Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Posgrado en Ciencias Matemáticas

Sistemas Hamiltonianos integrables

Tesis que se presenta como requisito parcial para obtener el título de

Doctor en Ciencias (Matemáticas)

Autor: Maestro Rafael Leonardo Azuaje Hidalgo

Director de tesis: Doctor Gerardo Francisco Torres del Castillo

Puebla, Puebla, Noviembre 2021

Dedicatoria

A mi madre.

Agradecimientos

Primeramente agradezco a mi familia, a mis hermanos, a mis padres, a mi esposa, por su apoyo. Especialmente a mi madre por todo el amor que me ha dado, por guiarme y apoyarme.

A mi asesor gracias por guiarme en lo académico para lograr este objetivo.

Agradezco al CONACYT por su apoyo económico.

Agradezco a todos los profesores que han influido en mi desarrollo profesional.

A todos los que de alguna manera contribuyeron a este logro, gracias.

Introducción

La mecánica Hamiltoniana es un formalismo matemático desarrollado por Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) para describir la dinámica de un sistema físico. Desde el formalismo Hamiltoniano es posible resolver algunos problemas mecánicos que no tienen solución por otros medios; además este formalismo tiene gran valor en algunos métodos en mecánica celeste, mecánica estadística, óptica y otras áreas de estudio [5]. El campo de estudio de los sistemas integrables clásicos nace junto con la Mecánica Clásica, con una búsqueda de soluciones exactas a las ecuaciones de movimiento de Newton. Fue en el siglo XIX cuando Liouville proporcionó un marco general que caracteriza este tipo especial de sistemas mecánicos en el que las soluciones son obtenidas resolviendo integrales y haciendo algunos cálculos algebraicos.

Definición 0.1. *Un sistema Hamiltoniano con n grados de libertad se dice integrable (según Liouville) si existen n constantes de movimiento en involución y funcionalmente independientes.*

Resulta indispensable encontrar una cantidad suficiente de constantes de movimiento para determinar si un sistema Hamiltoniano es integrable. Para ser más específico, necesitamos exactamente la misma cantidad de constantes de movimiento que el número de grados de libertad del sistema en cuestión, además de la involución y la independencia funcional de dichas constantes. Una constante de movimiento es una función diferenciable que es constante en cada curva solución de las ecuaciones de movimiento del sistema. En involución significa que $\{F_i, F_j\} = 0$, es decir, el paréntesis de Poisson de F_i y F_j es cero, y funcionalmente independientes significa que el subconjunto de puntos regulares del mapeo $F = (F_1, ..., F_n)$ es denso en el dominio de definición de F. Liouville probó que la solución de las ecuaciones de movimiento de un sistema integrable se puede obtener por cuadraturas, es decir, resolviendo un número finito de ecuaciones algebraicas y calculando un número finito de integrales. Para más detalles ver [4, 9, 16, 37, 43].

Los llamados sistemas bi-Hamiltonianos (autónomos) han sido estudiados en conexión con la integrabilidad según Liouville. Se ha mostrado que si un sistema de ecuaciones autónomo puede ser escrito en forma Hamiltoniana haciendo uso de dos estructuras simplécticas, satisfaciendo cierta condición de compatibilidad, entonces se pueden encontrar constantes de movimiento en involución; estas constantes están relacionadas por una ecuación de recurrencia (ver [29, 16]). En esta tesis se presenta el trabajo reportado en [41] en el cual se extienden al caso no autónomo algunos resultados establecidos para sistemas bi-Hamiltonianos autónomos.

No solo la integrabilidad según Liouville es relevante, también la integrabilidad según Lie es de suma importancia y es también estudiada en esta tesis. El matemático noruego Marius Sophus Lie (1842-1899) desarrolló los conceptos de grupo de Lie y álgebra de Lie, y empleó esta teoría para resolver, o al menos simplificar, ecuaciones diferenciales ordinarias. El resultado conocido como teorema de Lie, permite reducir el orden de un sistema de ecuaciones diferenciales cuando se tienen simetrías del sistema que forman un álgebra de Lie soluble. Al principio Lie basó su trabajo en analogías con el trabajo del matemático francés Evariste Galois en el que desarrolló la teoría de grupos y la usó como herramienta para resolver ecuaciones polinomiales [20].

Esta tesis está organizada como sigue: En el capítulo 1 se muestra que para un sistema Hamiltoniano con función Hamiltoniana posiblemente dependiente del tiempo, la existencia de una transformación canonoide permite encontrar constantes de movimiento del sistema, dichas constantes pueden depender explícitamente del tiempo. En el capítulo 1 también se muestran otros resultados estrechamente relacionados con el desarrollo de las transformaciones canonoides aunque no dependientes de este. En el capítulo 2 estudiamos la integrabilidad según Lie, presentamos los resultados expuestos en [7], en el cual se presentan extensiones al caso dependiente del tiempo de la integrabilidad según Lie establecida para sistemas autónomos. Continuando con el capítulo 3, presentamos el trabajo reportado en [8], en el cual se presenta el mapeo de momento y reducción para sistemas Hamiltonianos no autónomos (el mapeo de momento puede depender explícitamente del tiempo). Finalmente en el capítulo 4 de esta tesis, estudiamos los sistemas cuánticos, enfocándonos principalmente en analogías con los sistemas Hamiltonianos clásicos, esto con el objetivo de presentar resultados análogos, entre ellos la introducción de transformaciones canonoides en sistemas cuánticos.

El lenguaje empleado en esta tesis es el estándar de este campo de estudio. Conceptos como sistemas Hamiltonianos, constantes de movimiento, estructuras simplécticas, variedades diferenciables, funciones y mapeos diferenciables, formas diferenciales, tensores, ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales, campos vectoriales, grupos de Lie, álgebras de Lie, simetrías, operador diferencial, entre otros, aparecen constantemente en este texto, y su conocimiento es fundamental para la comprensión de este trabajo. Algunos libros de texto en mecánica Hamiltoniana, mecánica cuántica, ecuaciones diferenciales y geometría diferencial, que pueden ser considerados referencias para fijar la definición de algún objeto matemático o el desarrollo de alguna técnica o procedimiento son [1, 2, 3, 15, 21, 22, 28, 36, 38].

Índice general

Capítulo 1

Sistemas bi-Hamiltonianos

En este capítulo se presentan extensiones al caso no autónomo de algunos resultados establecidos para sistemas bi-Hamiltonianos autónomos. Comenzamos presentando brevemente los resultados establecidos para sistemas bi-Hamiltonianos autónomos.

Sea (M, ω, H) un sistema Hamiltoniano autónomo. Si γ es una segunda estructura simpléctica sobre M, se puede definir un $(1,1)$-tensor S en M por la relación $\gamma(Y, Z) = \omega(SY, Z)$ para cualquier par de campos vectoriales Y, Z. F. Magri and C. Morosi [29] definen un sistema bi-Hamiltoniano como un sistema Hamiltoniano autónomo (M, ω, H) con una segunda estructura simpléctica compatible con el sistema hamiltoniano en el siguiente sentido: γ es compatible con el sistema dado si $\pounds_{X_H}\gamma = 0$ y $N_S = 0$, donde X_H es el campo vectorial que define la dinámica del sistema (esto es, $X_H \lrcorner \omega = -dH$), $\pounds_{X_H}$ denota la derivada de Lie por X_H, y N_S es el tensor torsión de Nijenhuis de S, definido por

$$N_S(Y, Z) = [SY, SZ] - S[SY, Z] - S[Y, SZ] + S^2[Y, Z].$$

Si γ es compatible con el sistema Hamiltoniano (M, ω, H) entonces las trazas de las potencias de la matriz (S^α_β) cuyas entradas son las componentes del tensor S, son constantes de movimiento en involución que no dependen explícitamente del tiempo. Se tiene además que los eigenvalores de (S^α_β) son $n = \frac{1}{2}\dim M$ constantes de movimiento en involución, que en el caso de ser funcionalmente independientes nos llevaría a concluir que el sistema es integrable (para detalles ver [16, 12, 25]).

A continuación presentamos el trabajo reportado en [41], en el cual se usan transformaciones canonoides para encontrar constantes de movimiento de sistemas Hamiltonianos no autónomos, es decir, sistemas Hamiltonianos en los que la función Hamiltoniana puede depender explícitamente del tiempo.

Para detalles del formalismo de sistemas Hamiltonianos no autónomos ver [38].

Consideremos un sistema Hamiltoniano $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$ con M una variedad diferenciable de dimensión $2n$. Sean (q^i, p_i, t) coordenadas canónicas en $M \times \mathbb{R}$, esto es, $\Omega = dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt$ (en esta tesis tomamos el convenio de suma sobre indices repetidos). La dinámica del sistema está dada por el campo vectorial Hamiltoniano X_H, el cual es el campo vectorial en $M \times \mathbb{R}$ tal que $X_H(t) = 1$ y $X_H \lrcorner \Omega = 0$. En coordenadas canónicas tenemos

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial t},$$

con suma sobre indices repetidos, y las curvas integrales del campo vectorial Hamiltoniano X_H son las curvas soluciones de las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Definición 1.1. *Sea $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$ un sistema Hamiltoniano como arriba. Una transformación de coordenadas $(Q^i(q^j, p_j, t), P_i(q^j, p_j, t))$ que preserva la forma de las ecuaciones de Hamilton, esto es,*

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q^i}$$

para alguna función $K = K(Q^i, P_i, t)$, se llama transformación canonoide.

Se nota que una transformación de coordenadas $(Q^i(q^j, p_j, t), P_i(q^j, p_j, t))$ es canonoide si y solo si existe una función K tal que

$$X_H \lrcorner (dP_i \wedge dQ^i - dK \wedge dt) = 0.$$

Mediante un calculo directo tenemos

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}P_i \wedge \mathrm{d}Q^i - \mathrm{d}K \wedge \mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\mathrm{d}p_j + \frac{\partial P_i}{\partial q^j}\mathrm{d}q^j + \frac{\partial P_i}{\partial t}\mathrm{d}t\right) \wedge \left(\frac{\partial Q^i}{\partial p_s}\mathrm{d}p_s + \frac{\partial Q^i}{\partial q^s}\mathrm{d}q^s + \frac{\partial Q^i}{\partial t}\mathrm{d}t\right) \\
&\quad - \frac{\partial K}{\partial p_l}\mathrm{d}p_l \wedge \mathrm{d}t - \frac{\partial K}{\partial q^l}\mathrm{d}q^l \wedge \mathrm{d}t \\
&= \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q^i}{\partial p_s}\mathrm{d}p_j \wedge \mathrm{d}p_s + \frac{\partial P_i}{\partial q^j}\frac{\partial Q^i}{\partial q^s}\mathrm{d}q^j \wedge \mathrm{d}q^s + \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q^i}{\partial q^s} - \frac{\partial P_i}{\partial q^s}\frac{\partial Q^i}{\partial p_j}\right)\mathrm{d}p_j \wedge \mathrm{d}q^s \\
&\quad + \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q^i}{\partial t} - \frac{\partial P_i}{\partial t}\frac{\partial Q^i}{\partial p_j} - \frac{\partial K}{\partial p_j}\right)\mathrm{d}p_j \wedge \mathrm{d}t + \left(\frac{\partial P_i}{\partial q^j}\frac{\partial Q^i}{\partial t} - \frac{\partial P_i}{\partial t}\frac{\partial Q^i}{\partial q^j} - \frac{\partial K}{\partial q^j}\right)\mathrm{d}q^j \wedge \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}[p_j, p_s]\mathrm{d}p_j \wedge \mathrm{d}p_s - \frac{1}{2}[q^j, q^s]\mathrm{d}q^j \wedge \mathrm{d}q^s - [p_j, q^s]\mathrm{d}p_j \wedge \mathrm{d}q^s \\
&\quad + \left(-[p_j, t] - \frac{\partial K}{\partial p_j}\right)\mathrm{d}p_j \wedge \mathrm{d}t + \left(-[q^j, t] - \frac{\partial K}{\partial q^j}\right)\mathrm{d}q^j \wedge \mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

donde $[u, v]$ denota el paréntesis de Lagrange de las coordenadas $u, v \in \{q^1, q^2, ..., q^n, p_1, p_2, ..., p_n\}$ con respecto a las nuevas coordenadas Q^i, P_i, definido por

$$[u, v] = \frac{\partial Q^i}{\partial u}\frac{\partial P_i}{\partial v} - \frac{\partial P_i}{\partial u}\frac{\partial Q^i}{\partial v}.$$

Luego se tiene que

$$
\begin{aligned}
X_H \lrcorner (dP_i \wedge dQ^i - dK \wedge dt) &= \left([p_j, p_l]\frac{\partial H}{\partial q^j} - [q^j, p_l]\frac{\partial H}{\partial p_j} - [t, p_l] + \frac{\partial K}{\partial p_l}\right) dp_l \\
&+ \left([q^l, q^j]\frac{\partial H}{\partial p_j} - [q^l, p_j]\frac{\partial H}{\partial q^j} - [t, q^l] + \frac{\partial K}{\partial q^l}\right) dq^l \\
&+ \left(\left(\frac{\partial K}{\partial p_j} - [t, p_j]\right)\frac{\partial H}{\partial q^j} + \left([t, q^j] - \frac{\partial K}{\partial q^j}\right)\frac{\partial H}{\partial p_j}\right) dt.
\end{aligned}
$$

Esto es, $X_H \lrcorner (dP_i \wedge dQ^i - dK \wedge dt) = 0$ si y solo si

$$[p_j, p_l]\frac{\partial H}{\partial q^j} - [q^j, p_l]\frac{\partial H}{\partial p_j} - [t, p_l] + \frac{\partial K}{\partial p_l} = 0,$$

$$[q^l, q^j]\frac{\partial H}{\partial p_j} - [q^l, p_j]\frac{\partial H}{\partial q^j} - [t, q^l] + \frac{\partial K}{\partial q^l} = 0$$

y

$$\left(\frac{\partial K}{\partial p_j} - [t, p_j]\right)\frac{\partial H}{\partial q^j} + \left([t, q^j] - \frac{\partial K}{\partial q^j}\right)\frac{\partial H}{\partial p_j} = 0.$$

Se nota que si la primera y la segunda ecuación se tienen, entonces la tercera también se tiene, así que podemos quedarnos solo con las dos primeras ecuaciones y desechar la tercera. Las reescribimos en la forma

$$\frac{\partial K}{\partial p_l} = [p_l, p_j]\frac{\partial H}{\partial q^j} - [p_l, q^j]\frac{\partial H}{\partial p_j} + [t, p_l],$$

$$\frac{\partial K}{\partial q^l} = [q^l, p_j]\frac{\partial H}{\partial q^j} - [q^l, q^j]\frac{\partial H}{\partial p_j} + [t, q^l].$$

La existencia de una función K satisfaciendo las ecuaciones anteriores es equivalente a que la 1-forma

$$\left([p_l, p_j]\frac{\partial H}{\partial q^j} - [p_l, q^j]\frac{\partial H}{\partial p_j} + [t, p_l]\right) dp_l + \left([q^l, p_j]\frac{\partial H}{\partial q^j} - [q^l, q^j]\frac{\partial H}{\partial p_j} + [t, q^l]\right) dq^l$$

sea exacta.

Haciendo $(x^1, x^2, ..., x^{2n}) = (q^1, q^2, ..., q^n, p_1, p_2, ..., p_n)$, las ecuaciones anteriores toman la forma

$$\frac{\partial K}{\partial x^\alpha} = \epsilon^{\mu\nu}[x^\mu, x^\alpha]\frac{\partial H}{\partial x^\nu} + [t, x^\alpha],$$

donde $(\epsilon^{\mu\nu})$ es la matriz de orden $2n \times 2n$ tal que las ecuaciones de Hamilton tienen la forma $\dot{x}^\mu = \epsilon^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial x^\nu}$, es decir, $(\epsilon^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ ($\epsilon^{\mu\nu}$ es la entrada en el renglón μ y columna ν). Así que la condición de que la 1-forma de arriba sea exacta, la cual significa que $\frac{\partial^2 K}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{\partial^2 K}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}$, es equivalente a

$$\epsilon^{\mu\nu}\frac{\partial[x^\beta, x^\alpha]}{\partial x^\mu}\frac{\partial H}{\partial x^\nu} + \epsilon^{\mu\nu}[x^\nu, x^\beta]\frac{\partial^2 H}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} - \epsilon^{\mu\nu}[x^\nu, x^\alpha]\frac{\partial^2 H}{\partial x^\beta \partial x^\mu} + \frac{\partial[x^\beta, x^\alpha]}{\partial t} = 0.$$

Así que esta última ecuación es una condición necesaria y suficiente para la existencia de una función K, tal que la transformación de coordenadas $(q^i, p_i) \longmapsto (Q^i, P_i)$ sea una transformación canonoide con nueva Hamiltoniana K.

Si se tiene una transformación canonoide $(Q^i(q^j, p_j, t), P_i(q^j, p_j, t))$, se define el tensor $S = S^\alpha_\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes dx^\beta$ en coordenadas canónicas x^μ por

$$S^\alpha_\beta = \epsilon^{\alpha\lambda}[x^\beta, x^\lambda]$$

entonces las funciones $K_m = \frac{1}{m}tr(S^m)$, para $m \geq 1$ son constantes de movimiento, por lo tanto, también los valores propios de S son constantes de movimiento; en efecto, definiendo el tensor $U = U^{\alpha}_{\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \otimes dx^{\beta}$ en coordenadas canónicas x^{μ} por $U^{\alpha}_{\beta} = \epsilon^{\alpha\lambda}\frac{\partial^2 H}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\beta}}$, se tiene que

$$\frac{dS^{\lambda}_{\beta}}{dt} = U^{\lambda}_{\mu}S^{\mu}_{\beta} - S^{\lambda}_{\nu}U^{\nu}_{\beta},$$

en efecto

$$\begin{aligned}
&\frac{dS^{\lambda}_{\beta}}{dt} + S^{\lambda}_{\nu}U^{\nu}_{\beta} - U^{\lambda}_{\mu}S^{\mu}_{\beta} = \\
&= \epsilon^{\lambda\alpha}\frac{\partial[x^{\beta}, x^{\alpha}]}{\partial t} + \epsilon^{\lambda\alpha}\frac{\partial[x^{\beta}, x^{\alpha}]}{\partial x^{\nu}}\frac{dx^{\nu}}{dt} + \epsilon^{\lambda\alpha}[x^{\nu}, x^{\alpha}]\epsilon^{\nu\mu}\frac{\partial^2 H}{\partial x_{\mu}\partial x_{\beta}} - \\
&\epsilon^{\lambda\alpha}[x^{\beta}, x^{\nu}]\epsilon^{\mu\nu}\frac{\partial^2 H}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\mu}} \\
&= \epsilon^{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial[x^{\beta}, x^{\alpha}]}{\partial t} + \frac{\partial[x^{\beta}, x^{\alpha}]}{\partial x_{\mu}}\epsilon^{\mu\nu}\frac{H}{\partial x^{\nu}} + \epsilon^{\nu\mu}[x^{\nu}, x^{\alpha}]\frac{\partial^2 H}{\partial x^{\mu}\partial x^{\beta}} - \epsilon^{\mu\nu}[x^{\beta}, x^{\nu}]\frac{\partial^2 H}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\mu}}\right) \\
&= \epsilon^{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial[x^{\beta}, x^{\alpha}]}{\partial t} + \epsilon^{\mu\nu}\frac{\partial[x^{\beta}, x^{\alpha}]}{\partial x_{\mu}}\frac{H}{\partial x^{\nu}} - \epsilon^{\mu\nu}[x^{\nu}, x^{\alpha}]\frac{\partial^2 H}{\partial x^{\mu}\partial x^{\beta}} + \epsilon^{\mu\nu}[x^{\nu}, x^{\beta}]\frac{\partial^2 H}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\mu}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

o, en forma matricial, $\frac{dS}{dt} = US - SU = [U, S]$, luego

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(K_m) &= \frac{1}{m}\frac{d}{dt}(trS^m) \\
&= \frac{1}{m}tr(\frac{d}{dt}S^m) \\
&= \frac{1}{m}tr(m\frac{dS}{dt}S^{m-1}) \\
&= tr([S, U]S^{m-1}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Cabe remarcar que las funciones K_m pueden ser constantes triviales y podrían no estar en involución. La máxima cantidad de constantes de movimiento funcionalmente independiente que podemos obtener por este medio es n, ya que el polinomio característico del producto de dos matrices antisimétricas de orden $2n \times 2n$ es el cuadrado de un polinomio de grado n (ver [17]). Además si el tensor de Nijenhuis de S se anula entonces tales constantes de movimiento están en involución, es decir, la nulidad del tensor de Nijenhuis es una condición suficiente para la involución de las constantes de movimiento encontradas; se muestra con algunos ejemplos que no es una condición necesaria. El tensor de Nijenhuis de S se define por [16]

$$N_S(X, Y) = [SX, SY] - S[SX, Y] - S[X, SY] + S^2[X, Y]$$

para cualquier par de campos vectoriales X, Y en $M \times \mathbb{R}$; en coordenadas canónicas tenemos

$$N^{\mu}_{\alpha\beta} = S^{\lambda}_{\alpha}\partial_{\lambda}S^{\mu}_{\beta} - S^{\lambda}_{\beta}\partial_{\lambda}S^{\mu}_{\alpha} - S^{\mu}_{\lambda}\partial_{\alpha}S^{\lambda}_{\beta} + S^{\mu}_{\lambda}\partial_{\beta}S^{\lambda}_{\alpha}$$

donde por simplicidad hemos escrito ∂_{λ} para denotar a $\dfrac{\partial}{\partial x^{\lambda}}$. Se nota que

$$N^{\mu}_{\alpha\beta}(S^{m-1})^{\beta}_{\mu} = S^{\lambda}_{\alpha}\partial_{\lambda}K_m - \partial_{\alpha}K_{m+1},$$

en efecto,

$$\begin{aligned}
&S^{\nu}_{\alpha}\partial_{\nu}K_l - \partial_{\alpha}K_{l+1} = \\
&= \frac{1}{l}S^{\nu}_{\alpha}\partial_{\nu}\mathrm{tr}(S^l) - \frac{1}{l+1}\partial_{\alpha}\mathrm{tr}(S^{l+1}) \\
&= S^{\nu}_{\alpha}(\partial_{\nu}S^{\lambda}_{\beta})(S^{l-1})^{\beta}_{\lambda} - (\partial_{\alpha}S^{\nu}_{\beta})(S^l)^{\beta}_{\nu} \\
&= S^{\nu}_{\alpha}(\partial_{\nu}S^{\lambda}_{\beta})(S^{l-1})^{\beta}_{\lambda} - S^{\lambda}_{\nu}(\partial_{\alpha}S^{\nu}_{\beta})(S^{l-1})^{\beta}_{\lambda} \\
&= S^{\nu}_{\alpha}(\partial_{\nu}S^{\lambda}_{\beta})(S^{l-1})^{\beta}_{\lambda} - S^{\lambda}_{\nu}(\partial_{\alpha}S^{\nu}_{\beta})(S^{l-1})^{\beta}_{\lambda} + (S^l)^{\beta}_{\nu}\partial_{\beta}S^{\nu}_{\alpha} - (S^l)^{\nu}_{\lambda}\partial_{\nu}S^{\lambda}_{\alpha} \\
&= S^{\nu}_{\alpha}(\partial_{\nu}S^{\lambda}_{\beta})(S^{l-1})^{\beta}_{\lambda} - S^{\lambda}_{\nu}(\partial_{\alpha}S^{\nu}_{\beta})(S^{l-1})^{\beta}_{\lambda} + S^{\lambda}_{\nu}(\partial_{\beta}S^{\nu}_{\alpha})(S^{l-1})^{\beta}_{\lambda} - S^{\nu}_{\beta}(\partial_{\nu}S^{\lambda}_{\alpha})(S^{l-1})^{\beta}_{\lambda} \\
&= \left[S^{\nu}_{\alpha}(\partial_{\nu}S^{\lambda}_{\beta}) - S^{\lambda}_{\nu}(\partial_{\alpha}S^{\nu}_{\beta}) + S^{\lambda}_{\nu}(\partial_{\beta}S^{\nu}_{\alpha}) - S^{\nu}_{\beta}(\partial_{\nu}S^{\lambda}_{\alpha})\right](S^{l-1})^{\beta}_{\lambda}.
\end{aligned}$$

Así que si el tensor de Nijenhuis se anula, entonces $S^{\lambda}_{\alpha}\partial_{\lambda}K_m - \partial_{\alpha}K_{m+1} = 0$, es decir,

$$S^{\lambda}_{\alpha}\partial_{\lambda}K_m = \partial_{\alpha}K_{m+1},$$

lo que es equivalente a

$$\epsilon^{\alpha\lambda}\partial_{\lambda}K_m = T^{\alpha\lambda}\partial_{\lambda}K_{m+1}$$

donde $T_{\lambda\alpha} = [x^{\lambda}, x^{\alpha}]$ y las funciones $T^{\alpha\lambda}$ son las entradas de la matriz inversa de $(T_{\lambda\alpha})$, esto es, $T^{\alpha\lambda}T_{\lambda\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$. Las ecuaciones $\epsilon^{\alpha\lambda}\partial_{\lambda}K_m = T^{\alpha\lambda}\partial_{\lambda}K_{m+1}$ se llaman relaciones de recurrencia de Lenard [16].

Luego se tiene que

$$\begin{aligned}
\{K_s, K_l\} &= \epsilon^{\mu\nu}(\partial_{\mu}K_s)(\partial_{\nu}K_l) \\
&= T^{\mu\nu}(\partial_{\mu}K_{s+1})(\partial_{\nu}K_l) \\
&= (\partial_{\mu}K_{s+1})\epsilon^{\mu\nu}(\partial_{\nu}K_{l-1}) \\
&= \{K_{s+1}, K_{l-1}\}
\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, suponemos que $l > s$, repetimos lo anterior $l - s$ veces y tenemos $\{K_s, K_l\} = \{K_l, K_s\}$, lo que implica que $\{K_s, K_l\} = 0$, es decir, las constantes de movimiento están en involución.

Finalmente se concluye que si S tiene exactamente n valores propios diferentes y el tensor de Nijenhuis de S se anula, entonces se tienen n constantes de movimiento (los valores propios de S) en involución que pueden depender explícitamente del tiempo.

Hasta ahora solo hemos considerado el tensor de Nijenhuis, pero el tensor de Haantjes también es relevante en este contexto. El tensor de Nijenhuis de un campo tensorial de tipo $(1,1)$ fue definido en 1951 por Albert Nijenhuis, quien fuera estudiante de el matemático Holandés J. A. Schouten. Por otro lado, el tensor de Haantjes de un campo tensorial de tipo $(1,1)$ fue introducido en 1951 como una generalización natural del tensor de Nijenhuis por Johannes Haantjes, otro estudiante de J. A. Schouten [24]. Una nueva formulación de la integrabilidad de un sistema Hamiltoniano clásico basada en operadores de Haantjes, estos son campos tensoriales de tipo $(1,1)$ con tensor de Haantjes nulo, ha sido presentada recientemente en [35], en el cual, la noción de variedad simpléctica de Haantjes o $\omega\mathcal{H}$ variedad es introducida como espacio fase natural para sistemas Hamiltaninos integrables. El tensor de Haantjes de S se define por

$$\mathcal{H}_S(X,Y) = S^2 N_S(X,Y) + N_S(SX,SY) - S(N_S(X,SY) + N_S(SX,Y)).$$

Es obvio que si el tensor de Nijenhuis de S se anula entonces tambien lo hace el tensor de Haantjes de S, sin embargo, el recíproco no es cierto en general (ver [24]). Las componentes del tensor de Haantjes de S en coordenadas locales son

$$(\mathcal{H}_S)^\lambda_{\alpha\beta} = S^\lambda_\nu S^\nu_\mu (N_S)^\mu_{\alpha\beta} + (N_S)^\lambda_{\nu\mu} S^\nu_\alpha S^\mu_\beta - S^\lambda_\nu((N_S)^\nu_{\mu\beta} S^\mu_\alpha + (N_S)^\nu_{\alpha\mu} S^\mu_\beta).$$

En ejemplo 2 al final de este capítulo, mostramos que incluso si ni el tensor de Nijenhuis de S ni el tensor de Haantjes de S se anulan, es posible obtener constantes de movimiento en involución por medio de el procedimiento desarrollado anteriormente.

En el caso autónomo, el tensor S en cada punto $p \in M$ puede ser visto como una transformación del espacio tangente a M en p, T_pM, en el mismo. Se tiene un resultado conocido como el teorema de Nijenhuis (ver [19]):

Teorema 1.1. *Si S es diagonalizable y el tensor de Nijenhuis de S se anula, entonces cada espacio propio S_f de S y cada suma directa de espacios propios es una distribución integrable en el sentido de Frobenius. Además si $f \neq g$ y $V \in S_f$ entonces $V(g) = 0$, es decir, el valor propio f de S depende solo de las coordenadas de la subvariedad integral de la distribución $p \longmapsto S_f(p)$.*

Este resultado puede ser extendido al caso no autónomo de la siguiente manera: Sean X, Y campos vectoriales en $M \times \mathbb{R}$, supongamos que X es vector propio de S con valor propio f y Y es vector propio de S con valor propio g, esto es, $SX = fX$ y $SY = gY$, luego

$$N_S(X,Y) = (S-f)(S-g)[X,Y] + (f-g)(Y(f)X - X(g)Y)$$

de aquí que si $f = g$ entonces $N_S(X,Y) = (S-f)^2[x,y]$, ademas si $N_S = 0$ entonces

$$(S-f)^2[X,Y] = 0,$$

luego como S es diagonalizable

$$(S-f)[X,Y] = 0,$$

así que $[X,Y] \in S_f$, es decir, la distribución S_f es integrable. Si $f \neq g$ y $N_S = 0$ entonces el campo vectorial

$$\mathcal{H}_S(X,Y) = N_S(SX,SY) - SN_S(SX,Y) - SN_S(X,SY) + S^2 N_S(X,Y)$$

es cero, del hecho de que $SX = fX$ y $SY = gY$ se tiene que

$$0 = \mathcal{H}_S(X,Y) = (S-f)^2(S-g)^2[X,Y],$$

luego como S es diagonalizable, se tiene que $[X,Y] \in S_f + S_g$, así que la distribución $S_f + S_g$ es integrable, ademas cualquier suma directa de espacios propios es una distribución integrable. Finalmente tenemos que si $f \neq g$ entonces

$$N_S(X,Y) = (f-g)(Y(g)X - X(f)Y),$$

por lo que

$$Y(g)X - X(f)Y = 0,$$

lo que implica que $Y(f) = X(g) = 0$ ya que X y Y son independientes. Con esto queda establecida la extensión de teorema de Nijenhuis a sistemas no autónomos.

Por otro lado, remarcamos que la ecuación $\frac{dS}{dt} = [U,S]$ es fundamental para este trabajo, algunos autores llaman a esta ecuación, una ecuación de tipo Lax, en referencia al trabajo realizado por P. Lax [27]. Para un sistema Hamiltoniano con n grados de libertad, un par de Lax se define como un par de matrices L, M de orden $n \times n$, funciones del espacio fase del sistema, tales que las ecuaciones de movimiento pueden ser escritas como $\frac{dL}{dt} = [M,L]$ (ver [9]). Si se tiene un par de Lax L, M para un sistema dado, entonces los valores propios de L son constantes de movimiento. Note que el par de matrices S, U en este trabajo no es un par de Lax, en efecto, S y U son matrices funciones del espacio fase del sistema dado, pero las ecuaciones de movimiento no necesariamente pueden ser escritas en la forma $\dfrac{dS}{dt} = [U,S]$, además las matrices S, U son de orden $2n \times 2n$; a pesar de esto, como ya se mostró, los valores propios de S son constantes de movimiento.

En el libro [9] se presenta, para sistemas autónomos, un resultado que establece una condición suficiente y necesaria para la involución de los valores propios de una matriz L, con L, M un par de Lax. Antes de presentar dicho resultado, veamos un breve resumen sobre producto tensorial de matrices, también llamado producto de Kronecker. Si A es una matriz de orden $a \times b$ y B es una matriz de orden $c \times d$, entonces el producto tensorial $A \otimes B$ es la matriz de orden $ac \times bd$ dada por

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & \cdots & A_{1b}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{a1}B & \cdots & A_{ab}B \end{pmatrix}$$

Si K es una matriz cuadrada de orden n y E_{ij} es la base canónica del espacio de matrices cuadradas de orden n entonces
$K = \sum K_{ij} E_{ij}$.

Se define
$K_1 = K \otimes I = \sum K_{ij}(E_{ij} \otimes I)$,
$K_2 = I \otimes K = \sum K_{ij}(I \otimes E_{ij})$,
donde I es la matriz identidad de orden n.

Se nota que $\{E_{ij} \otimes E_{kl}\}_{i,j,k,l=1,2,\ldots,n}$ es una base para el espacio de productos tensoriales de matrices cuadradas de orden n, esto es, si r es el producto tensorial de dos matrices cuadradas de orden n entonces
$r = \sum r_{ij,kl} E_{ij} \otimes E_{kl}$.

Se define
$r_{12} = \sum r_{ij,kl} E_{ij} \otimes E_{kl} = r$,
$r_{21} = \sum r_{ij,kl} E_{kl} \otimes E_{ij}$ y
$\{K_1, K_2\} = \sum \{K_{ij}, K_{kl}\} E_{ij} \otimes E_{kl}$.

Se tienen las siguientes propiedades: si A, B, C, D son matrices con tamaños adecuados, entonces

1. $tr(A \otimes B) = tr(A)tr(B)$ y $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$,

2. si A y B son invertibles, entonces $A \otimes B$ es invertible,
   $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$,
   $A_1^{-1} = A^{-1} \otimes I$,
   $A_2^{-1} = I \otimes A^{-1}$ y
   $A_1^{-1} A_2^{-1} = A^{-1} \otimes A^{-1} = A_2^{-1} A_1^{-1}$.

Para más detalles ver [34].

El resultado tal como se presenta en [9] es el siguiente: Sea L, M un par de Lax para un sistema con n grados de libertad, supongamos que L es diagonalizable; los valores propios de L están en involución si y solo si, existe una matriz r que es el producto tensorial (o producto de Kronecker) de dos matrices cuadradas de orden n tal que

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2],$$

A continuación como una extensión del resultado anterior, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.2. *Si tenemos un par de matrices S, U como antes, es decir, un par de matrices de orden $2n \times 2n$, funciones del espacio fase de un sistema Hamiltoniano no autónomo con n grados de libertad, tal que $\frac{dS}{dt} = [U, S]$, aunque las ecuaciones de movimiento no necesariamente sean equivalentes a $\frac{dS}{dt} = [U, S]$, si S es diagonalizable, entonces tenemos que los valores propios de S están en involución si y solo si existe r, producto tensorial de dos matrices $2n \times 2n$, tal que $\{S_1, S_2\} = [r_{12}, S_1] - [r_{21}, S_2]$.*

De manera análoga a las definiciones anteriores de L_1, L_2, r_{12} entre otras, tenemos que si $F_{i,j}$ es la base canónica de las matrices de orden $2n \times 2n$ entonces
$S = \sum S_{ij} F_{ij}$,
$S_1 = S \otimes I = \sum S_{ij}(F_{ij} \otimes I)$,
$S_2 = I \otimes S = \sum S_{ij}(I \otimes F_{ij})$,
$r_{12} = \sum r_{ij,kl} F_{ij} \otimes F_{kl}$,
$r_{21} = \sum r_{ij,kl} F_{kl \otimes F_{ij}}$
y $\{S_1, S_2\} = \sum \{S_{ij}, S_{kl}\} F_{ij} \otimes F_{kl}$.
En este caso I es la matriz identidad de orden $2n \times 2n$.

Demostración. Como S es diagonalizable, entonces existen matrices P y A con A diagonal, tales que $S = PAP^{-1}$. Supongamos primero que los valores propios de S están en involución y calculemos $\{S_1, S_2\}$. Usando la regla de

Leibniz tenemos

$$
\begin{aligned}
\{S_1, S_2\} &= \{P_1A_1P_1^{-1}, P_2A_2P_2^{-1}\} \\
&= \{P_1A_1P_1^{-1}, P_2\}A_2P_2^{-1} + P_2\{P_1A_1P_1^{-1}, A_2P_2^{-1}\} \\
&= P_1\{A_1P_1^{-1}, P_2\}A_2P_2^{-1} + \{P_1, P_2\}A_1P_1^{-1}A_2P_2^{-1} + P_2\{P_1A_1P_1^{-1}, A_2P_2^{-1}\} \\
&= \{P_1, P_2\}A_1P_1^{-1}A_2P_2^{-1} + P_1\{A_1, P_2\}P_1^{-1}A_2P_2^{-1} + P_1A_1\{P_1^{-1}, P_2\}A_1P_2^{-1} \\
&+ P_2\{P_1A_1P_1^{-1}, A_2\}P_2^{-1} + P_2A_2\{P_1A_1P_1^{-1}, P_2^{-1}\} \\
&= \{P_1, P_2\}A_1P_1^{-1}A_2P_2^{-1} + P_1\{A_1, P_2\}P_1^{-1}A_2P_2^{-1} + P_1A_1\{P_1^{-1}, P_2\}A_1P_2^{-1} \\
&+ P_2\{P_1, A_2\}A_1P_1^{-1}P_2^{-1} + P_2P_1\{A_1P_1^{-1}, A_2\}P_2^{-1} + P_2A_2P_1A_1\{P_1^{-1}P_2^{-1}\} \\
&+ P_2A_2\{P_1A_1, P_2\}P_1^{-1} \\
&= \{P_1, P_2\}A_1P_1^{-1}A_2P_2^{-1} + P_1\{A_1, P_2\}P_1^{-1}A_2P_2^{-1} + P_1A_1\{P_1^{-1}, P_2\}A_1P_2^{-1} \\
&+ P_2\{P_1, A_2\}A_1P_1^{-1}P_2^{-1} + P_2P_1\{A_1, A_2\}P_1^{1}P_2^{-1} + P_2P_1A_1\{P_1^{-1}, A_2\}P_2^{-1} \\
&+ P_2A_2P_1A_1\{P_1^{-1}, P_2^{-1}\} + P_2A_2P_1\{A_1, P_2^{-1}\}P_1^{-1} + P_2A_2\{P_1, P_2^{-1}\}A_1P_1^{-1}
\end{aligned}
$$

Como los valores propios de S están en involución, entonces $\{A_1, A_2\} = 0$, ya que como sabemos A es diagonal y los elementos de su diagonal principal son los valores propios de S. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\{S_1, S_2\} &= \{P_1, P_2\}A_1P_1^{-1}A_2P_2^{-1} + P_1\{A_1, P_2\}P_1^{-1}A_2P_2^{-1} + P_1A_1\{P_1^{-1}, P_2\}A_1P_2^{-1} \\
&+ P_2\{P_1, A_2\}A_1P_1^{-1}P_2^{-1} + P_2P_1A_1\{P_1^{-1}, A_2\}P_2^{-1} + P_2A_2P_1A_1\{P_1^{-1}, P_2^{-1}\} \\
&+ P_2A_2P_1\{A_1, P_2^{-1}\}P_1^{-1} + P_2A_2\{P_1, P_2^{-1}\}A_1P_1^{-1}
\end{aligned}
$$

Consideremos los productos matriciales
$K_{12} = \{P_1, P_2\}P_1^{-1}P_2^{-1}$, $K_{21} = \{P_2, P_1\}P_2^{-1}P_1^{-1} = -K_{12}$,
$V_{12} = P_2\{P_1, A_2\}P_1^{-1}P_2^{-1}$, $V_{21} = P_1\{P_2, A_1\}P_2^{-1}P_1^{-1}$
Luego tenemos que

$$
\begin{aligned}
\{S_1, S_2\} &= K_{12}S_1S_2 + S_1S_2K_{12} - S_1K_{12}S_2 - S_2K_{12}S_1 - V_{21}S_2 + V_{12}S_1 - S_1V_{12} + S_2V_{21} \\
&= K_{12}S_2S_1 - S_1K_{12}S_2 + S_1S_2K_{12} - S_2K_{12}S_1 + V_{12}S_1 - S_1V_{12} - V_{21}S_2 + S_2V_{21} \\
&= \frac{1}{2}(K_{12}S_2S_1 - S_2K_{12}S_1 - S_1K_{12}S_2 + S_1S_2K_{12}) \\
&- \frac{1}{2}(K_{21}S_2S_1 - S_2K_{21}S_1 - S_1K_{21}S_2 + S_2S_1K_{21}) \\
&+ V_{12}S_1 - S_1V_{12} - V_{21}S_2 + S_2V_{21} \\
&= \frac{1}{2}[K_{12}S_2 - S_2K_{12}, S_1] - \frac{1}{2}[K_{21}S_1 - S_1K_{21}, S_2] + [V_{12}, S_1] - [V_{21}, S_2] \\
&= \frac{1}{2}[[K_{12}, S_2], S_1] - \frac{1}{2}[[K_{21}, S_1], S_2] + [V_{12}, S_1] - [V_{21}, S_2] \\
&= [V_{12} + \frac{1}{2}[K_{12}, S_2], S_1] - [V_{21} + \frac{1}{2}[K_{21}, S_1], S_2]
\end{aligned}
$$

Si tomamos $r_{12} = V_{12} + \frac{1}{2}[K_{12}, S_2]$ entonces $r_{21} = V_{21} + \frac{1}{2}[K_{21}, S_1]$ y

$$\{S_1, S_2\} = [r_{12}, S_1] - [r_{21}, S_2],$$

como deseábamos probar.

Ahora supongamos que existe r producto tensorial de matrices tal que

$$\{S_1, S_2\} = [r_{12}, S_1] - [r_{21}, S_2],$$

usando la regla de Leibniz notamos que

$$\{S_1^l, S_2^m\} = [a_{12}^{l,m}, S_1] + [b_{12}^{l,m}, S_2]$$

donde $a_{12}^{l,m} = \sum_{p=0}^{l-1}\sum_{q=0}^{m-1} S_1^{l-p-1} S_2^{m-q-1} r_{12} S_1^p S_2^q$

y $b_{12}^{l,m} = -\sum_{p=0}^{l-1}\sum_{q=0}^{m-1} S_1^{l-p-1} S_2^{m-q-1} r_{21} S_1^p S_2^q$.

Tomando traza en la ecuación $\{S_1^l, S_2^m\} = [a_{12}^{l,m}, S_1] + [b_{12}^{l,m}, S_2]$ obtenemos que las funciones del espacio fase $tr(S^l)$ están en involución, lo que es equivalente a que los valores propios de S estén en involución. Con esto finalizamos la demostración del teorema. $\square$

Finalizamos esta sección con algunos ejemplos. En el primer ejemplo tenemos una transformación canonoide para la cual el tensor de Nijenhuis del tensor S se anula, así que conseguimos n constantes de movimiento en involución. En el segundo y tercer ejemplo encontramos constantes de movimiento en involución incluso aunque el tensor de Nijenhuis no se anula.

Ejemplo 1: Consideremos el sistema Hamiltoniano con coordenadas canónicas (q^1, q^2, p_1, p_2) y función Hamiltoniana

$$H(q^1, q^2, p_1, p_2, t) = -5tq^1 + 3t^2q^2 + p_2 \sin t.$$

Se verifica fácilmente que la transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} Q^1 &= \tfrac{1}{2}(q^1)^2, \\ Q^2 &= p_2 + t^3 + \mathrm{e}^t, \\ P_1 &= p_1, \\ P_2 &= p_2(1 - q^2 - \cos t) - t^3q^2 - t^3\cos t - \mathrm{e}^t, \end{aligned}$$

es canonoide con nueva función Hamiltoniana

$$K = -5tQ^1 + (3t^2 + \mathrm{e}^t)Q^2 + \mathrm{e}^t P_2.$$

(Esto es, $\dot{Q}^i = \partial K/\partial P_i$ y $\dot{P}_i = -\partial K/\partial Q^i$.)

La matriz $S = (S^\alpha_\beta)$ está dada por

$$S = \begin{pmatrix} [q^1,p_1] & [q^2,p_1] & 0 & [p_2,p_1] \\ [q^1,p_2] & [q^2,p_2] & [p_1,p_2] & 0 \\ 0 & [q^1,q^2] & [q^1,p_1] & [q^1,p_2] \\ [q^2,q^1] & 0 & [q^2,p_1] & [q^2,p_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2+t^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_2+t^3 \end{pmatrix}$$

y los eigenvalores de S son

$$\lambda_1 = q^1 \qquad \text{and} \qquad \lambda_2 = p_2 + t^3.$$

Se puede verificar que el tensor de Nijuenhuis de S se anula, por lo tanto las funciones λ_1 y λ_2 son constantes de movimiento en involución, además se nota que son funcionalmente independientes, así que el sistema es integrable.

Ejemplo 2: Consideremos el sistema Hamiltoniano con coordenadas canónicas (q^1,q^2,p_1,p_2) y función Hamiltoniana

$$H(q^1,q^2,p_1,p_2,t) = (t^3-5t)p_1 + 3t^2p_2 - tq^1 - q^2\sin t.$$

Se verifica fácilmente que la transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} Q^1 &= q^2, \\ Q^2 &= p_2 - 2p_1 + t^2, \\ P_1 &= p_1(\tfrac{5}{2}t^2 - \tfrac{1}{4}t^4) + q^1(p_1 - \tfrac{1}{2}t^2) + (p_2+\cos t)^2 - q^2 + \tfrac{1}{8}t^6 - \tfrac{5}{4}t^4 + t^3 + \sin t^2, \\ P_2 &= -p_2 - \cos t - 4\mathrm{e}^t, \end{aligned}$$

es canonoide con nueva función Hamiltoniana

$$K(Q^1,Q^2,P_1,P_2,t) = 3t^2P_1 + P_2\sin t - 2tQ^1\cos t^2 + 4\mathrm{e}^tQ^2.$$

La matriz S es

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4 + q^1 & 0 & -2 \\ 0 & 2(p_2+\cos t) & 2 & 0 \\ 0 & -p_1 + \frac{1}{2}t^2 & 0 & 0 \\ p_1 - \frac{1}{2}t^2 & 0 & \frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4 + q^1 & 2(p_2+\cos t) \end{pmatrix}$$

y los eigenvalores de S son

$$\lambda_1 = p_2 + \cos t + \sqrt{(p_2+\cos t)^2 + t^2 - 2p_1}$$

and

$$\lambda_2 = p_2 + \cos t - \sqrt{(p_2+\cos t)^2 + t^2 - 2p_1},$$

así que $K_1 = 4(p_2 + \cos t)$ y $K_2 = 4t^2 - 8p_1 + 8(p_2 + \cos t)^2$. Se nota que estas funciones son constantes de movimiento funcionalmente independientes en involución. Sin embargo, ni el tensor de Nijenhuis de S ni el tensor de Haantjes de S se anulan, en efecto,

$$\begin{aligned} N^2_{12} &= S^\lambda_1 \partial_\lambda S^2_2 - S^\lambda_2 \partial_\lambda S^2_1 - S^2_\lambda \partial_1 S^\lambda_2 + S^2_\lambda \partial_2 S^\lambda_1 \\ &= S^4_1 \partial_4 S^2_2 - 0 - 0 + 0 \\ &= 2p_1 - t^2 \end{aligned}$$

y

$$(\mathcal{H}_S)^1_{13} = (2t^2 - 4p_1)(1 + 5t^2 - \frac{1}{2}t^4 + 2q^1).$$

La relación de recurrencia de Lenard tampoco se cumple: tenemos $\partial_1 K_2 = 0$, pero

$$S^\lambda_1 \partial_\lambda K_1 = S^4_1 \partial_4 K_1 = 4p_1 - 2t^2 \neq 0.$$

Ejemplo 3: Consideremos el sistema Hamiltoniano con coordenadas canónicas $(q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3)$ y función Hamiltoniana

$$H(q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3, t) = tp_1 + \tfrac{1}{3}{p_2}^3 - \mathrm{e}^t p_3 - 5q^2 - q^3 \sin t.$$

La transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} Q^1 &= p_2, \\ Q^2 &= {p_1}^2 + p_3, \\ Q^3 &= q^3 + \mathrm{e}^t - t^4. \\ P_1 &= p_1(p_2 - 5t)(q^2 - \tfrac{1}{15}{p_2}^3), \\ P_2 &= q^1 - p_3 - t^2 p_1 - \mathrm{e}^t - \cos t, \\ P_3 &= q^3(p_3 + \cos t + 1) + \mathrm{e}^t(p_3 + \cos t), \end{aligned}$$

es una transformación canonoide con nueva función Hamiltoniana

$$K(Q^1, Q^2, Q^3, P_1, P_2, P_3, t) = 5P_1 + P_2 \sin t - 4t^3 P_3 + \mathrm{e}^t Q^2 + \mathrm{e}^t Q^3.$$

La matriz (S^α_β) es

$$S = \begin{pmatrix} -2p_1 & 0 & 0 & 0 & (q^2 - \frac{1}{15}{p_2}^3)(p_2 - 5t) & 2p_1 - t^2 \\ 0 & p_1(5t - p_2) & 0 & (q^2 - \frac{1}{15}{p_2}^3)(5t - p_2) & 0 & 0 \\ -1 & 0 & q^3 + \mathrm{e}^t & t^2 - 2p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2p_1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_1(5t - p_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^3 + \mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

Los eigenvalores de S son

$$\lambda_1 = -2p_1, \quad \lambda_2 = p_1(5t - p_2), \quad \lambda_3 = q^3 + \mathrm{e}^t.$$

Se nota que al igual que en ejemplo anterior, estas funciones son constantes de movimiento funcionalmente independientes en involución. Sin embargo, el tensor de Nijenhuis de S no se anula, en efecto,

$$N^5_{45} = 2p_1(p_2 - 5t) - p_1(p_2 - 5t)^2.$$

Capítulo 2

El teorema de Lie

En este capítulo presentamos el trabajo reportado en [7], en el cual desarrollamos parte importante del trabajo de Lie, un resultado conocido como Teorema de Lie, y también una aplicación de este teorema a sistemas Hamiltonianos, finalmente extendemos estos resultados al caso dependiente del tiempo.

Definición 2.1. *Un álgebra de Lie sobre* $\mathbb{R}$ *es un espacio vectorial real* $\mathfrak{g}$ *equipado con un mapeo bilineal* $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ *llamado corchete de Lie, que satisface*
$[X, Y] = -[Y, X] \; \forall X, Y \in \mathfrak{g}$ *y*
$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \; \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Definición 2.2. *Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie.*

1. *Una subálgebra de Lie de* $\mathfrak{g}$ *es un subespacio vectorial* L *de* $\mathfrak{g}$ *tal que* $[X, Y] \in L$ $\forall X, Y \in L$.

2. *Un subespacio vectorial* I *de* $\mathfrak{g}$ *se llama ideal de* $\mathfrak{g}$ *si* $[X, Y] \in I \; \forall X \in I$ *y* $\forall Y \in \mathfrak{g}$. *Note que un ideal es una subálgebra de Lie.*

3. *Decimos que* $\mathfrak{g}$ *es un álgebra de Lie soluble si existe una sucesión finita de subálgebras de Lie de* $\mathfrak{g}$, $L_1, L_2, ..., L_n$ *con* $n = dim(\mathfrak{g})$, *tales que*

$$\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_{n-1} \subset L_n = \mathfrak{g}$$

y L_i *es un ideal de* L_{i+1} *de codimensión* 1 *para* $i = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Consideremos un sistema dinámico dado por la ecuación vectorial

$$\dot{x} = v(x),$$

con $x = (x^1, x^2, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n$ y v un campo vectorial diferenciable. Sea u una simetría de v, esto es $[u, v] = 0$, por el teorema de rectificación para campos vectoriales [3] tenemos que existen coordenadas $(y^1, ..., y^n)$ tales que

$$u = \frac{\partial}{\partial y^n},$$

luego las componentes $v^1, ..., v^n$ de $v = v^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ no dependen de y^n, esto es,

$$v^i = v^i(y^1, ..., y^{n-1}),$$

en efecto,

$$0 = [u, v] = [\frac{\partial}{\partial y^n}, v^i \frac{\partial}{\partial y^i}] = \frac{\partial v^i}{\partial y^n} \frac{\partial}{\partial y^i},$$

de aquí que $\frac{\partial v^i}{\partial y^n} = 0$ para $i = 1, 2, ..., n$. Luego la ecuación $\dot{x} = v(x)$ es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = v^1(y^1, y^2, ..., y^{n-1}) \\ \vdots \\ \dot{y}^{n-1} = v^{n-1}(y^1, y^2, ..., y^{n-1}) \\ \dot{y}^n = v^n(y^1, y^2, ..., y^{n-1}) \end{cases}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones debemos resolver el sistema de $n-1$ ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = v^1(y^1, y^2, ..., y^{n-1}) \\ \vdots \\ \dot{y}^{n-1} = v^{n-1}(y^1, y^2, ..., y^{n-1}) \end{cases}$$

e integrar la ecuación $\dot{y}^n = v^n(y^1, y^2, ..., y^{n-1})$. Note que si podemos repetir este proceso, tendríamos que resolver un sistema de $n-2$ ecuaciones e integrar 2 ecuaciones. Esto es posible si tenemos otra simetría de v, digamos w, tal que $[w, u] = \lambda u$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ no nula, en efecto, primero veamos que las componentes $w^1, w^2, \cdots w^{n-1}$ de $w = w^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ no dependen de y^n.

$$\begin{aligned} \lambda u = [w, u] \quad &\Longrightarrow \quad \lambda \frac{\partial}{\partial y^n} = [w^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^n}] \\ &\Longrightarrow \quad \lambda \frac{\partial}{\partial y^n} = -\frac{\partial w^i}{\partial y^n} \frac{\partial}{\partial y^i} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{\partial w^i}{\partial y^n} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n-1\} \end{aligned}$$

Luego el campo vectorial $w' = w^1 \frac{\partial}{\partial y^1} + \cdots + w^{n-1} \frac{\partial}{\partial y^{n-1}}$ es una simetría del campo vectorial $v' = v^1 \frac{\partial}{\partial y^1} + \cdots + v^{n-1} \frac{\partial}{\partial y^{n-1}}$ y entonces para resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = v^1(y^1, y^2, ..., y^{n-1}) \\ \vdots \\ \dot{y}^{n-1} = v^{n-1}(y^1, y^2, ..., y^{n-1}) \end{cases}$$

debemos resolver un sistema de $n-2$ ecuaciones e integrar una ecuación, es decir, hemos reducido el sistema original de n ecuaciones a resolver un sistema de $n-2$ ecuaciones e integrar dos ecuaciones. Es deseable poder continuar este proceso hasta el punto de resolver el sistema de ecuaciones original solo integrando n ecuaciones.

El siguiente teorema, conocido como Teorema de Lie [26], establece una condición suficiente para realizar el proceso de reducción de orden de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Teorema 2.1. *Consideremos un sistema dinámico en* $\mathbb{R}^n$ *como antes, dado por la ecuación vectorial* $\dot{x} = v(x)$. *Sean* $u_1, u_2, ..., u_n$ *campos vectoriales linealmente independientes que son simetrías del campo vectorial* v. *Si* $u_1, u_2, ..., u_n$ *generan un álgebra de Lie soluble con el corchete de Lie* $[,]$ *de campos vectoriales, entonces el sistema se puede resolver por cuadraturas.*

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie generada por $u_1, u_2, ..., u_n$, luego como $\mathfrak{g}$ es soluble, existen $L_1, L_2, ..., L_n$ subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$ tales que

$$\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_{n-1} \subset L_n = \mathfrak{g}$$

y L_i es un ideal de L_{i+1} de codimensión 1 para $i = 0, 1, 2, ..., n-1$. Así que existen campos vectoriales $w_1, w_2, ..., w_n$ tales que

$L_1 = \langle w_1 \rangle$,

$L_2 = \langle w_1, w_2 \rangle$,

$\vdots$

$L_{n-1} = \langle w_1, w_2, ..., w_{n-1} \rangle$

$L_n = \langle w_1, w_2, ..., w_n \rangle = \langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle = \mathfrak{g}$,

donde $\langle w_1, w_2, ..., w_k \rangle$ es el subespacio vectorial generado por el subconjunto $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$ de $\mathfrak{g}$, y

$[w_1, w_j] = \lambda^1_{1j} w_1$,

$[w_2, w_j] = \lambda^1_{2j} w_1 + \lambda^2_{2j} w_2$

$\vdots$

$[w_{n-1}, w_j] = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^i_{n-1j} w_i$

$[w_n, w_j] = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i_{nj} w_i$.

Además, $[w_i, v] = 0$ para $i = 1, 2, ..., n$, es decir, $w_1, w_2, ..., w_n$ son simetrías de

v. Con estas simetrías podemos reducir el orden del sistema de ecuaciones ordinarias equivalente a la ecuación vectorial $\dot{x} = v(x)$ hasta el punto de encontrar la solución solo integrando n ecuaciones. $\square$

Si tenemos un sistema dinámico dado por una ecuación vectorial $\dot{x} = v(x)$, resulta indispensable encontrar una cantidad adecuada de simetrías del campo vectorial v. En el caso de un sistema Hamiltoniano autónomo (M, ω, H), el conjunto de ecuaciones de movimiento de Hamilton es equivalente a la ecuación vectorial

$$\dot{x} = X_H(x),$$

donde X_H es el campo vectorial tal que

$$X_H \lrcorner \omega = -dH,$$

así que para resolver las ecuaciones de movimiento de este sistema necesitamos encontrar una cantidad suficiente de simetrías del campo vectorial X_H. Se tiene que si f es una constante de movimiento del sistema Hamiltoniano (M, ω, H) entonces el campo vectorial X_f tal que

$$X_f \lrcorner \omega = -df,$$

es una simetría de X_H (ver [38]). En efecto, del hecho de que la forma diferencial ω sea no degenerada se tiene que $[X_{f_1}, X_{f_2}] = X_{\{f_2, f_1\}}$, en particular

$$[X_H, X_f] = X_{\{f,H\}}$$

pero como f es constante de movimiento que no depende explícitamente del tiempo, esto es, $\{f, H\} = 0$, se tiene que $X_{\{f,H\}} = 0$, por lo tanto $[X_H, X_f] = 0$.

El siguiente resultado, conocido como teorema de Kozlov (ver [26, 4]), se tiene como consecuencia del resultado presentado arriba y el teorema de Lie.

Teorema 2.2. *Sea (M, ω, H) un sistema Hamiltoniano con M de dimensión $2n$. Si se tienen n constantes de movimiento $f_1, f_2, ..., f_n$ tales que*

1. $\{f_i, f_j\} = c_{ij}^k f_k$, *con* $c_{ij}^k \in \mathbb{R}$,

2. *el álgebra de Lie generada por $f_1, f_2, ..., f_n$ es un álgebra de Lie soluble bajo el corchete de Lie definido por el paréntesis de Poisson,*

3. *en el conjunto $M_f = \{x \in M : f_i(x) = \alpha_i, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ las funciones $f_1, f_2, ..., f_n$ son independientes y*

4. $c_{ij}^k \alpha_k = 0$ *para todo* $i, j = 1, 2, ..., n$,

entonces M_f es una subvariedad de M de dimension n y las soluciones de las ecuaciones de Hamilton que viven en M_f pueden ser encontradas por cuadraturas.

Demostración. El hecho de que el conjunto M_f es una subvariedad de M de dimensión n, es consecuencia de la independencia funcional de las funciones $f_1, f_2, ..., f_n$ (ver [28]: Regular level set theorem).

Los campos vectoriales $X_{f_1}, X_{f_2}, ..., X_{f_n}$ son simetrías del campo vectorial Hamiltoniano X_H y forman un álgebra de Lie soluble bajo el corchete de Lie de campos vectoriales, ya que la aplicación $f \longmapsto X_f$ es un homomorfismo de álgebras de Lie ($[X_f, X_g] = X_{\{g,f\}}$), así que

$$[X_H, X_{f_i}] = X_{\{f_i,H\}} = 0.$$

Además los campos vectoriales $X_{f_1}, X_{f_2}, ..., X_{f_n}$ son tangentes a la subvariedad M_f, en efecto, $X_{f_i}(f_j) = \{f_j, f_i\}$, así que en M_f se tiene $X_{f_i}(f_j) = 0$. Evidentemente el campo vectorial X_H también es tangente a la subvariedad M_f, ya que $X_H(f_i) = 0$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Luego las soluciones de las ecuaciones de Hamilton que viven en M_f son soluciones de la ecuación vectorial $\dot{x} = X_H(x)$ en M_f, la cual es equivalente a un sistema de $n = dim(M_f)$ ecuaciones, y como los campos vectoriales $X_{f_1}, X_{f_2}, ..., X_{f_n}$ son simetrías del campo vectorial Hamiltoniano X_H y forman un álgebra de Lie soluble bajo el corchete de Lie de campos vectoriales, entonces aplicando el teorema de Lie tenemos que tales soluciones pueden ser encontradas por cuadraturas. □

El teorema de Kozlov puede ser extendido a sistemas Hamiltonianos no autónomos. Primero notemos que el teorema de Lie puede ser extendido de la siguiente manera, consideremos un sistema dinámico dado por la ecuación vectorial $\dot{x} = v(x,t)$ con $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ y v un campo vectorial dependiente del tiempo en $\mathbb{R}^n$. La ecuación vectorial $\dot{x} = v(x,t)$ es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = v^1(x^1, x^2, \cdots, x^n, t) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dot{x}^n = v^n(x^1, x^2, \cdots, x^n, t) \end{cases}$$

Si tenemos un campo vectorial dependiente del tiempo u en $\mathbb{R}^n$ de la forma

$$u = u^1(x,t)\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots , u^n(x,t)\frac{\partial}{\partial x^n}$$

y u es simetría de v, entonces usando el teorema de rectificación para campos vectoriales y siguiendo los mismos pasos desarrollados anteriormente que nos permitieron demostrar el teorema de Lie original, podemos reducir el orden del sistema de ecuaciones anterior de tal manera que éste sea equivalente a un sistema de $n-1$ ecuaciones y una ecuación que se puede integrar. Así tenemos la siguiente extensión del teorema de Lie, cuya demostración sigue de manera análoga a la demostración del teorema de Lie original.

Teorema 2.3. *Sea v un campo vectorial dependiente del tiempo en $\mathbb{R}^n$. Consideremos el sistema dinámico en $\mathbb{R}^n$ definido por la ecuación vectorial $\dot{x} = v(x,t)$. Sean $u_1, u_2, ..., u_n$ campos vectoriales posiblemente dependientes del tiempo en $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes que son simetrías del campo vectorial v. Si $u_1, u_2, ..., u_n$ generan un álgebra de Lie soluble bajo el corchete de Lie $[,]$ de campos vectoriales, entonces el sistema se puede resolver por cuadraturas.*

Ahora presentamos la extensión del teorema de Kozlov.

Teorema 2.4. *Sea $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$ un sistema Hamiltoniano con $\Omega = dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt$ y $H \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$. Si tenemos n constantes de movimiento $f_1, f_2, ..., f_n$ tales que*

1. *$\{f_i, f_j\} = c_{ij}^k f_k$, con $c_{ij}^k \in \mathbb{R}$,*

2. *el álgebra de Lie generada por $f_1, f_2, ..., f_n$ es un álgebra de Lie soluble bajo el corchete de Lie definido por el paréntesis de Poisson,*

3. *en el conjunto $(M \times \mathbb{R})_f = \{(x,t) \in M \times \mathbb{R} : f_i(x,t) = \alpha_i, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ las funciones $f_1, f_2, ..., f_n$ son funcionalmente independientes y,*

4. *$c_{ij}^k \alpha_k = 0$ para todo $i, j = 1, 2, ..., n$,*

entonces $(M \times \mathbb{R})_f$ es una subvariedad de M de dimensión $n+1$, y las soluciones de las ecuaciones de Hamilton que viven en $(M \times \mathbb{R})_f$ pueden ser encontradas por cuadraturas.

Antes de presentar la demostración de este teorema, presentamos un lema que usaremos más adelante.

Lema 2.1. *Sea $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$ un sistema Hamiltoniano con M de dimensión $2n$. Si $f_1, f_2, ..., f_k : M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son constantes de movimiento funcionalmente independientes, entonces*

$$(M \times \mathbb{R})_f = \{(x,t) \in M : f_i(x,t) = \alpha_i, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

es una subvariedad de $M \times \mathbb{R}$ de dimensión $2n+1-k$. Además alrededor de cada punto en $(M \times \mathbb{R})_f$ podemos encontrar coordenadas locales $(y^1, ..., y^{2n-k}, t)$.

Demostración. Sea $(x_0, t_0) \in (M \times \mathbb{R})_f$, esto es, $f_i(x_0, t_0) = \alpha_i$ para $i = 1, 2, ..., k$. Sea (U, ϕ) una carta coordenada en M tal que $x_0 \in \phi(U)$ y las coordenadas $(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$ en $\phi(U) \subset M$ son coordenadas canónicas. Sea t la coordenada global en $\mathbb{R}$.

Como las funciones $f_1, ..., f_k$ son funcionalmente independientes entonces la matriz

$$Df(x_0,t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q^1}(x_0,t_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q^n}(x_0,t_0) & \frac{\partial f_1}{\partial p_1}(x_0,t_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial p_n}(x_0,t_0) & \frac{\partial f_1}{\partial t}(x_0,t_0) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial q^1}(x_0,t_0) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial q^n}(x_0,t_0) & \frac{\partial f_k}{\partial p_1}(x_0,t_0) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial p_n}(x_0,t_0) & \frac{\partial f_k}{\partial t}(x_0,t_0) \end{pmatrix}$$

tiene rango k, es decir, tiene k columnas linealmente independientes. Se nota que dichas columnas están entre las $2n$ primeras, en efecto, como cada f_j es una constante de movimiento, entonces $\frac{df_j}{dt} = 0$, esto es, $\{f_j, H\} + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0$, de donde tenemos que

$$\frac{\partial f_j}{\partial t}(x_0, t_0) = \{H, f_j\}(x_0, t_0) = \frac{\partial H}{\partial q^i}(x_0, t_0)\frac{\partial f_j}{\partial p_i}(x_0, t_0) - \frac{\partial H}{\partial p_i}(x_0, t_0)\frac{\partial f_j}{\partial q^i}(x_0, t_0)$$

es decir, la última columna de la matriz $Df(x_0, t_0)$ es combinación lineal de las otras columnas, así que la última columna no forma parte de un conjunto de k columnas de $Df(x_0, t_0)$ que son linealmente independientes.

Sean $x^1, ..., x^k \in \{q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n\}$ tales que las columnas $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(x_0, t_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^1}(x_0, t_0) \end{pmatrix}, \; ..., \; \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^k}(x_0, t_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^k}(x_0, t_0) \end{pmatrix}$ son linealmente independientes. Así que la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(x_0, t_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^k}(x_0, t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^1}(x_0, t_0) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x^k}(x_0, t_0) \end{pmatrix}$$

es no singular, luego por el teorema de la función implícita [28] (posiblemente es necesario hacer un reacomodo de las coordenadas y colocar las x_j al final de $(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$) tenemos que existe un abierto $U_0 \subseteq \mathbb{R}^{2n-k}$, un abierto $W_0 \subseteq \mathbb{R}^k$ y una función $g : U_0 \times \mathbb{R} \longrightarrow W_0$ tales que

$$\phi^{-1}(x_0) \in U_0 \times W_0 \subseteq U$$

y en $(M \times \mathbb{R})_f \cap \phi(U_0 \times W_0) \times \mathbb{R}$ se tiene que $x = g(y, t)$, donde $x = (x^1, ..., x^k)$ y $y = (y^1, ..., y^{2n-k})$ son tales que $(y^1, ..., y^{2n-k}, x^1, ..., x^k) = (q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$. Así que tenemos una carta coordenada $(U_0 \times \mathbb{R}, \varphi)$ en $(M \times \mathbb{R})_f$ con $(x_0, t_0) \in \varphi(U_0 \times \mathbb{R})$ definida por

$$\varphi(y^1, ..., y^{2n-k}, t) = (\phi(y^1, ..., y^{2n-k}, g(y^1, ..., y^{2n-k}, t)), t).$$

□

Veamos ahora la demostración del teorema 2.4.

Demostración. El hecho de que M_f es una subvariedad de M de dimensión $n+1$ se tiene como consecuencia de la independencia de las funciones $f_1, f_2, ..., f_n$. Además por el lema anterior, alrededor de cualquier punto en M_f tenemos coordenadas $(y^1, ...y^n, t)$.

Sabemos que si f es una constante de movimiento, entonces existe un campo vectorial X_f tal que $X_f \lrcorner \Omega = -df$, de hecho si $(q^1, q^2, ..., q^n, p_1, p_2, ..., p_n, t)$ son coordenadas canónicas en $M \times \mathbb{R}$ entonces

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} + CX_H,$$

donde C es una función diferenciable arbitraria(ver [38]). Podemos tomar $C = 0$, esto es $X_f(t) = 0$, luego tenemos

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

En adelante, si f es una constante de movimiento consideraremos el campo vectorial X_f, como el campo vectorial tal que $X_f \lrcorner \Omega = -df$ y $X_f(t) = 0$. Veamos que X_f es una simetría de X_H, en efecto

$$\begin{aligned}
[X_H, X_f] &= [\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{\partial f}{\partial q^k}\frac{\partial}{\partial p_k}] \\
&= \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial p_k}\frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial q^k}\frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_k}\frac{\partial}{\partial q^k} + \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial q^k}\frac{\partial}{\partial p_k} \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial p_k}\frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q^k}\frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial q^k \partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial q^k \partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} \\
&+ \frac{\partial f}{\partial q^k}\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^k}\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} \\
&= \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial^2 f}{\partial q^k \partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q^k}\frac{\partial^2 f}{\partial p_k \partial p_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial q^k \partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial q^k}\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_i}\right)\frac{\partial}{\partial q^i} \\
&+ \left(\frac{\partial H}{\partial q^k}\frac{\partial^2 f}{\partial p_k \partial q^i} + \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial q^k \partial q^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^k}\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial^2 f}{\partial q^k \partial q^i}\right)\frac{\partial}{\partial p_i} \\
&= \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f}{\partial q^k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial q^k}\frac{\partial f}{\partial p_k} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial f}{\partial q^k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial q^k}\frac{\partial f}{\partial p_k} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial p_i} \\
&= \frac{\partial(\{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t})}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial(\{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t})}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} \\
&= X_{\{f,H\}+\frac{\partial f}{\partial t}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

En el desarrollo anterior es posible considerar el campo vectorial $X_{\{f,H\}+\frac{\partial f}{\partial t}}$, ya que $\{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$ es una constante de movimiento, de hecho es una constante trivial, $\{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

De manera análoga se tiene que si g es otra constante de movimiento entonces

$$[X_f, X_g] = X_{\{g,f\}}.$$

Notemos que es posible considerar el campo vectorial $X_{\{g,f\}}$ ya que como f y g son constantes de movimiento, entonces $\{g, f\}$ también es una constante de movimiento.

Así que de la misma manera que en la demostración del teorema de Kozlov, tenemos que los campos vectoriales $X_{f_1}, X_{f_2}, ..., X_{f_n}$ son simetrías del campo vectorial Hamiltoniano X_H y forman un álgebra de Lie soluble bajo el corchete de Lie de campos vectoriales, nuevamente ya que la aplicación $f \longmapsto X_f$ es un homomorfismo de álgebras de Lie ($[X_f, X_g] = X_{\{g,f\}}$). Además los campos vectoriales $X_{f_1}, X_{f_2}, ..., X_{f_n}$ son tangentes a la subvariedad M_f, en efecto, $X_{f_i}(f_j) = \{f_j, f_i\}$, así que en M_f se tiene $X_{f_i}(f_j) = 0$. Evidentemente el campo vectorial X_H también es tangente a la subvariedad M_f, ya que $X_H(f_i) = 0$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Luego las soluciones de las ecuaciones de Hamilton que viven en M_f son soluciones de la ecuación vectorial $\dot{y} = X_H(y, t)$ en M_f, la cual es equivalente a un sistema de n ecuaciones, y como los campos vectoriales $X_{f_1}, X_{f_2}, ..., X_{f_n}$ son simetrías del campo vectorial Hamiltoniano X_H y forman un álgebra de Lie soluble bajo el corchete de Lie de campos vectoriales, entonces aplicando la extensión del teorema de Lie tenemos que tales soluciones pueden ser encontradas por cuadraturas. $\square$

Capítulo 3

El mapeo de momento

El mapeo de momento juega un papel importante en el estudio de los sistemas Hamiltonianos, este generaliza los clásicos momento lineal y momento angular, además lleva consigo las leyes asociadas a la simetría de un sistema Hamiltoniano. Este concepto aparece cuando sobre una variedad simpléctica se tiene la acción de un grupo de Lie que preserva la estructura simpléctica. A continuación presentamos una breve introducción al mapeo de momento.

Sea M una variedad diferenciable y G un grupo de Lie. Se dice que G actúa por la derecha en M si para cada $g \in G$ está asociado un mapeo R_g de M en M tal que

$$(p \cdot g_1) \cdot g_2 = p \cdot (g_1 g_2)$$

para todo $g_1, g_2 \in G$, donde $p \cdot g$ denota la imagen de $p \in M$ por tal transformación. Se dice que la acción de G sobre M es diferenciable (smooth), si el mapeo $R : G \times M \longrightarrow M$ definido por $R(g, p) = R_g(p)$ es un mapeo diferenciable.

Suponga que se tiene una acción diferenciable de G sobre M, sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G. Cada $X \in \mathfrak{g}$ define un campo vectorial X^+ en M dado por

$$(X^+ f)(p) = \frac{d}{ds} f(p \cdot e^{sX})|_{s=0}$$

para toda $f \in C^\infty(M)$. Aquí $e^X \in G$ denota la exponencial de X.

Si se tiene una estructura simpléctica ω sobre M, se dice que la acción de G sobre M es Hamiltoniana o simpléctica si para cada $g \in G$ el mapeo R_g es un simplectomorfismo, es decir, R_g es un difeomorfismo y

$$R_g^* \omega = \omega.$$

Note que

$$L_{X^+}\omega = \frac{d}{ds}R^*_{e^{sX}}\omega|_{s=0},$$

además por la fórmula de Cartan tenemos

$$L_{X^+}\omega = d(X^+ \lrcorner \omega) + X^+ \lrcorner d\omega = d(X^+ \lrcorner \omega),$$

esto es,

$$d(X^+ \lrcorner \omega) = \frac{d}{ds}R^*_{e^{sX}}\omega|_{s=0},$$

por lo tanto si la acción de G sobre M es simpléctica entonces para cada $X \in \mathfrak{g}$ existe una función $\mu_X \in C^\infty(M)$ tal que

$$X^+ \lrcorner \omega = -d\mu_X.$$

Así que si la acción de G sobre M es simpléctica entonces para cada $p \in M$ existe un elemento en $\mathfrak{g}^*$ denotado por $\Psi(p)$ tal que

$$\Psi(p)X = \mu_X(p).$$

El mapeo $\Psi : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ se llama mapeo de momento. Para más detalles ver [38].

Si se tiene una función Hamiltoniana H invariante por la acción de G sobre M, entonces las funciones μ_X son constantes de movimiento del sistema Hamiltoniano (M, ω, H). En efecto, el hecho de que la función Hamiltoniana sea invariante por la acción simpléctica de G en M significa que $R^*_g H = H$ para cada $g \in G$, luego tenemos

$$\begin{aligned}\{\mu_X, H\} &= X^+(H)\\ &= \frac{d}{ds}R^*_{e^{sX}}H|_{s=0}\\ &= \frac{d}{ds}H|_{s=0}\\ &= 0,\end{aligned}$$

lo cual nos dice que para cada $X \in \mathfrak{g}$, la función μ_X es una constante de movimiento.

Durante nuestra investigación encontramos que, tal y como se nota en el resumen anterior, el concepto de mapeo de momento y todas sus consecuencias están restringidas a sistemas Hamiltonianos autónomos, por lo que nos tomamos la tarea de extender esta teoría a sistemas Hamiltonianos no autónomos. A continuación presentamos el trabajo desarrollado.

Sea $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$ un sistema Hamiltoniano con M una variedad diferenciable de dimension $2n$. Sea G un grupo de Lie que actúa por la derecha sobre $M \times \mathbb{R}$ y sea $R_g : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R}$ la transformación asociada a dicha acción.

Supongamos que la acción de G sobre $M \times \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces cada $X \in \mathfrak{g}$ define un campo vectorial X^+ en $M \times \mathbb{R}$ por

$$(X^+ f)(p,t) = \frac{d}{ds} f(R_{e^{sX}}(p,t))|_{s=0}.$$

Decimos que la acción de G sobre $M \times \mathbb{R}$ es Hamiltoniana si para cada $g \in G$ se tiene que el mapeo R_g es un difeomorfismo y Ω es invariante por dicha acción, es decir,

$$R_g^* \Omega = \Omega.$$

Se nota que igual que en caso autónomo, si la acción de G sobre $M \times \mathbb{R}$ es Hamiltoniana entonces para cada $X \in \mathfrak{g}$ existe $\mu_X \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ tal que

$$X^+ \lrcorner \Omega = -d\mu_X.$$

Como vimos anteriormente, en el caso autónomo se tiene que si la Hamiltoniana H es invariante bajo la acción de G, entonces para cada $X \in \mathfrak{g}$, la función μ_X es una constante de movimiento. En el caso no autónomo, el hecho de que la acción sea Hamiltoniana es suficiente para que las funciones μ_X sean constantes de movimiento, en efecto, como $X^+ \lrcorner \Omega = -d\mu_X$ entonces μ_X es una constante de movimiento posiblemente dependiente explícitamente del tiempo [38].

Definición 3.1. *Si la acción de G en $M \times \mathbb{R}$ es Hamiltoniana, entonces para cada $(p,t) \in M \times \mathbb{R}$ existe un elemento en $\mathfrak{g}^*$, denotado por $\Psi(p,t)$, tal que*

$$\Psi(p,t)X = \mu_X(p,t).$$

El mapeo $\Psi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ se llama mapeo de momento dependiente del tiempo.

El mapeo de momento conecta dos variedades, a saber, $M \times \mathbb{R}$ y $\mathfrak{g}^*$. Sobre $M \times \mathbb{R}$ tenemos la acción Hamiltoniana de G y sobre $\mathfrak{g}^*$ tenemos la acción coadjunta de G, esta última está definida para cada $g \in G$, $Ad_g^* : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, por $(Ad_g^* l)X = l(Ad_g X)$, con $l \in \mathfrak{g}^*$ y donde $Ad_g X$ denota la imagen de X por la acción adjunta de G en $\mathfrak{g}$, esta es el homomorfismo derivado de la conjugación por g en G, esto es, $e^{Ad_g X} = g e^X g^{-1}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ (ver [18] capítulo 12). Nos preguntamos si $Ad_g^* \circ \Psi = \Psi \circ R_g$. En caso afirmativo, es decir, si $Ad_g^* \circ \Psi = \Psi \circ R_g$ se dice que el mapeo de momento es equivariante. Tenemos que

$$\begin{aligned}
(Ad_g^* \Psi(p,t))(X) &= \Psi(p,t)(Ad_g X) \\
&= \mu_{Ad_g X}(p,t),
\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} ((\Psi \circ R_g)(p,t))(X) &= \Psi(R_g(p,t))(X) \\ &= \mu_X(R_g(p,t)) \\ &= (R_g^*\mu_X)(p,t). \end{aligned}$$

Así que la condición $Ad_g^* \circ \Psi = \Psi \circ R_g$ es equivalente a $\mu_{Ad_g X} = R_g^*\mu_X$. De manera análoga al caso autónomo se tiene que $\mu_{Ad_g X}$ y $R_g^*\mu_X$ difieren por una constante $c(g,X) \in \mathbb{R}$, en efecto, primero notemos que $(Ad_g X)^+ = R_g^* X^+$,

$$\begin{aligned} (Ad_g X)^+(f)(p,t) &= \frac{d}{ds} f(R_{e^{sAd_g X}}(p,t))|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} f(R_{ge^{sX}g^{-1}}(p,t))|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} f(R_{g^{-1}}(R_{ge^{sX}}(p,t)))|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds}(R_{g^{-1}}^* f)(R_{e^{sX}}(R_g(p,t)))|_{s=0} \\ &= X^+(R_{g^{-1}}^* f)(R_g(p,t)) \\ &= R_g^* X^+(f)(p,t). \end{aligned}$$

En la tercera línea usamos que $R_{g_1 g_2} = R_{g_2} \circ R_{g_1}$ para todo $g_1, g_2 \in G$. Ahora, sabemos que $-d\mu_{Ad_g X} = (Ad_g X) \lrcorner \Omega$, así que

$$-d\mu_{Ad_g X} = (R_g^* X^+) \lrcorner \Omega$$

Por otro lado $-d\mu_X = X^+ \lrcorner \Omega$ y además sabemos que $R_g^*(-d\mu_X) = -d(R_g^*\mu_X)$, así que

$$-d(R_g^*\mu_X) = (R_g^* X^+) \lrcorner \Omega$$

por lo tanto

$$-d\mu_{Ad_g X} = -d(R_g^*\mu_X)$$

esto es

$$d(\mu_{Ad_g X} - R_g^*\mu_X) = 0$$

así que $\mu_{Ad_g X}$ y $R_g^*\mu_X$ difieren por una constante $c(g,X) \in \mathbb{R}$.

Si tenemos una acción de un grupo de Lie G sobre la variedad M dada por $p \mapsto p \cdot g$, podemos definir una acción del grupo G sobre $M \times \mathbb{R}$ por

$$R_g(p,t) = (p \cdot g, t);$$

si esta acción es Hamiltoniana entonces tenemos el siguiente resultado análogo al del caso autónomo.

Teorema 3.1. *El mapeo de momento Ψ es equivariante si y solo si $\{\mu_X, \mu_Y\} = \mu_{[Y,X]}$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.*

Note que es posible definir $\{\mu_X, \mu_Y\}$ ya que μ_X y μ_Y son constantes de movimiento. Como vimos en el capítulo anterior $\{\mu_X, \mu_Y\} = X_{\mu_Y}\mu_X$, donde X_{μ_Y} es el campo vectorial tal que $X_{\mu_Y} \lrcorner \Omega = -d\mu_Y$ y $X_{\mu_Y}(t) = 0$. Se nota que $X_{\mu_Y} = Y^+$, en efecto, solo queda verificar que $Y^+(t) = 0$, veamos

$$Y^+(t)(p,t) = \frac{d}{ds}t(p \cdot e^{sX}, t)|_{s=0} = \frac{d}{ds}t|_{s=0} = 0$$

Así que $\{\mu_X, \mu_Y\} = Y^+\mu_X = -X^+\mu_y$.

Ahora veamos la demostración del teorema.

Demostración. Tenemos que el mapeo de momento es equivariante si y solo si $R_g^*\mu_X = \mu_{Ad_g X}$ para todo $g \in G$ y para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Sea $Y \in \mathfrak{g}$ y consideremos $g = e^{sY} \in G$. Luego

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}R^*_{e^{sy}}\mu_X(p,t)|_{s=0} &= \frac{d}{ds}\mu_X(p \cdot e^{sY}, t)|_{s=0} \\ &= Y^+\mu_X(p,t) \\ &= \{\mu_X, \mu_Y\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\mu_{Ad_{e^{sY}}X}(p,t)|_{s=0} &= \mu_{\frac{d}{ds}Ad_{e^{sY}}X|_{s=0}}(p,t) \\ &= \mu_{[Y,X]}(p,t) \end{aligned}$$

Arriba usamos que $\frac{d}{ds}Ad_{e^{sY}}X|_{s=0} = [Y, X]$ (ver [18] capítulo 12).

Así que se tiene que $R_g^*\mu_X = \mu_{Ad_g X}$ para todo $g \in G$ y para todo $X \in \mathfrak{g}$, es equivalente a $\{\mu_X, \mu_Y\} = \mu_{[Y,X]}$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Por lo tanto se tiene el resultado del teorema. □

Definición 3.2. *Si la acción de G sobre $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$ es Hamiltoniana y H es invariante por dicha acción, decimos que G es una simetría del sistema Hamiltoniano $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$.*

Se sabe que la existencia de constantes de movimiento en involución de un sistema Hamiltoniano da cabida a la reducción del número de grados de libertad de sistema, para ser específicos, si se tienen k constantes de movimiento en involución de un sistema Hamiltoniano con n grados de libertad, entonces es posible reducir las ecuaciones de movimiento de Hamilton a un sistema de ecuaciones de Hamilton en $n-k$ variables

[3, 21, 32, 36]. El concepto de simetría está relacionado con el hecho de simplificar un problema, el hecho de tener una simetría en un problema físico da cabida a una posible simplificación o reducción del problema. En la mecánica Hamiltoniana el objeto matemático usado para representar una simetría es un grupo de Lie. Se ha mostrado que si se tiene un grupo de Lie, simetría de un sistema Hamiltoniano autónomo, entonces la parte interesante de la dinámica del sistema corresponde a un sistema Hamiltoniano más pequeño, el cual se obtiene mediante un proceso llamado reducción Hamiltoniana o reducción simpléctica [18], este procedimiento desarrollado por Marsden y Weinstein [30] nos permite reducir la dinámica del sistema a un sistema Hamiltoniano con menos grados de libertad. Este procedimiento sigue el siguiente esquema: Considere una variedad simpléctica (M, ω) y un grupo de Lie G que actúa en M por la derecha, la existencia de un mapeo de momento equivariante para dicha acción, con la función hamiltoniana invariante bajo tal acción, permite la reducción del sistema a un sistema Hamiltoniano con espacio fase igual al espacio de órbitas de la acción (una variedad cociente) (para detalles vea [1, 9, 18, 30]). En lo que resta de este capítulo abordamos el problema de la reducción Hamiltoniana para sistemas Hamiltonianos no autónomos.

Sea $\{e_i\}$ una base de $\mathfrak{g}$, denotamos por $\{e^i\}$ la base dual de $\mathfrak{g}^*$, es decir, $e^i(e_j) = \delta^i_j$. Luego $l \in \mathfrak{g}^*$ se escribe como $l = l_i e^i$, así que escribimos

$$\Psi = \Psi_i e^i$$

con $\Psi_i \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$, se tiene que $\Psi_i = \mu_{e_i}$, por lo tanto Ψ_i es una constante de movimiento para cada i.

Para $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ fijo, consideremos el conjunto

$$(M \times \mathbb{R})_\alpha = \{(p,t) \in M \times \mathbb{R} : \Psi(p,t) = \alpha\}.$$

Se tiene que $(M \times \mathbb{R})_\alpha$ es una subvariedad diferenciable de $M \times \mathbb{R}$ de dimensión $2n + 1 - dim(G)$; en efecto, si escribimos $\alpha = \alpha_i e^i$ con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ entonces

$$(M \times \mathbb{R})_\alpha = \{(p,t) \in M \times \mathbb{R} : \mu_{e_i}(p,t) = \alpha_i\},$$

luego $(M \times \mathbb{R})_\alpha$ es una subvariedad diferenciable de $M \times \mathbb{R}$ de dimensión $2n + 1 - dim(\mathfrak{g}) = 2n + 1 - dim(G)$.

En lo que resta de este capítulo, supondremos que el mapeo de momento es equivariante, es decir $\mu_{Ad_g X} = R_g^* \mu_X$ para cada $g \in G$ y cada $X \in \mathfrak{g}$. Luego para cada $g \in G$ se tiene que $R_g((M \times \mathbb{R})_\alpha) = (M \times \mathbb{R})_{Ad_g^* \alpha}$, en efecto, para cada $x \in (M \times \mathbb{R})_\alpha$ y para todo $X \in \mathfrak{g}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \Psi(R_g(x))X &= \mu_X(R_g(x)) \\ &= R_g^*\mu_X(x) \\ &= \mu_{Ad_g X}(x) \\ &= \Psi(x)(Ad_g X) \\ &= \alpha(Ad_g X) \\ &= Ad_g^*\alpha(X), \end{aligned}$$

es decir, $\Psi(R_g(x)) = Ad_g^*\alpha$, así que $R_g(x) \in (M \times \mathbb{R})_{Ad_g^*\alpha}$, por lo tanto $R_g((M \times \mathbb{R})_\alpha) \subseteq (M \times \mathbb{R})_{Ad_g^*\alpha}$. Por otro lado, para cada $x \in (M \times \mathbb{R})_{Ad_g^*\alpha}$, veamos que $R_{g^{-1}}(x) \in (M \times \mathbb{R})_\alpha$, en efecto, para todo $X \in \mathfrak{g}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \Psi(R_{g^{-1}}(x))X &= \mu_X(R_{g^{-1}}(x)) \\ &= R_{g^{-1}}^*\mu_X(x) \\ &= \mu_{Ad_{g^{-1}}X}(x) \\ &= \Psi(x)(Ad_{g^{-1}}X) \\ &= Ad_g^*\alpha(Ad_{g^{-1}}X) \\ &= \alpha(Ad_g(Ad_{g^{-1}}X)) \\ &= \alpha(X), \end{aligned}$$

es decir, $\Psi(R_{g^{-1}}(x)) = \alpha$, así que $R_{g^{-1}}(x) \in (M \times \mathbb{R})_\alpha$ o bien $x \in R_g((M \times \mathbb{R})_\alpha)$, por lo tanto $(M \times \mathbb{R})_{Ad_g^*\alpha} \subseteq R_g((M \times \mathbb{R})_\alpha)$. Así concluimos que

$$R_g((M \times \mathbb{R})_\alpha) = (M \times \mathbb{R})_{Ad_g^*\alpha}.$$

Consideremos al estabilizador de α con respecto a la acción coadjunta Ad^* de G en $\mathfrak{g}^*$, denotado por $G_\alpha = \{g \in G : Ad_g^*\alpha = \alpha\}$; se tiene entonces como consecuencia directa del resultado anterior que para cada $g \in G_\alpha$,

$$R_g((M \times \mathbb{R})_\alpha) = (M \times \mathbb{R})_\alpha.$$

Antes de dar el siguiente paso, presentamos las siguientes definiciones:

Definición 3.3. *Sea U un grupo de Lie que actúa por la derecha sobre una variedad diferenciable N.*

- *La acción de U sobre N se dice libre (free) si para cada $n \in N$ el estabilizador de n, el grupo $\{u \in U : R_u(n) = n\}$ es el grupo trivial, esto es*

  $$\{u \in U : R_u(n) = n\} = \{e\},$$

  donde e es el elemento identidad de U.

- *La acción de U sobre N se dice propia (proper) si el mapeo $N \times U \longrightarrow N \times N$ dado por $(n, u) \mapsto (R_u n, n)$, es un mapeo propio, es decir, si para cada subconjunto compacto K de $N \times N$, la imagen inversa de K por el mapeo de arriba, es un subconjunto compacto de $N \times U$.*

Note que como la acción de G sobre $M \times \mathbb{R}$ es diferenciable entonces también lo es la acción de G_α sobre $(M \times \mathbb{R})_\alpha$. Además si la acción de G sobre $M \times \mathbb{R}$ es libre, entonces la acción de G_α sobre $(M \times \mathbb{R})_\alpha$ es libre, es decir, para cada $x \in (M \times \mathbb{R})_\alpha$ se tiene que el grupo $\{g \in G_\alpha : R_g(x) = x\}$ es el grupo trivial. Y si la acción de G sobre $M \times \mathbb{R}$ es propia entonces la acción de G_α sobre $(M \times \mathbb{R})_\alpha$ también es propia.

En lo que resta de este capítulo, supondremos que la acción de G sobre $M \times \mathbb{R}$ es libre y propia, por lo tanto la acción de G_α sobre $(M \times \mathbb{R})_\alpha$ también es libre y propia.

Ahora consideremos el espacio cociente $(\widehat{M \times \mathbb{R}})_\alpha = \frac{(M\times\mathbb{R})_\alpha}{G_\alpha}$, es decir, el espacio de órbitas de $(M \times \mathbb{R})_\alpha$ por la acción de G_α, esto es

$$(\widehat{M \times \mathbb{R}})_\alpha = \{[x] : x \in (M \times \mathbb{R})_\alpha\},$$

donde $[x] = \{R_g(x) : g \in G_\alpha\}$ es la órbita de x. Por el teorema de la variedad cociente (ver [28]) tenemos que $(\widehat{M \times \mathbb{R}})_\alpha$ es una variedad diferenciable de dimensión $dim((M \times \mathbb{R})_\alpha) - dim(G_\alpha) = 2n + 1 - dim(G) - dim(G_\alpha)$, y el mapeo proyección natural $\pi : (M \times \mathbb{R})_\alpha \longrightarrow (\widehat{M \times \mathbb{R}})_\alpha$, el cual es el mapeo diferenciable definido por

$$\pi(x) = [x],$$

es una submersión diferenciable, es decir, en cada $x \in (M \times \mathbb{R})_\alpha$, el pushforward

$$\pi_* : T_x(M \times \mathbb{R})_\alpha \longrightarrow T_{[x]}(\widehat{M \times \mathbb{R}})_\alpha$$

es una transformación lineal sobreyectiva.

Tenemos que

$$2n + 1 - dim(G) - dim(G_\alpha) = 2k + 1$$

para algún entero positivo k, en efecto, se ha mostrado (ver [18]) que si se tiene un grupo de Lie G simetría de un sistema Hamiltoniano autónomo (M, ω, H) entonces el espacio de órbitas de la acción de G es una variedad simpléctica de dimensión $dim(M) - dim(G) - dim(G_\alpha)$, donde G_α se define de la misma manera como lo hemos definido anteriormente; así que $dim(M) - dim(G) - dim(G_\alpha)$ es un número par, pero $dim(M)$ es un número par ya que M es una variedad simpléctica, así que $dim(G) + dim(G_\alpha)$ es un número par. Note que el hecho de que $dim(G) + dim(G_\alpha)$ sea un número par es independiente del contexto de sistemas Hamiltonianos autónomos, así que en nuestro desarrollo también se tiene que $dim(G) + dim(G_\alpha)$ es un número par, por lo tanto $2n - (dim(G) + dim(G_\alpha))$ es un número par, digamos $2k$, como se había mencionado.

Note que para cada $g \in G_\alpha$ tenemos que

$$\pi(R_g(x)) = [R_g(x)] = [x] = \pi(x)$$

para todo $x \in (M \times \mathbb{R})_\alpha$, es decir $\pi \circ R_g = \pi$. Además para cada $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ (el álgebra de Lie del grupo de Lie G_α), se tiene que $\pi_* X^+ = 0$, en efecto, sea $f \in C^\infty((M \times \mathbb{R})_\alpha)$

$$\begin{aligned}
(\pi_* X^+) f(x) &= X^+(f \circ \pi)(x) \\
&= \frac{d}{ds}(f \circ \pi)(R_{e^{sX}}(x))|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds} f(\pi(R_{e^{sX}}(x)))|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds} f(\pi(x))|_{s=0} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

esto significa que el campo vectorial X^+ es tangente a cada órbita, por lo tanto el espacio tangente a cada órbita es generado por los campos vectoriales X^+ con $X \in \mathfrak{g}_\alpha$.

También notemos lo siguiente, si V es un campo vectorial en $(M \times \mathbb{R})_\alpha$ tal que $\pi_* V = 0$ entonces V es tangente a cada órbita, y como el espacio tangente a cada órbita es generado por los campos vectoriales X^+ con $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, entonces $V = X^+$ para algún $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, además dicho X es único ya que la acción de G_α sobre $(M \times \mathbb{R})_\alpha$ es libre.

Finalizamos este capítulo con la construcción del sistema Hamiltoniano reducido por la acción de G sobre el sistema Hamiltoniano $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$. Dicho sistema Hamiltoniano reducido tiene al espacio de órbitas de $(M \times \mathbb{R})_\alpha$ por la acción de G_α como espacio fase.

Consideremos la restricción de la 2-forma Ω a la subvariedad $(M \times \mathbb{R})_\alpha$, denotada por $\overline{\Omega} = \Omega|_{(M \times \mathbb{R})_\alpha}$. Para todo $g \in G_\alpha$ se tiene que

$$R_g^* \overline{\Omega} = \overline{\Omega}$$

lo cual es consecuencia directa del hecho de que $R_g^* \Omega = \Omega$ para todo $g \in G$. Y para todo $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ se tiene que

$$X^+ \lrcorner \overline{\Omega} = 0,$$

en efecto,

$$X^+ \lrcorner \overline{\Omega} = (X^+ \lrcorner \Omega)|_{(M\times\mathbb{R})_\alpha} = -d\mu_X|_{(M\times\mathbb{R})_\alpha} = 0,$$

ya que μ_X es constante en $(M \times \mathbb{R})_\alpha$.

Ahora definimos la 2-forma $\widehat{\Omega}$ en $(\widehat{M \times \mathbb{R}})_\alpha$ de la siguiente manera. Dado $x \in (M \times \mathbb{R})_\alpha$ y dados $w_1, w_2 \in T_{[x]}(\widehat{M \times \mathbb{R}})_\alpha$, como

$$\pi_*(x) : T_x(M \times \mathbb{R})_\alpha \longrightarrow T_{[x]}(\widehat{M \times \mathbb{R}})_\alpha$$

es una transformación lineal sobreyectiva, entonces existen $v_1, v_2 \in T_x(M \times \mathbb{R})_\alpha$ tales que $w_1 = \pi_* v_1$ y $w_2 = \pi_* v_2$, así definimos

$$\widehat{\Omega}_{[x]}(w_1, w_2) = \overline{\Omega}_x(v_1, v_2).$$

Sabemos que $R_g(x) \in [x]$ para todo $g \in G_\alpha$, además

$$\pi_*(R_g(x)) : T_{R_g(x)}(M \times \mathbb{R})_\alpha \longrightarrow T_{[x]}(\widehat{M \times \mathbb{R}})_\alpha$$

es una transformación lineal sobreyectiva, así que existen vectores $v_1', v_2' \in T_{R_g(x)}(M \times \mathbb{R})_\alpha$ tales que $w_1 = \pi_* v_1'$ y $w_2 = \pi_* v_2'$, luego podemos definir $\widehat{\Omega}$ por

$$\widehat{\Omega}_{[x]}(w_1, w_2) = \overline{\Omega}_{R_g(x)}(v_1', v_2').$$

Veamos que $\widehat{\Omega}$ está bien definida, es decir, veamos que

$$\overline{\Omega}_x(v_1, v_2) = \overline{\Omega}_{R_g(x)}(v_1', v_2'),$$

en efecto, primero notemos lo siguiente, sabemos que $\pi = \pi \circ R_g$, luego $\pi_* = \pi_* \circ R_{g*}$, como $\pi_* v_1' = \pi_* v_1$ entonces $\pi_* v_1' = \pi_*(R_{g*} v_1)$, luego

$$\pi_*(v_1' - R_{g*} v_1) = 0,$$

esto implica que $v_1' - R_{g*} v_1 = X^+$ para algún $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, esto es

$$v_1' = R_{g*} v_1 + X^+,$$

y por supuesto también tenemos que

$$v_2' = R_{g*} v_2 + Y^+$$

para algún $Y \in \mathfrak{g}_\alpha$. Así que

$$\begin{aligned}
\overline{\Omega}_{R_g(x)}(v_1', v_2') &= \overline{\Omega}_{R_g(x)}(R_{g*} v_v + X^+, R_{g*} v_2 + Y^+) \\
&= \overline{\Omega}_{R_g(x)}(R_{g*} v_1, R_{g*} v_2) \\
&= (R_g^* \overline{\Omega})_x(v_1, v_2) \\
&= \overline{\Omega}_x(v_1, v_2).
\end{aligned}$$

Luego $\widehat{\Omega}$ está bien definida y $\overline{\Omega} = \pi^*\widehat{\Omega}$.

Ahora veamos que $\widehat{\Omega}$ es cerrada, en efecto

$$\begin{aligned}
\overline{\Omega} = \pi^*\widehat{\Omega} \quad &\Longrightarrow \quad d\overline{\Omega} = d(\pi^*\widehat{\Omega}) \\
&\Longrightarrow \quad d\overline{\Omega} = \pi^*(d\widehat{\Omega}) \\
&\Longrightarrow \quad 0 = \pi^*(d\widehat{\Omega}) \\
&\Longrightarrow \quad 0 = d\widehat{\Omega},
\end{aligned}$$

por lo tanto $\widehat{\Omega}$ es cerrada.

Como Ω es invariante por la acción de G, entonces también lo es el campo vectorial hamiltoniano X_H, esto es

$$X_H|_{R_g(p,t)} = X_H|_{(p,t)} \qquad \forall (p,t) \in M \times \mathbb{R},$$

es más, el campo vectorial X_H restringido a la subvariedad $(M \times \mathbb{R})_\alpha$ es invariante por la acción de G_α, esto es, para todo $g \in G_\alpha$ se tiene que

$$X_H|_{R_g(x)} = X_H|_x \qquad \forall x \in (M \times \mathbb{R})\alpha,$$

luego existe un único campo vectorial en $\widehat{(M \times \mathbb{R})}_\alpha$ que está π-relacionado con X_H, denotamos a tal campo vectorial en $\widehat{(M \times \mathbb{R})}_\alpha$ por $\widehat{X}_H$, esto es

$$\pi_* X_H = \widehat{X}_H.$$

Finalmente notamos que $\widehat{X}_H$ define un sistema Hamiltoniano sobre $(\widehat{(M \times \mathbb{R})}_\alpha, \widehat{\Omega})$, en efecto, para todo $x \in (M \times \mathbb{R})_\alpha$ tenemos que

$$(\widehat{X}_H \lrcorner \widehat{\Omega})|_{[x]} = \widehat{X}_H|_{[x]} \lrcorner \widehat{\Omega}_{[x]} = X_H|_x \lrcorner \Omega_x = 0,$$

esto es,

$$\widehat{X}_H \lrcorner \widehat{\Omega} = 0.$$

Llamamos a $(\widehat{(M \times \mathbb{R})}_\alpha, \widehat{\Omega})$ el espacio fase reducido por la acción de G.

Capítulo 4

Sistemas cuánticos

En este capítulo hacemos un estudio de la mecánica cuántica enfocándonos en las similitudes con la mecánica clásica, esperando obtener algunos resultados análogos. Particularmente nos enfocamos en la formulación de la mecánica cuántica mediante el formalismo Hamiltoniano, presentamos la noción de sistema cuántico integrable y tratamos de obtener un desarrollo similar el expuesto en el capítulo 1.

La noción de integrabilidad de un sistema cuántico es estudiada en esta tesis, para este fin son fundamentales las analogías entre la mecánica Hamiltoniana clásica y la descripción ordinaria de la mecánica cuántica. Algunos trabajos que encaran el problema de la integrabilidad en la mecánica cuántica son [14, 6, 44]. En mecánica Hamiltoniana clásica un sistema mecánico consiste en una variedad simpléctica (M, ω) (el espacio fase) y una función $H \in C^{\infty}(M)$ (la función Hamiltoniana). Los estados del sistema son puntos en el espacio fase y los observables son funciones diferenciables en M [36, 9]. En la mecánica cuántica se tienen dos estructuras básicas: Funciones de onda y operadores. Un estado del sistema se representa por su función de onda y los observables son representados por operadores. Matemáticamente, las funciones de onda son funciones segundo integrables sobre $\mathbb{R}^n$ o sobre un rectángulo, y los operadores actúan sobre estas funciones como transformaciones lineales. Así que el lenguaje natural para la mecánica cuántica es el análisis funcional [22].

Las transformaciones de coordenadas en el espacio fase son muy importantes en la mecánica Hamiltoniana, por ejemplo las transformaciones canónicas juegan un papel importante en la teoría clásica[4, 21, 36]; ellas también han sido estudiadas en la mecánica cuántica, podemos encontrar algunos trabajos dedicados a la teoría de transformaciones canónicas en la mecánica cuántica (ver por ejemplo [11, 42, 45]). Las transformaciones canonoides también son importantes en la mecánica clásica, por ejemplo [41] se muestra que, a partir de una transformación canonoide para un sistema Hamiltoniano, es posible encontrar constantes de movimiento del sistema, lo cual es relevante para determinar la integrabilidad de tal sistema. En esta tesis se introduce la noción de transformación canonoide para sistemas cuánticos.

Definición 4.1. *Un sistema cuántico es un trío $(\mathcal{H}, \langle,\rangle, H)$, con $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert con producto interno $\langle,\rangle$, y H un operador hermitiano en $\mathcal{H}$. $\mathcal{H}$ se llama el espacio de Hilbert cuántico y H es el operador Hamiltoniano del sistema.*

Definición 4.2.

1. *Un observable en un sistema cuántico es un operador hermitiano en el espacio de Hilbert cuántico, es decir, un operador Q tal que $\langle Q\psi, \varphi\rangle = \langle \psi, Q\varphi\rangle$ para todo $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$.*

2. *Un estado del sistema es un vector unitario en el espacio de Hilbert cuántico.*

3. *El valor esperado en la medición de un observable Q en un estado $\psi \in \mathcal{H}$ es el número $\langle \psi, Q\psi\rangle$. Dicho valor esperado se denota por $\langle Q\rangle_\psi$.*

La evolución temporal de una función $\psi(t)$ en el espacio de Hilbert cuántico está determinada por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{d\psi}{dt} = H\psi.$$

Definición 4.3. *Un observable Q se dice constante de movimiento del sistema si $\langle Q\rangle_{\psi(t)}$ es constante a lo largo de cualquier función $\psi(t)$ solución de la ecuación de Schrödinger. Es decir, un observable Q es una constante de movimiento del sistema si $\frac{d\langle Q\rangle_{\psi(t)}}{dt} = 0$*

El siguiente teorema conocido como el teorema de Ehrenfest es fundamental para la teoría de los sistemas cuánticos.

Teorema 4.1. *Si $\psi(t)$ es una solución de la ecuación de Schrödinger y Q un observable, entonces*

$$\frac{d\langle Q\rangle_{\psi(t)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [Q, H]\rangle_{\psi(t)} + \langle \frac{\partial Q}{\partial t}\rangle_{\psi(t)}.$$

Note la similitud entre la ecuación de arriba y la ecuación

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t},$$

la cual es la ecuación que define la evolución temporal de una función f en un sistema Hamiltoniano clásico con función Hamiltoniana H.

Cabe resaltar la siguiente observación: si un observable Q no depende del tiempo entonces

$$\frac{d\langle Q\rangle_{\psi(t)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [Q,H]\rangle_{\psi(t)},$$

así que si Q y H conmutan, es decir si $[Q,H]=0$, entonces Q es una constante de movimiento del sistema. Si el operador Hamiltoniano no depende del tiempo entonces éste es una constante de movimiento del sistema. Para más detalles acerca del formalismo de sistemas cuánticos y para ver la demostración del teorema de Ehrenfest, ver [23] y [31].

En la formulación estándar de la mecánica cuántica, el espacio de Hilbert cuántico para un sistema cuántico en n dimensiones es el espacio de las funciones complejas de cuadrado integrable en $\mathbb{R}^n$, es decir el espacio de las funciones ψ definidas en $\mathbb{R}^n$ a valores complejos tales que

$$\int |\psi|^2 d\mu$$

es un número real; aquí la integral es sobre todo $\mathbb{R}^n$ y μ es la medida usual en $\mathbb{R}^n$. El producto interno en el espacio de Hilbert cuántico está definido por

$$\langle \psi, \varphi\rangle = \int \psi^* \varphi d\mu$$

y el operador Hamiltoniano es usualmente

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$$

donde ∇^2 es el operador Laplaciano y V es el potencial, el cual puede depender del tiempo.

La ecuación de Schrödinger se escribe como

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi.$$

Para más detalles ver [22].

El proceso estándar para resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, hace uso del método de separación de variables. Mediante este método no se obtiene directamente la solución general de la ecuación, sino que se obtiene una familia de soluciones que contienen algunos parámetros llamados números cuánticos [22]. Dichas soluciones son funciones propias comunes de un conjunto de operadores que conmutan entre sí, además los números cuánticos son los valores propios de tales operadores. Usualmente estos operadores no dependen del tiempo y además conmutan con el operador Hamiltoniano, por lo tanto son constantes de movimiento del sistema. Por otro lado, si el operador Hamiltoniano depende del tiempo, podemos encontrar soluciones de la ecuación de Schrödinger que son funciones propias comunes de un conjunto de operadores, posiblemente dependientes del tiempo, que conmutan entre sí, y son constantes de movimiento del sistema [39]. De hecho, si tenemos la ecuación de Schrödinger en $\mathbb{R}^n$, entonces por separación de variables obtenemos n números cuánticos que son valores propios de n operadores, estos operadores forman un conjunto completo de operadores que conmutan entre sí y son constantes de movimiento (completo en el sentido de que, hasta un factor que puede depender solo del tiempo, solo hay una función propia común para un conjunto dado de n valores propios) [40].

Considerando los resultados anteriores, podemos pensar de un sistema cuántico en n dimensiones como integrable si existe un conjunto completo de n operadores que conmutan entre sí y que son constantes de movimiento. Por lo cual, dado un sistema cuántico, resulta esencial encontrar una cantidad suficiente de constantes de movimiento.

Nos dimos la tarea de encontrar constantes de movimiento de un sistema cuántico dado. Inspirados en el desarrollo expuesto en el capítulo 1, introducimos el concepto de transformación canonoide en sistemas cuánticos y a partir de este concepto encontramos constantes de movimiento.

Sea $(\mathcal{H}, H)$ un sistema cuántico, con H posiblemente dependiente del tiempo. La ecuación de Schrödinger es $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$.

Definición 4.4. *Una transformación canonoide es una transformación lineal invertible $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ que preserva la forma de la ecuación de Schrödinger, esto es,*

$$i\hbar\frac{\partial(T\psi)}{\partial t} = K(T\psi)$$

para algún operador hermitiano K.

Sea $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ una transformación lineal invertible, y sea $\psi(t)$ una solución de la ecuación de Schrödinger. Luego

$$i\hbar\frac{\partial(T\psi)}{\partial t} = i\hbar\left(\frac{\partial T}{\partial t}\psi + T\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = i\hbar\frac{\partial T}{\partial t}\psi + T\left(i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = i\hbar\frac{\partial T}{\partial t}\psi + T(H\psi).$$

Si T es una transformación canonoide, entonces existe un operador hermitiano K tal que

$$i\hbar\frac{\partial T}{\partial t}\psi + TH\psi = KT\psi,$$

es decir
$$i\hbar\frac{\partial T}{\partial t}+TH=KT.$$
Como T es invertible tenemos
$$i\hbar\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}+THT^{-1}=K,$$
es decir, el operador $i\hbar\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}+THT^{-1}$ es un operador hermitiano, esto es,
$$i\hbar\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}+THT^{-1}=\left(i\hbar\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}+THT^{-1}\right)^{*}.$$

Veamos lo siguiente

$$\begin{aligned}
& i\hbar\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}+THT^{-1}=(i\hbar\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}+THT^{-1})^{*}\\
\Longleftrightarrow\quad & i\hbar\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}+THT^{-1}=-i\hbar(T^{-1})^{*}(\frac{\partial T}{\partial t})^{*}+(T^{-1})^{*}H^{*}T^{*}\\
\Longleftrightarrow\quad & THT^{-1}+i\hbar\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}=(T^{*})^{-1}HT^{*}-i\hbar(T^{*})^{-1}\frac{\partial T^{*}}{\partial t}\\
\Longleftrightarrow\quad & THT^{-1}+i\hbar\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}-(T^{*})^{-1}HT^{*}+i\hbar(T^{*})^{-1}\frac{\partial T^{*}}{\partial t}=0\\
\Longleftrightarrow\quad & T^{*}THT^{-1}T+i\hbar T^{*}\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}T-T^{*}(T^{*})^{-1}HT^{*}T+i\hbar T^{*}(T^{*})^{-1}\frac{\partial T^{*}}{\partial t}T=0\\
\Longleftrightarrow\quad & T^{*}TH-HT^{*}T+i\hbar(T^{*}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial T^{*}}{\partial t}T)=0\\
\Longleftrightarrow\quad & [T^{*}T,H]+i\hbar\frac{\partial T^{*}T}{\partial t}=0
\end{aligned}$$

Así que, T es una transformación canonoide si y solo si $T^{*}T$ es una constante de movimiento. Note que $T^{*}T$ es un operador hermitiano, por lo que es un observable.

$$\begin{aligned}
K^{2} &= THT^{-1}THT^{-1}+i\hbar THT^{-1}\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}+i\hbar\frac{\partial T}{\partial T}HT^{-1}-\hbar^{2}\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}\\
&= TH^{2}T^{-1}+i\hbar THT^{-1}\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}+i\hbar\frac{\partial T}{\partial T}HT^{-1}-\hbar^{2}\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(K^{2})^{*} &= (TH^{2}T^{-1}+i\hbar THT^{-1}\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}+i\hbar\frac{\partial T}{\partial T}HT^{-1}-\hbar^{2}\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1})^{*}\\
&= (T^{*})^{-1}H^{2}T^{*}-i\hbar(T^{*})^{-1}\frac{\partial T^{*}}{\partial t}(T^{*})^{-1}HT^{*}-i\hbar(T^{*})^{-1}H\frac{\partial T^{*}}{\partial t}\\
&- \hbar^{2}(T^{*})^{-1}\frac{\partial T^{*}}{\partial t}(T^{*})^{-1}\frac{\partial T^{*}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Como T es una transformación canonoide entonces $K^2 = (K^2)^*$, esto es,

$$TH^2T^{-1} + i\hbar THT^{-1}\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1} + i\hbar\frac{\partial T}{\partial T}HT^{-1} - \hbar^2\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}$$
$$= (T^*)^{-1}H^2T^* - i\hbar(T^*)^{-1}\frac{\partial T^*}{\partial t}(T^*)^{-1}HT^* - i\hbar(T^*)^{-1}H\frac{\partial T^*}{\partial t} - \hbar^2(T^*)^{-1}\frac{\partial T^*}{\partial t}(T^*)^{-1}\frac{\partial T^*}{\partial t}.$$

O bien

$$TH^2T^{-1} + i\hbar THT^{-1}\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1} + i\hbar\frac{\partial T}{\partial T}HT^{-1} - \hbar^2\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1} - (T^*)^{-1}H^2T^*$$
$$+ i\hbar(T^*)^{-1}\frac{\partial T^*}{\partial t}(T^*)^{-1}HT^* + i\hbar(T^*)^{-1}H\frac{\partial T^*}{\partial t} + \hbar^2(T^*)^{-1}\frac{\partial T^*}{\partial t}(T^*)^{-1}\frac{\partial T^*}{\partial t} = 0,$$

lo cual es equivalente a

$$T^*TH^2 + i\hbar T^*THT^{-1}\frac{\partial T}{\partial t} + i\hbar T^*\frac{\partial T}{\partial t}H - \hbar^2T^*\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}\frac{\partial T}{\partial t} - H^2T^*T$$
$$+ i\hbar\frac{\partial T^*}{\partial t}(T^*)^{-1}HT^*T + i\hbar H\frac{\partial T^*}{\partial t}T + \hbar^2\frac{\partial T^*}{\partial t}(T^*)^{-1}\frac{\partial T^*}{\partial t}(T^*)^{-1} = 0.$$

Usando el hecho de que $T^*TH - HT^*T + i\hbar T^*\frac{\partial T}{\partial t} + i\hbar\frac{\partial T^*}{\partial t}T = 0$, tenemos que la ecuación de arriba se convierte en

$$T^*THH + i\hbar(HT^*T - i\hbar T^*\frac{\partial T}{\partial t} - i\hbar\frac{\partial T^*}{\partial t}T)T^{-1}\frac{\partial T}{\partial t} + i\hbar T^*\frac{\partial T}{\partial t}H - \hbar^2T^*\frac{\partial T}{\partial t}T^{-1}\frac{\partial T}{\partial t}$$
$$- H(T^*TH + i\hbar T^*\frac{\partial T}{\partial t} + i\hbar\frac{\partial T^*}{\partial t}T) + i\hbar\frac{\partial T^*}{\partial t}(T^*)^{-1}(T^*TH + i\hbar T^*\frac{\partial T}{\partial t} + i\hbar\frac{\partial T^*}{\partial t}T)$$
$$+ i\hbar H\frac{\partial T^*}{\partial t}T + \hbar^2\frac{\partial T^*}{\partial t}(T^*)^{-1}\frac{\partial T^*}{\partial t}(T^*)^{-1} = 0.$$

Simplificando queda

$$T^*THH - HT^*TH + i\hbar\frac{\partial T^*}{\partial t}TH + i\hbar T^*\frac{\partial T}{\partial t}H = 0,$$

esto es

$$[T^*TH, H] + i\hbar(\frac{\partial T^*}{\partial t}TH + T^*\frac{\partial T}{\partial t}H) = 0.$$

Esta ecuación indica que si el operador Hamiltoniano H no depende del tiempo, entonces T^*TH es una constante de movimiento, lo cual es evidente ya que T^*T es una constante de movimiento y si el operador Hamiltoniano no depende del tiempo, entonces también es una constante de movimiento, luego T^*TH es una constante de movimiento.

Ejemplo 4.1. *Consideremos una partícula de spin* $\frac{1}{2}$ *en reposo en un campo magnético uniforme que apunta en la dirección z. El operador Hamiltoniano en forma matricial es*

$$H = \frac{-\gamma B_0 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ver [22].

Consideremos la transformación $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. *Se tiene que* T *es una transformación canonoide, en efecto,* $T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, *y se nota que*

$$K = THT^{-1} = -\frac{rB_0\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es un operador hermitiano. Por lo tanto $T^*T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ *es una constante de movimiento del sistema. Veamos*
$T^*TH = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, $HT^*T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, *luego* $T^*TH = HT^*T$, *es decir,* T^*T *conmuta con* H, *por lo tanto* T^*T *es una constante de movimiento.*

Conclusiones

Hemos mostrado que es posible extender resultados establecidos para sistemas Hamiltonianos autónomos al marco de los sistemas Hamiltonianos no autónomos. Particularmente en esta tesis, partiendo de transformaciones canonoides, hemos extendido el estudio de los sistemas bi-Hamiltonianos a los sistemas Hamiltonianos no autónomos. También hemos presentado de manera natural, en el caso dependiente del tiempo, la integrabilidad según Lie, el mapeo de momento y la reducción de un sistema Hamiltoniano.

Otro punto que cabe remarcar es nuestro análisis de la noción de integrabilidad en la mecánica cuántica, dicho análisis no tiene la ambición de establecer definitivamente el concepto de sistema cuántico integrable, solo presentamos una noción enfocándonos en las analogías entre la mecánica Hamiltoniana clásica y la formulación ordinaria de la mecánica cuántica. En esta tesis introdujimos la noción de transformación canonoide en mecánica cuántica y mostramos que a partir de una de estas transformaciones podemos obtener una constante de movimiento del sistema cuántico en cuestión, este resultado es de gran valor aunque seguimos trabajando para ampliarlo y similarmente como en caso clásico, obtener suficientes constantes de movimiento para abordar la integrabilidad del sistema.

Además de los sistemas de Lie, sistemas Hamiltonianos sobre otras estructuras geométricas tales como variedades de Jacobi, variedades de Dirac, variedades k-simplécticas, entre otras, no fueron consideradas en esta tesis; los consideramos para trabajos futuros.

Bibliografía

[1] A. Abraham and J. Marsden *Foundations of Mechanics*, 2nd ed., AMS Chelsea publishing, 2008.

[2] G. Arfken, H. Weber and F. Harris *Mathematical Methods for Physicists*, 7th ed., Elsevier Academic Press, USA, 2012.

[3] V. Arnold *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.

[4] V. Arnold, V. Kozlov and A. Neishtadt *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006.

[5] V. Arnold *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.

[6] G. Arutyunov *Elements of Classical and Quantum Integrable Systems*, Springer International Publishing, 2019.

[7] R. Azuaje *Solutions of the Hamilton equations for non-autonomous systems by means of solvable Lie algebras of symmetries*, en revisión.

[8] R. Azuaje *Time-dependent moment map and reduction for time-dependent Hamiltonian systems*, en revisión.

[9] O. Babelon, D. Bernard and M. Talon *Introduction to Classical Integrable Systems*, Cambridge University Press, New York, 2003.

[10] G. Baumann *Mathematica for Theoretical Physics: Classical Mechanics and Nonlinear Dynamics*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 2005.

[11] M. Blaszak and Z. Domanski *Canonical transformations in quantum mechanics*, Ann. Physics. **331** 70-96 (2013).

[12] R. Brouzet *About the existence of recursion operators for completely integrable Hamiltonian systems near a Liouville torus*, J. Math. Phys. **34** 1309-1313 (1993).

[13] R. BROUZET, P. MOLINO AND F. TURIEL *Géométrie des systèmes bihamiltoniens*, Indagationes, Montpellier, Francia, 1993.

[14] J. CLEMENTE-GALLARDO AND G. MARMO *Towards a definition of quantum integrability*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **06**(01) 129-172 (2009).

[15] M. CRAMPIN AND F. PIRANI *Applicable Differential Geometry*, Cambridge University Press, 1987.

[16] A. DAS *Integrable Models*, World Scientific, Singapore, 1989.

[17] H. EVES *Elementary Matrix Theory*, Dover, New York, 1980.

[18] M. FECKO *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*, Cambridge University Press, New York, 2006.

[19] V. GERDJIKOV, G. VILASI AND A. YANOVSKI *Integrable Hamiltonian Hierarchies: Spectral and Geometric Methods*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.

[20] R. GILMORE *Lie Groups, Physics and Geometry: An Introduction for Physicists, Engineers and Chemists*, Cambridge University Press, New York, 2008.

[21] H. GOLSTEIN, C. POOLE AND J. SAFKO *Classical Mechanics*, 3rd ed., Addison-Wesley, USA, 2002.

[22] D. GRIFFITHS AND D. SCHROETER *Introduction to Quantum Mechanics*, 3rd ed., Cambridge University Press, 2018.

[23] B. HALL *Quantum Theory for Mathematicians*, Springer-Verlag, New York, 2013.

[24] Y. KOSMANN-SCHWARZBACH *Beyond recursion operators*. In: Kielanowski P., Odzijewicz A., Previato E. (eds) Geometric Methods in Physics XXXVI. Trends in Mathematics. Birkhäuser, Cham. (2019).

[25] Y. KOSMANN-SCHWARZBACH AND F. MAGRI *Lax-Nijenhuis operators for integrable systems*, J. Math. Phys. **37**, 6173 (1996).

[26] V. KOZLOV *Symmetries, Topology and Resonances in Hamiltonian Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.

[27] P. LAX *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure Appl. Math. **21** 467-490 (1968).

[28] J. LEE *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 2012.

[29] F. MAGRI AND C. MOROSI *A geometrical characterization of integrable Hamiltonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifolds*, Quaderno S 19, Universit'a degli Studi di Milano, 1984.

[30] J. MARSDEN AND A. WEINSTEIN *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Rep. Math. Phys. **5** 121-130 (1974).

[31] M. RAZAVY *Heisenberg's Quantum Mechanics*, World Scientific, Singapore, 2011.

[32] N. ROMAN-ROY *A summary on symmetries and conserved quantities of autonomous Hamiltonian systems*, J. Geom. Mech. **12**(3) 541-551 (2020).

[33] D. SATTINGER AND O. WEAVER *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[34] W-H. STEEB *Matrix Calculus and Kronecker Product with Applications and C++ Programs*, World Scientific, Singapore, 1997.

[35] P. TEMPESTA AND G. TONDO *Haantjes algebras of classical integrable systems*, Annali di Matematica (2021).

[36] G.F. TORRES DEL CASTILLO *An Introduction to Hamiltonian Mechanics*, Birkhäuser Basel, New York, 2018.

[37] G.F. TORRES DEL CASTILLO *Applications and extensions of the Liouville theorem on constants of motion*, Rev. Mex. Fís. **57** 245-249 (2011).

[38] G.F. TORRES DEL CASTILLO *Differentiable Manifolds: A Theoretical Physics Approach*, 2nd ed., Birkhäuser Basel, New York, 2020.

[39] G.F. TORRES DEL CASTILLO *Solution of the Schrödinger equation making use of time-dependent constants of motion*, Rev. Mex. Fís. **61** 376-379 (2015).

[40] G.F. TORRES DEL CASTILLO *The conserved operators generated by a solution of the Schrödinger equation*, Rev. Mex. Fís. **58** 180-183 (2012).

[41] G.F. TORRES DEL CASTILLO AND R. AZUAJE *Constants of motion associated with canonoid transformations for non-autonomous systems*, aceptado para su publicación en Revista Mexicana de Física.

[42] G.F. TORRES DEL CASTILLO, H. BELLO MARTÍNEZ, R.J. MEJÍA SÁCHEZ AND J.M. ZÁRATE PAZ *Representation of canonical transformations in quantum mechanics*, Rev. Mex. Fís. **55**(2) 134–139 (2009).

[43] G. VILASI *Hamiltonian Dynamics*, World Scientific, Singapore, 2001.

[44] S. WEIGERT *The problem of quantum integrability*, Physica D: Nonlinear Phenomena **56**(1) 107-119 (1992).

[45] C. ZACHOS, D. FAIRLIE AND T. CURTRIGHT *Quantum Mechanics in Phase Space: An Overview with Selected Papers*, World Scientific Series in 20th Century Physics: Volume 34. 2005.