

La expansión en fracciones parciales de la Ecuación 3.3 es la siguiente:

$$\frac{1}{s^\alpha + k} = \frac{A - \frac{Ak+1}{A+k}}{s(A+k) + (Ak+1)} + \frac{1}{A+k} \quad (3.7)$$

Se iguala la expresión a una impedancia, el segundo término de la Ecuación 3.8 es una impedancia constante.

$$Z_2 = \frac{A - \frac{Ak+1}{A+k}}{s(A+k) + (Ak+1)} + \frac{1}{A+k} \quad (3.8)$$

Para separar el primer término se iguala a una admitancia.

$$Y_2 = \frac{s(A+k) + (Ak+1)}{A - \frac{Ak+1}{A+k}} \quad (3.9)$$

Entonces los valores de los elementos del circuito 3.3 son los siguientes:

$$R_1 = \frac{1}{A+k}$$

$$R_2 = \frac{A}{Ak+1} - \frac{1}{A+k}$$

$$C_2 = \frac{A+k}{A - \frac{Ak+1}{A+k}}$$

La Figura 3.4 muestra los resultados por simulación del circuito equivalente de Foster, los cuales corresponden a los resultados obtenidos por diagrama de Bode de las funciones de transferencia del integrador fraccionario sin y con pérdidas, de la Figura 3.2.

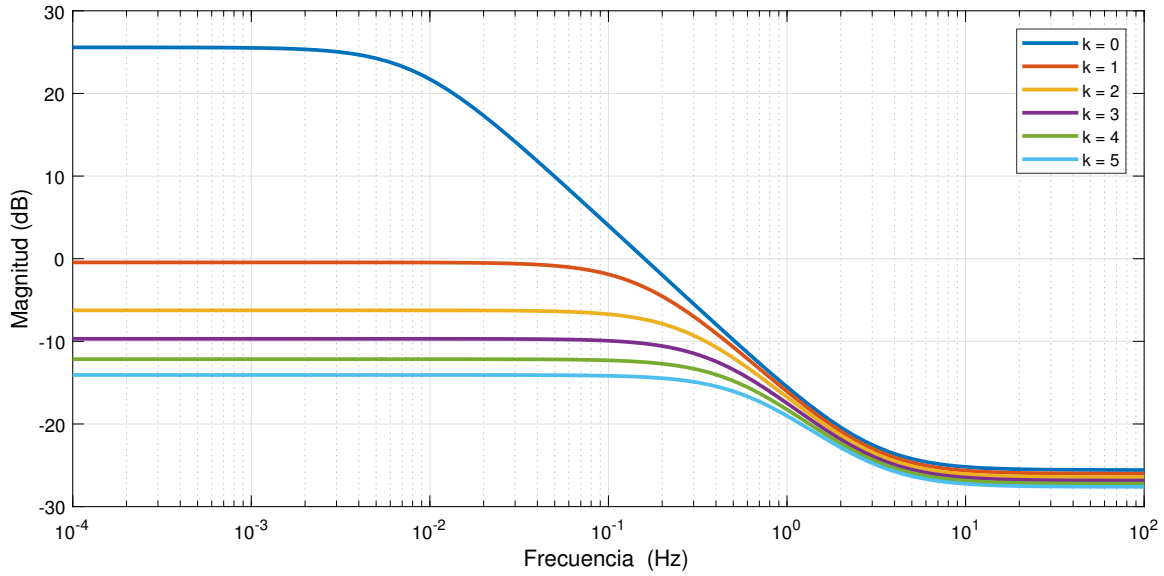


Figura 3.4: Simulación del circuito equivalente de Foster.

3.3. Cauer

En el método de síntesis de Cauer se trata de eliminar el polo en el infinito y las constantes de la función de transferencia igualada a una impedancia o admitancia como en el método de Foster.

La función de transferencia del integrador fraccionario sin pérdidas igualada a una impedancia y separada por fracciones parciales.

$$Z_1 = \frac{1 - \frac{1}{A^2}}{s + \frac{1}{A}} + \frac{1}{A} \quad (3.10)$$

Se elimina la constante y el primer elemento es una resistencia de valor:

$$R_1 = \frac{1}{A} \Omega$$

Para separar la variable s , se iguala el término restante a una admitancia.

$$Y_1 = \frac{s}{1 - \frac{1}{A^2}} + \frac{\frac{1}{A}}{1 - \frac{1}{A^2}} \quad (3.11)$$

Estos términos representan dos elementos en paralelo, un resistor y un capacitor de valores:

$$R_2 = A - \frac{1}{A} \Omega$$

$$C_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{A^2}} F$$

El integrador de orden fraccionario con pérdidas (Ecu. 3.3) representado en fracciones parciales e igualado a una impedancia seria de la siguiente forma:

$$Z_2 = \frac{A - \frac{Ak+1}{A+k}}{s(A+k) + (Ak+1)} + \frac{1}{A+k} \quad (3.12)$$

La constante representa una resistencia de valor:

$$R_1 = \frac{1}{A+k}$$

Mientras que el segundo término, representado en admitancia obtenemos que es un paralelo de dos elementos pasivos, capacitor y resistencia.

$$Y_2 = \frac{s(A+k)}{A - \frac{Ak+1}{A+k}} + \frac{(Ak+1)}{A - \frac{Ak+1}{A+k}} \quad (3.13)$$

Los valores de R_2 y C_1 son los siguientes:

$$R_2 = \frac{A}{Ak+1} - \frac{1}{A+k}$$

$$C_2 = \frac{A+k}{A - \frac{Ak+1}{A+k}}$$

Entonces el circuito es equivalente al integrador fraccionario por el método de síntesis de Cauer es el mostrado en la Figura 3.5.

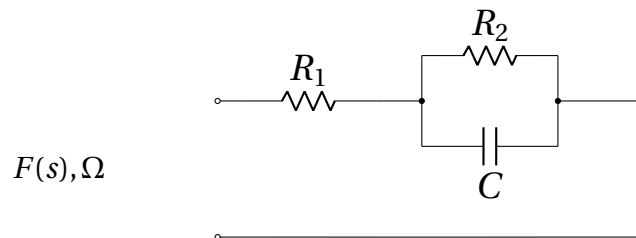


Figura 3.5: Circuito del integrador fraccionario por el método de Cauer.

3.4. Butterworth

La función de transferencia 3.3 puede ser reescrita como:

$$\frac{1}{s^\alpha + k} = \frac{s}{(A+k)s + (kA+1)} + \frac{A}{(A+k)s + (kA+1)} \quad (3.14)$$

La función de transferencia que aproxima al integrador de orden fraccionario puede separarse por dos filtros, un pasa altas y un pasa bajas. Estos filtros serán aproximados con el método de Butterworth.

3.4.1. Pasa Bajas Butterworth

La función de transferencia del filtro pasa bajas se presenta en la Ecuación (3.29), donde k es el factor de pérdidas.

$$H_{pb}(s) = \frac{A}{(A+k)s + (kA+1)} = G_{pb} \frac{1}{\frac{A+k}{kA+1}s + 1} \quad (3.15)$$

Donde G_{pb} es la ganancia del pasa bajas y es:

$$G_{pb} = \frac{A}{Ak + 1}$$

El comportamiento en el dominio de la frecuencia del filtro pasa bajas de la Ecuación 3.29 de orden $\alpha = 0.9$ y con pérdidas $k = 0$ (ideal), se muestra en la Figura 3.6. Por otra parte, en la Figura 3.7 se muestra el diagrama de Bode con ganancia unitaria.

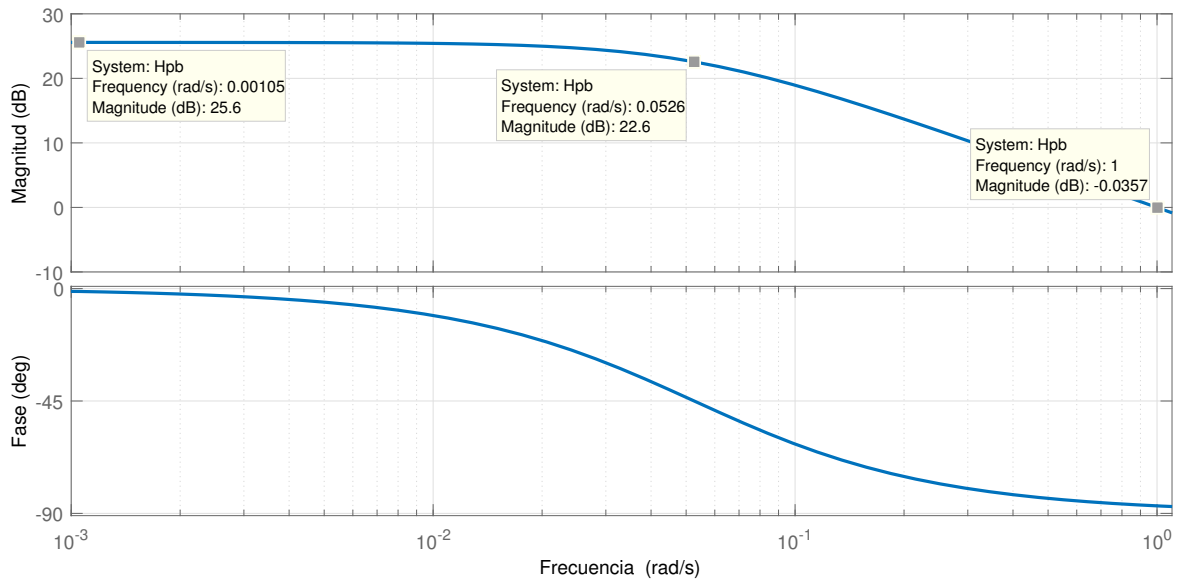


Figura 3.6: Diagrama de Bode del pasa bajas.

Las especificaciones del filtro Butterworth obtenidas de la Figura 3.7 son las siguientes:

- $\omega_p = 0.0525$ rad/s
- $\omega_s = 1$ rad/s
- $A_p = 3$ dB
- $A_s = 25.6$ dB

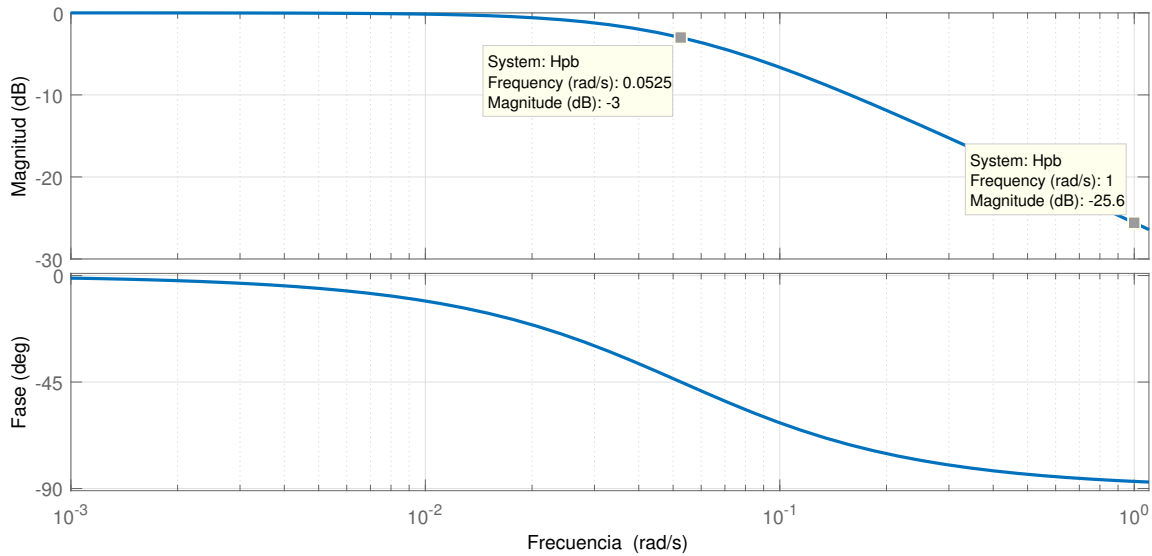


Figura 3.7: Diagrama de Bode del pasa bajas con ganancia unitaria.

Con las especificaciones de diseño del filtro Butterworth y con el comando **buttord** de MATLAB obtenemos el orden **n** del filtro. Con el comando **buttap** obtenemos la siguiente función de transferencia de Butterworth:

$$H_{pb}(s) = \frac{1}{s + 1} \tag{3.16}$$

El diagrama de Bode del filtro pasa bajas de Butterworth (Ecu. 3.16) se presenta en la figura 3.8, el cual coincide con las especificaciones de la Figura 3.7.

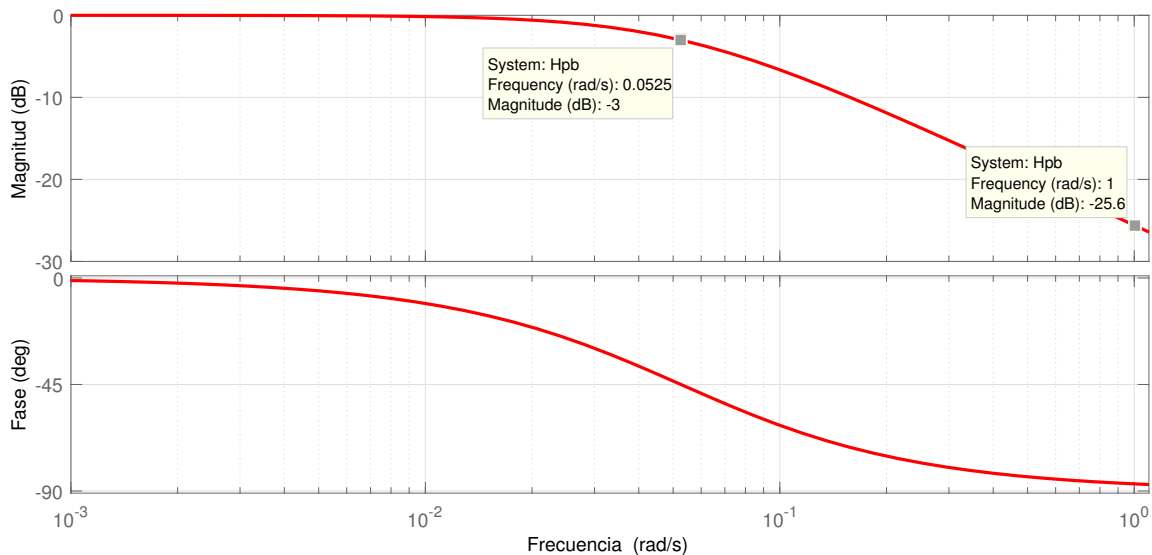


Figura 3.8: Diagrama de Bode del pasa bajas de Butterworth.

La ganancia de G_{pb} multiplicada por la función de transferencia de la Ecuación 3.16 obtenemos la representación en filtro pasa bajas de Butterworth de la Ecuación 3.29. El diagrama de Bode se muestra en la Figura 3.9 y corresponde a la Ecuación 3.17. Por otra parte, los resultados en el dominio de la frecuencia encaja con el comportamiento en el dominio de la frecuencia del pasa

bajas original (Figura 3.29).

$$H_{pb}(s) = G_{pb} \frac{1}{s+1} \quad (3.17)$$

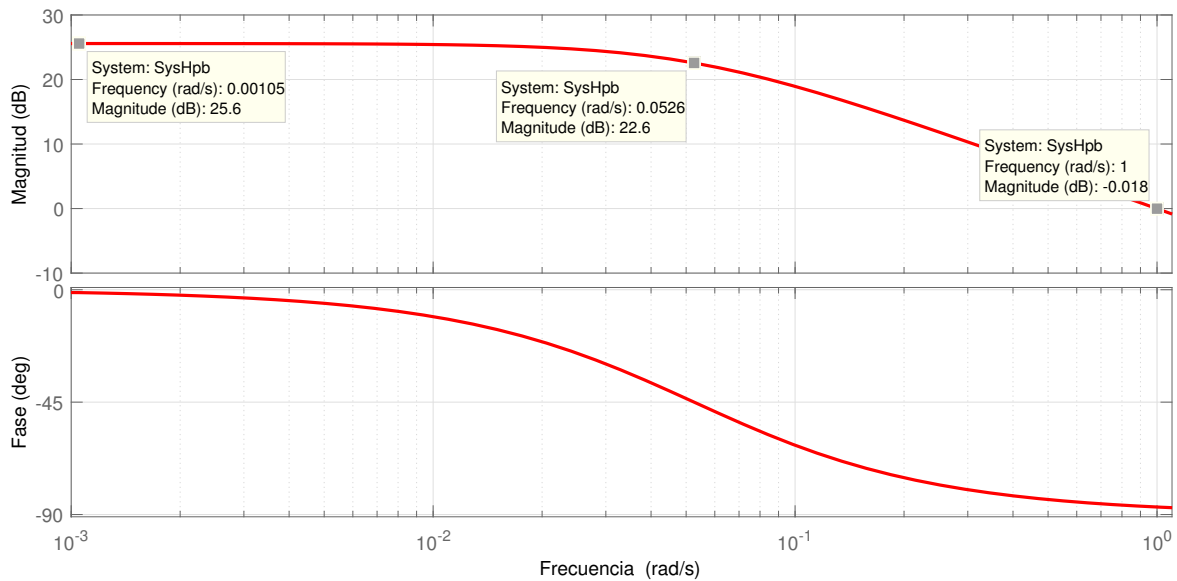


Figura 3.9: Diagrama de Bode del pasa bajas de Butterworth con ganancia.

Diseño del filtro Pasa Bajas Butterworth

Usaremos la función *BW_LADDER*, el cual es parte de el toolbox que calcula los valores de los elementos en un diagrama de conexión. La función necesita de los siguientes parámetros:

- $\omega_p = 0.0525$ rad/s
- $\omega_s = 1$ rad/s
- $A_p = 3$ dB
- $A_s = 25.6$ dB
- $n = 1$
- $R_s = 1\Omega$
- $R_L = 1\Omega$
- Ladder = 1 o 2

Donde R_s es la resistencia de fuente, R_L es la resistencia de carga y *Ladder* puede ser 1, para una conexión del tipo *T*, o 2 para una conexión del tipo π .

El circuito de tipo *T* se muestra en la Figura 3.10, mientras que en la Figura 3.11 se muestra el circuito del tipo π .

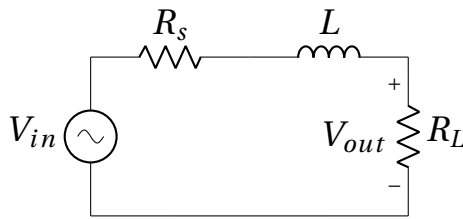


Figura 3.10: Circuito Pasa Bajas de Butterworth tipo T .

$$HPB_{tipoT}(s) = \frac{R_L}{s(L) + (R_L + R_s)} \tag{3.18}$$

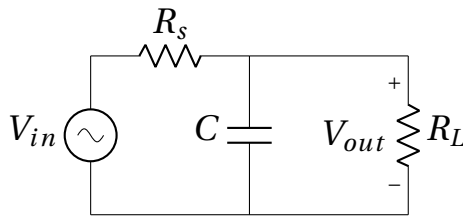


Figura 3.11: Circuito Pasa Bajas de Butterworth tipo π .

$$HPB_{tipo\pi}(s) = \frac{R_L}{s(R_L R_s C) + (R_L + R_s)} \tag{3.19}$$

Donde $R_s = R_L = 1\Omega$, $C = 38F$ y $L = 38H$. En este caso, se prefiere el filtro del tipo π (Fig. 3.11) por el uso del capacitor. Por otra parte, el comportamiento en el dominio de la frecuencia, es el mismo para los dos tipos cuando $R_L = R_s$, como se muestra la Figura 3.12.

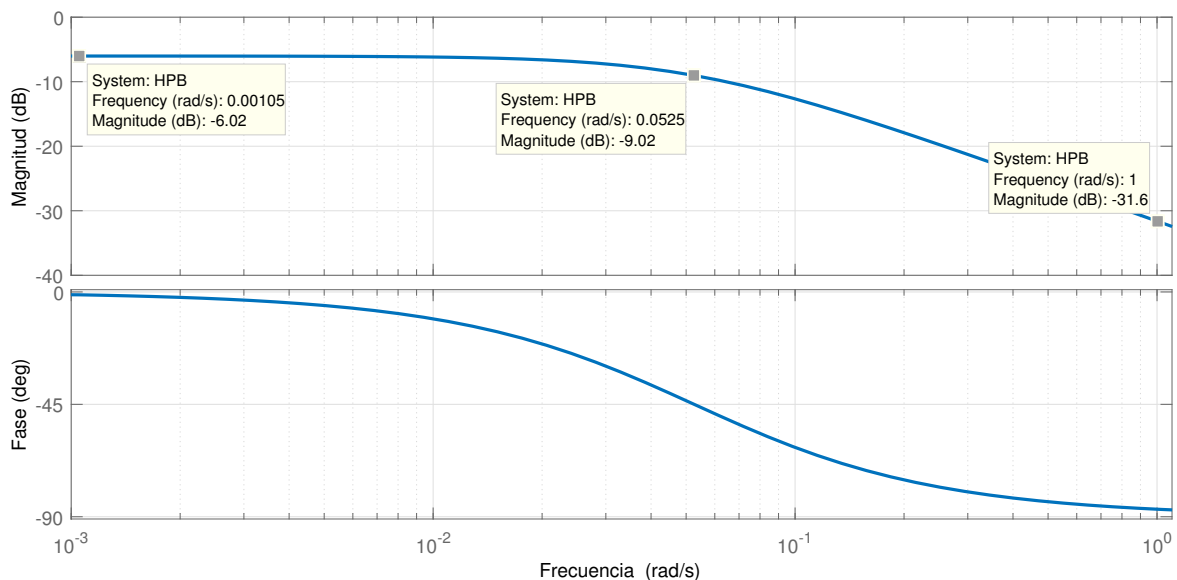


Figura 3.12: Diagrama de Bode del filtro pasa bajas del tipo T y π .

La atenuación en 1rad/s es correcta, hay una disminución de 6dB en la banda de paso y un incremento en la frecuencia de corte, esto se debe a las pérdidas incluidas en las resistencias del filtro, se espera obtener una pérdida de 6dB en la realización experimental.

Para facilitar el proceso de diseño del filtro pasa bajas, se presenta la Ecuación de diseño en la Ecuación (3.31) teniendo en cuenta que $R_S = R_L = R_{pb}$.

$$R_{pb} = 2 \frac{A}{C} \quad (3.20)$$

Donde A depende del orden fraccionario α del integrador fraccionario diseñado.

$$A = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \quad (3.21)$$

3.4.2. Pasa Altas Butterworth

La función de transferencia del filtro pasa altas se presenta en la Ecuación (3.33), donde k es el factor de pérdidas.

$$H_{pa}(s) = \frac{s}{(A+k)s + (kA+1)} = G_{pa} \frac{s}{s + \frac{kA+1}{A+k}} \quad (3.22)$$

Donde G_{pa} es la ganancia del filtro pasa altas y es:

$$G_{pa} = \frac{1}{A+k}$$

La Figura 3.13 muestra el comportamiento en el dominio de la frecuencia del filtro pasa altas (Ecu. 3.33) que forma parte del integrador fraccionario con pérdidas. La respuesta presentada corresponde al orden $\alpha = 0.9$ y con pérdidas $k = 0$ (ideal).

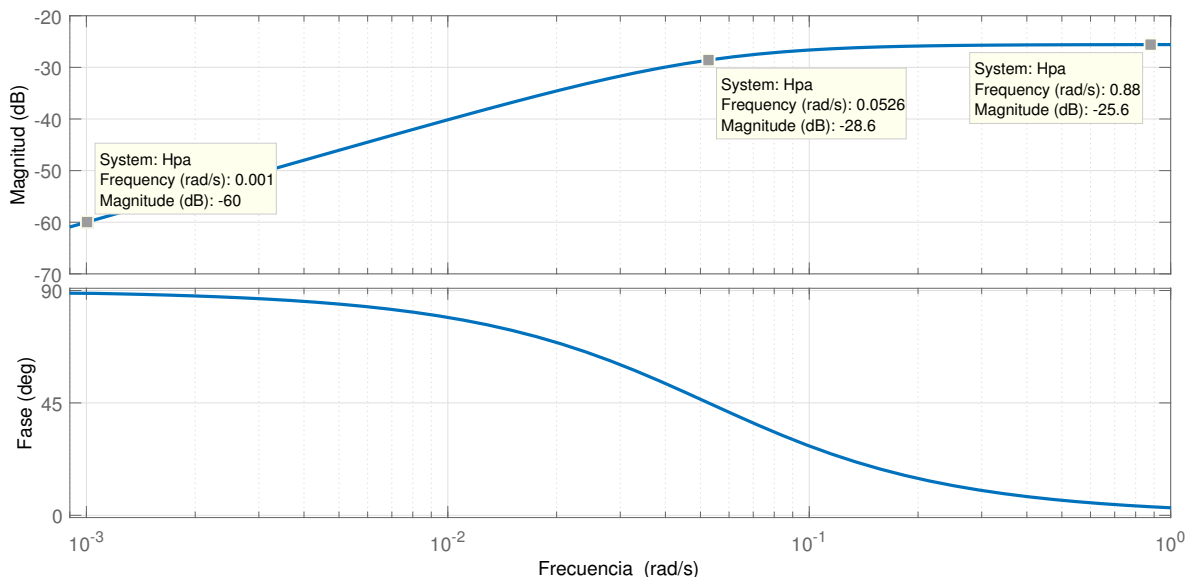


Figura 3.13: Diagrama de bode del pasa altas.

La Figura 3.14, muestra el diagrama de Bode de la Ecuación 3.33 sin ganancia. De esta manera las especificaciones para el diseño del filtro Butterworth son las siguientes:

- $\omega_p = 0.0525 \text{ rad/s}$
- $\omega_s = 1 \text{ rad/s}$

- $A_p = 3\text{dB}$
- $A_s = 34.4\text{dB}$

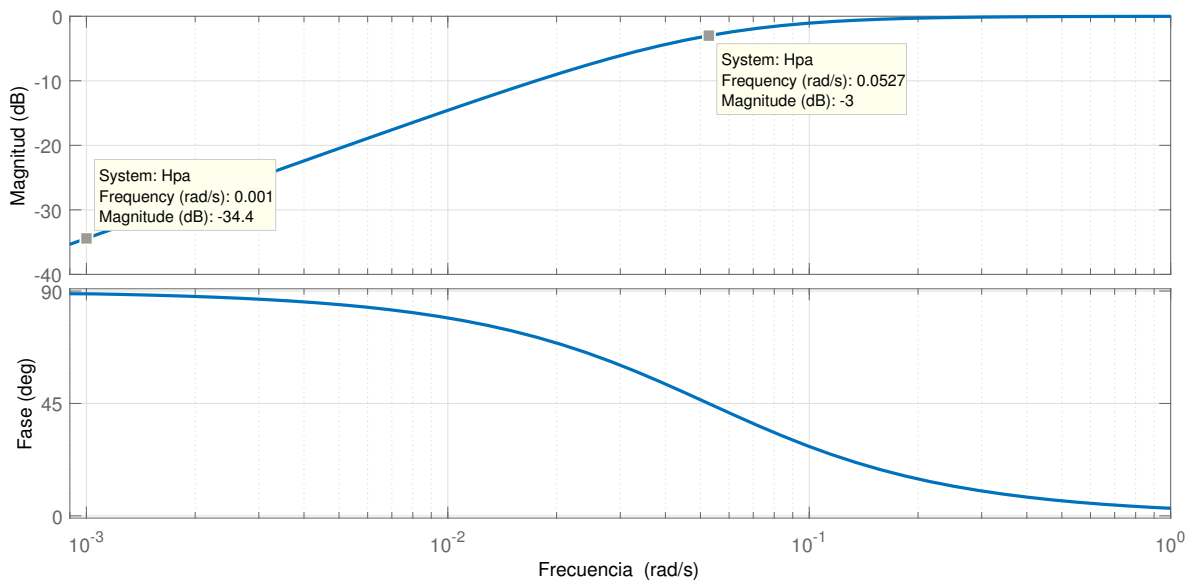


Figura 3.14: Diagrama de bode del pasa altas con ganancia unitaria.

Con la ayuda de MATLAB obtenemos el orden del filtro pasa bajas de Butterworth. El comando **buttord** nos da el orden del filtro pasa bajas, con **buttap** obtenemos la función de transferencia y con **lp2hp** obtenemos la conversión de pasa bajas a pasa altas del filtro Butterworth. La función de transferencia del filtro pasa altas de Butterworth es la siguiente:

$$H_{pa}(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{A}} \quad (3.23)$$

La Figura 3.15 muestra el diagrama de Bode de la Ecuación 3.23 y se coincide con las especificaciones de la Figura 3.14.

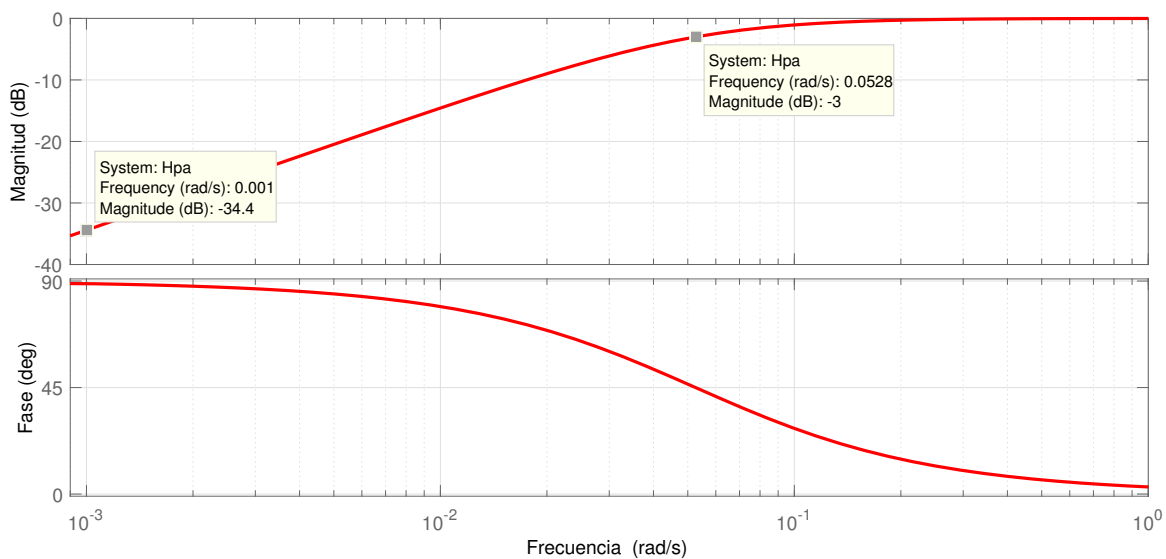


Figura 3.15: Diagrama de Bode del pasa altas de Butterworth.

Al multiplicar la ganancia G_{pa} por la función de transferencia del filtro pasa altas de Butterworth (Ecu. 3.23) obtenemos el comportamiento del pasa altas obtenido por la función de transferencia del integrador fraccionario (Ecu. 3.33). La Figura 3.16 muestra el diagrama de bode de la Ecuación 3.24

$$H_{pa}(s) = G_{pa} \frac{s}{s + \frac{1}{A}} \quad (3.24)$$

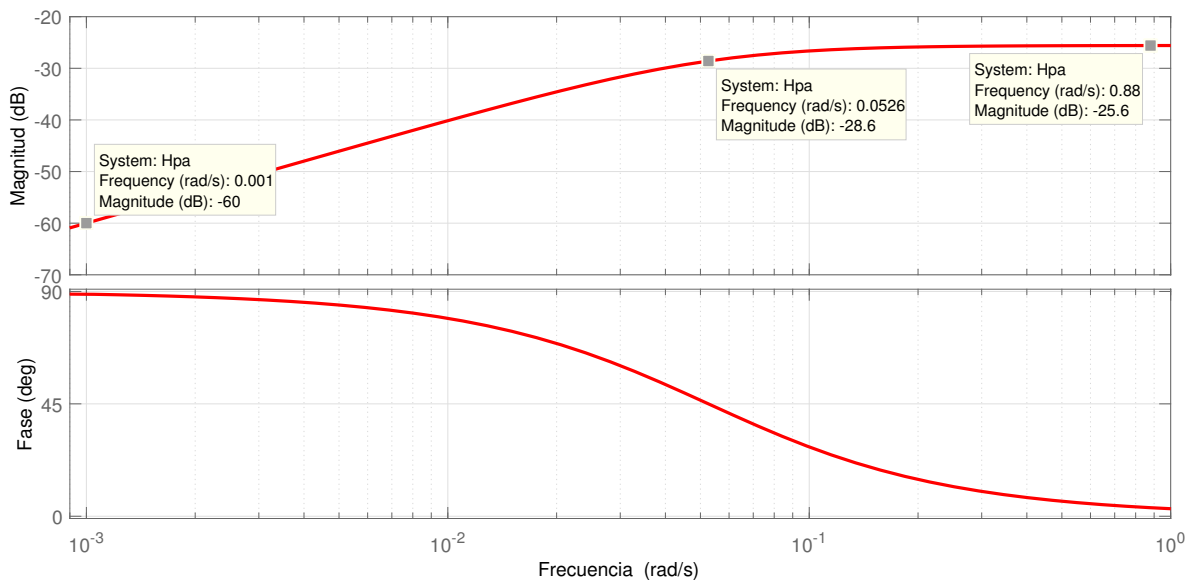


Figura 3.16: Diagrama de Bode del pasa altas de Butterworth con ganancia.

Diseño del filtro Pasa Altas Butterworth

Con las transformaciones RLC de filtros pasa bajas se obtienen diferentes filtros realizando cambios en los elementos inductivos y capacitivos. Por lo tanto, las especificaciones del filtro pasa altas son las siguientes:

- $\omega_p = 0.0525 \text{ rad/s}$
- $\omega_s = 1 \text{ rad/s}$
- $A_p = 3\text{dB}$
- $A_s = 34.4\text{dB}$
- $n = 1$
- $R_s = 1\Omega$
- $R_L = 1\Omega$
- Ladder = 1 o 2

La Figura 3.17 corresponde a la transformación de filtro pasa altas, usando el pasa bajas de Butterworth del tipo T . Mientras que en la Figura 3.18 corresponde a la transformación del filtro Butterworth del tipo π .

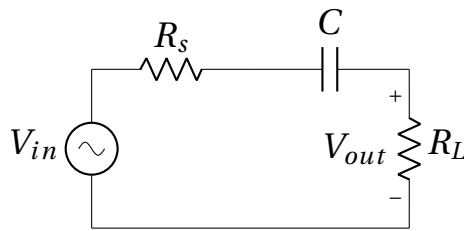


Figura 3.17: Circuito Pasa Altas de Butterworth tipo T .

$$HPA_{tipoT}(s) = \frac{s(CR_L)}{sC(R_L + R_s) + 1} \quad (3.25)$$

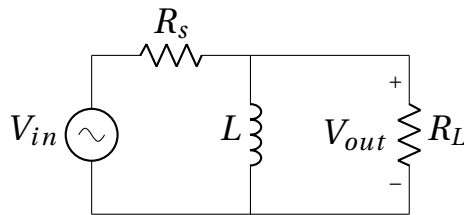


Figura 3.18: Circuito Pasa Altas de Butterworth tipo π .

$$HPA_{tipo\pi}(s) = \frac{s(LR_L)}{sL(R_L + R_s) + R_LR_s} \quad (3.26)$$

Donde $R_L = R_s = 1\Omega$, $C = 9.4905F$ y $L = 9.4905H$. Elegimos el pasa altas de tipo T de Butterworth por el uso del capacitor. Además, el comportamiento en el dominio de la frecuencia de los filtros pasa altas es el mismo, esto se debe a que las resistencias R_L y R_s son iguales. El diagrama de Bode de los filtros pasa bajas se muestra en la Figura 3.19.

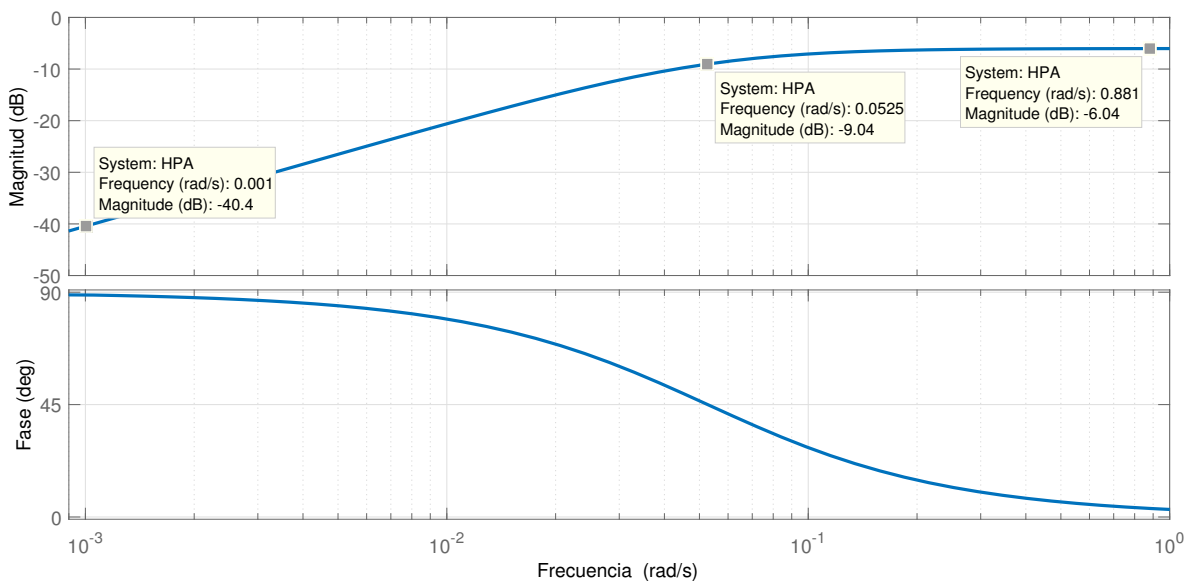


Figura 3.19: Diagrama de Bode del filtro pasa altas del tipo T y π .

La atenuación en 0.001rad/s es correcta, hay una disminución de 6dB en la banda de paso y una disminución en la frecuencia de corte, esto se debe a las pérdidas incluidas en las resistencias

del filtro, se espera obtener este comportamiento en la realización experimental.

Para facilitar el proceso de diseño del filtro pasa altas, se presenta la Ecuación de diseño en la Ecuación (3.36) teniendo en cuenta que $R_S = R_L = R_{pa}$.

$$R_{pa} = \frac{1}{2} \frac{A}{C} \tag{3.27}$$

Donde A depende del orden fraccionario α del integrador fraccionario diseñado.

$$A = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \tag{3.28}$$

3.4.3. Integrador de Orden Fraccionario

El integrador de orden fraccionario se conforma por la suma del filtro pasa bajas y pasa altas. El circuito del integrador de orden fraccionario se muestra en la Figura 3.20.

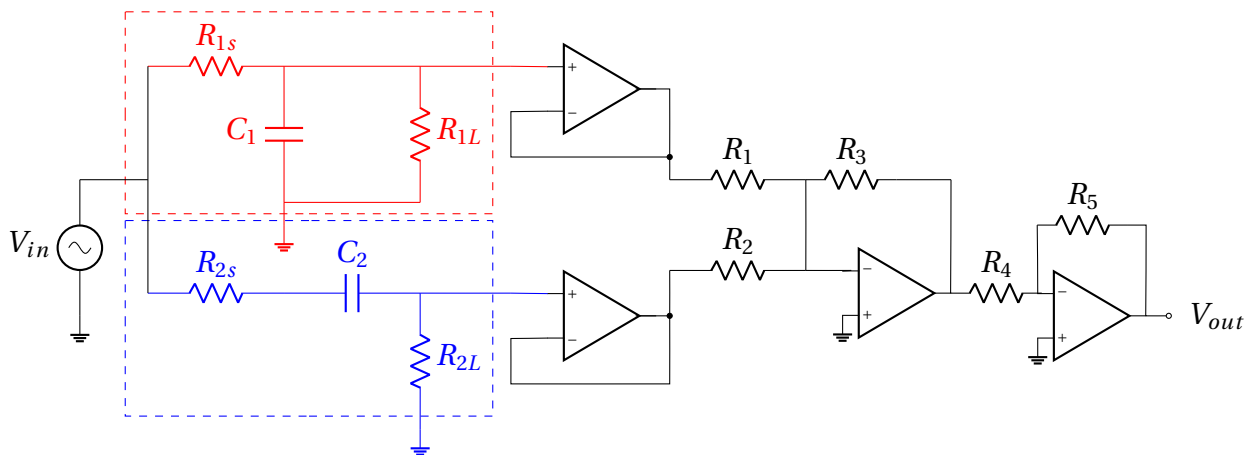


Figura 3.20: Circuito del integrador de orden fraccionario

El circuito incluye el filtro pasa bajas (rojo) y pasa altas (azul) diseñados con Butterworth. Además, un amplificador sumador inversor que suma las respuestas de ambos circuitos. Las resistencias R_1 , R_2 y R_3 se seleccionan de tal forma que la ganancia en la entrada del filtro pasa bajas sea G_{pb} (Ecu. 3.5.1) y en la entrada del filtro pasa altas sea G_{pa} (Ecu. 3.5.2). Esto se debe a que los filtros de Butterworth tienen una ganancia unitaria. La Tabla 3.1 muestra los valores de ganancia para el filtro pasa bajas y el filtro pasa altas.

Tabla 3.1: Valores de ganancia.

α	R_1 (Ω)	R_2 (Ω)	R_3 (Ω)	G_{pb}	G_{pa}
0.10	$1e^3$	$1.49e^3$	$1.22e^3$	1.22	0.81
0.20	$1e^3$	$2.25e^3$	$1.50e^3$	1.50	0.66
0.30	$1e^3$	$3.44e^3$	$1.85e^3$	1.85	0.53
0.40	$1e^3$	$5.44e^3$	$2.33e^3$	2.33	0.42
0.50	$1e^3$	$9.00e^3$	$3.00e^3$	3.00	0.33
0.60	$1e^3$	$16.00e^3$	$4.00e^3$	4.00	0.25
0.70	$1e^3$	$32.11e^3$	$5.66e^3$	5.66	0.17
0.80	$1e^3$	$81.00e^3$	$9.00e^3$	9.00	0.11
0.85	$1e^3$	$152.10e^3$	$12.33e^3$	12.33	0.08
0.90	$1e^3$	$361.00e^3$	$19.00e^3$	19.00	0.05
0.95	$1e^3$	$1.52e^6$	$39.00e^3$	39.00	0.02

El circuito también necesita un amplificador inversor para eliminar la respuesta inversa del amplificador sumador y de esta forma evitar modificar la respuesta del integrador de orden fraccionario. De esta forma, las resistencias R_4 es igual a la resistencia R_5 .

Se realizó un escalamiento en impedancia del filtro pasa bajas y del filtro pasa altas por separado, dado que los capacitores no se encuentran de valores comerciales. La Tabla 3.2 muestra los valores del circuito de la figura 3.20.

Tabla 3.2: Valores comerciales por escalamiento en impedancia.

α	$R_{1s} (\Omega)$	$R_{1L} (\Omega)$	$R_{2s} (\Omega)$	$R_{2L} (\Omega)$	$R_1 (\Omega)$	$R_2 (\Omega)$	$R_3 (\Omega)$	$C_1 (F)$	$C_2 (F)$
0.10	$244e^3$	$244e^3$	$610e^3$	$610e^3$	$1.00e^3$	$1.49e^3$	$1.22e^3$	$10e^{-6}$	$1e^{-6}$
0.20	$300e^3$	$300e^3$	$750e^3$	$750e^3$	$1.00e^3$	$2.25e^3$	$1.50e^3$	$10e^{-6}$	$1e^{-6}$
0.30	$371e^3$	$371e^3$	$930e^3$	$930e^3$	$1.00e^3$	$3.44e^3$	$1.85e^3$	$10e^{-6}$	$1e^{-6}$
0.40	$467e^3$	$467e^3$	$117e^3$	$117e^3$	$1.00e^3$	$5.44e^3$	$2.33e^3$	$10e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.50	$604e^3$	$604e^3$	$150e^3$	$150e^3$	$1.00e^3$	$9.00e^3$	$3.00e^3$	$10e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.60	$801e^3$	$801e^3$	$201e^3$	$201e^3$	$1.00e^3$	$16.00e^3$	$4.00e^3$	$10e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.70	$515e^3$	$515e^3$	$284e^3$	$284e^3$	$1.00e^3$	$32.11e^3$	$5.66e^3$	$22e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.80	$816.81e^3$	$816.81e^3$	$451e^3$	$451e^3$	$1.00e^3$	$81.00e^3$	$9.00e^3$	$22e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.85	$1.12e^6$	$1.12e^6$	$617e^3$	$617e^3$	$1.00e^3$	$152.10e^3$	$12.33e^3$	$22e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.90	$1.72e^6$	$1.72e^6$	$949e^3$	$949e^3$	$1.00e^3$	$361.00e^3$	$19.00e^3$	$22e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.95	$3.54e^6$	$3.54e^6$	$1.96e^6$	$1.96e^6$	$1.00e^3$	$1.52e^6$	$39.00e^3$	$22e^{-6}$	$10e^{-6}$

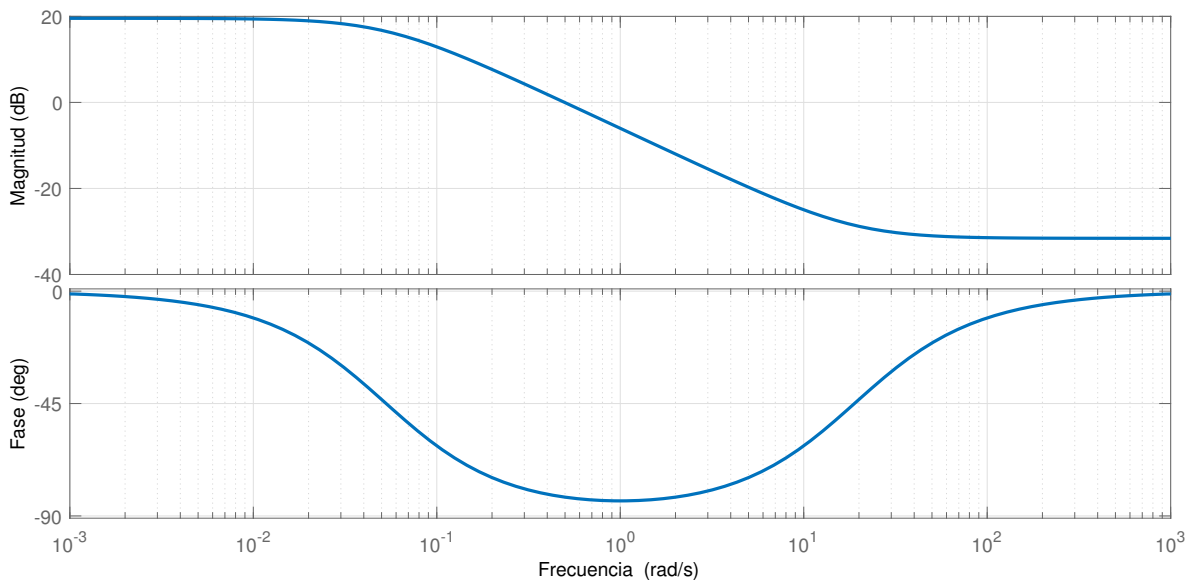


Figura 3.21: Diagrama de bode del integrador de orden fraccionario.

La Figura 3.21 muestra el comportamiento en el dominio de la frecuencia del circuito 3.20. Presenta una pérdida en la ganancia del ancho de banda de -6dB debido a las pérdidas de los filtros pasa bajas y pasa altas de Butterworth. La Figura 3.22 muestra el mapa de Polos y Ceros del circuito que aproxima el comportamiento del integrador fraccionario, presenta dos ceros y dos polos, un cero cancela un polo en la frecuencia de 0.0527rad/s , un polo se encuentra en la frecuencia de 19rad/s y un cero en la frecuencia de 0.0527rad/s .

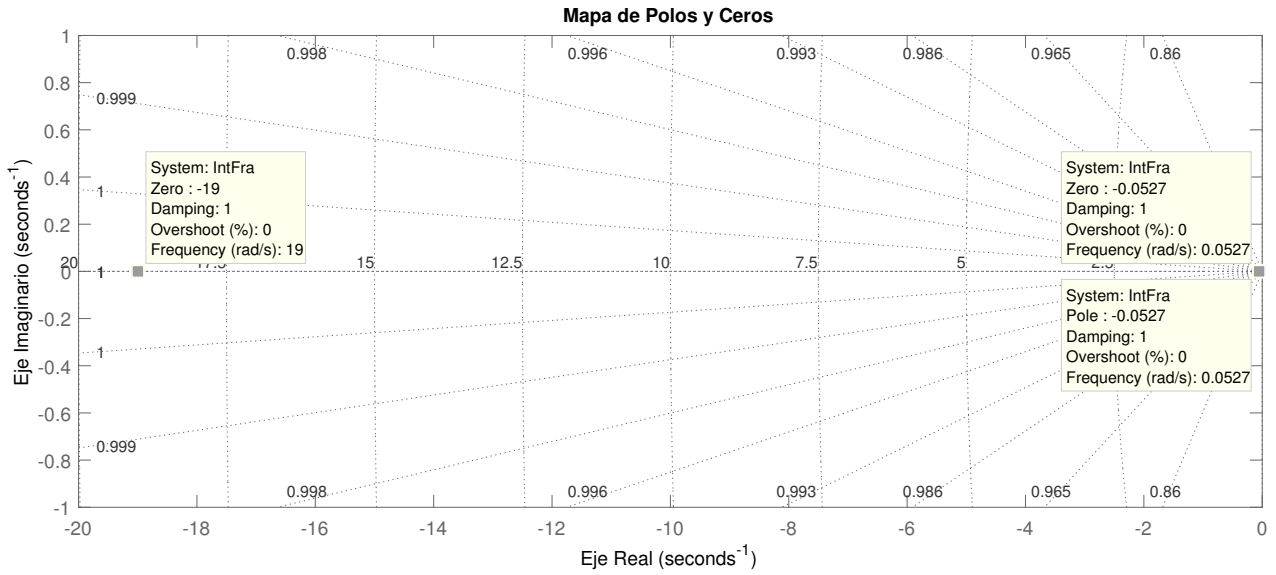


Figura 3.22: Polos y Ceros del integrador de orden fraccionario con filtros Butterworth.

La respuesta en frecuencia del integrador de orden fraccionario sintetizado mediante filtros Butterworth y presentado en la Figura 3.20, se muestra en la Figura 3.23.

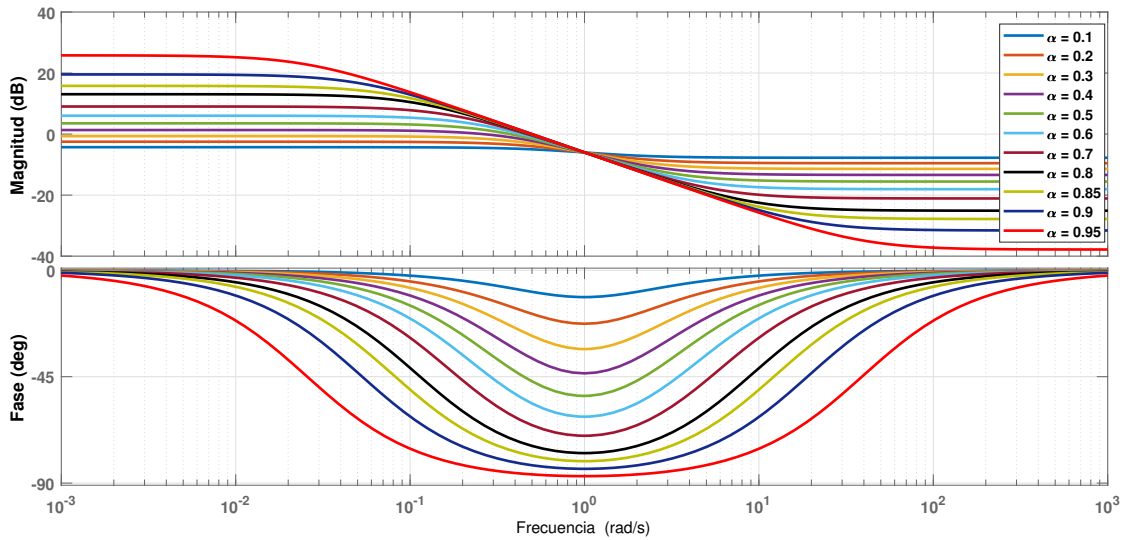


Figura 3.23: Respuesta en frecuencia del integrador de orden fraccionario.

3.5. Chebyshev Tipo 1

En el diseño del integrador de orden fraccionario con el método de Chebyshev Tipo 1, se realizó el mismo procedimiento que en el método de Butterworth, dividir la función de transferencia del integrador de la Ecuación 3.1 en un pasa bajas y un pasa altas de ganancia unitaria en la banda de paso.

3.5.1. Pasa Bajas Chebyshev Tipo 1

La función de transferencia del pasa bajas sin pérdidas se reescribe a continuación:

$$H_{pb}(s) = \frac{A}{As + 1} = G_{pb} \frac{1}{As + 1} \quad (3.29)$$

Donde G_{pb} es la ganancia del pasa bajas y es:

$$G_{pb} = A$$

Las especificaciones de diseño son las siguientes:

- $\omega_p = 0.0525$ rad/s
- $\omega_s = 1$ rad/s
- $A_p = 3$ dB
- $A_s = 25.6$ dB

Con el comando **cheb1ord** de MATLAB obtenemos el orden que necesita el filtro respecto a las especificaciones declaradas anteriormente. El comando **cheby1** nos proporciona el numerador y denominador de la función de transferencia que aproxima al filtro pasa bajas. La función de transferencia es la siguiente:

$$H_{pb}(s) = \frac{0.05262}{s + 0.05262} \quad (3.30)$$

El diagrama de Bode de la función de transferencia se muestra en la Figura 3.24, donde se puede observar que las especificaciones coinciden con la función de transferencia de primer orden obtenida.

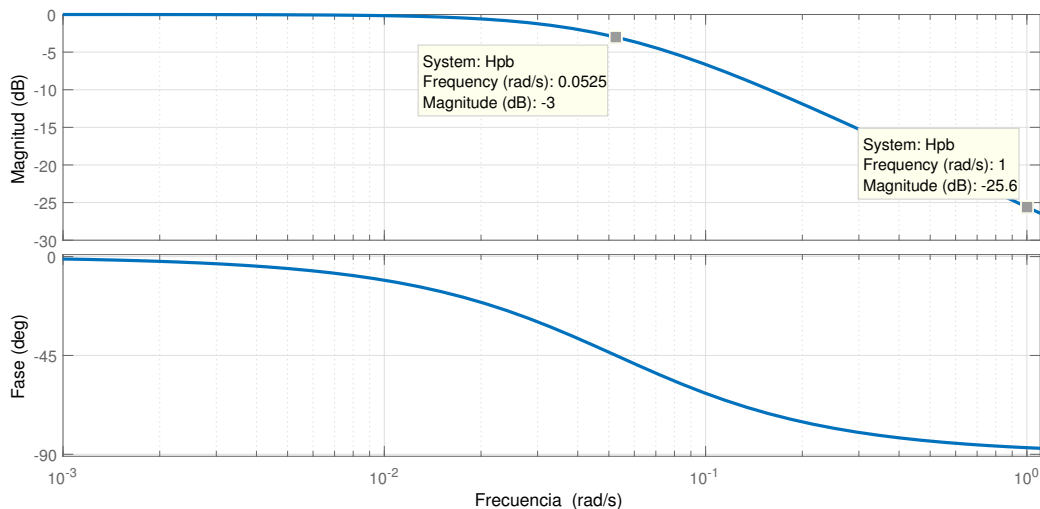


Figura 3.24: Diagrama de Bode del filtro pasa bajas Chebyshev Tipo 1.

Diseño del filtro Pasa Bajas Chebyshev Tipo 1

Para obtener los valores de los elementos de la red pasiva usaremos la función *CH_I_LADDER*, que es parte del toolbox. La función necesita los parámetros de diseño, el orden del filtro y las impedancias de fuente e impedancia de carga del circuito, *Leadder* puede ser 1 para una conexión del tipo *T* o 2 para una conexión del tipo π :

- $\omega_p = 0.0525 \text{ rad/s}$
- $\omega_s = 1 \text{ rad/s}$
- $A_p = 3\text{dB}$
- $A_s = 25.6\text{dB}$
- $n = 1$
- $R_s = 1\Omega$
- $R_L = 1\Omega$
- Ladder = 1 o 2

El circuito de tipo T se muestra en la Figura 3.25, mientras que en la Figura 3.26 se muestra el circuito del tipo π .

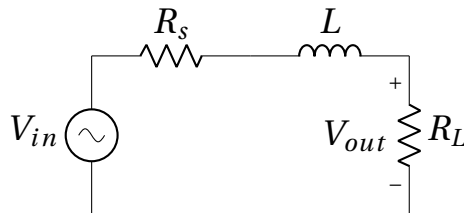


Figura 3.25: Circuito Pasa Bajas de Chebyshev Tipo 1 y topología tipo T .

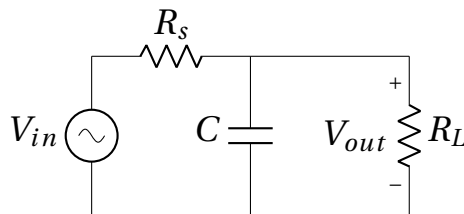


Figura 3.26: Circuito Pasa Bajas de Chebyshev Tipo 1 y topología tipo π .

Donde $R_L = R_s = 1\Omega$, $C = 38.005\text{F}$ y $L = 38.005\text{H}$. Elegimos el filtro tipo π por el uso del capacitor. Además, en la Figura 3.27 podemos observar el comportamiento en el dominio de la frecuencia de los dos tipos de filtro.

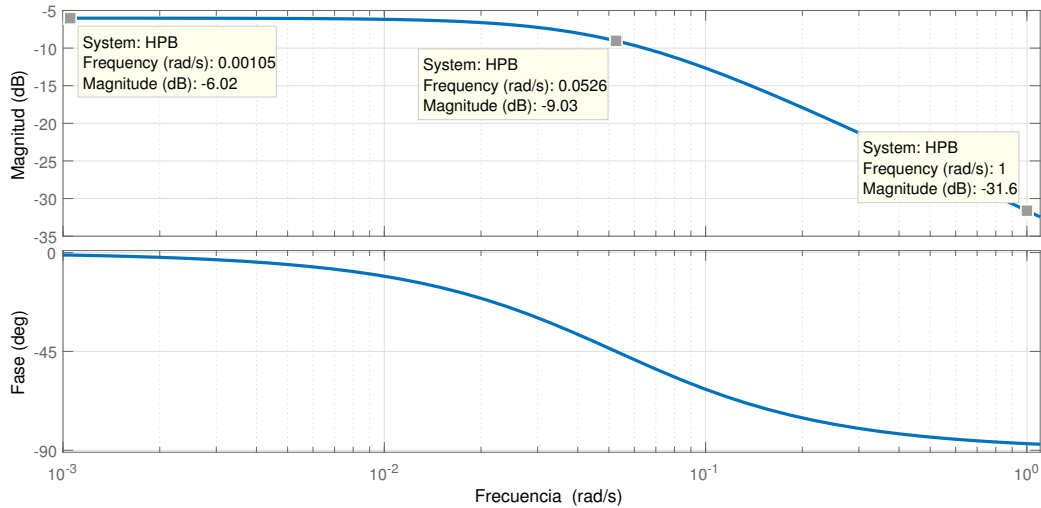


Figura 3.27: Diagrama de Bode del filtro pasa bajas del tipo T y π .

Tanto la frecuencia de corte como la ganancia de atenuación coinciden con las especificaciones del filtro Chebyshev Tipo 1.

Para facilitar el proceso de diseño del filtro pasa bajas, se presenta la Ecuación de diseño en la Ecuación (3.31) teniendo en cuenta que $R_S = R_L = R_{pb}$.

$$R_{pb} = 2 \frac{A}{C} \quad (3.31)$$

Donde A depende del orden fraccionario α del integrador fraccionario diseñado.

$$A = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \quad (3.32)$$

3.5.2. Pasa Altas Chebyshev Tipo 1

La función de transferencia del pasa altas sin pérdidas es la siguiente:

$$H_{pa}(s) = G_{pa} \frac{s}{s + \frac{1}{A}} \quad (3.33)$$

Donde G_{pa} es la ganancia del filtro pasa altas y es:

$$G_{pa} = \frac{1}{A}$$

Las especificaciones del filtro pasa bajas son:

- $\omega_p = 0.0525$ rad/s
- $\omega_s = 1$ rad/s
- $A_p = 3$ dB
- $A_s = 34.4$ dB

Con el comando **cheb1ord** de MATLAB obtenemos el orden del pasa bajas, mientras que con el comando **cheby1** obtenemos el numerador y denominador del filtro. Para obtener la transformación a pasa bajas - pasa altas se agrega la palabra reservada 'high' dentro del comando **cheby1**. La función de transferencia obtenida es la siguiente:

$$H_{pa}(s) = \frac{s}{s + 0.05248} \quad (3.34)$$

El diagrama de Bode de la función de transferencia se muestra en la Figura 3.28, donde se puede observar que las especificaciones coinciden con la función de transferencia obtenida.

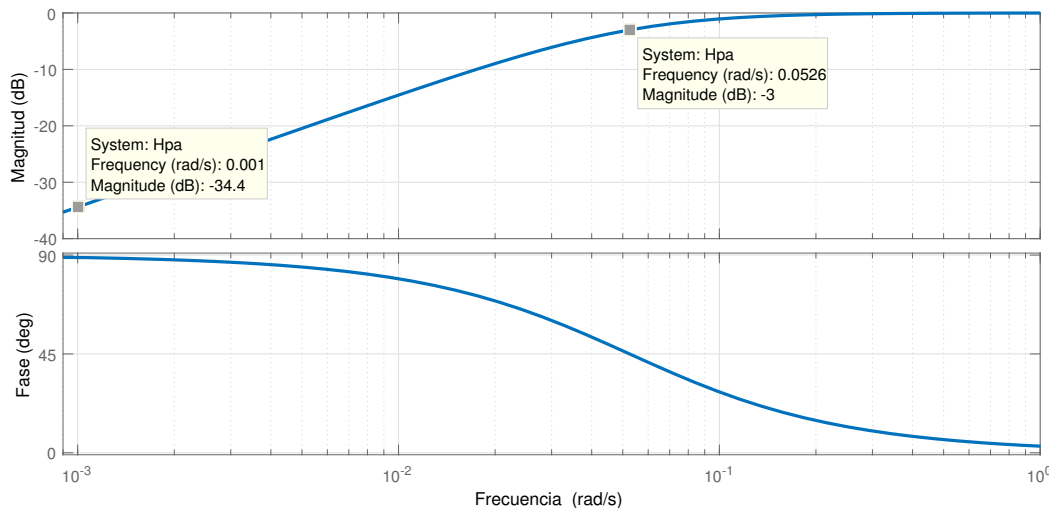


Figura 3.28: Diagrama de Bode del filtro pasa altas Chebyshev Tipo 1.

Diseño del filtro Pasa Altas Chebyshev Tipo 1

En el caso del pasa altas, primero se diseña el filtro pasa bajas con las especificaciones obtenidas antes de la conversión y usando la función *CH_I_LADDER*, después se realiza la transformación a pasa altas dividiendo capacitores e inductores de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{L_{pb}\omega_p^2} \\ L &= \frac{1}{C_{pb}\omega_p^2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Donde L_{pb} y C_{pb} son los elementos obtenidos con la función *CH_I_LADDER*, con valores de 37.86H y 37.86F respectivamente.

Las especificaciones del diseño son:

- $\omega_p = 0.0525 \text{ rad/s}$
- $\omega_s = 1 \text{ rad/s}$
- $A_p = 3\text{dB}$
- $A_s = 34.4\text{dB}$
- $n = 1$

- $R_s = 1\Omega$
- $R_L = 1\Omega$
- Ladder = 1 o 2

Las Figuras 3.29 y 3.30 muestran el circuito del filtro pasa altas Chibyshev Tipo 1, donde $C = 9.54F$ y $L = 9.54H$.

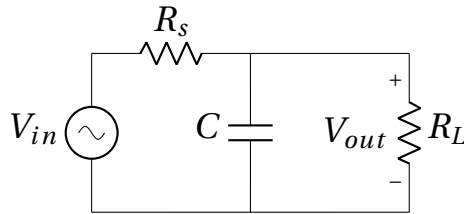


Figura 3.29: Circuito Pasa Bajas de Chebyshev Tipo 1 y topología tipo T .

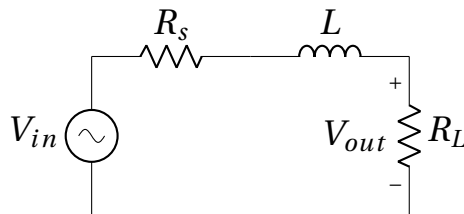


Figura 3.30: Circuito Pasa Bajas de Chebyshev Tipo 1 y topología tipo π .

En la Figura 3.31 se muestra el comportamiento en el dominio de la frecuencia del filtro pasa altas. Se observa que hay una atenuación esperada de $-6dB$, característica en los filtros pasivos. Además, la frecuencia de corte coincide respecto a las especificaciones de diseño, la amplitud en la banda de rechazo disminuyó a $-40.4dB$ debido a los $-6dB$ de de atenuación del sistema.

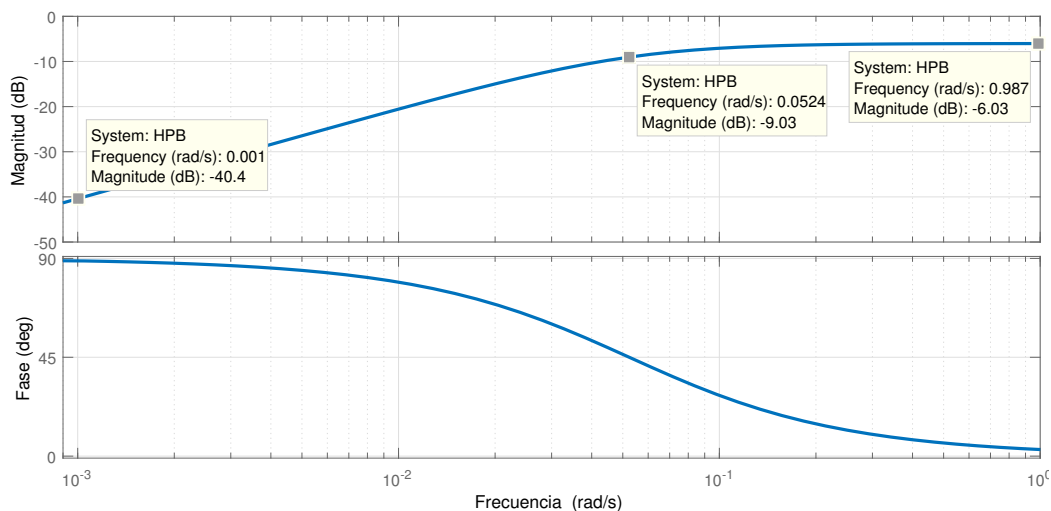


Figura 3.31: Diagrama de Bode del filtro pasa altas del tipo T y π .

Para facilitar el proceso de diseño del filtro pasa altas, se presenta la Ecuación de diseño en la Ecuación (3.36) teniendo en cuenta que $R_s = R_L = R_{pa}$.

$$R_{pa} = \frac{1}{2} \frac{A}{C} \tag{3.36}$$

Donde A depende del orden fraccionario α del integrador fraccionario diseñado.

$$A = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \tag{3.37}$$

3.5.3. Integrador de Orden Fraccionario

El integrador de orden fraccionario se compone por la suma de dos filtros diseñados, pasa bajas y pasa altas. Cada filtro es amplificado por su ganancia correspondiente, en el caso del integrador de orden fraccionario 0.9, la ganancia del filtro pasa bajas es 19 mientras que la ganancia del filtro pasa altas es 1/19. El integrador de orden fraccionario se muestra en la Figura 3.32, el cual se compone por el bloque sumador inversor y al final un inversor amplificador de ganancia unitaria para no modificar la fase del integrador fraccionario.

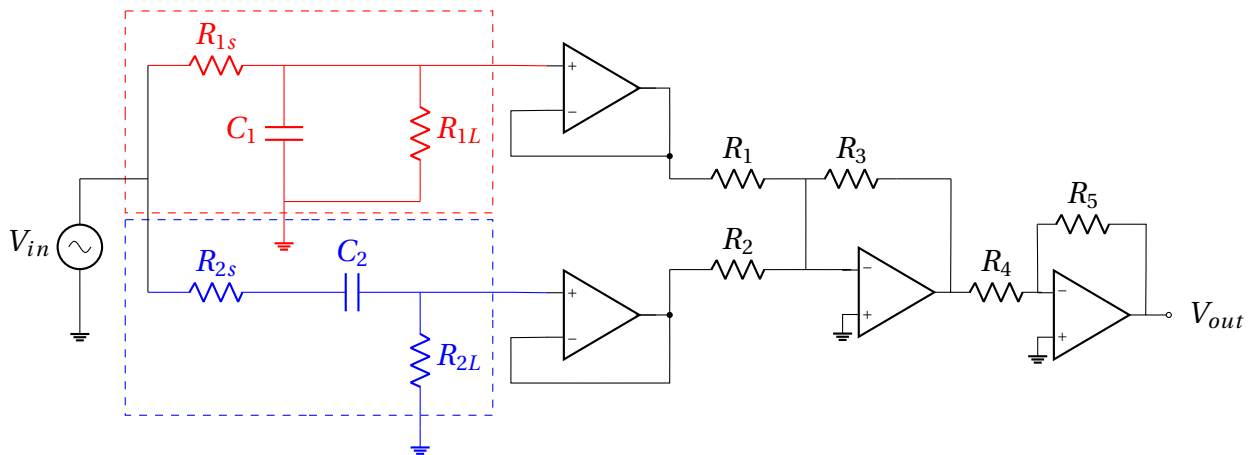


Figura 3.32: Circuito del integrador de orden fraccionario

Los valores de los elementos del filtro fraccionario de orden 0.9 son los siguientes: El circuito incluye el filtro pasa bajas (rojo) y pasa altas (azul) diseñados con Butterworth. Además, un amplificador sumador inversor que suma las respuestas de ambos circuitos. Las resistencias R_1 , R_2 y R_3 se seleccionan de tal forma que la ganancia en la entrada del filtro pasa bajas sea G_{pb} (Ecu. 3.5.1) y en la entrada del filtro pasa altas sea G_{pa} (Ecu. 3.5.2). Esto se debe a que los filtros de Chebyshev tienen una ganancia unitaria. La Tabla 3.3 muestra los valores de ganancia para el filtro pasa bajas y el filtro pasa altas.

Tabla 3.3: Valores de ganancia.

α	R_1 (Ω)	R_2 (Ω)	R_3 (Ω)	G_{pb}	G_{pa}
0.10	$1e^3$	$1.49e^3$	$1.22e^3$	1.22	0.81
0.20	$1e^3$	$2.25e^3$	$1.50e^3$	1.50	0.66
0.30	$1e^3$	$3.44e^3$	$1.85e^3$	1.85	0.53
0.40	$1e^3$	$5.44e^3$	$2.33e^3$	2.33	0.42
0.50	$1e^3$	$9.00e^3$	$3.00e^3$	3.00	0.33
0.60	$1e^3$	$16.00e^3$	$4.00e^3$	4.00	0.25
0.70	$1e^3$	$32.11e^3$	$5.66e^3$	5.66	0.17
0.80	$1e^3$	$81.00e^3$	$9.00e^3$	9.00	0.11
0.85	$1e^3$	$152.10e^3$	$12.33e^3$	12.33	0.08
0.90	$1e^3$	$361.00e^3$	$19.00e^3$	19.00	0.05
0.95	$1e^3$	$1.52e^6$	$39.00e^3$	39.00	0.02

El circuito también necesita un amplificador inversor para eliminar la respuesta inversa del amplificador sumador y de esta forma evitar modificar la respuesta del integrador de orden fraccionario. De esta forma, las resistencias R_4 es igual a la resistencia R_5 .

Se realizó un escalamiento en impedancia del filtro pasa bajas y del filtro pasa altas por separado, dado que los capacitores no se encuentran de valores comerciales. La Tabla 3.4 muestra los valores del circuito de la figura 3.32.

Tabla 3.4: Valores comerciales por escalamiento en impedancia.

α	$R_{1s} (\Omega)$	$R_{1L} (\Omega)$	$R_{2s} (\Omega)$	$R_{2L} (\Omega)$	$R_1 (\Omega)$	$R_2 (\Omega)$	$R_3 (\Omega)$	$C_1 (F)$	$C_2 (F)$
0.10	$244e^3$	$244e^3$	$610e^3$	$610e^3$	$1.00e^3$	$1.49e^3$	$1.22e^3$	$10e^{-6}$	$1e^{-6}$
0.20	$300e^3$	$300e^3$	$750e^3$	$750e^3$	$1.00e^3$	$2.25e^3$	$1.50e^3$	$10e^{-6}$	$1e^{-6}$
0.30	$371e^3$	$371e^3$	$930e^3$	$930e^3$	$1.00e^3$	$3.44e^3$	$1.85e^3$	$10e^{-6}$	$1e^{-6}$
0.40	$467e^3$	$467e^3$	$117e^3$	$117e^3$	$1.00e^3$	$5.44e^3$	$2.33e^3$	$10e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.50	$604e^3$	$604e^3$	$150e^3$	$150e^3$	$1.00e^3$	$9.00e^3$	$3.00e^3$	$10e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.60	$801e^3$	$801e^3$	$201e^3$	$201e^3$	$1.00e^3$	$16.00e^3$	$4.00e^3$	$10e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.70	$515e^3$	$515e^3$	$284e^3$	$284e^3$	$1.00e^3$	$32.11e^3$	$5.66e^3$	$22e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.80	$816.81e^3$	$816.81e^3$	$451e^3$	$451e^3$	$1.00e^3$	$81.00e^3$	$9.00e^3$	$22e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.85	$1.12e^6$	$1.12e^6$	$617e^3$	$617e^3$	$1.00e^3$	$152.10e^3$	$12.33e^3$	$22e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.90	$1.72e^6$	$1.72e^6$	$949e^3$	$949e^3$	$1.00e^3$	$361.00e^3$	$19.00e^3$	$22e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.95	$3.54e^6$	$3.54e^6$	$1.96e^6$	$1.96e^6$	$1.00e^3$	$1.52e^6$	$39.00e^3$	$22e^{-6}$	$10e^{-6}$

En la Figura 3.33 se muestra el comportamiento en el dominio de la frecuencia del integrador de orden fraccionario diseñado mediante el método de Chebyshev Tipo 1. Se muestra que presenta una disminución en la ganancia máxima producto de los efectos de los elementos en los filtros pasa bajas y pasa altas. Además presenta una frecuencia de corte aproximadamente en 8.4mHz.

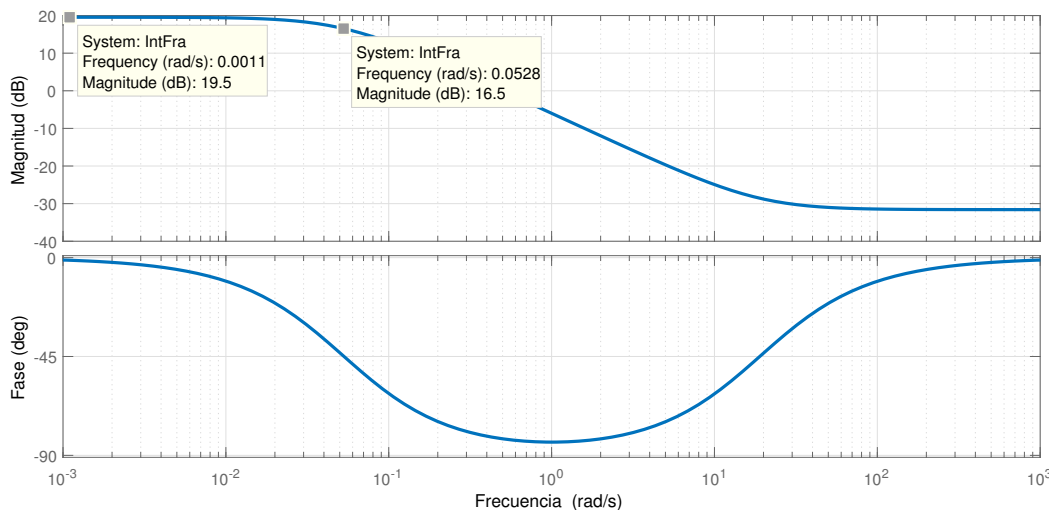


Figura 3.33: Diagrama de Bode del integrador fraccionario con $\alpha = 0.9$ y con Chebyshev Tipo 1.

La Figura 3.34 muestra un *cero* sobre el eje real a -19, mientras que en la Figura 3.35 se muestra un acercamiento y se observa que un *polo* se cancela con un *cero* sobre el eje real a -0.0524, pero un *polo* se mantiene sobre el eje real a -0.0528.

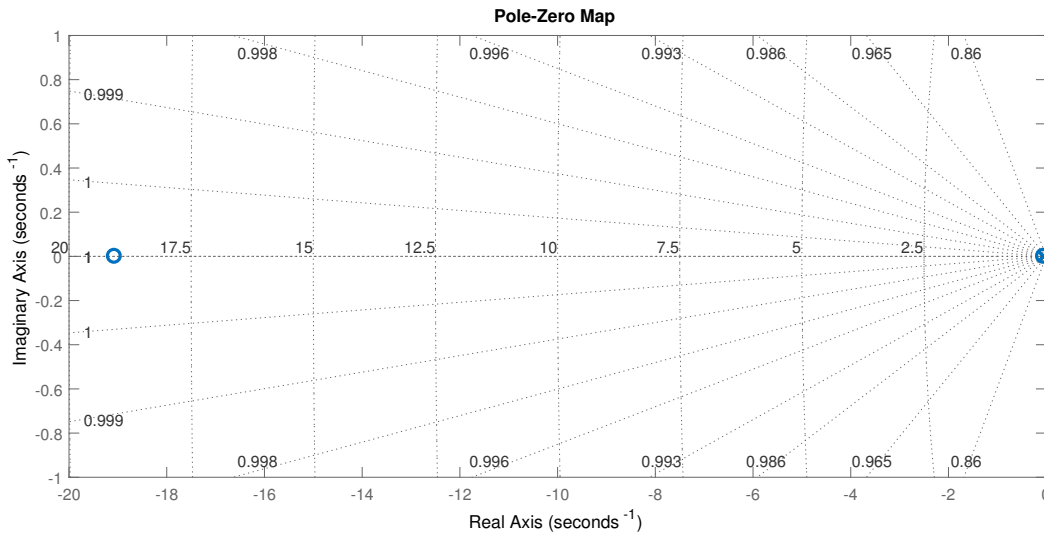


Figura 3.34: Polos y Ceros del integrador de orden fraccionario con filtros Chebyshev Tipo 1.

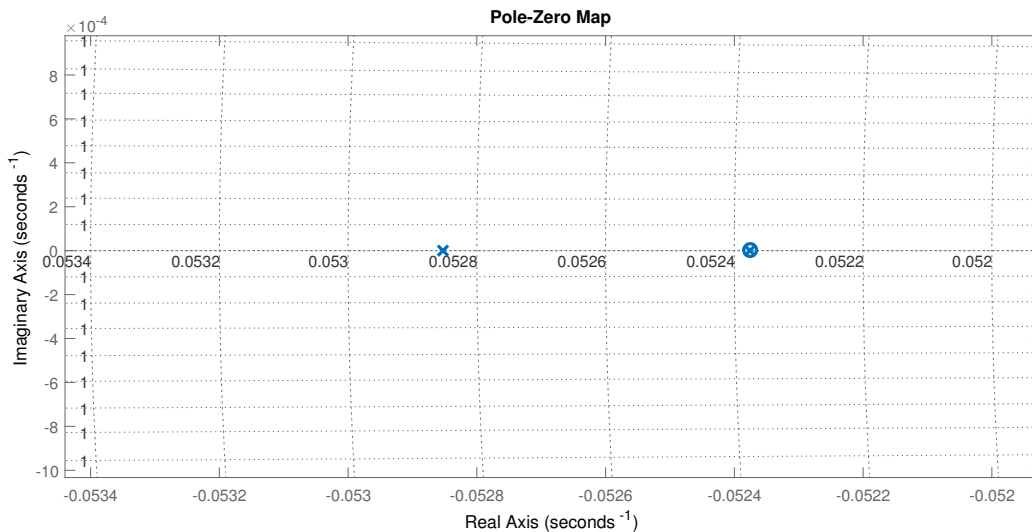


Figura 3.35: Acercamiento a Polos y Ceros del integrador de orden fraccionario con filtros Chebyshev Tipo 1.

3.6. Grafos de Señal

En grafos de señal se representa la función de transferencia en términos de $\frac{1}{s}$, esto se debe a que es preferible utilizar integradores que diferenciadores para la realización en circuitos. La función de transferencia es la siguiente:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{A} + \left(\frac{1}{s}\right)}{1 + \frac{1}{A} \left(\frac{1}{s}\right)} \quad (3.38)$$

Se utiliza la forma de SFG (Grafo de flujo de señal) de Mason, la razón de utilizar este grafo es por dos características importantes: todos los loops se tocan entre sí y la retroalimentación hacia

adelante desde el nodo de entrada hasta el nodo de salida toca todos los bucles. La representación del filtro en forma de la Ecuación ganancias de Mason es:

$$T(s) = \frac{\frac{1}{A} + \left(\frac{1}{s}\right)}{1 - \frac{1}{A} \left(\frac{1}{s}\right)} \quad (3.39)$$

En la Figura 3.36 se muestra el grafo de señal de la función de transferencia $T(s)$.

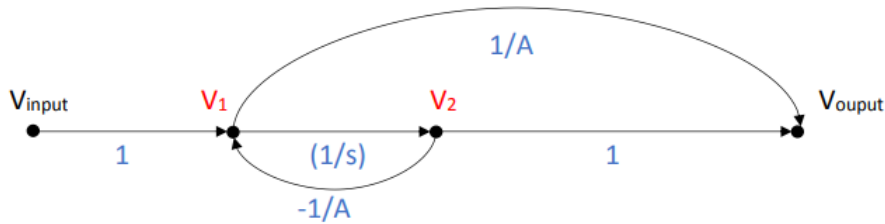


Figura 3.36: Grafo de señal del integrador de orden fraccionario.

El integrador se representa por un nodo de corriente mediante un OTA o una fuente de corriente controlada por voltaje, y un nodo de voltaje obtenido por medio de un capacitor que tiene la propiedad de integrar la señal de corriente. La Figura 3.37 muestra el nodo de corriente considerado para el integrador.

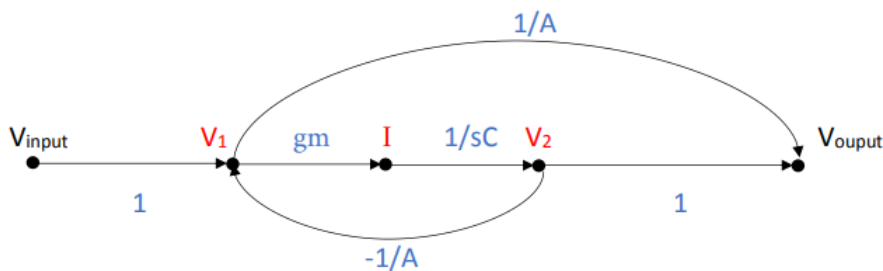


Figura 3.37: Grafo de señal del integrador de orden fraccionario.

El integrador se reemplaza por un OTA que presenta a su salida la resta entre los nodos V_+ y V_- y amplificada por una transconductancia gm . Se dispone de un capacitor para obtener el voltaje del nodo V_2 y la integración de la corriente. Tanto el nodo V_1 como la salida del integrador V_{out} se representan como bloques de suma, mientras que la ganancia de las señales de retroalimentación se representan por bloques de ganancia.

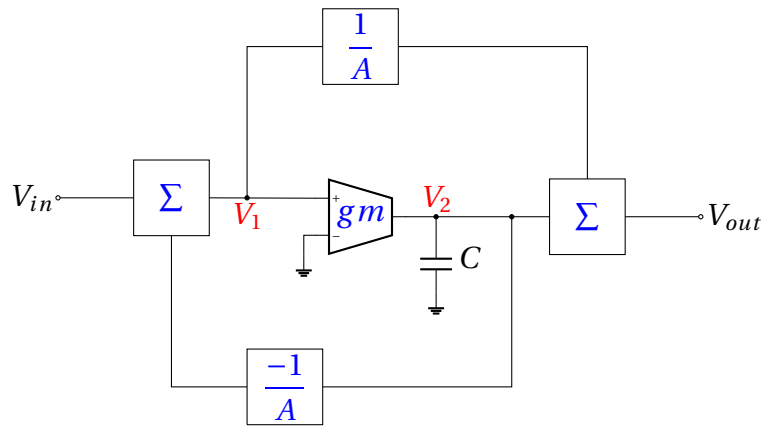


Figura 3.38: Diagrama de bloques del integrador fraccionario.

La función de transferencia del diagrama de bloques del integrador fraccionario de la Figura 3.38 es la siguiente:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{s + \frac{A \cdot gm}{C}}{A \cdot s + \frac{gm}{C}} \quad (3.40)$$

A partir de esta función de transferencia obtenemos la primera Ecuación de diseño.

$$C = gm \quad (3.41)$$

El capacitor de salida debe ser igual a la ganancia de transconductancia para respetar la función de transferencia del integrador fraccionario.

El bloque de la derecha realiza una suma, el voltaje de salida V_1 es el siguiente:

$$V_1 = V_{in} - \left(\frac{1}{A}\right) V_2 \quad (3.42)$$

La suma la representamos mediante un nodo y las corrientes que se suman dependerán del voltaje de entrada V_{in} y del voltaje V_2 , mientras que el voltaje de salida V_1 se producirá mediante un resistor.

La Figura 3.39 muestra el circuito que representa al bloque de suma en la entrada del integrador fraccionario según el diagrama a bloques diseñado en la Figura 3.38.

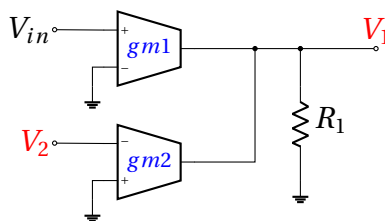


Figura 3.39: Circuito sumador de voltajes V_{in} y V_2 .

El voltaje de salida del circuito de la Figura 3.39 es el siguiente:

$$V_1 = V_{in} (R_1 \cdot gm1) - V_2 (R_1 \cdot gm2) \quad (3.43)$$

El bloque de ganancia $\left(\frac{-1}{A}\right)$ se incluye en las ecuaciones de diseño y obtenemos las siguientes igualdades:

$$R_1 \cdot gm1 = 1 \tag{3.44}$$

$$R_1 \cdot gm2 = \frac{1}{A}$$

Seguimos el mismo proceso del bloque de suma en la entrada con el bloque de suma de la salida, con diferencia de que los dos voltajes V_1 y V_2 se conectan en la entrada no inversora de cada OTA. La Figura 3.40 muestra el circuito que corresponde al bloque de suma a la salida del diagrama de bloques de la Figura 3.38.

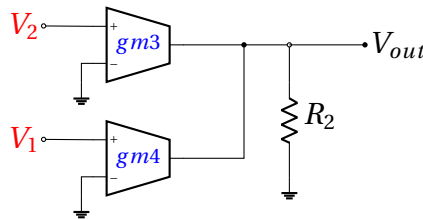


Figura 3.40: Circuito sumador de voltajes V_1 y V_2 .

El bloque de ganancia $\left(\frac{1}{A}\right)$ se agrega a las ecuaciones de diseño del sumador de la Figura 3.40. El voltaje de salida es el siguiente:

$$V_{out} = V_2 (R_2 \cdot gm3) + V_1 (R_2 \cdot gm4) \tag{3.45}$$

Las ecuaciones de diseño son:

$$R_2 \cdot gm3 = 1 \tag{3.46}$$

$$R_2 \cdot gm4 = \frac{1}{A} \tag{3.47}$$

Finalmente el circuito del integrador de orden fraccionario obtenido por el método de grafos de señal se muestra en la Figura 3.41.

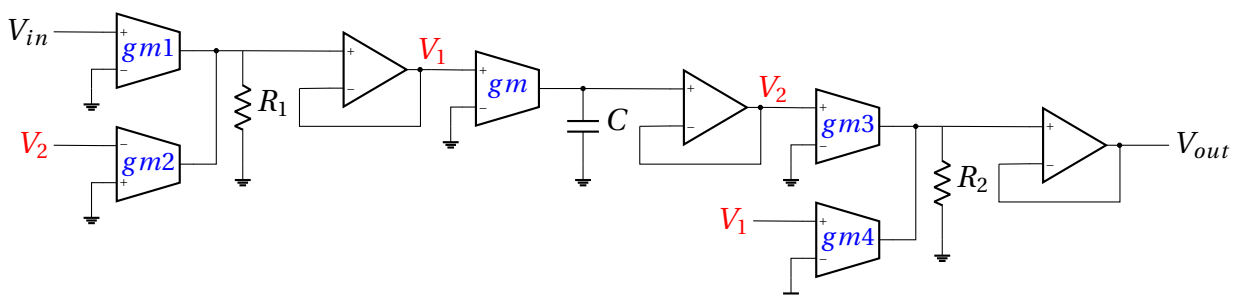


Figura 3.41: Integrador fraccionario por el método de Grafo de señal.

Los siguientes resultados corresponde a la simulación en SPICE del circuito de la Figura 3.41 con ordenes de 0.9 y 0.95 para el integrador de orden fraccionario.

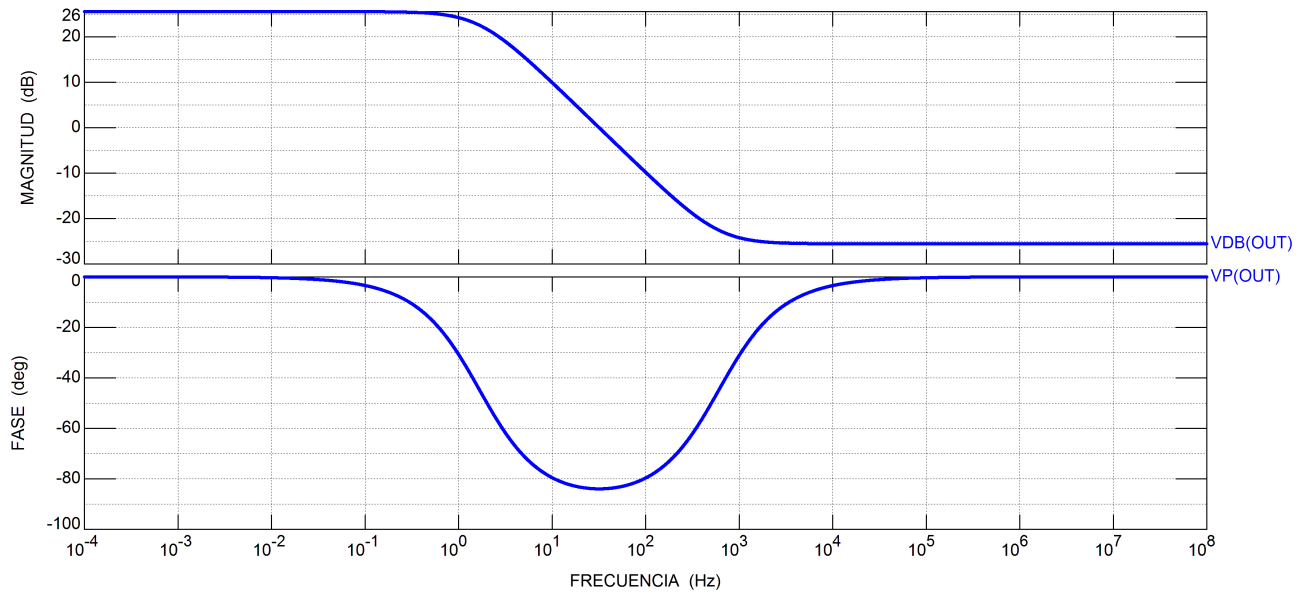


Figura 3.42: Simulación del integrador fraccionario con $\alpha = 0.90$

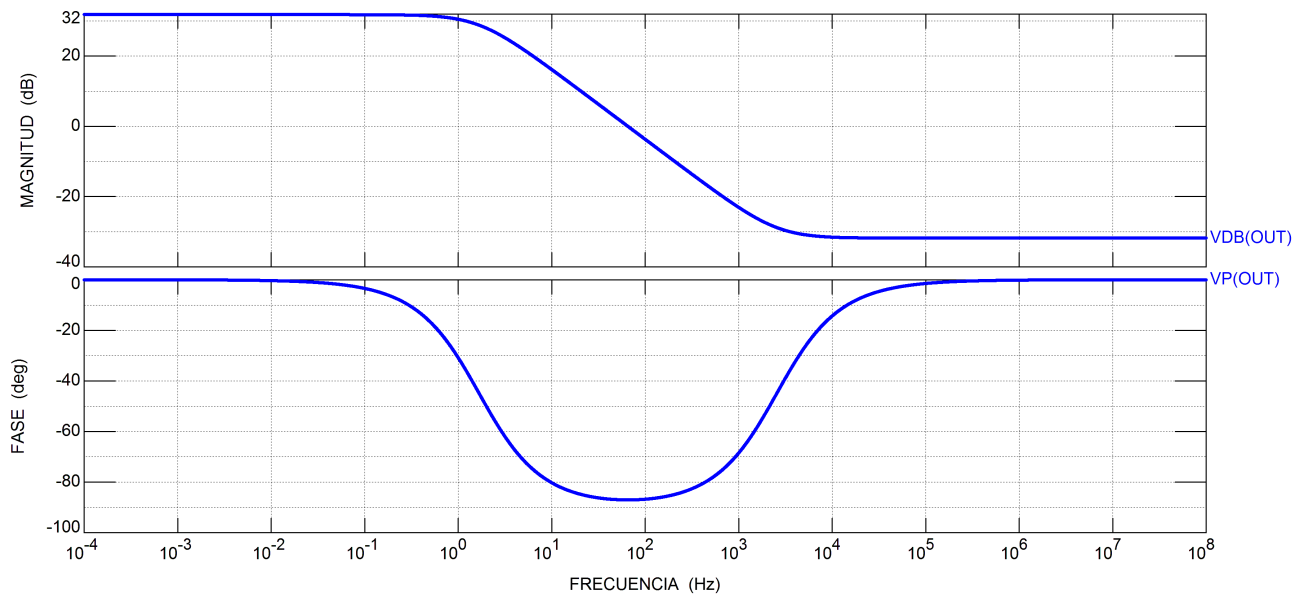


Figura 3.43: Simulación del integrador fraccionario con $\alpha = 0.95$

3.7. Análisis de Sensitividad

Existen criterios que ayudan a elegir uno de entre una variedad de redes que aproximan a una misma función de transferencia, los criterios más comunes son por ejemplo, la economía o lo caro que sería construir un circuito, otro criterio de decisión sería la cantidad de inductores de un circuito, además de ser un dispositivo caro es difícil de calibrar. La decisión es completamente subjetiva, es decir, pudiera ser que la economía no es un factor a considerar pero si lo es el tamaño del circuito, además la experiencia de la compañía es la que determina su preferencia en la selección de varias redes.

Otro factor que determina cuales circuitos usar es la *sensitividad*. Al sintetizar una red que realiza una función de transferencia los valores de los componentes no son valores precisos. En la práctica, los componentes varían de su valor nominal debido a su inexactitud en su fabricación, también por factores ambientales como temperatura y humedad, y que ocasionan que exista una variación en su valor nominal. Estas desviaciones alteran la eficiencia de la red.

Existen dos formas para disminuir estos efectos. La primera consiste en conseguir elementos altamente precisos, lo que hace costoso la construcción del circuito. Otra forma de reducir estos efectos es mediante un análisis que permita identificar a los elementos cuyas pequeñas variaciones afecten el rendimiento de nuestro circuito, y enfocarse únicamente en la precisión de éstos elementos.

La sensitividad se define como la medida de rendimiento y con respecto a un valor de un elemento x de la red. [25]

$$S_x^y = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (3.48)$$

El significado de la definición 3.48 es que para un pequeño cambio en x , da aproximadamente la razón del cambio por unidad o porcentaje al cambio en y al cambio en x por unidad o porcentaje.

3.7.1. Foster y Cauer

Los resultados del análisis de sensitividad del integrador fraccionario obtenido por el método de Foster y Cauer se muestran en la Tabla 3.5.

Tabla 3.5: Sensitividad del integrador fraccionario por Foster y Cauer.

α	R_1 (V/%)	R_2 (V/%)
0.10	$8.182e^{-3}$	$4.04e^{-3}$
0.20	$6.667e^{-3}$	$8.333e^{-3}$
0.30	$5.385e^{-3}$	$13.19e^{-3}$
0.40	$4.286e^{-3}$	$19.05e^{-3}$
0.50	$3.333e^{-3}$	$26.67e^{-3}$
0.60	$2.5e^{-3}$	$37.50e^{-3}$
0.70	$1.765e^{-3}$	$54.90e^{-3}$
0.80	$1.111e^{-3}$	$88.89e^{-3}$
0.85	$0.811e^{-3}$	$122e^{-3}$
0.90	$0.526e^{-3}$	$189.5e^{-3}$
0.95	$0.256e^{-3}$	$389.7e^{-3}$

De acuerdo con los resultados, cuando el orden del integrador fraccionario incrementa el re-

sistor R_2 se hace más sensible, que es el caso contrario al resistor R_1 .

Para los ordenes $\alpha = 0.90$ y 0.95 , la sensibilidad en R_2 y R_1 significa los siguiente: con el cambio de 1% en el valor del resistor R_2 el voltaje de salida cambiará en $189.5mV$, mientras que para el resistor R_1 el voltaje de salida cambiará en $0.526mV$ para el orden de 0.90 . Cuando el orden es 0.95 el voltaje de salida cambia en $0.256mV$ y $389.7mV$ para R_1 y R_2 respectivamente.

3.7.2. Butterworth y Chebyshev Tipo I

Los resultados del análisis de sensibilidad del integrador fraccionario para ordenes desde 0.1 hasta 0.95 , se muestran en la Tabla 3.6.

Tabla 3.6: Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario por Butterworth y Chebyshev Tipo 1.

α	R_{1s} (V/%)	R_{1L} (V/%)	R_{2s} (V/%)	R_{2L} (V/%)	R_1 (V/%)	R_2 (V/%)	R_3 (V/%)	R_4 (V/%)	R_5 (V/%)
0.10	$0.757e^{-3}$	$-0.756e^{-3}$	0	$-0.205e^{-6}$	$1.054e^{-3}$	$-0.306e^{-3}$	$-0.747e^{-3}$	$-1.432e^{-6}$	$1.432e^{-6}$
0.20	$0.9e^{-3}$	$-0.899e^{-3}$	0	$-0.128e^{-6}$	$1.151e^{-3}$	$-0.288e^{-3}$	$-0.863e^{-3}$	$-1.717e^{-6}$	$1.717e^{-6}$
0.30	$1.057e^{-3}$	$-1.056e^{-3}$	0	$-75.12e^{-9}$	$1.219e^{-3}$	$-0.259e^{-3}$	$-0.960e^{-3}$	$-2.040e^{-6}$	$2.040e^{-6}$
0.40	$1.236e^{-3}$	$-1.235e^{-3}$	0	$-40.88e^{-9}$	$1.260e^{-3}$	$-0.222e^{-3}$	$-1.038e^{-3}$	$-2.352e^{-6}$	$2.352e^{-6}$
0.50	$1.435e^{-3}$	$-1.434e^{-3}$	0	$-19.92e^{-9}$	$1.255e^{-3}$	$-0.179e^{-3}$	$-1.076e^{-3}$	$-2.679e^{-6}$	$2.679e^{-6}$
0.60	$1.649e^{-3}$	$-1.649e^{-3}$	0	$-8.241e^{-9}$	$1.189e^{-3}$	$-0.1318e^{-3}$	$-1.058e^{-3}$	$-3.035e^{-6}$	$3.036e^{-6}$
0.70	$1.881e^{-3}$	$-1.881e^{-3}$	0	$-2.633e^{-9}$	$1.047e^{-3}$	$-84.56e^{-6}$	$-0.963e^{-3}$	$-3.425e^{-6}$	$3.425e^{-6}$
0.80	$2.129e^{-3}$	$-2.129e^{-3}$	0	$-0.5252e^{-9}$	$0.813e^{-3}$	$-42.54e^{-6}$	$-0.771e^{-3}$	$-3.849e^{-6}$	$3.849e^{-6}$
0.85	$2.259e^{-3}$	$-2.259e^{-3}$	0	$-0.1669e^{-9}$	$0.657e^{-3}$	$-25.39e^{-6}$	$-0.631e^{-3}$	$-4.075e^{-6}$	$4.075e^{-6}$
0.90	$2.392e^{-3}$	$-2.392e^{-3}$	0	$-33.12e^{-12}$	$0.470e^{-3}$	$-11.96e^{-6}$	$-0.458e^{-3}$	$-4.310e^{-6}$	$4.311e^{-6}$
0.95	$2.529e^{-3}$	$-2.529e^{-3}$	0	$-2.072e^{-12}$	$0.252e^{-3}$	$-3.156e^{-6}$	$-0.249e^{-3}$	$-4.555e^{-6}$	$4.555e^{-6}$

El resistor R_{1s} se muestra más sensible a pequeños cambios cuando el orden del integrador aumenta. El resistor R_{1L} aumenta la sensibilidad conforme aumenta también el orden del integrador. El resistor R_{2s} no tiene sensibilidad. El resistor R_{2L} presenta una sensibilidad baja para el orden 0.1 y sigue disminuyendo para ordenes más altos. La sensibilidad del resistor R_1 disminuye conforme aumenta el orden del integrador fraccionario, al igual que los resistores R_2 , R_4 y R_5 . El resistor R_3 presenta una sensibilidad mayor en los ordenes 0.4 , 0.5 y 0.6 , y disminuye la sensibilidad en los demás órdenes.

Los resistores más sensibles de la red son R_{1s} y R_{1L} . Para el orden 0.90 , el voltaje de salida del integrador fraccionario aumentará en $2.392mV$ y disminuirá en $-2.529mV$ con cada aumento del 1% en las resistencias R_{1s} y R_{1L} respectivamente. En el caso del orden de 0.95 , el voltaje de salida aumenta en $2.529mV$ y disminuye en $-2.529mV$ por cada 1% de cambio en los resistores R_{1s} y R_{1L} respectivamente.

3.7.3. Grafo de Señal

Los resultados del análisis de sensibilidad se presentan en la Tabla 3.7.

Tabla 3.7: Resultados de sensibilidad del integrador fraccionario por Grafos de Señal.

α	R_1 (V/%)	R_2 (V/%)
0.10	$-1.65e^{-18}$	$12.22e^{-3}$
0.20	0	$15e^{-3}$
0.30	$-2.51e^{-18}$	$18.57e^{-3}$
0.40	0	$23.33e^{-3}$
0.50	$-4.06e^{-18}$	$30e^{-3}$
0.60	0	$40e^{-3}$
0.70	0	$56.67e^{-3}$
0.80	$-12.20e^{-18}$	$90e^{-3}$
0.85	$-16.71e^{-18}$	$123.3e^{-3}$
0.90	$-25.75e^{-18}$	$190e^{-3}$
0.95	$-52.85e^{-18}$	$390e^{-3}$

Los resultados indican que para el resistor R_1 presenta una sensibilidad baja llegando a ser cero para los ordenes α de 0.2, 0.4, 0.6 y 0.7. El resistor R_2 presenta una sensibilidad alta y que tiende a aumentar conforme aumenta el orden del integrador fraccionario. Para el orden de 0.90, el voltaje de salida aumentará en $190mV$ con cada 1% en el cambio del resistor R_2 . En el caso del orden de 0.95, el voltaje de salida aumentará en $390mV$ con cada 1% en el cambio de la resistencia R_2 .

3.8. Análisis de Monte Carlo

El análisis de Monte Carlo es un análisis estadístico que calcula la respuesta del circuito cuando los parámetros de cada dispositivo son variados de forma aleatoria dentro de los límites de tolerancia y mediante una distribución estadística específica. Es común simular circuitos con valores de componentes fijos, sin embargo, los componentes discretos reales como resistores, inductores y capacitores tienen una tolerancia específica, por ejemplo, un resistor de $10k\Omega \pm 1\%$ se puede esperar una resistencia de entre $9.9k\Omega$ y $10.1k\Omega$. Con el efecto de tolerancia en conjunto de los demás componentes pueden desviar la respuesta esperada de un circuito, especialmente en el diseño de filtros donde la tolerancia podría resultar en una desviación en la respuesta del filtro.

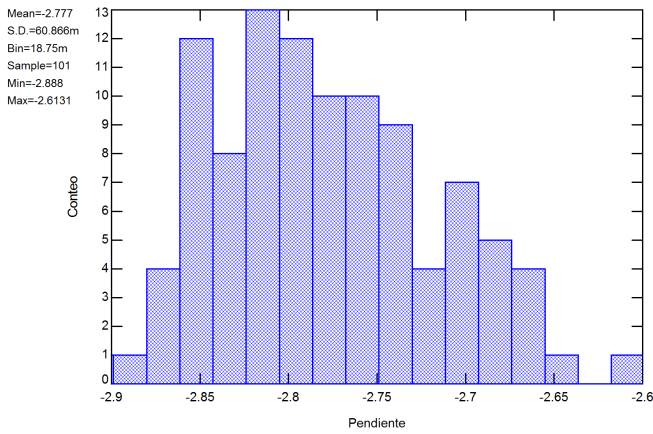
El análisis de Monte Carlo proporciona datos estadísticos que predicen el efecto de aleatoriedad de los parámetros del modelo o valores de componentes, los valores generados siguen una distribución estadística definida. El análisis del circuito se repite un número de veces específica, con cada repetición del análisis de Monte Carlo se generan un nuevo conjunto aleatorio de valores. Entre mayor número de repeticiones, mayor la posibilidad de que cada componente utilice cada valor dentro de su tolerancia. Común mente se realizan de entre 100 a 1,000 repeticiones para cubrir la mayor parte de los valores dentro de su tolerancia. [26]

El análisis de Monte Carlo predice la robustez y el rendimiento de un circuito variando los valores de componentes o parámetros dentro de un rango de tolerancia.

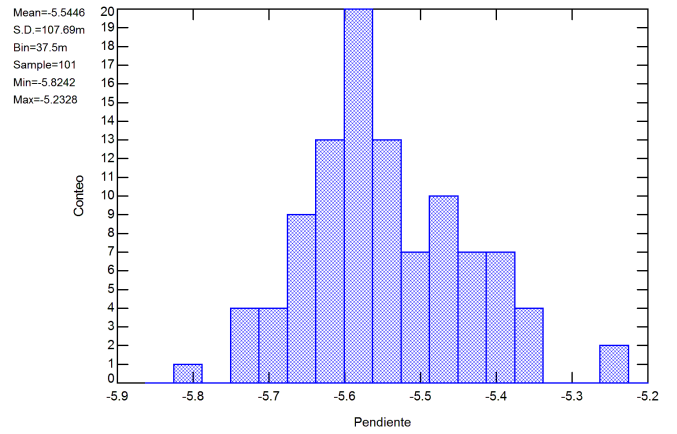
Se realizó el análisis de Monte Carlo en simulación SPICE con 101 casos, con una distribución de Gauss de -3σ hasta 3σ . Se le aplicó el análisis a integradores fraccionarios de orden 0.1 hasta 0.95. con rangos de tolerancia de resistores del peor de los casos del 5% y para capacitores del 20%.

3.8.1. Foster y Cauer

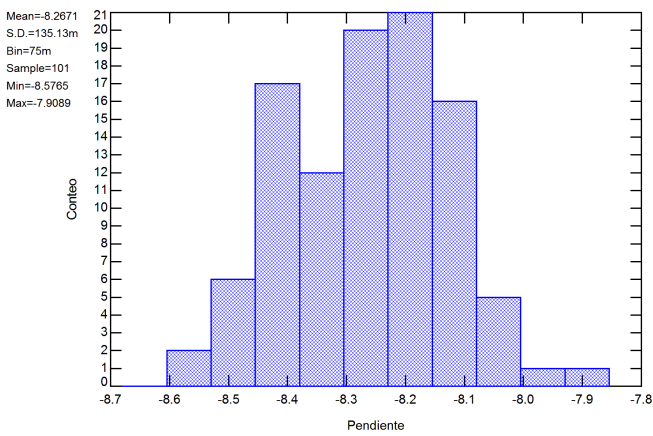
La Figura 3.44 muestra los histogramas obtenidos en el análisis de Monte Carlo.



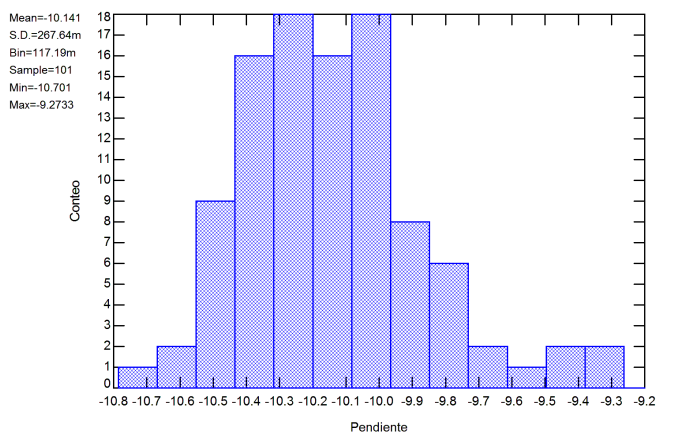
(a) $\alpha = 0.1$



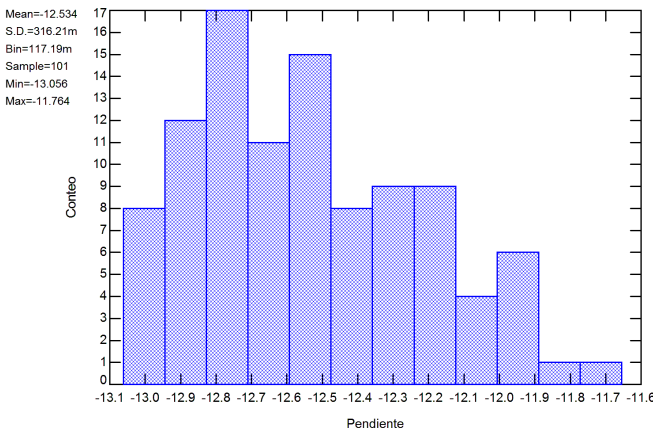
(b) $\alpha = 0.2$



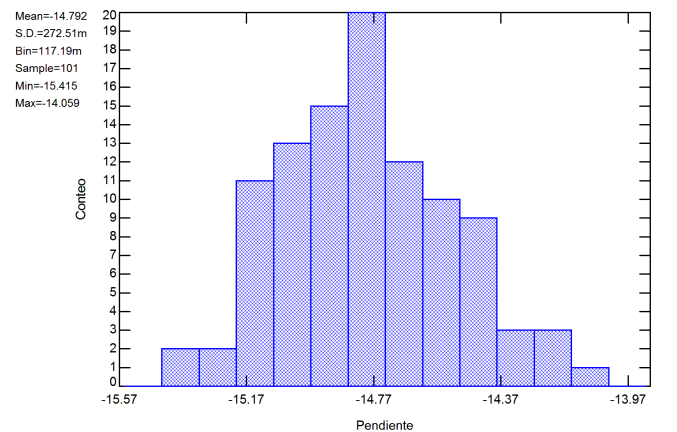
(c) $\alpha = 0.3$



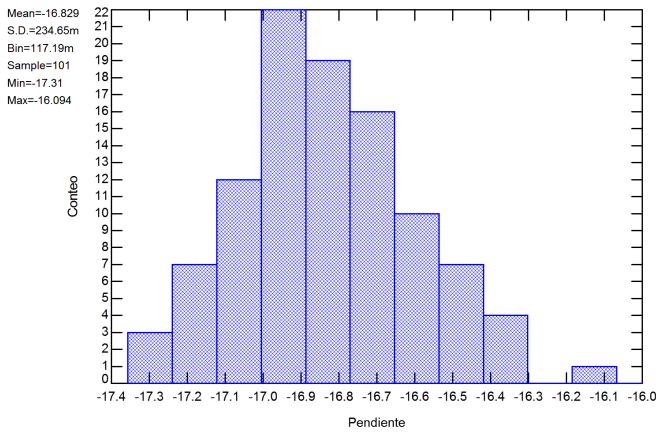
(d) $\alpha = 0.4$



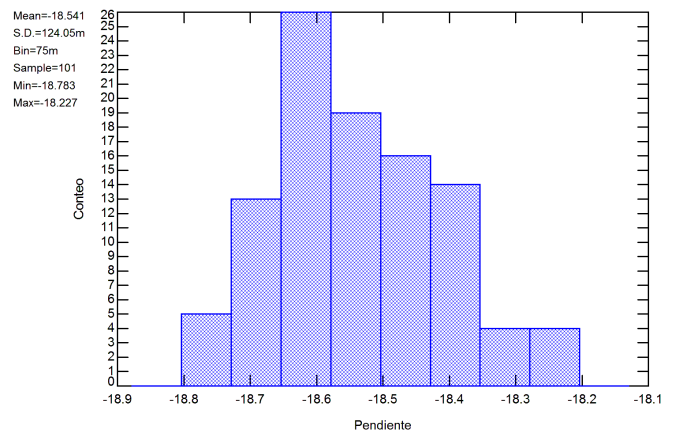
(e) $\alpha = 0.5$



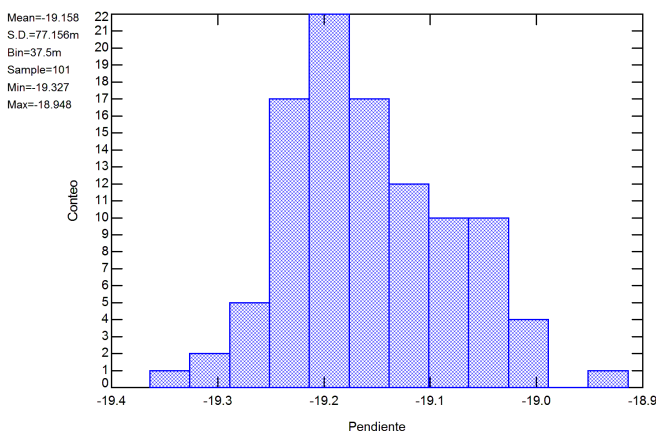
(f) $\alpha = 0.6$



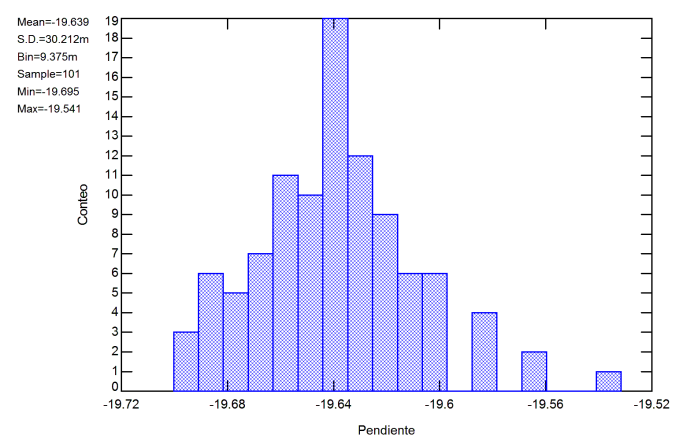
(g) $\alpha = 0.7$



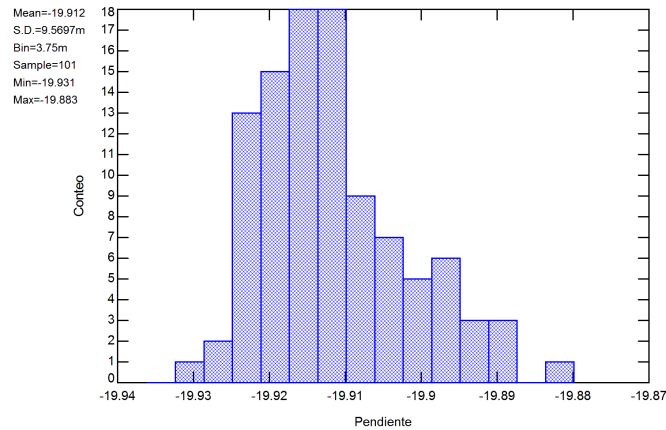
(h) $\alpha = 0.8$



(i) $\alpha = 0.85$



(j) $\alpha = 0.9$



(k) $\alpha = 0.95$

Figura 3.44: Histograma del análisis de Monte Carlo para integradores fraccionarios de 0.1 hasta 0.95.

La Tabla 3.8 compara la media obtenida en el análisis de Monte Carlo en los integradores fraccionarios con la pendiente ideal que corresponde a cada orden, además se incluye una columna donde se indica el error en la pendiente.

α	Pendiente ideal (dB/Dec)	Media (dB/Dec)	Error (dB/Dec)
0.1	-2	-2.777	-0.777
0.2	-4	-5.544	-1.544
0.3	-6	-8.267	-2.267
0.4	-8	-10.141	-2.141
0.5	-10	-12.534	-2.534
0.6	-12	-14.792	-2.792
0.7	-14	-16.829	-2.829
0.8	-16	-18.541	-2.541
0.85	-17	-19.158	-2.158
0.9	-18	-19.639	-1.639
0.95	-19	-19.912	-0.912

Tabla 3.8: Comparativa de pendiente ideal y la media del análisis de Monte Carlo

La Figura 3.45 se muestra la media de las pendientes del integrador a diferentes órdenes y se compara con la pendiente ideal. La pendiente ideal se muestra en una línea azul, mientras que la media de las pendientes obtenida por el análisis de Monte Carlo se muestra en color naranja. Hay un error mínimo en la pendiente del integrador cuando la media se aproxima más a la línea azul (pendiente ideal), en caso contrario el error aumenta cuando la media se aleja de la línea azul (pendiente ideal).

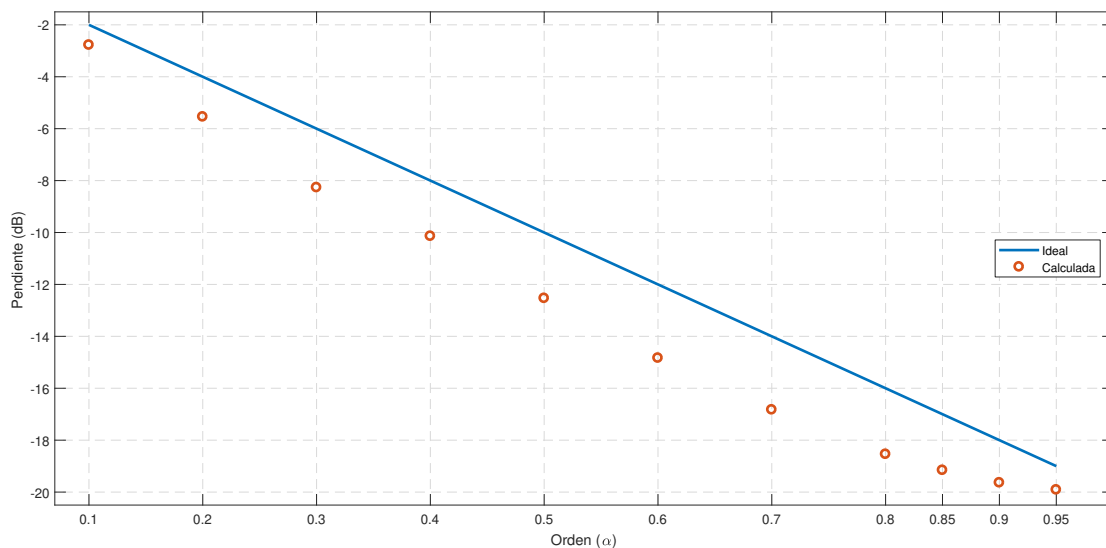
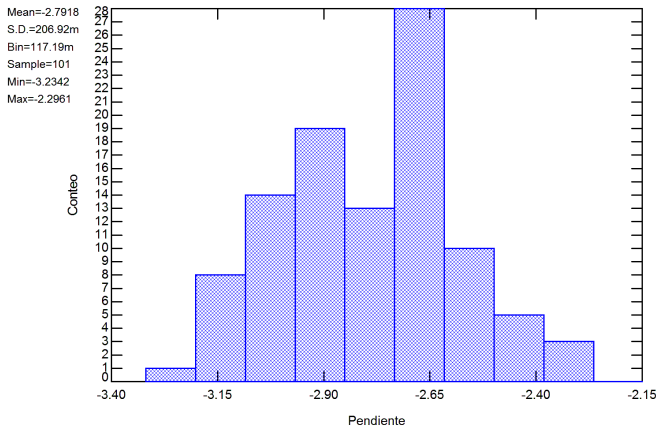


Figura 3.45: Pendiente ideal frente a la pendiente media del análisis de Monte Carlo.

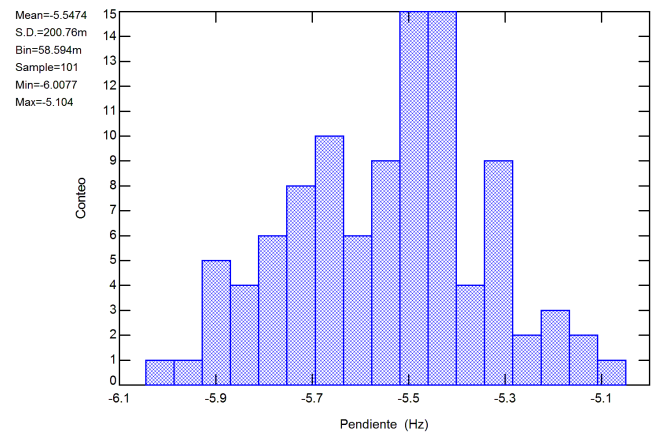
En la Tabla 3.8 como en la gráfica 3.45 se muestra que el error más grande se presenta en el diseño de integradores con órdenes de 0.5 a 0.8 con un error de hasta -2.5dB/Dec, a partir de estos órdenes, el error tiende a disminuir. El error más bajo se obtuvo en los órdenes 0.1 y 0.95, con un error en la pendiente de -0.777dB/Dec y -0.912dB/Dec respectivamente.

3.8.2. Butterworth y Chebyshev Tipo I

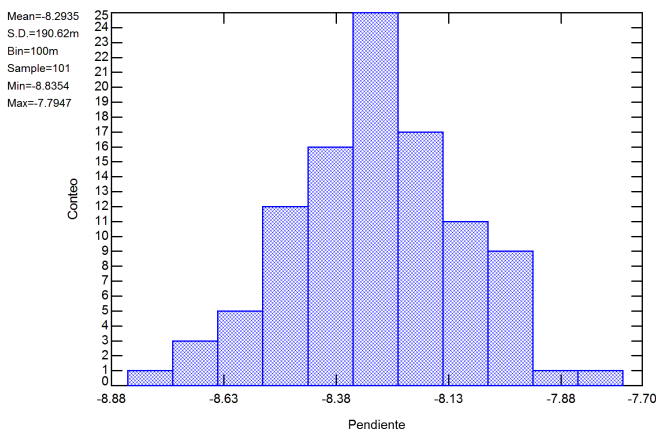
Los histogramas obtenidos en el análisis de Monte Carlo se presentan en la Figura 3.46.



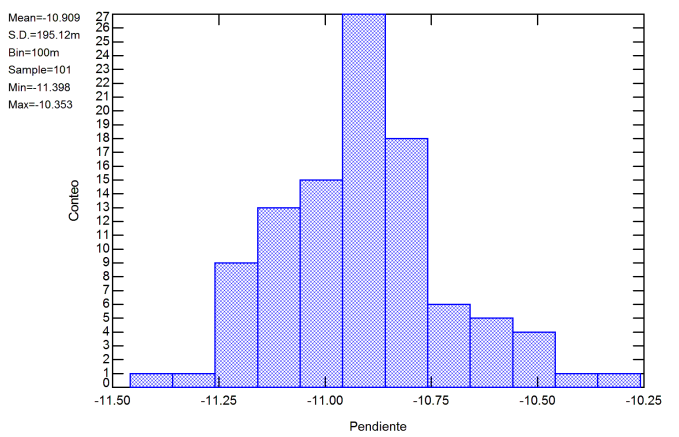
(a) $\alpha = 0.1$



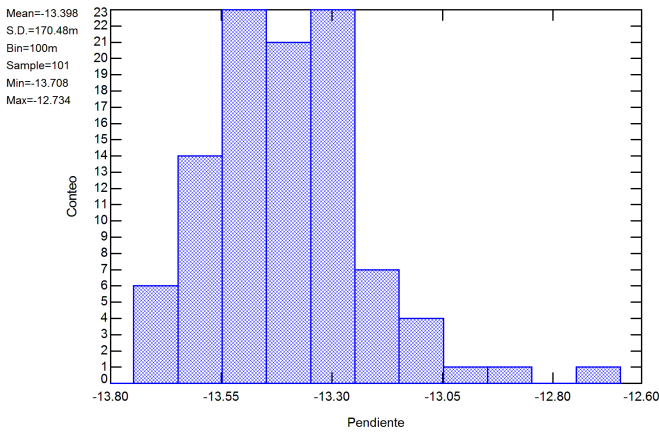
(b) $\alpha = 0.2$



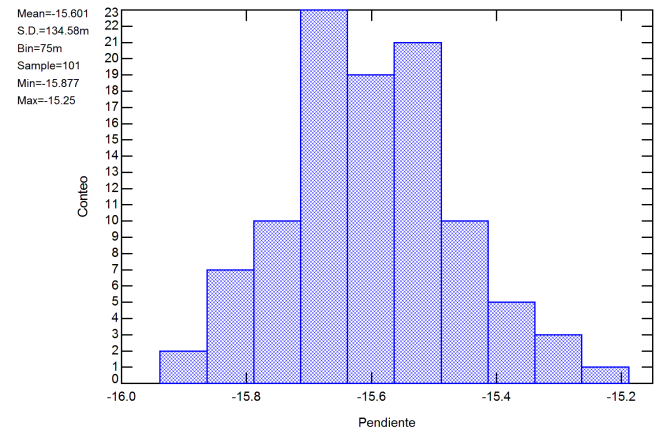
(c) $\alpha = 0.3$



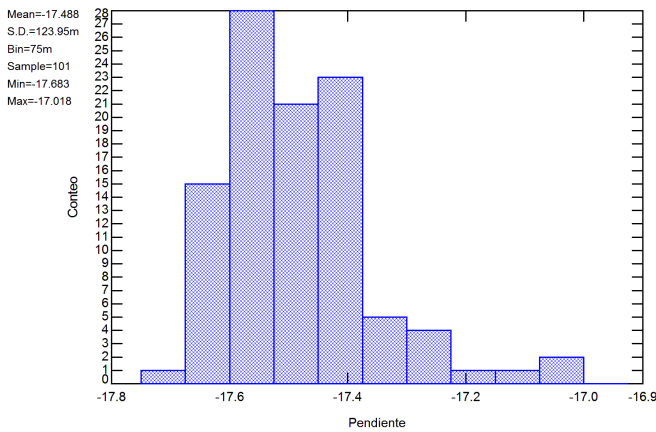
(d) $\alpha = 0.4$



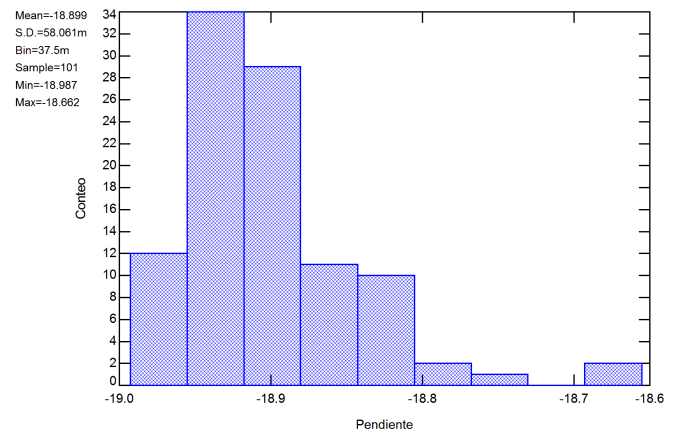
(e) $\alpha = 0.5$



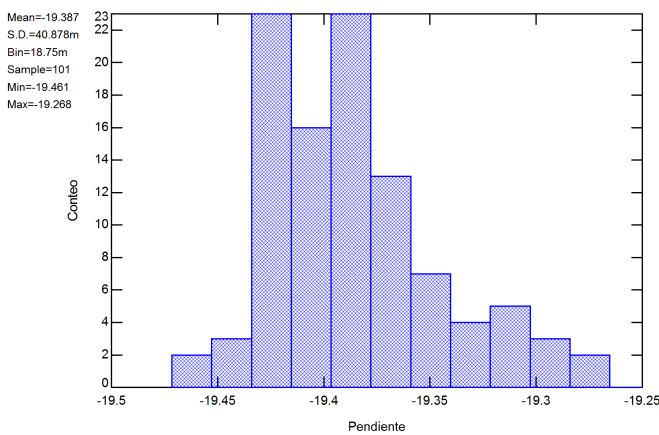
(f) $\alpha = 0.6$



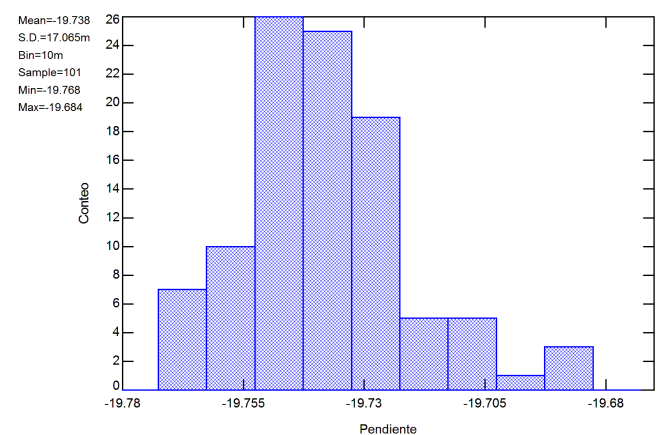
(g) $\alpha = 0.7$



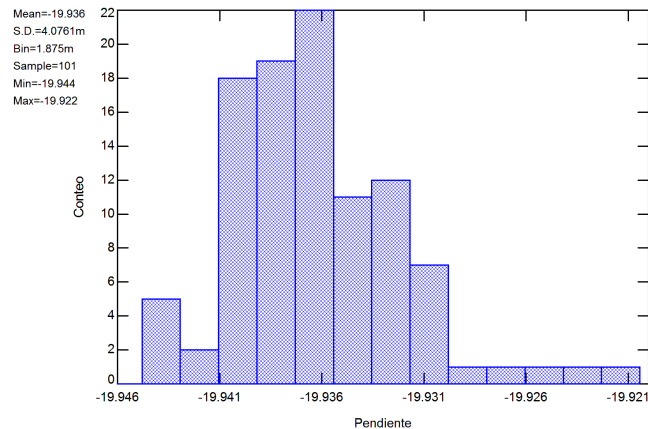
(h) $\alpha = 0.8$



(i) $\alpha = 0.85$



(j) $\alpha = 0.9$



(k) $\alpha = 0.95$

Figura 3.46: Histograma del análisis de Monte Carlo para integradores fraccionarios de 0.1 hasta 0.95.

La Tabla 3.9 compara la media de la pendiente en el análisis de Monte Carlo de los integradores fraccionarios con la pendiente ideal que corresponde a cada orden y su respectivo error en la pendiente.

α	Pendiente ideal (dB/Dec)	Media (dB/Dec)	Error (dB/Dec)
0.1	-2	-2.791	-0.791
0.2	-4	-5.547	-1.547
0.3	-6	-8.293	-2.293
0.4	-8	-10.909	-2.909
0.5	-10	-13.398	-3.398
0.6	-12	-15.601	-3.601
0.7	-14	-17.488	-3.488
0.8	-16	-18.899	-2.899
0.85	-17	-19.387	-2.387
0.9	-18	-19.738	-1.738
0.95	-19	-19.936	-0.936

Tabla 3.9: Comparativa de pendiente ideal y la media del análisis de Monte Carlo

La Figura 3.47 se comparará la media de las pendientes del integrador a diferentes órdenes (naranja) y la pendiente ideal (azul). El error es menor cuando la media de la pendiente se acerca a la pendiente ideal o línea azul, el error incrementa cuando la media de la pendiente se aleja a la pendiente ideal.

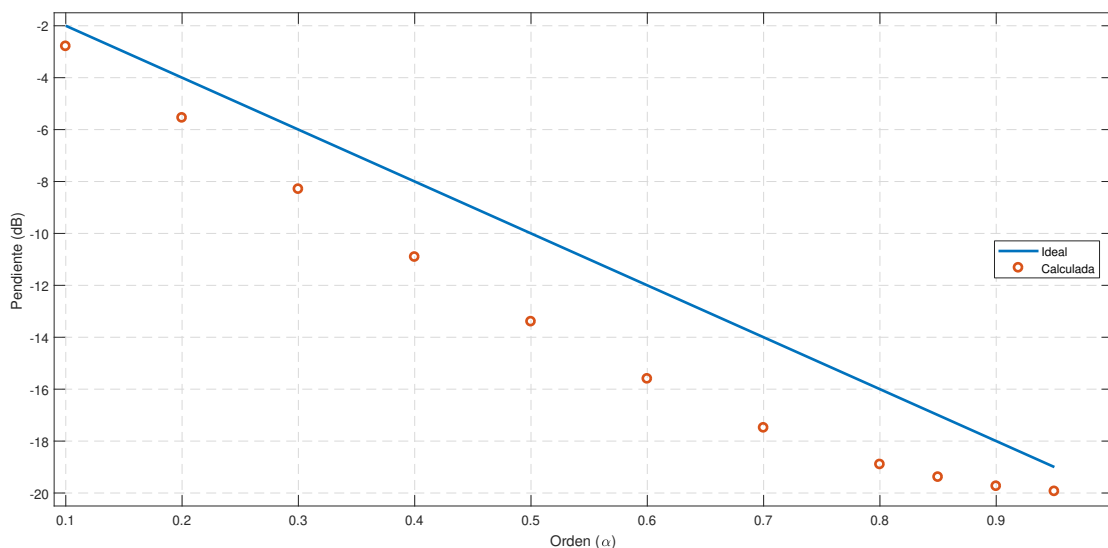
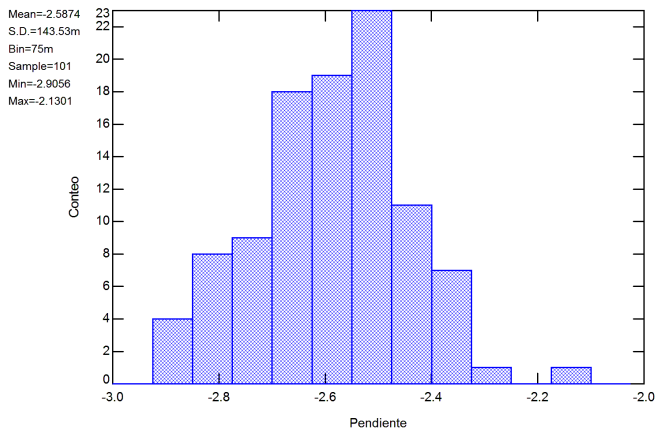


Figura 3.47: Pendiente ideal frente a la pendiente media del análisis de Monte Carlo.

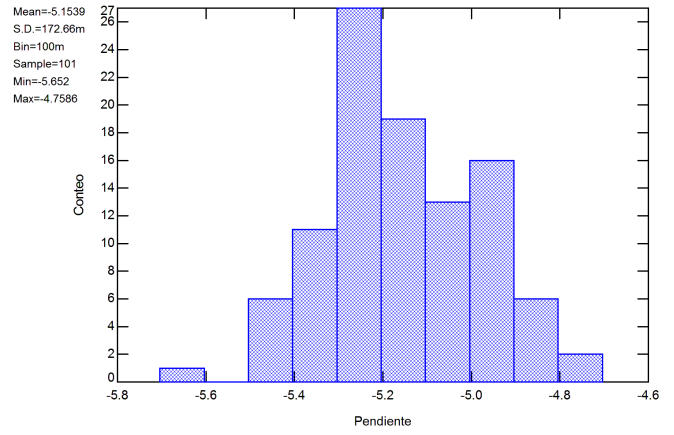
En la Tabla 3.9 y la gráfica 3.47 se presenta como errores máximos en los integradores de orden 0.4 a 0.8 llegando a un error de hasta -3.6dB/Dec para el orden 0.6 y el error tiende a disminuir para los demás órdenes. Los órdenes con un error bajo son el orden 0.1 y el orden 0.95, con un error de -0.791dB/Dec y -0.936dB/Dec respectivamente.

3.8.3. Grafo de Señal

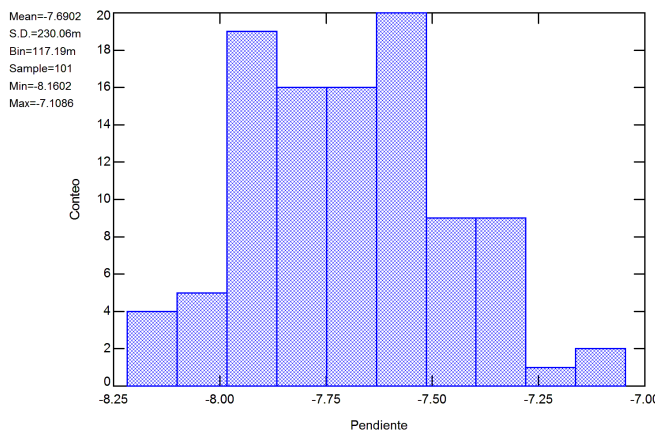
Los histogramas que muestran el resultado del análisis de Monte Carlo se presentan en la Figura 3.48.



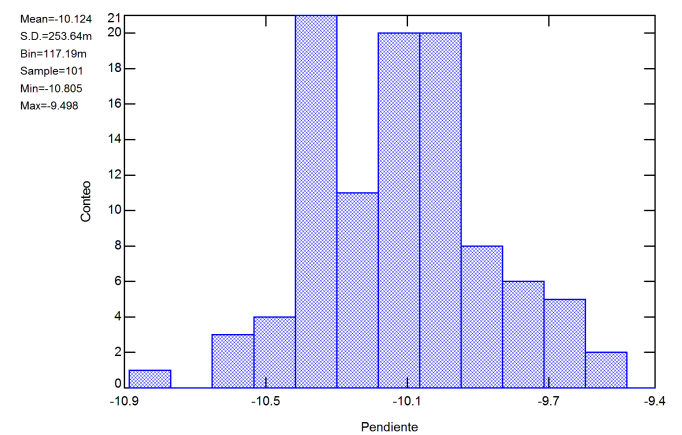
(a) $\alpha = 0.1$



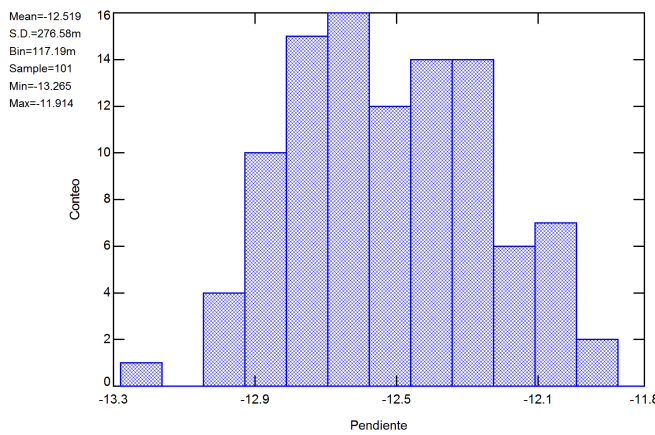
(b) $\alpha = 0.2$



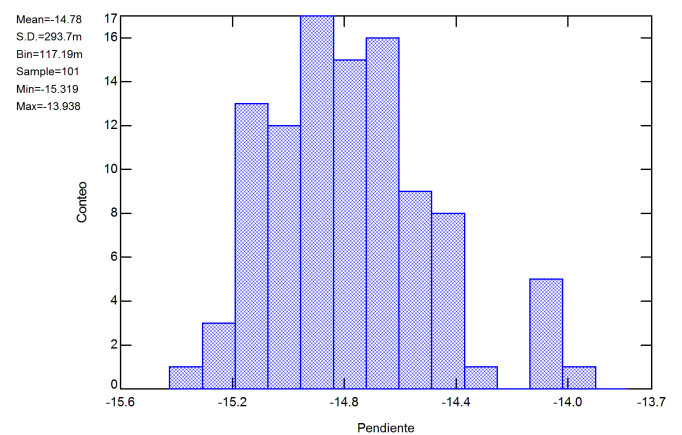
(c) $\alpha = 0.3$



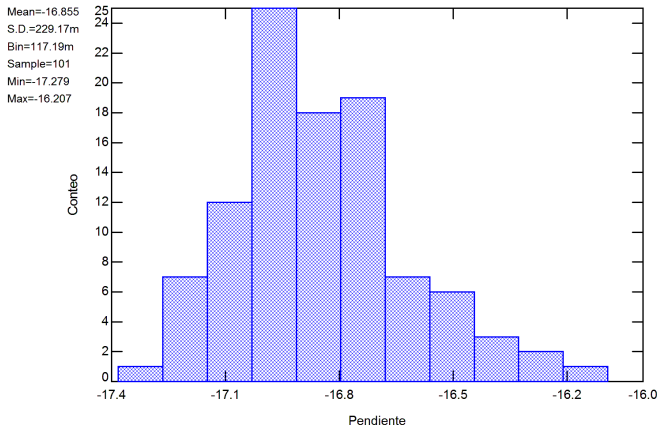
(d) $\alpha = 0.4$



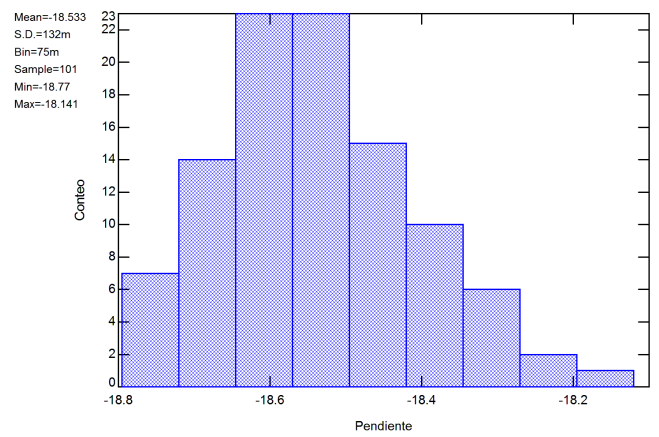
(e) $\alpha = 0.5$



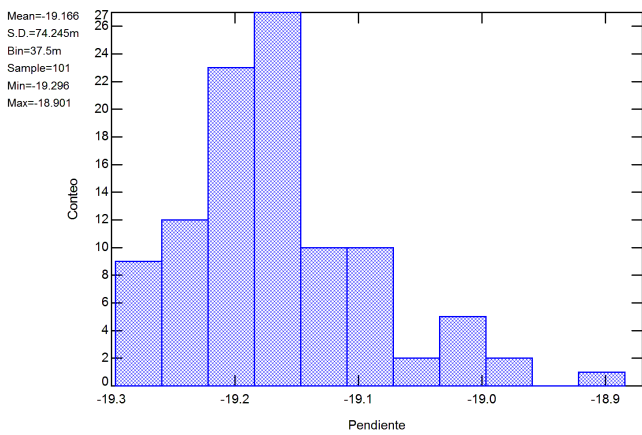
(f) $\alpha = 0.6$



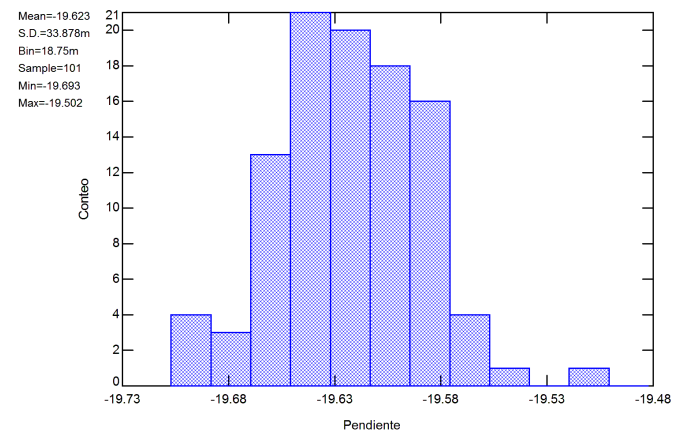
(g) $\alpha = 0.7$



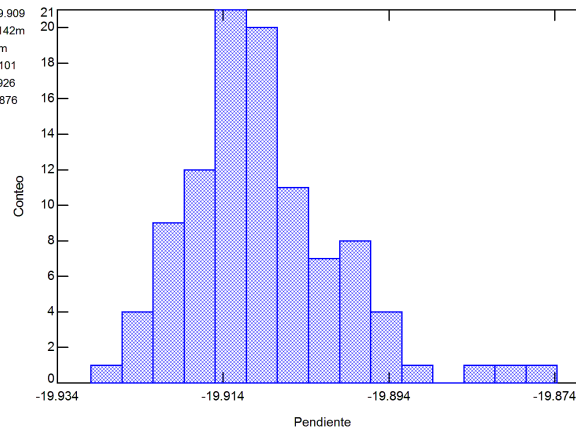
(h) $\alpha = 0.8$



(i) $\alpha = 0.85$



(j) $\alpha = 0.9$



(k) $\alpha = 0.95$

Figura 3.48: Histogramas del análisis de Monte Carlo para integradores fraccionarios desde 0.1 hasta 0.95.

La Tabla 3.10 compara la media del análisis de Monte Carlo con la pendiente ideal.

α	Pendiente ideal (dB/Dec)	Media (dB/Dec)	Error (dB/Dec)
0.1	-2	-2.587	-0.587
0.2	-4	-5.153	-1.153
0.3	-6	-7.690	-1.690
0.4	-8	-10.124	-2.124
0.5	-10	-12.519	-2.519
0.6	-12	-14.780	-2.780
0.7	-14	-16.855	-2.855
0.8	-16	-18.533	-2.533
0.85	-17	-19.168	-2.168
0.9	-18	-19.623	-1.623
0.95	-19	-19.909	-0.909

Tabla 3.10: Comparativa de pendiente ideal y la media del análisis de Monte Carlo

La Figura 3.49 se comparará la media de las pendientes del integrador (color naranja) con la pendiente ideal (color azul).

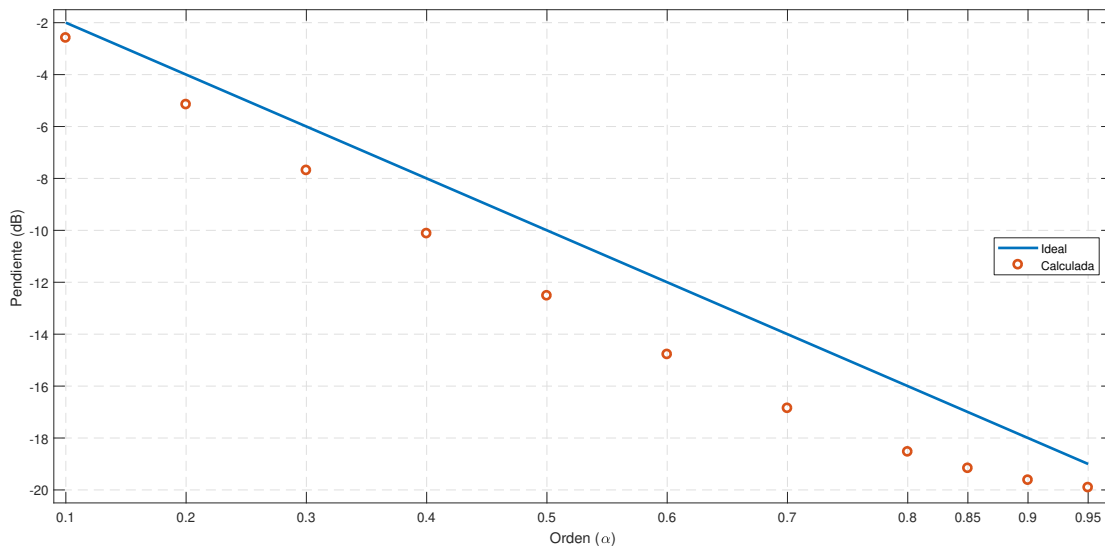


Figura 3.49: Pendiente ideal frente a la pendiente media del análisis de Monte Carlo.

En la Tabla 3.10 y en la Figura 3.49 indica como errores máximos en los integradores de orden 0.5 a 0.8 llegando a un error mas alto de hasta -2.8dB/Dec para el orden 0.7. El error se inclina a disminuir para los demás ordenes. Los ordenes con un error bajo son el 0.1 y 0.95, con un error de -0.587dB/Dec y -0.909dB/Dec respectivamente.

4 | Optimización del Integrador de Orden Fraccionario.

En este capítulo, se presenta un ajuste en el factor A para obtener una mejor precisión en la pendiente del integrador de orden fraccionario. Se realizará una aproximación con una Ecuación exponencial para el ajuste en A , además se presentarán los nuevo análisis de sensibilidad y Monte Carlo de cada integrador de orden fraccionario propuesto.

4.1. Butterworth y Chebyshev tipo I

El ajuste se alcanzó modificando el valor de A y se encontró el más conveniente, en donde se obtuviera una pendiente más aproximada a una pendiente ideal del integrador fraccionario. Los valores nuevos de A se muestran en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Valores de ajuste en A .

Orden α	Ideal Pendiente (dB/Dec)	Sin Ajuste		Con Ajuste	
		A	Pendiente (dB/Dec)	A	Pendiente (dB/Dec)
0.10	-2	1.22	-2.791	1.1459	-1.99
0.20	-4	1.50	-5.547	1.3529	-4.02
0.30	-6	1.86	-8.293	1.5641	-5.99
0.40	-8	2.33	-10.909	1.8571	-8.07
0.50	-10	3.00	-13.398	2.1746	-9.95
0.60	-12	4.00	-15.601	2.6363	-11.91
0.70	-14	5.66	-17.488	3.4444	-13.96
0.80	-16	9.00	-18.899	5.25	-16.02
0.85	-17	12.33	-19.387	6.4074	-17.22
0.90	-18	19.00	-19.738	8.0909	-17.97
0.95	-19	39.00	-19.936	12.33	-18.74

En la Figura 4.1 se puede observar gráficamente que los puntos que corresponden a la pendiente calculada desde la función de transferencia del integrador fraccionario se alejan de la línea que corresponde a la pendiente ideal, mientras que los puntos que corresponden a la pendiente con ajuste se encuentran más cercanos a la línea de la pendiente ideal.

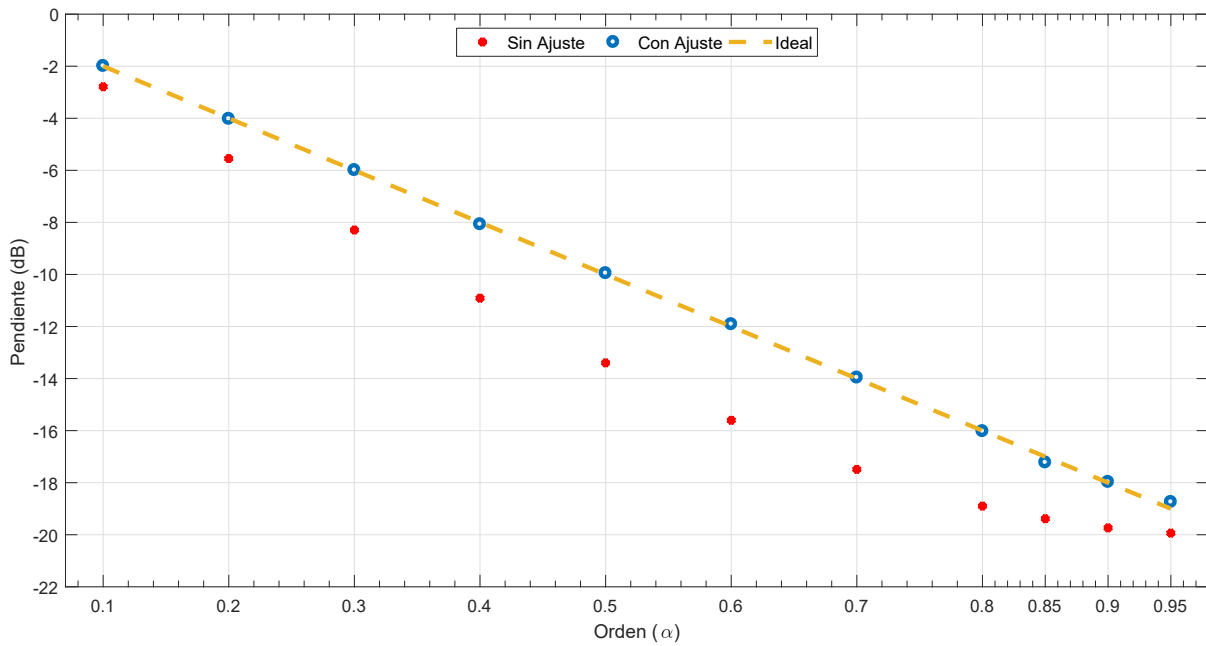


Figura 4.1: Pendientes del integrador fraccionario con ajuste, sin ajuste e ideal.

En la Figura 4.2 se muestra los valores de A con ajuste y sin ajuste. Donde podemos observar que el valor de A sin ajuste es más grande que el valor de A con ajuste. Además, la forma que toma el ajuste es de una exponencial, esto nos permite obtener una nueva Ecuación que permita ajustar la función de transferencia y hacerla precisa en la pendiente.

La Ecuación que aproxima los valores de ajuste en A se muestra en la Ecuación (4.1).

$$A = 0.8845e^{1.861\alpha} + 3.63(10^{-5})e^{12.82\alpha} \tag{4.1}$$

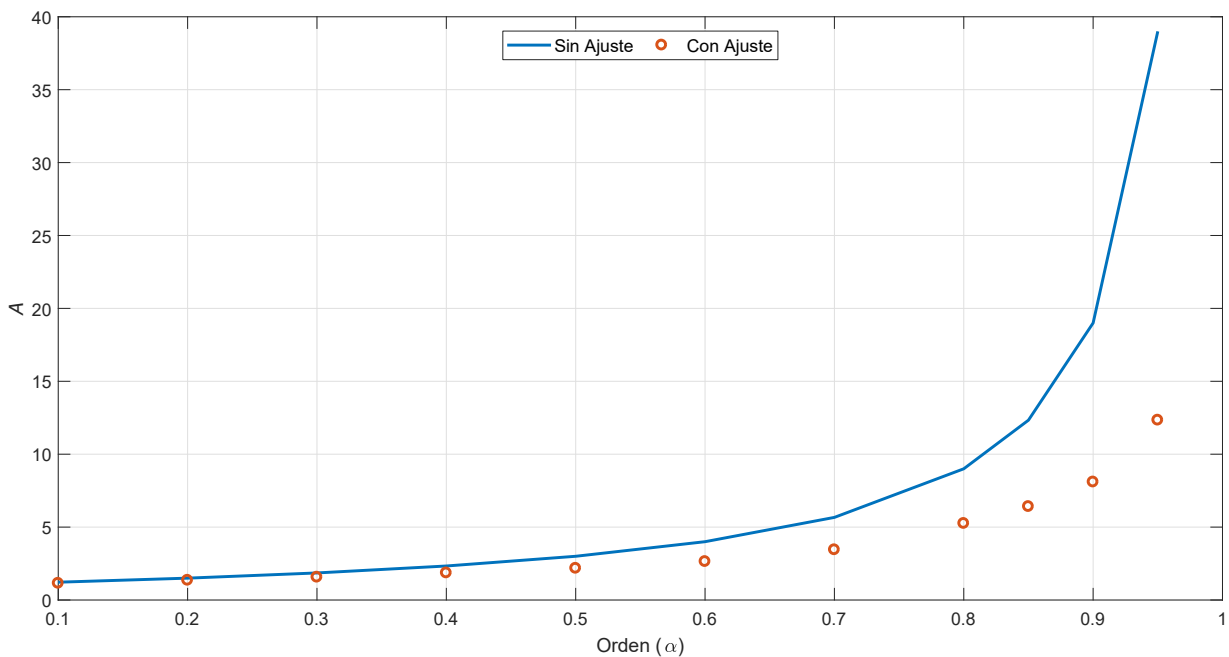


Figura 4.2: Valores de A sin ajuste y con ajuste.

En la Tabla 4.2 se muestra el error de la Ecuación de ajuste (4.1) y el valor de A experimental. Se puede observar que los mayores errores en la aproximación los obtenemos en los ordenes 0.6, 0.8 y 0.9 con -0.1449, 0.2973 y -0.3530 respectivamente, siendo el orden 0.9 con mayor error. En cambio, los demás ordenes α se encuentran con una aproximación aceptable.

Tabla 4.2: Error en la Ecuación de ajuste.

α	A	Ecuación de ajuste	Error
0.1	1.1459	1.0655	0.0804
0.2	1.3529	1.2838	0.0691
0.3	1.5641	1.5475	0.0166
0.4	1.8571	1.8682	-0.0111
0.5	2.1746	2.2650	-0.0904
0.6	2.6363	2.7812	-0.1449
0.7	3.4444	3.5409	-0.0965
0.8	5.2500	4.9527	0.2973
0.85	6.4074	6.2629	0.1445
0.9	8.0909	8.4439	-0.3530
0.95	12.3300	12.2482	0.0818

4.1.1. Fase del integrador fraccionario

A diferencia de los integradores de orden entero, la frecuencia de corte se encuentra en la magnitud máxima menos 3α en los integradores de orden fraccionario, donde α es el orden fraccionario. De esta forma localizamos la frecuencia de corte del integrador fraccionario (Ecuación (4.2)).

$$Magnitud_{f_c} = |Magnitud_{max}| - 3\alpha \quad (4.2)$$

La fase que presentará en la frecuencia de corte del integrador fraccionario se calcula como se muestra en la ecuación (4.3)

$$Fase = -45^\circ \alpha \quad (4.3)$$

En la Tabla 4.34 se compara la fase experimental con la fase obtenida de manera ideal por la Ecuación 4.3. Obtenemos el error más alto en los ordenes de 0.1, 0.3 y 0.4, con errores de 2.096, 2.14 y 2.37 grados respectivamente. En cambio, en los demás ordenes obtenemos un error menor a 2 grados.

Tabla 4.3: Frecuencia de corte y fase del integrador fraccionario.

α	Magnitud (dB) a 1Hz	Frecuencia de corte (Hz)	Fase experimental (Grados)	Fase de (4.3) (Grados)	Error (Grados)
0.1	-4.694	115.9	-6.596	-4.5	2.096
0.2	-3.215	66.76	-10.51	-9	1.51
0.3	-2.099	61.95	-15.64	-13.5	2.14
0.4	-0.5514	55.14	-20.37	-18	2.37
0.5	0.8715	50.46	-24.46	-22.5	1.96
0.6	2.569	45.07	-28.85	-27	1.85
0.7	4.919	36.59	-33.02	-31.5	1.52
0.8	8.536	26.35	-37.85	-36	1.85
0.85	10.38	22.4	-39.53	-38.25	1.28
0.9	12.33	18.34	-41.32	-40.5	0.82
0.95	16.06	12.48	-43.18	-42.75	0.43

4.1.2. Análisis de Monte Carlo

Se realizó un análisis de Monte Carlo con los nuevos valores del circuito, considerando el ajuste exponencial de la Ecuación (4.1). La Tabla 4.4 muestra la media de las pendientes de los integradores de orden fraccionario con ajuste y su error. Obtuvimos un error máximo de 0.41 dB/Dec que corresponde al orden de 0.4, sin embargo, los errores obtenidos son menores a 1dB/Dec, obteniendo así una mejor aproximación en la pendiente del integrador fraccionario ideal.

Tabla 4.4: Media de la pendiente con ajuste.

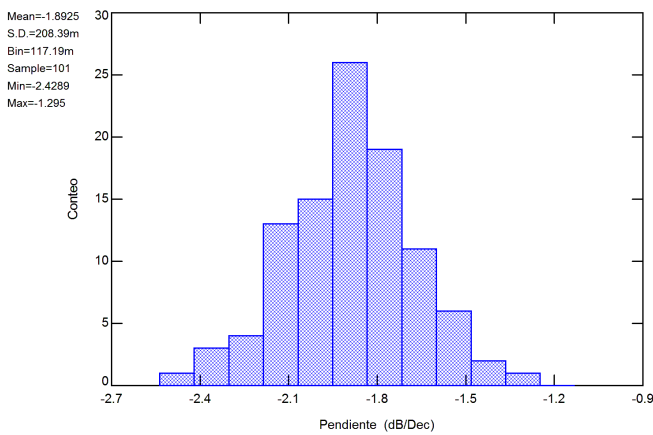
α	Pendiente Ideal (dB/Dec)	Media (dB/Dec)	Error (dB/Dec)
0.1	-2.00	-1.89	-0.11
0.2	-4.00	-4.24	0.24
0.3	-6.00	-6.19	0.19
0.4	-8.00	-8.41	0.41
0.5	-10.00	-10.27	0.27
0.6	-12.00	-12.3	0.3
0.7	-14.00	-14.35	0.35
0.8	-16.00	-16.213	0.213
0.85	-17.00	-17.09	0.09
0.9	-18.00	-18.16	0.16
0.95	-19.00	-19.11	0.11

En la Tabla 4.5 se muestran la información de los resultados obtenidos en el análisis de Monte Carlo, como las pendientes mínimas, máximas obtenidas y la desviación estándar.

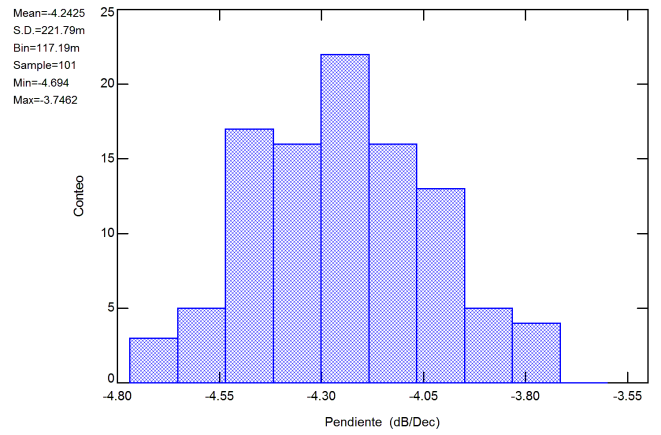
Tabla 4.5: Máximos y mínimos del análisis de Monte Carlo.

α	Máxima (dB/Dec)	Mínima (dB/Dec)	Desviación Estándar
0.1	-1.89	-2.42	208.39m
0.2	-4.24	-4.69	221.79m
0.3	-6.19	-6.63	186.96m
0.4	-8.41	-8.87	182.73m
0.5	-10.27	-10.67	159.04m
0.6	-12.3	-12.71	142.57m
0.7	-14.35	-14.77	218.33m
0.8	-16.213	-16.69	240.33m
0.85	-17.09	-17.53	231.9m
0.9	-18.16	-18.46	157.21m
0.95	-19.11	-19.27	90.114m

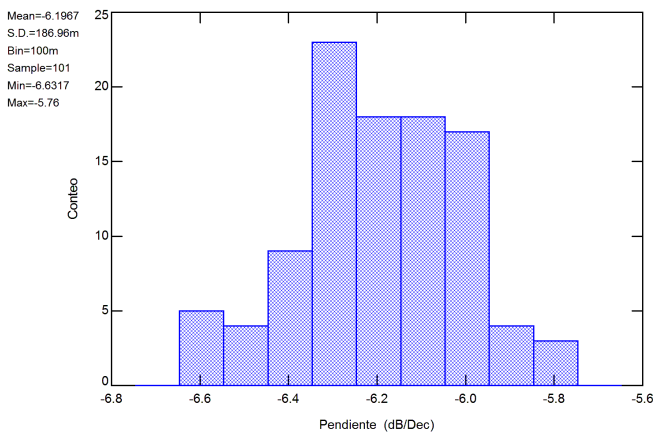
Los histogramas obtenidos en el análisis de Monte Carlo se presentan en la Figura 4.3.



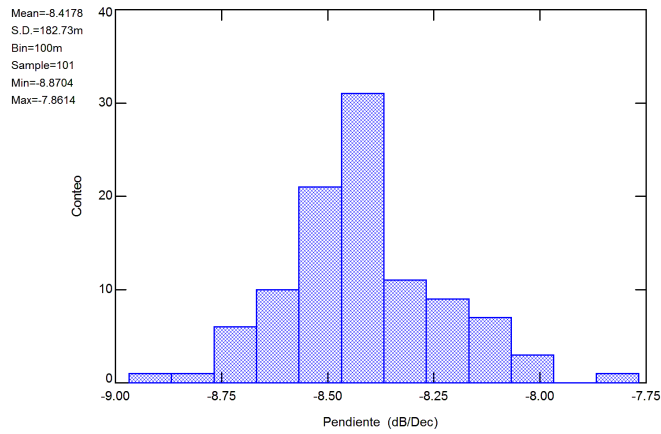
(a) $\alpha = 0.1$



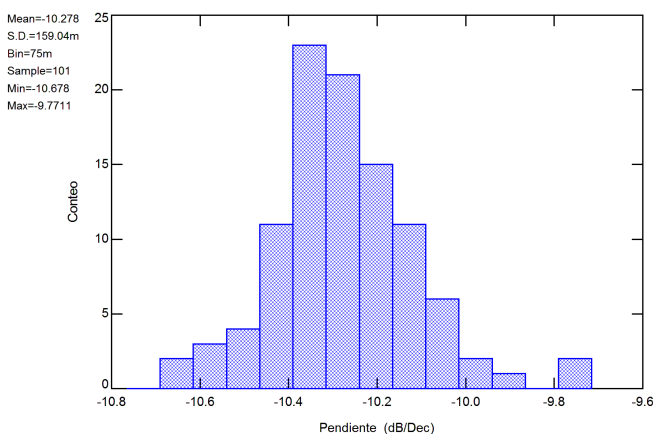
(b) $\alpha = 0.2$



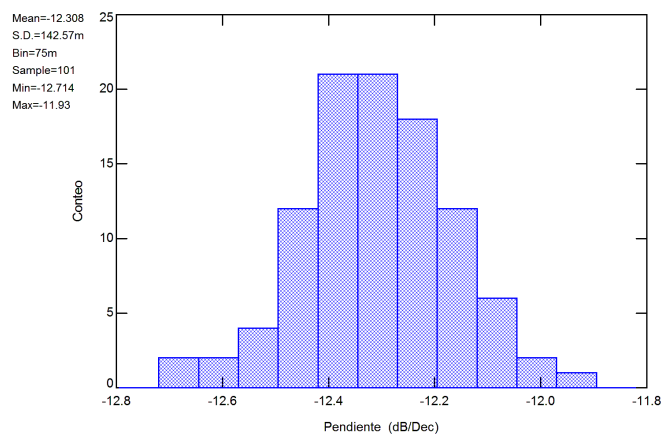
(c) $\alpha = 0.3$



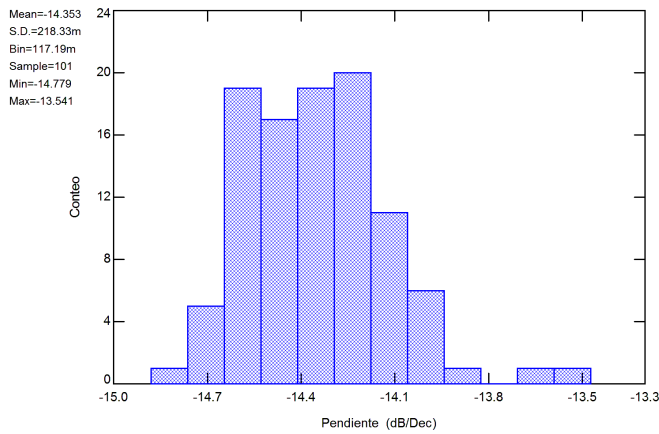
(d) $\alpha = 0.4$



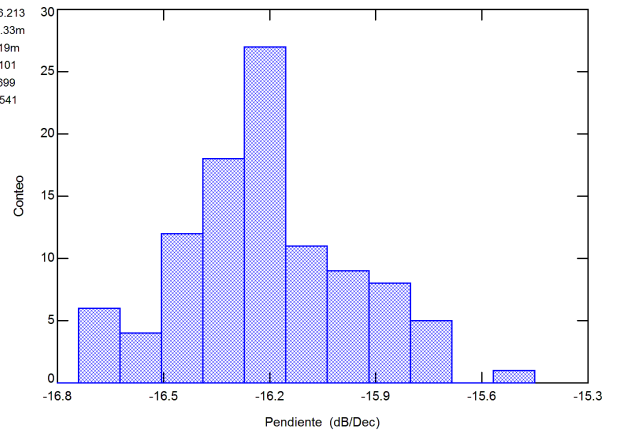
(e) $\alpha = 0.5$



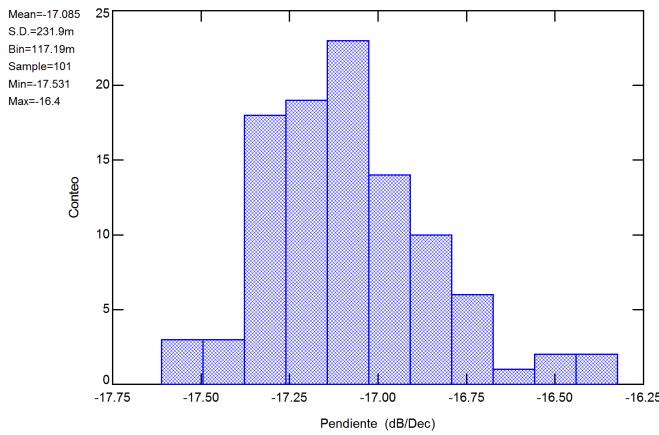
(f) $\alpha = 0.6$



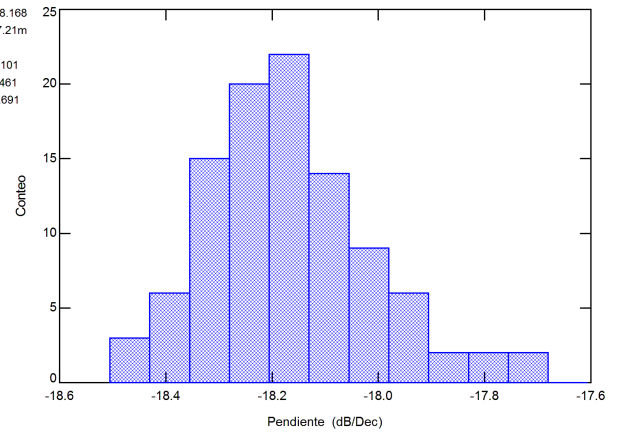
(g) $\alpha = 0.7$



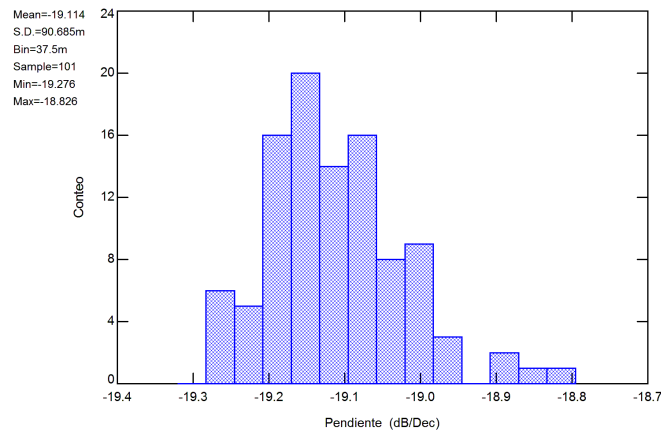
(h) $\alpha = 0.8$



(i) $\alpha = 0.85$



(j) $\alpha = 0.9$



(k) $\alpha = 0.95$

Figura 4.3: Histograma del análisis de Monte Carlo para integradores fraccionarios de 0.1 hasta 0.95 con ajuste.

En la Figura 4.4 observamos en círculos rojos la media de la pendiente obtenida por Monte Carlo con ajuste y en línea azul la pendiente ideal. La pendiente con ajuste en A se encuentra mucho más cerca de la pendiente ideal.

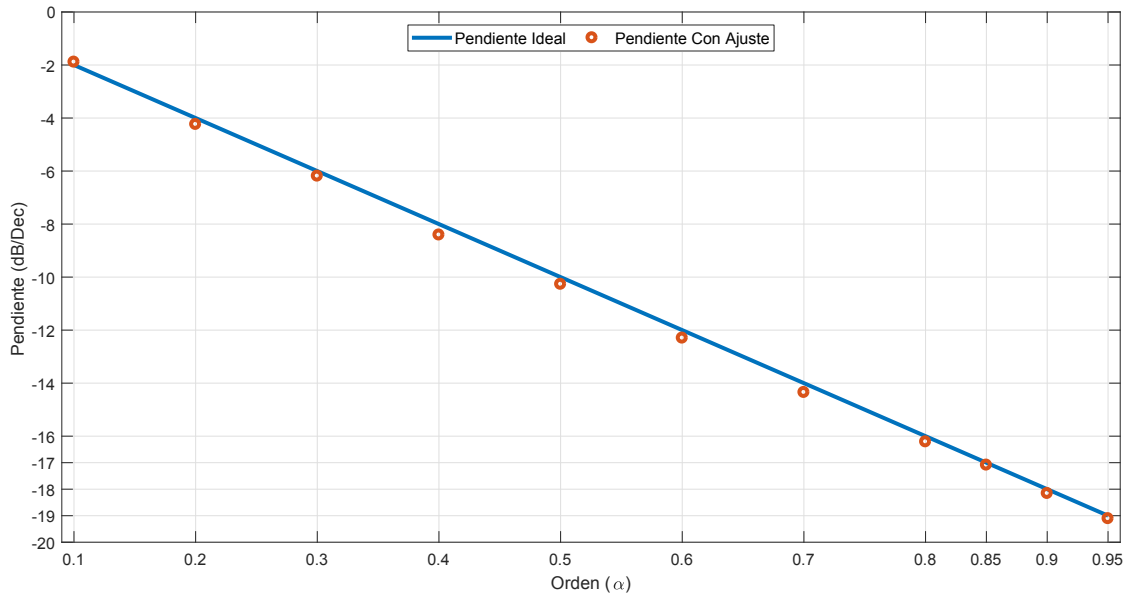


Figura 4.4: Media de la pendiente de Monte Carlo.

En la Figura 4.5 observamos en círculos amarillos la pendiente máxima y en círculos rojos la pendiente mínima del análisis de Monte Carlo con ajuste, y la línea azul representa la pendiente ideal. Tanto los máximos como los mínimos para cada orden, se puede distinguir que encierran la pendiente ideal sin alejarse y en algunos casos hasta la tocan, dando una apreciación de que la pendiente del integrador fraccionario con ajuste se encontrará entre la zona del círculo rojo con el círculo amarillo y que además es muy cerca de la pendiente ideal.

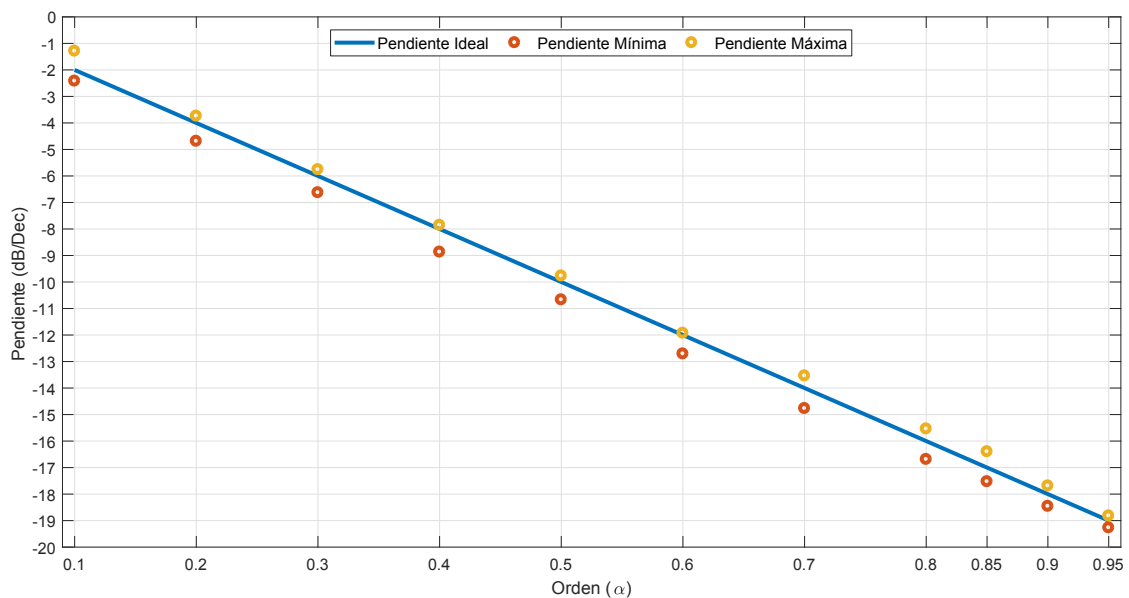


Figura 4.5: Pendiente máxima y mínima de Monte Carlo.

4.1.3. Análisis de Sensitividad

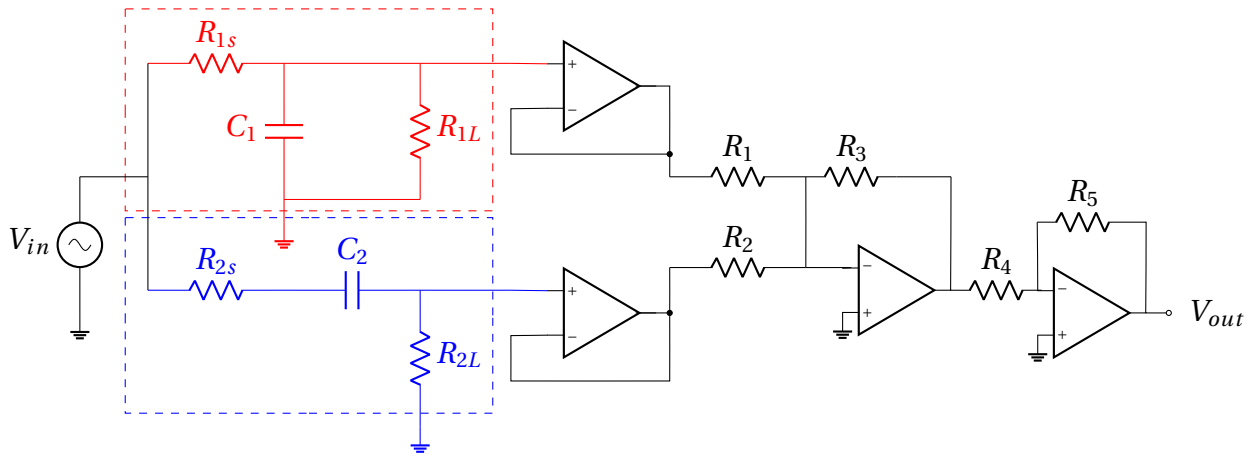


Figura 4.6: Circuito del integrador de orden fraccionario por filtros Butterworth y Chebyshev.

En la Figura 4.7 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.1$, donde los resistores R_1, R_3, R_4, R_5 tienen la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.6 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_1, R_3, R_4, R_5 disminuye el voltaje de salida en -5.75mV , incrementa en 5.75mV , disminuye en -5.75mV e incrementa de nuevo en 5.75mV respectivamente.

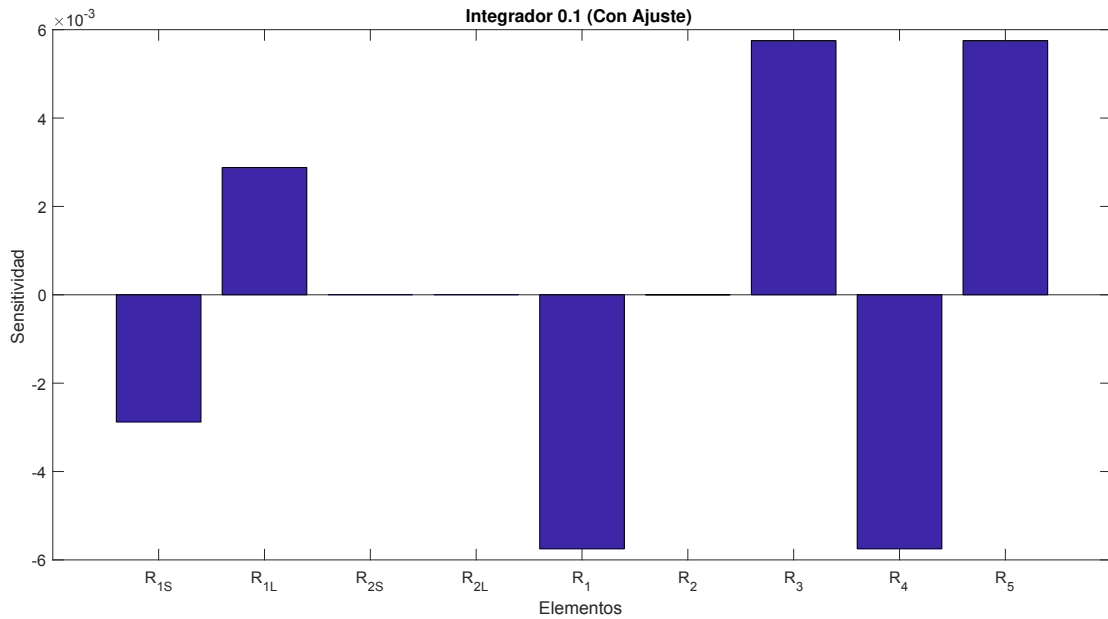


Figura 4.7: Sensitividad del integrador de orden 0.1

Tabla 4.6: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.1

R_{s1} (V/%)	R_{L1} (V/%)	R_{s2} (V/%)	R_{L2} (V/%)	R_1 (V/%)
-2.88×10^{-3}	2.88×10^{-3}	0	-2.27×10^{-10}	-5.75×10^{-3}
R_2 (V/%)	R_3 (V/%)	R_4 (V/%)	R_5 (V/%)	-
2.88×10^{-8}	5.75×10^{-3}	-5.75×10^{-3}	5.75×10^{-3}	-

La Figura 4.8 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.2$, donde los resistores R_1, R_3, R_4, R_5 tienen la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.7 se muestra los

resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_1, R_3, R_4, R_5 disminuye el voltaje de salida en -6.75mV , incrementa en 6.75mV , disminuye en -6.75mV e incrementa de nuevo en 6.75mV respectivamente.

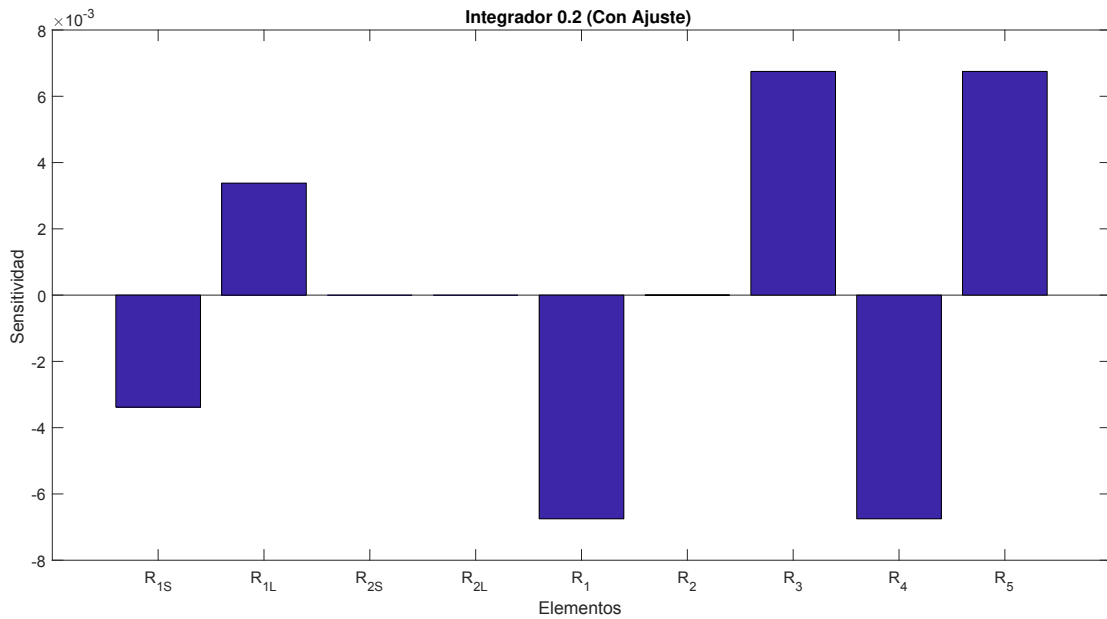


Figura 4.8: Sensibilidad del integrador de orden 0.2

Tabla 4.7: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.2

R_{s1}	R_{L1}	R_{s2}	R_{L2}	R_1
-3.38×10^{-3}	3.38×10^{-3}	0	-2.25×10^{-10}	-6.75×10^{-3}
R_2	R_3	R_4	R_5	-
2.74×10^{-8}	6.75×10^{-3}	-6.75×10^{-3}	6.75×10^{-3}	-

En la Figura 4.9 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.3$, donde los resistores R_1, R_3, R_4, R_5 tienen la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.8 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_1, R_3, R_4, R_5 disminuye el voltaje de salida en -7.80mV , incrementa en 7.80mV , disminuye en -7.80mV e incrementa de nuevo en 7.80mV respectivamente.

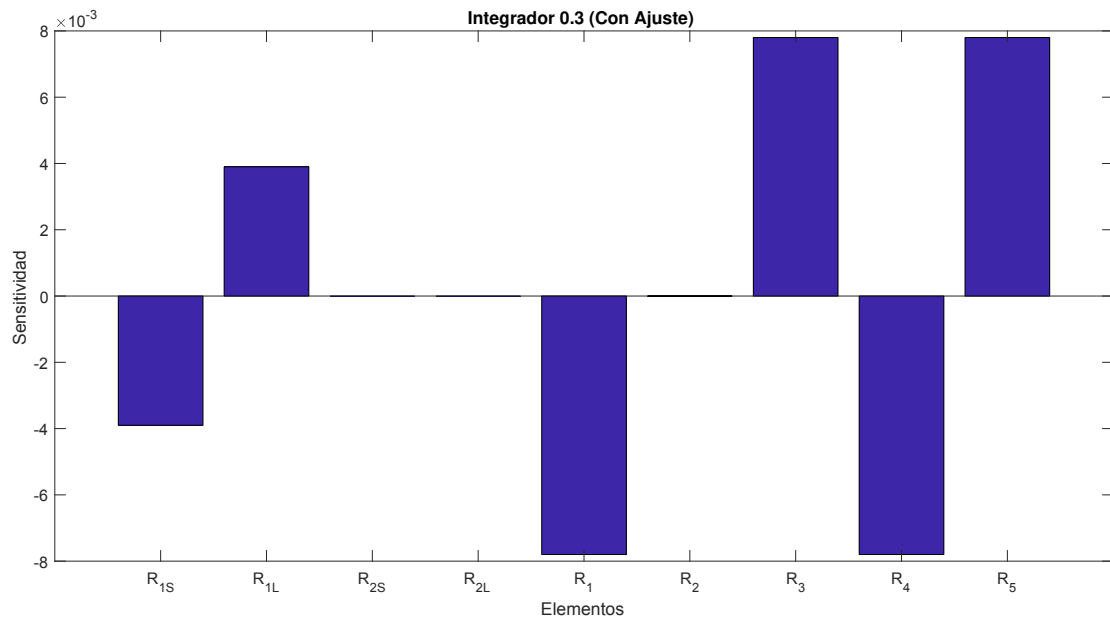


Figura 4.9: Sensitividad del integrador de orden 0.3

Tabla 4.8: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.3

R_{S1}	R_{L1}	R_{S2}	R_{L2}	R_1
-3.90×10^{-3}	3.90×10^{-3}	0	-2.24×10^{-10}	-7.80×10^{-3}
R_2	R_3	R_4	R_5	-
2.68×10^{-8}	7.80×10^{-3}	-7.80×10^{-3}	7.80×10^{-3}	-

La Figura 4.10 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.4$, donde los resistores R_1, R_3, R_4, R_5 tienen la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.9 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_1, R_3, R_4, R_5 disminuye el voltaje de salida en -9.30mV , incrementa en 9.30mV , disminuye en -9.30mV e incrementa de nuevo en 9.30mV respectivamente.

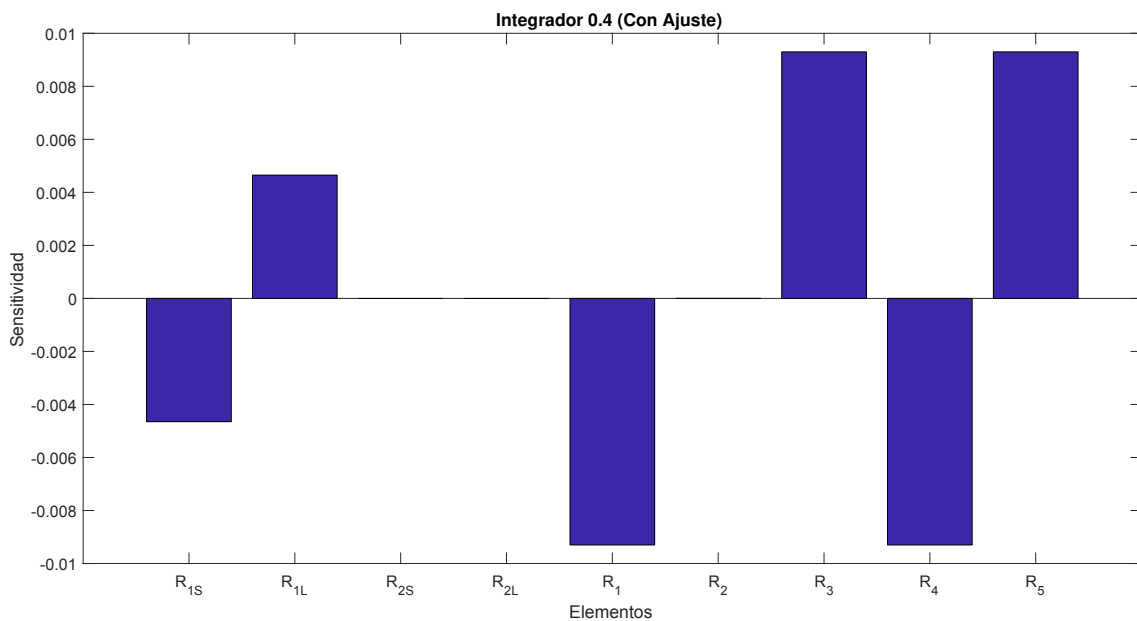


Figura 4.10: Sensitividad del integrador de orden 0.4

Tabla 4.9: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.4

R_{s1}	R_{L1}	R_{s2}	R_{L2}	R_1
-4.65×10^{-3}	4.65×10^{-3}	0	-2.25×10^{-10}	-9.30×10^{-3}
R_2	R_3	R_4	R_5	-
2.64×10^{-8}	9.30×10^{-3}	-9.30×10^{-3}	9.30×10^{-3}	-

En la Figura 4.11 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.5$, donde los resistores R_1, R_3, R_4, R_5 tienen la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.10 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_1, R_3, R_4, R_5 disminuye el voltaje de salida en -10.9mV , incrementa en 10.9mV , disminuye en -10.9mV e incrementa de nuevo en 10.9mV respectivamente.

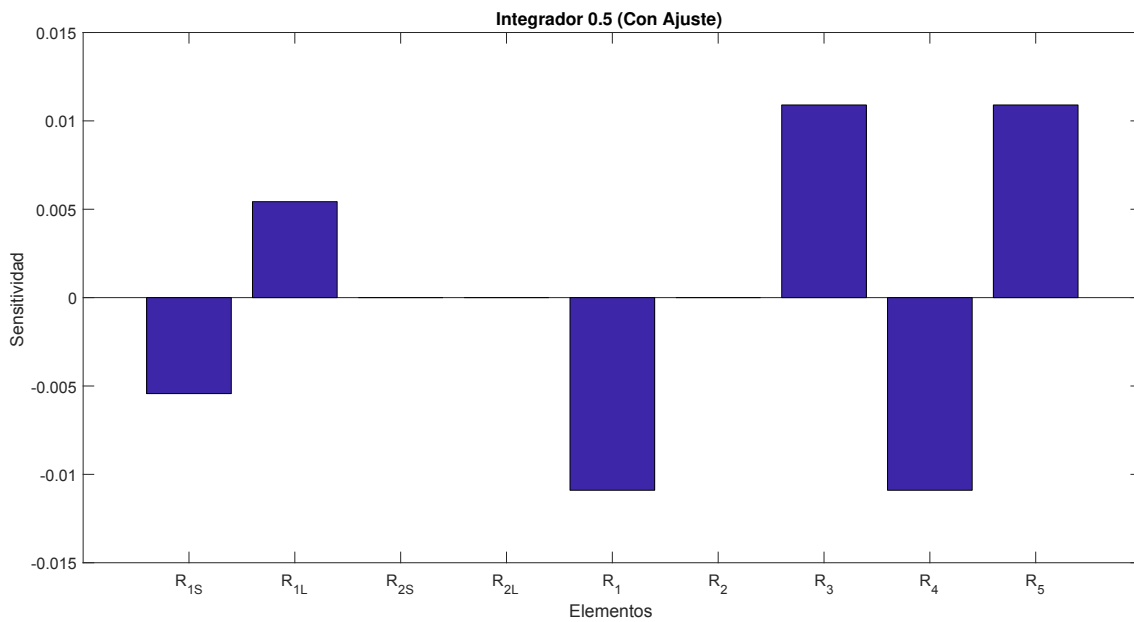


Figura 4.11: Sensibilidad del integrador de orden 0.5

Tabla 4.10: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.5

R_{s1}	R_{L1}	R_{s2}	R_{L2}	R_1
-5.43×10^{-3}	5.43×10^{-3}	0	-2.25×10^{-10}	-1.09×10^{-2}
R_2	R_3	R_4	R_5	-
2.56×10^{-8}	1.09×10^{-2}	-1.09×10^{-2}	1.09×10^{-2}	-

La Figura 4.12 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.6$, donde los resistores R_1, R_3, R_4, R_5 tienen la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.11 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_1, R_3, R_4, R_5 disminuye el voltaje de salida en -13.2mV , incrementa en 13.2mV , disminuye en -13.2mV e incrementa de nuevo en 13.2mV respectivamente.

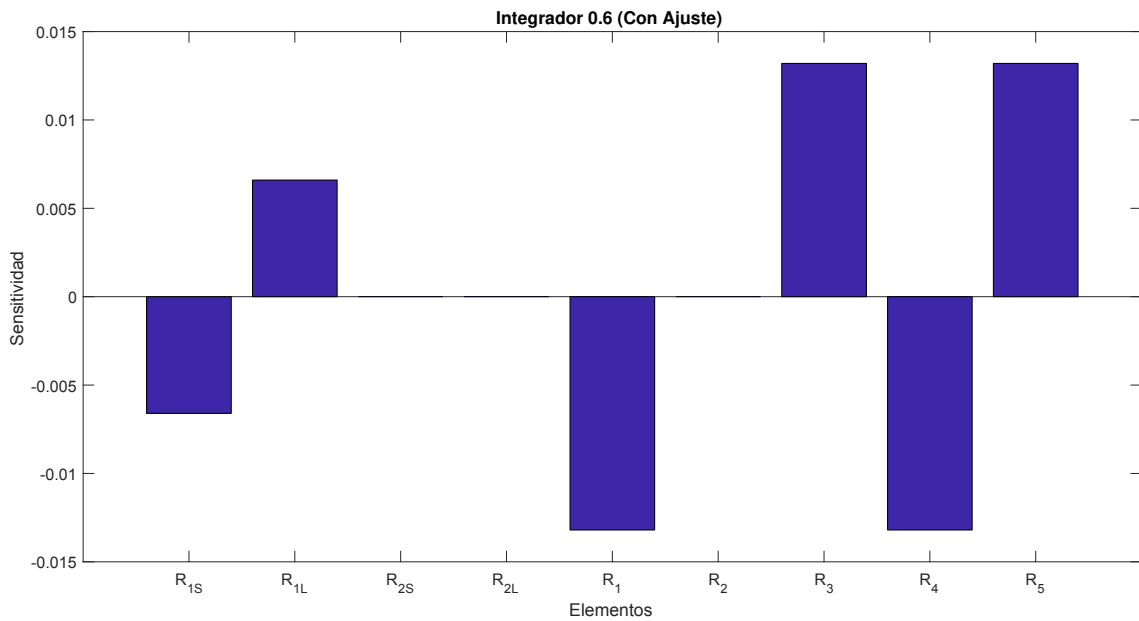


Figura 4.12: Sensibilidad del integrador de orden 0.6

Tabla 4.11: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.6

R_{S1}	R_{L1}	R_{S2}	R_{L2}	R_1
-6.60×10^{-3}	6.60×10^{-3}	0	-2.26×10^{-10}	-1.32×10^{-2}
R_2	R_3	R_4	R_5	-
2.53×10^{-8}	1.32×10^{-2}	-1.32×10^{-2}	1.32×10^{-2}	-

En la Figura 4.13 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.7$, donde los resistores R_1, R_3, R_4, R_5 tienen la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.12 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_1, R_3, R_4, R_5 disminuye el voltaje de salida en -17.2mV , incrementa en 17.2mV , disminuye en -17.2mV e incrementa de nuevo en 17.2mV respectivamente.

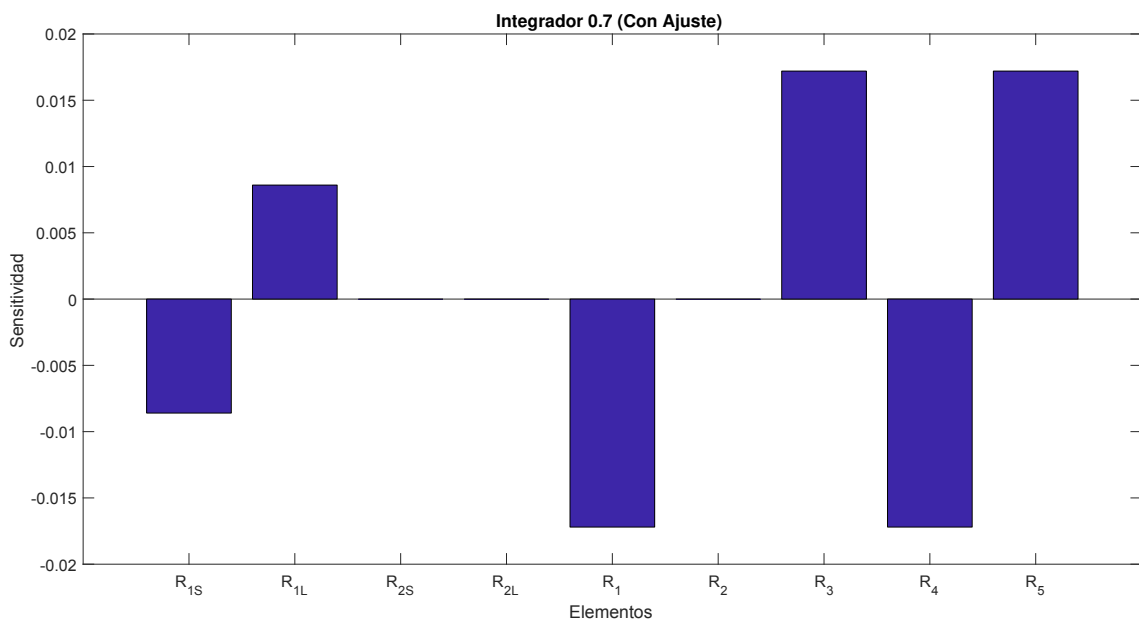


Figura 4.13: Sensibilidad del integrador de orden 0.7

Tabla 4.12: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.7

R_{s1}	R_{L1}	R_{s2}	R_{L2}	R_1
-8.60×10^{-3}	8.60×10^{-3}	0	-2.24×10^{-10}	-1.72×10^{-2}
R_2	R_3	R_4	R_5	-
2.45×10^{-8}	1.72×10^{-2}	-1.72×10^{-2}	1.72×10^{-2}	-

La Figura 4.14 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.8$, donde los resistores R_1, R_3, R_4, R_5 tienen la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.13 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_1, R_3, R_4, R_5 disminuye el voltaje de salida en -26.3mV , incrementa en 26.3mV , disminuye en -26.3mV e incrementa de nuevo en 26.3mV respectivamente.

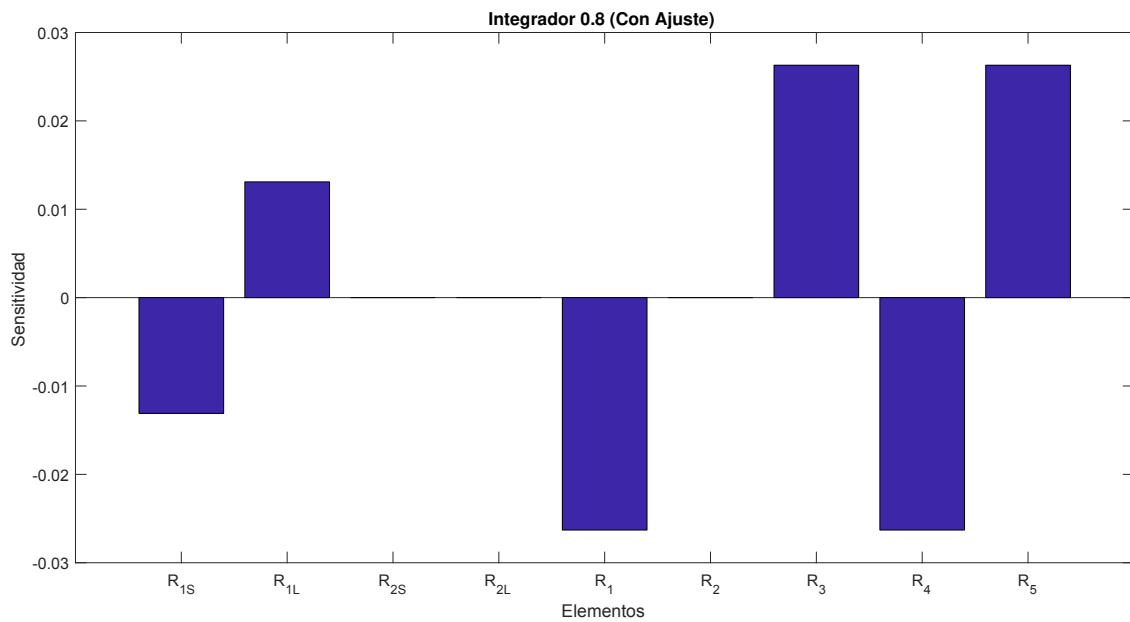


Figura 4.14: Sensibilidad del integrador de orden 0.8

Tabla 4.13: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.8

R_{s1}	R_{L1}	R_{s2}	R_{L2}	R_1
-1.31×10^{-2}	1.31×10^{-2}	0	-2.26×10^{-10}	-2.63×10^{-2}
R_2	R_3	R_4	R_5	-
2.40×10^{-8}	2.63×10^{-2}	-2.63×10^{-2}	2.63×10^{-2}	-

En la Figura 4.15 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.85$, donde los resistores R_1, R_3, R_4, R_5 tienen la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.14 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_1, R_3, R_4, R_5 disminuye el voltaje de salida en -32.1mV , incrementa en 32.1mV , disminuye en -32.1mV e incrementa de nuevo en 32.1mV respectivamente.

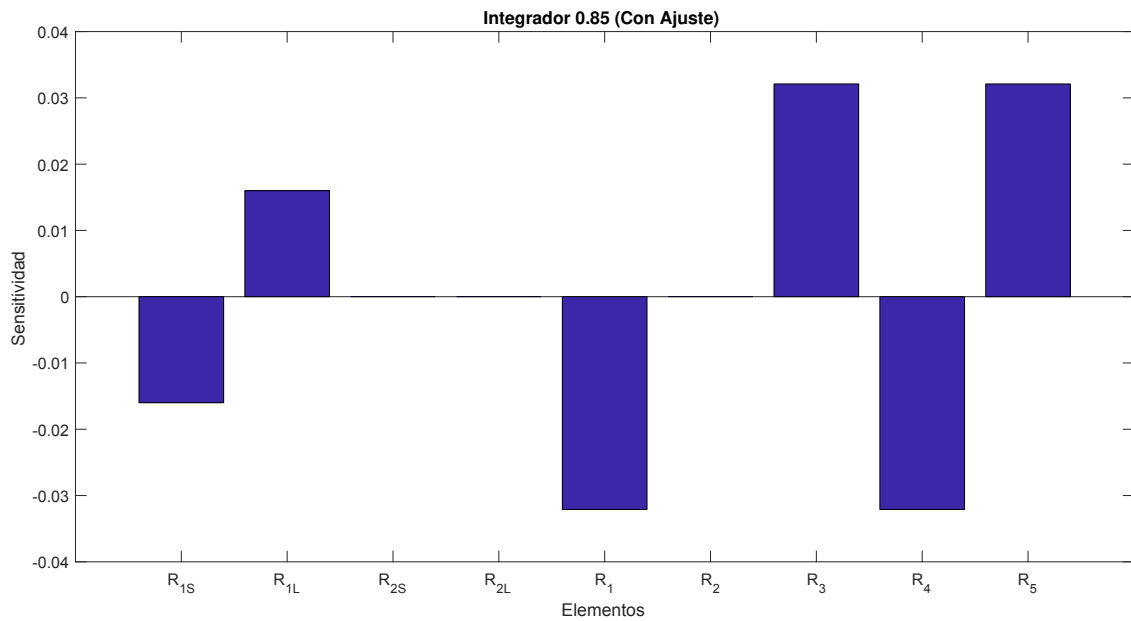


Figura 4.15: Sensibilidad del integrador de orden 0.85

Tabla 4.14: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.85

R_{S1}	R_{L1}	R_{S2}	R_{L2}	R_1
-1.60×10^{-2}	1.60×10^{-2}	0	-2.25×10^{-10}	-3.21×10^{-2}
R_2	R_3	R_4	R_5	-
2.37×10^{-8}	3.21×10^{-2}	-3.21×10^{-2}	3.21×10^{-2}	-

La Figura 4.16 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.9$, donde los resistores R_1, R_3, R_4, R_5 tienen la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.15 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_1, R_3, R_4, R_5 disminuye el voltaje de salida en -40.4mV , incrementa en 40.4mV , disminuye en -40.4mV e incrementa de nuevo en 40.4mV respectivamente.

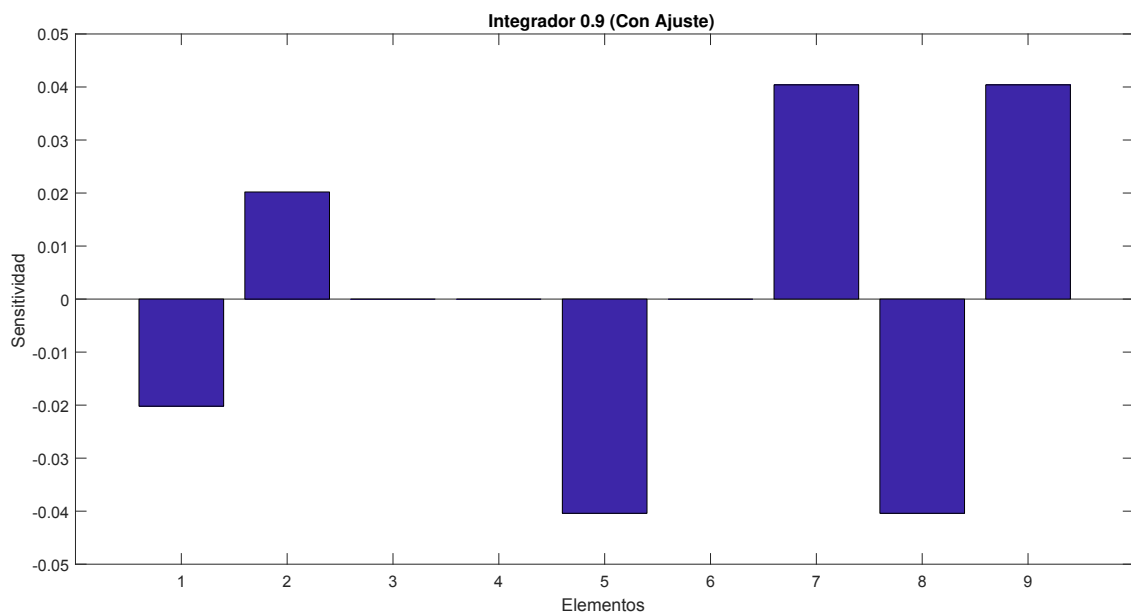


Figura 4.16: Sensibilidad del integrador de orden 0.9

Tabla 4.15: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.9

R_{s1}	R_{L1}	R_{s2}	R_{L2}	R_1
-2.02×10^{-2}	2.02×10^{-2}	0	-2.25×10^{-10}	-4.04×10^{-2}
R_2	R_3	R_4	R_5	-
2.35×10^{-8}	4.04×10^{-2}	-4.04×10^{-2}	4.04×10^{-2}	-

En la Figura 4.17 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.95$, donde los resistores R_1, R_3, R_4, R_5 tienen la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.16 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_1, R_3, R_4, R_5 disminuye el voltaje de salida en -61.6mV , incrementa en 61.6mV , disminuye en -61.6mV e incrementa de nuevo en 61.6mV respectivamente.

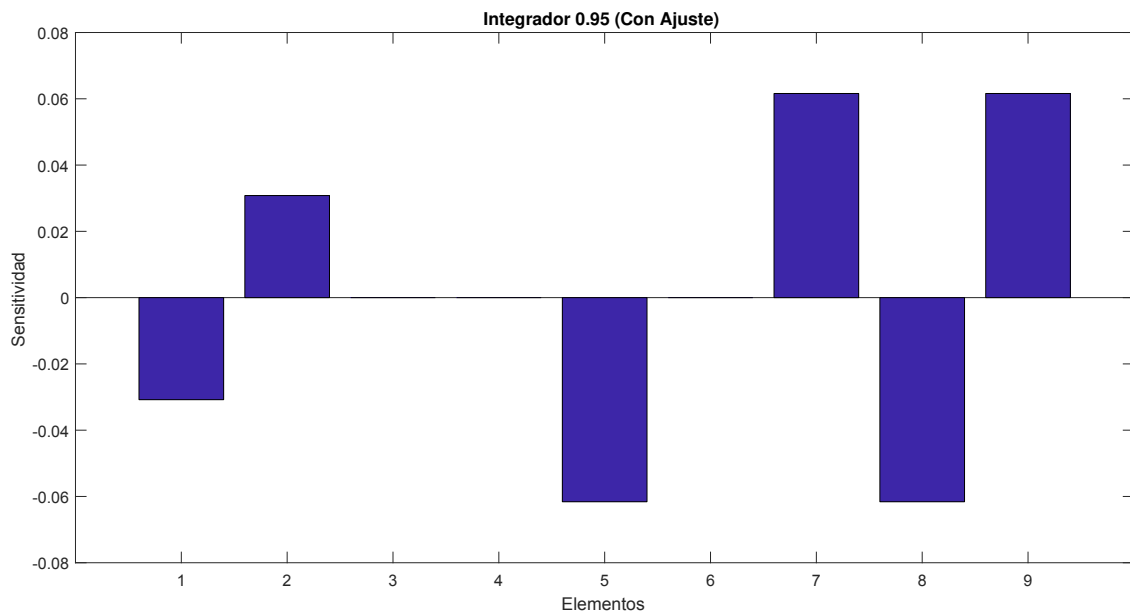


Figura 4.17: Sensibilidad del integrador de orden 0.95

Tabla 4.16: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.95

R_{s1}	R_{L1}	R_{s2}	R_{L2}	R_1
-3.08×10^{-2}	3.08×10^{-2}	0	-2.25×10^{-10}	-6.16×10^{-2}
R_2	R_3	R_4	R_5	-
2.49×10^{-8}	6.16×10^{-2}	-6.16×10^{-2}	6.16×10^{-2}	-

4.2. Foster y Cauer

El ajuste se realizó modificando el valor de A y se encontró experimentalmente el más conveniente, en donde se obtuviera una pendiente más aproximada a una pendiente ideal del integrador fraccionario. Los valores nuevos de A se muestran en la Tabla 4.17.

Tabla 4.17: Valores de ajuste en A.

Orden	Ideal	Sin Ajuste		Con Ajuste	
α	Pendiente (dB/Dec)	A	Pendiente (dB/Dec)	A	Pendiente (dB/Dec)
0.10	-2	1.22	-2.592	1.1505	-1.94
0.20	-4	1.50	-5.251	1.3529	-3.96
0.30	-6	1.86	-7.870	1.5641	-6.04
0.40	-8	2.33	-10.269	1.8571	-8.09
0.50	-10	3.00	-12.251	2.1746	-9.97
0.60	-12	4.00	-15.094	2.6363	-11.86
0.70	-14	5.66	-16.236	3.4444	-13.99
0.80	-16	9.00	-17.663	5.8965	-16.01
0.85	-17	12.33	-18.298	8.0909	-17.05
0.90	-18	19.00	-18.700	11.5000	-18.10
0.95	-19	39.00	-18.944	14.3846	-19.04

En la Figura 4.18 se puede observar gráficamente que los puntos que corresponden a la pendiente calculada desde la función de transferencia del integrador fraccionario se alejan de la línea que corresponde a la pendiente ideal, mientras que los puntos que corresponden a la pendiente con ajuste se encuentran más cercanos a la línea de la pendiente ideal.

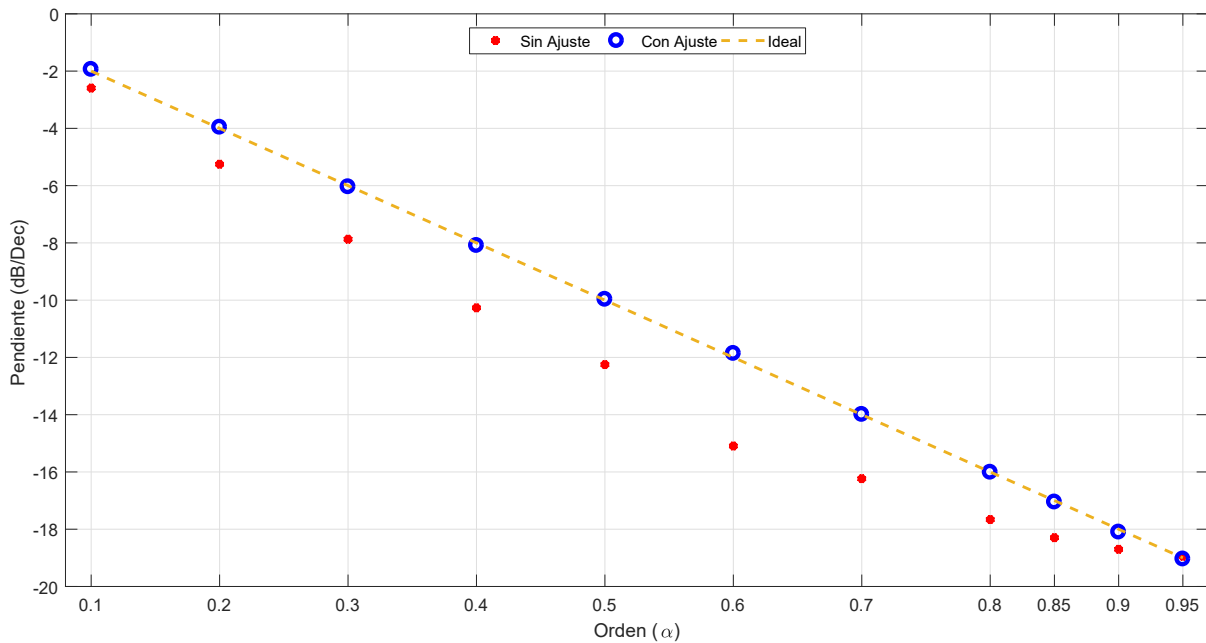


Figura 4.18: Pendientes del integrador fraccionario con ajuste, sin ajuste e ideal.

En la Figura 4.19 se muestra los valores de A con ajuste y sin ajuste. Donde podemos observar que el valor de A sin ajuste es más grande que el valor de A con ajuste. Además, la forma que toma el ajuste es de una exponencial, esto nos permite obtener una nueva Ecuación que permita ajustar la función de transferencia y hacer precisa la pendiente del integrador.

La Ecuación que aproxima los valores de ajuste en A se muestra en la Ecuación (4.4).

$$A = 1.237e^{0.2769\alpha} + 0.0177e^{6.954\alpha} \tag{4.4}$$

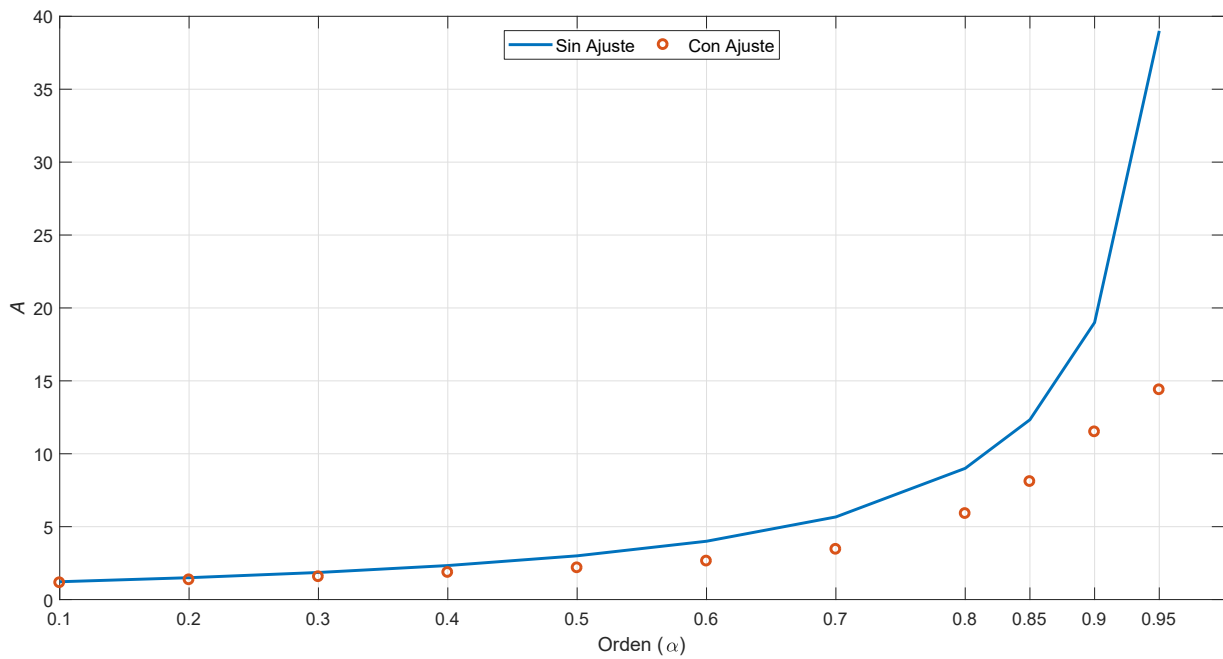


Figura 4.19: Valores de A sin ajuste y con ajuste.

En la Tabla 4.18 se muestra el error de la Ecuación de ajuste (4.19) y el valor de A experimental. Se puede observar que los mayores errores en la aproximación los obtenemos en los órdenes 0.7, 0.9 y 0.95 con -0.3588, 0.6649 y -0.3180 respectivamente, siendo el orden 0.9 con mayor error. En cambio, los demás órdenes α se encuentran con una aproximación aceptable.

Tabla 4.18: Error en la Ecuación de ajuste.

α	A	Ecuación de ajuste	Error
0.1	1.1505	1.3072	-0.1567
0.2	1.3529	1.3786	-0.0257
0.3	1.5641	1.4867	0.0774
0.4	1.8571	1.6676	0.1895
0.5	2.1746	1.9935	0.1811
0.6	2.6363	2.6088	0.0275
0.7	3.4444	3.8032	-0.3588
0.8	5.8965	6.1573	-0.2608
0.85	8.0909	8.0972	-0.0063
0.9	11.5000	10.8351	0.6649
0.95	14.3846	14.7026	-0.3180

4.2.1. Fase del integrador fraccionario

En la Tabla 4.19 se compara la fase experimental con la fase obtenida de manera ideal por la Ecuación 4.3. Obtenemos el error más alto en el orden de 0.9, siendo de 3.02 grados. En cambio, en los demás órdenes obtenemos un error menor a 2 grados.

Tabla 4.19: Frecuencia de corte y fase del integrador fraccionario.

α	Magnitud (dB) a 1Hz	Frecuencia de corte (Hz)	Fase experimental (Grados)	Fase de ideal (Grados)	Error (Grados)
0.1	1.44	583.4	-5.00	-4.5	0.50
0.2	2.52	655	-10.81	-9	1.81
0.3	3.99	597.7	-14.99	-13.5	1.49
0.4	5.35	554.3	-19.73	-18	1.73
0.5	6.59	527.7	-24.14	-22.5	1.64
0.6	8.66	446	-28.53	-27	1.53
0.7	10.92	368.1	-32.72	-31.5	1.22
0.8	15.34	251.3	-36.92	-36	0.92
0.85	17.14	213.7	-39.17	-38.25	0.92
0.9	19.51	174	-43.52	-40.5	3.02
0.95	23.53	100.2	-42.15	-42.75	-0.60

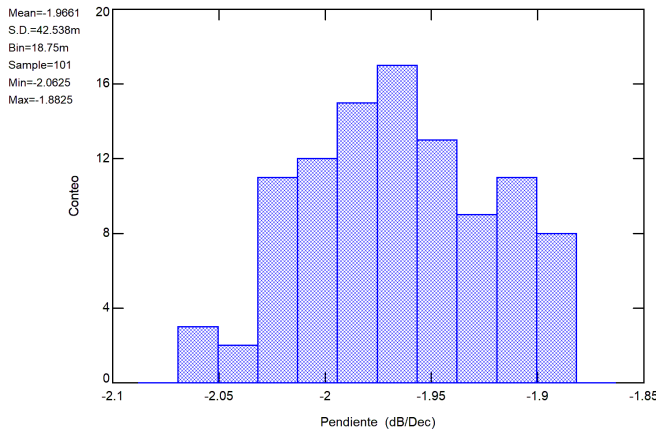
4.2.2. Análisis de Monte Carlo

Se realizó un análisis de Monte Carlo con los nuevos valores del circuito, considerando el ajuste exponencial de la Ecuación (4.4). La Tabla 4.20 muestra la media de las pendientes de los integradores de orden fraccionario con ajuste y su error. Obtuvimos un error máximo de 0.32 dB/Dec que corresponde al orden de 0.7, sin embargo, los errores obtenidos son menores a 1dB/Dec, así la pendiente del integrador fraccionario se aproxima a una ideal.

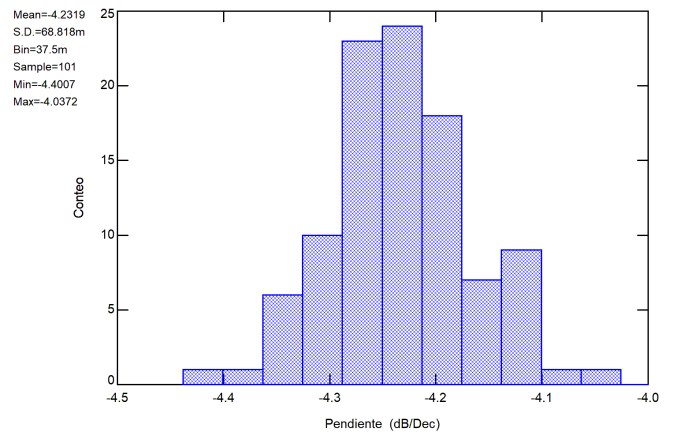
Tabla 4.20: Media de la pendiente con ajuste.

α	Pendiente Ideal (dB/Dec)	Media (dB/Dec)	Error (dB/Dec)
0.1	-2.00	-1.96	-0.04
0.2	-4.00	-4.23	0.23
0.3	-6.00	-6.20	0.20
0.4	-8.00	-8.23	0.23
0.5	-10.00	-10.29	0.29
0.6	-12.00	-12.28	0.28
0.7	-14.00	-14.32	0.32
0.8	-16.00	-16.02	0.02
0.85	-17.00	-17.03	0.03
0.9	-18.00	-18.27	0.27
0.95	-19.00	-18.82	-0.18

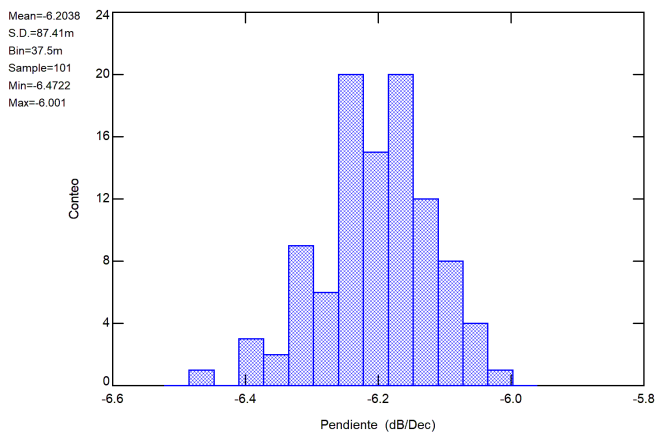
Los histogramas obtenidos en el análisis de Monte Carlo se presentan en la Figura 4.20.



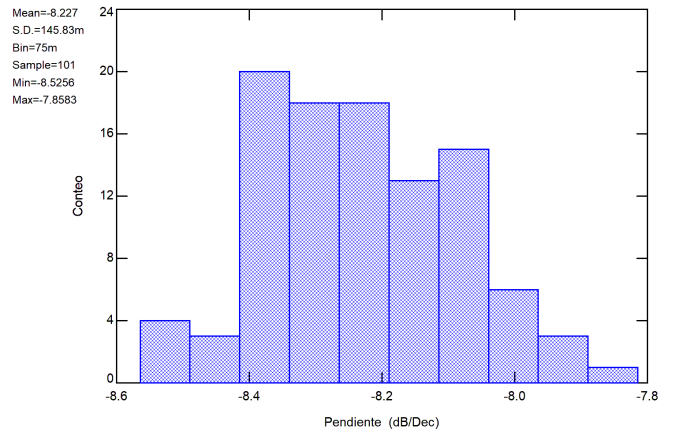
(a) $\alpha = 0.1$



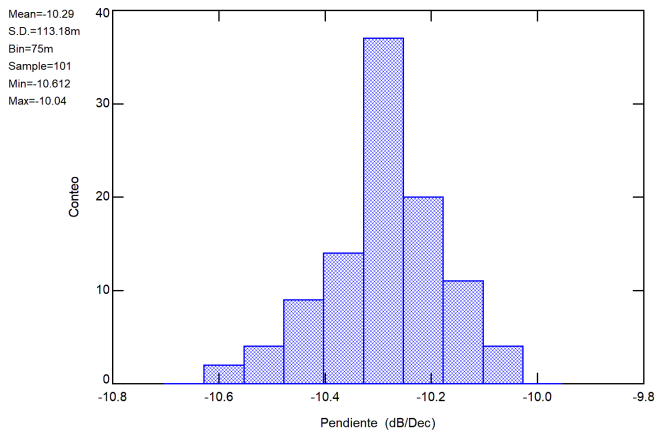
(b) $\alpha = 0.2$



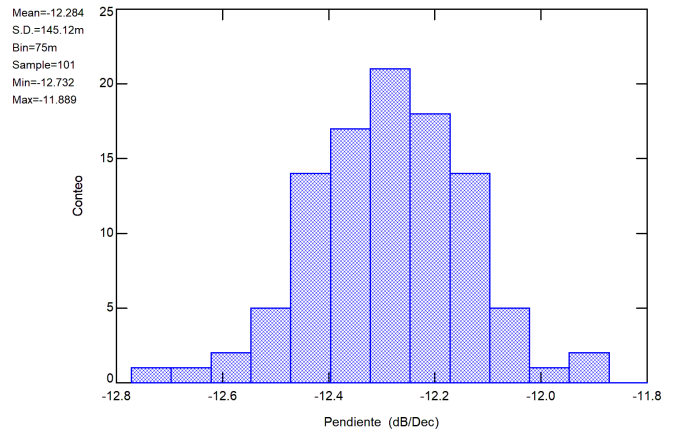
(c) $\alpha = 0.3$



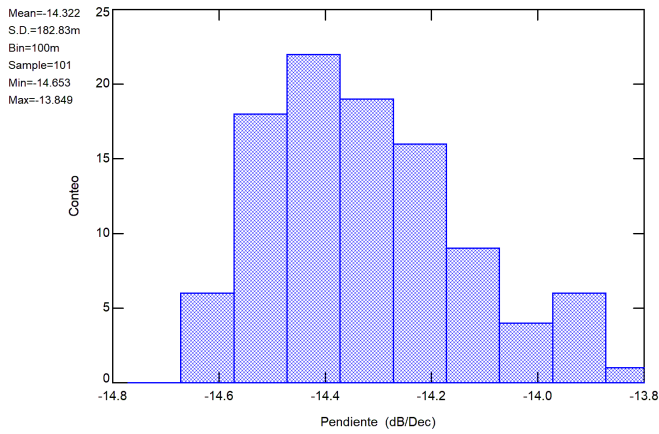
(d) $\alpha = 0.4$



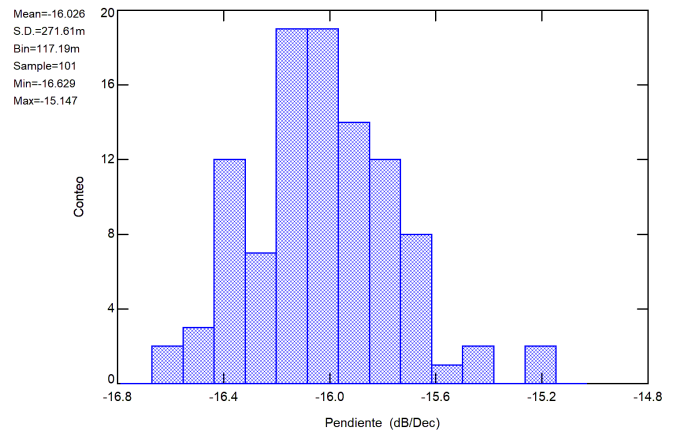
(e) $\alpha = 0.5$



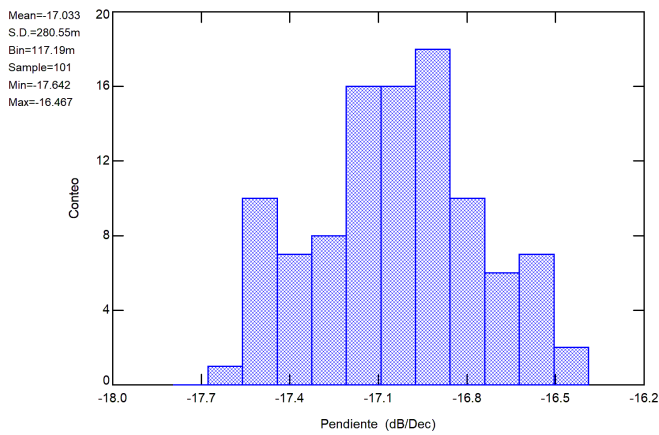
(f) $\alpha = 0.6$



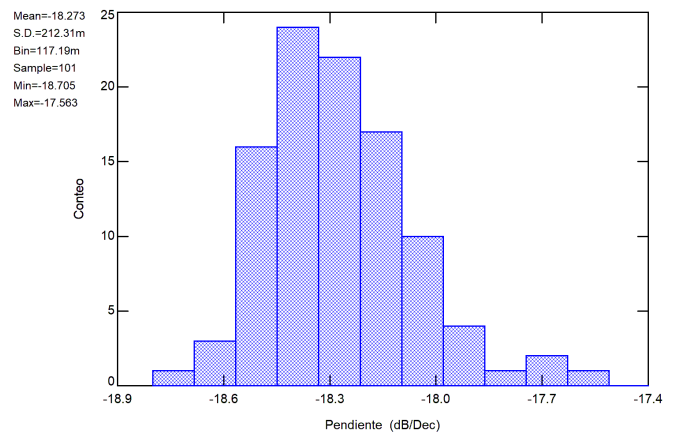
(g) $\alpha = 0.7$



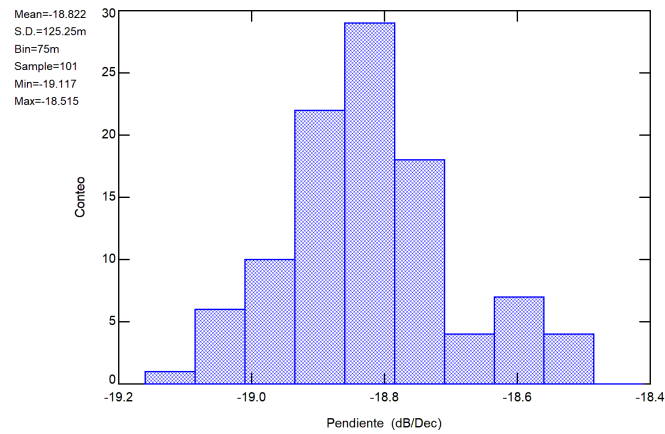
(h) $\alpha = 0.8$



(i) $\alpha = 0.85$



(j) $\alpha = 0.9$



(k) $\alpha = 0.95$

Figura 4.20: Histograma del análisis de Monte Carlo para integradores fraccionarios de 0.1 hasta 0.95 con ajuste.

En la Figura 4.21 observamos en círculos rojos la media de la pendiente obtenida por Monte Carlo con ajuste y en línea azul la pendiente ideal. La pendiente con ajuste en A se encuentra mucho más cerca de la pendiente ideal.

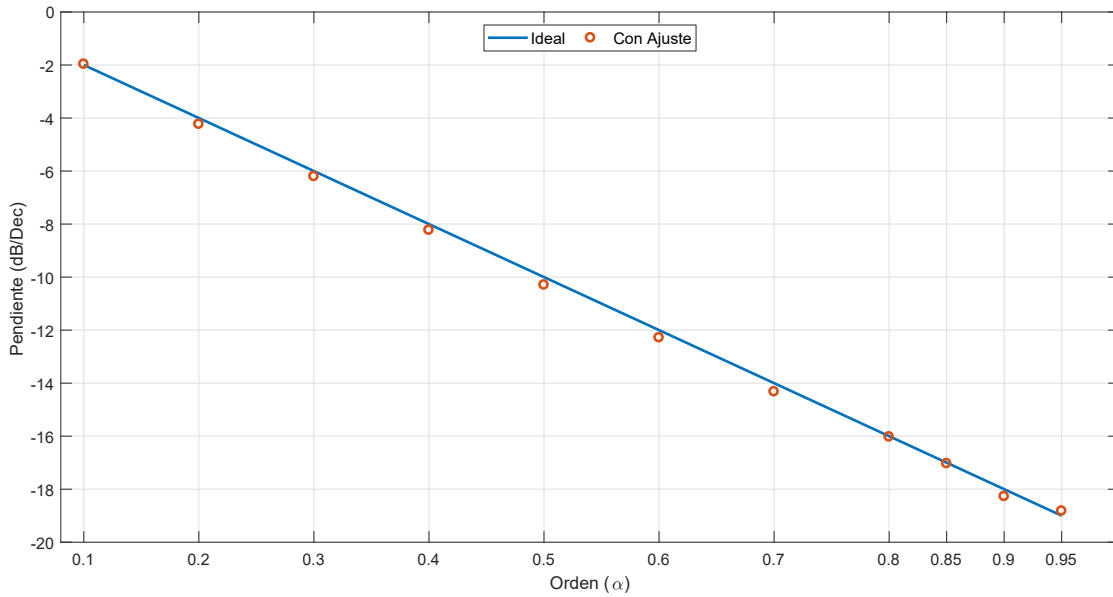


Figura 4.21: Media de la pendiente de Monte Carlo.

En la Figura 4.22 observamos en círculos amarillos la pendiente máxima y en círculos rojos la pendiente mínima del análisis de Monte Carlo con ajuste, y la línea azul representa la pendiente ideal. Tanto los máximos como los mínimos para cada orden, se puede distinguir que encierran la pendiente ideal sin alejarse y en algunos casos hasta la tocan, dando una apreciación de que la pendiente del integrador fraccionario con ajuste se encontrará entre la zona del círculo rojo con el círculo amarillo y que además es muy cerca de la pendiente ideal.

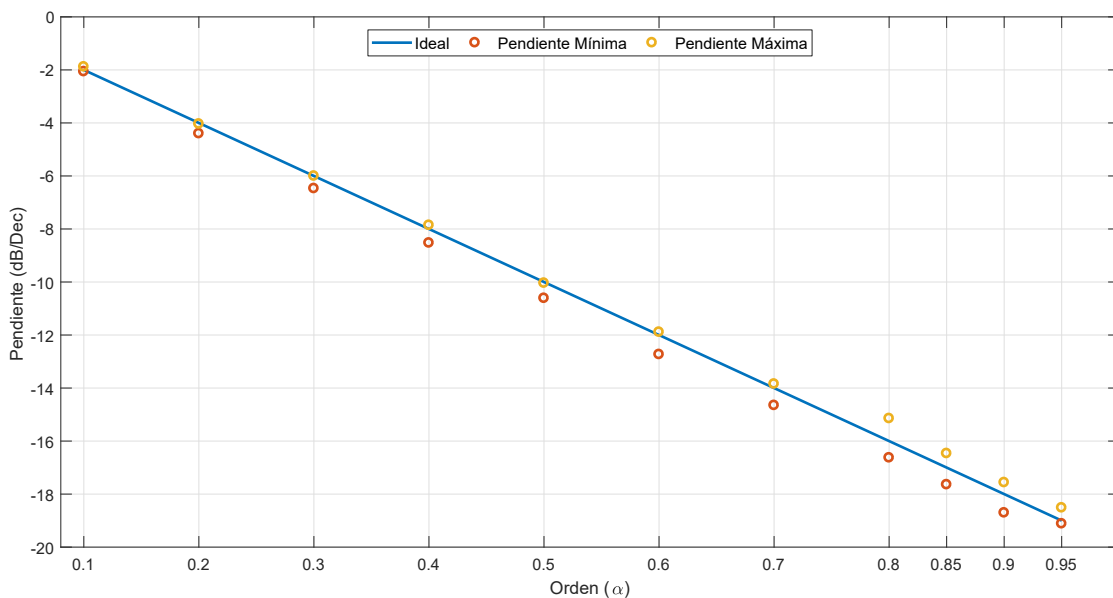


Figura 4.22: Pendiente máxima y mínima de Monte Carlo.

4.2.3. Análisis de Sensibilidad

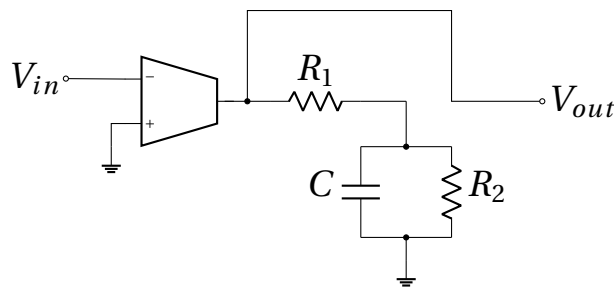


Figura 4.23: Integrador fraccionario por el método de Foster y Cauer.

En la Figura 4.24 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.1$, donde el resistor R_1 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.21 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_1 aumenta el voltaje de salida en 8.89mV .

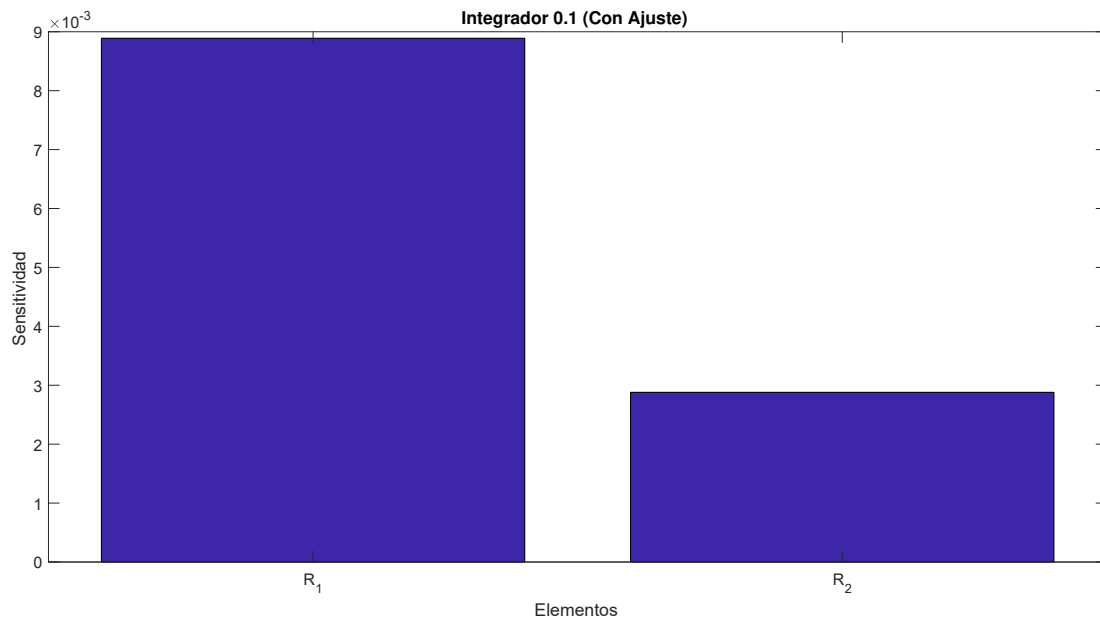


Figura 4.24: Sensibilidad del integrador de orden 0.1

Tabla 4.21: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.1

Elemento	R_1 (V/%)	R_2 (V/%)
Sens	8.89×10^{-3}	2.88×10^{-3}

En la Figura 4.25 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.2$, donde el resistor R_1 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.22 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_1 aumenta el voltaje de salida en 7.33mV .

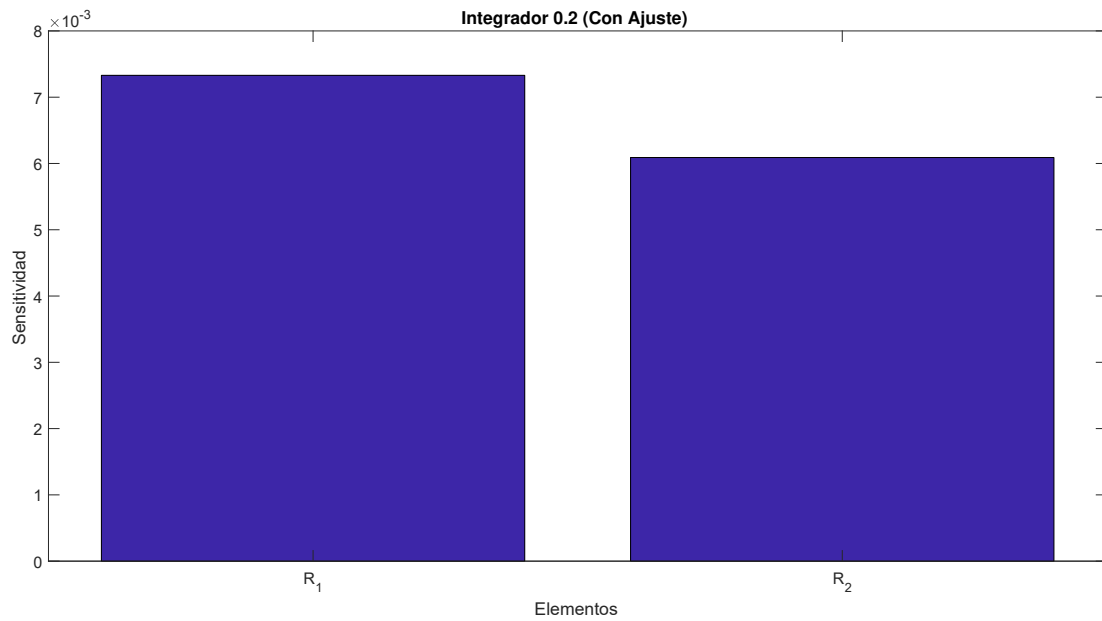


Figura 4.25: Sensibilidad del integrador de orden 0.2

Tabla 4.22: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.2

Elemento	R_1 (V / %)	R_2 (V / %)
Sens	7.33×10^{-3}	6.09×10^{-3}

En la Figura 4.26 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.3$, donde el resistor R_2 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.23 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada 1%Ω de incremento en R_2 aumenta el voltaje de salida en 9.38mV.

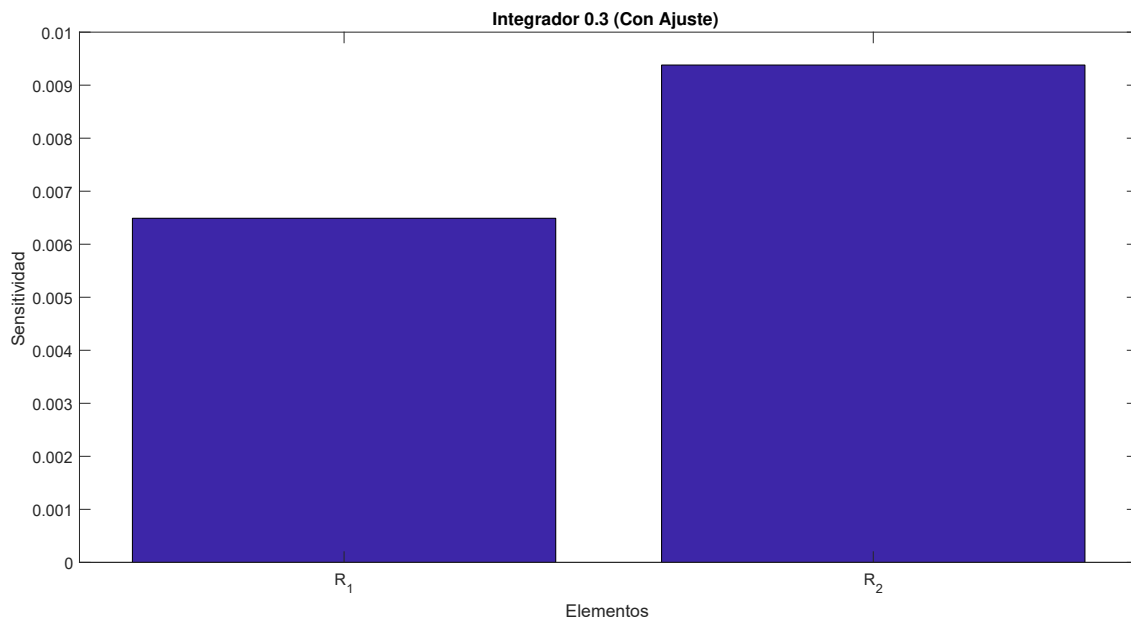


Figura 4.26: Sensibilidad del integrador de orden 0.3

Tabla 4.23: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.3

Elemento	R_1 (V / %)	R_2 (V / %)
Sens	6.49×10^{-3}	9.38×10^{-3}

En la Figura 4.27 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.4$, donde el resistor R_2 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.24 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_2 aumenta el voltaje de salida en 13.4mV.

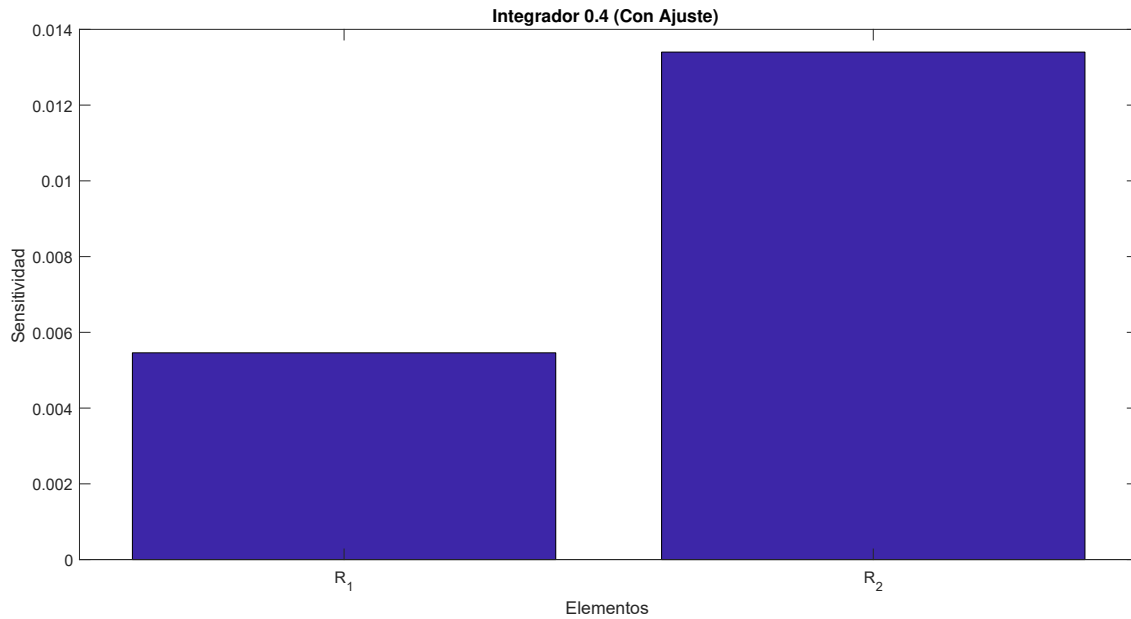


Figura 4.27: Sensibilidad del integrador de orden 0.4

Tabla 4.24: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.4

Elemento	R_1 (V / %)	R_2 (V / %)
Sens	5.46×10^{-3}	1.34×10^{-2}

En la Figura 4.28 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.5$, donde el resistor R_2 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.25 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_2 aumenta el voltaje de salida en 17mV.

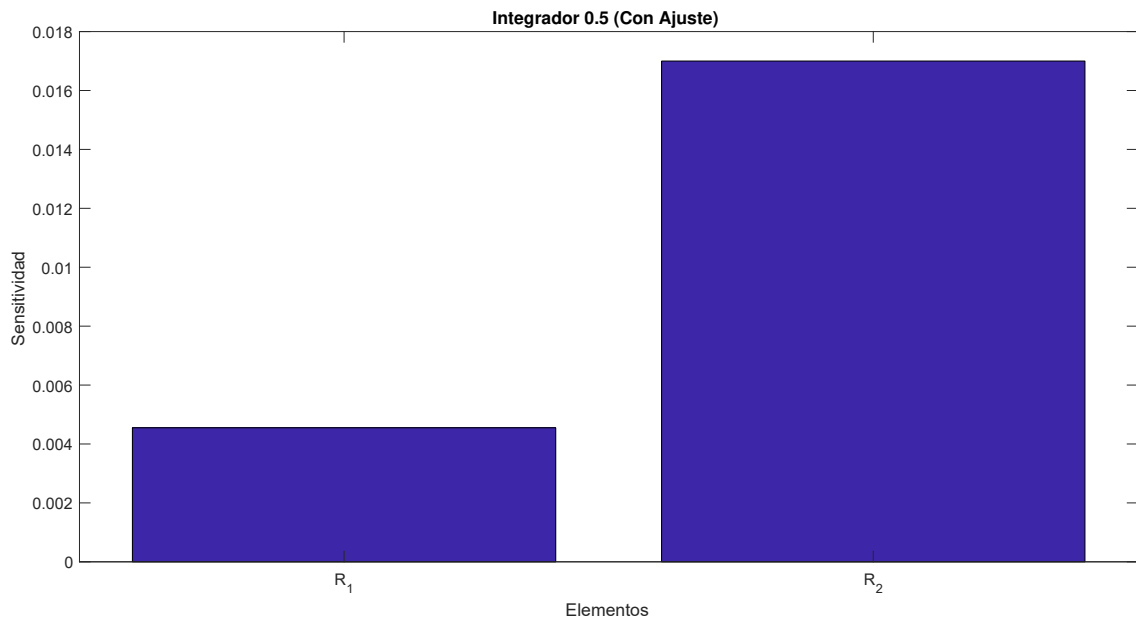


Figura 4.28: Sensibilidad del integrador de orden 0.5

Tabla 4.25: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.5

Elemento	R_1 (V / %)	R_2 (V / %)
Sens	4.55×10^{-3}	1.70×10^{-2}

En la Figura 4.29 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.6$, donde el resistor R_2 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.26 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_2 aumenta el voltaje de salida en 22.7mV.

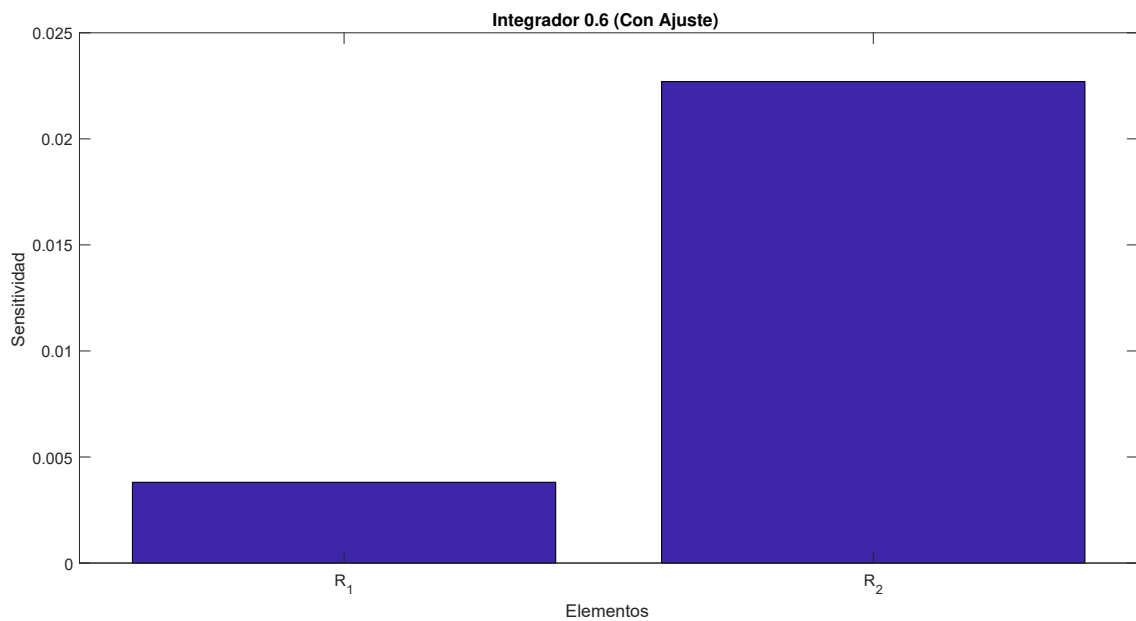


Figura 4.29: Sensibilidad del integrador de orden 0.6

Tabla 4.26: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.6

Elemento	R_1 (V / %)	R_2 (V / %)
Sens	3.81×10^{-3}	2.27×10^{-2}

En la Figura 4.30 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.7$, donde el resistor R_2 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.27 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_2 aumenta el voltaje de salida en 30.6mV.

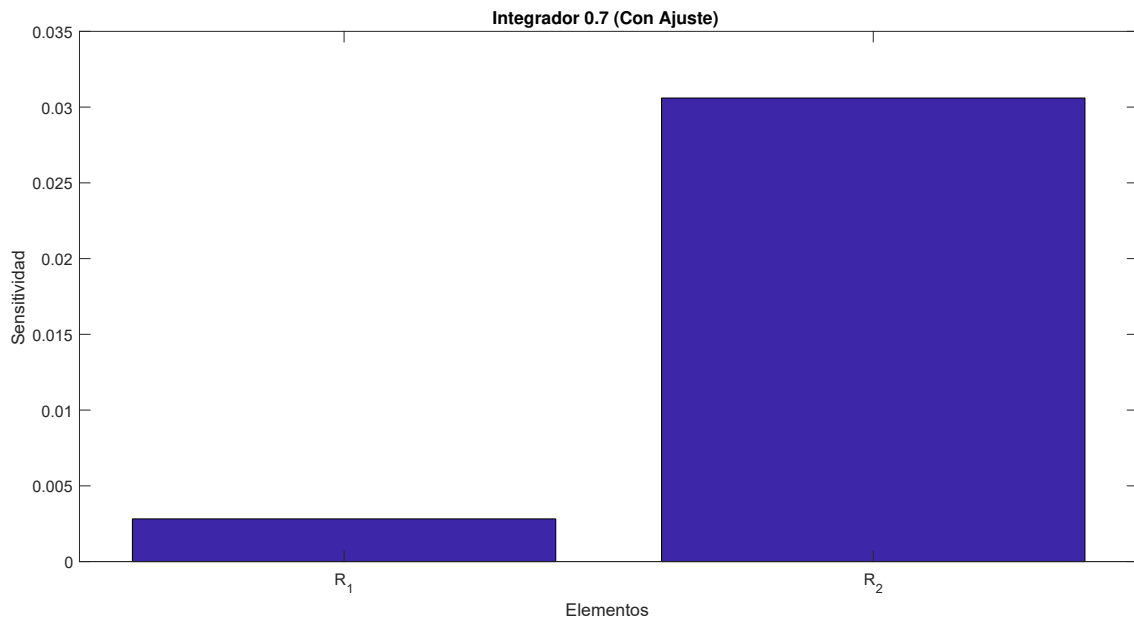


Figura 4.30: Sensibilidad del integrador de orden 0.7

Tabla 4.27: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.7

Elemento	R_1 (V / %)	R_2 (V / %)
Sens	2.82×10^{-3}	3.06×10^{-2}

En la Figura 4.31 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.8$, donde el resistor R_2 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.28 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_2 aumenta el voltaje de salida en 57.2mV.

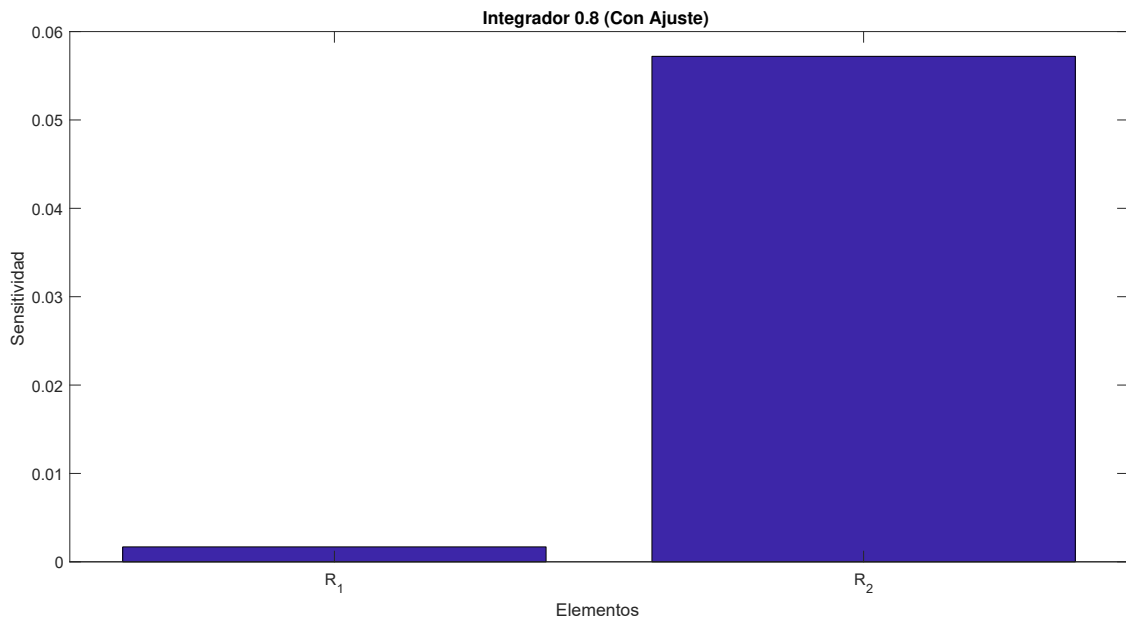


Figura 4.31: Sensibilidad del integrador de orden 0.8

Tabla 4.28: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.8

Elemento	R_1 (V / %)	R_2 (V / %)
Sens	1.69×10^{-3}	5.72×10^{-2}

En la Figura 4.32 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.85$, donde el resistor R_2 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.29 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_2 aumenta el voltaje de salida en 76.9mV.

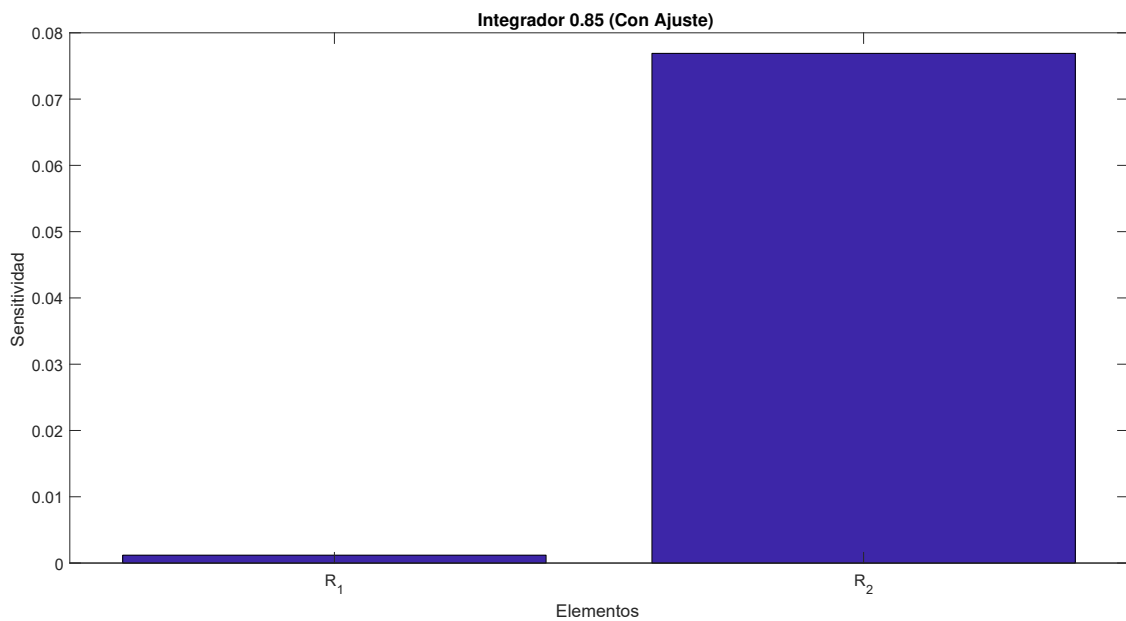


Figura 4.32: Sensibilidad del integrador de orden 0.85

Tabla 4.29: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.85

Elemento	R_1 (V/%)	R_2 (V/%)
Sens	1.19×10^{-3}	7.69×10^{-2}

En la Figura 4.33 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.9$, donde el resistor R_2 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.30 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_2 aumenta el voltaje de salida en 100mV.

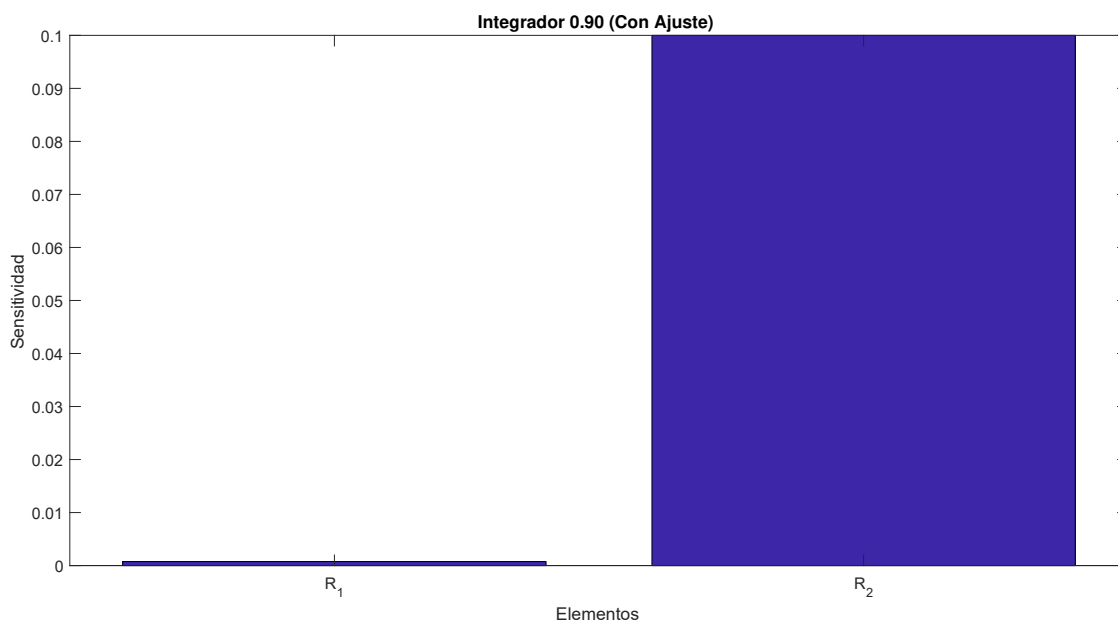


Figura 4.33: Sensibilidad del integrador de orden 0.9

Tabla 4.30: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.9

Elemento	R_1 (V/%)	R_2 (V/%)
Sens	7.62×10^{-4}	1.00×10^{-1}

En la Figura 4.34 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.95$, donde el resistor R_2 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.31 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_2 aumenta el voltaje de salida en 143.1mV.

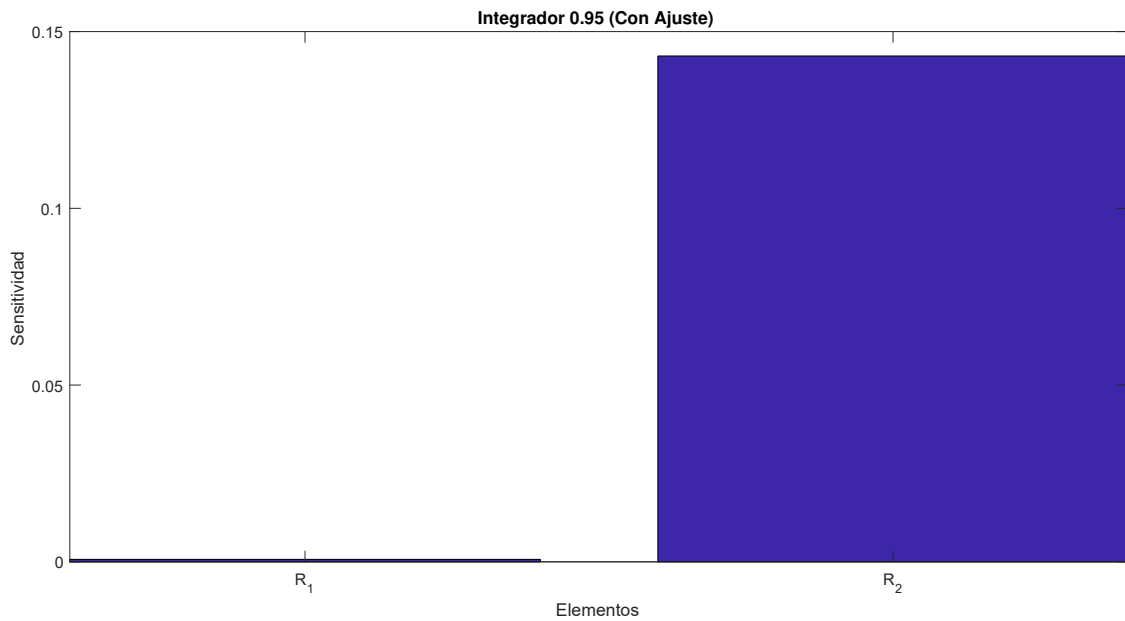


Figura 4.34: Sensibilidad del integrador de orden 0.95

Tabla 4.31: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.95

Elemento	R_1 (V / %)	R_2 (V / %)
Sens	6.951×10^{-4}	1.431×10^{-1}

4.3. Grafo de Señal

Se modificando el valor de A y se encontró experimentalmente el más conveniente, en donde se obtuviera una pendiente más cercana a una pendiente ideal del integrador fraccionario. Los valores nuevos de A se muestran en la Tabla 4.32.

Tabla 4.32: Valores de ajuste en A .

Orden	Ideal	Sin Ajuste		Con Ajuste	
	Pendiente (dB/Dec)	A	Pendiente (dB/Dec)	A	Pendiente (dB/Dec)
0.10	-2	1.22	-3.25	1.1621	-2.18
0.20	-4	1.50	-5.30	1.3392	-4.12
0.30	-6	1.86	-8.11	1.5974	-6.21
0.40	-8	2.33	-9.94	1.8571	-8.12
0.50	-10	3.00	-12.37	2.2786	-10.46
0.60	-12	4.00	-13.65	2.6363	-12.28
0.70	-14	5.66	-15.10	3.6511	-13.90
0.80	-16	9.00	-17.37	5.6667	-16.25
0.85	-17	12.33	-18.63	6.4074	-16.90
0.90	-18	19.00	-19.89	7.3333	-18.05
0.95	-19	39.00	-19.22	9.0000	-18.92

En la Figura 4.35 se puede observar gráficamente que los puntos que corresponden a la pendiente calculada desde la función de transferencia del integrador fraccionario se alejan de la línea que corresponde a la pendiente ideal, mientras que los puntos que corresponden a la pendiente con ajuste se encuentran más cercanos a la línea de la pendiente ideal.

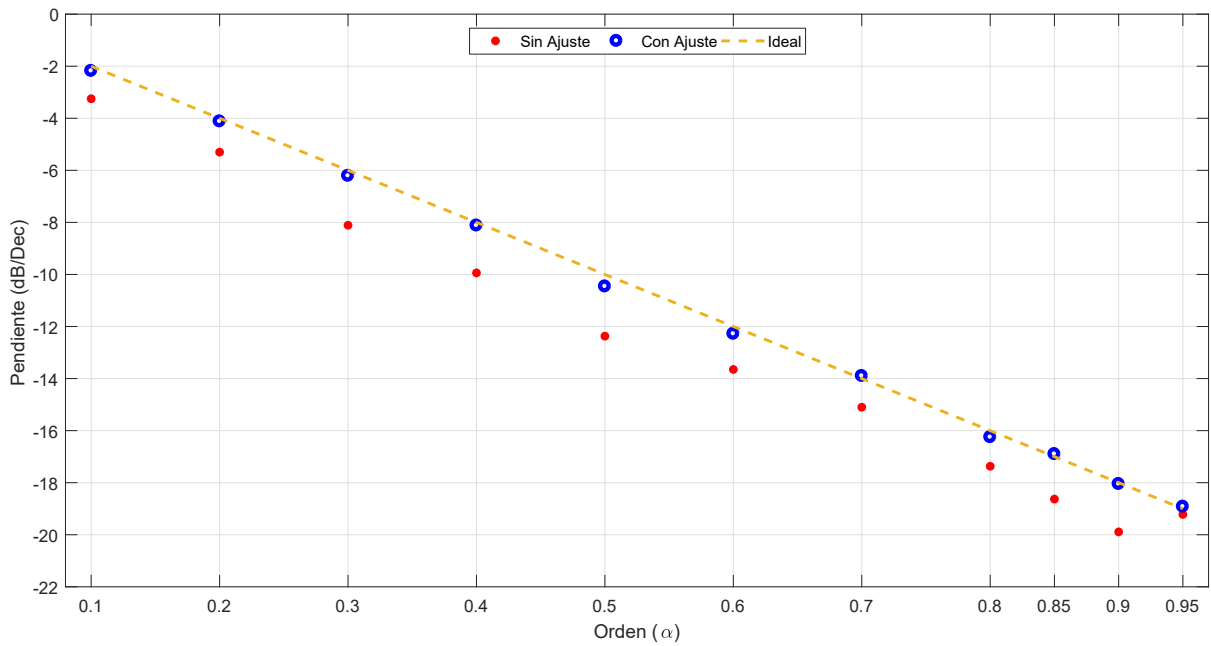


Figura 4.35: Pendientes del integrador fraccionario con ajuste, sin ajuste e ideal.

En la Figura 4.36 se muestra los valores de A con ajuste y sin ajuste. Donde podemos observar que el valor de A sin ajuste es más grande que el valor de A con ajuste. Además, la forma que toma el ajuste es de una exponencial, esto nos permite obtener una nueva Ecuación que permita ajustar la función de transferencia y hacer precisa la pendiente del integrador.

La Ecuación que aproxima los valores de ajuste en A se muestra en la Ecuación (4.5).

$$A = 0.969e^{-0.5249\alpha} + 0.2107e^{3.879\alpha} \tag{4.5}$$

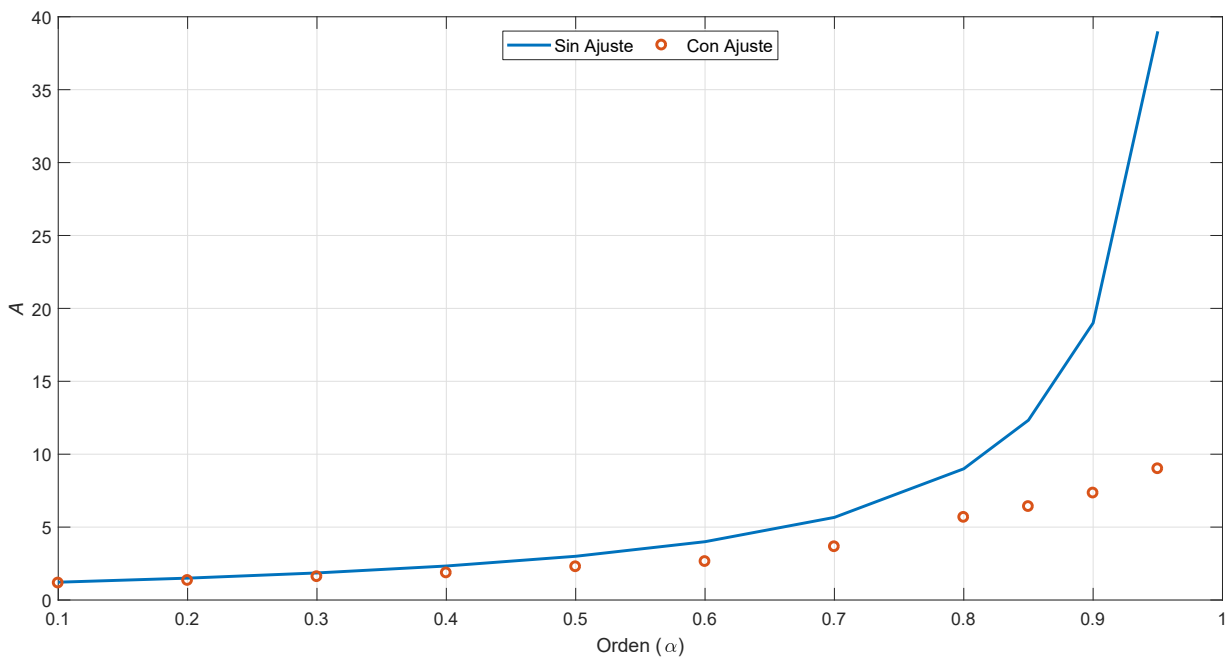


Figura 4.36: Valores de A sin ajuste y con ajuste.

En la Tabla 4.33 se muestra el error de la Ecuación de ajuste (4.5) y el valor de A experimental. Se puede observar que los mayores errores en la aproximación los obtenemos en los ordenes 0.6, 0.7 y 0.8 con -0.2308, -0.2034 y 0.3379 respectivamente, siendo el orden 0.8 con mayor error. En cambio, los demás ordenes α se encuentran con una aproximación aceptable.

Tabla 4.33: Error en la Ecuación de ajuste.

α	A	Ecuación de ajuste	Error
0.1	1.1621	1.2300	-0.0679
0.2	1.3392	1.3301	0.0091
0.3	1.5974	1.5024	0.0950
0.4	1.8571	1.7798	0.0773
0.5	2.2786	2.2108	0.0678
0.6	2.6363	2.8671	-0.2308
0.7	3.6511	3.8545	-0.2034
0.8	5.6667	5.3288	0.3379
0.85	6.4074	6.3166	0.0908
0.9	7.3333	7.5198	-0.1865
0.95	9.0000	8.9843	0.0157

4.3.1. Fase del integrador fraccionario

En la Tabla 4.34 se compara la fase experimental con la fase obtenida de manera ideal por la Ecuación 4.3. Obtenemos el error más alto en los ordenes de 0.3, 0.4 y 0.5, con errores de 5.92, 4.81 y 2.48 grados respectivamente.

Tabla 4.34: Frecuencia de corte y fase del integrador fraccionario.

α	Magnitud (dB) a 1Hz	Frecuencia de corte (Hz)	Fase experimental (Grados)	Fase de (4.3) (Grados)	Error (Grados)
0.1	1.27	2530	-6.90	-4.5	2.40
0.2	2.51	1953	-10.19	-90	1.19
0.3	3.97	1464	-19.42	-13.50	5.92
0.4	5.44	1360	-22.81	-18.00	4.81
0.5	7.21	1148	-24.98	-22.50	2.48
0.6	8.61	1291	-28.95	-27.00	1.95
0.7	11.43	950.50	-33.12	-31.50	1.62
0.8	14.95	653.30	-33.58	-36.00	-2.42
0.85	16.12	646.20	-38.31	-38.25	0.06
0.9	16.92	602.14	-39.37	-40.50	-1.13
0.95	19.13	451.70	-40.29	-42.75	-2.46

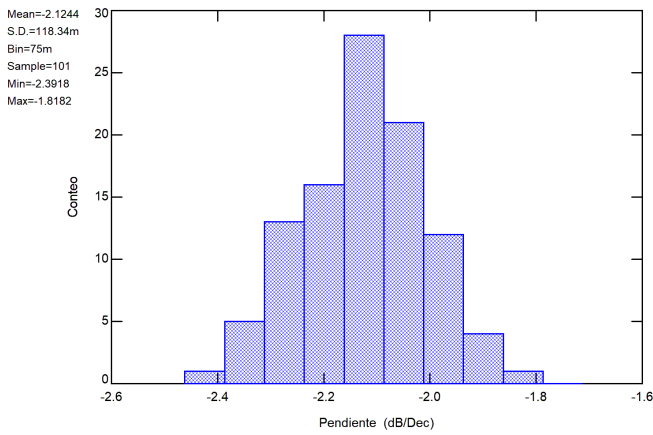
4.3.2. Análisis de Monte Carlo

Se realizó un análisis de Monte Carlo con los nuevos valores del circuito, considerando el ajuste exponencial de la Ecuación (4.5). La Tabla 4.35 muestra la media de las pendientes de los integradores de orden fraccionario con ajuste y su error. Obtuvimos un error máximo de 0.58 dB/Dec que corresponde al orden de 0.5, sin embargo, los errores obtenidos son menores a 1dB/Dec, así la pendiente del integrador fraccionario se aproxima a una ideal.

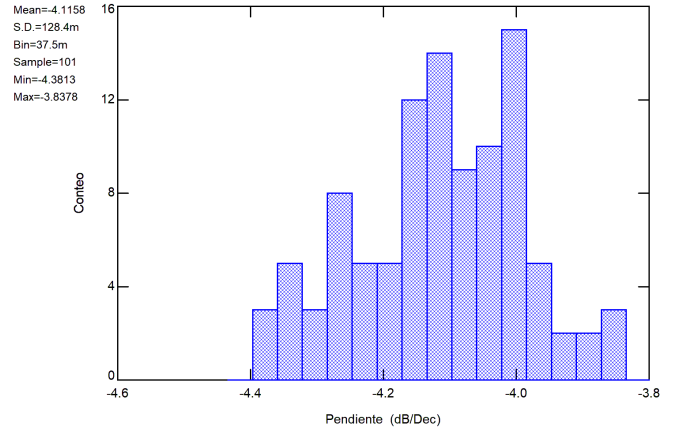
Tabla 4.35: Media de la pendiente con ajuste.

α	Pendiente Ideal (dB/Dec)	Media (dB/Dec)	Error (dB/Dec)
0.1	-2.00	-2.12	0.12
0.2	-4.00	-4.11	0.11
0.3	-6.00	-6.25	0.25
0.4	-8.00	-8.13	0.13
0.5	-10.00	-10.58	0.58
0.6	-12.00	-12.09	0.09
0.7	-14.00	-14.15	0.15
0.8	-16.00	-15.85	0.15
0.85	-17.00	-17.03	0.03
0.9	-18.00	-17.91	-0.09
0.95	-19.00	-18.95	-0.05

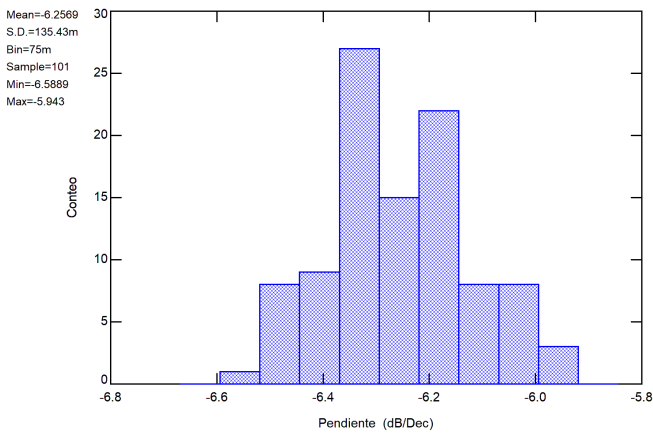
Los histogramas obtenidos en el análisis de Monte Carlo se presentan en la Figura 4.37.



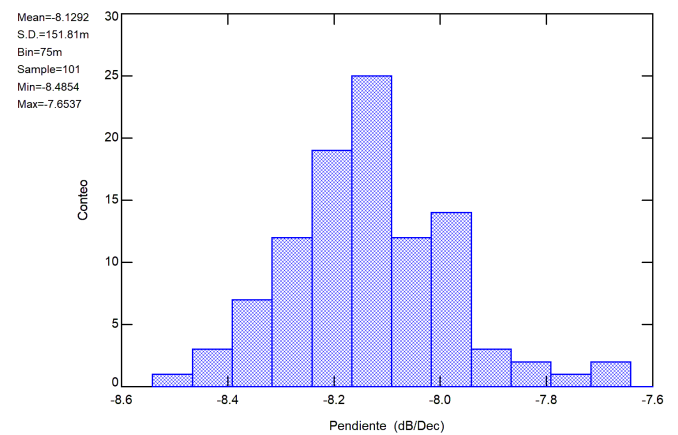
(a) $\alpha = 0.1$



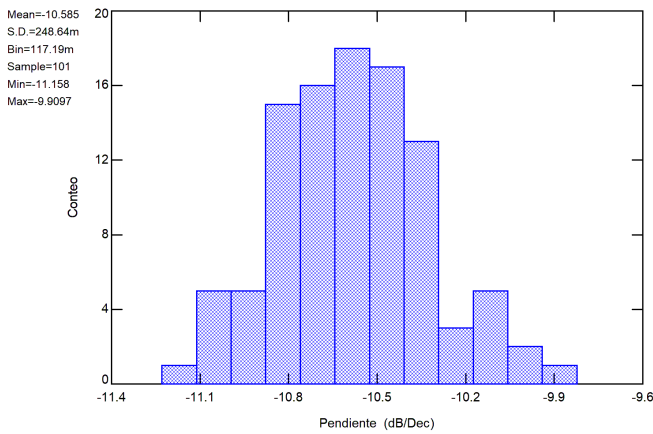
(b) $\alpha = 0.2$



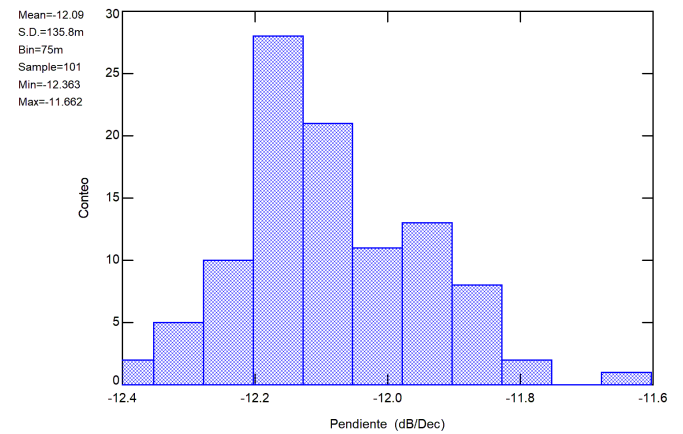
(c) $\alpha = 0.3$



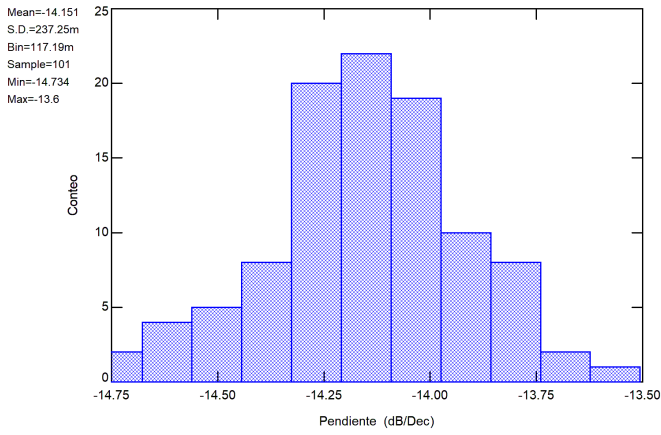
(d) $\alpha = 0.4$



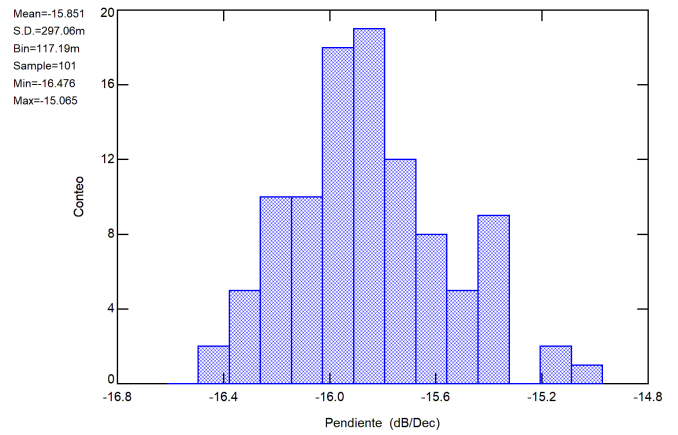
(e) $\alpha = 0.5$



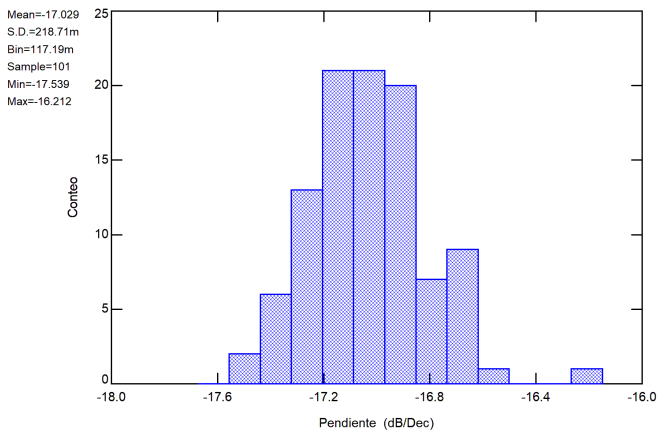
(f) $\alpha = 0.6$



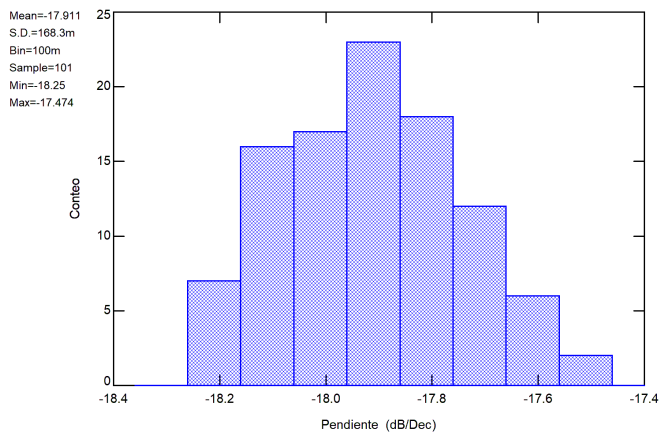
(g) $\alpha = 0.7$



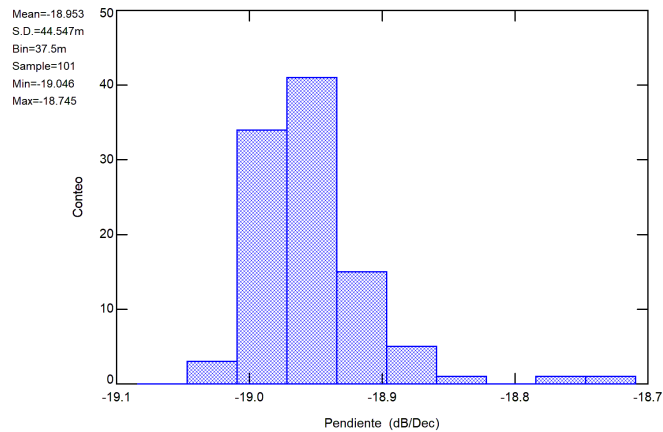
(h) $\alpha = 0.8$



(i) $\alpha = 0.85$



(j) $\alpha = 0.9$



(k) $\alpha = 0.95$

Figura 4.37: Histograma del análisis de Monte Carlo para integradores fraccionarios de 0.1 hasta 0.95 con ajuste.

En la Figura 4.38 observamos en círculos rojos la media de la pendiente obtenida por Monte Carlo con ajuste y en línea azul la pendiente ideal. La pendiente con ajuste en A se encuentra mucho más cerca de la pendiente ideal.

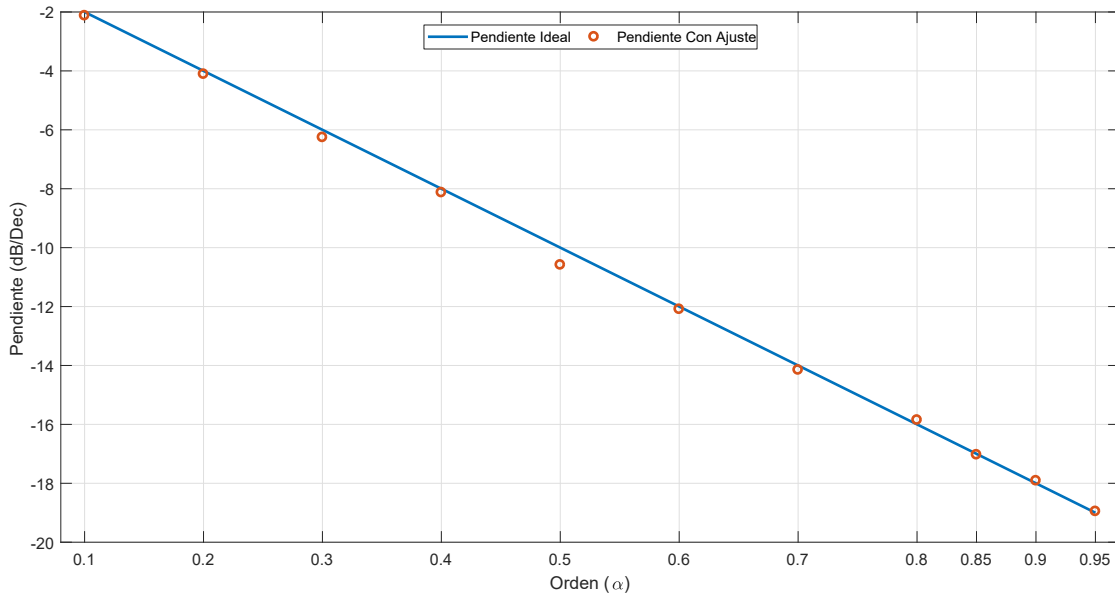


Figura 4.38: Media de la pendiente de Monte Carlo.

En la Figura 4.39 observamos en círculos amarillos la pendiente máxima y en círculos rojos la pendiente mínima del análisis de Monte Carlo con ajuste, y la línea azul representa la pendiente ideal. Tanto los máximos como los mínimos para cada orden, se puede distinguir que encierran la pendiente ideal sin alejarse y en algunos casos hasta la tocan, dando una apreciación de que la pendiente del integrador fraccionario con ajuste se encontrará entre la zona del círculo rojo con el círculo amarillo y que además es muy cerca de la pendiente ideal.

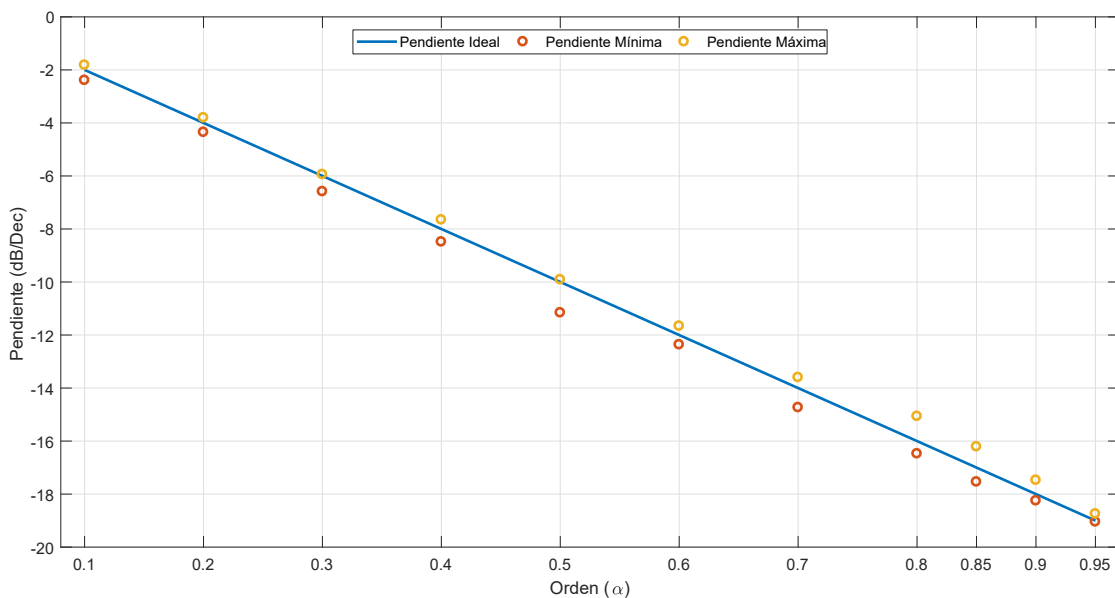


Figura 4.39: Pendiente máxima y mínima de Monte Carlo.

4.3.3. Análisis de Sensibilidad

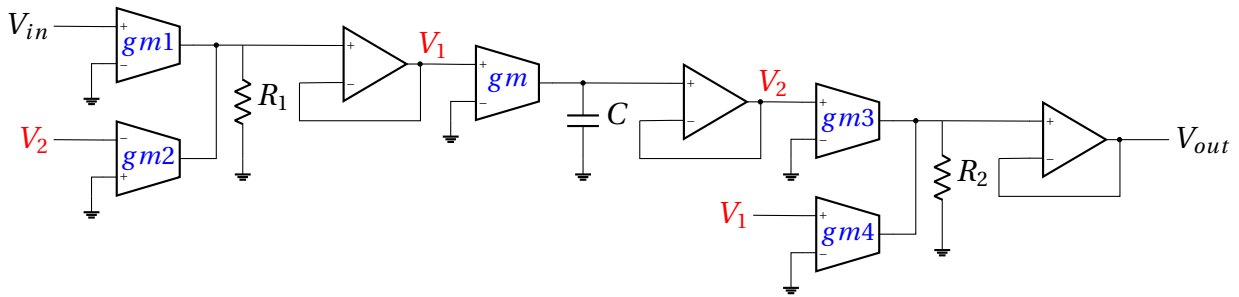


Figura 4.40: Integrador fraccionario por el método de Grafo de señal.

En la Figura 4.41 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.1$, donde el resistor R_2 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.36 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_2 aumenta el voltaje de salida en 11.6mV.

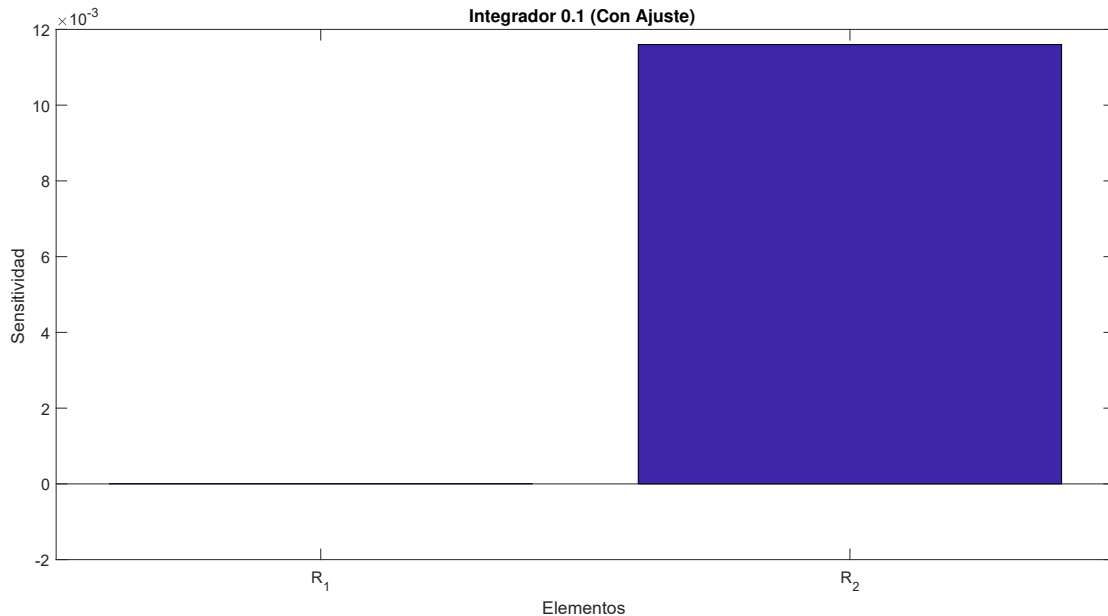


Figura 4.41: Sensibilidad del integrador de orden 0.1

Tabla 4.36: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.1

Elemento	R_1 (V / %)	R_2 (V / %)
Sens	-1.57×10^{-18}	1.16×10^{-2}

En la Figura 4.42 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.2$, donde el resistor R_1 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.37 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_1 aumenta el voltaje de salida en 13.4mV.

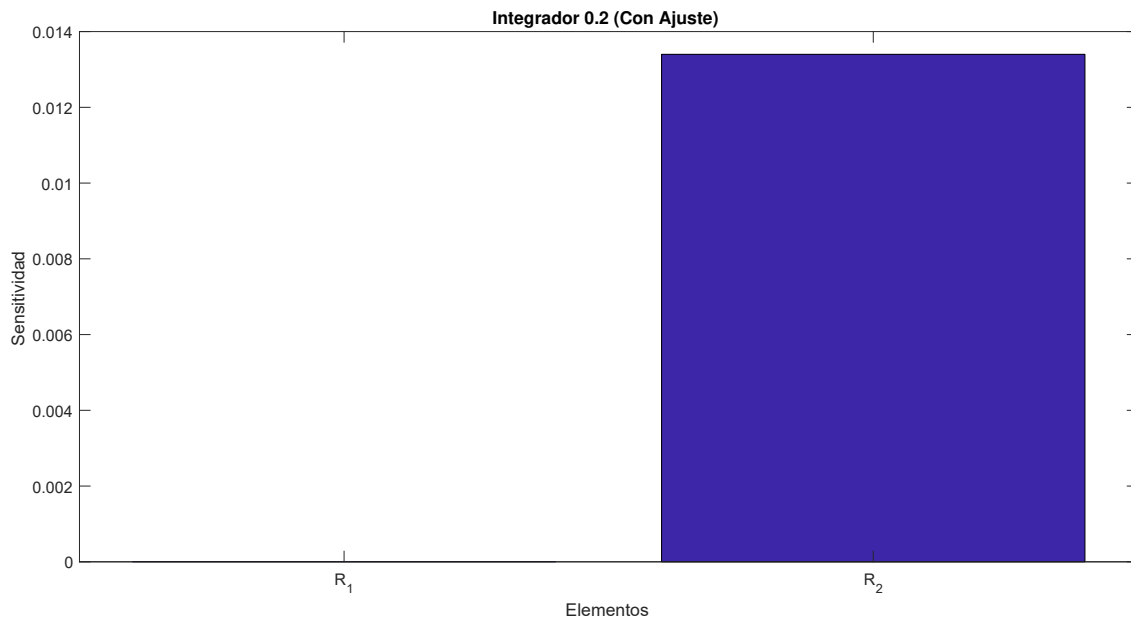


Figura 4.42: Sensibilidad del integrador de orden 0.2

Tabla 4.37: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.2

Elemento	R_1 (V / %)	R_2 (V / %)
Sens	1.82×10^{-18}	1.34×10^{-2}

En la Figura 4.43 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.3$, donde el resistor R_2 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.38 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_2 aumenta el voltaje de salida en 16mV.

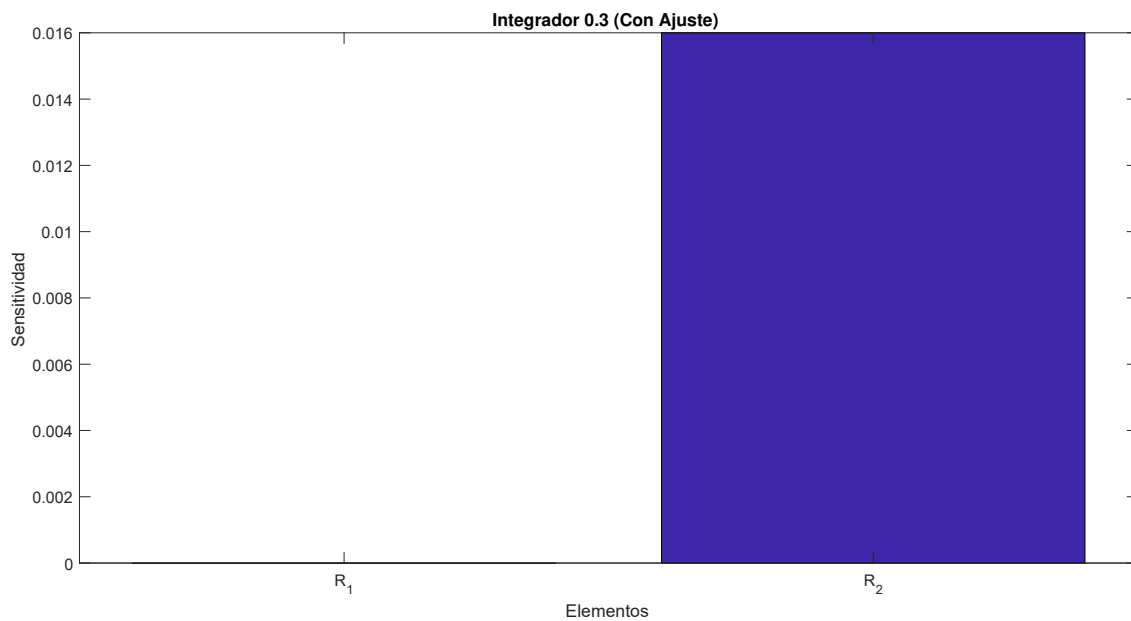


Figura 4.43: Sensibilidad del integrador de orden 0.3

Tabla 4.38: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.3

Elemento	R_1 (V / %)	R_2 (V / %)
Sens	0.00	1.60×10^{-2}

En la Figura 4.44 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.4$, donde el resistor R_2 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.39 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_2 aumenta el voltaje de salida en 18.6mV.

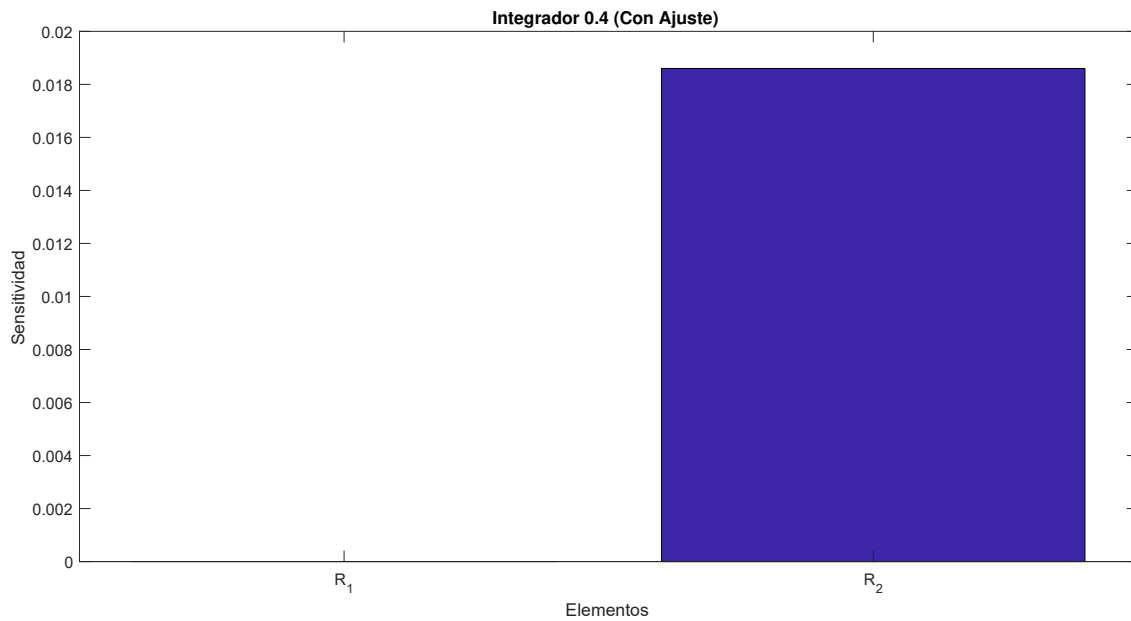


Figura 4.44: Sensibilidad del integrador de orden 0.4

Tabla 4.39: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.4

Elemento	R_1 (V / %)	R_2 (V / %)
Sens	0.00	1.86×10^{-2}

En la Figura 4.45 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.5$, donde el resistor R_2 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.40 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_2 aumenta el voltaje de salida en 23.9mV.

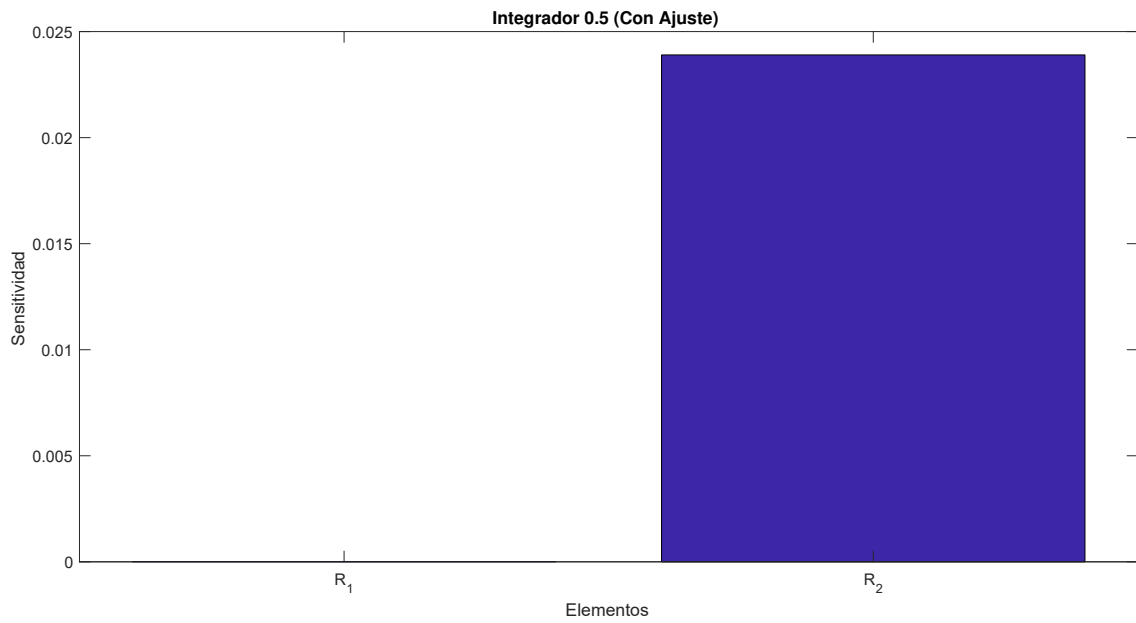


Figura 4.45: Sensibilidad del integrador de orden 0.5

Tabla 4.40: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.5

Elemento	R_1 (V / %)	R_2 (V / %)
Sens	0.00	2.39×10^{-2}

En la Figura 4.46 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.6$, donde el resistor R_2 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.41 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_2 aumenta el voltaje de salida en 26.4mV.

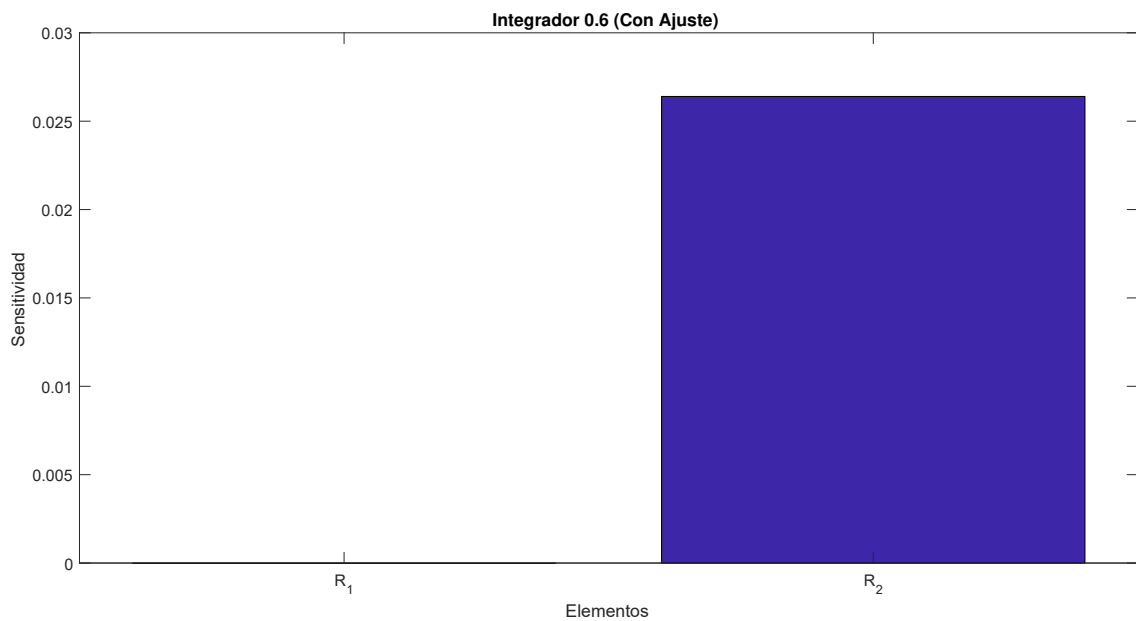


Figura 4.46: Sensibilidad del integrador de orden 0.6

Tabla 4.41: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.6

Elemento	R_1 (V / %)	R_2 (V / %)
Sens	3.58×10^{-18}	2.64×10^{-2}

En la Figura 4.47 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.7$, donde el resistor R_2 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.42 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_2 aumenta el voltaje de salida en 36.5mV.

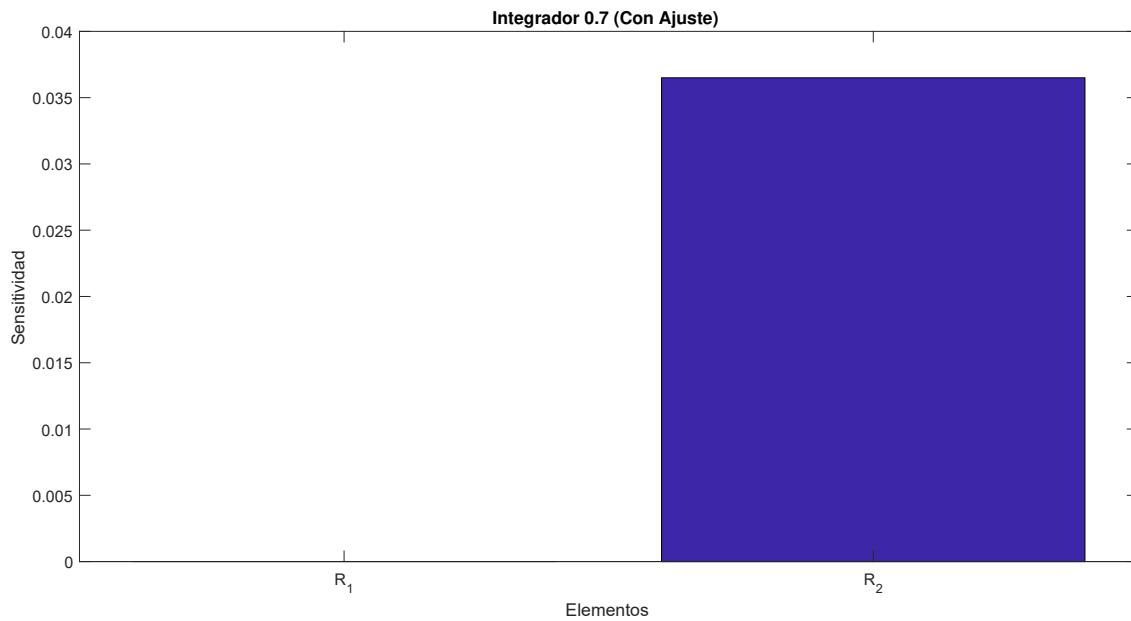


Figura 4.47: Sensibilidad del integrador de orden 0.7

Tabla 4.42: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.7

Elemento	R_1 (V / %)	R_2 (V / %)
Sens	0.00	3.65×10^{-2}

En la Figura 4.48 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.8$, donde el resistor R_2 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.43 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_2 aumenta el voltaje de salida en 56.8mV.

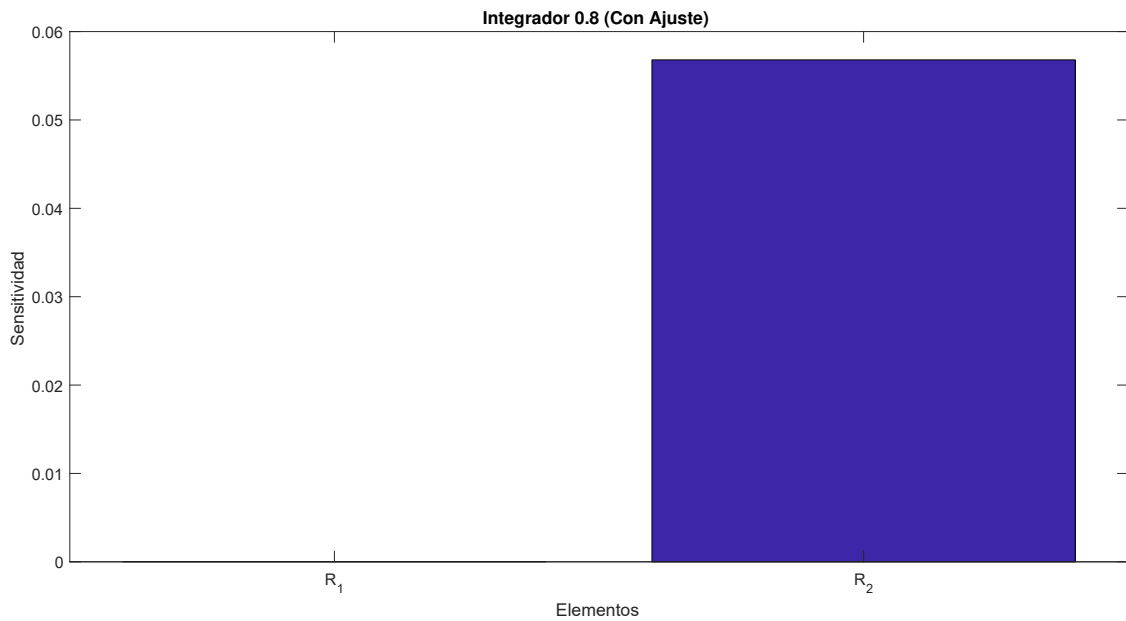


Figura 4.48: Sensibilidad del integrador de orden 0.8

Tabla 4.43: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.8

Elemento	R_1 (V / %)	R_2 (V / %)
Sens	0.00	5.68×10^{-2}

En la Figura 4.49 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.85$, donde el resistor R_2 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.44 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_2 aumenta el voltaje de salida en 64.1mV.

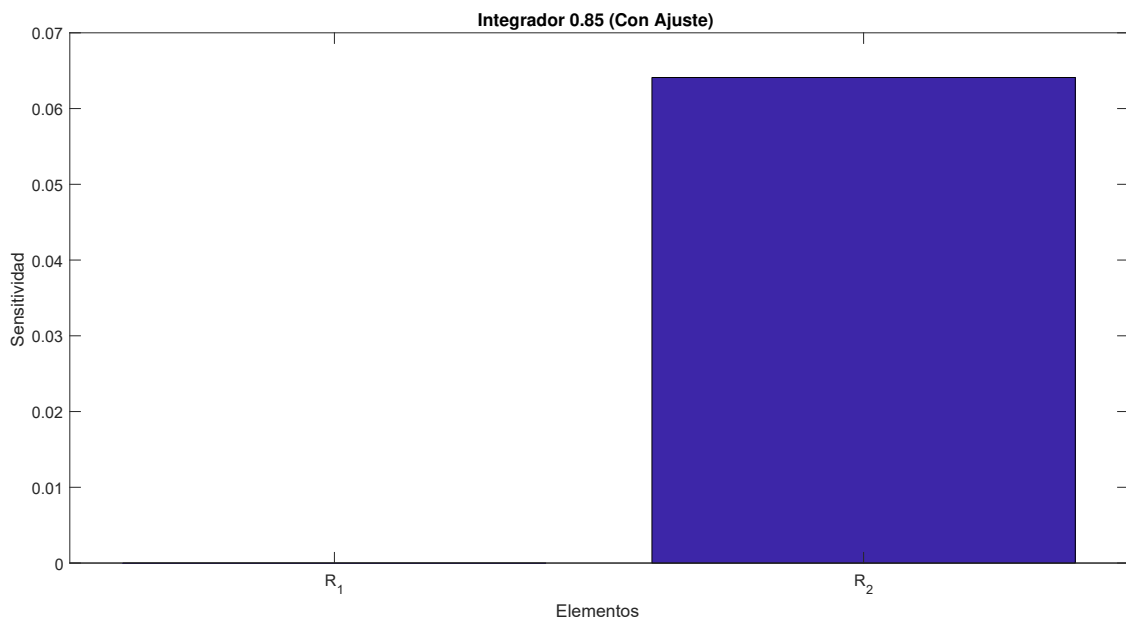


Figura 4.49: Sensibilidad del integrador de orden 0.85

Tabla 4.44: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.85

Elemento	R_1 (V / %)	R_2 (V / %)
Sens	0.00	6.41×10^{-2}

En la Figura 4.50 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.9$, donde el resistor R_2 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.45 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_2 aumenta el voltaje de salida en 73.5mV.

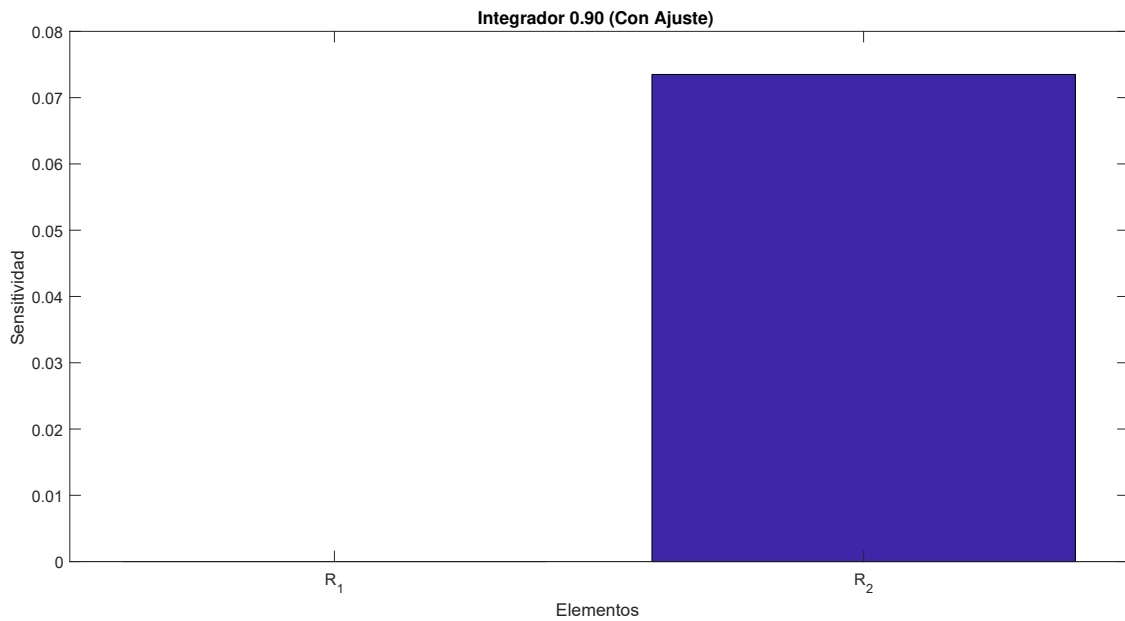


Figura 4.50: Sensibilidad del integrador de orden 0.9

Tabla 4.45: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.9

Elemento	R_1 (V / %)	R_2 (V / %)
Sens	0.00	7.35×10^{-2}

En la Figura 4.51 muestra los resultados del análisis de sensibilidad con el orden $\alpha = 0.95$, donde el resistor R_2 tiene la mayor sensibilidad del circuito. En la Tabla 4.46 se muestra los resultados para cada resistor del circuito, donde por cada $1\% \Omega$ de incremento en R_2 aumenta el voltaje de salida en 90.1mV.

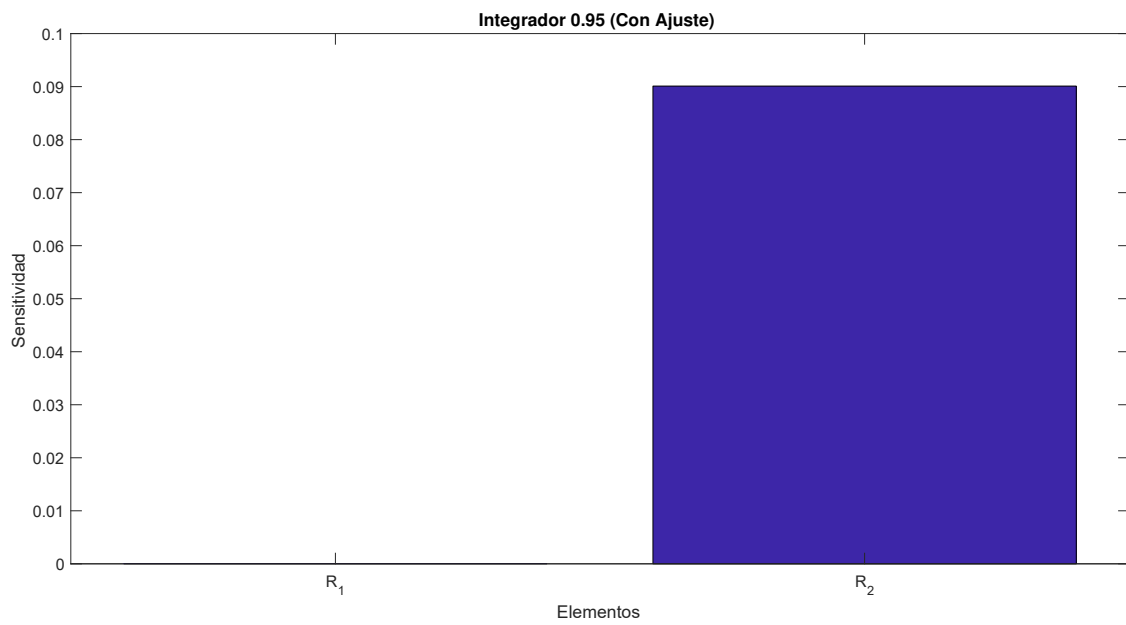


Figura 4.51: Sensibilidad del integrador de orden 0.95

Tabla 4.46: Resultados de sensibilidad del integrador de orden 0.95

Elemento	R_1 (V / %)	R_2 (V / %)
Sens	0.00	9.01×10^{-2}

5 | Oscilador Caótico Lü .

El sistema caótico de Lü esta dado por las siguientes tres ecuaciones diferenciales de orden fraccionario.

$$\begin{aligned}
 D^\alpha x &= y \\
 D^\alpha y &= z \\
 D^\alpha z &= -ax - by - cz + d_1 \overbrace{f(x)}^{PWL}
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

donde $f(x)$ es la función no lineal, $a = 2$, $b = 1$, $c = 0.6$ y $d = 2$. El diagrama de bloques para la realización de este sistema se muestra en la Figura 5.1. En este diagrama se sustituyen los bloques rojos con los integradores de orden fraccionarios de orden 0.9 y 0.95 obtenidos con los métodos de síntesis propuestos en el capítulo 4.

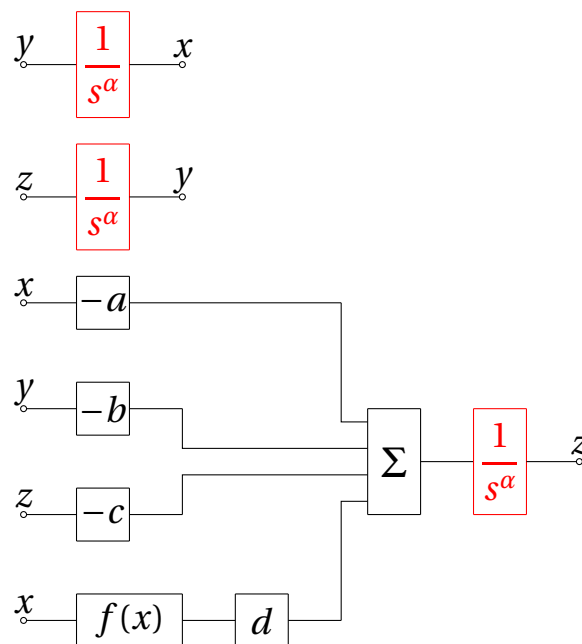


Figura 5.1: Diagrama de Bloques del sistema caótico de Lü.

5.1. Oscilador Caótico con Integradores Fraccionarios por Butterworth y Chebyshev tipo 1

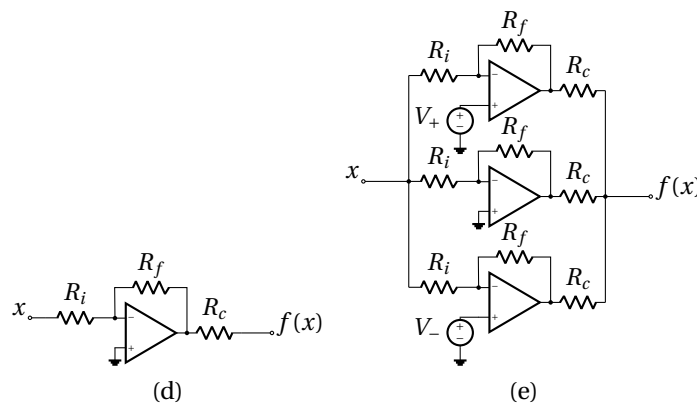
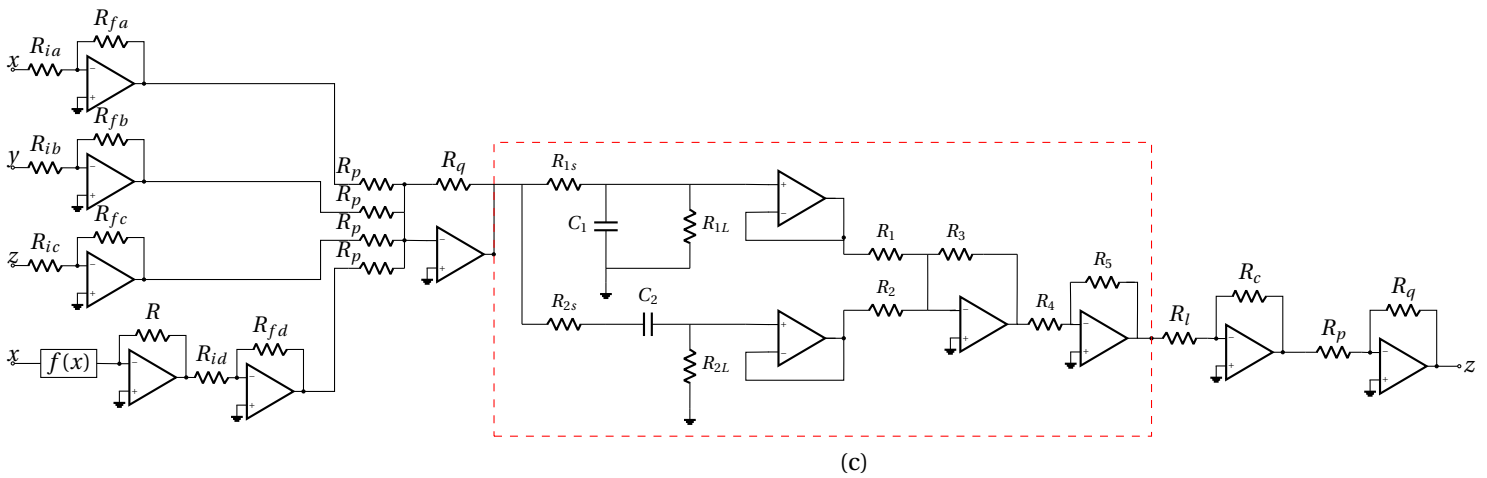
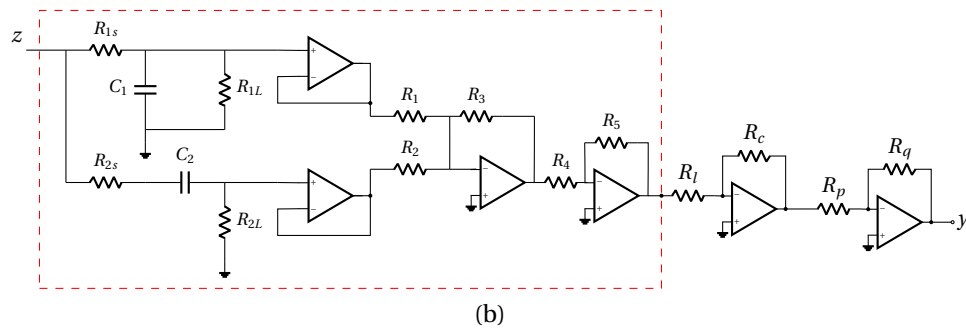
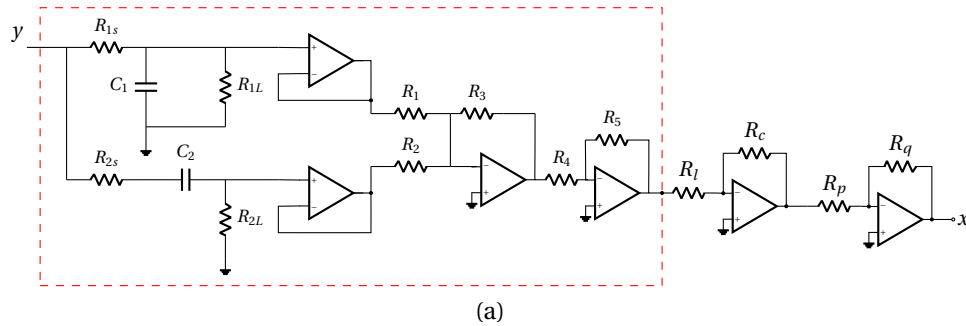


Figura 5.2: Oscilador fraccionario de Lü con integradores fraccionarios de Butterworth y Chebyshev.

La Figura 5.2 muestra el circuito del oscilador caótico fraccionario, donde las líneas punteadas de color rojo encierran el circuito del integrador fraccionario obtenido por filtros Butterworth y Chebyshev de tipo 1.

En la salida del integrador fraccionario presenta una amplificación en la magnitud de 3 y 3.5 para los integradores de 0.90 y 0.95 respectivamente, esta ganancia se calcula con en los resistores R_l y R_c . Y finalmente una ganancia unitaria en los resistores R_p y R_q para no modificar la fase del integrador fraccionario.

La magnitud máxima en el integrador fraccionario de orden 0.90 con ganancia de 3 es de 35.12dB, mientras que para el integrador de orden fraccionario de orden 0.95 con ganancia de 3.5 la magnitud máxima es de 43.36dB.

Los integradores fraccionarios se escalaron en frecuencia, y se compararon con integradores fraccionarios del trabajo publicado en la referencia [27]. En el caso de los integradores de orden 0.90, el escalamiento en frecuencia es de 1.67Hz en la frecuencia de corte (factor de escalamiento 200 para el integrador de 0.90 normalizado), y para los integradores de orden 0.95 el escalamiento en frecuencia a 185.65mHz en la frecuencia de corte (factor de escalamiento 45.53 para el integrador de 0.95 normalizado).

En las Figuras 5.3 y 5.4 se comparan las respuestas en frecuencia de ambos integradores fraccionarios (Integrador activo de la referencia [27] y filtros Butterworth y Chebyshev tipo 1) con el escalamiento en frecuencia.

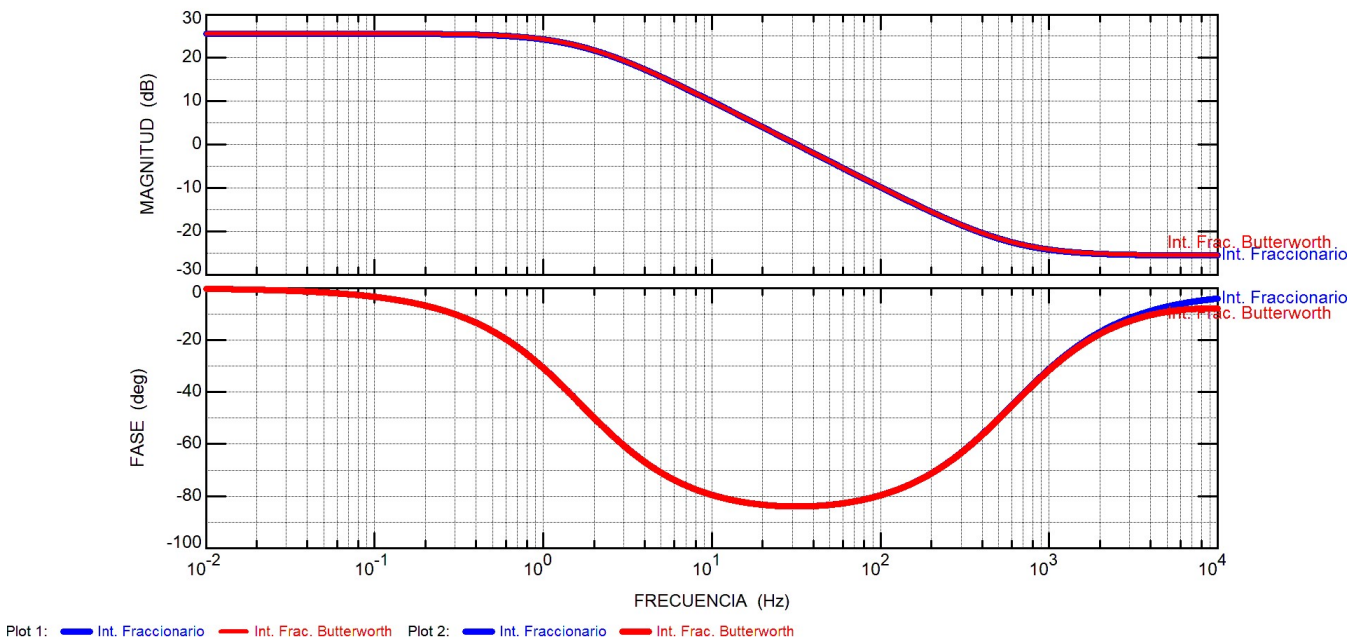


Figura 5.3: Respuesta el integrador fraccionario con escalamiento en frecuencia

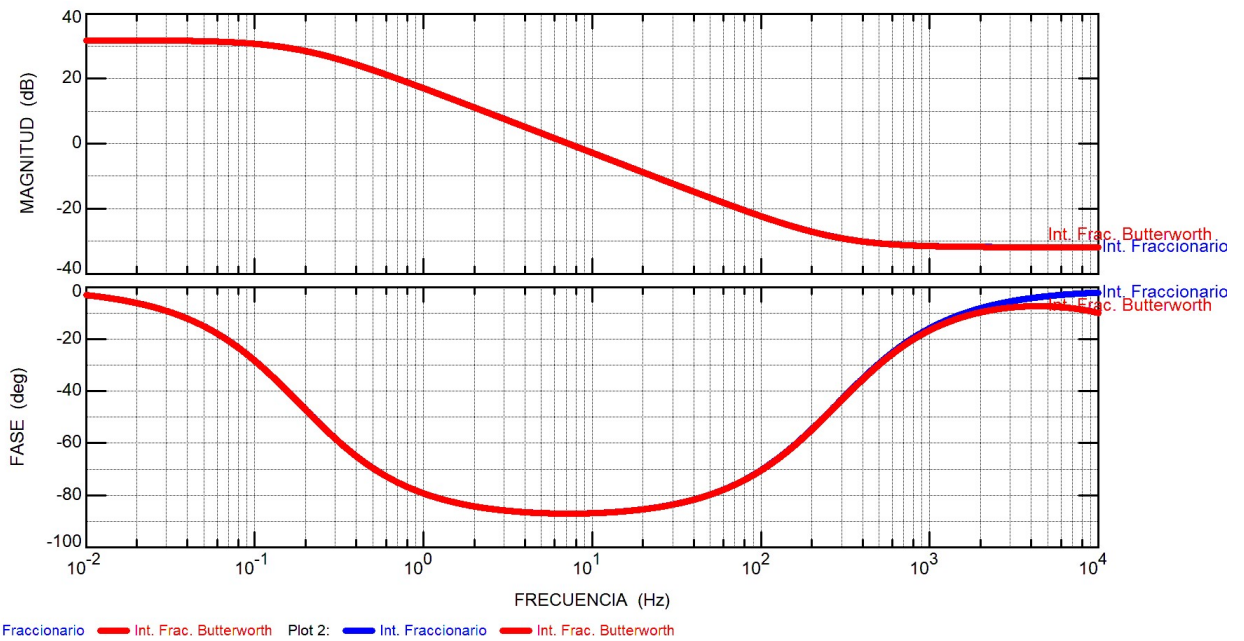


Figura 5.4: Respuesta el integrador fraccionario con escalamiento en frecuencia

Las tablas 5.1, 5.2 y 5.3 muestran los valores de los elementos del circuito para integradores de orden 0.90 y 0.95, así como también los valores de voltaje para la función no lineal PWL.

Tabla 5.1: Tabla de valores para el oscilador caótico fraccionario de orden 0.90

Elemento	R_{1s}	C_1	R_{1L}	R_{2s}	C_2	R_{2L}	R_1	R_2	R_3
Valor	19020 Ω	10uF	19020 Ω	4750 Ω	10uF	4750 Ω	1K Ω	361K Ω	19K Ω
Elemento	R_4	R_5	R_l	R_c	R_p	R_q	R_{ia}	R_{fa}	R_{ib}
Valor	10K Ω	20K Ω	2.2K Ω	6.8K Ω	10K Ω	10K Ω	10K Ω	20K Ω	10K Ω
Elemento	R_{fb}	R_{ic}	R_{fc}	R	R_{id}	R_{fd}	OPAMP	–	–
Valor	10K Ω	10K Ω	6K Ω	10K Ω	10K Ω	20K Ω	TL081	–	–

Tabla 5.2: Tabla de valores para el oscilador caótico fraccionario de orden 0.95

Elemento	R_{1s}	C_1	R_{1L}	R_{2s}	C_2	R_{2L}	R_1	R_2	R_3
Valor	171.6K Ω	10uF	171.6K Ω	42.85K Ω	10uF	42.85K Ω	220 Ω	334.62K Ω	8.58K Ω
Elemento	R_4	R_5	R_l	R_c	R_p	R_q	R_{ia}	R_{fa}	R_{ib}
Valor	10K Ω	20K Ω	5.1K Ω	18K Ω	10K Ω	10K Ω	10K Ω	20K Ω	10K Ω
Elemento	R_{fb}	R_{ic}	R_{fc}	R	R_{id}	R_{fd}	OPAMP	–	–
Valor	10K Ω	10K Ω	6K Ω	10K Ω	10K Ω	20K Ω	TL081	–	–

Tabla 5.3: Tabla de valores para la función no lineal PWL

Elemento	R_i	R_f	R_c	V_+	V_-	V_{SS}	V_{EE}	V_{sat}
Valor	1K Ω	1M Ω	149K Ω	1.85V	-1.9V	15V	-15V	$\pm 14.6V$

En la Figura 5.5 se muestra el montaje del oscilador caótico de Lü de orden fraccionario. Se implementó usando un instrumento de laboratorio NI ELVIS II+. Contiene 12 instrumentos integrados incluyendo fuentes de voltaje fijas de $\pm 15V$ y variables de $\pm 12V$, osciloscopio, analizador de

BODE, generador de funciones entre otros. Estos instrumentos nos ayudan a alimentar el circuito y observar las variables x y y del oscilador caótico de Lü.

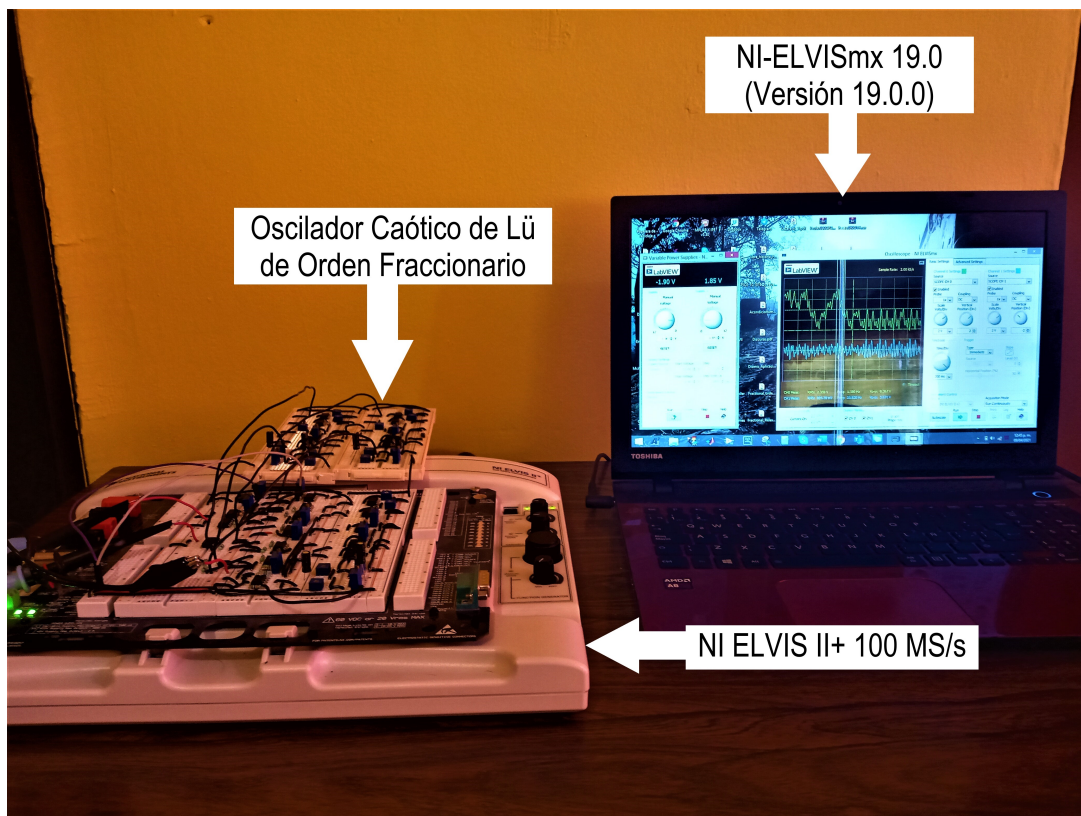
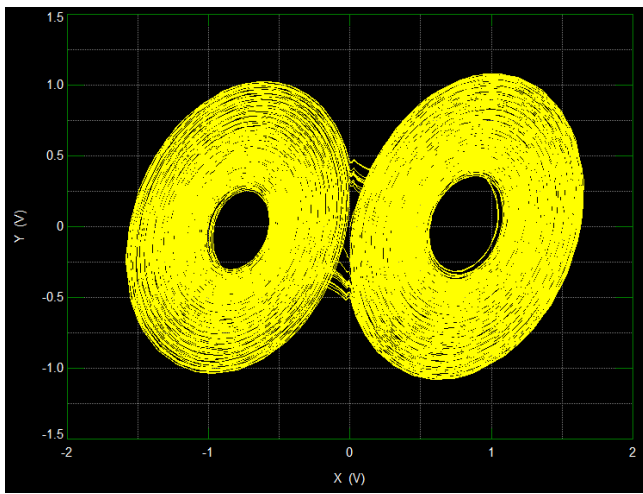


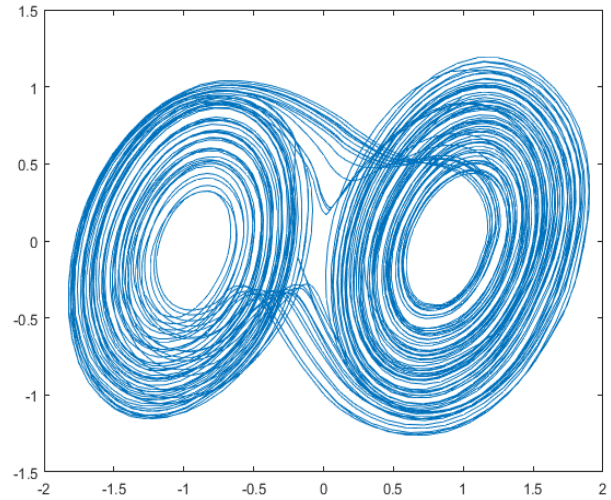
Figura 5.5: Montaje del oscilador caótico de Lü de orden fraccionario.

5.1.1. Simulación en SPICE y resultados experimentales

A partir de los datos obtenidos por el osciloscopio, se puede graficar el atractor caótico por MATLAB y comparar el resultado experimental con el atractor obtenido en simulación SPICE.

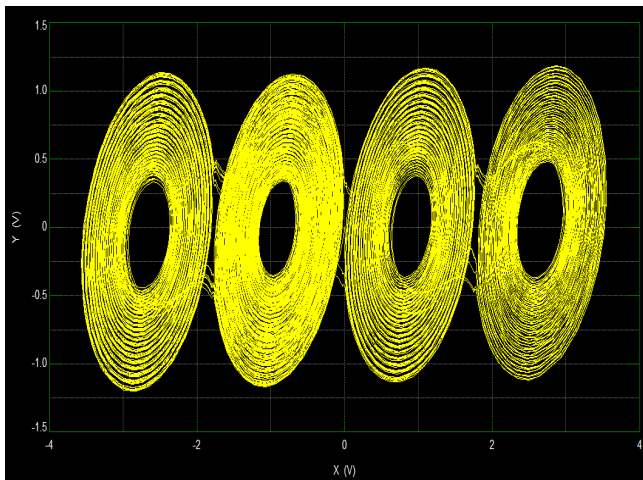


(a) Simulación

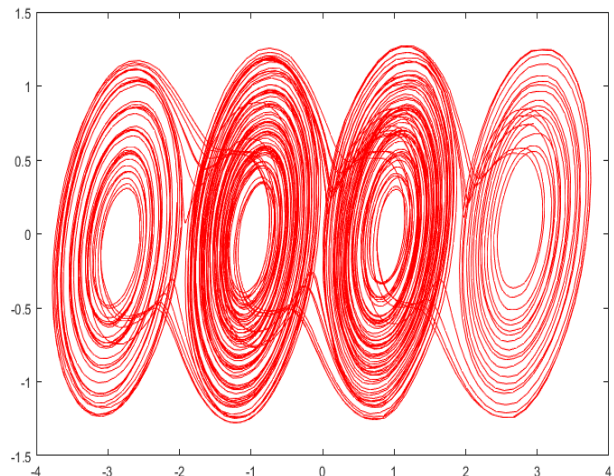


(b) Experimental

Figura 5.6: Sistema Caótico de Lü con 2 atractores $\alpha = 0.90$

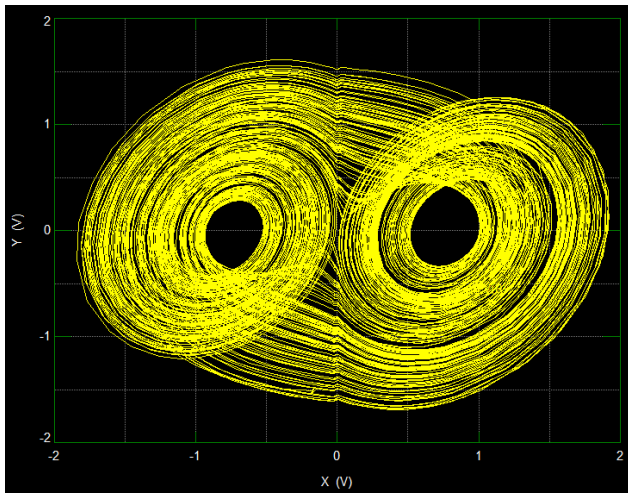


(a) Simulación

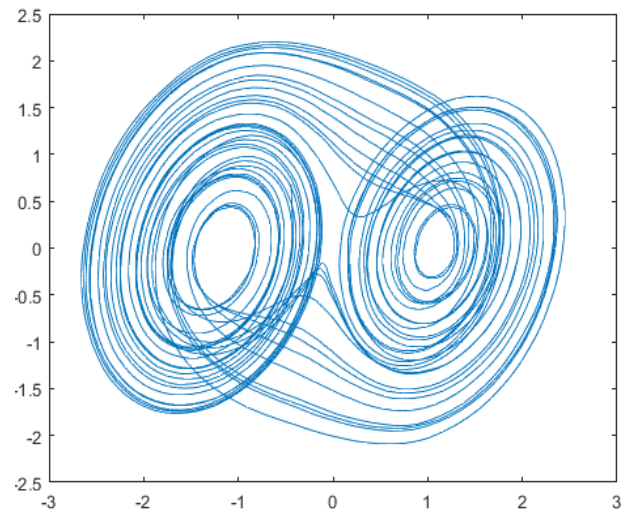


(b) Experimental

Figura 5.7: Sistema Caótico de Lü con 4 atractores $\alpha = 0.90$

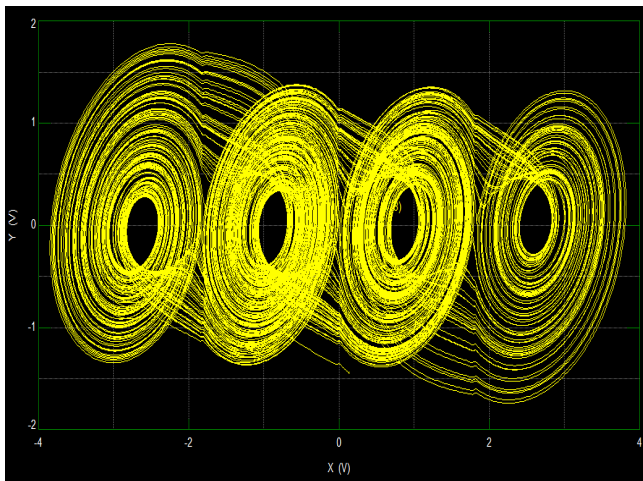


(a) Simulación

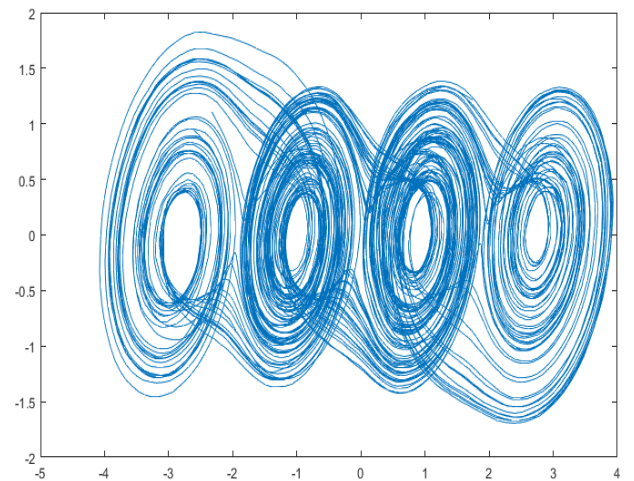


(b) Experimental

Figura 5.8: Sistema Caótico de Lü con 2 atractores $\alpha = 0.95$



(a) Simulación



(b) Experimental

Figura 5.9: Sistema Caótico de Lü con 4 atractores $\alpha = 0.95$

5.2. Oscilador Caótico con Integradores Fraccionarios por Foster y Cauer

El circuito que describe al oscilador caótico con integradores obtenidos mediante el método de síntesis de Foster y Cauer se muestra en la figura 5.10.

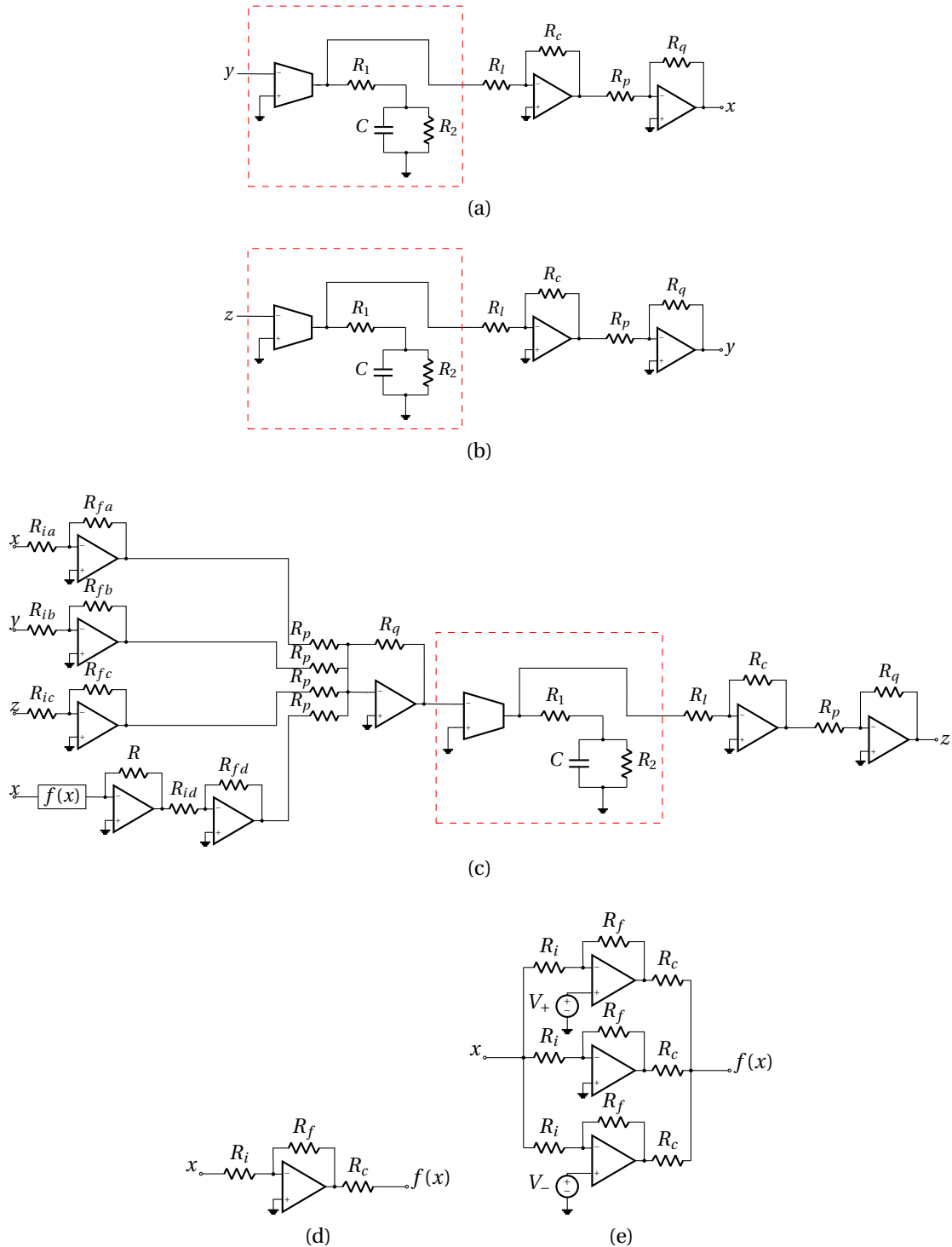


Figura 5.10: Oscilador fraccionario de Lü con integradores Foster/Cauer.

El circuito señalado con líneas punteadas en la Figura 5.10a corresponde al integrador de orden fraccionario, el amplificador inversor formado por los resistores R_l y R_c forman una ganancia de 3 y 5 para los ordenes 0.90 y 0.95 respectivamente, ganancias que necesita el sistema caótico

para oscilar. Se agrega un amplificador inversor formado por las resistencias R_p y R_q , las cuales tienen el mismo valor para no modificar la ganancia e invertir el signo agregado con el amplificador anterior.

El circuito de la Figura 5.10a se repite para obtener la señal y 5.10b.

La Figura 5.10c muestra las ganancias **a**, **b**, **c**, y **d** para las señales x , y , z y $f(x)$ respectivamente, se suman cada una de las señales amplificadas y se integran con el integrador fraccionario. La salida del integrador fraccionario se amplifica de forma con ganancias de 3 para $\alpha = 0.90$ y 5 para $\alpha = 0.95$.

Las figuras 5.10d y 5.10e producen una señal saturada que corresponden al oscilador caótico con 2 enrollamientos y 4 enrollamientos respectivamente.

Los resultados obtenidos en simulación SPICE, con el integrador de orden fraccionario obtenido con los métodos de síntesis Foster y Cauer son los siguientes:

5.2.1. Oscilador Caótico con 2 Enrollamientos

Orden $\alpha = 0.90$.

La Figura 5.11 muestra el atractor caótico del sistema caótico fraccionario con integradores fraccionarios de orden 0.90.

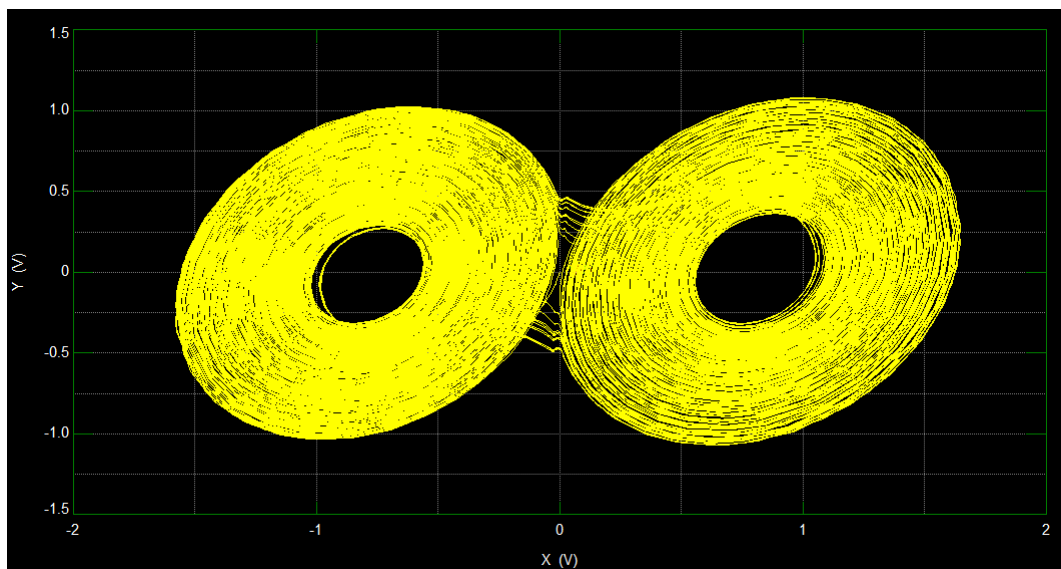


Figura 5.11: Atractor caótico de 2 enrollamientos con integradores de orden 0.90

Orden $\alpha = 0.95$.

El atractor caótico mostrado en la Figura 5.12 corresponde al resultado en simulación del oscilador caótico con integradores de orden 0.95.

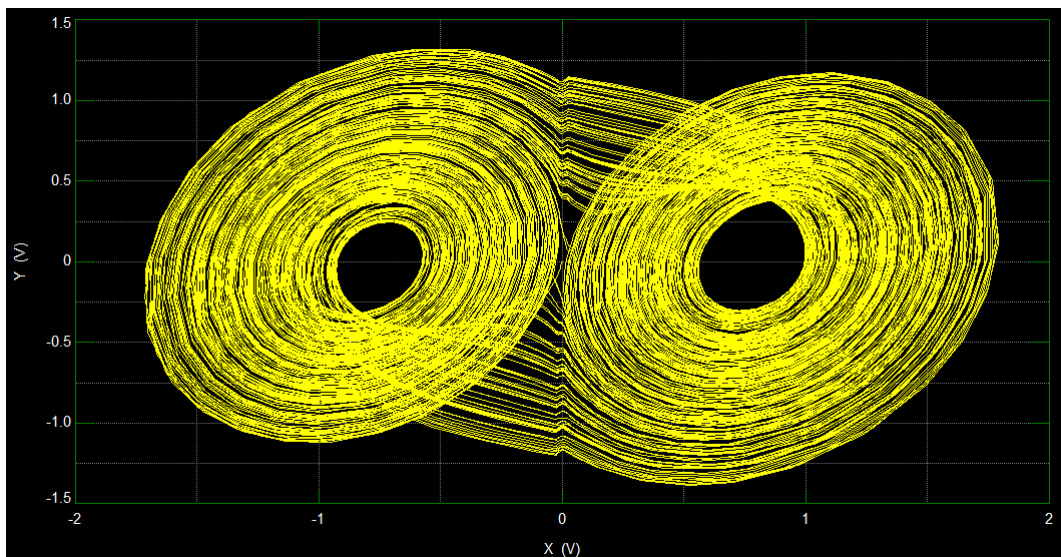


Figura 5.12: Atractor caótico de 2 enrollamientos con integradores de orden 0.95

5.2.2. Oscilador Caótico con 4 Enrollamientos

Orden $\alpha = 0.90$.

La figura 5.13 muestra el atractor del oscilador caótico obtenido mediante integradores de orden fraccionario de 0.90

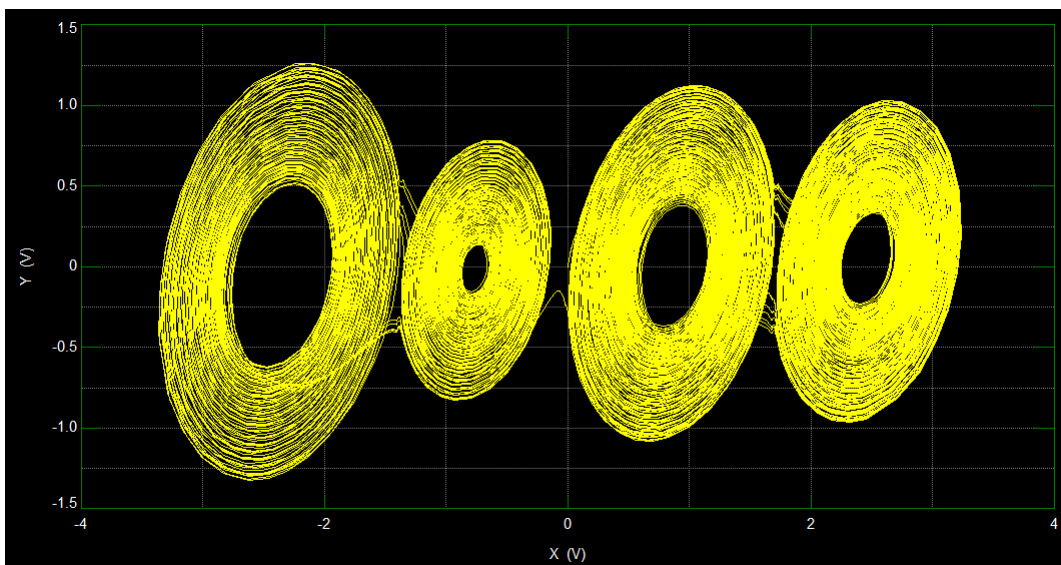


Figura 5.13: Atractor caótico de 4 enrollamientos con integradores de orden 0.90

Orden $\alpha = 0.95$.

El atractor obtenido en simulación se muestra en la figura 5.14, donde el eje x corresponde a la señal X y el eje y corresponde a la señal Y.

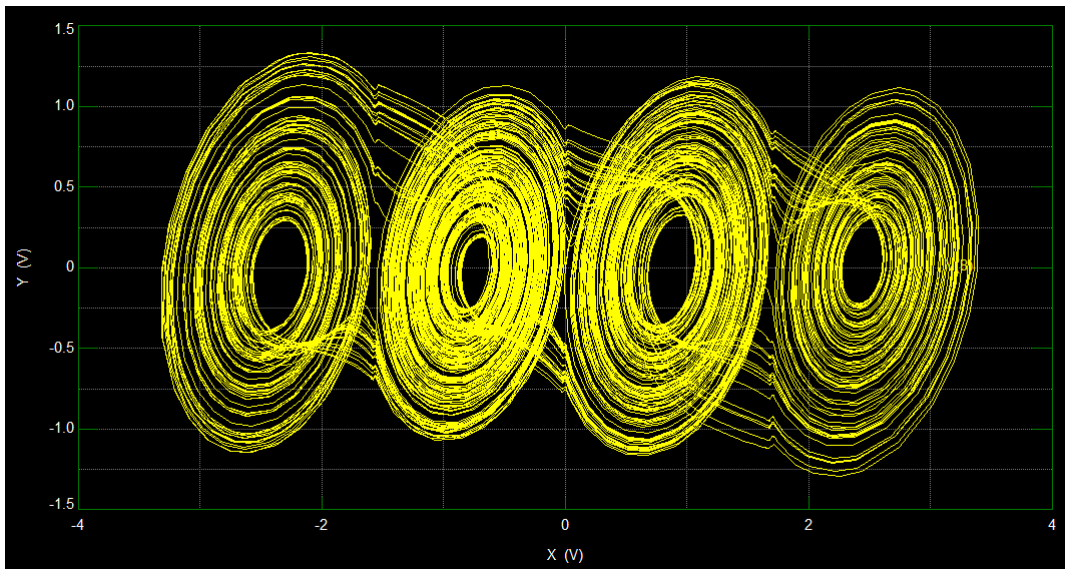


Figura 5.14: Atractor caótico de 4 enrollamientos con integradores de orden 0.95

5.3. Oscilador Caótico con Integradores Fraccionarios por Grafo de Señal

El circuito que corresponde al oscilador caótico con integradores fraccionarios obtenidos por grafo de señal se presenta en la Figura 5.15.

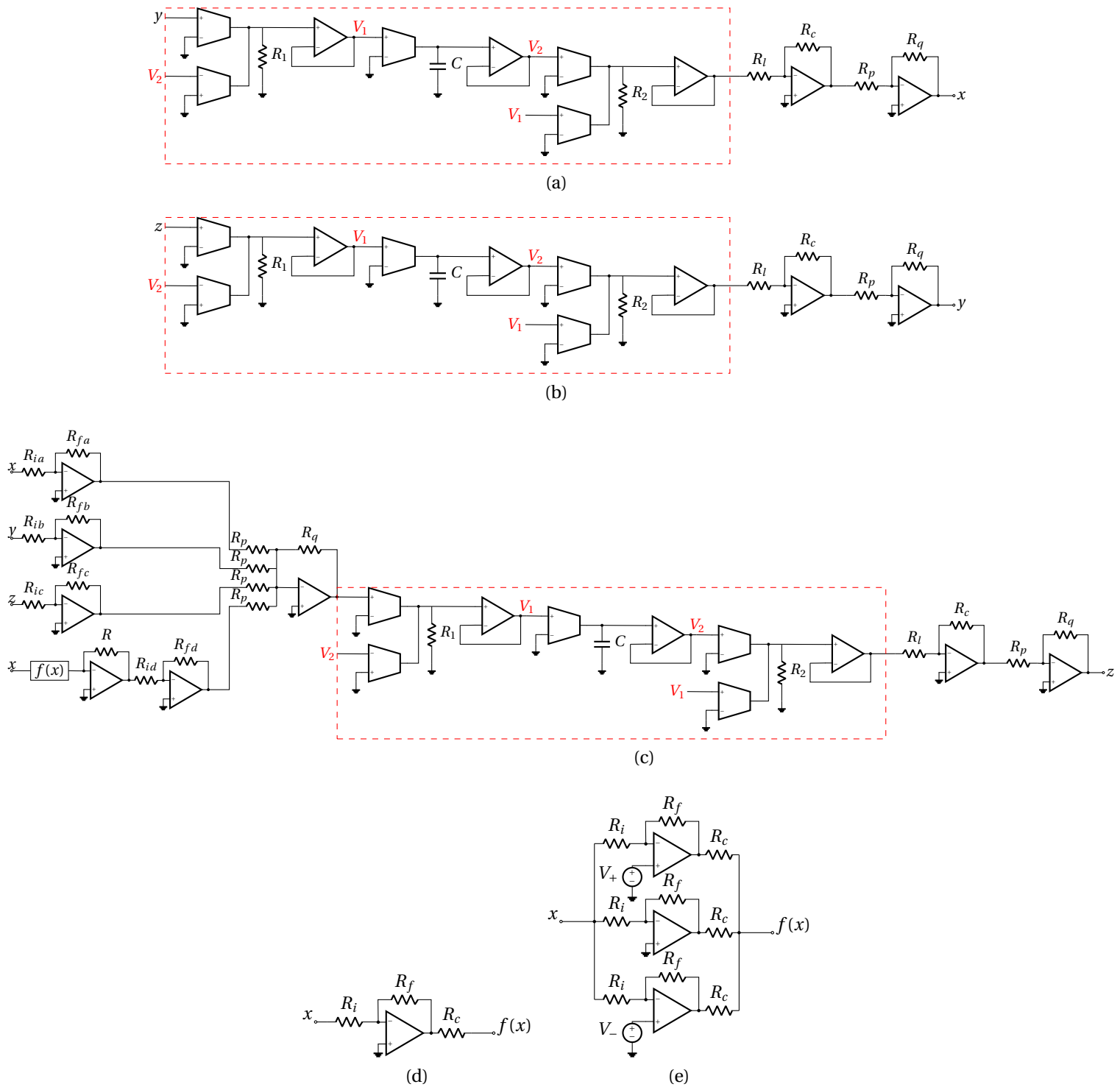


Figura 5.15: Oscilador fraccionario de Lü con integradores de Grafo de Señal.

Las Figuras 5.15a y 5.15b muestran el integrador de orden fraccionario entre líneas punteadas, además presenta una ganancia con un amplificador inversor indicado por los resistores R_l y R_c . Para no modificar la fase del integrador se incluye un amplificador inversor de ganancia unitaria,

indicado por los resistores R_p y R_q .

En la Figura 5.15c muestra las ganancias que corresponden a las constantes **a**, **b**, **c** y **d** para las señales x , y , z y $f(x)$. Se suman las señales después de amplificarlas y se integran con el integrador fraccionario obtenido mediante el método de síntesis por grafo de señal.

Las Figuras 5.15d y 5.15e corresponde a la función de saturación para obtener 2 enrollamientos y 4 enrollamientos respectivamente.

Los resultados obtenidos mediante simulación en SPICE se presentan en las siguientes secciones.

5.3.1. Oscilador Caótico con 2 Enrollamientos

Orden $\alpha = 0.90$.

La Figura 5.16 muestra el atractor caótico correspondiente al sistema caótico con integradores de orden 0.90.

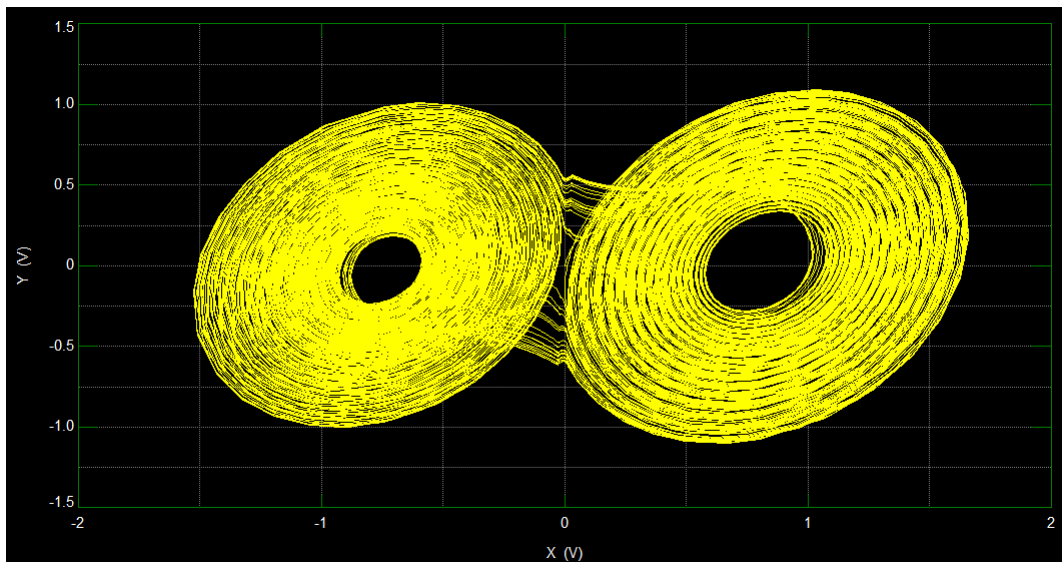


Figura 5.16: Atractor caótico de 2 enrollamientos con integradores de orden 0.90

Orden $\alpha = 0.95$.

La Figura 5.17 muestra el atractor caótico de 2 enrollamientos del sistema caótico con integradores de orden 0.95.

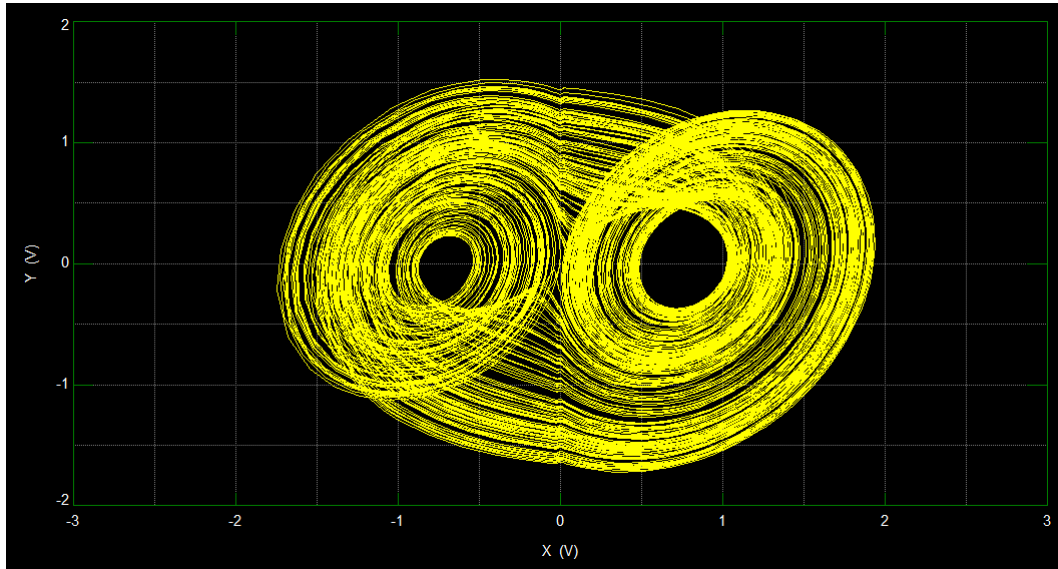


Figura 5.17: Atractor caótico de 2 enrollamientos con integradores de orden 0.95

5.3.2. Oscilador Caótico con 4 Enrollamientos

Orden $\alpha = 0.90$

El atractor caótico de 4 enrollamientos de la Figura 5.18 pertenece al sistema caótico con integradores de orden 0.90.

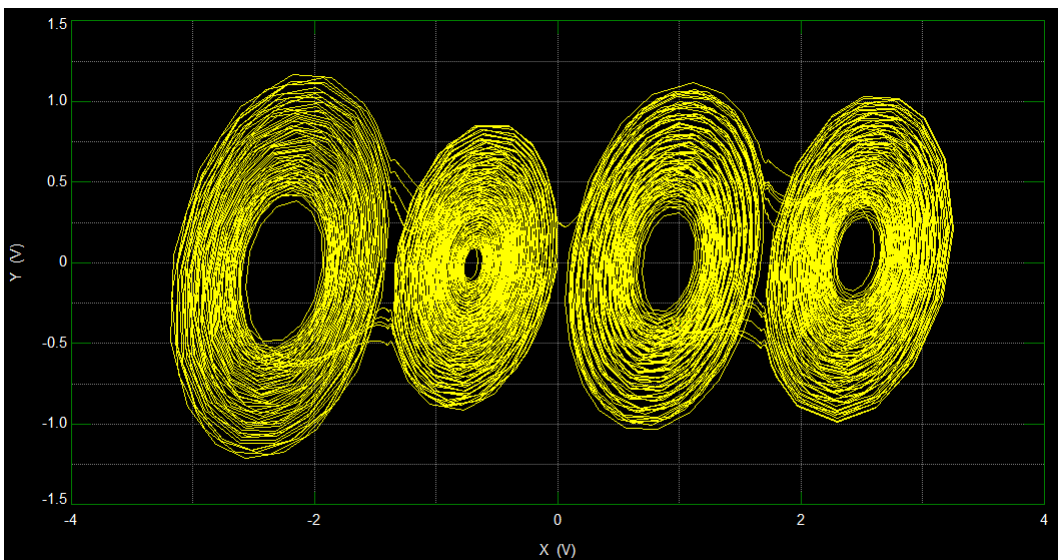


Figura 5.18: Atractor caótico de 4 enrollamientos con integradores de orden 0.90

Orden $\alpha = 0.95$

El atractor caótico con 4 enrollamientos del sistema caótico con integradores de orden 0.95 se muestra en la Figura 5.19.

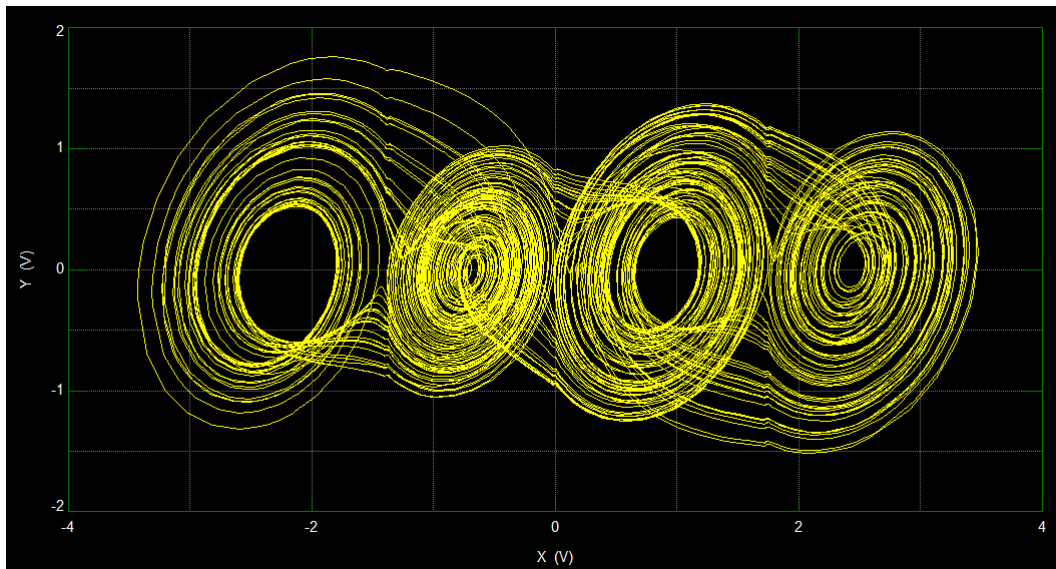


Figura 5.19: Atractor caótico de 4 enrollamientos con integradores de orden 0.95

6 | Conclusión.

Se sintetizó del integrador de orden fraccionario con los métodos de síntesis propuestos (Foster, Cauer, Butterworth y Chebyshev Tipo 1). Debido a que algunos diseños son equivalentes, se obtuvieron 3 circuitos como propuesta de integrador de orden fraccionario.

Además, se realizaron los análisis de Monte Carlo y Sensibilidad con ordenes desde 0.1 hasta 0.95 en las tres propuestas de integrador de orden fraccionario. En los resultados obtenidos mediante SPICE, concluimos que el circuito obtenido por Butterworth y Chebyshev es el menos sensible a los cambios en sus elementos. Y el circuito con menor error en su pendiente es el circuito obtenido por Foster, Cauer y Grafo de señal.

Se implementó experimentalmente el integrador fraccionario de Butterworth y Chebyshev. Se midieron las pendientes de ordenes desde 0.1 hasta 0.95. Además se modificó el factor de A para disminuir el error de la pendiente en los resultados experimentales, dando lugar a una optimización de la pendiente.

Se realizaron los análisis de Monte Carlo y Sensibilidad en el circuito con la optimización del integrador fraccionario, asimismo se encontró una ecuación exponencial que ayude a calcular el nuevo factor de A para el diseño.

Se implementó experimentalmente el integrador fraccionario de Foster y Cauer. Se midieron las pendientes experimentales de ordenes desde 0.1 hasta 0.95. Se optimizó la pendiente del integrador fraccionario para encontrar un error mínimo sobre cada orden diseñado.

Se realizaron los análisis de Monte Carlo y Sensibilidad sobre el circuito con el ajuste, además se encontró una ecuación exponencial que ayuda a encontrar los nuevos valores del factor A en el diseño.

Se implementó experimentalmente el integrador fraccionario de Grafo de Señal. Se midieron las pendientes experimentales de ordenes desde 0.1 hasta 0.95. Después se ajustaron las pendientes experimentales hasta obtener una pendiente cercana a la ideal.

Se analizó el circuito con Monte Carlo y Sensibilidad con el nuevo ajuste experimental, además se encontró una ecuación exponencial que ayuda a encontrar los nuevos valores de los elementos en el diseño.

Se comprobó en simulación y experimentalmente que el integrador fraccionario de Butterworth y Chebyshev se puede aplicar en el oscilador caótico de Lü. En el caso de los integradores de Foster, Cauer y Grafo de señal, se comprobó su aplicación en el oscilador caótico en simulación.

En las tablas 6.1, 6.2 y 6.3 se muestran los pros y contras de cada circuito, tomando en cuenta el número de elementos necesarios para cada diseño, resultados en simulación y resultados experimentales.

Tabla 6.1: Pros y contras del diseño de Foster y Cauer.

Foster y Cauer	
Pros	Contras
Es el circuito con menos elementos necesarios para su implementación física, usando un total de 5.	Es el segundo circuito con mayor sensibilidad en sus elementos, según el análisis de Sensibilidad sin ajuste ($389.7mV/\%$).
Los cálculos para obtener los valores de los elementos resistivos y capacitivos son mínimos.	Es el circuito con mayor sensibilidad en sus elementos, según el análisis de Sensibilidad con ajuste ($143mV/\%$).
Es el circuito con menor error en la pendiente sin ajuste, según la media del análisis de Monte Carlo ($-2.829dB/Dec$).	Es el segundo circuito con mayor error en la pendiente experimental sin ajuste ($3.094dB/Dec$).
Es el circuito con menor error en la pendiente con ajuste, según la media del análisis de Monte Carlo ($0.32dB/Dec$).	-
Es el circuito con menor error en la pendiente experimental con ajuste ($-0.14dB/Dec$).	-

Tabla 6.2: Pros y contras del diseño de Butterworth y Chebyshev.

Butterworth y Chebyshev	
Pros	Contras
A partir de las ecuaciones de diseño encontradas, se pueden calcular todos los valores de los elementos sin complejidad.	Es el segundo circuito con más elementos necesarios para su implementación física, usando un total de 15.
Es el circuito con la menor sensibilidad en sus elementos sin ajuste, según el análisis de Sensibilidad ($2.53mV/\%$).	Es el circuito con mayor error en la pendiente sin ajuste, según la media del análisis de Monte Carlo ($-3.601dB/Dec$).
Es el circuito con la menor sensibilidad en sus elementos con ajuste, según el análisis de Sensibilidad ($61.6mV/\%$).	Es el segundo circuito con mayor error en la pendiente con ajuste, según la media del análisis de Monte Carlo ($0.41dB/Dec$).
-	Es el circuito con mayor error en la pendiente experimental sin ajuste ($3.601dB/Dec$).
-	Es el segundo circuito con mayor error en la pendiente experimental con ajuste ($-0.26dB/Dec$).

Tabla 6.3: Pros y contras del diseño de Grafo de Señal.

Grafo de Señal	
Pros	Contras
A partir de tres ecuaciones de diseño se pueden obtener de manera más fácil los valores de los elementos del circuito.	Es el circuito con más elementos necesarios para su implementación física, usando un total de 16.
Es el circuito con menor error en la pendiente experimental sin ajuste ($2.37dB/Dec$).	Es el circuito con mayor sensibilidad en sus elementos, según el análisis de Sensibilidad sin ajuste ($390mV/\%$).
-	Es el segundo circuito con mayor sensibilidad en sus elementos, según el análisis de Sensibilidad con ajuste ($90.1mV/\%$).
-	Es el segundo circuito con mayor error en la pendiente sin ajuste, según la media del análisis de Monte Carlo ($-2.855dB/Dec$).
-	Es el circuito con mayor error en la pendiente con ajuste, según la media del análisis de Monte Carlo ($0.58dB/Dec$).
-	Es el circuito con mayor error en la pendiente experimental con ajuste ($0.46dB/Dec$).

6.1. Trabajo futuro

En las aplicaciones de los integradores fraccionarios en la ingeniería electrónica quedan muchas áreas sin explorar, sin mencionar el seguir enriqueciendo los resultados experimentales de este proyecto de tesis y que es posible continuar trabajando. En el tiempo en que se desarrollaba el proyecto de tesis, se dejaron algunas sugerencias que se esperan cubrir en un trabajo futuro con mayor profundidad.

Los trabajos a futuro que se sugieren abordar son:

1. Realizar un modelo funcional en SPICE del OTA CA3080 e incluir los resistores que configuran las corrientes de BIAS en el análisis de Sensibilidad y Monte Carlo. Específicamente en los diseños de Foster, Cauer y Grafo de Señal.
2. Aplicar experimentalmente los diseños de Foster, Cauer y Grafos de Señal en el oscilador caótico de Lü y comparar los resultados experimentales con la simulación.
3. Diseñar e implementar una tarjeta electrónica de cada uno de los integradores fraccionarios y explorar algunas áreas de aplicación de los integradores de orden fraccionario en la ingeniería electrónica.

Bibliografía

- [1] S.A. David, J.L. Linares, E.M.J.A. Pallone. "Fractional order calculus: historical apologia, basic concepts and some applications ". *Sociedade Brasileira de Física*, vol. 33, pp. 4302, 2011.
- [2] J. Tenreiro Machado, Virginia Kiryakova, Francesco Mainardi. Recent history of fractional calculus". *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, vol. 16, pp. 1140-1153, 2011.
- [3] Ernesto Zambrano Serrano. "Fractional Order Chaotic Systems and Their Electronic Design." Tesis Doctoral, IPICYT, México, 2017.
- [4] P. Bertias, C. Psychalinos, A. Elwakil, L. Safari, S. Minaei, "Design and application examples of CMOS fractional-order differentiators and integrators". *Microelectronics Journal*, 2018.
- [5] S. Mahata, R. Kar, D. Mandal, "Optimal rational approximation of bandpass Butterworth filter with symmetric fractional-order roll-off". *International Journal of Electronics and Communications*, vol. 117, 2020.
- [6] Hong Guang Sun, Yong Zhang, Dumitru Baleanu, Wen Chen, Yang Quan Chen. " A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering." *Commun Nonlinear Sci Number Simulat*, vol. 64, pp. 213-231, 2018.
- [7] Wei Xue, Youngli Li, Shijian Cang, Hongyan Jia, Zenghui Wang. " Chaotic behavior and circuit implementation of a fractional-order permanent magnet synchronous motor model". *Journal of the Franklin Institute*, vol. 352, pp. 2887-2898, 2015.
- [8] Muñoz-Montero C., Sánchez-Gaspariano L.A., Sánchez-López C., González-Díaz V.R., Tlelo-Cuautle E. "On the electronic realization of fractional order filters with OpAmps and Field Programmable Analog Arrays" en *Fractional Order Control and Synchronization of Chaotic Systems*. vol. 688, Springer, Marzo 2017
- [9] Stavroula Kapoulea, Costas Psychalinos, Ahmed S. Elwakil. " Single active element implementation of fractional-order differentiators and integrators". *International Journal of Electronics and Communications (AEÜ)*, vol. 100, pp. 6-15, 2018
- [10] Lazarević, Mihailo and Rapačić, Milan and Šekara, Tomislav. *Introduction to Fractional Calculus with Brief Historical Background*. WSEAS Press, 2014, pp. 3-16
- [11] Shantanu Das. *Introduction to Fractional Calculus*. In: *Functional Fractional Calculus*. Berlin: Springer, 2011, pp.1-50
- [12] Francesco Mainardi. " Fractional Relaxation-Oscillation and Fractional Diffusion-Wave Phenomena ". *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 7, pp. 1461-1477, Diciembre 1996.
- [13] A.A. Kilbas H. M. Srivastava J.J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier Science, Enero 2006.

- [14] E. Zambrano Serrano, J. M. Muñoz Pacheco, L. C. Gómez Pavón, A. Luis Ramos, G. Chen. " Synchronization in a fractional-order model of pancreatic β -cells". *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 227, pp. 907-919, 2018.
- [15] Hongyan Jia, Zhiqiang Guo, Gouyuan Qi, Zengquiang Chen. " Analysis of a four-wing fractional-order chaotic system via frequency-domain and time-domain approaches and circuit implementation for secure communication". *Optik*, vol. 115, pp. 233-241, 2018.
- [16] O. I. Tacha, J. M. Muñoz Pacheco, E. Zambrano Serrano, I. N. Stouboulos, V. T. Pham. " Determining the chaotic behavior in a fractional-order finance system with negative parameters". *Nonlinear Dynamics*, vol. 94, pp. 1303-1317, 2018.
- [17] Wei Xue, Youngli Li, Shijian Cang, Hongyan Jia, Zenghui Wang. " Chaotic behavior and circuit implementation of a fractional-order permanent magnet synchronous motor model". *Journal of the Franklin Institute*, vol. 352, pp. 2887-2898, 2015.
- [18] Carlos Muñoz Montero, Luis Abraham Sánchez Gaspariano, Carlos Sánchez López, Jesus Manuel Muñoz Pacheco, Luz del Carmen Gómez Pavón, Esteban Tlelo Cuautle. " On the electronic realization of fractional order filters with OpAmps and Field Programmable Analog Arrays". En revisión de publicación.
- [19] Stavroula Kapoulea, Costas Psychalinos, Ahmed S. Elwakil." Single active element implementation of fractional-order differentiators and integrators". *International Journal of Electronics and Communications (AEÜ)*, vol. 100, pp. 6-15, 2018
- [20] Jesus Manuel Muñoz Pacheco, Esteban Tlelo Cuautle. *Electronic Design Automation of Multi-scroll Chaos Generators*. México: Bentham, 2010.
- [21] Bohannan G, Knauber B. " Physical experimental study of the fractional harmonic oscillator ". 2015 international symposium on circuits and systems (ISCAS). Lisboa; 24-27 Mayo 2015. pp. 2341
- [22] Luis Carlos Lujano Hernández. " Diseño de Integradores de Orden Fraccionario Usando Topologías Activas para su Aplicación en Osciladores Caóticos. " Tesis Licenciatura, BUAP, México, 2019.
- [23] Stavroula Kapoulea. "Design of Fractional-Order Circuits with Reduced Spread of Element Values". Maestría en Ciencias. Universidad de Patras, Grecia, 2018
- [24] Rashid, M.H. and Pozo, V.G. *Electrónica de potencia: circuitos, dispositivos y aplicaciones*. Pearson Educación, 2004, pp. 217-219.
- [25] Su, K.L. *Analog Filters, Second Edition*. Chapman & Hall, 1996, pp. 25-43.
- [26] Dennis Fitzpatrick, Chapter 10 - Monte Carlo Analysis .en el libro *Analog Design and Simulation Using OrCAD Capture and PSpice (Second Edition)*, Dennis Fitzpatrick, 2018, pp. 151-164.
- [27] Jesus M. Munoz-Pacheco, Luis Carlos Lujano-Hernández, Carlos Muñoz-Montero, Akif Akgöl, Luis A. Sánchez-Gaspariano, Chun-Biao Li and Mustafa Çağrı Kutlu. "Active Realization of Fractional-Order Integrators and Their Application in Multiscroll Chaotic Systems" . *Complexity*, vol. 2021, Enero 2021.

Apéndice 1: Requisitos de Diseño de los Filtros Pasa Bajas y Pasa Altas del Integrador Fraccionario por Filtros Butterworth y Chebyshev Tipo 1.

En la Tabla 6.4 se muestran los requisitos de diseño del filtro pasa bajas para ordenes α desde 0.1 hasta 0.95.

Tabla 6.4: Requisitos de diseño para el filtro pasa bajas del integrador fraccionario.

α	$\omega_p(rad/s)$	$\omega_s(rad/s)$	$A_p(dB)$	$A_s(dB)$
0.10	0.816	1.0	3.0	4.00
0.20	0.665	1.0	3.0	5.12
0.30	0.538	1.0	3.0	6.50
0.40	0.427	1.0	3.0	8.10
0.50	0.333	1.0	3.0	10.0
0.60	0.249	1.0	3.0	12.3
0.70	0.170	1.0	3.0	15.2
0.80	0.111	1.0	3.0	19.2
0.85	0.081	1.0	3.0	21.9
0.90	0.052	1.0	3.0	25.6
0.95	0.025	1.0	3.0	31.9

La Tabla 6.5 muestra los requisitos de diseño del filtro pasa altas del integrador fraccionario.

Tabla 6.5: Requisitos de diseño para el filtro pasa altas del integrador fraccionario.

α	$\omega_p(rad/s)$	$\omega_s(rad/s)$	$A_p(dB)$	$A_s(dB)$
0.10	0.818	1.0	3.0	18.3
0.20	0.667	1.0	3.0	16.6
0.30	0.538	1.0	3.0	14.8
0.40	0.427	1.0	3.0	12.9
0.50	0.333	1.0	3.0	10.8
0.60	0.249	1.0	3.0	8.58
0.70	0.176	1.0	3.0	6.14
0.80	0.111	1.0	3.0	20.9
0.85	0.081	1.0	3.0	18.2
0.90	0.052	1.0	3.0	20.0
0.95	0.025	1.0	3.0	28.2

Apéndice 2: Valores de los Elementos en los Filtros Pasa Bajas y Pasa Altas del Integrador Fraccionario por Filtros Butterworth y Chebyshev Tipo 1.

En la Tabla 6.6 se muestran los valores del filtro pasa bajas normalizado para el integrador de orden fraccionario.

Tabla 6.6: Valores de los elementos para el filtro pasa bajas tipo π .

α	$R_L(\Omega)$	$R_s(\Omega)$	$C(F)$
0.10	1	1	2.44
0.20	1	1	3.00
0.30	1	1	3.71
0.40	1	1	4.67
0.50	1	1	6.04
0.60	1	1	8.01
0.70	1	1	11.33
0.80	1	1	17.97
0.85	1	1	24.63
0.90	1	1	38.00
0.95	1	1	77.93

En la Tabla 6.7 se muestran los valores del filtro pasa altas normalizado para el integrador de orden fraccionario.

Tabla 6.7: Valores de los elementos para el filtro pasa altas tipo T .

α	$R_L(\Omega)$	$R_s(\Omega)$	$C(F)$
0.10	1	1	0.61
0.20	1	1	0.75
0.30	1	1	0.93
0.40	1	1	1.17
0.50	1	1	1.50
0.60	1	1	2.01
0.70	1	1	2.84
0.80	1	1	4.51
0.85	1	1	6.17
0.90	1	1	9.49
0.95	1	1	19.50

Apéndice 3: Resultados Experimentales del Integrador Fraccionario por Butterworth y Chebyshev sin Ajuste.

En éste apéndice se agregan los resultados experimentales en el dominio de la frecuencia del integrador fraccionario de Butterworth y Chebyshev.

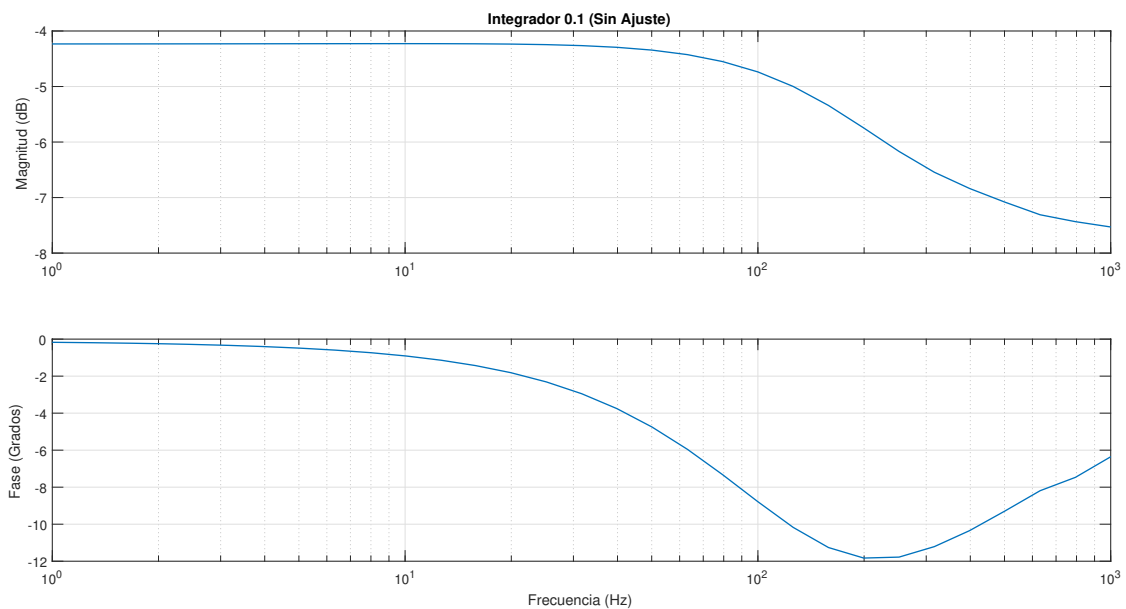


Figura 6.1: Integrador con $\alpha = 0.1$

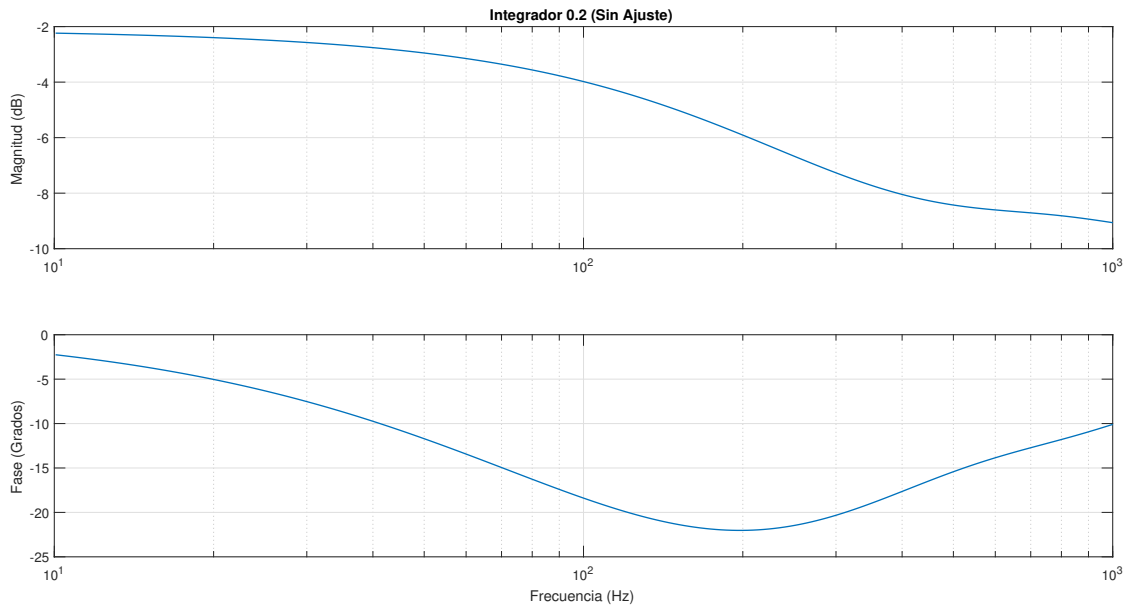


Figura 6.2: Integrador con $\alpha = 0.2$

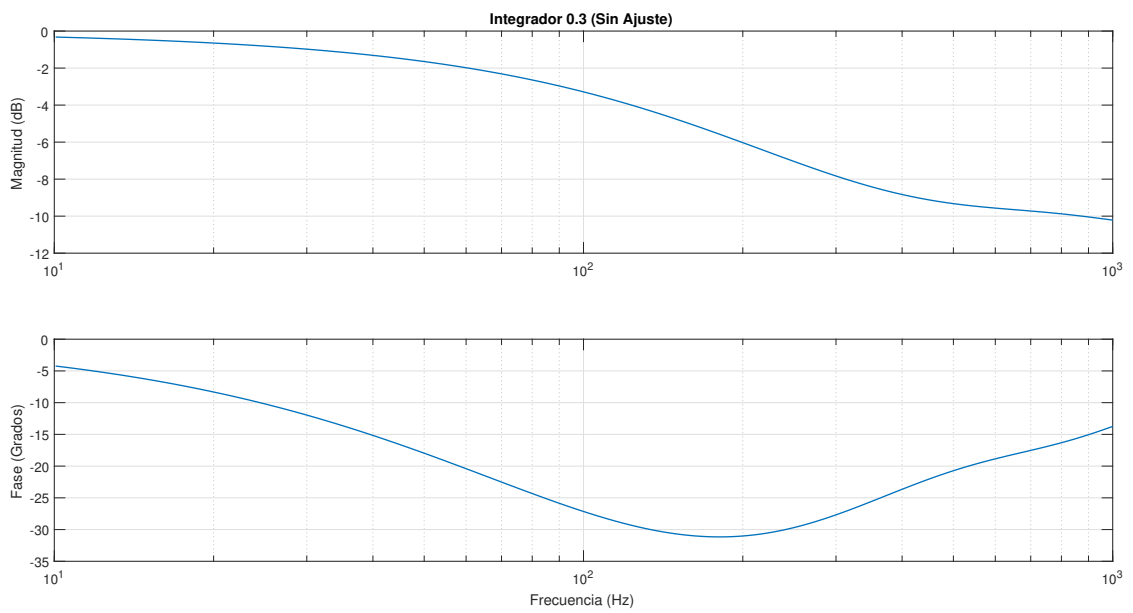


Figura 6.3: Integrador con $\alpha = 0.3$

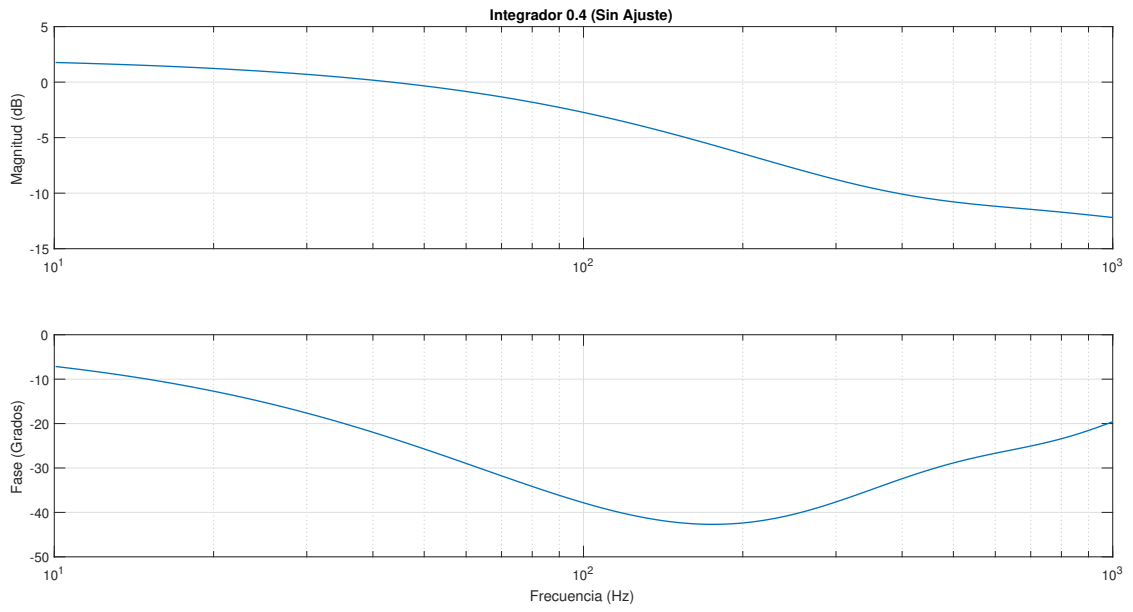


Figura 6.4: Integrador con $\alpha = 0.4$

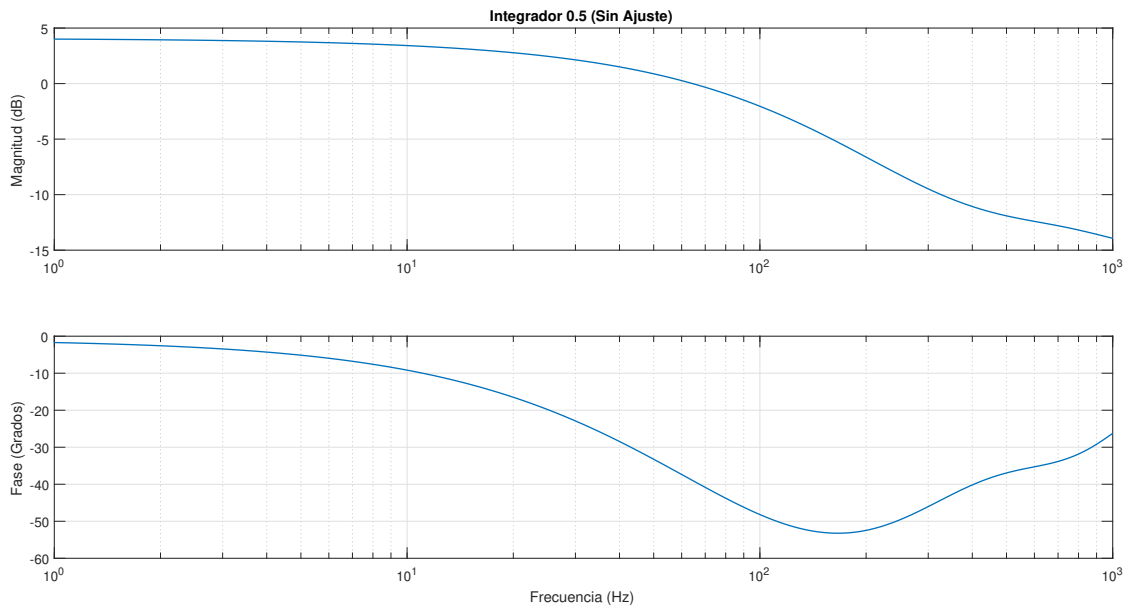


Figura 6.5: Integrador con $\alpha = 0.5$

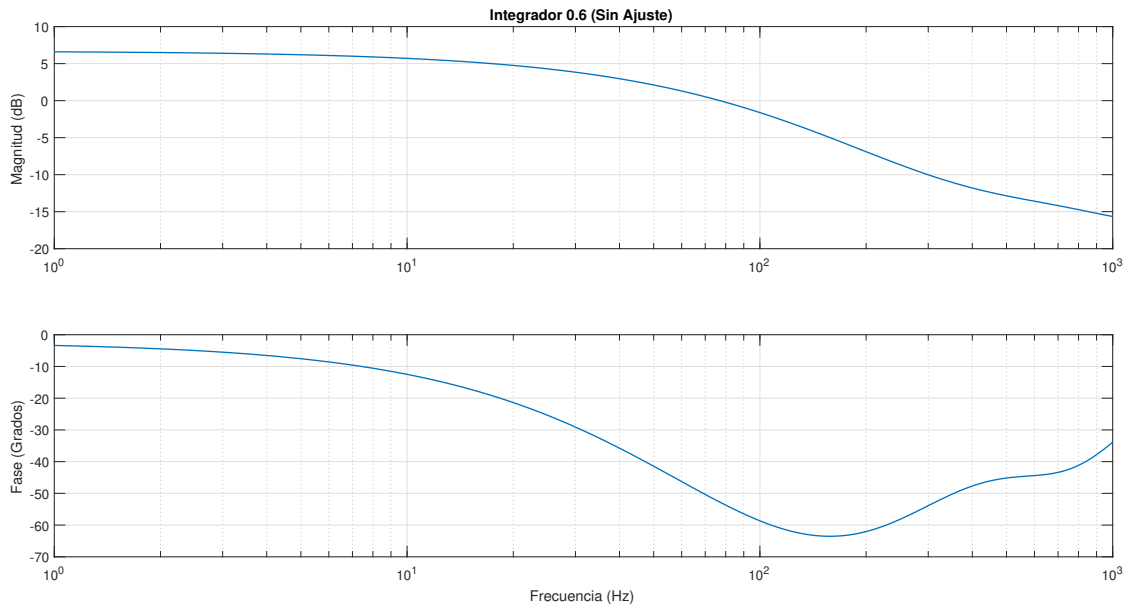


Figura 6.6: Integrador con $\alpha = 0.6$

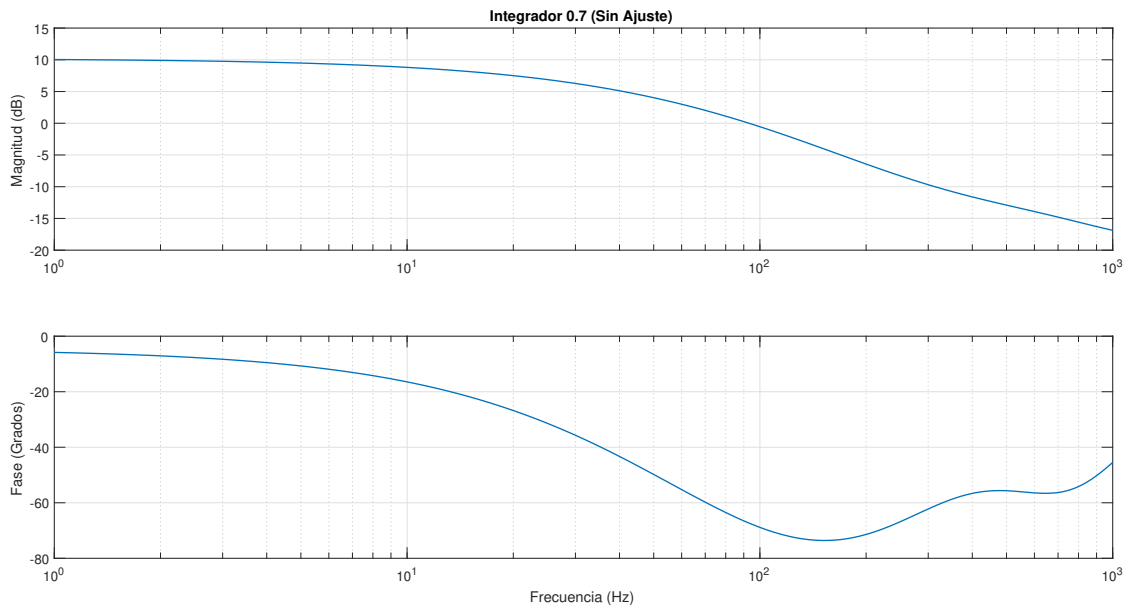


Figura 6.7: Integrador con $\alpha = 0.7$

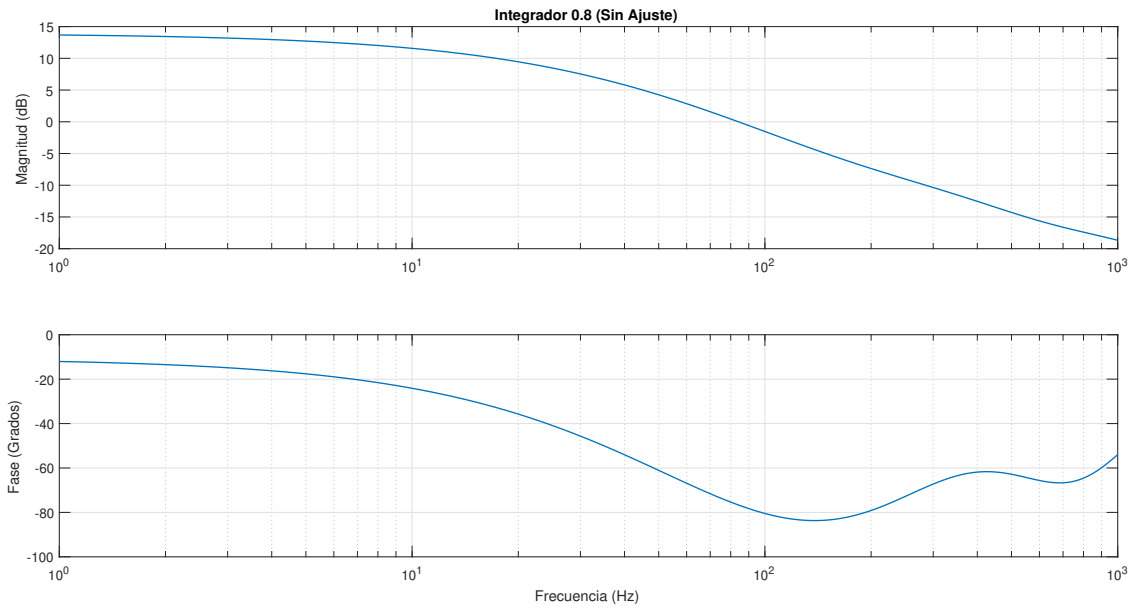


Figura 6.8: Integrador con $\alpha = 0.8$

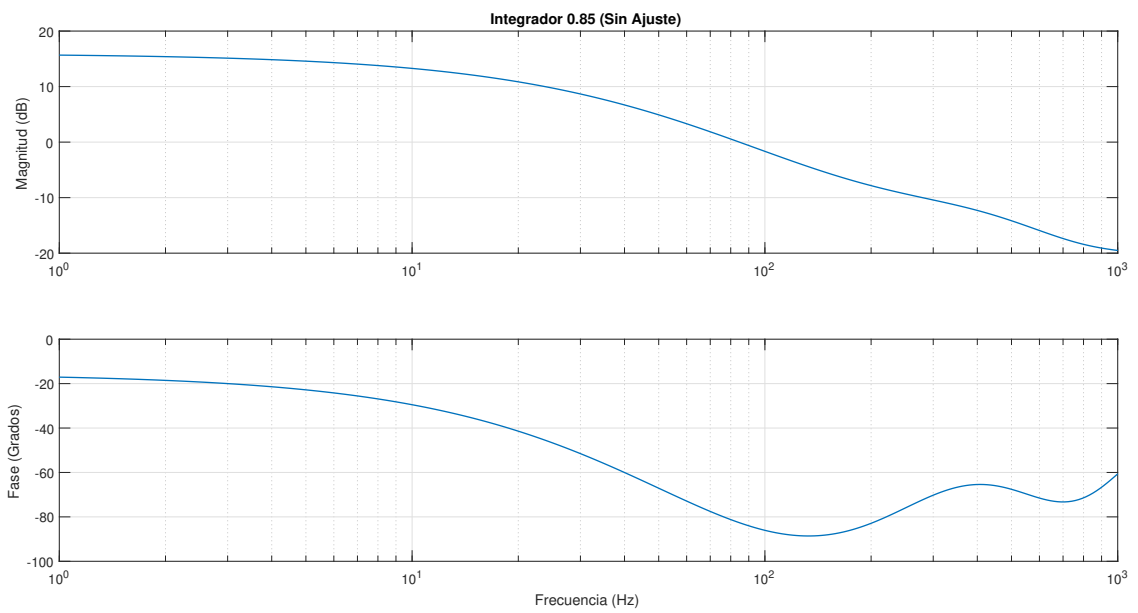


Figura 6.9: Integrador con $\alpha = 0.85$

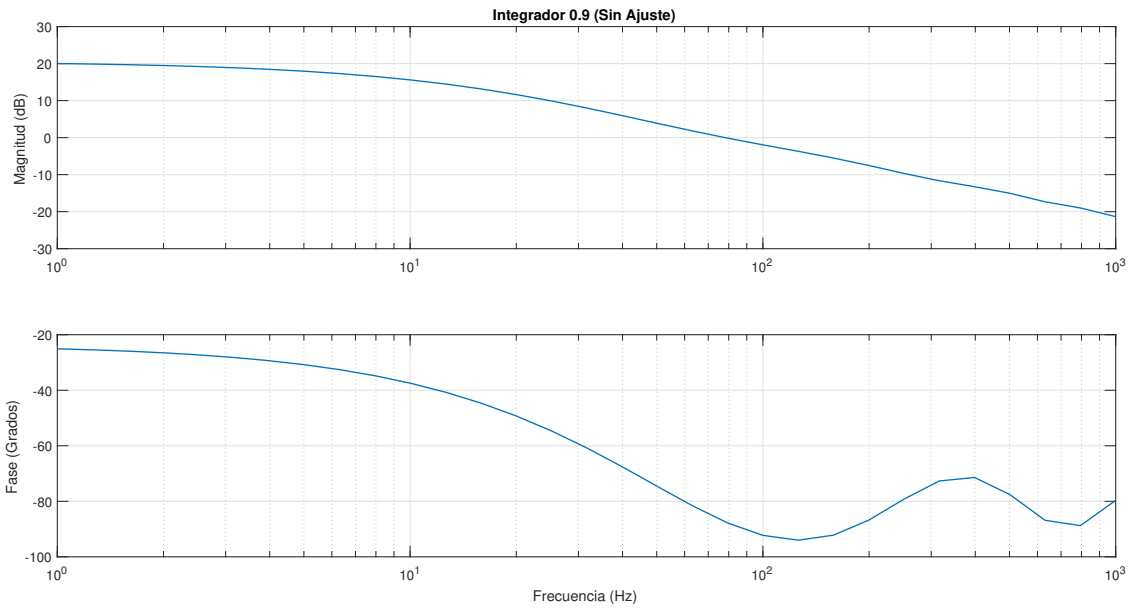


Figura 6.10: Integrador con $\alpha = 0.9$

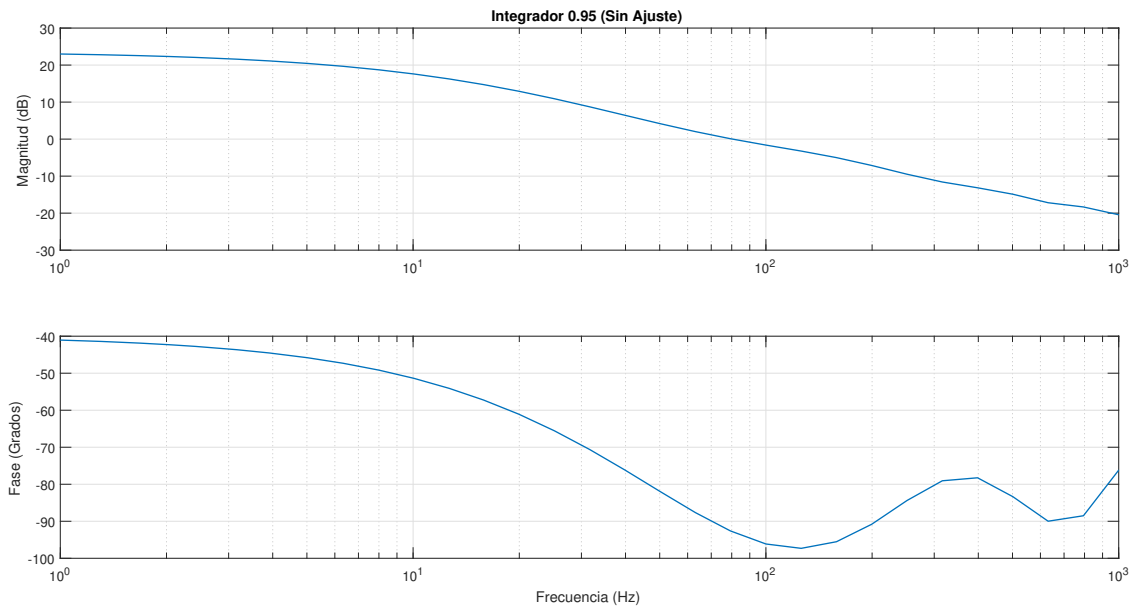


Figura 6.11: Integrador con $\alpha = 0.95$

Apéndice 4: Resultados Experimentales del Integrador Fraccionario por Butterworth y Chebyshev con Ajuste.

En éste apéndice se agregan los resultados experimentales en el dominio de la frecuencia del integrador fraccionario de Butterworth y Chebyshev con optimización en la pendiente.

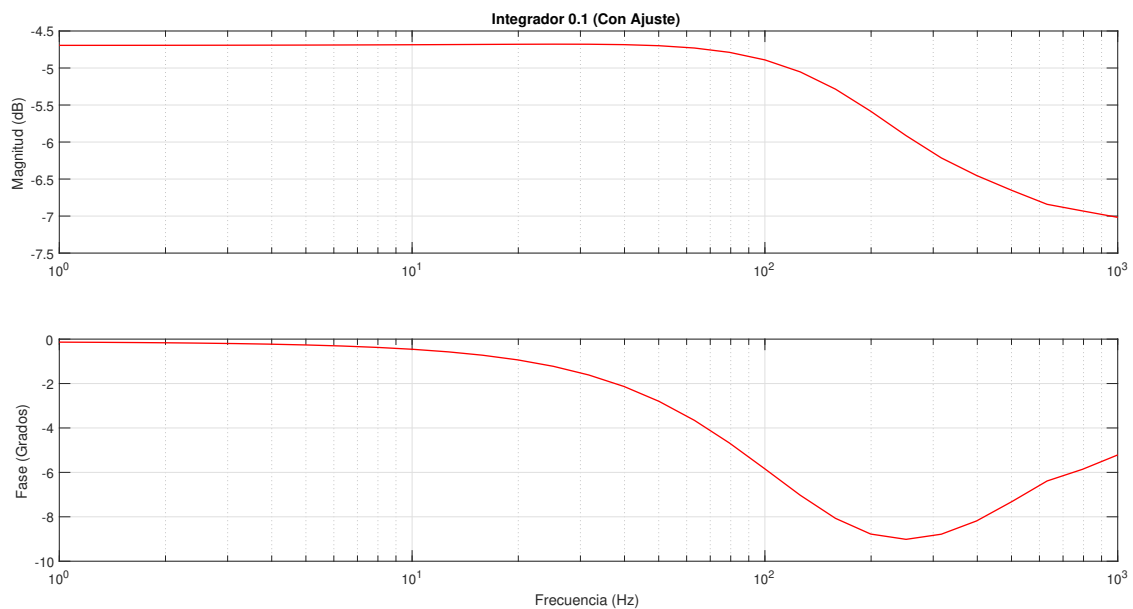


Figura 6.12: Integrador con $\alpha = 0.1$

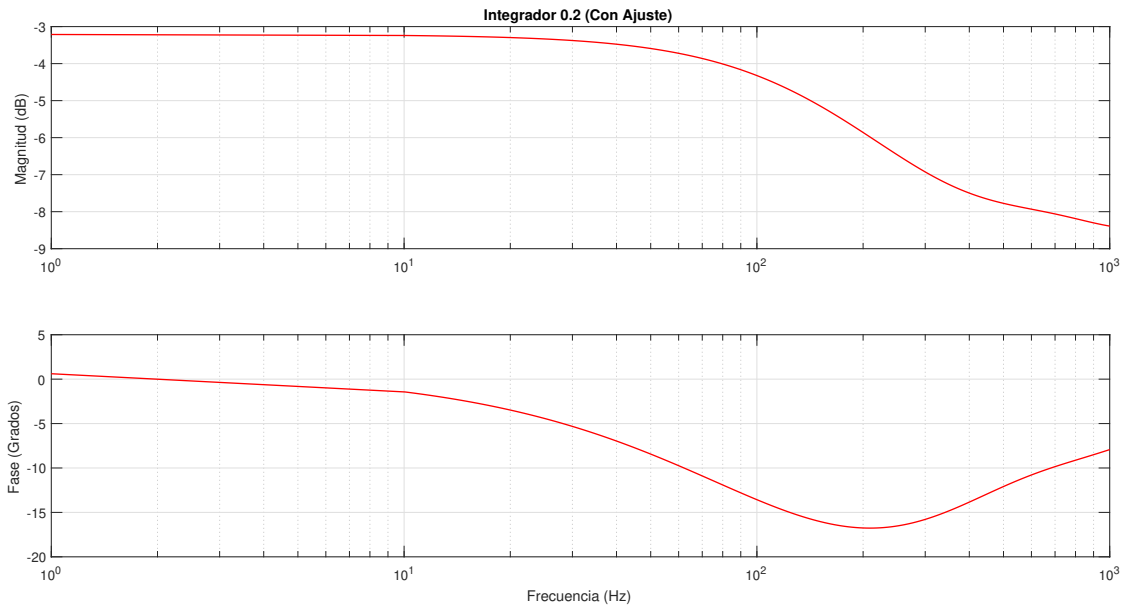


Figura 6.13: Integrador con $\alpha = 0.2$

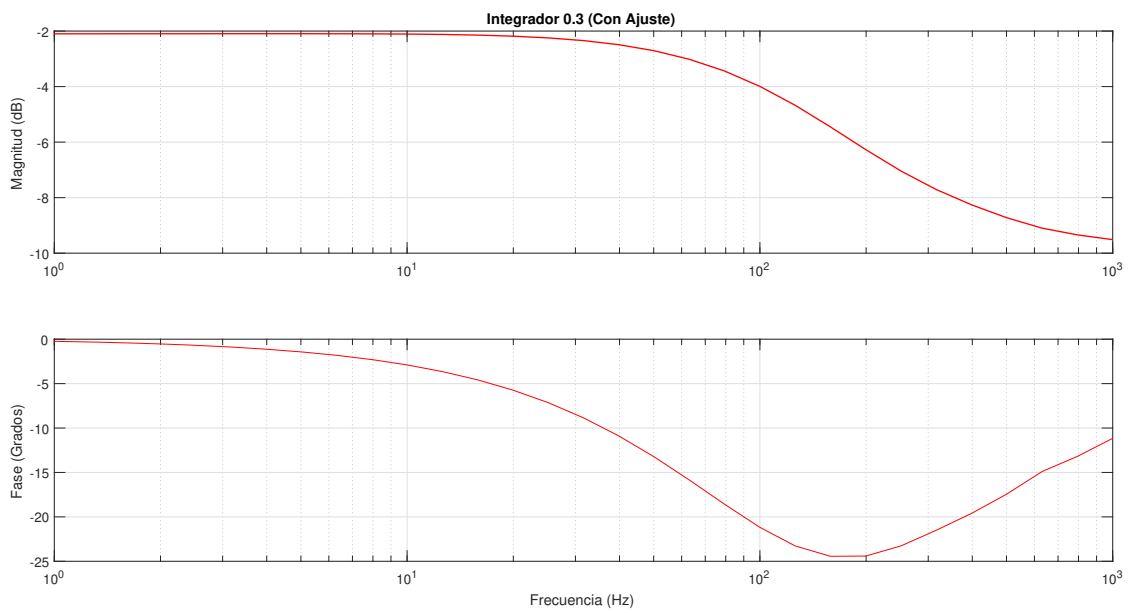


Figura 6.14: Integrador con $\alpha = 0.3$

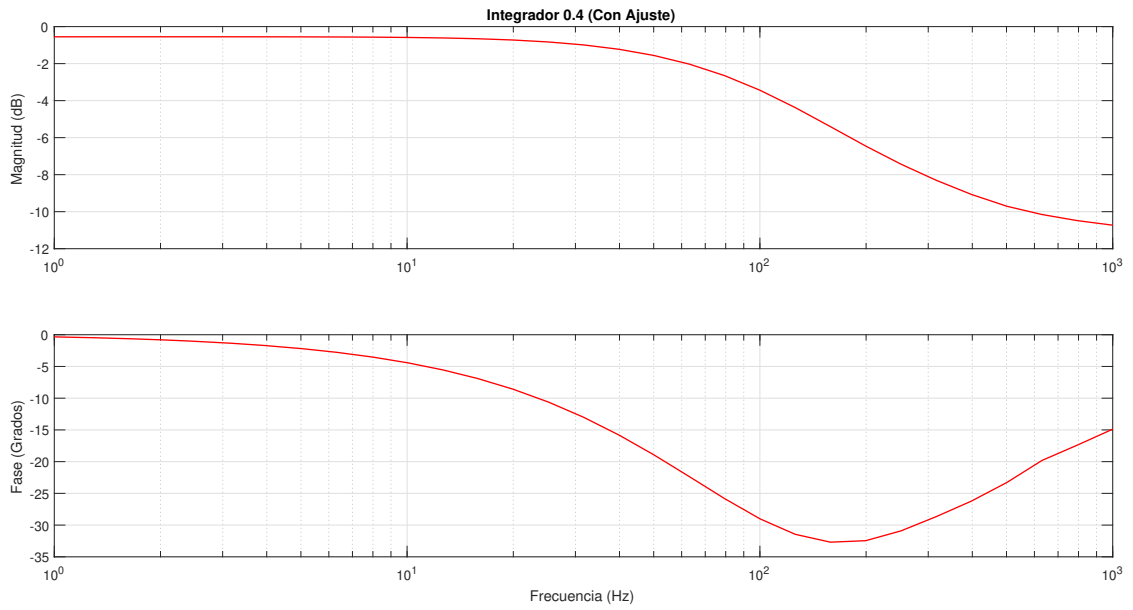


Figura 6.15: Integrador con $\alpha = 0.4$

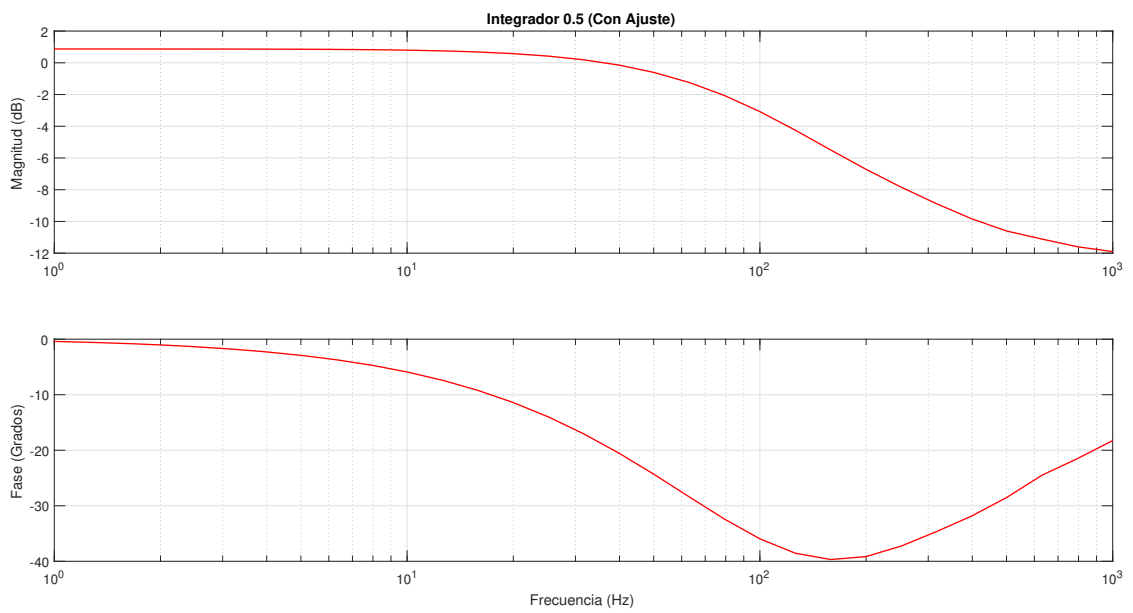


Figura 6.16: Integrador con $\alpha = 0.5$

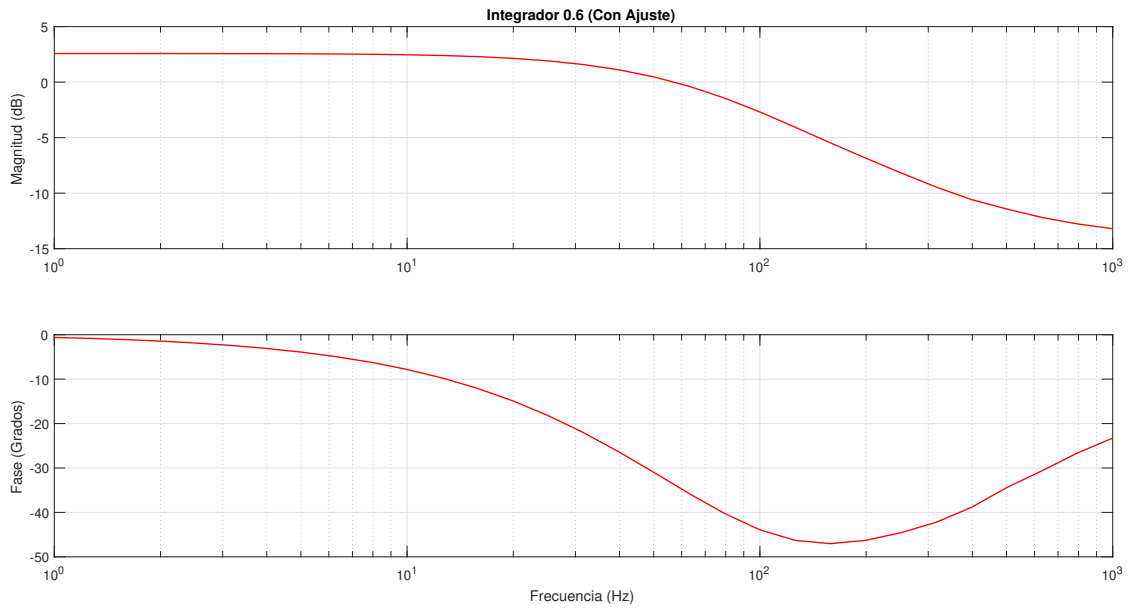


Figura 6.17: Integrador con $\alpha = 0.6$

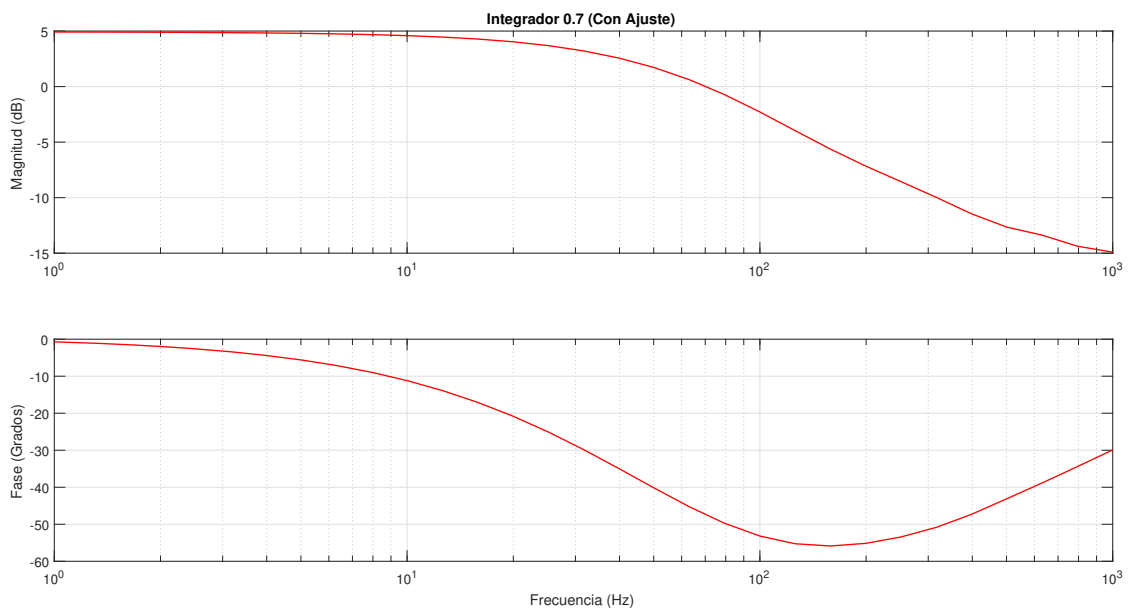


Figura 6.18: Integrador con $\alpha = 0.7$

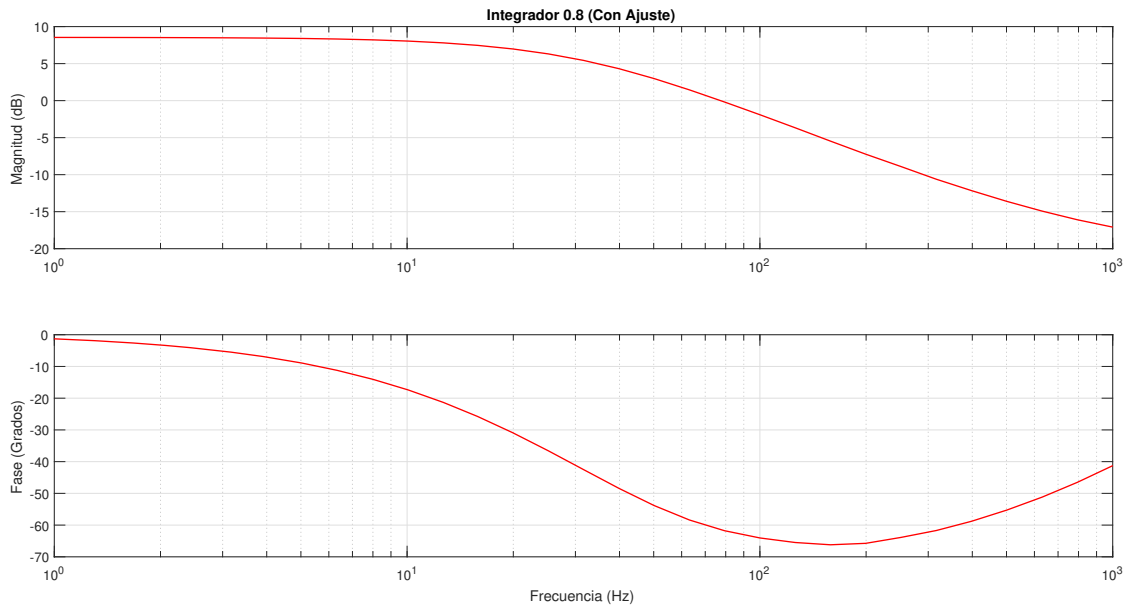


Figura 6.19: Integrador con $\alpha = 0.8$

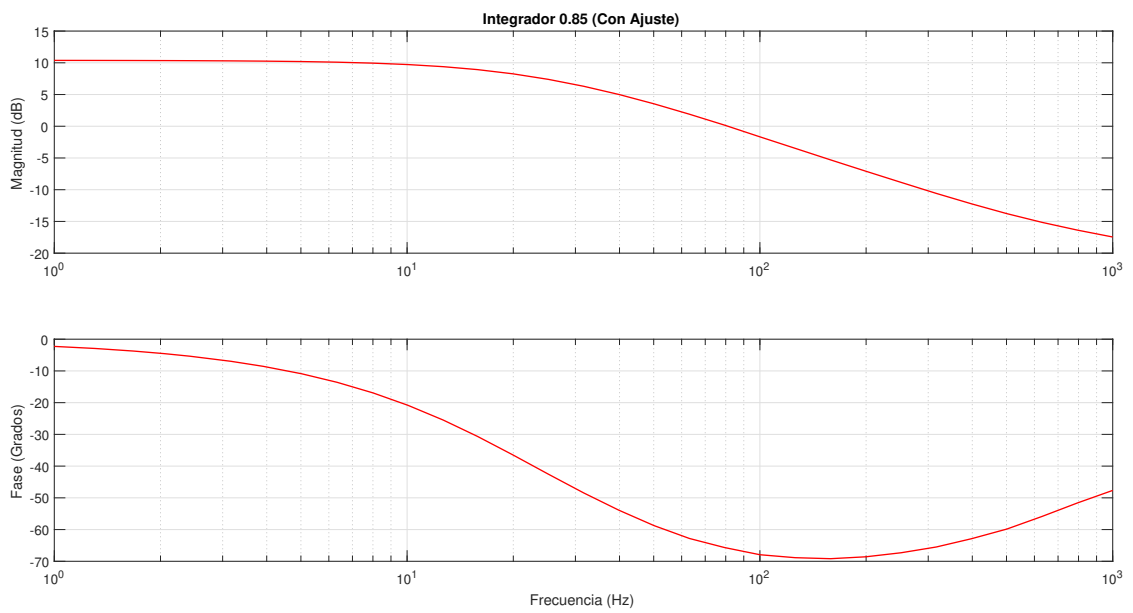


Figura 6.20: Integrador con $\alpha = 0.85$

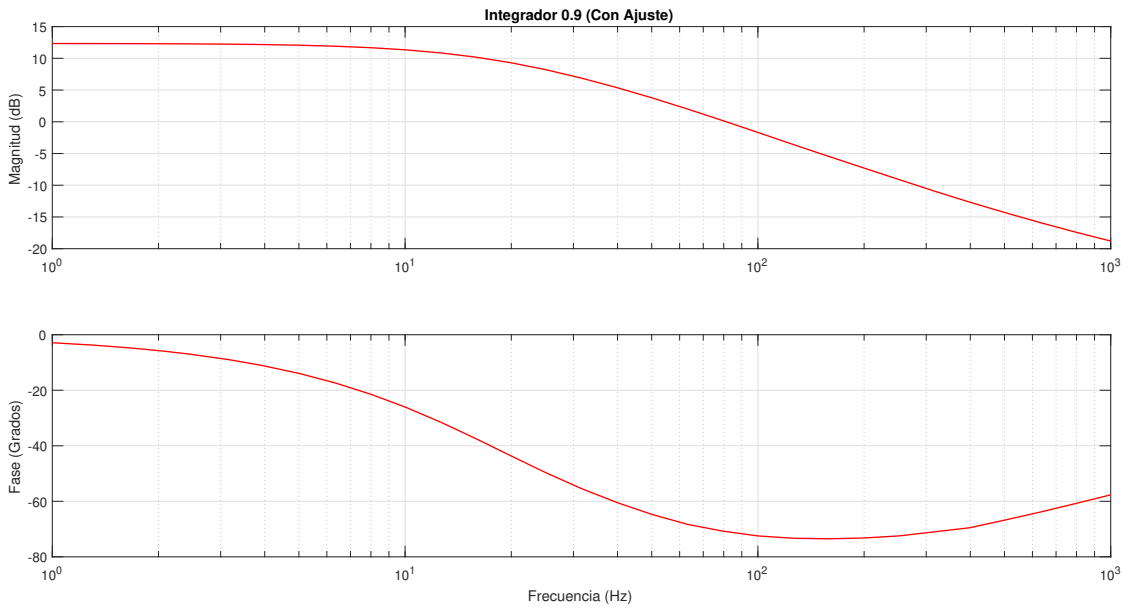


Figura 6.21: Integrador con $\alpha = 0.9$

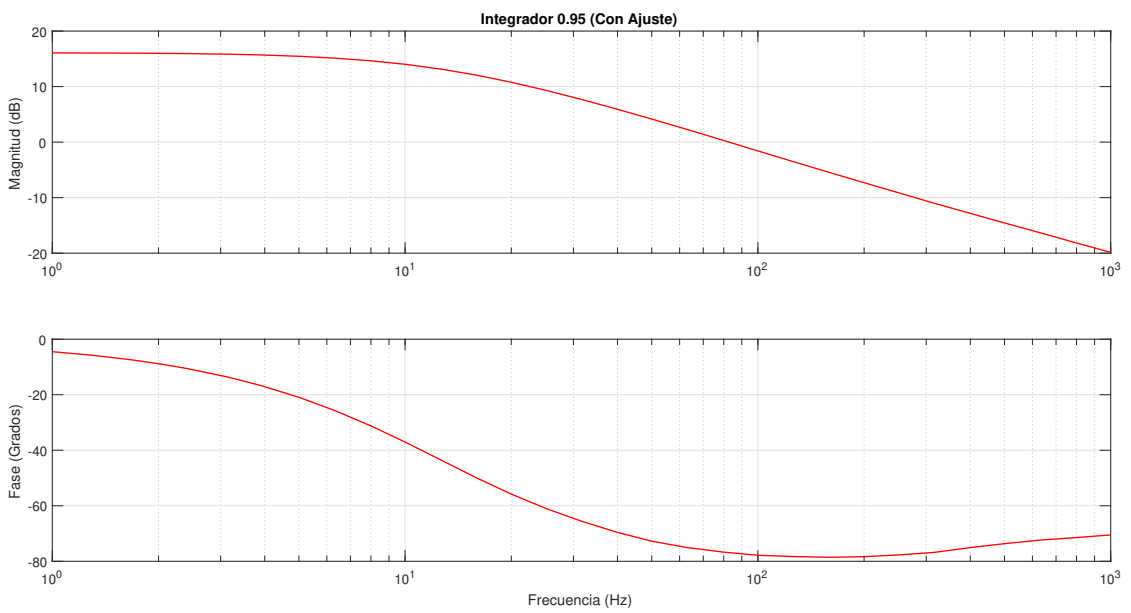


Figura 6.22: Integrador con $\alpha = 0.95$

Apéndice 5: Valores de los Elementos en el integrador de Foster y Cauer.

En la Tabla 6.8 se muestran los valores del circuito del integrador fraccionario por Foster y Cauer sin Ajuste en A , mientras que en la Tabla 6.9 muestra los valores con ajuste.

Tabla 6.8: Valores de los elementos del integrador de Foster y Cauer sin Ajuste.

α	$R_1(\Omega)$	$R_2(K\Omega)$	$C(\mu F)$	$R_{bias}(K\Omega)$	$V_{pp}(V)$
0.10	4700	2.3	1	2000	0.1
0.20	2400	3.0	1	1200	0.1
0.30	1500	3.7	1	900	0.1
0.40	1050	4.7	1	800	0.1
0.50	750	6.0	1	780	0.1
0.60	533	8.0	1	730	0.1
0.70	360	11.3	1	700	0.1
0.80	225	18.0	1	690	0.1
0.85	160	24.5	1	660	0.1
0.90	103	38.0	1	630	0.1
0.95	51	78.0	1	600	0.1

Tabla 6.9: Valores de los elementos del integrador de Foster y Cauer con Ajuste.

α	$R_1(\Omega)$	$R_2(K\Omega)$	$C(\mu F)$	$R_{bias}(K\Omega)$	$V_{pp}(V)$
0.10	3554	1.151	1.0	1457	0.1
0.20	1629	1.353	1.0	742	0.1
0.30	1081	1.564	1.0	610	0.1
0.40	758	1.857	1.0	485	0.1
0.50	583	2.175	1.0	440	0.1
0.60	443	2.636	1.0	400	0.1
0.70	317	3.444	1.0	380	0.1
0.80	175	5.897	1.0	355	0.1
0.85	125	8.091	1.0	340	0.1
0.90	87	11.500	1.0	340	0.1
0.95	70	14.385	1.0	340	0.1

Apéndice 6: Resultados Experimentales del Integrador Fraccionario por Foster y Cauer sin Ajuste.

En éste apéndice se agregan los resultados experimentales en el dominio de la frecuencia del integrador fraccionario de Foster y Cauer.

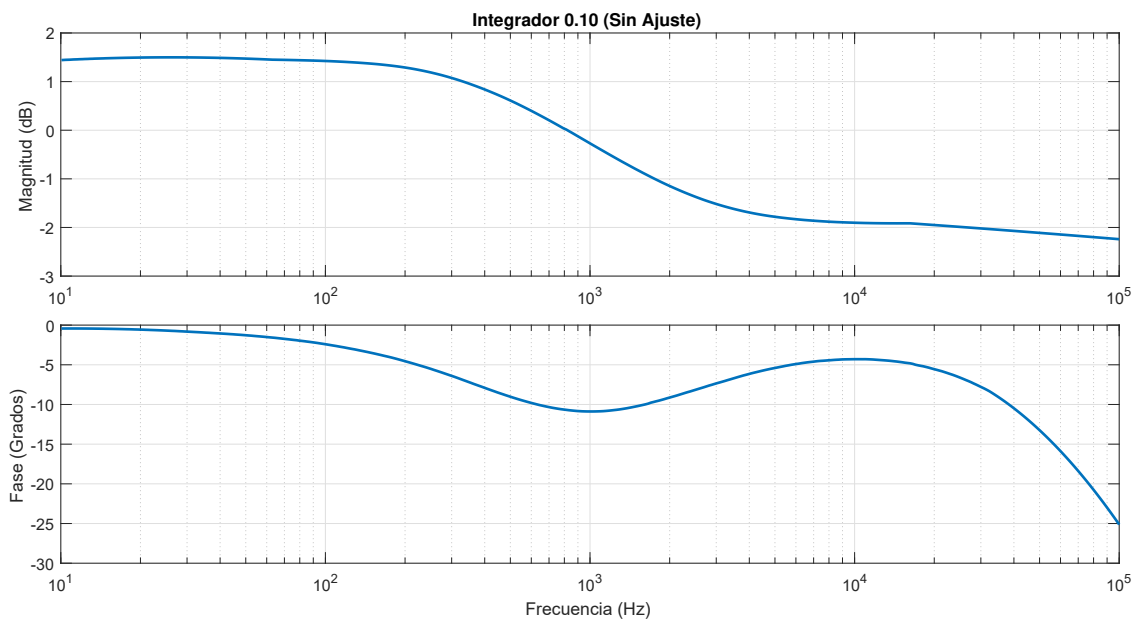


Figura 6.23: Integrador con $\alpha = 0.1$

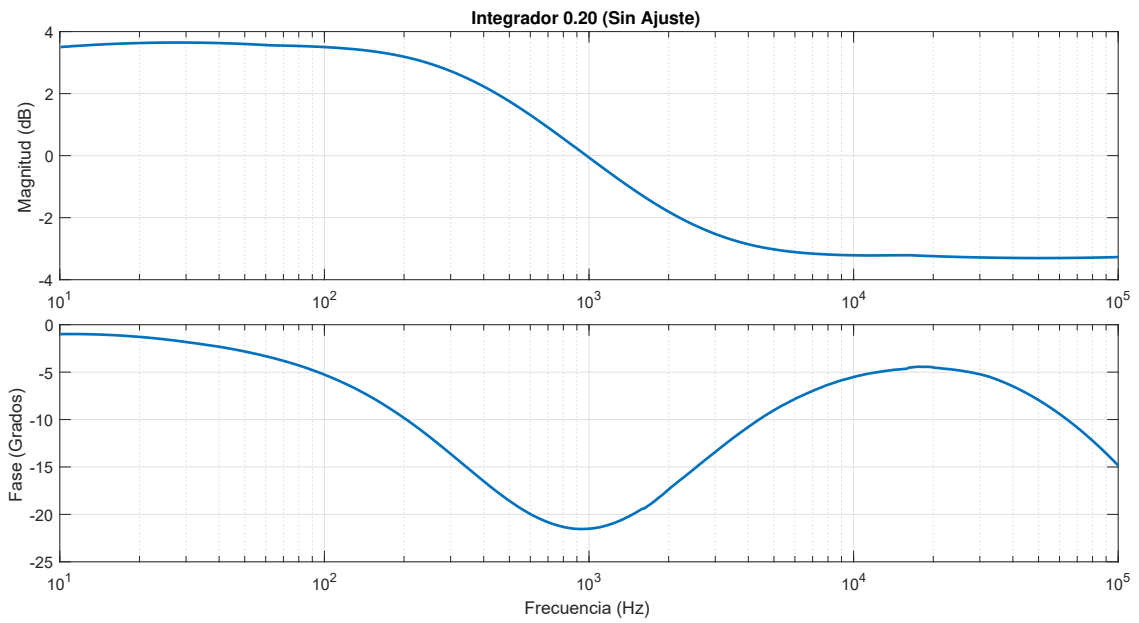


Figura 6.24: Integrador con $\alpha = 0.2$

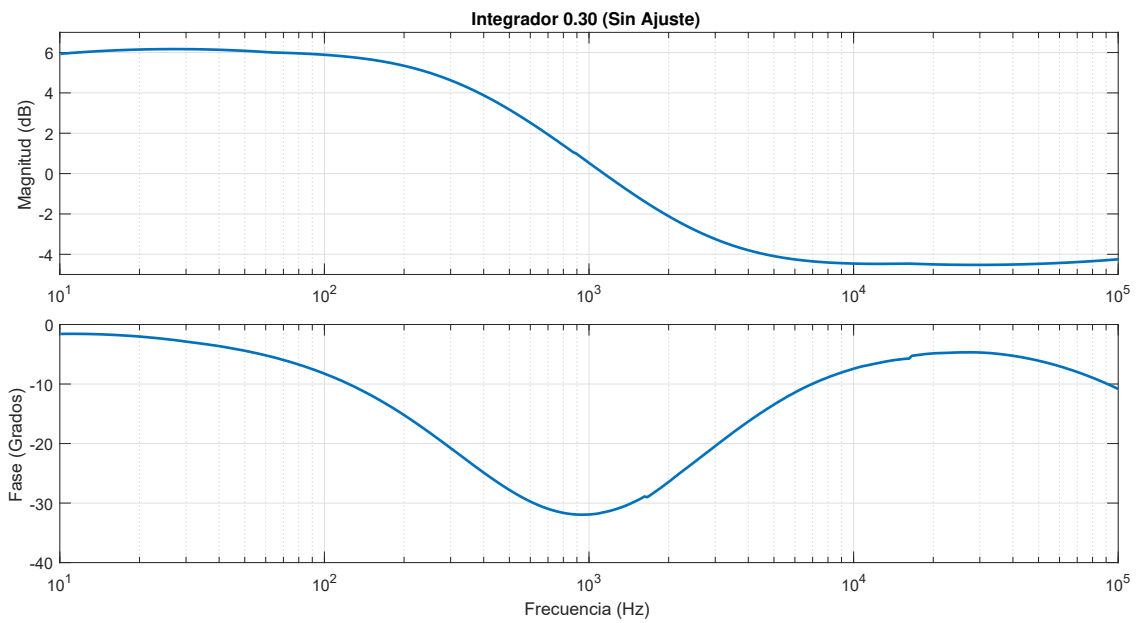


Figura 6.25: Integrador con $\alpha = 0.3$

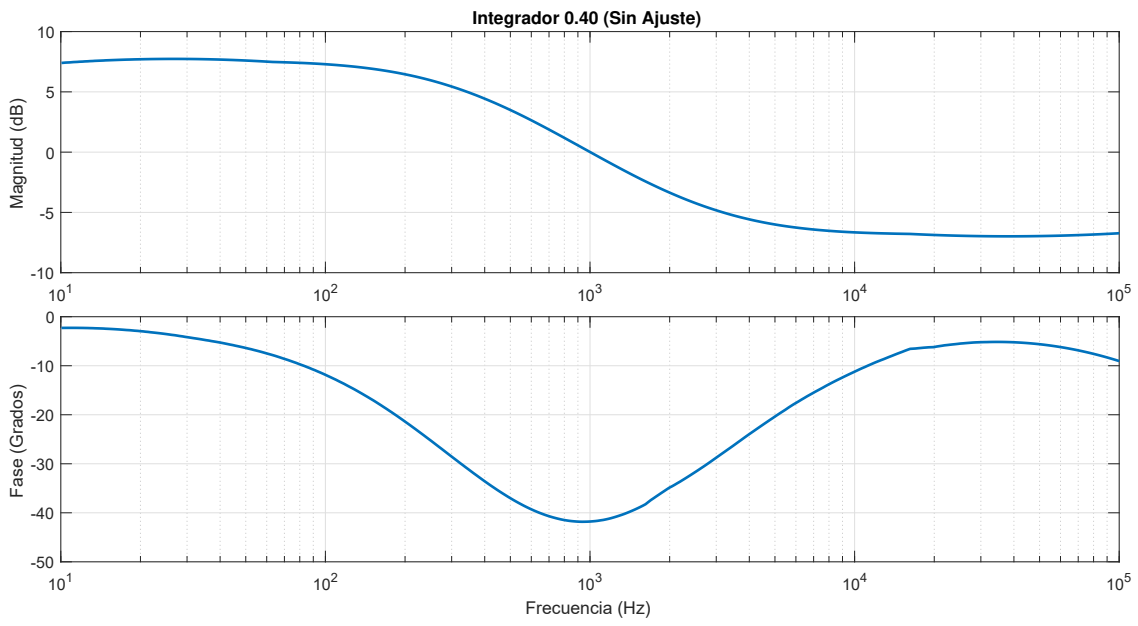


Figura 6.26: Integrador con $\alpha = 0.4$

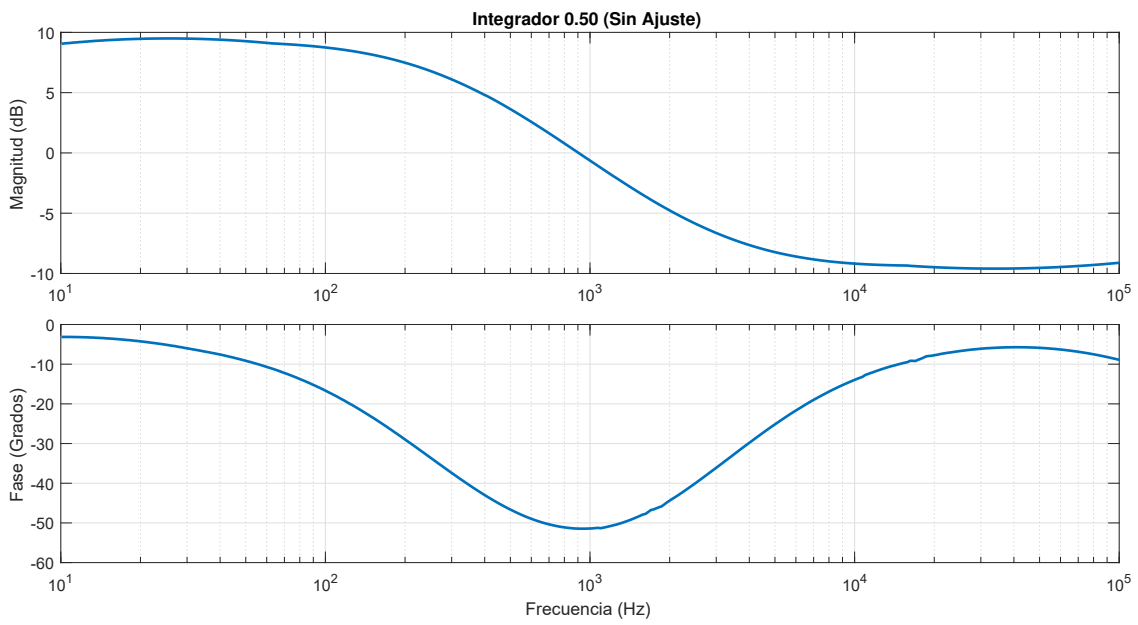


Figura 6.27: Integrador con $\alpha = 0.5$

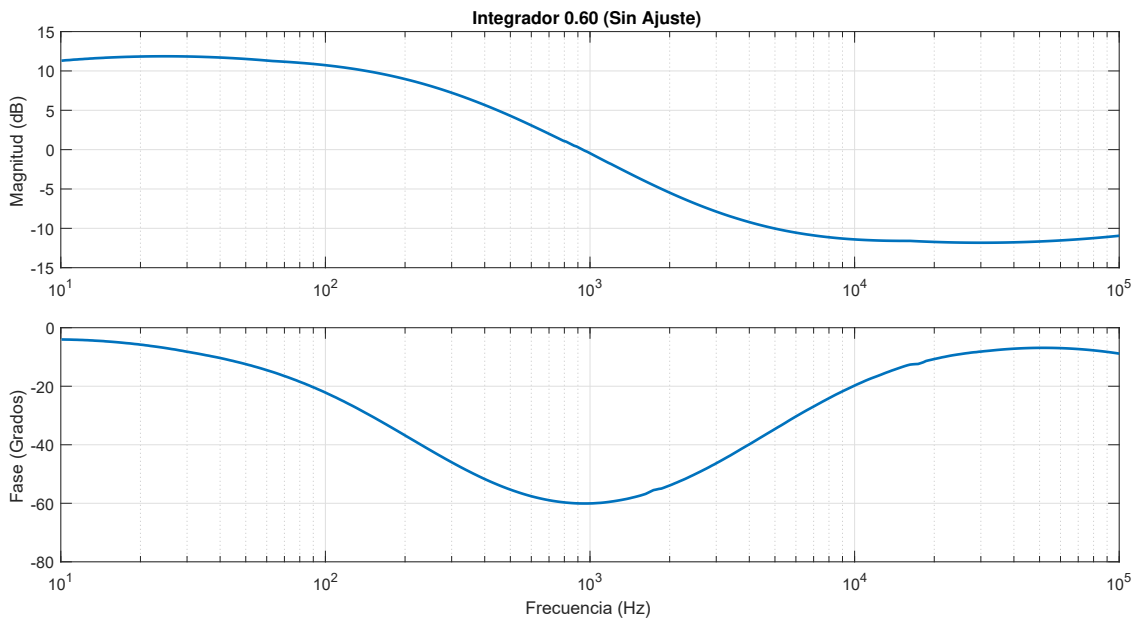


Figura 6.28: Integrador con $\alpha = 0.6$

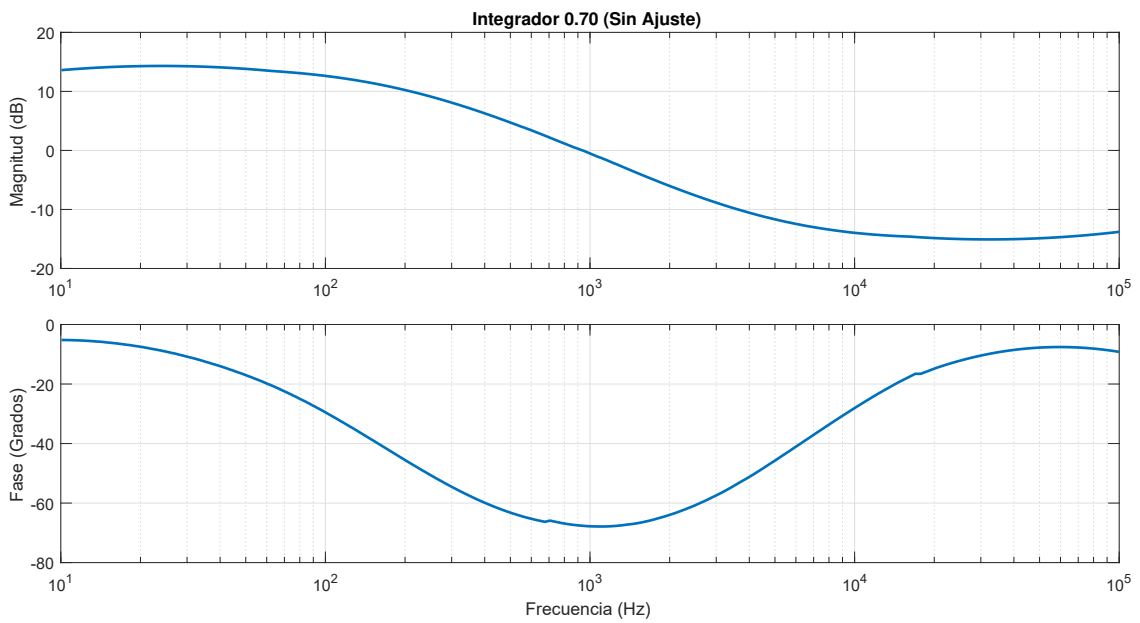


Figura 6.29: Integrador con $\alpha = 0.7$

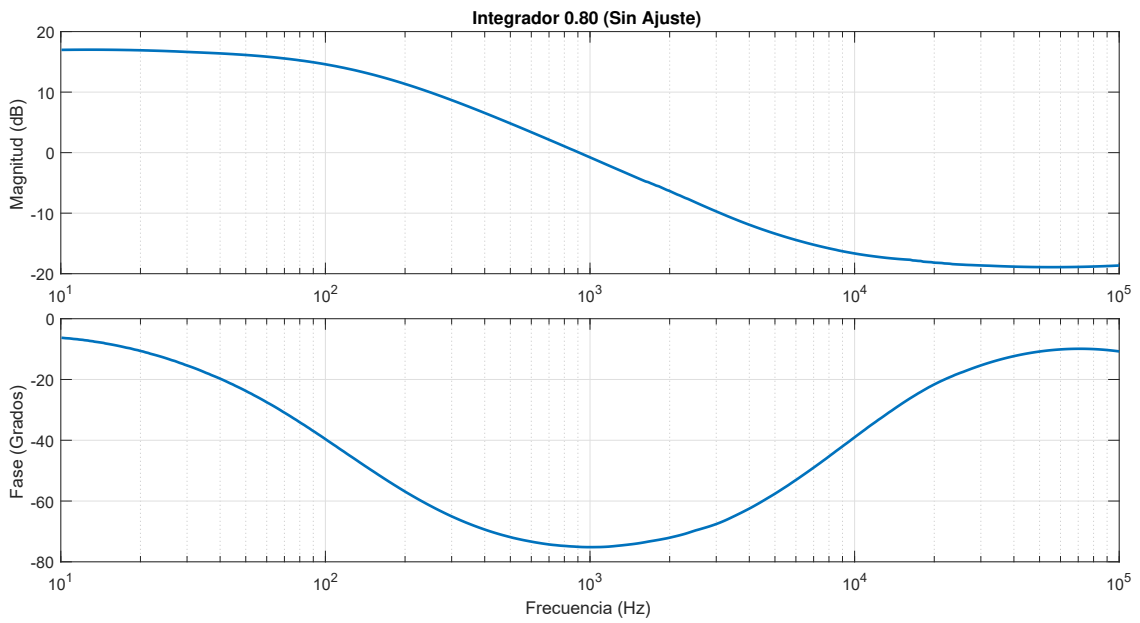


Figura 6.30: Integrador con $\alpha = 0.8$

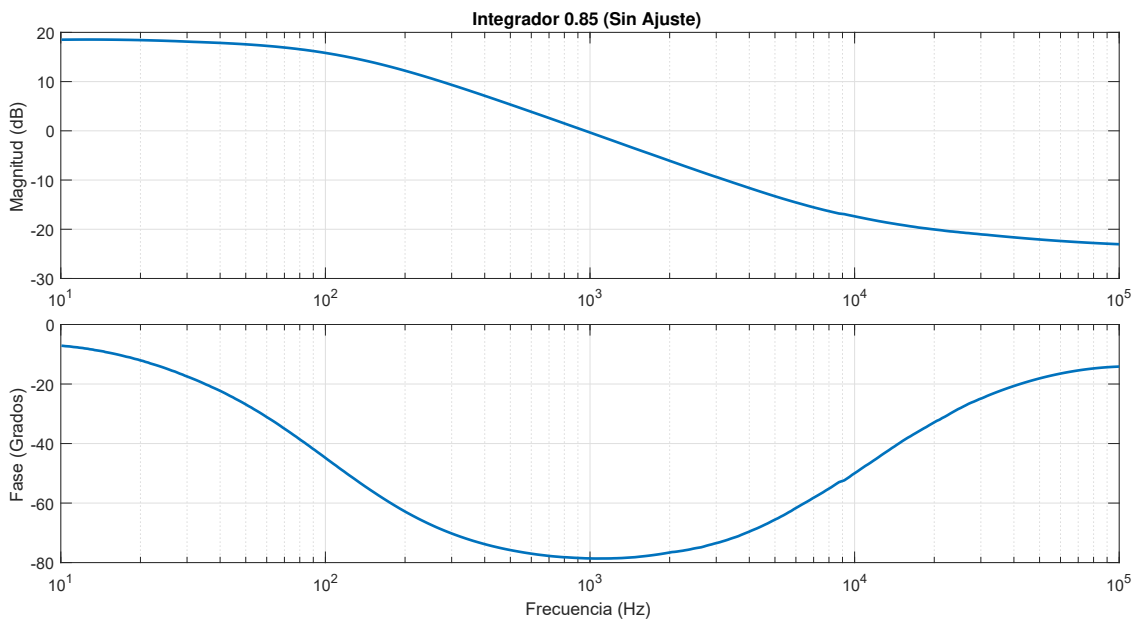


Figura 6.31: Integrador con $\alpha = 0.85$

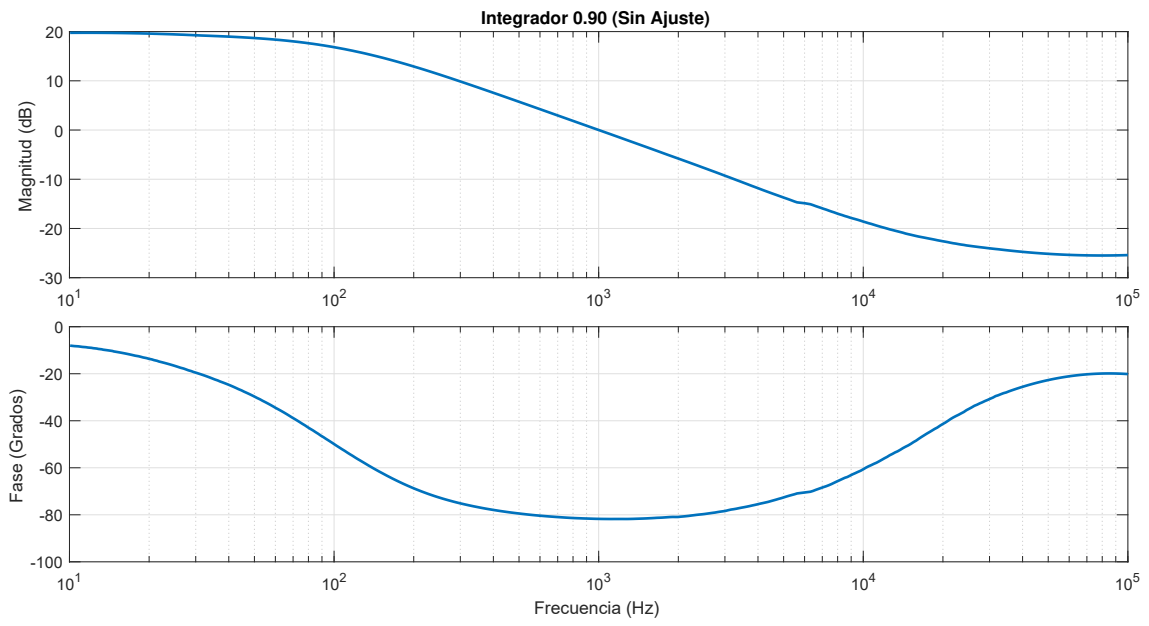


Figura 6.32: Integrador con $\alpha = 0.9$

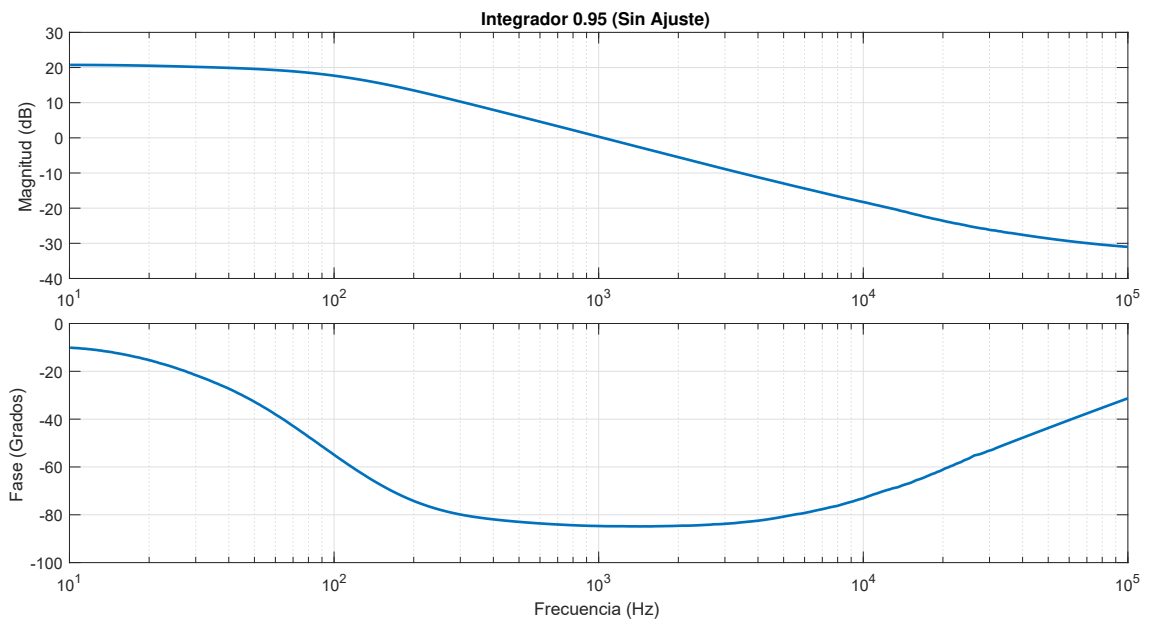


Figura 6.33: Integrador con $\alpha = 0.95$

Apéndice 7: Resultados Experimentales del Integrador Fraccionario por Foster y Cauer con Ajuste.

En éste apéndice se agregan los resultados experimentales en el dominio de la frecuencia del integrador fraccionario de Foster y Cauer con ajuste.

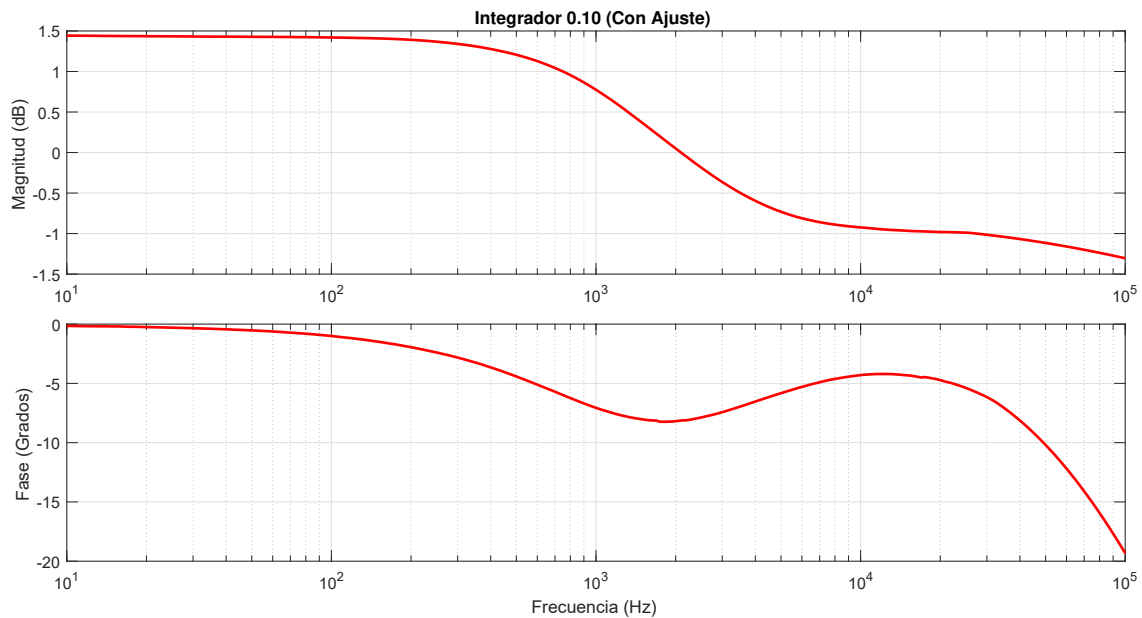


Figura 6.34: Integrador con $\alpha = 0.1$

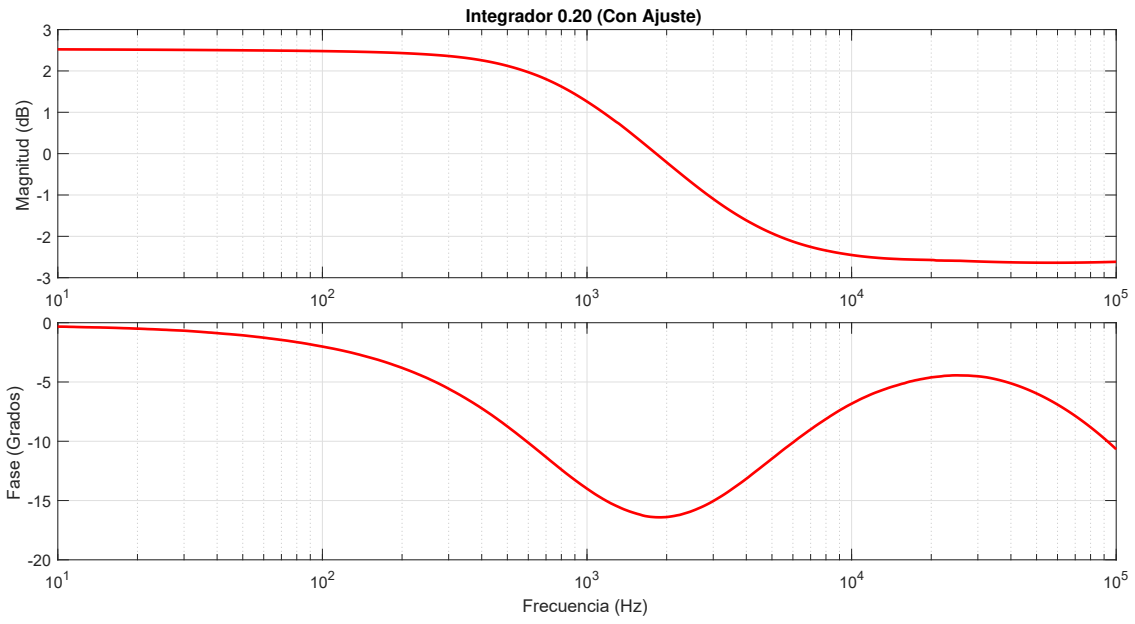


Figura 6.35: Integrador con $\alpha = 0.2$

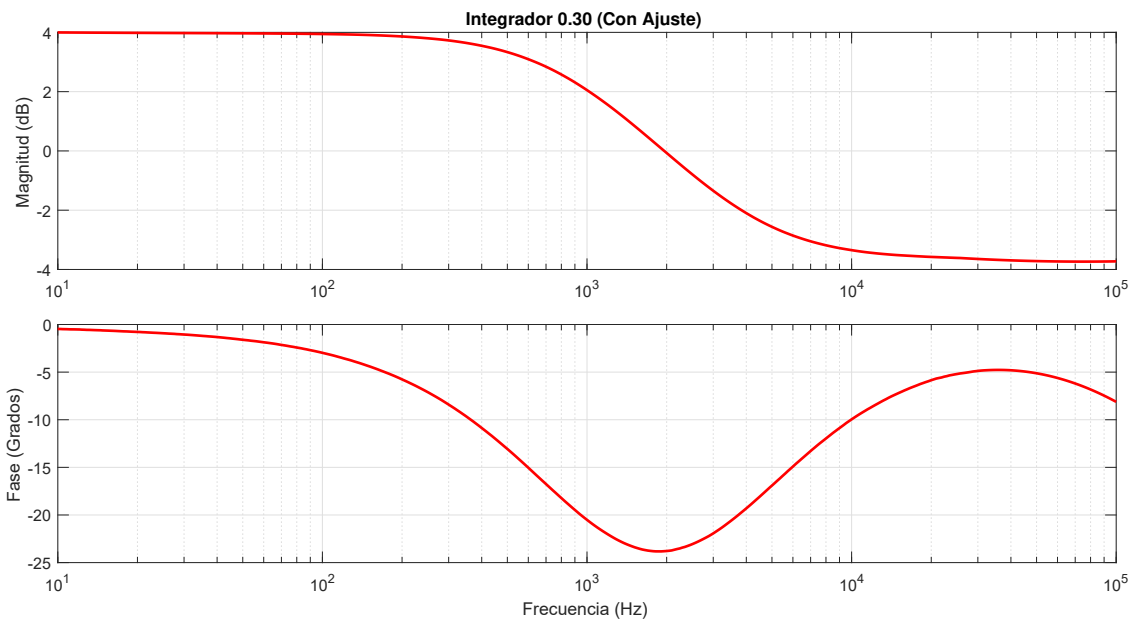


Figura 6.36: Integrador con $\alpha = 0.3$

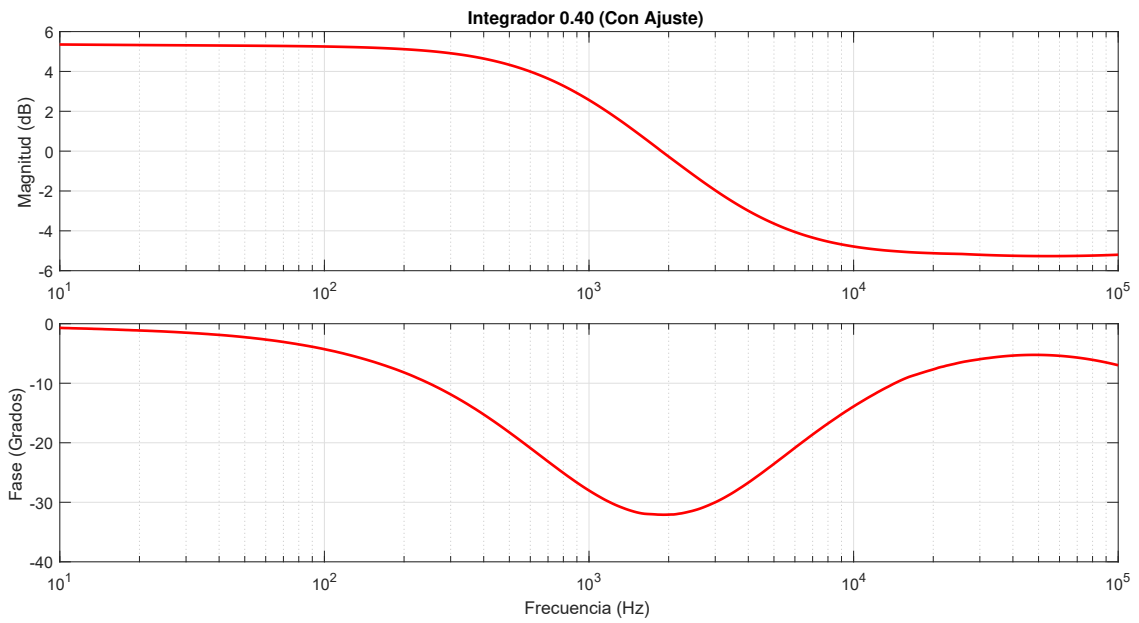


Figura 6.37: Integrador con $\alpha = 0.4$

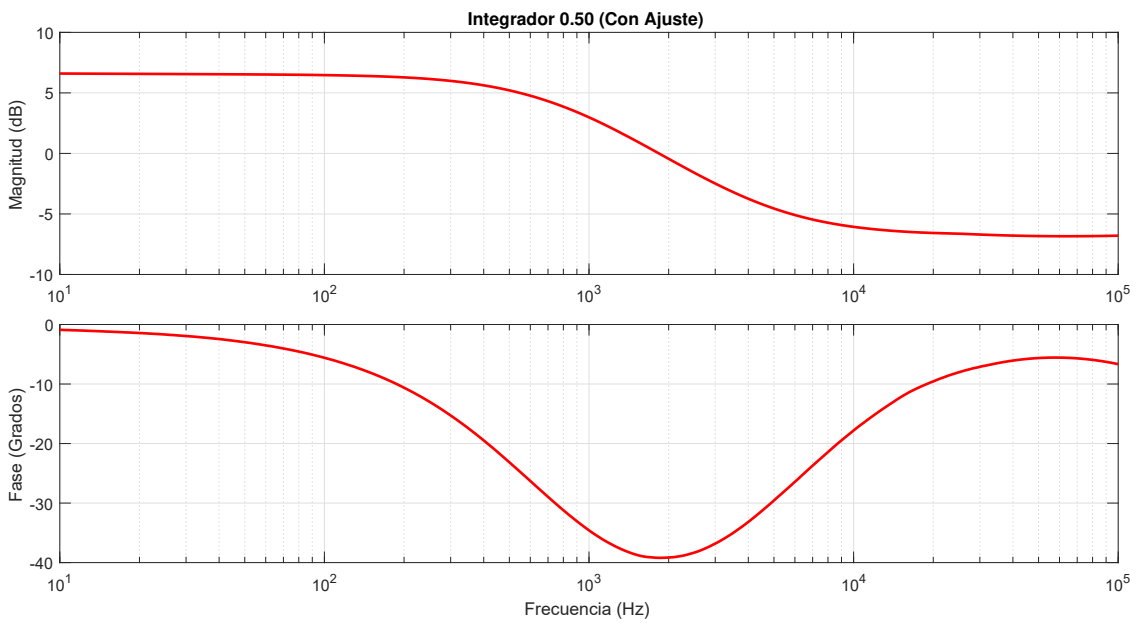


Figura 6.38: Integrador con $\alpha = 0.5$

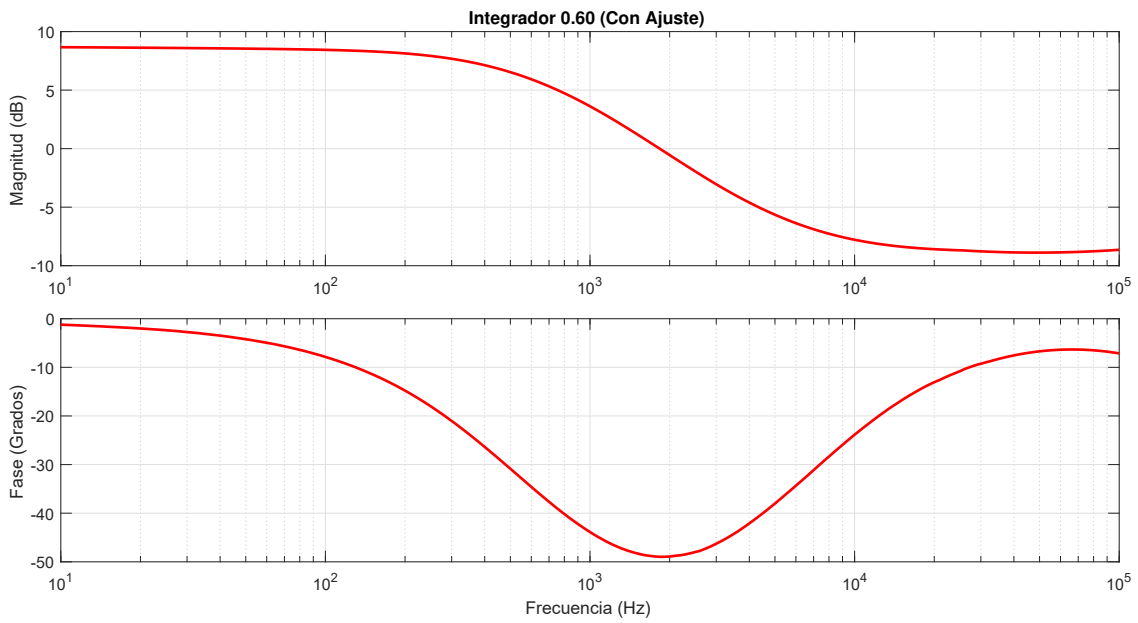


Figura 6.39: Integrador con $\alpha = 0.6$

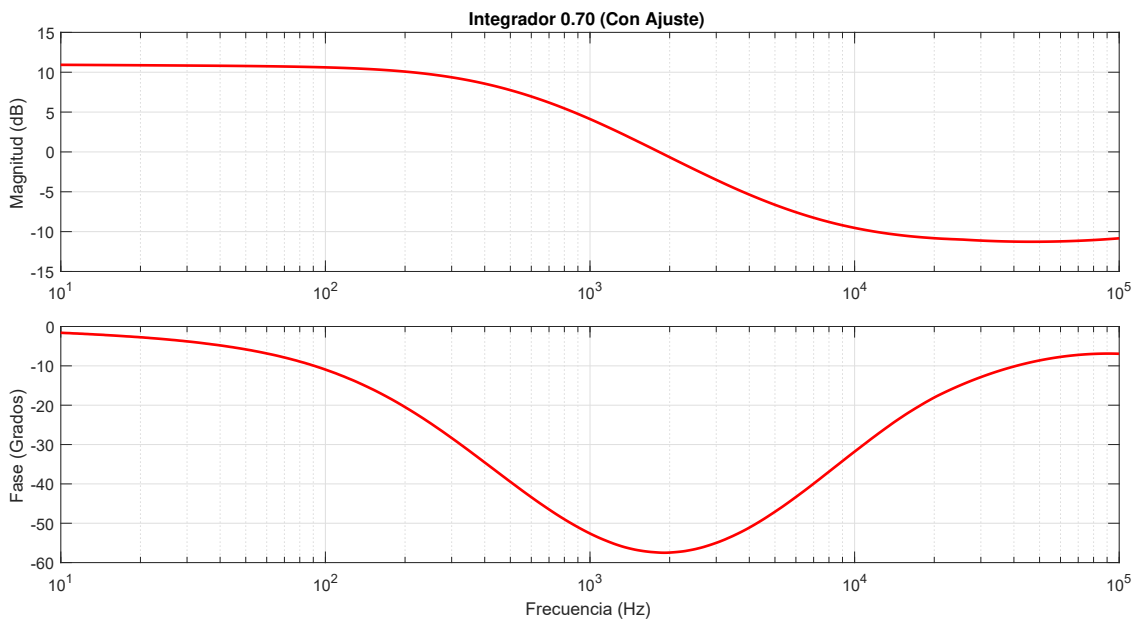


Figura 6.40: Integrador con $\alpha = 0.7$

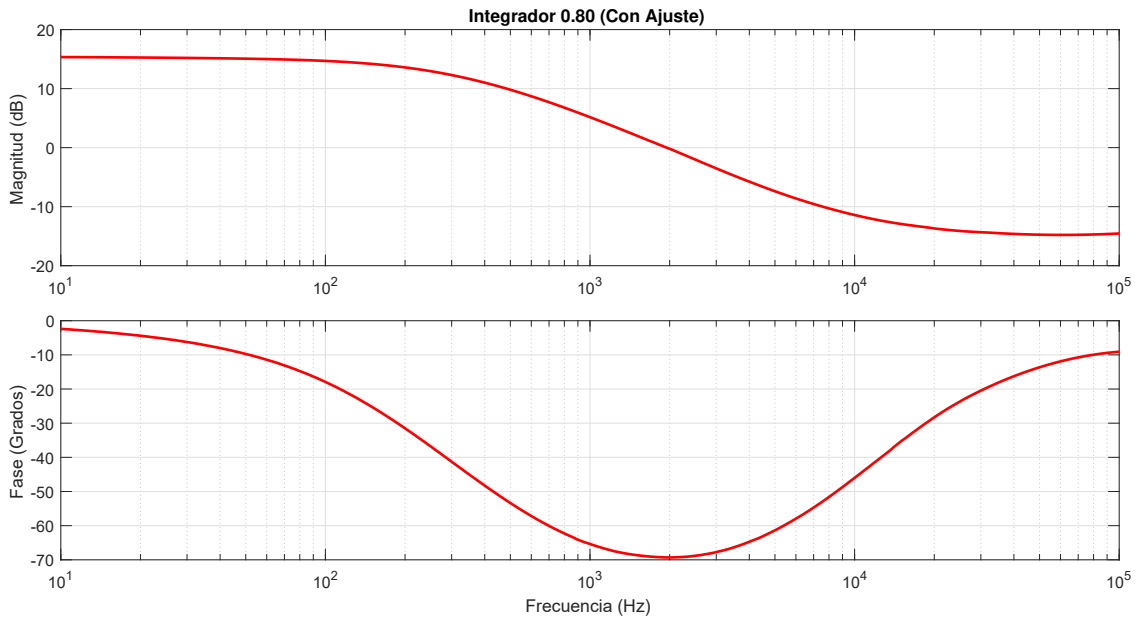


Figura 6.41: Integrador con $\alpha = 0.8$

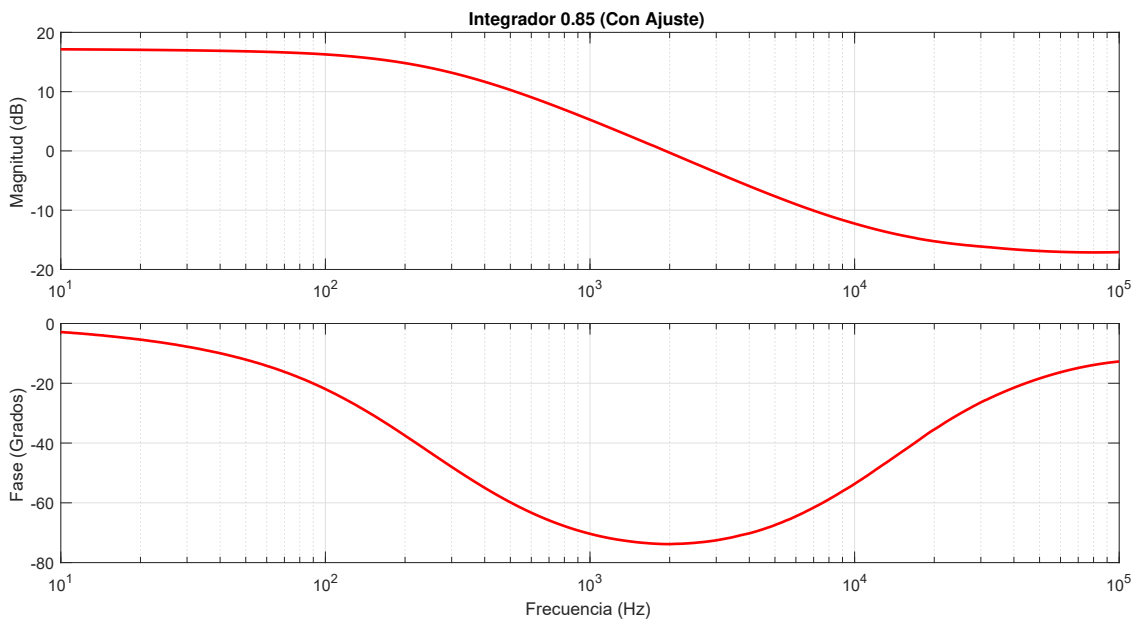


Figura 6.42: Integrador con $\alpha = 0.85$

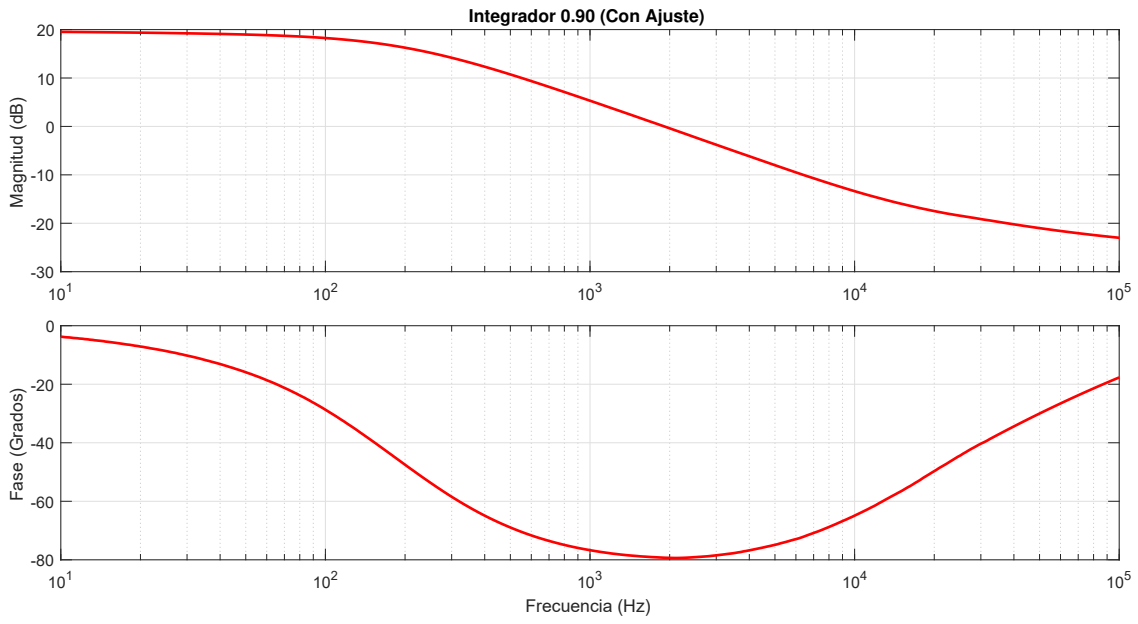


Figura 6.43: Integrador con $\alpha = 0.9$

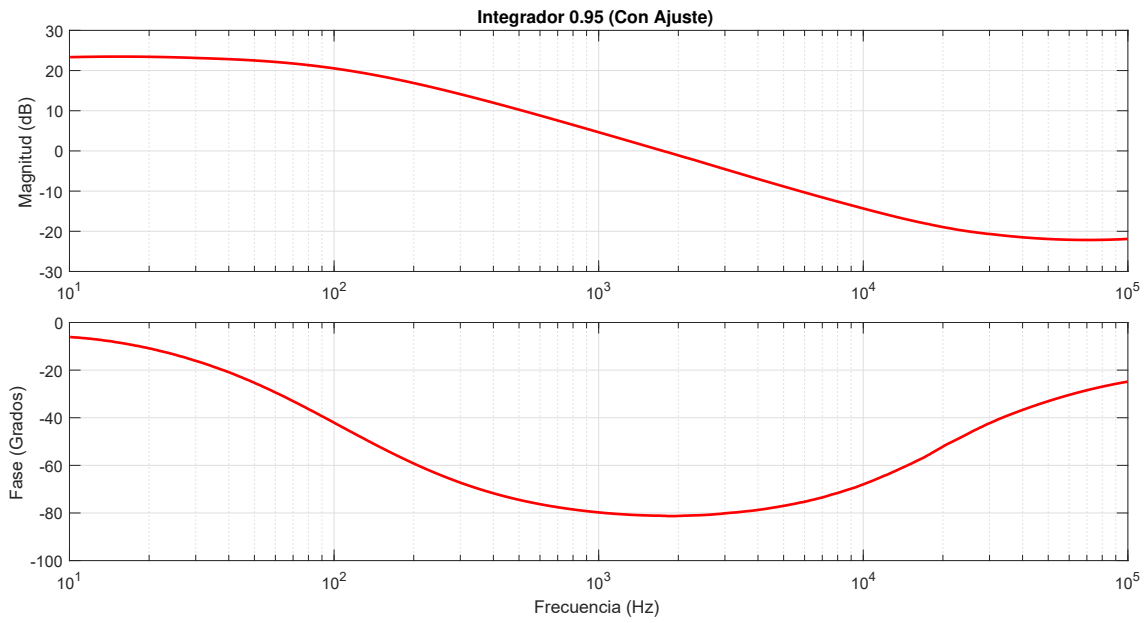


Figura 6.44: Integrador con $\alpha = 0.95$

Apéndice 8: Valores de los Elementos en el integrador de Grafo de Señal.

En la Tabla 6.10 se muestran los valores del circuito del integrador fraccionario por Grafo de Señal sin Ajuste en A , mientras que en la Tabla 6.11 muestra los valores con ajuste.

Tabla 6.10: Valores de los elementos del integrador de Grafo de Señal sin Ajuste.

α	$R_1/R_2(K\Omega)$	$C(nF)$	$R_{bias1}(K\Omega)$	$R_{bias2}(K\Omega)$	$R_{bias3}(K\Omega)$	$R_{bias4}(K\Omega)$	$R_{biasC}(K\Omega)$	$V_{pp}(V)$
0.10	1.0	100	164	200	164	220	260	0.1
0.20	1.0	100	192	238	151	290	260	0.08
0.30	1.0	100	192	266	151	490	260	0.06
0.40	1.0	100	205	286	153	525	260	0.04
0.50	1.0	100	291	286	82	694	260	0.04
0.60	1.0	100	291	373	82	1000	260	0.04
0.70	1.0	100	246	480	82	2000	260	0.04
0.80	1.0	100	349	571	48	2000	260	0.04
0.85	1.0	100	371	971	41	3000	260	0.04
0.90	1.0	100	420	971	36	3000	260	0.02
0.95	1.0	100	500	1764	16	3000	260	0.04

Tabla 6.11: Valores de los elementos del integrador de Grafo de Señal con Ajuste.

α	$R_1/R_2(K\Omega)$	$C(nF)$	$R_{bias1}(K\Omega)$	$R_{bias2}(K\Omega)$	$R_{bias3}(K\Omega)$	$R_{bias4}(K\Omega)$	$R_{biasC}(K\Omega)$	$V_{pp}(V)$
0.10	1.0	100	164	188	164	200	160	0.1
0.20	1.0	100	192	208	151	275	156	0.08
0.30	1.0	100	192	256	151	310	146	0.08
0.40	1.0	100	192	267	151	438	178	0.06
0.50	1.0	100	295	412	153	524	178	0.04
0.60	1.0	100	291	252	82	646	310	0.04
0.70	1.0	100	291	347	82	927	310	0.04
0.80	1.0	100	292	300	48	1360	530	0.04
0.85	1.0	100	372	368	41	1344	530	0.04
0.90	1.0	100	372	403	41	1722	530	0.04
0.95	1.0	100	372	516	41	3000	530	0.04

Apéndice 9: Resultados Experimentales del Integrador Fraccionario por Grafo de Señal sin Ajuste.

En éste apéndice se agregan los resultados experimentales en el dominio de la frecuencia del integrador fraccionario por Grafo de Señal.

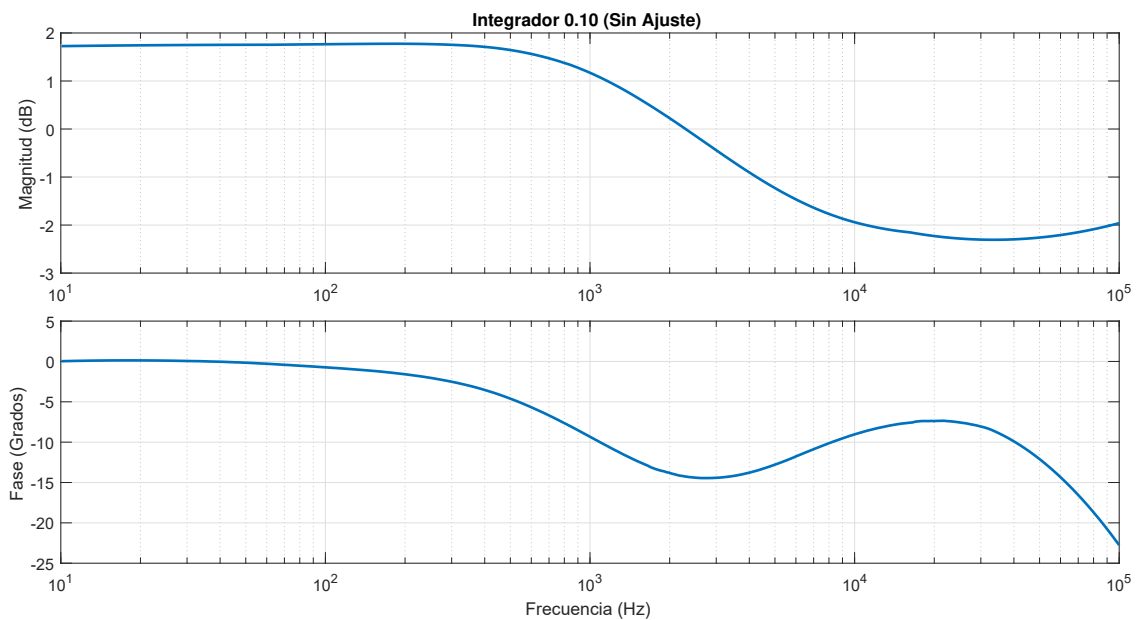


Figura 6.45: Integrador con $\alpha = 0.1$

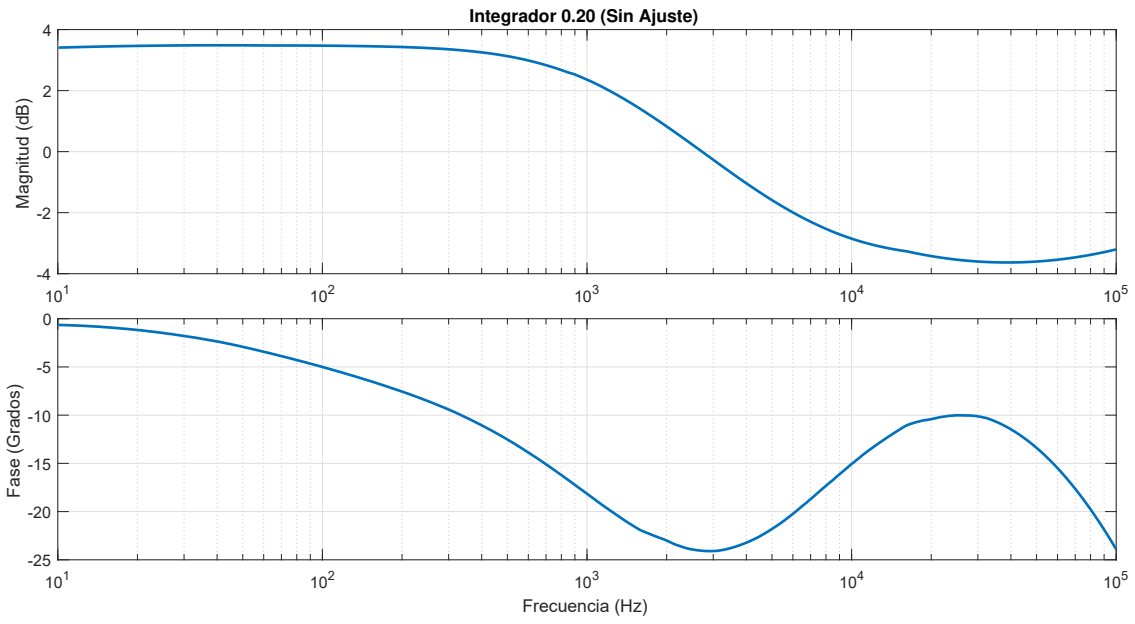


Figura 6.46: Integrador con $\alpha = 0.2$

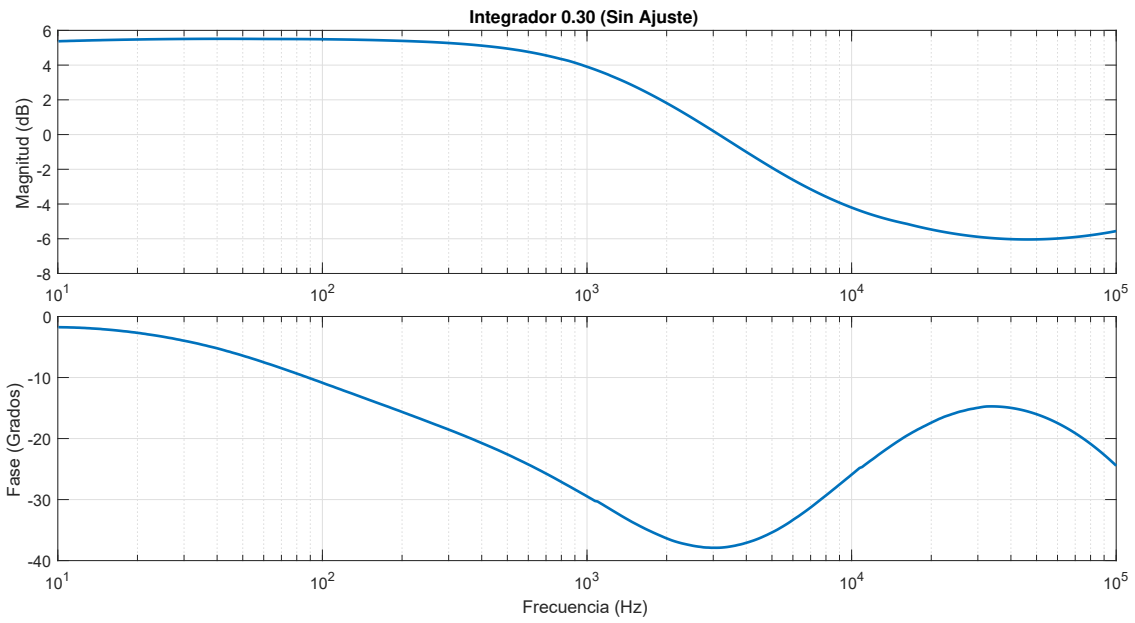


Figura 6.47: Integrador con $\alpha = 0.3$

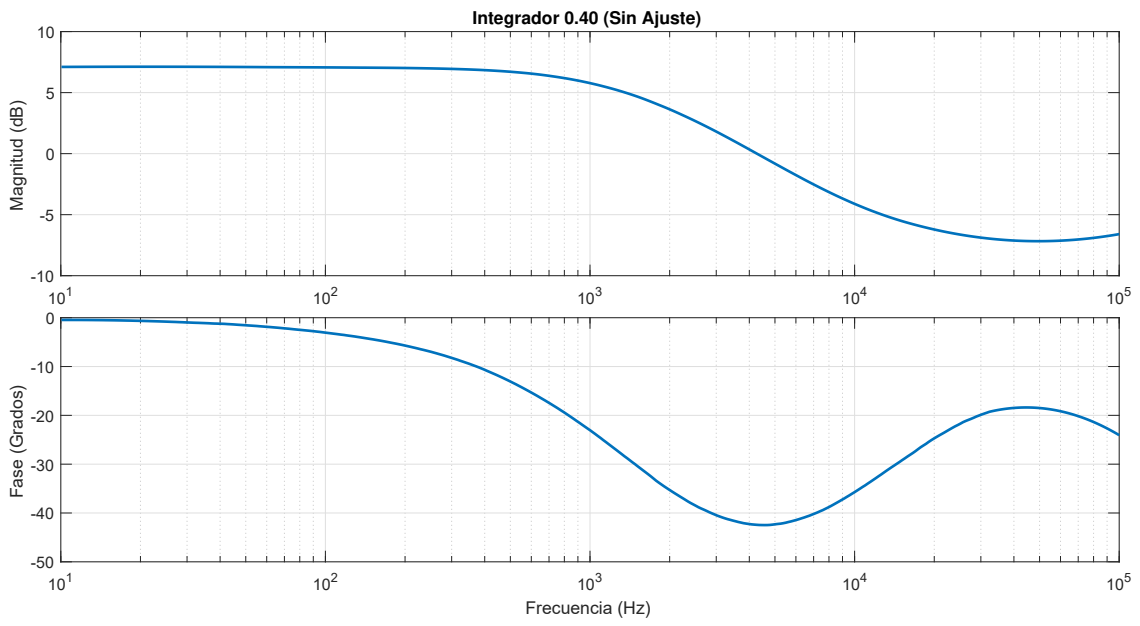


Figura 6.48: Integrador con $\alpha = 0.4$

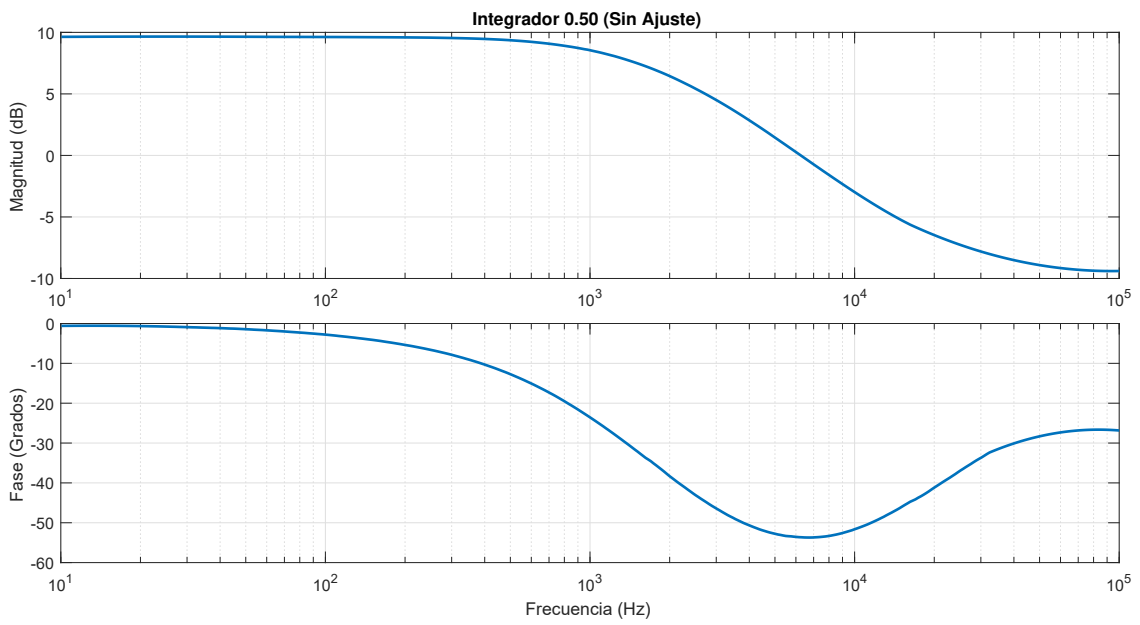


Figura 6.49: Integrador con $\alpha = 0.5$

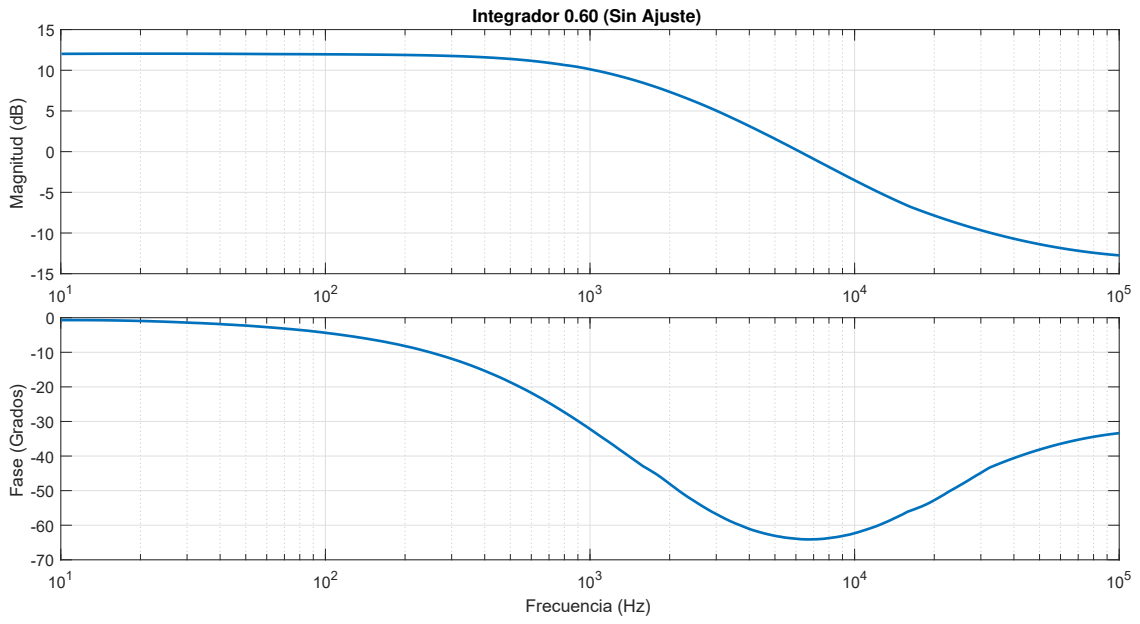


Figura 6.50: Integrador con $\alpha = 0.6$

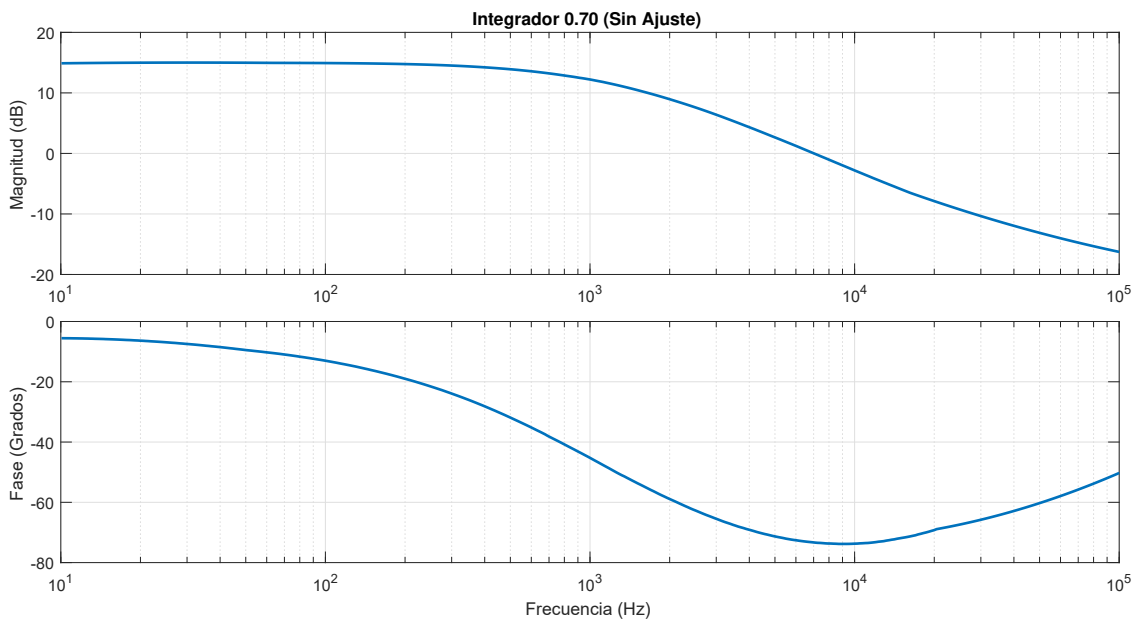


Figura 6.51: Integrador con $\alpha = 0.7$

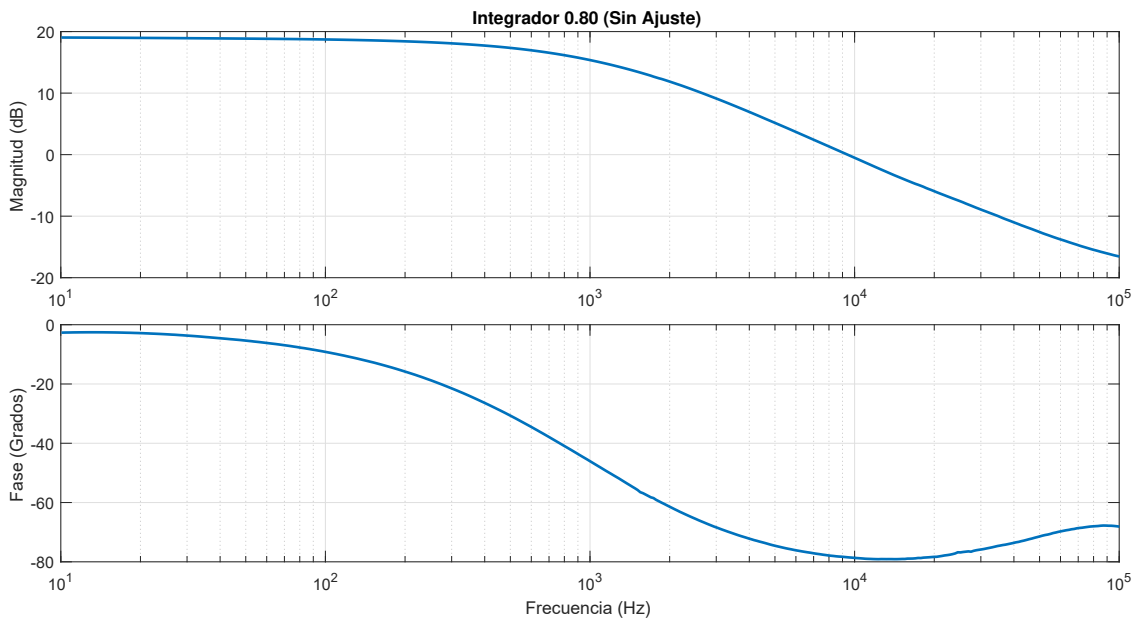


Figura 6.52: Integrador con $\alpha = 0.8$

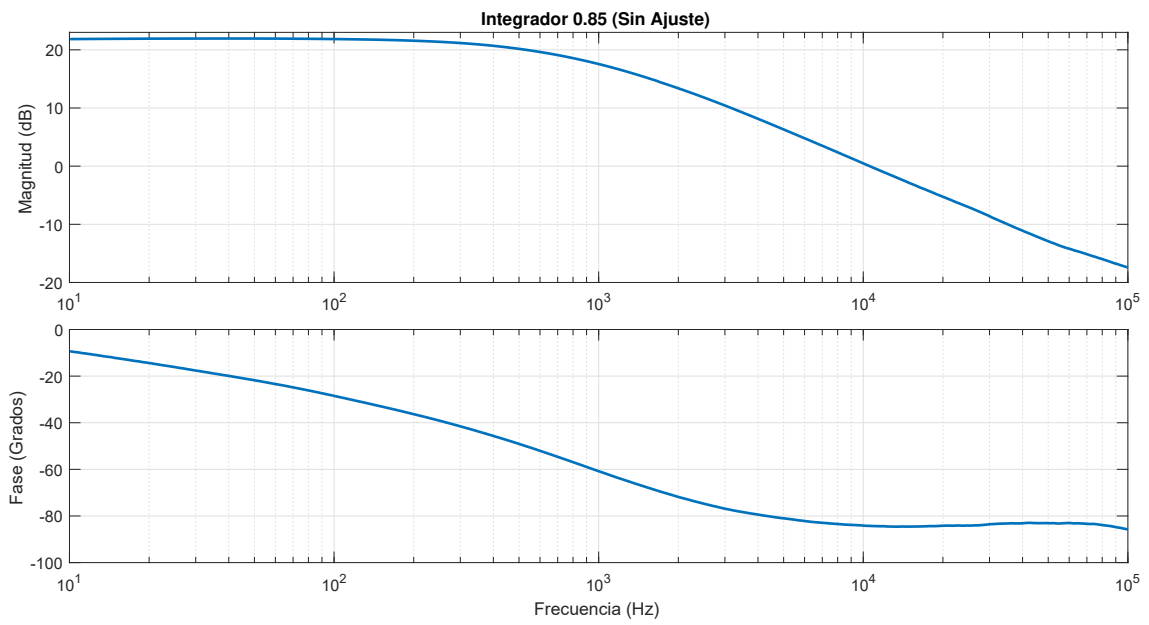


Figura 6.53: Integrador con $\alpha = 0.85$

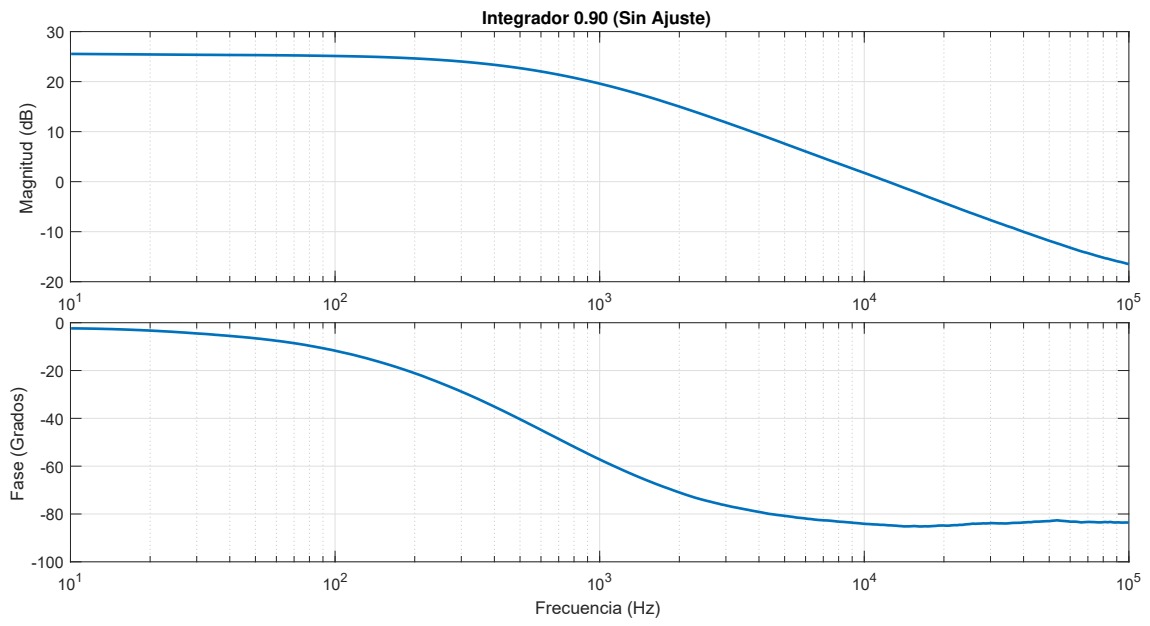


Figura 6.54: Integrador con $\alpha = 0.9$

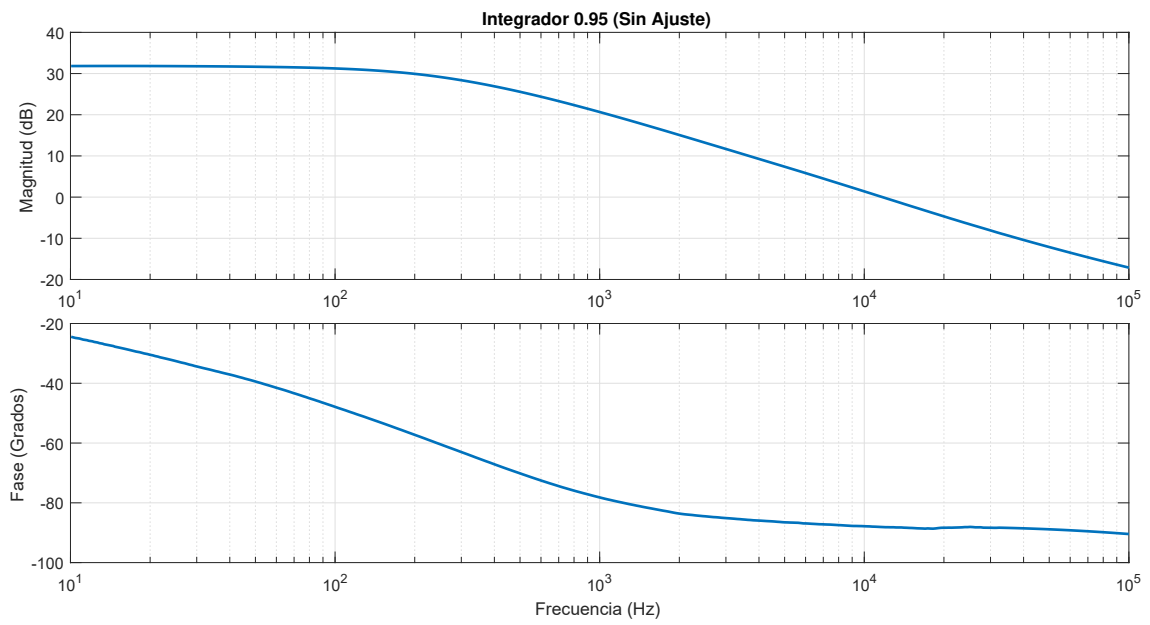


Figura 6.55: Integrador con $\alpha = 0.95$

Apéndice 10: Resultados Experimentales del Integrador Fraccionario por Grafo de Señal con Ajuste.

En éste apéndice se agregan los resultados experimentales en el dominio de la frecuencia del integrador fraccionario de Foster y Cauer con ajuste.

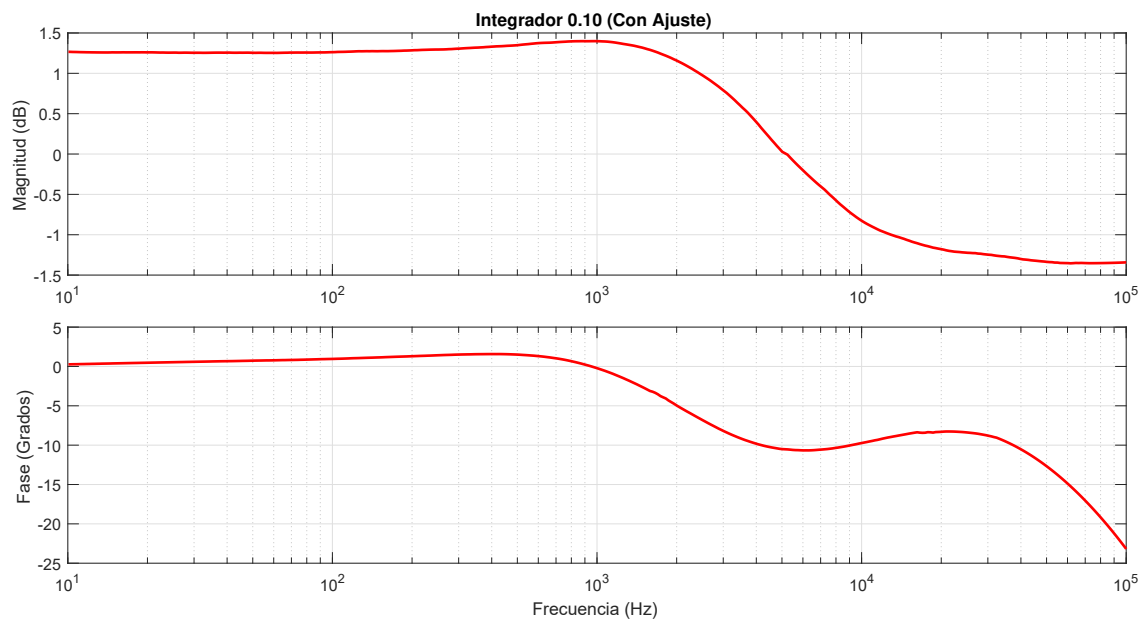


Figura 6.56: Integrador con $\alpha = 0.1$

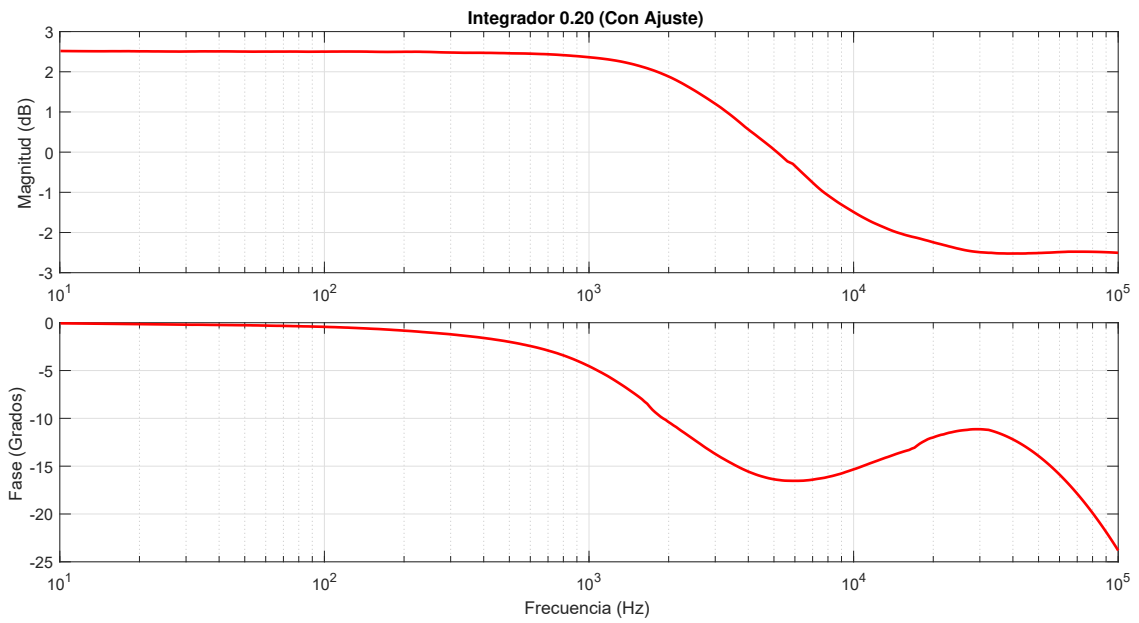


Figura 6.57: Integrador con $\alpha = 0.2$

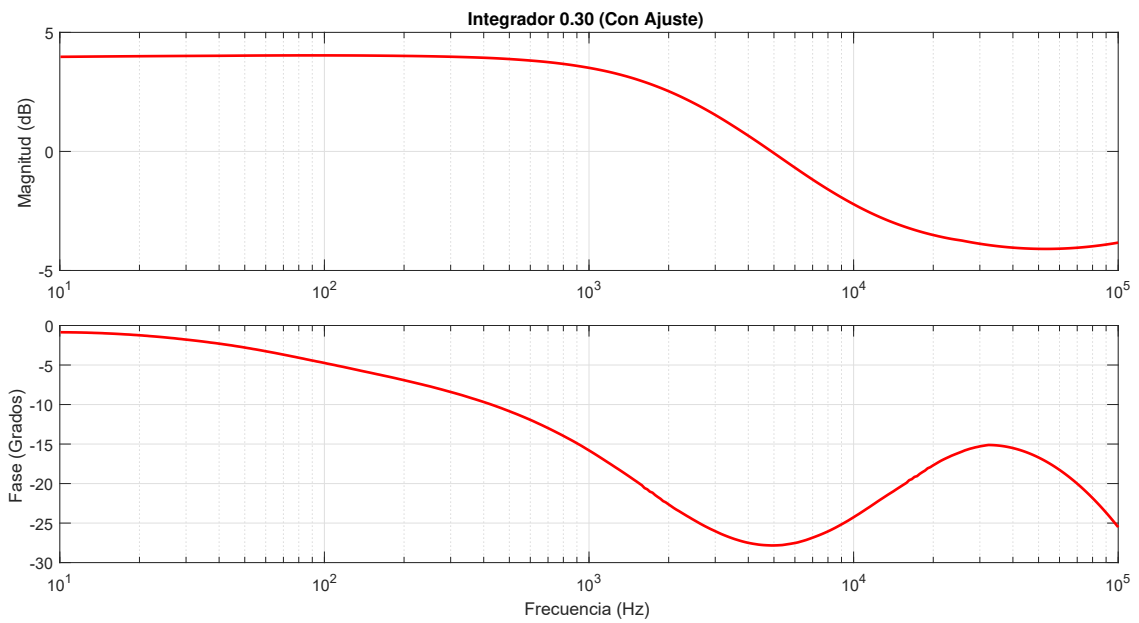


Figura 6.58: Integrador con $\alpha = 0.3$

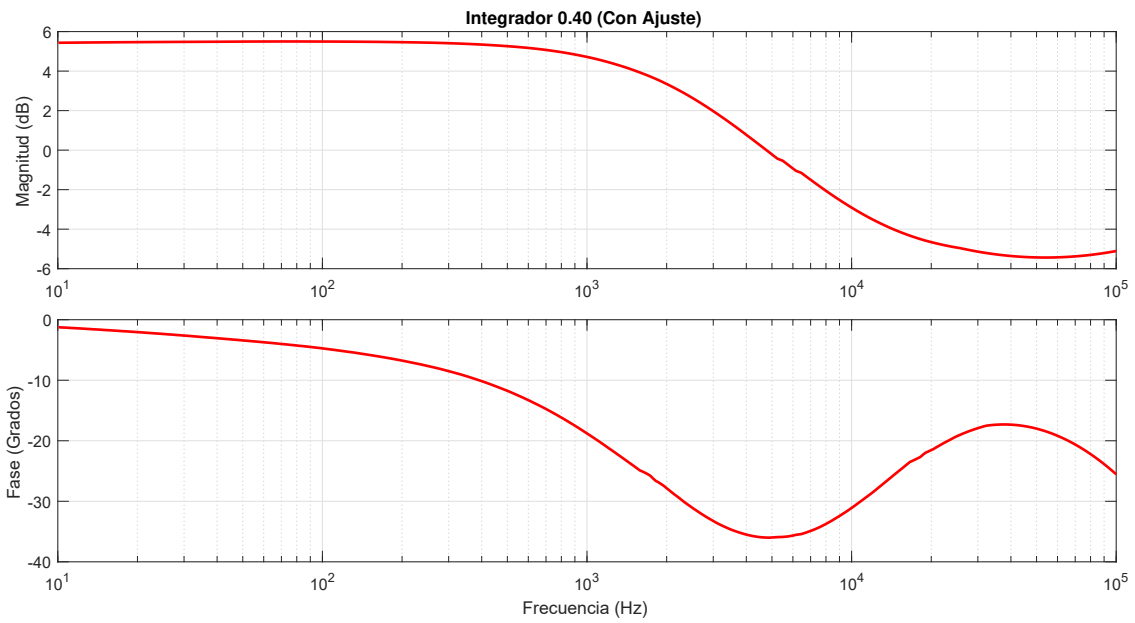


Figura 6.59: Integrador con $\alpha = 0.4$

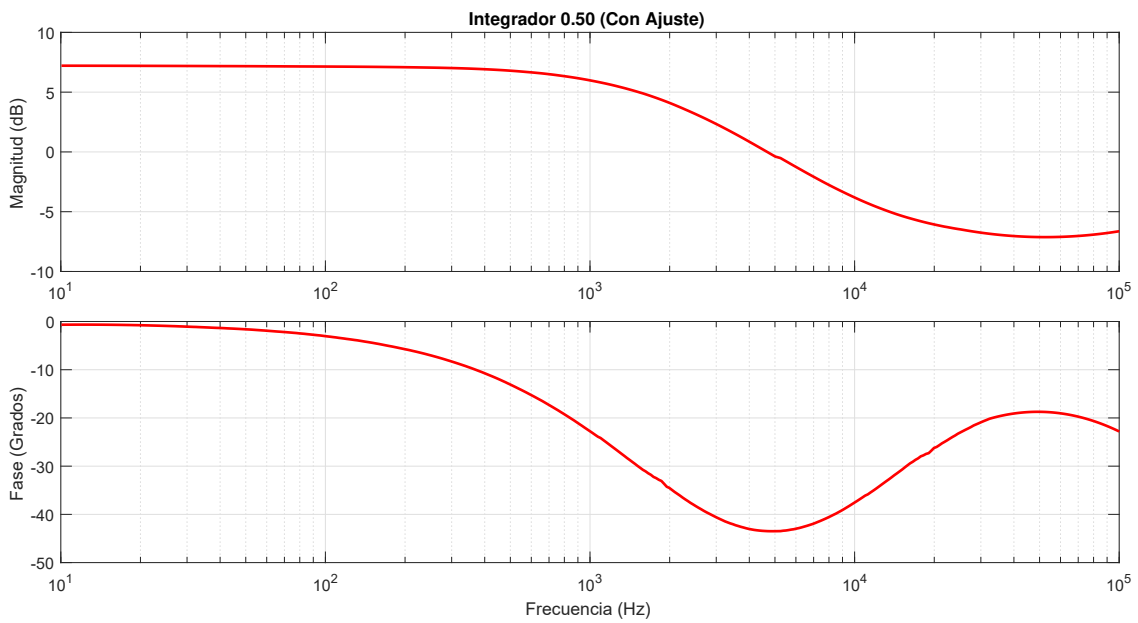


Figura 6.60: Integrador con $\alpha = 0.5$

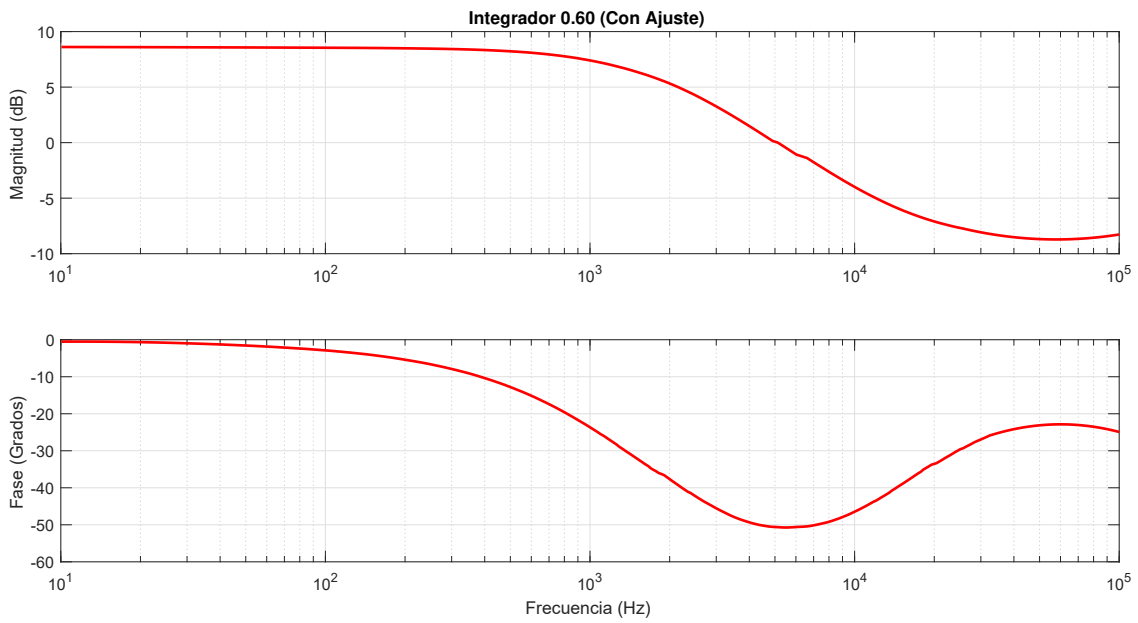


Figura 6.61: Integrador con $\alpha = 0.6$

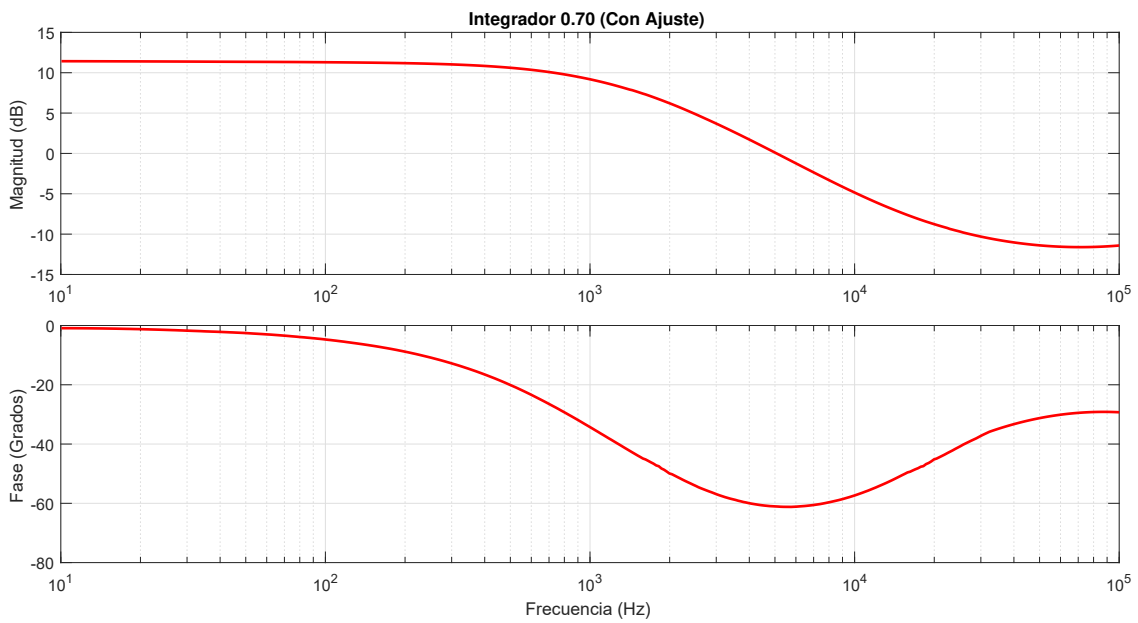


Figura 6.62: Integrador con $\alpha = 0.7$

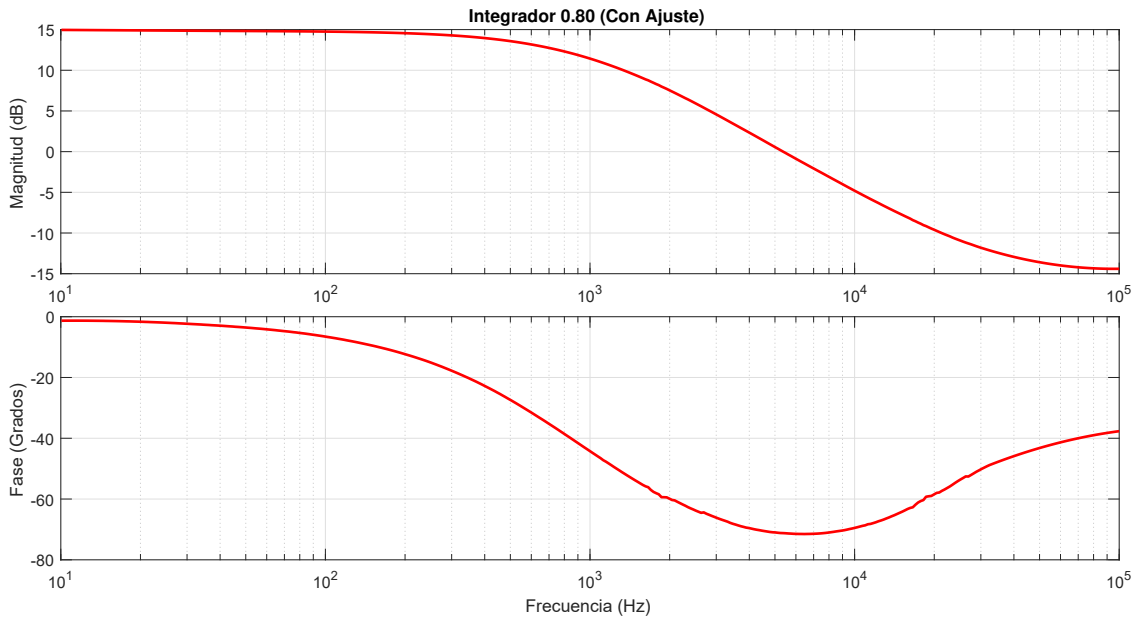


Figura 6.63: Integrador con $\alpha = 0.8$

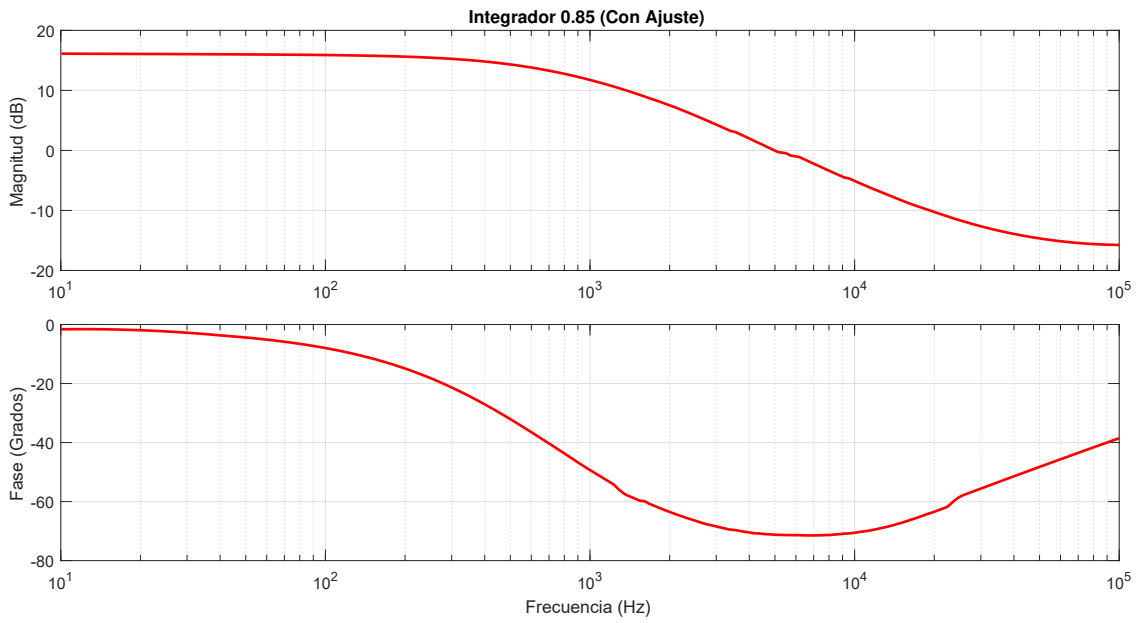


Figura 6.64: Integrador con $\alpha = 0.85$

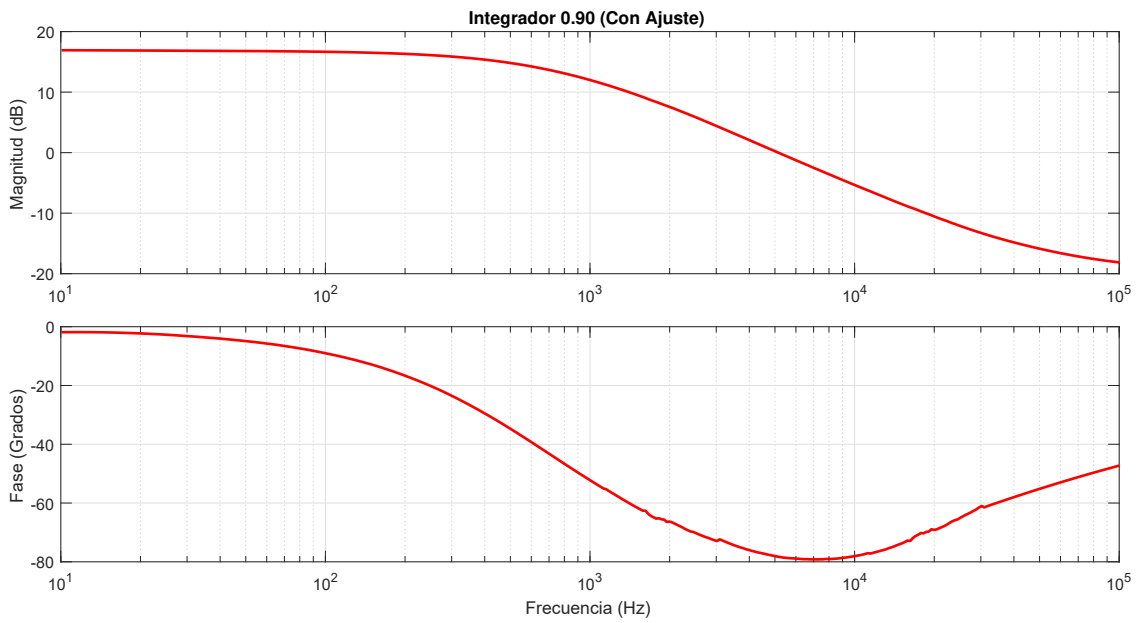


Figura 6.65: Integrador con $\alpha = 0.9$

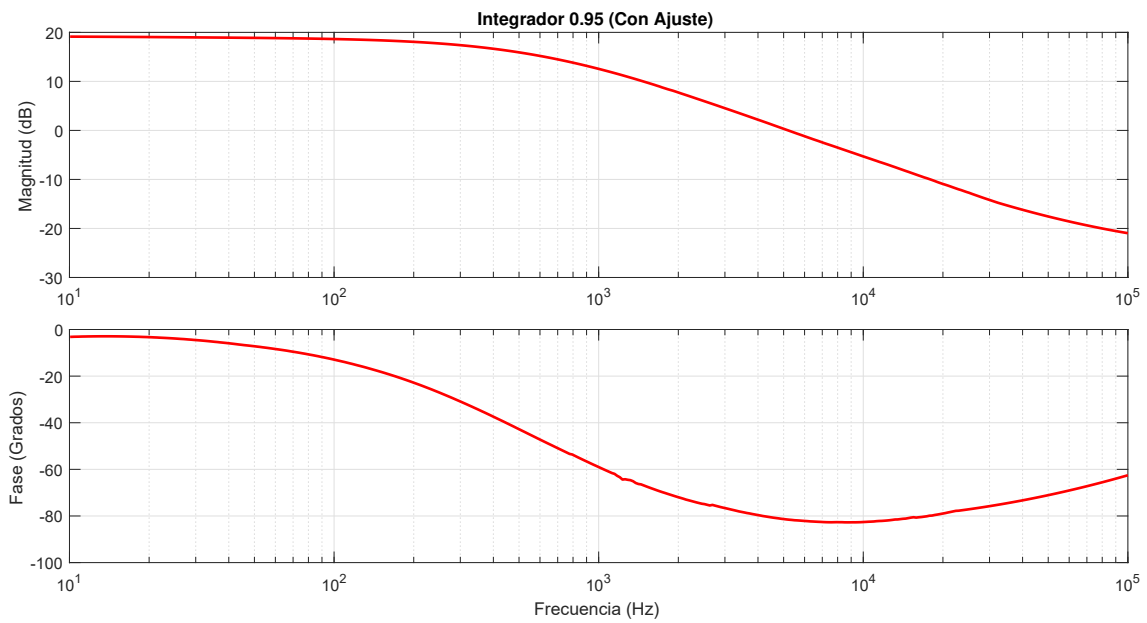


Figura 6.66: Integrador con $\alpha = 0.95$

Apéndice 11: 1er. Artículo publicado en el 6to. congreso de COSCyS - UASLP.



Otorga el presente

RECONOCIMIENTO

a: L. C. Lujano Hernández, J. M. Muñoz Pacheco,
L. A. Sánchez Gaspariano

Por su valiosa participación con la ponencia: **“Síntesis de integradores de orden fraccionario basado en filtros Butterworth y Chebyshev”** presentado en el marco del 6^{to} Congreso “Señales, Circuitos y Sistemas”, efectuado el día 4 de febrero de 2021.

“Siempre Autónoma, por mi Patria Educaré”

San Luis Potosí, febrero de 2021

Dr. José Salomé Murguía Ibarra
Director de la Facultad de Ciencias, UASLP

Dr. Isaac Campos Cantón
Presidente del Comité Organizador

Señales, Circuitos y Sistemas Multidisciplinar II

I. Campos Cantón
J. A. Vértiz Hernández



UASLP

1 Síntesis de integradores de orden fraccionario basado en filtros Butterworth y Chebyshev.

L. C. Lujano Hernández¹, J. M. Muñoz Pacheco², L. A. Sánchez Gaspariano³.

Resumen

El cálculo de orden fraccionario es un campo de investigación con aplicaciones de ciencia e ingeniería. Los integradores de orden fraccionario son bloques fundamentales para obtener hardware electrónico aplicado al procesamiento de señales, sistemas caóticos, diseño de filtros, biomedicina, sistemas de control, generadores de números aleatorios, etc. En la literatura, se pueden encontrar diversas propuestas para el diseño electrónico de integradores de orden fraccionario las cuales se fundamentan en aproximar el orden fraccionario mediante funciones de transferencia de orden entero utilizando polinomios de alto grado. Sin embargo, estas aproximaciones resultan en redes pasivas tipo escalera o T, donde los valores de los elementos resistivos y capacitivos son no comerciales. En consecuencia, los circuitos resultantes no son aptos para una aplicación.

En este marco de referencia, este artículo presenta una metodología de síntesis de integradores de orden fraccionario utilizando una función de transferencia de primer orden. La función de transferencia de primer orden es retomada a partir de la

¹L. C. Lujano Hernández (✉)
Facultad de Ciencias de la Electrónica.
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 4 Sur 104 Centro Histórico C.P. 72000, Puebla, México.
e-mail. luis.lujanoh@alumno.buap.mx

²J. M. Muñoz Pacheco (✉)
Facultad de Ciencias de la Electrónica.
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 4 Sur 104 Centro Histórico C.P. 72000, Puebla, México.
e-mail. jesusm.pacheco@correo.buap.mx

³L. A. Sánchez Gaspariano (✉)
Facultad de Ciencias de la Electrónica.
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 4 Sur 104 Centro Histórico C.P. 72000, Puebla, México.
e-mail. luis.sanchezgas@correo.buap.mx

aproximación en el dominio de la frecuencia de la definición de Riemman-Louville. Con esto se busca reducir la complejidad de funciones de transferencia de órdenes superiores sin sacrificar precisión. Posteriormente, se utilizan los métodos de Filtros Butterworth y Filtros Chebyshev tipo 1 para aproximar la función de transferencia de orden entero mediante la suma de las respuestas de un filtro pasa-bajas y pasa-altas. En el dominio de la frecuencia, se demuestra que los diseños propuestos representan adecuadamente la ganancia (dB) y la fase (grados) de los integradores con ordenes fraccionarios desde 0.1 hasta 0.95 en pasos de 0.1.

Palabras clave: Integrador, Cálculo fraccionario, Butterworth, Chebyshev, Riemman-Louville, OpAmps.

1. Introducción.

El cálculo de orden fraccionario es utilizado en aplicaciones de múltiples disciplinas del conocimiento, una de ellas es la ingeniería electrónica [1]. Los circuitos de orden fraccionario tienen aplicaciones en el procesamiento de señales [2], control automático [3]. como también en el diseño de osciladores caóticos [4]. El diseño de integradores de orden fraccionario se realiza por métodos de aproximación en el dominio de la frecuencia. Hay varias técnicas que buscan la racionalización del operador fraccionario, como el método Charef, el método de Carlson, el método de Oustaloup, entre otros, que aproximan a integradores fraccionarios con funciones de transferencia de hasta 5^{to} orden [2]. Otros métodos que existen en la literatura, es el diseño por medio de pasa bajas Butterworth. Sin embargo, estas aproximaciones utilizan funciones de transferencia mayores a segundo orden y los valores de sus elementos son no comerciales [5] y [6]. En este sentido, este documento se enfoca a abordar una aproximación en el dominio de la frecuencia de la definición de la derivada de orden fraccionario en el sentido de Riemann-Liouville, sintetizarla usando filtros Butterworth y Chebyshev de tipo 1, y realizar análisis en la frecuencia del circuito propuesto. La función de transferencia que aproxima el comportamiento de un integrador de orden fraccionario se muestra en (1). Donde α es el orden fraccionario y se encuentra entre 0 y 1 [3].

$$\frac{1}{s^\alpha} = \frac{s + A}{As + 1} \quad (1)$$

A depende del orden fraccionario y se muestra en (2).

$$A = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \quad (2)$$

2. Síntesis del Integrador Fraccionario.

A. Filtros Butterworth y Chebyshev tipo 1.

La función de transferencia que aproxima el comportamiento del integrador fraccionario se puede separar en un filtro pasa bajas y un filtro pasa altas, como se muestra en (3).

$$\frac{1}{s^\alpha} = \frac{A}{As + 1} + \frac{s}{As + 1} \quad (3)$$

1. Pasa bajas.

La función de transferencia del filtro pasa bajas se muestra en (4), tiene una ganancia G_{pb} que se expresa en (5).

$$H_{pb}(s) = G_{pb} \frac{1}{As + 1} \quad (4)$$

$$G_{pb} = A \quad (5)$$

Para obtener los requisitos de diseño del filtro pasa bajas se necesita graficar el diagrama de Bode de la función de transferencia con ganancia unitaria. En la Tabla 1 se muestra los requisitos de diseño obtenidos para α desde 0.10 hasta 0.95, donde ω_p es la frecuencia de corte, ω_s la frecuencia en la banda de rechazo, A_p la magnitud en la banda de paso y A_s la magnitud en la banda de rechazo. El orden del filtro pasa bajas Butterworth y Chebyshev tipo 1 obtenido mediante MATLAB es de primer orden para todo α .

Tabla 1. Requisitos de diseño para el filtro pasa bajas del integrador fraccionario.

α	$\omega_p \left(\frac{rad}{s}\right)$	$\omega_s \left(\frac{rad}{s}\right)$	$A_p (dB)$	$A_s (dB)$
0.10	0.816	1.0	3.0	4.00
0.20	0.665	1.0	3.0	5.12
0.30	0.538	1.0	3.0	6.50

0.40	0.427	1.0	3.0	8.10
0.50	0.333	1.0	3.0	10.0
0.60	0.249	1.0	3.0	12.3
0.70	0.170	1.0	3.0	15.2
0.80	0.111	1.0	3.0	19.2
0.85	0.081	1.0	3.0	21.9
0.90	0.052	1.0	3.0	25.6
0.95	0.025	1.0	3.0	31.9

Usando la herramienta de la referencia [7] calculamos los valores del circuito pasivo de la Fig. 1 que corresponde al filtro pasa bajas de tipo π . En la Tabla 2 se muestran los valores de los elementos del circuito pasivo para α desde 0.10 hasta 0.95.

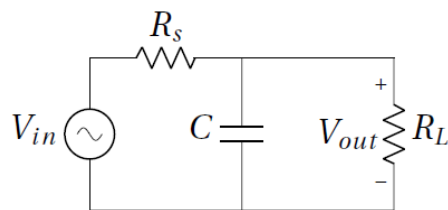


Fig. 1. Circuito pasa bajas de tipo π .

La ecuación (6) corresponde a la función de transferencia del circuito pasa bajas de tipo π , donde R_L es la resistencia de carga, C el capacitor y R_S la resistencia de fuente.

$$H_{\pi}(s) = \frac{R_L}{s(R_L \cdot R_S \cdot C) + (R_L + R_S)} \quad (6)$$

Tabla 2. Valores de los elementos del circuito pasa bajas tipo π .

α	$R_L(\Omega)$	$R_S(\Omega)$	$C(F)$
0.10	1	1	2.44
0.20	1	1	3.00
0.30	1	1	3.71
0.40	1	1	4.67
0.50	1	1	6.04
0.60	1	1	8.01

0.70	1	1	11.33
0.80	1	1	17.97
0.85	1	1	24.63
0.90	1	1	38.00
0.95	1	1	77.93

2. Pasa Altas

Por otro lado, la función de transferencia del filtro pasa altas se muestra en (7) y tiene una ganancia G_{pa} que se expresa en (8).

$$H_{pb}(s) = G_{pb} \frac{1}{As + 1} \tag{7}$$

$$G_{pa} = \frac{1}{A} \tag{8}$$

De igual forma, para determinar los requisitos de diseño del filtro pasa altas se necesita el diagrama de Bode de la función de transferencia con ganancia unitaria. En Tabla 3 se muestra los requisitos de diseño obtenidos para α desde 0.10 hasta 0.95. Entonces, se calculan los valores del circuito pasivo de la Fig. 2 en MATLAB [7], el cual corresponde a un filtro pasa altas de tipo T . En la Tabla 4 se muestran los valores de los elementos del circuito pasivo para α desde 0.10 hasta 0.95.

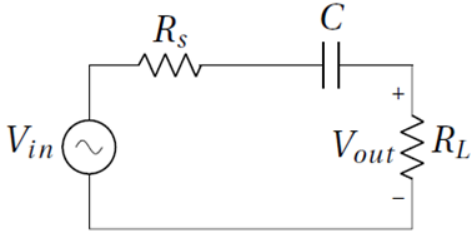


Fig. 2. Circuito pasa altas tipo T .

Tabla 3. Requisitos de diseño para el filtro pasa altas del integrador fraccionario.

α	$\omega_p \left(\frac{rad}{s}\right)$	$\omega_s \left(\frac{rad}{s}\right)$	$A_p(dB)$	$A_s(dB)$
0.10	0.818	1.0	3.0	18.3
0.20	0.667	1.0	3.0	16.6

0.30	0.538	1.0	3.0	14.8
0.40	0.427	1.0	3.0	12.9
0.50	0.333	1.0	3.0	10.8
0.60	0.249	1.0	3.0	8.58
0.70	0.176	1.0	3.0	6.14
0.80	0.111	1.0	3.0	20.9
0.85	0.081	1.0	3.0	18.2
0.90	0.052	1.0	3.0	20.0
0.95	0.025	1.0	3.0	28.2

Tabla 4. Valores de los elementos del circuito pasa altas tipo T .

α	$R_L(\Omega)$	$R_S(\Omega)$	$C(F)$
0.10	1	1	0.61
0.20	1	1	0.75
0.30	1	1	0.93
0.40	1	1	1.17
0.50	1	1	1.50
0.60	1	1	2.01
0.70	1	1	2.84
0.80	1	1	4.51
0.85	1	1	6.17
0.90	1	1	9.49
0.95	1	1	19.50

Además, la ecuación (9) corresponde a la función de transferencia del circuito pasa altas de tipo T .

$$H_T(s) = \frac{s(C \cdot R_L)}{sC(R_L + R_S) + 1} \quad (9)$$

3. Integrador Fraccionario.

La figura 3 muestra el integrador fraccionario obtenido mediante filtros Butterworth y Chebyshev de tipo 1. Los elementos R_{1s} , R_{1L} y C_1 corresponden al filtro pasa bajas, mientras que los elementos R_{2s} , R_{2L} y C_2 corresponden al filtro pasa altas. Los resistores R_1 , R_2 y R_3 aportan la ganancia para cada filtro como se muestra en (10) y (11), mientras que los resistores R_4 y R_5 generan una ganancia unitaria para eliminar el signo del sumado amplificador inversor. En la Tabla 5 se muestra la ganancia y los valores de resistencia que corresponde a cada orden α .

$$\frac{R_3}{R_1} = G_{pb} \quad (10)$$

$$\frac{R_3}{R_2} = G_{pa} \quad (11)$$

Tabla 5. Valores de ganancias.

α	$R_1(\Omega)$	$R_2(\Omega)$	$R_3(\Omega)$	G_{pb}	G_{pa}
0.10	$1e^3$	$1.49e^3$	$1.22e^3$	1.22	0.81
0.20	$1e^3$	$2.25e^3$	$1.50e^3$	1.50	0.66
0.30	$1e^3$	$3.44e^3$	$1.85e^3$	1.85	0.53
0.40	$1e^3$	$5.44e^3$	$2.33e^3$	2.33	0.42
0.50	$1e^3$	$9.00e^3$	$3.00e^3$	3.00	0.33
0.60	$1e^3$	$16.00e^3$	$4.00e^3$	4.00	0.25
0.70	$1e^3$	$32.11e^3$	$5.66e^3$	5.66	0.17
0.80	$1e^3$	$81.00e^3$	$9.00e^3$	9.00	0.11
0.85	$1e^3$	$152.10e^3$	$12.33e^3$	12.33	0.08
0.90	$1e^3$	$361.00e^3$	$19.00e^3$	19.00	0.05
0.95	$1e^3$	$1.52e^6$	$39.00e^3$	39.00	0.02

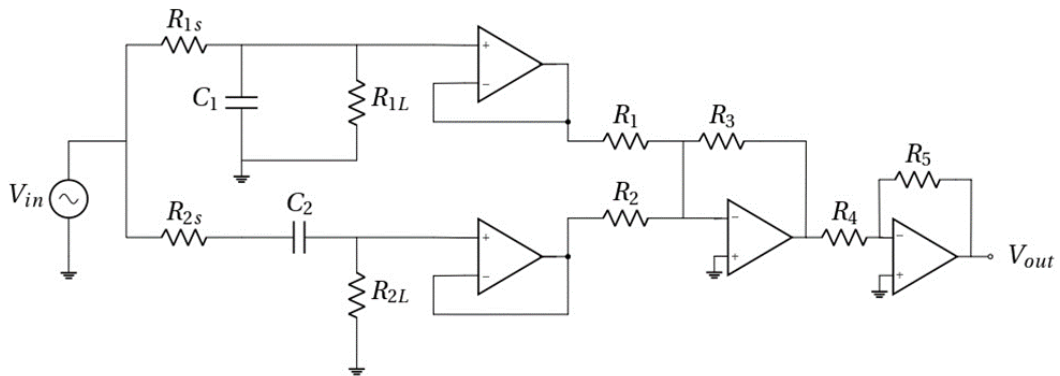


Fig. 3. Integrador fraccionario sintetizado por filtros Butterworth y Chebyshev tipo 1.

Aplicando el escalamiento en impedancia, podemos obtener valores comerciales para el filtro pasa bajas y filtro pasa altas. En la Tabla 6 se muestran los capacitores como valores comerciales.

Tabla 6. Valores de ganancias.

α	$R_{1s}(\Omega)$	$R_{1L}(\Omega)$	$R_{2s}(\Omega)$	$R_{2L}(\Omega)$	$R_1(\Omega)$	$R_2(\Omega)$	$R_3(\Omega)$	$C_1(F)$	$C_2(F)$
0.10	$244e^3$	$244e^3$	$610e^3$	$610e^3$	$1.00e^3$	$1.49e^3$	$1.22e^3$	$10e^{-6}$	$1e^{-6}$
0.20	$300e^3$	$300e^3$	$750e^3$	$750e^3$	$1.00e^3$	$2.25e^3$	$1.50e^3$	$10e^{-6}$	$1e^{-6}$
0.30	$371e^3$	$371e^3$	$930e^3$	$930e^3$	$1.00e^3$	$3.44e^3$	$1.85e^3$	$10e^{-6}$	$1e^{-6}$
0.40	$467e^3$	$467e^3$	$117e^3$	$117e^3$	$1.00e^3$	$5.44e^3$	$2.33e^3$	$10e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.50	$604e^3$	$604e^3$	$150e^3$	$150e^3$	$1.00e^3$	$9.00e^3$	$3.00e^3$	$10e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.60	$801e^3$	$801e^3$	$201e^3$	$201e^3$	$1.00e^3$	$16.00e^3$	$4.00e^3$	$10e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.70	$515e^3$	$515e^3$	$284e^3$	$284e^3$	$1.00e^3$	$32.11e^3$	$5.66e^3$	$22e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.80	$816.81e^3$	$816.81e^3$	$451e^3$	$451e^3$	$1.00e^3$	$81.00e^3$	$9.00e^3$	$22e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.85	$1.12e^6$	$1.12e^6$	$617e^3$	$617e^3$	$1.00e^3$	$152.10e^3$	$12.33e^3$	$22e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.90	$1.72e^6$	$1.72e^6$	$949e^3$	$949e^3$	$1.00e^3$	$361.00e^3$	$19.00e^3$	$22e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.95	$3.54e^6$	$3.54e^6$	$1.96e^6$	$1.96e^6$	$1.00e^3$	$1.52e^6$	$39.00e^3$	$22e^{-6}$	$10e^{-6}$

3. Análisis de la Respuesta en Frecuencia del integrador Propuesto.

La respuesta en frecuencia del integrador de orden fraccionario sintetizado mediante filtros Butterworth y Chebyshev tipo 1 mostrado en la Fig. 3, se muestra en la Fig. 4. En particular se muestra la ganancia en dB y la fase en grados, respecto a la frecuencia en rad/s. Se observa que la pendiente de cada uno de los integradores depende del orden fraccionario. Conforme el orden fraccionario se aproxima a 0, la pendiente también tiende a un valor menor comparado a ordenes fraccionarios cercanos a 1. Esto concuerda correctamente con la teoría la cual menciona que la pendiente se define por 20α dB/dec.

Finalmente, la Tabla 7 indica la pendiente medida, así como el error. Cuando $\alpha = 0.6$, el error es mayor.

Tabla 7. Media de la pendiente y error calculado del integrador fraccionario.

α	Pendiente ideal (dB / Dec)	Pendiente (dB / Dec) obtenida por el circuito de la Fig. 3	Error en la pendiente (dB / Dec)
0.10	-2	-2.79	-0.79
0.20	-4	-5.54	-1.54
0.30	-6	-8.29	-1.29
0.40	-8	-10.90	-2.90
0.50	-10	-13.39	-3.39
0.60	-12	-15.60	-3.60
0.70	-14	-17.48	-3.48
0.80	-16	-18.89	-2.89
0.85	-17	-19.38	-2.38
0.90	-18	-19.73	-1.73
0.95	-19	-19.93	-0.93

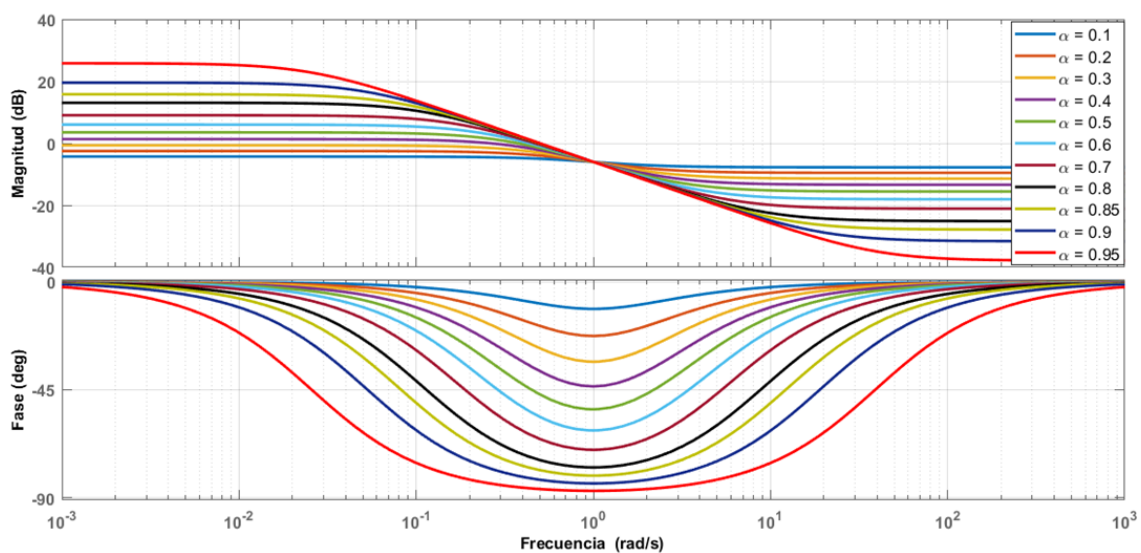


Fig. 4. Respuesta en frecuencia del integrador fraccionario.

4. Conclusiones

En este trabajo se presentó la síntesis de integradores de orden fraccionario desde 0.1 hasta 0.95 mediante la técnica de filtros Butterworth y Chebyshev. Dado que la aproximación al integrador fraccionario se realizó mediante la suma de funciones de transferencia de primer orden pasa-bajas y pasa-altas, condujo a obtener el circuito de la Fig. 3 independientemente si se utiliza Butterworth o Chebyshev. También se observó que aun cuando la función de transferencia que aproxima al orden fraccionario es de primer orden, el error obtenido no es mayor a 0.6 dB. Una de las ventajas del circuito del integrador fraccionario propuesto es que los valores de los capacitores son comerciales, y por lo tanto el esfuerzo del diseño se reduce considerablemente.

Este integrador fraccionario propuesto puede ser útil en sistemas de control, procesamiento de señales, sistemas dinámicos no lineales. En particular, el trabajo a futuro se centra en realizar experimentalmente osciladores caóticos de orden fraccionario utilizando la metodología de síntesis propuesta.

Agradecimiento: El becario Luis Carlos Lujano Hernández (CVU:1003956) agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo otorgado para la beca de estudios de maestría.

Referencias

- [1]. David, S.A., Linares, J.L., & Pallone, E. M. J. A. (2011). Fractional order calculus: historical apologia, basic concepts and some applications. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 33(4), 4302. Doi: <https://doi.org/10.1590/S1806-11172011000400002>.
- [2]. Panagiotis Bertsias, Costas Psychalinos, Ahmed Elwakil, Leila Safari, Shahram Minaei (2019). Design and application examples of CMOS fractional-order differentiators and integrators. *Microelectronics Journal*, 83, 155-167. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.mejo.2018.11.013>.
- [3]. Muñoz-Montero, Carlos, García-Jiménez, Luis V., Sánchez-Gaspariano, Luis A., Sánchez-López, Carlos, González-Díaz, Víctor R., Tlelo-Cuautle, Esteban (2017).

- New alternatives for analog implementation of fractional-order integrators, differentiators and PID controllers based on integer-order integrators. *Nonlinear Dynamics*, 90, 241-256. Doi: <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3658-z>.
- [4]. Wei Xue, Yongli Li, Shijian Cang, Hongyan Jia, Zenghui Wang (2015). Chaotic behavior and circuit implementation of a fractional-order permanent magnet synchronous motor model. *Journal of the Franklin Institute*, 352(7), 2887-2898. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2015.05.025>.
- [5]. Stavroula Kapoulea, Costas Psychalinos, Ahmed S. Elwakil (2018). Single active element implementation of fractional-order differentiators and integrators. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, 97, 6-15. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.aeue.2018.09.046>.
- [6]. Shibendu Mahata, Rajib Kar, Durbadal Mandal (2020). Optimal rational approximation of bandpass Butterworth filter with symmetric fractional-order roll-off. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, 117. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.aeue.2020.153106>.
- [7]. Wanhammar, L., (2009). *Analog Filters using MATLAB*, Boston, MA., Springer. Doi: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-92767-1>.

Apéndice 12: 2do. Artículo publicado en la 7ma. Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada.

De: 7JCyTA

Enviado: miércoles, 10 de noviembre de 2021 05:10 p. m.

Para: LUIS LUJANO HERNANDEZ

Asunto: 7JCyTA notification for paper 35

Estimados Autores

Se les notifica por este medio la aceptación de su trabajo, muchas gracias por su contribución.

Atentamente

Ricardo Fabricio Escobar Jiménez

La información contenida en este correo se dirige exclusivamente a su destinatario; puede contener INFORMACIÓN CONFIDENCIAL cuya divulgación está prohibida por la ley. Si recibió este mensaje por error, evite su utilización, reproducción, o difusión, debiendo eliminarlo de su computadora o cualquier dispositivo electrónico y comunicarlo inmediatamente por esta vía a su emisor.

La información de este correo, así como la contenida en los documentos que se adjuntan, pueden ser objeto de solicitudes de acceso a la información, sin perjuicio de las limitantes legales al derecho de acceso a la información.

Puede consultar los avisos de privacidad para el tratamiento de datos personales con diversas finalidades en <https://transparencia.buap.mx>.

SEPTIMA

Jornada de

CIENCIA & TECNOLOGÍA

Aplicada

17 al 19 de Noviembre 2021

El Tecnológico Nacional de México (TecNM) y el Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), a través de sus



**EL TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
A TRAVÉS DEL CENTRO NACIONAL DE INVESTIGACIÓN Y
DESARROLLO TECNOLÓGICO**

OTORGA EL PRESENTE

RECONOCIMIENTO

A

**LUIS CARLOS LUJANO HERNÁNDEZ, JESÚS MANUEL MUÑOZ PACHECO,
LUIS ABRAHAM SÁNCHEZ GASPARIANO**

POR LA PRESENTACIÓN DEL ARTICULO:

"SÍNTESIS BASADA EN FILTROS BUTTERWORTH DE OSCILADORES CAÓTICOS CON
DERIVADAS DE ORDEN ARBITRARIO"

EN EL MARCO DE LA 7ª JORNADA DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA APLICADA, CELEBRADO
DEL 17 AL 19 DE NOVIEMBRE DE 2021, EN EL TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO/CENIDET.

CUERNAVACA, MORELOS., 17 DE NOVIEMBRE DE 2021

DRA. YESICA IMELDA SAAVEDRA BENÍTEZ
DIRECTORA



Sello Digital:

VXKV0tX7RxTM0l/bxM+UMuFq4+qV0djQpFzstkkI0YbifqcE6t1m9yHDquuWZQ1PkW9hNHg1Eute1d1YJolbzn
jnEJyQsWiYJ1QvgQiuTjcpIY/BizEVEgo4kKICVHCzBmiM3U5i8rvhEfhx00STKgZ1lfbbzxm3wlgjchX5Ef
e9TBZJAnqxyJdIMB5E+WccB4mrqaOVDE+u8K7+fkJMFx0V9OvXVnxx0JpkWM3EJjmJanIpSz4ts4PHLNKKOhY
aqvFxyOozkc4Hilnpv348ESSIJR2DCEoabi75y9WLgMI t1o1QtSryUpXJPJVLUVjo68vVa+ABrjCK0/4mkg==

JCYTA3521

<http://constancias.cenidet.tecnm.mx>



Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira,
C. P. 62490, Cuernavaca, Morelos
Tel. (01) 777 3 62 77 70, ext. 4201,
e-mail: dir.cenidet@tecnm.mx

www.tecnm.mx | www.cenidet.tecnm.mx



Síntesis basada en Filtros Butterworth de Osciladores Caóticos con Derivadas de Orden Arbitrario ^{*}

L.C. Lujano-Hernández, J.M. Muñoz-Pacheco,
L.A. Sánchez-Gaspariano

*Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla, Puebla 72000, México (e-mail:
luis.lujanoh@alumno.buap.mx).*

Resumen: En este trabajo se presenta la síntesis de un integrador de orden fraccionario, usando el método de filtro Butterworth. A partir de una función de transferencia de primer orden que aproxima al integrador fraccionario desde la definición de Riemann-Liouville obtenemos filtros de primer orden. Para corroborar el método propuesto, analizamos los integradores de orden fraccionario con ordenes desde $\alpha = 0.1$ hasta $\alpha = 0.95$ en el dominio de la frecuencia. Se encontró que la pendiente de la magnitud se aproxima adecuadamente a la ideal. Además, a diferencia con las técnicas tradicionales para el diseño de integradores de orden fraccionario, el método propuesto converge en su mayoría a valores comerciales de los elementos del circuito reduciendo la complejidad de la implementación física. Finalmente, aplicamos nuestra técnica al diseño de un sistema caótico de orden fraccionario que presenta un atractor con múltiples enrollamientos. Los resultados obtenidos están en una correcta concordancia con la teoría relacionada.

Keywords: Butterworth, Caótico, Chebyshev, Fraccionario, Integrador, Oscilador.

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo fraccionario surge a partir del cálculo de orden entero, pero ha sido desarrollado con mayor interés en las últimas décadas (Machado et al., 2011; David et al., 2011; Tavazoei, 2020; Sun et al., 2011, 2018). Desde el inicio de la teoría del cálculo diferencial e integral de orden entero, matemáticos como Euler y Leibniz desarrollaron sus ideas sobre el cálculo de derivadas e integrales de orden no entero. En 1812 Laplace definió una derivada fraccionaria con el uso de una integral. Desde el nacimiento del cálculo de orden fraccionario han surgido varias definiciones de derivación e integración de orden no entero, esto se debe a que el concepto de cálculo fraccionario ha sido objeto de varios enfoques. Dentro de las definiciones más importantes se encuentra la definición de Riemann-Liouville, en la ecuación (1) se muestra la definición que aproxima al integrador de orden fraccionario. (Pacheco et al., 2021).

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)^{\alpha-n+1}}{t-\tau} d\tau \quad (1)$$

^{*} El becario Luis Carlos Lujano Hernández (CVU:1003956) agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo otorgado para la beca de estudios de maestría.

El diseño de integradores y derivadores de orden fraccionario se realizan en el dominio de la frecuencia. Hay varias técnicas que buscan la racionalización del operador fraccionario α como el método Charef, el método de Carlson, el método de Oustaloup, entre otros (Charef et al., 1992; Charef, 2006; Montero et al., 2017; Kapoulea et al., 2018; Pacheco et al., 2021). El método de Charef tiene una mejor relación entre complejidad y precisión al aproximar la pendiente del integrador de orden fraccionario $\frac{1}{s^\alpha}$ con un número de pendientes de -20 dB/Decada conectadas en zigzag con una pendiente de 0 dB/Decada (Charef et al., 1992; Charef, 2006; Serrano, 2017). Con este método se obtiene la precisión deseada y que dependerá del orden de la función de transferencia que aproxima al integrador fraccionario. El problema de estas realizaciones es su implementación física, puesto que los valores de los componentes que forman parte de la red pasiva son de valores no comerciales, al aproximar estos valores desvían la pendiente y agrega un error al orden en el que se diseña. (Bertsias et al., 2019; Mahata et al., 2020; Kapoulea et al., 2018; Pacheco et al., 2021).

En este trabajo nos enfocamos en abordar una función de transferencia de primer orden desde la definición de Riemann-Liouville, para sintetizarla usando el método de Butterworth. Posteriormente, la función de transferencia se caracteriza en el dominio de la frecuencia para identificar su rendimiento y tasa de error en donde la pendiente

del integrador se determina considerando las tolerancias de elementos comerciales. Finalmente, como ejemplo de aplicación, el integrador fraccionario propuesto se utiliza para diseñar un oscilador caótico de 2-enrollamientos y 4-enrollamientos con orden fraccionario $\alpha = 0.9$. Los resultados de simulación en el software de circuitos SPICE confirman el resultado esperado para el oscilador caótico de orden fraccionario demostrando que el método propuesto es adecuado para la implementación física de osciladores caóticos dado que el 90% de los valores son comerciales.

2. APROXIMACIÓN BUTTERWORTH PARA INTEGRADORES DE ORDEN FRACCIONARIO

La función de transferencia de la ecuación (2) es aproximada a partir de la definición de Riemann-Liouville. Es una función de transferencia de primer orden, y no aumenta ni disminuye el orden de la función de transferencia al cambiar el orden α del integrador de orden fraccionario.

$$\frac{1}{s^\alpha} = \frac{s + A}{As + 1}, \quad (2)$$

donde A depende del orden del integrador fraccionario:

$$A = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}. \quad (3)$$

La función de transferencia de la ecuación (2) puede separarse en una suma de filtros pasa bajas y pasa altas, como se muestra en la ecuación (4).

$$\frac{1}{s^\alpha} = \frac{s}{As + 1} + \frac{A}{As + 1}. \quad (4)$$

2.1 Filtro Pasa Bajas

En el caso del filtro pasa bajas, se toma el segundo término de la ecuación (4), asociada a una respuesta tipo pasa bajas, para determinar el coeficiente de ganancia. Esto nos ayuda a identificar los requisitos del diseño del filtro pasa bajas con el diagrama de Bode de la función de transferencia con ganancia unitaria. La función de transferencia del filtro pasa bajas se muestra en la ecuación (5).

$$H_{pb}(s) = G_{pb} \frac{1}{As + 1}, \quad (5)$$

donde la ganancia del filtro pasa bajas es G_{pb} y se calcula con el factor A , como se muestra en la ecuación (6).

$$G_{pb} = A. \quad (6)$$

Del diagrama de Bode obtenemos los requisitos de diseño, como la frecuencia de corte (ω_p), la frecuencia en la banda de rechazo (ω_s), magnitud en la frecuencia de corte (A_p) y la magnitud en la banda de rechazo (A_s). En la Fig. 1 se muestra el diagrama de Bode del filtro pasa bajas con ganancia unitaria con orden $\alpha = 0.9$, además se muestran los requisitos de diseño en la Tabla 1 para órdenes desde $\alpha = 0.1$ hasta $\alpha = 0.95$.

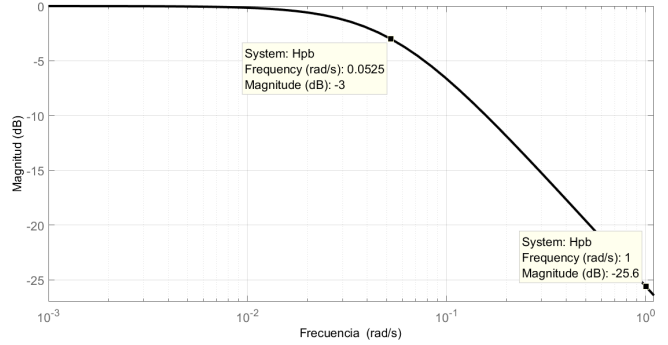


Fig. 1. Gráfica de Bode del filtro pasa bajas con $\alpha = 0.9$.

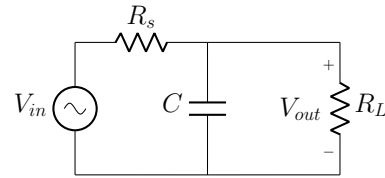


Fig. 2. Circuito pasa bajas Butterworth tipo π .

Para el caso del filtro pasa bajas de orden $\alpha = 0.9$, la función de transferencia se muestra en la ecuación (7). El orden entero n de la función de transferencia Butterworth para los órdenes no enteros α desde 0.1 hasta 0.95 es de $n = 1$.

$$H_{pb}(s) = G_{pb} \frac{1}{19s + 1}. \quad (7)$$

La ecuación de diseño (8) del filtro pasa bajas de la Fig. 2 toma en cuenta que los resistores R_s y R_L son del mismo valor y ambos son iguales a R_{pb} .

$$R_{pb} = 2 \frac{A}{C}. \quad (8)$$

Con la ecuación (8) se puede proponer un valor de capacitor comercial y ajustar los valores de resistores para diseñar el filtro pasa bajas Butterworth, tomando en cuenta el factor A que depende del orden del integrador fraccionario de la ecuación (3).

La Tabla 2 muestra los valores normalizados de capacitor

Tabla 1. Requisitos de diseño del filtro pasa bajas Butterworth.

α	ω_p (rad/s)	ω_s (rad/s)	A_p (dB)	A_s (dB)
0.1	0.816	1.0	-3.0	-4.00
0.2	0.665	1.0	-3.0	-5.12
0.3	0.538	1.0	-3.0	-6.50
0.4	0.427	1.0	-3.0	-8.10
0.5	0.333	1.0	-3.0	-10.00
0.6	0.249	1.0	-3.0	-12.30
0.7	0.170	1.0	-3.0	-15.20
0.8	0.111	1.0	-3.0	-19.20
0.85	0.081	1.0	-3.0	-21.90
0.9	0.052	1.0	-3.0	-25.60
0.95	0.025	1.0	-3.0	-31.90

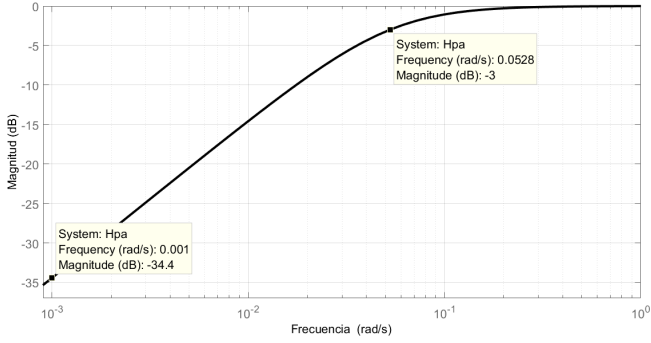


Fig. 3. Gráfica de Bode del filtro pasa altas con $\alpha = 0.9$.
para el circuito pasa bajas Butterworth tipo π , para integradores de orden fraccionario de $\alpha = 0.1$ hasta $\alpha = 0.95$.

Tabla 2. Valores de elementos para el filtro pasa bajas Butterworth tipo π .

α	R_s (Ω)	R_L (Ω)	C (F)
0.1	2.44	2.44	1.0
0.2	3.00	3.00	1.0
0.3	3.71	3.71	1.0
0.4	4.67	4.67	1.0
0.5	6.00	6.00	1.0
0.6	8.00	8.00	1.0
0.7	11.34	11.34	1.0
0.8	18.00	18.00	1.0
0.85	24.68	24.68	1.0
0.9	38.00	38.00	1.0
0.95	78.00	78.00	1.0

2.2 Filtro Pasa Altas

La función de transferencia del filtro pasa altas se muestra en la ecuación (9).

$$H_{pa}(s) = G_{pa} \frac{s}{s + \frac{1}{A}}, \quad (9)$$

donde G_{pa} es la ganancia del filtro pasa altas y es igual a la ecuación (10).

$$G_{pa} = \frac{1}{A}. \quad (10)$$

De la gráfica de Bode del filtro pasa altas podemos encontrar los requisitos de diseño. La Fig. 3 muestra la gráfica de Bode del filtro pasa altas Butterworth del integrador de orden fraccionario de orden $\alpha = 0.9$. Con la gráfica obtenemos la frecuencia de corte, la frecuencia en la banda de rechazo, la magnitud en la frecuencia de corte y la magnitud en la banda de rechazo. La Tabla 3 muestra los requisitos de diseño para el filtro pasa altas Butterworth desde órdenes del integrador fraccionario de $\alpha = 0.1$ hasta $\alpha = 0.95$.

El filtro pasa altas de Butterworth obtenido a partir de los requisitos de diseño para el orden fraccionario de $\alpha = 0.9$ se muestra en la ecuación (11), donde la

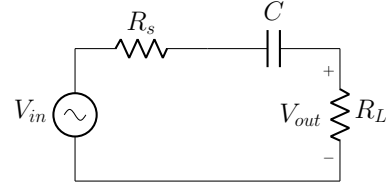


Fig. 4. Circuito Pasa Altas Butterworth tipo T .

función de transferencia es de primer orden. Igual que el caso anterior, se encontró que los órdenes $\alpha = 0.1$ hasta $\alpha = 0.95$, se aproximan mediante un filtro pasa altas de primer orden $n = 1$.

$$H_{pa}(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{19}}. \quad (11)$$

Para facilitar el diseño del filtro pasa altas encontramos la ecuación de diseño expresada en la ecuación (12), donde los resistores R_s y R_L son iguales a R_{pa} .

$$R_{pa} = \frac{1}{2} \frac{A}{C}. \quad (12)$$

El factor A depende el orden del integrador fraccionario y se puede calcular desde la ecuación (3). La Tabla 4 muestra los valores normalizados para el filtro pasa altas Butterworth tipo T (Fig. 4) para integradores desde $\alpha = 0.1$ hasta $\alpha = 0.95$.

Tabla 3. Requisitos de diseño del filtro pasa altas Butterworth.

α	ω_p (rad/s)	ω_s (rad/s)	A_p (dB)	A_s (dB)
0.1	0.818	1.0	-3.0	-18.30
0.2	0.667	1.0	-3.0	-16.60
0.3	0.538	1.0	-3.0	-14.80
0.4	0.427	1.0	-3.0	-12.90
0.5	0.333	1.0	-3.0	-10.80
0.6	0.249	1.0	-3.0	-8.58
0.7	0.176	1.0	-3.0	-6.14
0.8	0.111	1.0	-3.0	-20.90
0.85	0.081	1.0	-3.0	-18.20
0.9	0.052	1.0	-3.0	-20.00
0.95	0.025	1.0	-3.0	-28.20

Tabla 4. Valores de elementos para el filtro pasa altas Butterworth tipo T .

α	R_s (Ω)	R_L (Ω)	C (F)
0.1	0.61	0.61	1.0
0.2	0.75	0.75	1.0
0.3	0.93	0.93	1.0
0.4	1.16	1.16	1.0
0.5	1.50	1.50	1.0
0.6	2.00	2.00	1.0
0.7	2.83	2.83	1.0
0.8	4.50	4.50	1.0
0.85	6.16	6.16	1.0
0.9	9.50	9.50	1.0
0.95	19.50	19.50	1.0

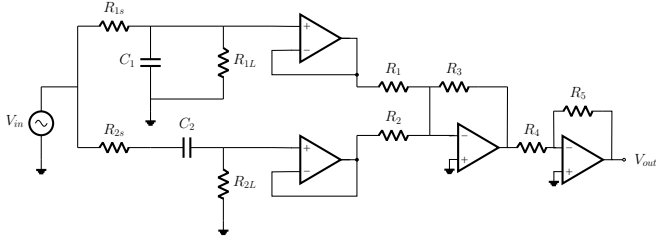


Fig. 5. Integrador de orden fraccionario propuesto para la ecuación (4) usando los filtros Butterworth de la Fig. 2 y Fig. 4.

2.3 Integrador $\frac{1}{s^\alpha}$

El integrador fraccionario se conforma de la suma de las respuestas de un filtro pasa bajas Butterworth y un filtro pasa altas Butterworth como se muestra en la Fig. 5. El sumador inversor también amplifica las respuestas de salida de cada filtro, de tal forma que los resistores R_1 , R_2 y R_3 se seleccionan para obtener la ganancia G_{pb} de la ecuación (6) y la ganancia G_{pa} de la ecuación (10). La Tabla 5 muestra las ganancias para el filtro pasa bajas Butterworth y filtro pasa altas Butterworth desde $\alpha = 0.1$ hasta $\alpha = 0.95$.

Tabla 5. Ganancias para los filtros Butterworth pasa bajas y pasa altas.

α	R_1 (Ω)	R_2 (Ω)	R_3 (Ω)	G_{pb}	G_{pa}
0.1	$1e^3$	$1.49e^3$	$1.22e^3$	1.22	0.81
0.2	$1e^3$	$2.25e^3$	$1.50e^3$	1.50	0.66
0.3	$1e^3$	$3.44e^3$	$1.85e^3$	1.85	0.53
0.4	$1e^3$	$5.44e^3$	$2.33e^3$	2.33	0.42
0.5	$1e^3$	$9.00e^3$	$3.00e^3$	3.00	0.33
0.6	$1e^3$	$16.00e^3$	$4.00e^3$	4.00	0.25
0.7	$1e^3$	$32.11e^3$	$5.66e^3$	5.66	0.17
0.8	$1e^3$	$81.00e^3$	$9.00e^3$	9.00	0.11
0.85	$1e^3$	$152.10e^3$	$12.33e^3$	12.33	0.08
0.9	$1e^3$	$361.00e^3$	$19.00e^3$	19.00	0.05
0.95	$1e^3$	$1.52e^6$	$39.00e^3$	39.00	0.02

Posteriormente, se realizó un escalamiento en impedancia con el objetivo de obtener valores de capacitores comerciales en el circuito del integrador fraccionario. La Tabla 6 muestra los valores escalados del circuito del integrador de orden fraccionario de la Fig. 5, mientras que la Fig. 6 muestra el comportamiento del integrador de orden fraccionario en el dominio de la frecuencia con órdenes $\alpha = 0.1$ hasta $\alpha = 0.95$.

Para determinar si los resultados a nivel circuito (Fig. 5) reproducen el comportamiento esperado a nivel teórico comparamos la pendiente obtenida con la ecuación (4) respecto a la pendiente medida con el simulador de circuitos SPICE de la Fig. 6, la cual es el resultado de la respuesta en frecuencia del integrador de orden fraccionario propuesto de la Fig. 5

En la Tabla 7 se muestra el resultado de la comparación. Se observa que el mayor error se presenta en el orden de

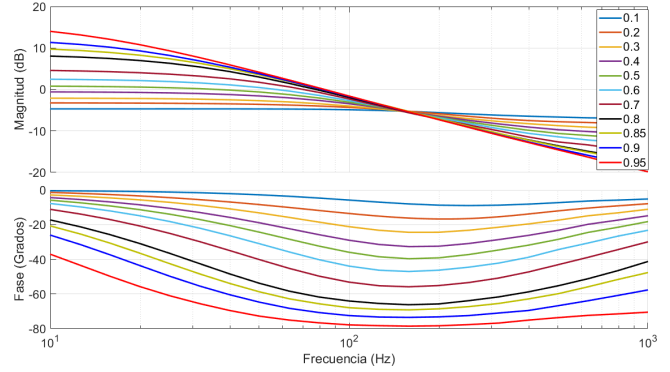


Fig. 6. Respuesta en frecuencia del integrador de orden fraccionario propuesto (Fig. 5) obtenida mediante el simulador de circuitos SPICE.

0.6, siendo de hasta -3.601 dB/Dec. El error tiende a disminuir para órdenes fraccionarios pequeños y grandes, es decir, cuando se aproximan a cero y uno, respectivamente.

Es importante mencionar que la realización física del integrador fraccionario propuesto es factible debido a que los capacitores son de valor comercial. Por otro lado, el valor de los resistores son fácilmente realizables con potenciómetros de precisión (ver Tabla 6). Finalmente,

Tabla 6. Valores de resistores y capacitores del integrador fraccionario de la Fig. 5.

α	R_{1s} (Ω)	R_{1L} (Ω)	R_{2s} (Ω)	R_{2L} (Ω)	C_1 (F)	C_2 (F)
0.1	$244e^3$	$244e^3$	$610e^3$	$610e^3$	$10e^{-6}$	$1e^{-6}$
0.2	$300e^3$	$300e^3$	$750e^3$	$750e^3$	$10e^{-6}$	$1e^{-6}$
0.3	$371e^3$	$371e^3$	$930e^3$	$930e^3$	$10e^{-6}$	$1e^{-6}$
0.4	$467e^3$	$467e^3$	$117e^3$	$117e^3$	$10e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.5	$604e^3$	$604e^3$	$150e^3$	$150e^3$	$10e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.6	$801e^3$	$801e^3$	$201e^3$	$201e^3$	$10e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.7	$515e^3$	$515e^3$	$284e^3$	$284e^3$	$22e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.8	$816.81e^3$	$816.81e^3$	$451e^3$	$451e^3$	$22e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.85	$1.12e^6$	$1.12e^6$	$617e^3$	$617e^3$	$22e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.9	$1.72e^6$	$1.72e^6$	$949e^3$	$949e^3$	$22e^{-6}$	$10e^{-6}$
0.95	$3.54e^6$	$3.54e^6$	$1.96e^6$	$1.96e^6$	$22e^{-6}$	$10e^{-6}$

Tabla 7. Comparación entre resultados teóricos respecto al integrador fraccionario propuesto de la Fig. 5.

α	Pendiente ideal ec. (4) (dB/Dec)	Pendiente circuito Fig. 6 (dB/Dec)	Error (dB/Dec)
0.1	-2	-2.791	-0.791
0.2	-4	-5.547	-1.547
0.3	-6	-8.293	-2.293
0.4	-8	-10.909	-2.909
0.5	-10	-13.398	-3.398
0.6	-12	-15.601	-3.601
0.7	-14	-17.488	-3.488
0.8	-16	-17.899	-1.899
0.85	-17	-18.387	-1.387
0.9	-18	-18.738	-0.738
0.95	-19	-19.336	-0.336

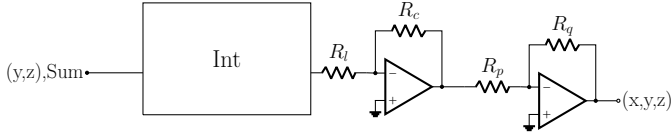


Fig. 7. Circuito (*Int_Gain*) para generar la señales de salida (x, y, z) . El bloque *Int* corresponde al integrador propuesto de la Fig. 5.

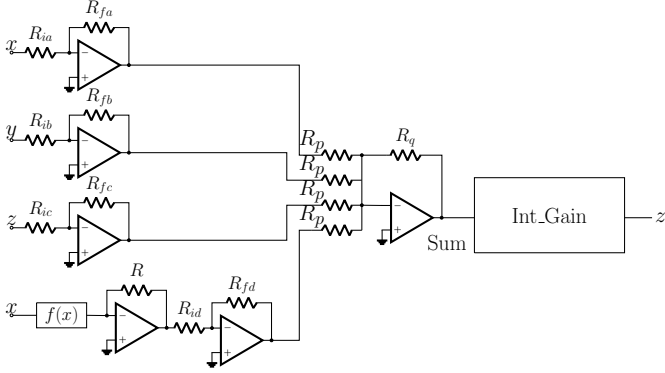


Fig. 8. Circuito para generar la señal de salida z .

los amplificadores operacionales son TL081. Por lo tanto, todos los dispositivos son de uso común y disponibles comercialmente.

3. OSCILADOR CAÓTICO DE MÚLTIPLES ENROLLAMIENTOS

En esta sección se muestra un ejemplo de aplicación de integrador fraccionario propuesto en la sección anterior. Basados en el trabajo de (Deng and Lü, 2006), el oscilador caótico de Lü se describe con las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario (13), (14) y (15), donde $a = 2$, $b = 1$, $c = 0.6$ y $d_1 = 2$. $f(x)$ es una función PWL (piecewise-linear, por sus siglas en inglés) .

$$D^\alpha x = y \quad (13)$$

$$D^\alpha y = z \quad (14)$$

$$D^\alpha z = -ax - by - cz + d_1 f(x) \quad (15)$$

Aplicando la metodología de diseño propuesta, en la Fig. 7 se presenta el circuito que sintetiza las ecuaciones (13) y (14) del oscilador caótico. En particular, el bloque *Int* se relaciona con el integrador de orden fraccionario de la Fig. 5. Las salidas de los integradores de orden fraccionario es amplificada con una ganancia de 3 para el caso particular de $\alpha = 0.90$. Por otro lado, el circuito de la Fig. 8 sintetiza a la ecuación (15), donde la señal *Sum* es integrada por el bloque *Int_Gain* y obtener la señal de salida z . El bloque *Int_Gain* se relaciona con la Fig. 7. Además, las Figs. 9 y 10 corresponden a la función $f(x)$ para obtener un oscilador caótico de 2 o 4 enrollamientos, respectivamente. Finalmente, la Tabla 8 muestra los valores de los componentes del oscilador caótico de Lü de orden $\alpha = 0.90$. Es importante

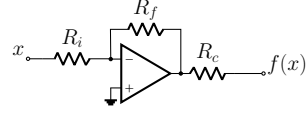


Fig. 9. Circuito de la función $f(x)$ para generar un oscilador caótico de 2 enrollamientos.

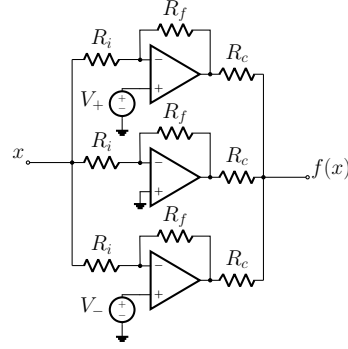


Fig. 10. Circuito de la función $f(x)$ para generar un oscilador caótico de 4 enrollamientos.

Tabla 8. Valores para el circuito del oscilador caótico de orden $\alpha = 0.90$.

Elemento	Valor	Elemento	Valor
$R_{1s}(k\Omega)$	19.02	$C_1(\mu F)$	10.00
$R_{1L}(k\Omega)$	19.02	$R_{2s}(k\Omega)$	4.75
$C_2(\mu F)$	10.00	$R_{2L}(k\Omega)$	4.75
$R_1(k\Omega)$	1.00	$R_2(k\Omega)$	361.00
$R_3(k\Omega)$	19.00	$R_4(k\Omega)$	10.00
$R_5(k\Omega)$	20.00	$R_i(k\Omega)$	2.20
$R_c(k\Omega)$	6.80	$R_p(k\Omega)$	10.00
$R_q(k\Omega)$	10.00	$R_{ia}(k\Omega)$	10.00
$R_{fa}(k\Omega)$	20.00	$R_{ib}(k\Omega)$	10.00
$R_{fb}(k\Omega)$	10.00	$R_{ic}(k\Omega)$	10.00
$R_{fc}(k\Omega)$	6.00	$R(k\Omega)$	10.00
$R_{id}(k\Omega)$	10.00	$R_{fd}(k\Omega)$	20.00

Tabla 9. Voltajes para la función PWL $f(x)$.

Elemento	Valor	Elemento	Valor
$R_i(k\Omega)$	1.00	$R_f(M\Omega)$	1.00
$R_c(k\Omega)$	149.60	$V_+(v)$	1.85
$V_-(v)$	-1.90	$V_{SS}(v)$	15.00
$V_{EE}(v)$	-15.00	$V_{sat}(v)$	± 14.60

mencionar que los integradores fraccionarios se escalaron en frecuencia, en el caso de los integradores de orden $\alpha = 0.90$, el escalamiento es de 1.67Hz en la frecuencia de corte (factor de escalamiento 200 para el integrador de $\alpha = 0.90$ normalizado). En la tabla 9 se muestran los valores de voltaje para la función no lineal $f(x)$ o PWL.

4. CONCLUSIÓN

Se presentó una propuesta de diseño electrónico para un integrador de orden fraccionario basado en filtros Butterworth pasabajas y pasa altas. Usando el simulador de circuitos SPICE, el análisis de la respuesta en frecuencia determinó que el error de aproximación es

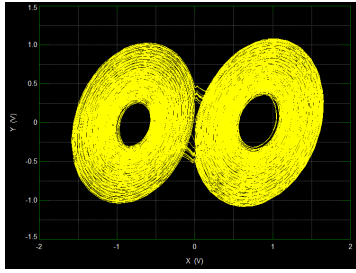


Fig. 11. Oscilador caótico de Lü con $\alpha = 0.9$ con 2 enrollamientos.

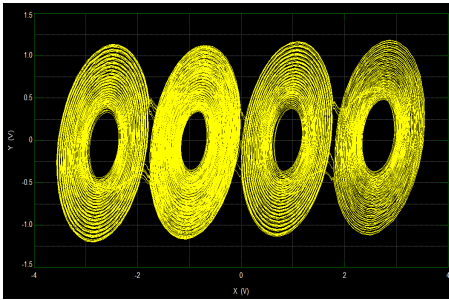


Fig. 12. Oscilador caótico de Lü con $\alpha = 0.9$ con 4 enrollamientos.

aceptable en comparación con realizaciones conocidas. En particular, el error de aproximación del integrador fraccionario propuesto se reduce significativamente para órdenes fraccionarios $\alpha \geq 0.8$. Para demostrar la utilidad del método propuesto, el integrador de orden $\alpha = 0.9$ se utilizó para la implementación experimental del oscilador caótico de 2 y 4 enrollamientos. Los resultados a nivel circuito (Fig. 5 y Fig. 6) reproducen el comportamiento esperado a nivel teórico (ver Tabla 7). Las aplicaciones de los integradores fraccionarios Butterworth son el campo de la dinámica no lineal, diseño de controladores PID, y diseño de emuladores de memristores.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo otorgado mediante el proyecto 100519836-VIEP2021.

REFERENCIAS

Bertsias, P., Psychalinos, C., Elwakil, A., Safari, L., and Minaei, S. (2019). Design and application examples of cmos fractional-order differentiators and integrators. *Microelectronics Journal*, 83, 155–167. doi: <https://doi.org/10.1016/j.mejo.2018.11.013>.

Charef, A. (2006). Analogue realisation of fractional-order integrator, differentiator and fractional $\pi\lambda d\mu$ controller. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 153, 714–720.

Charef, A., Sun, H., Tsao, Y., and Onaral, B. (1992). Fractal system as represented by singularity function. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37, 1465–1470. doi: <https://doi.org/10.1109/9.159595>.

David, S., López, J., and Pallone, E. (2011). Fractional order calculus: Historical apologia, basic concepts and some applications. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 33, 4302–4302. doi: <https://doi.org/10.1590/S1806-11172011000400002>.

Deng, W. and Lü, J. (2006). Design of multidirectional multiscroll chaotic attractors based on fractional differential systems via switching control. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 16, 043120. doi: <https://doi.org/10.1063/1.2401061>.

Kapoulea, S., Psychalinos, C., and Elwakil, A.S. (2018). Single active element implementation of fractional-order differentiators and integrators. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, 97, 6–15. doi: <https://doi.org/10.1016/j.aeue.2018.09.046>.

Machado, J.T., Kiryakova, V., and Mainardi, F. (2011). Recent history of fractional calculus. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16, 1140–1153. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.05.027>.

Mahata, S., Kar, R., and Mandal, D. (2020). Optimal rational approximation of bandpass butterworth filter with symmetric fractional-order roll-off. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, 117, 153106. doi: <https://doi.org/10.1016/j.aeue.2020.153106>.

Montero, C.M., Gaspariano, L.A.S., López, C.S., Díaz, V.R.G., and Cuautle, E.T. (2017). On the electronic realization of fractional order filters with opamps and field programmable analog arrays. volume 688. Springer. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-50249-6_5.

Pacheco, J.M.M., Hernández, L.C.L., Montero, C.M., Akgül, A., Gaspariano, L.A.S., Li, C.B., and Çağrı Kutlu, M. (2021). Active realization of fractional-order integrators and their application in multiscroll chaotic systems. *Complexity*, 2021. doi: <https://doi.org/10.1155/2021/6623855>.

Serrano, E.Z. (2017). *Fractional Order Chaotic Systems and Their Electronic Design*. Ph.D. thesis, Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Sun, H., Chen, W., Wei, H., and Chen, Y. (2011). A comparative study of constant-order and variable-order fractional models in characterizing memory property of systems. *The European Physical Journal Special Topics*, 193, 185. doi: <https://doi.org/10.1140/epjst/e2011-01390-6>.

Sun, H., Zhang, Y., Baleanu, D., Chen, W., and Chen, Y. (2018). A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 64, 213–231. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.04.019>.

Tavazoei, M.S. (2020). Fractional order chaotic systems: history, achievements, applications, and future challenges. *The European Physical Journal Special Topics*, 229, 887–904. doi: <https://doi.org/10.1140/epjst/e2020-900238-8>.