



# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

## "SINTONIZACIÓN DE LA VISCOSIDAD EFECTIVA EN METAMATERIALES FONÓNICOS 2D"

### TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
**MAESTRO EN CIENCIAS  
(FÍSICA)**

PRESENTA  
**JOSÉ ANTONIO DOPORTO RUIZ**

DIRECTORES DE TESIS  
**J. JESÚS ARRIAGA RODRÍGUEZ**

No. de CVU: 989556

AGOSTO 2021

Universidad Autónoma de Puebla  
Instituto de Física “Luis Rivera Terrazas”

# Sintonización de la viscosidad efectiva en metamateriales fonónicos 2D

Tesis presentada por

**José A. Doporto Ruiz**

para obtener el grado de

**Maestría en Ciencias  
(Física)**

Dirigida por

**J. Jesús Arriaga Rodríguez**

Puebla, México

Mes 2021

©2021 - José A. Doporto Ruiz

Derechos Reservados

# Agradecimientos

- Al Dr. Arriaga por su paciencia y por compartir su conocimiento tanto como mi profesor a través de estos años, así como mi asesor para este trabajo.
- Al Dr. Martin Ibarias por su apoyo y los consejos que me brindó a partir de su experiencia.
- A Conacyt por el apoyo para poder concluir el grado de maestría.
- A todos los profesores del instituto de Física como a los trabajadores, quienes me brindaron apoyo y consejo cuando lo necesitaba.
- A mis amigos Emilio Álvarez, Angélica Walteros y Carlos Romero, así como a mis compañeros, por todo el tiempo y discusiones que compartimos, haciendo de mi estancia en el instituto una experiencia agradable.
- A mi familia por siempre apoyarme en las decisiones que he tomado.

*Dedicado a ...*

*Mi familia y mis compañeros*

# Sintonización de la viscosidad efectiva en metamateriales fonónicos 2D

## Resumen

En esta tesis, se estudia el comportamiento anisotrópico del coeficiente de decaimiento del sonido en relación con la simetría de la celda unitaria dentro de un cristal fonónico. Se utiliza una teoría de homogeneización para el cálculo de la viscosidad efectiva del medio elástico con características periódicas. Esta teoría aprovecha la periodicidad del medio y realiza una expansión en ondas planas, válida en el límite de bajas frecuencias (por debajo del intervalo de bandas prohibida). Utilizando esta teoría se comparan los resultados para diferentes estructuras 2D dentro de la celda unitaria con el fin de obtener la configuración que maximice el coeficiente de decaimiento del sonido en el cristal. Dentro de un cristal con celda unitaria anisótropa, la teoría predice un comportamiento anisótropo en el coeficiente de decaimiento por lo que la dirección de propagación juega un papel importante al calcular el parámetro de viscosidad efectiva. La teoría supone que la energía disipada por las inclusiones sólidas es mucho menor a la que se disipa en el fluido por lo que las pérdidas viscosas dentro del compuesto pueden calcularse a través de la ecuación de Navier-Stokes. Un factor importante a tomar en cuenta en la teoría es la formación de películas viscosas en la frontera líquido-sólido, o efecto Konstantinov, ya que las pérdidas en esta capa superan por varios órdenes de magnitud a las pérdidas en los medios individuales. Debido a esto obtenemos que el coeficiente de decaimiento calculado es proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia de la onda propagada, en comparación con la dependencia cuadrática que se obtiene en fluidos homogéneos. De igual manera este coeficiente de decaimiento es proporcional a la raíz cuadrada del coeficiente de viscosidad de corte a diferencia de la relación lineal que se conoce para los fluidos en bulto. La viscosidad efectiva es un parámetro poco estudiado dentro del campo de los cristales fonónicos y, debido al comportamiento anisótropo, se abre la puerta a una propiedad nueva dentro de las características metamateriales fonónicos. Esta propiedad es de gran relevancia en la creación y diseño de dispositivos acústicos basados en el uso de cristales fonónicos ya que permite el control de la propagación de la onda en la dirección deseada.

# Tunning the effective viscosity parameter in 2D phononic metamaterials

## Abstract

In this thesis, we study the anisotropic behaviour of the sound's decay coefficient related to the unit cell's symmetry of a phononic crystal. We make use of a homogenization theory for the calculation of the viscosity as an effective parameter of the elastic medium taking advantage of its periodicity. Based on this assumption we make an expansion in plane waves, valid on the low frequency limit (below the forbidden bands interval). Using this theory the results for several 2D structures inside the unit cell are compared with the purpose of obtaining the configuration which maximizes the sound's decay coefficient. Inside a crystal with anisotropic unit cell, the theory predicts an equally anisotropic behaviour in the decay coefficient, where the direction of propagation plays an important role when calculating the effective viscosity. Theory assumes the energy dissipated by the solid inclusions is much more smaller than the energy dissipated in the fluid so the viscous losses in the composite can be calculated through the Navier-Stokes equation. One important aspect that has to be taken into account is the formation of a thin viscous layer on the solid-liquid boundary, called Konstantinov effect, as the losses in this layer are greater by many orders of magnitude than the losses on the both mediums separately. Due to this effect the decay coefficient calculation obtained is proportional to the square root of the propagated wave frequency, in comparison with the quadratic dependence shown in homogeneous fluids. In the same way this decay coefficient is proportional to the square root of the shear viscosity coefficient rather than the linear relation known for bulk fluids. Little work has been developed on the effective viscosity and, thanks to the anisotropic behaviour of this parameter, it opens the door for a novel property on metamaterial characteristics of phononic crystals. This property takes relevance on the design and development of acoustic devices based on phononic crystal because it allows the control of propagating waves through desired directions.



# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivos . . . . .	5
1.1.1	Objetivos particulares . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Dinámica de fluidos</b>	<b>7</b>
2.1	Fluido ideal . . . . .	7
2.2	Fluido con viscosidad . . . . .	8
2.2.1	Ecuación de Flujo de Momento . . . . .	9
2.2.2	Tensor de viscosidad y ecuación de Navier-Stokes . . . . .	9
2.3	Pérdidas en fluido viscoso homogéneo . . . . .	10
2.4	Problema general de sólido inmerso en un fluido . . . . .	12
2.4.1	Sólido con superficie arbitraria . . . . .	14
2.4.2	Casos límite del sólido con superficie arbitraria . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Metamaterial acústico 2D con disipación</b>	<b>18</b>
3.1	Homogeneización . . . . .	18
3.2	Análisis de Fourier . . . . .	19
3.3	Teorema de Bloch . . . . .	20
3.4	Coefficiente de viscosidad . . . . .	20
3.4.1	Cálculo de la distribución de velocidades . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Coefficientes de Fourier</b>	<b>26</b>
4.1	Dispersores Rectangulares . . . . .	26
4.2	Dispersores triangulares . . . . .	28
4.3	Dispersor circular . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>32</b>
5.1	Estructura de bandas . . . . .	32
5.2	Celda unitaria cuadrada . . . . .	34
5.3	Celda unitaria hexagonal . . . . .	39
5.4	Celda unitaria rectangular . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Conclusiones generales</b>	<b>49</b>
6.1	Conclusiones . . . . .	49

# Capítulo 1

## Introducción

Desde décadas atrás, los científicos se han interesado por el estudio de las propiedades físicas de los distintos materiales que existen en la naturaleza. Sin embargo, la necesidad del ser humano por desarrollar nuevas tecnologías para su beneficio, lo ha llevado a incursionar en la creación de nuevos sistemas y materiales artificiales que no estén presentes en la naturaleza. Es así, que nace el interés por desarrollar los metamateriales.

Un metamaterial es un arreglo o estructura artificial, típicamente periódico, compuesto de pequeños meta-átomos (celda unitaria individual en un metamaterial) que en el bulto se comportan como un medio continuo con propiedades efectivas no convencionales. Usualmente son compositos, en los cuales la estructura interna es usada para inducir propiedades efectivas en el material artificial que son sustancialmente diferentes a las encontradas en sus componentes. El término se originó del campo de los materiales electromagnéticos (EM), en donde los metamateriales fueron diseñados para controlar la propagación de la luz, ondas de radio y obtener un índice de refracción negativo [1].

La existencia de este tipo de materiales artificiales fue sugerida desde 1964 por Veselago [2], año en que se publica el primer trabajo donde se propuso la existencia de un material con permitividad eléctrica  $\epsilon$  y permeabilidad magnética  $\mu$  negativas:

$$n^2 = \epsilon\mu. \tag{1.1}$$

Por otro lado, dadas las características novedosas observadas en los materiales EM, se sugirió la existencia de un metamaterial en su contraparte en acústica, donde los cristales fonónicos podían ser aprovechados.

En 2004, Jensen Li y C. T. Chan publican la primera propuesta teórica que

mostraba la existencia de un metamaterial acústico. En su trabajo, ellos mencionan que con una estructura compuesta de esferas de caucho inmersas en una matriz de agua, con ciertas dimensiones y separaciones, era posible obtener expresiones para una densidad de masa  $\rho_{eff}$  y un módulo de compresibilidad  $\lambda_{eff}$  efectivos, ambos con valores negativos en un intervalo estrecho de frecuencias, causados por resonancias Mie dipolar y monopolar respectivamente. Estos valores negativos de  $\rho_{eff}$  y  $\lambda_{eff}$  dan como resultado índice de refracción negativo [3]:

$$n_{eff}^2 = \frac{\rho_{eff}}{\rho_0} \frac{\lambda_0}{\lambda_{eff}} \quad (1.2)$$

Donde  $\lambda_0$  y  $\rho_0$  son el índice de refracción y la densidad del medio en donde se encuentra inmerso el material.

Dentro del campo de los metamateriales acústicos, los estudios se han extendido hacia la sintonización de las propiedades físicas de estos sistemas de acorde a la aplicación que se le quiera dar. Lo anterior se ha logrado en gran parte gracias al tratamiento de la estructura interna con el fin de inducir anisotropía en el sistema. Entre los metamateriales anisótropos, sobresalen los que presentan elevada anisotropía y una relación de dispersión hiperbólica.

Una de las primeras propuestas teóricas en Metamateriales Hiperbólicos Acústicos (MHA) fue publicada en 2012 por J. Christensen y J. García en la referencia [4]. Ellos propusieron un diseño de platos perforados apilados separados por aire, dando refracción negativa para varios ángulos de la onda incidente y dispersión hiperbólica. Posteriormente en 2015, C. Shen et al, presentaron el diseño y caracterización experimental de un MHA hecho por estructura tipo plato fácil de construir. Para el tratamiento teórico de su propuesta realizaron un estudio en 1D para la propagación en  $x$  y otro para  $y$  [5].

Sin embargo, muchos de los trabajos centrados en el estudio de la anisotropía no tomaban en cuenta los efectos disipativos en el cristal fonónico o metamaterial acústico. Pero desde tiempo atrás, hubieron trabajos en los que sí estaban interesados en los efectos de disipación. Uno de los primeros trabajos se publicó en 2012 por E. Reyes Ayona et al. Ellos presentaron una propuesta teórica donde se tomaban en cuenta los efectos disipativos en un cristal fonónico [6]. Sus expresiones analíticas y simulaciones numéricas mostraban como los efectos de viscosidad afectaban principalmente al campo de presión dispersado (lejano) y que la presencia de viscosidad hacía que aumentara la longitud de onda mínima para obtener una homogeneización a un único dispersor. De este trabajo es importante mencionar, que el enfoque fue utilizando la Ecuación de Navier Stokes, la cual involucra los

elementos de viscosidad del líquido presente en el cristal fonónico.

Dado lo novedoso de la propuesta anterior, gran parte de la investigación se centró en el estudio de la viscosidad como un elemento disipativo presente en los cristales fonónicos. Un trabajo que demuestra la importancia de la viscosidad en estos sistemas fue publicado en 2015 por G. P. Ward et al. [7]. Aquí se muestra un estudio experimental que reporta una reducción en la velocidad del sonido del 5% cuando este se propaga a través de cavidades o hendiduras en una placa de aluminio, donde se forma una barrera viscosa que ocupaba tan solo el 5 % del ancho total. Además ellos mencionan que hasta ese entonces, los trabajos sobre metamateriales habían ignorado los efectos de estas barreras de viscosidad que podían disminuir la propagación del sonido.

En 2016 Miguel Molerón et al., publicaron una de las primeras propuestas tanto experimental como teóricas de la influencia de efectos termoviscosos en metamateriales acústicos. Ellos mencionan que incluir estos efectos no es un simple refinamiento, ya que es un elemento que desempeña un papel importante en la respuesta acústica [8]. Otros trabajos posteriores a éste, dan por sentado la importancia de la viscosidad presente en metamateriales acústicos.

En 2017, Xue Jiang et al., presentan de forma analítica y numérica un estudio de los efectos de la disipación termoviscosa a través de una metasuperficie. Mencionan una reducción de alrededor del 28 % de la transmisión del sonido cuando la barrera viscosa solo ocupa el 2.3 % del ancho de la hendidura, lo cual son porcentajes que no se pueden pasar por alto tal y como se demuestra en un artículo publicado el año siguiente [9].

En 2017 José Sánchez-Dehesa y su grupo de trabajo demuestran experimentalmente y numéricamente con el método de elementos de frontera (BEM) y método de elemento finito (FEM), como el comportamiento doblemente negativo en un metamaterial acústico compuesto por bloques, es casi 100 % suprimida debido a la absorción termoviscosa, aun cuando las capas viscosas son muy pequeñas. Además, se muestra como en la región donde ellos esperaban tener un índice de refracción negativa, al considerar las pérdidas termoviscosas se observó reflexión del 30 % y absorción del 70 % del total de la energía incidente. Ellos mencionan que el total de energía disipada es debido a los efectos termoviscosos [10].

Sin embargo, los trabajos hasta entonces, no presentaban una propuesta sólida capaz de explicar la naturaleza física de los fenómenos de absorción del sonido debido a la viscosidad presente en cristales fonónicos. Hacía falta pues un desarrollo analítico

riguroso que tomara en cuenta la contribución de los múltiples dispersores presentes en la estructura periódica y la influencia de los gradientes de velocidad ocasionados por las barreras sólido-líquido. Es así, que en 2020, M. Ibarias et al., presentan un modelo analítico de homogeneización capaz de calcular de manera exacta el coeficiente de decaimiento del sonido en un medio elástico con periodicidad o cristal fonónico [11]. La teoría propuesta se basa en el método de expansión de ondas planas válido a bajas frecuencias (muy por debajo del intervalo de brecha prohibida) y es válida para cualquier estructura bidimensional (cualquier red de Bravais 2D y cualquier sección transversal arbitraria de los dispersores duros) compuesta por sólido-fluido suponiendo que los dispersores sólidos no son disipativos, es decir, las pérdidas de energía en los sólidos son insignificantes en comparación con las del fluido. En ese trabajo, las pérdidas viscosas en el fluido se calculan a partir de la ecuación hidrodinámica de Navier-Stokes. Entre los resultados mostrados en dicho trabajo, se predice que un cristal fonónico con una celda unitaria anisótropa, se comportará como un fluido homogéneo con una fuerte anisotropía en el coeficiente de decaimiento, es decir, se predice que la viscosidad efectiva es una cantidad fuertemente anisótropa. Esta propiedad es nueva en la lista de características metamateriales ya conocidas de cristales fonónicos. Es una propiedad efectiva muy importante ya que define en gran medida la eficiencia del dispositivo acústico donde el cristal fonónico se utiliza como elemento principal. Además, el coeficiente de decaimiento del sonido calculado, escala como la raíz cuadrada de la frecuencia a diferencia de la dependencia cuadrática conocida en los fluidos homogéneos. Además, el coeficiente de decaimiento en el cristal fonónico es proporcional a la raíz cuadrada del coeficiente de viscosidad de corte, a diferencia de la conocida dependencia lineal en los fluidos en bulto. Estas importantes diferencias se deben a la formación de una capa de viscosidad estrecha cerca de la frontera sólido-líquido, donde las pérdidas por disipación exceden por algunos órdenes de magnitud a las pérdidas en la mayor parte del fluido.

Al tener ahora una herramienta que permite el estudio de sistemas considerando la contribución de la disipación se presenta la oportunidad de reestudiar y analizar completamente aquellos sistemas cuyas propuestas no tomaban en cuenta esta propiedad. En este trabajo se utiliza la teoría propuesta en la referencia [11] para analizar distintas estructuras elásticas bidimensionales con el fin de calcular el parámetro de viscosidad efectiva. Los cristales estudiados están compuestos de inclusiones sólidas de aluminio con diversas geometrías (circular, cuadrada, rectangular y triangular) en una matriz líquida de agua, arreglados periódicamente en una red cuya geometría también es variada (cuadrada, rec-

tangular, hexagonal). Se estudian las posibles combinaciones de estas geometrías con el objetivo de variar el contraste acústico y encontrar el arreglo que permita obtener la máxima disipación del sonido manteniéndose siempre en el régimen de alto contraste acústico donde funciona la teoría.

Antes de comenzar con los cálculos de las diferentes estructuras es necesario fundamentar la teoría utilizada. Es por eso que esta tesis comienza explicando, en el segundo capítulo, los fundamentos necesarios de mecánica de fluidos. Aquí se revisan las ecuaciones que rigen la dinámica de fluidos ideales y viscosos. De igual manera se estudian las pérdidas energéticas dentro de un fluido viscoso, y por último se aborda el problema de un cuerpo oscilante sumergido en un fluido. En el tercer capítulo, se explica el proceso de homogeneización utilizado. Además se revisan los fundamentos que permiten aprovechar la periodicidad del cristal y se extienden los resultados obtenidos en la sección anterior, a un sistema periódico. Es aquí donde se obtienen las expresiones finales ocupadas para el cálculo del coeficiente de decaimiento. En el capítulo cuarto, simplemente se describe el cálculo de los coeficientes de Fourier para las distintas geometrías, lo cual es de importancia para la escritura del código que realiza el cálculo numérico. Para finalizar se presentan los resultados numéricos obtenidos a partir del desarrollo de un código en el programa Fortran y se presentan las conclusiones finales del trabajo.

## 1.1 Objetivos

Calcular la viscosidad efectiva en distintos cristales fonónicos 2D con el fin de obtener el coeficiente de decaimiento máximo del sonido, utilizando una teoría de homogeneización válida para metamateriales con alto contraste acústico entre sus componentes.

### 1.1.1 Objetivos particulares

1. Estudio y entendimiento de la teoría de homogeneización propuesta en la referencia [11].
2. Selección de distintas redes de Bravais 2D, distintos dispersores sólidos y materiales para los componentes internos del cristal fonónico. Posteriormente realizar el cálculo analítico de factores de forma.
3. Desarrollo de código numérico para la implementación de la teoría de homogeneización

con los respectivos factores de forma, redes de Bravais 2D y materiales internos seleccionados. Para su posterior simulación y análisis de resultados.

## Capítulo 2

# Dinámica de fluidos

El método de homogeneización utilizado propone considerar a nuestro cristal como un fluido homogéneo en el límite de onda larga. Debido a esto, es importante entender el comportamiento de los fluidos viscosos para poder describir la conducta de las ondas elásticas propagándose a través de un medio metamaterial anisótropo.

### 2.1 Fluido ideal

Consideremos cierto volumen de fluido. La fuerza que actúa sobre este es igual a la integral

$$-\oint p d\mathbf{A} \quad (2.1)$$

de la presión ejercida sobre la superficie del volumen. Pasamos esta a una integral de volumen y obtenemos:

$$-\oint p d\mathbf{A} = -\int \nabla p dV \quad (2.2)$$

Puede observarse que un fluido que rodea cualquier elemento de volumen  $dV$  ejerce una fuerza sobre el mismo  $-dV\nabla p$ . O bien, tenemos una fuerza  $\nabla p$  actuando sobre nuestro elemento de volumen. Para escribir la ecuación de movimiento de este elemento de volumen igualamos la fuerza  $-\nabla p$  al producto de la masa sobre unidad de volumen ( $\rho$ ) por la aceleración  $dv/dt$ :

$$\rho d\mathbf{v}/dt = -dv\nabla p \quad (2.3)$$

La derivada  $d\mathbf{v}/dt$  representa la tasa de cambio que efectúa la velocidad de una partícula en el fluido moviéndose en el espacio. Es necesario expresar esta derivada en términos de las magnitudes referentes a puntos espaciales fijos. Para esto, se observa que la variación  $d\mathbf{v}$  de la velocidad de la partícula en el tiempo  $dt$  se compone de dos partes, la variación de un punto fijo del espacio en el tiempo  $dt$  y la diferencia entre velocidades en dos diferentes puntos  $d\mathbf{r}$ , donde este diferencial representa la distancia recorrida por la partícula en un periodo de tiempo  $dt$ . La primera parte es  $(\partial\mathbf{v}/\partial t)dt$ , donde la derivada  $\partial\mathbf{v}/\partial t$  es constante para un punto fijo en el espacio. La segunda parte

$$dx \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad (2.4)$$

De esta manera,

$$d\mathbf{v} = (\partial\mathbf{v}/\partial t)dt + (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad (2.5)$$

Dividiendo ambos lados entre  $dt$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad (2.6)$$

Sustituyendo esta expresión dentro de la ecuación (2.3), obtenemos

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} \quad (2.7)$$

Esta es la denominada *ecuación de Euler*. Obtenida por primera vez en 1755 por *L. Euler*, esta ecuación describe el movimiento de un fluido ideal y es una de las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos.

## 2.2 Fluido con viscosidad

En la sección anterior se estudió el comportamiento de un fluido ideal, sin embargo, en nuestro sistema existen pérdidas por disipación de la energía. Estas pérdidas son ocasionadas durante el movimiento del fluido sobre sí mismo como resultado de la irreversibilidad termodinámica del movimiento. Las principales causas de esta irreversibilidad son la conducción térmica y la fricción interna del fluido (viscosidad).

Para poder expresar el movimiento de un fluido viscoso debemos añadir términos adicionales a nuestra ecuación de movimiento de un fluido ideal. Para agregar estos términos debemos escribir la ecuación de Euler en términos del tensor de flujo de momento.

### 2.2.1 Ecuación de Flujo de Momento

Utilizando la ecuación de Euler, (2.7), la ecuación de continuidad (ecuación 1.2 en [12]) podemos obtener el flujo de momento:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}. \quad (2.8)$$

donde

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k \quad (2.9)$$

es el *tensor de flujo de momento*, el cual expresa la cantidad de momento por unidad de tiempo que atraviesa una superficie al fluir hacia afuera de esta. La ecuación (2.8), es una expresión análoga de la ecuación de Euler.

### 2.2.2 Tensor de viscosidad y ecuación de Navier-Stokes

Como se mencionó anteriormente, la viscosidad es un efecto proveniente de la irreversibilidad termodinámica del movimiento. Debido a esto es necesario realizar un cambio en la ecuación de movimiento del fluido ideal para considerar los efectos del elemento de viscosidad en la ecuación (2.9):

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k \quad (2.10)$$

donde:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik} \quad (2.11)$$

es el *tensor de estrés*, y  $\sigma'_{ik}$  es el *tensor de estrés viscoso*, que es consecuencia de la fricción interna causada por las partículas moviéndose con diferentes velocidades. Este tensor se expresa como:

$$\sigma'_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \xi \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}, \quad (2.12)$$

donde  $\eta$  y  $\epsilon$  son los coeficientes de viscosidad. Para el caso de un fluido isótropo estos coeficientes son escalares [12]. Introducimos los elementos de estrés viscoso de la ecuación

(2.12) en la ecuación (2.7) en la forma  $\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}$ :

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \xi \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \quad (2.13)$$

Esta ecuación (2.13) es la ecuación de movimiento para fluidos viscosos, también conocida como la ecuación de movimiento de Navier-Stokes. En presencia de ondas elásticas se puede apreciar un movimiento oscilatorio de amplitud pequeña dentro del fluido compresible, el cual causa una compresión sobre sí mismo. Al ser una oscilación pequeña podemos despreciar el término  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  en la ecuación de Euler. Además, es sabido que al considerar un fluido incompresible obtenemos que el término  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

### 2.3 Pérdidas en fluido viscoso homogéneo

Las ondas acústicas sufren una disipación de energía debido a los efectos viscosos y a la conductividad térmica del fluido por donde se propagan, lo que puede traducirse como la absorción del sonido por el medio. En esta sección se calcula la energía disipada  $\dot{E}_{mec}$  debido a estos efectos.

La energía mecánica se puede describir como la cantidad máxima de trabajo realizado al pasar de un estado fuera de equilibrio a uno de equilibrio termodinámico. Esta cantidad máxima la obtenemos cuando la transición sucede sin variar la entropía del sistema, o bien el proceso es reversible. Esto indica que  $E_{mec} = E_0 - E(S)$ , donde  $E_0$  es la energía inicial y  $E(S)$  es la energía en el estado de equilibrio cuya entropía permaneció constante. Aplicando la derivada temporal a esta expresión obtenemos  $\dot{E}_{mec} = -\dot{E}(S) = -(\partial E/\partial S)\dot{S}$ . Esta derivada parcial de la energía respecto a la entropía es la temperatura del sistema cuando se encuentra en equilibrio. Definimos esta temperatura como  $T_0$  para llegar a la expresión  $\dot{E}_{mec} = -T_0\dot{S}$  [12].

Al variar ligeramente la temperatura, el cambio de la entropía debido a los factores de disipación (conducción térmica y viscosidad) puede expresarse como:

$$\dot{E}_{mec} = -\frac{\kappa}{T} \int (\nabla T)^2 dV - \frac{1}{2} \eta \int \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 dV - \xi \int (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 dV, \quad (2.14)$$

donde  $\kappa$  es el módulo de compresibilidad. Si escogemos la dirección de propagación de la onda sobre el eje  $x$  el vector de velocidad tendría las componentes  $v_x = v_0 \cos(kx - \omega t)$ ,  $v_y = v_z = 0$ . Introduciendo esta velocidad en la ecuación anterior podemos obtener el

término

$$-\left(\frac{4}{3}\eta + \xi\right) \int \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 dV = -k^2 \left(\frac{4}{3}\eta + \xi\right) v_0^2 \int \sin^2(kx - \omega t) dV. \quad (2.15)$$

Al realizar el promedio temporal sobre este término obtenemos como resultado  $-k^2\left(\frac{4}{3}\eta + \xi\right)\frac{1}{2}v_0^2V_0$ , donde  $V_0$  es el volumen del fluido.

Calculando el primer término de la ecuación (2.14) conocemos que la desviación  $T'$  de la temperatura desde el valor de equilibrio tiene una relación con la velocidad de la forma:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\beta c T}{c_p} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\beta c T}{c_p} v_0 k \sin(kx - \omega t). \quad (2.16)$$

donde  $\beta$  el coeficiente de expansión térmica,  $c$  la velocidad del sonido y  $c_p$  la capacidad calorífica a presión constante.

Calculando el promedio temporal sobre esta ecuación obtenemos  $-\kappa c^2 T \beta^2 v_0^2 k^2 V_0 / 2c_p^2$ .

A través de la relación termodinámica,

$$c_p - c_v = T \beta^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = T \beta^2 \left(\frac{c_v}{c_p}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = T \beta^2 c^2 \frac{c_v}{c_p}, \quad (2.17)$$

reescribimos el promedio temporal como  $-\frac{1}{2}\kappa\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)k^2v_0^2V_0$  donde  $c_v$  es la capacidad calorífica a volumen constante.

Con los resultados obtenidos hasta ahora, podemos escribir una expresión para el promedio de la energía disipada:

$$\dot{E}_{mec} = \frac{1}{2}k^2v_0^2V_0 \left[ \left(\frac{4}{3}\eta + \xi\right) + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right) \right]. \quad (2.18)$$

Mientras que la energía total de la onda acústica esta dada por

$$\bar{E} = \frac{1}{2}\rho V_0 v_0^2 \quad (2.19)$$

Al propagar una onda a través de un fluido viscoso, la intensidad de esta disminuye a medida que se desplaza de la forma  $e^{-2\gamma x}$ . La amplitud de la onda decrece como  $e^{-\gamma x}$ , donde  $\gamma$  es el *coeficiente de decaimiento* y se define con la expresión [12]:

$$\gamma = \frac{|\dot{E}_{mec}|}{2c\bar{E}}. \quad (2.20)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.18) y (2.19) en la ecuación (2.20), obtenemos la expresión del coeficiente de decaimiento del sonido en un fluido homogéneo [12]:

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2\rho c^3} \left[ \left(\frac{4}{3}\eta + \xi\right) + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right) \right] \equiv a\omega^2. \quad (2.21)$$

Como se puede observar en la ecuación anterior, el decaimiento depende cuadráticamente de la frecuencia  $\omega$ .

## 2.4 Problema general de sólido inmerso en un fluido

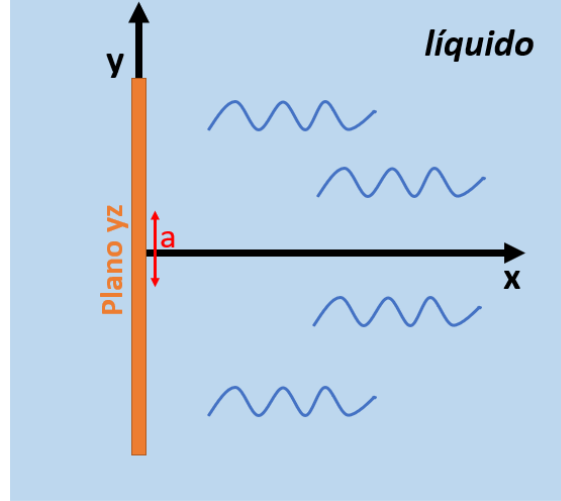


Figura 2.1: Esquema de plano oscilante dentro de un líquido: el plano oscila sobre el eje  $y$  con una amplitud  $a$ , el plano  $yz$  representa un plano infinito.

Al oscilar, un cuerpo sólido sumergido en un fluido viscoso, provoca un flujo con ciertas propiedades características. Con la intención de analizar estas propiedades es conveniente simplificar el problema inicial. Suponemos una superficie plana infinita oscilando armónicamente en su propio plano dentro de un fluido incompresible, con frecuencia  $\omega$ . La superficie está colocada sobre el plano  $yz$  mientras que el fluido se encuentra en la región  $x > 0$ ; la oscilación se realiza sobre la dirección  $y$  como se muestra esquemáticamente en la Figura (2.2). La velocidad de la superficie oscilante  $u$  es una función del tiempo que tiene la forma  $A\cos(\omega t + \alpha)$ . Por conveniencia, escribimos esta función como la parte real de una cantidad compleja [12],  $u = \text{Re}(u_0 e^{-i\omega t})$ , donde  $u_0 = A e^{-i\alpha}$  generalmente es compleja. Sin embargo, con una selección adecuada del origen temporal esta cantidad puede ser siempre real.

A partir de ahora, cuando se apliquen solo operaciones lineales sobre la velocidad  $u$ , se omitirá el signo  $\text{Re}$  procediendo con  $u$  complejo, tomando la parte real del resultado final. Así pues, la velocidad

$$u_y = u = u_0 e^{-i\omega t}. \quad (2.22)$$

La velocidad del fluido  $\mathbf{v}$  debe satisfacer las condiciones de frontera  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  cuando  $x = 0$ , por lo que  $v_x = v_z = 0$ ,  $v_y = u$ .

Por simetría, todas las cantidades dependen sólo de la coordenada  $x$  y del tiempo. En la ecuación de continuidad  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  por lo que  $\partial v_x / \partial x = 0$ , así  $v_x = cte = 0$  debido a la condición en la frontera. Dado que las magnitudes son independientes de las demás coordenadas,  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = v_x \partial \mathbf{v} / \partial x$  y como  $v_x$  es cero se puede deducir que  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = 0$ . Con esto la ecuación de movimiento (ecuación (2.13)) para un fluido incompresible y con coeficientes de viscosidad constantes puede expresarse en la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (2.23)$$

Como resultado obtenemos una ecuación lineal. La componente en  $x$  es  $\partial p / \partial x = 0$ , por lo que  $p = \text{constante}$ . Debido a la simetría propuesta se puede apreciar que la velocidad  $\mathbf{v}$  únicamente se encuentra en la dirección  $y$ . Según la ecuación (2.23) tenemos que para  $v_y = v$ :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (2.24)$$

donde  $\nu = \eta / \rho$  es la viscosidad cinemática. Esta es la ecuación de conducción del calor unidimensional. Considerando una onda plana, la solución a esta ecuación tiene una expresión de la forma:

$$v = u_0 e^{-x/\delta} e^{i(x/\delta - \omega t)}, \quad (2.25)$$

donde, para una onda plana

$$i\omega = \nu k^2, \quad k = (1 + i)/\delta, \quad \delta = \sqrt{2\nu/\omega}, \quad (2.26)$$

aquí se toma  $k$  con signo positivo puesto que, en caso contrario, la velocidad crecería ilimitadamente dentro del fluido, lo cual es un caso físicamente imposible.

La solución anterior indica la presencia de ondas transversales en los fluidos viscosos con velocidad  $v_y = v$  perpendicular a la dirección de propagación. Estas ondas se ven amortiguadas súbitamente en el interior del fluido ya que su amplitud disminuye exponencialmente conforme aumenta la distancia  $x$  a la superficie sólida oscilante.

La distancia la cual decae la amplitud se denota por  $\delta$  y se conoce como la *profundidad de penetración* de la onda. Esta es proporcional a la viscosidad cinemática del fluido e inversamente proporcional a la frecuencia de la onda [12].

La fuerza de rozamiento por unidad de área que actúa sobre el plano oscilante, evidentemente, se ejerce sobre el eje  $y$ . Esta fuerza es igual a la componente  $\sigma_{xy} = \eta \partial v_y / \partial x$

del tensor viscoso. El valor de la derivada se calcula en la superficie ( $x = 0$ ) ya que es una fuerza tangencial y sustituyendo (2.25), obtenemos:

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\omega\eta\rho\right)}(i-1)u. \quad (2.27)$$

Asumimos que  $u_0$  es real y considerando la parte real de (2.27) tenemos:

$$\sigma_{xy} = -\sqrt{\omega\eta\rho} \cos\left(\omega t + \frac{1}{4}\pi\right). \quad (2.28)$$

Sin embargo, existe una diferencia de fase entre la fuerza de fricción y la velocidad, ya que la velocidad del sólido oscilante es  $u = u_0 \cos(\omega t)$ .

Para poder escribir el promedio del tiempo de disipación usamos la fórmula:

$$\dot{E}_{cin} = \frac{1}{2}\eta \int \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV. \quad (2.29)$$

Pero para este caso particular es más sencillo calcular la disipación directamente como el trabajo que realizan las fuerzas de rozamiento. La energía disipada por unidad de tiempo por unidad de área del sólido en movimiento es el valor medio del producto de la velocidad  $u_y = u$  por la fuerza  $\sigma_{xy}$ :

$$-\overline{\sigma_{xy}u} = \frac{1}{2}u_0^2 \sqrt{\frac{1}{2}\omega\eta\rho}. \quad (2.30)$$

Como se puede observar esta expresión es proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia de oscilación de la onda así como también a la raíz cuadrada de la viscosidad.

### 2.4.1 Sólido con superficie arbitraria

En este apartado consideraremos un sólido con una geometría arbitraria. Como vimos al inicio de esta sección, el término  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  en la ecuación de movimiento del fluido es nulo para un plano oscilante. En el caso de una superficie arbitraria esto no sucede, sin embargo, suponemos que ese término es pequeño en comparación con el resto, de manera que este puede despreciarse.

Partiendo nuevamente de la ecuación lineal (2.23). Tomando el rotacional de ambos términos; el término resultante  $\nabla \times (\nabla p)$  se cancela, obteniendo así:

$$\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{v})}{\partial t} = \nu \nabla^2(\nabla \times \mathbf{v}), \quad (2.31)$$

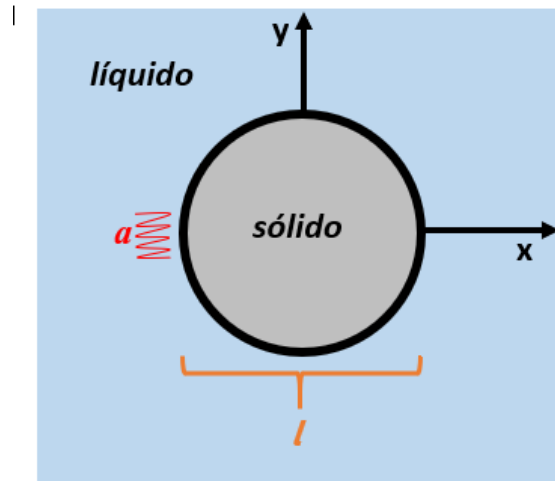


Figura 2.2: Sólido oscilante inmerso en un líquido

donde  $\nabla \times \mathbf{v}$  satisface la ecuación de conducción térmica. Esto lleva a observar que el movimiento del fluido provocado por las oscilaciones de un cuerpo es rotacional en cierta capa producida alrededor de este, mientras que al aumentar la distancia se convierte en un flujo potencial. La penetración de este flujo es del orden de  $\delta$  (ec.(2.26)).

### 2.4.2 Casos límite del sólido con superficie arbitraria

Existen dos casos límites de importancia: cuando la cantidad  $\delta$  es grande, o bien, cuando es pequeña comparada con las dimensiones del cuerpo que está oscilando. Tomando una cantidad  $l$  del orden de estas dimensiones, tenemos para el primer caso  $\delta \gg l$ ; lo que implica que  $l^2\omega \ll \nu$ . Consideramos también que el número de Reynolds es pequeño. Si tomamos  $a$  como la amplitud de las oscilaciones, la velocidad será del orden de  $a\omega$ . Por lo que el número de Reynolds del movimiento es  $\omega a l/\nu$ . Es así que inferimos:

$$l^2\omega \ll \nu, \quad \omega a l/\nu \ll 1. \quad (2.32)$$

Este es el caso de bajas frecuencias, lo que sustenta que la velocidad cambia lentamente debido al tiempo y por tanto, es correcto despreciar la derivada  $\partial \mathbf{v}/\partial t$  en la ecuación de movimiento. Como el número de Reynolds es pequeño también se puede despreciar el término  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ . La ausencia de este término nos dice que el flujo es estacionario. De esta manera, cuando  $\delta \gg l$ , podemos tomar el flujo como estacionario en un instante cualquiera.

Por lo que en este instante el flujo es el mismo que aquel provocado por el movimiento uniforme del cuerpo con su velocidad instantánea.

Para el caso donde  $l \gg \delta$  suponemos que la amplitud de las oscilaciones es pequeña comparada con las dimensiones del cuerpo:

$$l^2\omega \gg \nu; \quad a \ll l. \quad (2.33)$$

De esta manera el término  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  es despreciable nuevamente. A diferencia del caso anterior, en este, el número de Reynolds no es pequeño. El operador  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$  denota la derivación en dirección de la velocidad. No obstante, la velocidad en la superficie del cuerpo es casi tangencial. Sobre esta dirección la velocidad sólo puede variar a distancias del orden de las dimensiones del cuerpo, es por esto que:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \sim v^2/l \sim a^2\omega^2/l,$$

ya que sabemos que la velocidad es del orden de  $a\omega$ . Mientras que la derivada  $\partial\mathbf{v}/\partial t$  es del orden de  $v\omega \sim \omega^2$ . Comparando ambas expresiones, podemos observar que :

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \ll \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$$

cuando  $a \ll l$ . Se puede apreciar que ambos términos,  $\partial\mathbf{v}/\partial t$  y  $\nu\nabla^2\mathbf{v}$  son del mismo orden.

Procedemos a estudiar el flujo alrededor de un cuerpo oscilante mientras se cumplen las condiciones (2.33). Como se mencionó anteriormente, el flujo en la capa delgada próxima a la superficie es rotacional. Sin embargo, en el resto del fluido contamos con un flujo potencial. Exceptuando esta capa, el flujo en cualquier parte está dado por las ecuaciones:

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.34)$$

Expandiendo el Laplaciano en la forma  $\nabla^2\mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{v}$  podemos observar que  $\nabla^2\mathbf{v} = 0$ , y la ecuación de movimiento (2.23) se reduce a la ecuación de Euler. Como resultado, obtenemos un flujo ideal en todas partes excepto en la capa superficial que rodea al cuerpo. Al resolver las ecuaciones (2.34), debemos considerar que las condiciones de frontera deben satisfacerse en la superficie del cuerpo, por lo tanto, la velocidad del fluido debe ser igual a la del cuerpo. En un fluido ideal no se satisfacen estas condiciones. No obstante, sólo se requiere que se cumplan las condiciones correspondientes a la componente normal a la superficie de la velocidad del fluido.

A pesar de que las ecuaciones (2.34) no son aplicables en la capa que rodea al cuerpo, la distribución de velocidades que obtenemos de usar estas condiciones, satisface las condiciones de frontera para la componente normal, por lo tanto, el cambio sobre esta componente cercano a la superficie no tiene efectos significativos. Para encontrar la componente tangencial se deben resolver las ecuaciones (2.34) y se puede observar que esta es diferente a la componente correspondiente de la velocidad del cuerpo. Debido a esto se considera que la velocidad tangencial varía rápidamente en la capa superficial. Considerando una fracción cualquiera de la superficie del sólido, grande con respecto a  $\delta$ , pero pequeña en comparación con el cuerpo. Podemos considerar esta fracción como si fuera plana por lo que los resultados anteriores sobre una superficie plana son aplicables. Situando el eje  $x$  sobre la dirección normal a la porción seleccionada y el eje  $y$  en la dirección de la componente tangencial de la velocidad en la superficie en este punto. Definimos  $v_y$  como la componente tangencial de la velocidad del fluido relativa al cuerpo;  $v_y$  debe ser nula en la superficie. Asumiendo que el resultado de las ecuaciones (2.34) es de la forma  $v_y = v_0 e^{-i\omega t}$ . Con los resultados obtenidos anteriormente en esta sección, podemos decir que el valor de  $v_y$  tiende a cero en la capa superficial al acercarse a la superficie como

$$v_y = v_0 e^{-i\omega t} [1 - e^{-(1-i)x\sqrt{\omega/2\nu}}]. \quad (2.35)$$

Finalmente, la cantidad total de energía disipada por unidad de tiempo, queda expresada como la integral:

$$\bar{E}_{cin} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}\omega\eta\rho} \oint |v_0|^2 dl \quad (2.36)$$

calculando sobre la toda la superficie del sólido oscilante [12].

Una vez establecida la física detrás de la disipación de la energía en el problema de un sólido inmerso en un fluido, es posible extender estos resultados a un sistema periódico. Al contar con un arreglo cristalino se deben ocupar ciertas herramientas que aprovechen las característica de periodicidad del sistema para, así, llevar los resultados encontrados en esta sección al problema de viscosidad en un cristal fonónico.

## Capítulo 3

# Metamaterial acústico 2D con disipación

### 3.1 Homogeneización

Como se ha mencionado anteriormente, para poder utilizar los cálculos de la sección anterior (ec.(2.36)) para el desarrollo de la disipación, es necesario tener un sistema homogeneizado. Debido a esto es importante explicar en qué consiste la teoría de homogeneización utilizada. Este proceso tiene la intención de representar un material compuesto por dos o más medios (con propiedades físicas diferentes) como un único medio homogéneo, donde los parámetros que lo describen dependen de las propiedades individuales de sus componentes. Dentro de las condiciones necesarias para poder llevar a cabo este proceso se encuentra el considerar una longitud de onda mucho mayor que las dimensiones de los componentes. Esto se lleva a cabo tomando el límite cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ . En general, este proceso consta de expandir el vector de onda  $\mathbf{k}$  en serie de potencias alrededor de cero.

Cuando se aplican métodos de homogeneización es relevante que las propiedades de los componentes sean palpables por lo que las herramientas ocupadas para estudiar estos sistemas consideran aspectos individuales de los componentes como la periodicidad y la propagación de ondas. Existen diferentes métodos de homogeneización, los más utilizados son: el método de dispersión múltiple cuyos resultados asemejan de manera muy precisa a los obtenidos en diversos experimentos en el área de cristales fonónicos y metamateriales acústicos[6],[13]; con una gran precisión y utilizado por mucho tiempo en el campo de

los metamateriales fotónicos, el método de matriz de transferencia [14],[15]; por último el método de expansión en ondas planas utilizado recientemente en la homogeneización de metasólidos, metafluidos y cristales fonónicos [16],[17],[18].

En este proyecto se utiliza el método de expansión en ondas planas propuesto en la referencia [11] como parte de la teoría de homogeneización utilizada. Este método toma ventaja de la periodicidad de la red cristalina para expresar las cantidades físicas del sistema en término de una serie de Fourier.

### 3.2 Análisis de Fourier

Las estructuras cristalinas son invariantes ante cualquier traslación de la forma  $\mathbf{T} = u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + u_3\mathbf{a}_3$ , donde  $u_1, u_2, u_3$  son enteros y  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  representan los vectores unitarios en la dirección de los ejes del cristal. Toda propiedad física local del cristal debe ser invariante bajo la transformación  $\mathbf{T}$ . De gran relevancia, la densidad del número de átomos  $n(\mathbf{r})$  es una función periódica de  $\mathbf{r}$  con los respectivos periodos  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  en las direcciones axiales. De esta manera

$$n(\mathbf{r} + \mathbf{T}) = n(\mathbf{r}). \quad (3.1)$$

Esta periodicidad es lo que hace al sistema ideal para un análisis de Fourier. Considerando la función unidimensional  $n(x)$  con periodo  $a$  expandemos en una serie de Fourier de funciones trigonométricas:

$$n(x) = n_0 + \sum_{p>0} [C_p \cos(\frac{2\pi px}{a}) + S_p \sin(\frac{2\pi px}{a})], \quad (3.2)$$

donde las  $p$  son enteros positivos y  $C_p$  y  $S_p$  son los coeficientes de Fourier de la expansión. El factor  $2\pi/a$  asegura que la expansión de  $n(x)$  tiene periodo  $a$ :

$$\begin{aligned} n(x+a) &= n_0 + \sum [C_p \cos(2\pi px/a + 2\pi p) + S_p \sin(2\pi px/a + 2\pi p)], \\ &= n_0 + \sum_{p>0} [C_p \cos(2\pi px/a) + S_p \sin(2\pi px/a)] = n(x). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Con esto, se define  $2\pi/a$  como un punto en la red recíproca, donde estos puntos son los términos permitidos en las series de Fourier. Estos son permitidos si son consistentes con la periodicidad del cristal. Se puede escribir la expresión de la ecuación (3.2) de una manera más compacta:

$$n(x) = \sum_p n_p \exp(i2\pi px/a), \quad (3.4)$$

donde la suma es sobre todos los enteros  $p$ : positivos, negativos y cero.

Para llevar este procedimiento a un sistema tridimensional con una función periódica  $n(\mathbf{r})$  basta con encontrar el conjunto de vectores  $\mathbf{G}$  donde:

$$n(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} n_{\mathbf{G}} \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) \quad (3.5)$$

es invariante bajo cualquier traslación de la forma  $\mathbf{T}$  en el cristal [19].

### 3.3 Teorema de Bloch

El teorema de Bloch describe el comportamiento del movimiento de los electrones en un sólido. Se basa en la idea de que el sólido cuenta con una estructura periódica y permite tratar el movimiento de todos los electrones a partir del análisis de uno solo. Este teorema nos dice que *las soluciones de la ecuación de Schrödinger para un potencial periódico son el producto de una onda plana por una función con la periodicidad de la red* [19], de la forma:

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (3.6)$$

donde  $u_{\mathbf{k}}$  es la función con la misma periodicidad que la red.

### 3.4 Coeficiente de viscosidad

Como se ha mencionado, el interés de este proyecto se centra en el cálculo de la viscosidad efectiva en un sistema de cilindros rígidos embebidos en un fluido viscoso. Para los diferentes sistemas se consideran cilindros de sección transversal con diferentes geometrías. Como punto de partida debemos estudiar el comportamiento dentro de la celda unitaria del sistema para extender este resultado aprovechando la periodicidad de la red al momento de considerar la contribución de los múltiples dispersores.

De los cálculos obtenidos en el capítulo anterior tomamos los resultados para el problema de sólido inmerso en fluido. Las pérdidas de energía están dados por la ecuación (2.36). Esta expresión depende de los parámetros del sistema y de la distribución de velocidades, la cual debe ser calculada tomando en cuenta los múltiples dispersores. Sin embargo, es necesario confirmar que este sistema cumple con las condiciones de las ecuaciones (2.33).

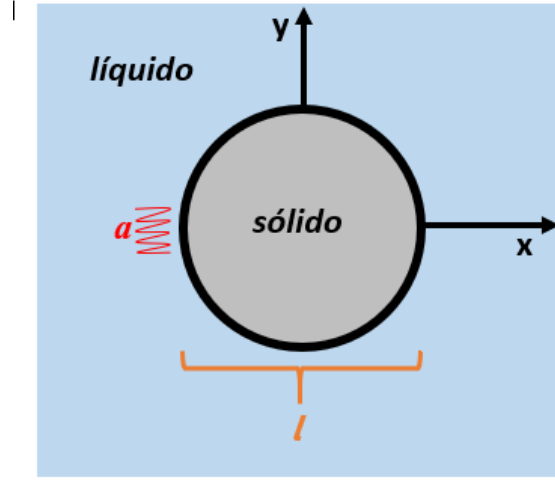


Figura 3.1: Sistema de cuerpo sólido oscilante inmerso en fluido viscoso

Considerando el sistema representado en la Figura 3.1 tenemos las siguientes condiciones: (1) Los coeficientes viscosos son independientes de las coordenadas. Al ser constantes la ecuación de Navier-Stokes se reduce a la ecuación (2.23). (2) La oscilación tiene una amplitud pequeña,  $a \ll l$ , así que el término  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = 0$ . (3) La profundidad de penetración esta dada por la expresión  $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ , donde el coeficiente de viscosidad cinemática esta dado por  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ . (4) Se considera un fluido incompresible,  $\xi = 0$ , por lo que el término  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  en la ecuación de Navier-Stokes. (5) Al tener que  $a, \delta \ll l$ , podemos considerar la superficie de oscilación plana por lo que  $v_y \neq 0$ . Estas condiciones del sólido, aunadas a la presencia de flujo potencial a una distancia lejana de la superficie permiten utilizar la ecuación (2.36) para describir la energía disipada en el sistema representado en la Figura (3.1). Esta ecuación se reescribe de forma conveniente como :

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho_b \eta \omega}{2}} \oint_L |\mathbf{v}(\mathbf{r})|^2 dl, \quad (3.7)$$

donde  $\rho_b$  es la densidad del fluido. En esta expresión la integral se realiza a lo largo del contorno del dispersor.

### 3.4.1 Cálculo de la distribución de velocidades

Aprovechando la periodicidad del sistema cristalino, podemos expandir los parámetros materiales en Serie de Fourier como:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda(\mathbf{r})} &= \sum_{\mathbf{G}} \beta(\mathbf{G}) \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) \\ \frac{1}{\rho(\mathbf{r})} &= \sum_{\mathbf{G}} \nu(\mathbf{G}) \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) \\ p(\mathbf{r}, t) &= \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \sum_{\mathbf{G}} p_k(\mathbf{G}) \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r})\end{aligned}\quad (3.8)$$

donde  $\lambda(\mathbf{r})$  es el modulo de compresibilidad y la presión  $p(\mathbf{r}, t)$  se expresa como una onda de Bloch. La dimensionalidad de estas ecuaciones es definida por los vectores de red recíproca  $\mathbf{G}$ . A partir de la ecuación de Navier-Stokes y despreciando los términos viscosos podemos obtener la ecuación de movimiento para medios elásticos, que no es más que la ecuación de fluido ideal tomando en cuenta el módulo de compresibilidad  $\lambda$ :

$$\frac{1}{\lambda(\mathbf{r})} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla p}{\rho(\mathbf{r})} \right). \quad (3.9)$$

Utilizando la expansión de los parámetros de la ecuación (3.8) en la expresión anterior, podemos escribir esta en el espacio de Fourier [20] de la forma:

$$\sum_{\mathbf{G}'} \nu(\mathbf{G} - \mathbf{G}') (\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}') p_k(\mathbf{G}') = \omega^2 \sum_{\mathbf{G}'} \beta(\mathbf{G} - \mathbf{G}') p(\mathbf{G}'), \quad (3.10)$$

la cual nos da un sistema de ecuaciones lineales donde los eigenvalores  $w_n(\mathbf{k})$  representan las bandas vibracionales del sistema [20]. Al usar la expansión de Fourier no es necesario el tomar en cuenta las condiciones en la frontera para el análisis de estructura, pues el medio periódico se representa como un medio continuo.

Trabajando con la parte espacial de la presión  $p(\mathbf{r})$  en el límite de longitud de onda larga, los coeficiente de Fourier  $p(\mathbf{G} \neq 0)$  desaparecen a excepción del término  $p(\mathbf{G} = 0) = p_0$  el cual nos da la contribución principal en este límite y representa la presión estática del sistema. Podemos reescribir la presión en su forma de onda de Bloch como:

$$p(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \sum_{\mathbf{G}} p(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} = p_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{G} \neq 0} p_k(\mathbf{G}) e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}}. \quad (3.11)$$

A partir de la ecuación (3.10) podemos encontrar una expresión para  $p_k$  [20] en función de la presión estática de la forma:

$$p_k(\mathbf{G}) = -p_0 \sum_{\mathbf{G}'} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{G}') \nu(\mathbf{G}') I(\mathbf{G}, \mathbf{G}') \quad (3.12)$$

Aquí introducimos una nueva matriz  $I(\mathbf{G}, \mathbf{G}') = [(\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}')\nu(\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}')]^{-1}$  donde la matriz  $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}')\nu(\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}')$  tiene la forma:

$$\begin{cases} (\rho_a^{-1} - \rho_b^{-1})(\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}')F(\mathbf{G} - \mathbf{G}') & \text{si } \mathbf{G} \neq \mathbf{G}' \\ (\frac{f}{\rho_a} + \frac{(1-f)}{\rho_b})G^2 & \text{si } \mathbf{G} = \mathbf{G}' \end{cases} \quad (3.13)$$

Para calcular la distribución de velocidades partimos de la ecuación de movimiento para flúidos, debido a las condiciones mencionadas anteriormente, usamos la ecuación de Euler (ecuación (2.7)). Sin embargo, debido a las mismas condiciones, el término  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = 0$  y, como sabemos, la velocidad va de acuerdo a  $e^{-i\omega t}$  por lo que obtenemos la forma linealizada de la ecuación de Euler:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\nabla P}{i\omega\rho} \quad (3.14)$$

Sustituyendo la ecuación (3.11) en la expresión anterior y tomando sólo hasta los términos lineales. Debido al límite  $k \rightarrow 0$ , obtenemos la expresión para la velocidad:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = p_0 \frac{\mathbf{k}}{\omega\rho(\mathbf{r})} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\omega\rho(\mathbf{r})} \sum_{\mathbf{G} \neq 0} \mathbf{G} p_1(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} \quad (3.15)$$

donde el coeficiente  $p_1(\mathbf{G})$  se obtiene de la ecuación (3.12). Sustituyendo este valor en términos de la presión estática en la ecuación anterior, y elevando al cuadrado, obtenemos la expresión final para la distribución de velocidades en el fluído:

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}(\mathbf{r})|^2 = & \frac{P_0^2}{c_{eff}^2(\mathbf{n})\rho^2(\mathbf{r})} \left[ 1 - 2 \sum_{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_1) \times \right. \\ & (\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_2)\nu(\mathbf{G}_2)I(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2)e^{i\mathbf{G}_1\cdot\mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4} e^{i(\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_3 \cdot \mathbf{r})} \times \\ & \left. (\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_3)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_2)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_4)\nu(\mathbf{G}_2)\nu(\mathbf{G}_4)I(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2)I(\mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4) \right] \quad (3.16) \end{aligned}$$

Estas distribuciones (presión y velocidad) no coinciden en límite de longitud de onda larga ya que la velocidad no se homogeneiza mientras que la presión es continua. A provenir de la ecuación de fluido ideal, la componente tangencial de velocidad el fluido no coincide con la misma componente de la velocidad en el sólido [21]. Es debido a esta discontinuidad que la velocidad total no puede homogeneizarse. A pesar de esto, esta componente es la que contribuye dentro de la integral de contorno en la ecuación (3.7). Por otra parte, al satisfacerse las condiciones de alto contraste acústico la componente normal

de la velocidad es despreciable en la interfaz sólido-líquido. Respecto a la presión, esta se homogeneiza para cualquier material elástico con densidad  $\rho_s$  a excepción de cuando tomamos  $\rho_s = \infty$ . Al tener una densidad infinita las ondas no penetran dentro del material por lo que la presión tanto en la superficie como en el interior del sólido es  $p(\mathbf{r}) = 0$ , mientras que esta permanece constante en cualquier otro punto,  $p(\mathbf{r}) \approx p_0$ , si  $k \rightarrow 0$ . Como estas discontinuidades ocurren debido al sólido, tienen la periodicidad de la red. Además, según la ecuación (3.12),  $p_k \sim k$ , por lo que los coeficientes de Fourier  $p_k(\mathbf{G})$  no desaparecen en este límite. Estos permanecen constantes si la matriz  $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}')\nu(\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}')$ , ecuación (3.13), es singular en el límite de densidad infinita. Al momento de realizar los cálculos numéricos para el modelo se propone una densidad significativamente grande pero finita, de esta manera, se busca evitar la singularidad al hacer la inversión de esta matriz. Así, la presión permanece como una función continua que permite la homogeneización.

De esta manera podemos realizar los cálculos para la expresión analítica de la viscosidad, ecuación (2.20), utilizando el límite de densidad infinita sólo en aquellas expresiones donde se presenta una singularidad que evita la homogeneización de la presión. Es así que, introduciendo la distribución de velocidades en las expresiones para la energía disipada (ecuación (3.7)) y la energía acústica en la celda unitaria  $E_c = \frac{1}{2} \int_{A_c} \rho(\mathbf{r}) |\mathbf{v}(\mathbf{r})|^2 da$ , obtenemos la expresión final para el coeficiente de decaimiento del sonido en un cristal fonónico:

$$\gamma(\mathbf{n}) = \frac{L_0}{2A_c C_{eff}(\mathbf{n})} \sqrt{\frac{\omega\eta}{2\rho_b}} \frac{M_0(\mathbf{n})}{N_0(\mathbf{n})}, \quad (3.17)$$

donde:

$$\begin{aligned} M_0(\mathbf{n}) = & 1 + \frac{2}{\rho} \sum_{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2} L^*(\mathbf{G}_1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_2) F(\mathbf{G}_2) I(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2) + \\ & \frac{1}{\rho^2} \sum_{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4} L^*(\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_3)(\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_3)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_2)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_4) F(\mathbf{G}_2) \times \\ & F(\mathbf{G}_4) I(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2) I(\mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4), \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} N_0(\mathbf{n}) = & (1 - f) - \frac{2}{\rho} \sum_{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2} F^*(\mathbf{G}_1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_2) F(\mathbf{G}_2) I(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2) + \\ & \frac{1}{\rho^2} \sum_{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4} F^*(\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_3)(\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_3)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_2)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_4) F(\mathbf{G}_2) \times \\ & F(\mathbf{G}_4) I(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2) I(\mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4). \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde los términos  $L(\mathbf{G})$  y  $F(\mathbf{G})$  son los coeficientes de Fourier o factores de estructura

que dependen de la geometría del dispersor sólido y se calculan de acuerdo a las integrales:

$$L(\mathbf{G}) = \frac{1}{L_0} \oint_{L_0} e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} dl, \quad F(\mathbf{G}) = \frac{1}{A_c} \int_{A_a} e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} da \quad (3.20)$$

donde  $L_0$  y  $A_a$  son el contorno y el área del dispersor sólido y  $A_c$  es el área de la celda unitaria. Por otro lado, la velocidad del sonido se calcula normalmente como en la referencia [20]:

$$C_{eff}^2(\mathbf{n}) = \frac{\bar{\nu}}{\bar{\beta}} - \frac{1}{\bar{\beta}} \sum_{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2 \neq 0} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_2) \nu(\mathbf{G}_1) \nu(-\mathbf{G}_2) I(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2) \quad (3.21)$$

donde:

$$\beta(0) = \bar{\beta} = \frac{f}{\lambda_s} + \frac{1-f}{\lambda}, \quad (3.22)$$

Estas expresiones permiten el cálculo de la viscosidad efectiva para cualquier cristal fonónico de inclusiones sólidas con sección transversal y estructura de red arbitrarias. Sin embargo, es de importancia recordar que para realizar estos cálculos se debe considerar una frecuencia de propagación dentro del límite permitido por la teoría de homogeneización. Esto es, donde la relación de dispersión tiene un comportamiento cuasi-lineal mientras no exista una brecha prohibida. Para el cálculo de la estructura de bandas del composito se utiliza la ecuación (3.10) como se propone en la referencia [16].

## Capítulo 4

# Coeficientes de Fourier

Como se observó en el capítulo anterior, el coeficiente de decaimiento del sonido cuenta dentro de su expresión con los coeficientes de Fourier dependientes de la geometría del dispersor (ecuación (3.20)). En esta sección se muestra brevemente el cálculo de estos coeficientes para cada tipo de dispersor.

### 4.1 Dispersores Rectangulares

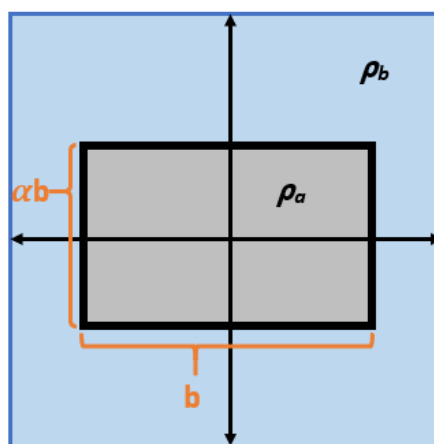


Figura 4.1: Inclusión sólida rectangular en líquido viscoso

Partiendo de la definición en la ecuación (3.20) y tomado como referencia la Figura

(4.1), la integral del coeficiente dependiente del área,  $F(\mathbf{G}) = \frac{1}{A} \int_{A_a} e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}$  tiene la forma

$$F(\mathbf{G}) = \frac{1}{A_c} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-iG_x x} dx \int_{\alpha b/2}^{\alpha b/2} e^{-iG_y y} dy \quad (4.1)$$

donde  $\alpha$  es la relación entre los lados del paralelogramo.

Debido a la simetría de las funciones trigonométricas obtenidas de la expansión del integrando  $e^{-iG_x x}$  el resultado de esta integral queda expresado solo en términos de la función *seno* de la forma:

$$F(\mathbf{G}) = \frac{1}{A} \left[ \left( \frac{2\sin(G_x \frac{b}{2})}{G_x} \right) \left( \frac{2\sin(G_y \alpha \frac{b}{2})}{G_y} \right) \right] \quad (4.2)$$

Como el cálculo es numérico es importante considerar las singularidades cuando el denominador se hace cero. Recordando que las sumatorias son sobre  $\mathbf{G} \neq 0$  y tomando los límites adecuados, escribimos la expresión anterior como:

$$F(\mathbf{G}) = \begin{cases} \frac{1}{A} \frac{2b\sin(G_y \frac{\alpha b}{2})}{G_y} & \text{si } G_x = 0 \\ \frac{1}{A} \frac{2\alpha b\sin(G_x \frac{b}{2})}{G_x} & \text{si } G_y = 0 \\ \frac{1}{A} \left( \frac{2\sin(G_x \frac{b}{2})}{G_x} \right) \left( \frac{2\sin(G_y \alpha \frac{b}{2})}{G_y} \right) & \end{cases} \quad (4.3)$$

Siguiendo el esquema de la Figura (4.1) se realiza el cálculo del factor de estructura dependiente del contorno del dispersor. Resolviendo la integral de contorno para esta sencilla figura, obtenemos:

$$L(\mathbf{G}) = \begin{cases} \frac{1}{L_0} \frac{2b\cos(G_y \frac{\alpha b}{2}) + 4\sin(G_y \frac{\alpha b}{2})}{G_y} & \text{si } G_x = 0 \\ \frac{1}{L_0} \frac{4\sin(G_x \frac{b}{2}) + 2\alpha b\cos(G_x \frac{b}{2})}{G_x} & \text{si } G_y = 0 \\ \frac{1}{L_0} \left[ \frac{4}{G_x} \sin(G_x \frac{b}{2}) \cos(G_y \alpha \frac{b}{2}) + \frac{4}{G_y} \cos(G_x \frac{b}{2}) \sin(G_y \alpha \frac{b}{2}) \right] & \end{cases} \quad (4.4)$$

Para el caso de inclusiones cuadradas, simplemente basta con hacer  $\alpha = 1$  para obtener las expresiones de los factores de estructura, ya que este coeficiente define la relación entre los lados del paralelogramo.

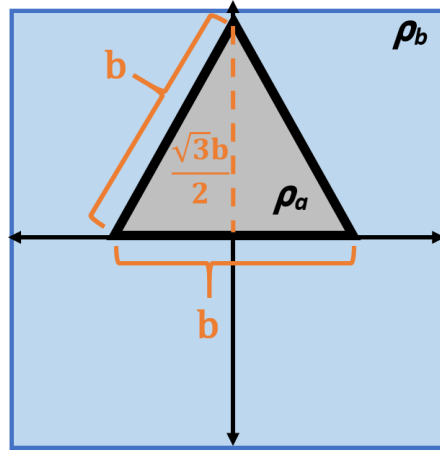


Figura 4.2: Inclusión sólida triangular en líquido viscoso

## 4.2 Dispersores triangulares

Del diagrama en la Figura (4.2) es posible observar que para realizar el cálculo del coeficiente de forma, es necesario dividir la integral de área como:

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{G}) = & \frac{1}{A_c} \left[ \int_{-b/2}^0 e^{-iG_x x} dx \int_0^{\sqrt{3}(x+\frac{b}{2})} e^{-iG_y y} dy \right. \\
 & \left. + \int_0^{b/2} e^{-iG_x x} dx \int_0^{-\sqrt{3}(x-\frac{b}{2})} e^{-iG_y y} dy \right] \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

Realizando el cálculo de la expresión anterior, el coeficiente de Fourier para dispersores triangulares tiene la forma:

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{G}) = & \frac{2i}{AG_y} \left\{ \sin\left(\left(G_x + \sqrt{3}G_y\right)\frac{b}{4}\right) \frac{e^{\frac{ib}{4}(G_x - \sqrt{3}G_y)}}{G_x + \sqrt{3}G_y} \right. \\
 & \left. + \sin\left(\left(G_x - \sqrt{3}G_y\right)\frac{b}{4}\right) \frac{e^{-\frac{ib}{4}(G_x + \sqrt{3}G_y)}}{G_x - \sqrt{3}G_y} - \frac{\sin\left(G_x \frac{b}{2}\right)}{G_x} \right\} \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Tomando en cuenta los límites adecuados para evitar las singularidades, las expresiones tienen la forma:

$$F(\mathbf{G}) = \begin{cases} \frac{i}{AG_y} \left( \frac{4\sin(\sqrt{3}G_y \frac{b}{4}) e^{-i\sqrt{3}G_y \frac{b}{4}}}{\sqrt{3}G_y} - b \right) & si \quad G_x = 0 \\ \frac{2\sqrt{3}}{AG_x^2} (1 - \cos(G_x \frac{b}{2})) & si \quad G_y = 0 \\ -\frac{i\sqrt{3}}{AG_x} \left( \frac{be^{iG_x \frac{b}{2}}}{2} - \frac{\sin(G_x \frac{b}{2})}{G_x} \right) & si \quad G_x = -\sqrt{3}G_y \\ \frac{i\sqrt{3}}{AG_x} \left( \frac{be^{-iG_x \frac{b}{2}}}{2} - \frac{\sin(G_x \frac{b}{2})}{G_x} \right) & si \quad G_x = \sqrt{3}G_y \end{cases} \quad (4.7)$$

El coeficiente de Fourier dependiente del contorno puede expresarse como:

$$L(\mathbf{G}) = \frac{1}{L_0} \left[ \int_{c_1} e^{-iG_x x} dx + \int_{c_2} e^{-i(G_x x + G_y y(x))} dl + \int_{c_3} e^{-i(G_x x + G_y y(x))} dl \right] \quad (4.8)$$

donde  $c_n$  representa cada una de las tres rectas en las que podemos descomponer el contorno del triángulo y  $c_1$  es la recta  $y = 0$ . Si reescribimos la expresión anterior parametrizando  $y$  como una función de  $x$  obtenemos:

$$L(\mathbf{G}) = \frac{1}{L_0} \left[ \int_{-b/2}^{b/2} e^{-iG_x x} dx + 2 \int_0^{-b/2} e^{-i(G_x x + \sqrt{3}G_y(x + \frac{b}{2}))} dx + 2 \int_{b/2}^0 e^{-i(G_x x - \sqrt{3}G_y(x - \frac{b}{2}))} dx \right] \quad (4.9)$$

Resolviendo la ecuación anterior obtenemos la expresión final del factor de forma para el dispersor triangular

$$L(\mathbf{G}) = \frac{1}{L_0} \left\{ \frac{\sin(G_x \frac{b}{2})}{G_x} - 2ie^{-i\frac{b}{2}\sqrt{3}G_y} \left[ \frac{1 - e^{-i\frac{b}{2}(G_x - \sqrt{3}G_y)}}{G_x - \sqrt{3}G_y} + \frac{e^{i\frac{b}{2}(G_x + \sqrt{3}G_y)} - 1}{G_x + \sqrt{3}G_y} \right] \right\} \quad (4.10)$$

Tomando en cuenta los límites que evitan las indefiniciones obtenemos:

$$L(\mathbf{G}) = \begin{cases} \frac{1}{L_0} \frac{e^{-i\sqrt{3}G_y \frac{b}{4}}}{\sqrt{3}G_y} (b + 8\sin(\sqrt{3}G_y \frac{b}{4})) & si \quad G_x = 0 \\ \frac{1}{L_0} \frac{6\sin(G_x \frac{b}{2})}{G_x} & si \quad G_y = 0 \\ \frac{1}{L_0} \left( \frac{4\sin(G_x \frac{b}{2})}{G_x} + be^{iG_x \frac{b}{2}} \right) & si \quad G_x = -\sqrt{3}G_y \\ \frac{1}{L_0} \left( \frac{4\sin(G_x \frac{b}{2})}{G_x} + be^{-iG_x \frac{b}{2}} \right) & si \quad G_x = \sqrt{3}G_y \end{cases} \quad (4.11)$$

### 4.3 Dispersor circular

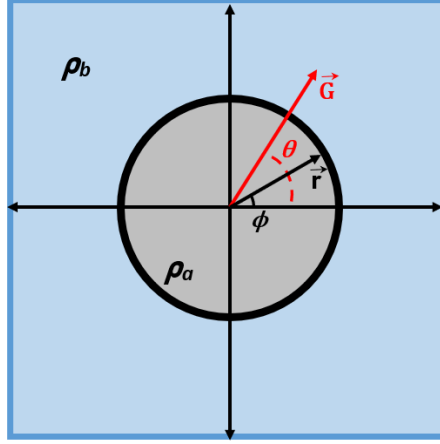


Figura 4.3: Inclusión sólida circular en líquido viscoso

Para poder llevar las integrales dentro de los coeficientes de Fourier a una forma más sencilla, describimos las variables del sistema en coordenadas polares. De esta manera obtenemos la expresión:

$$F(\mathbf{G}) = \frac{1}{A_c} \int_0^R r dr \int_{\alpha}^{2\pi} e^{-i\mathbf{G}r \cos(\theta-\varphi)} d\varphi \quad (4.12)$$

Integrando por partes respecto a la variable  $r$  y trabajando algebraicamente la expresión resultante, podemos escribir el resultado del coeficiente de Fourier como:

$$F(\mathbf{G}) = \frac{4R^2}{A_c} \int_0^{\pi/2} \sin^2(\xi) \cos[GR \cos(\xi)] d\xi \quad (4.13)$$

done  $\xi = \theta - \varphi$ . Observando esta expresión, podemos ver que tiene la forma integral de la función de Bessel  $J_1(GR)$  por lo que la expresión final de este coeficiente es:

$$F(\mathbf{G}) = \frac{2f J_1(GR)}{GR} \quad (4.14)$$

Haciendo el procedimiento análogo para el factor de forma dependiente del contorno, podemos obtener la expresión:

$$L(\mathbf{G}) = J_0(GR) \quad (4.15)$$

Con estos coeficientes es posible hacer el cálculo de la viscosidad efectiva ecuación (3.17) para las secciones transversales previamente mencionadas. Sin embargo, al estar realizando un cálculo numérico de este parámetro efectivo, es necesario aplicar las expresiones de los límites donde los factores de estructura presentan una indefinición.

## Capítulo 5

# Resultados

### 5.1 Estructura de bandas

Para poder seleccionar una frecuencia de interés apropiada para el cálculo es necesario estudiar la estructura de bandas de los diferentes cristales. El cálculo de la estructura de bandas se realiza a partir de la ecuación (3.10). Recordando que los dispersores sólidos en los compositos obtienen sus parámetros del aluminio, los datos utilizados son  $\rho_{Al}=2700$  kg/m<sup>3</sup> ,  $\lambda_{Al}=51$  GPa y  $\rho_s = \rho_{Al} \cdot 10^3$  ,  $\lambda_s = \lambda_{Al} \cdot 10^3$ , para que se cumpla la condición de alto contraste acústico, y el parámetro de red de 5.5 mm.

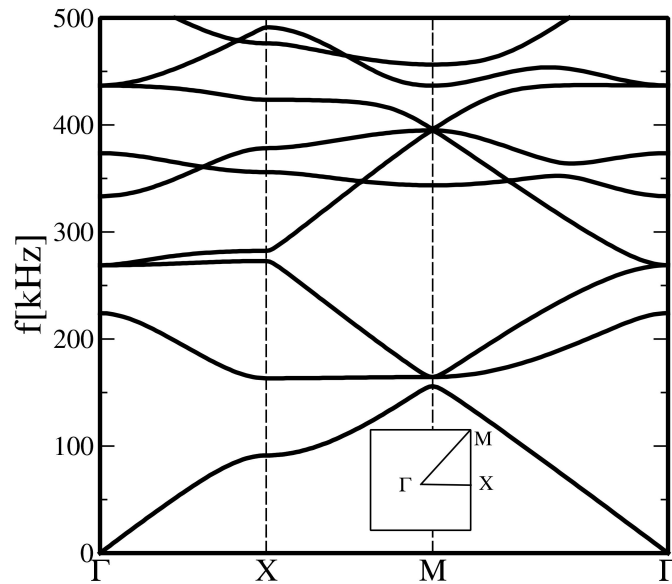


Figura 5.1: Estructura de bandas de cristal fonónico con inclusiones circulares en red cuadrada. Parámetro de densidad  $\rho_s = \rho_{Al} \cdot 10^3$ , parámetro de compresibilidad  $\lambda_s = \lambda_{Al} \cdot 10^3$

Como se puede observar en las Figura (5.1), dentro del rango de frecuencias por debajo del primer intervalo de frecuencias prohibidas ( $\sim 100\text{kHz}$ ) las estructuras de bandas de los cristales presentan un comportamiento casi lineal. Este comportamiento está fuertemente ligado a la fracción de área ocupada por el dispersor (fracción de llenado). Observando el comportamiento de la relación de dispersión en esta zona, se optó por utilizar una frecuencia de  $50\text{kHz}$ , ya que a esta frecuencia fácilmente se puede realizar el cálculo para las posibles fracciones de llenado manteniéndose dentro de la región de homogenización.

Considerando todos los parámetros ya mencionados, procedemos al análisis de los resultados obtenidos por las diferentes estructuras seleccionadas. En las siguientes subsecciones se abordará cada una de las estructuras divididas principalmente por geometría de la red. Los resultados numéricos son obtenidos a partir de un código computacional creado en Fortran. Cada gráfica corresponde a una morfología diferente del compuesto. En estas gráficas se puede observar el comportamiento del coeficiente de decaimiento del sonido normalizado entre el coeficiente de decaimiento en agua  $\gamma_0$ , en función de la fracción de llenado de la celda unitaria. Dentro de cada gráfica se encuentra un esquema de la celda unitaria (derecha) como también el comportamiento de la velocidad del sonido efectiva en

función de la fracción de llenado (izquierda). Para cada cristal se realizó una propagación a  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $90^\circ$ , las cuales están representadas por las líneas de diferentes colores en los gráficos. Aquellas imágenes que sólo cuentan con una única curva son las que presentan un comportamiento isotrópico de la viscosidad efectiva. Cada gráfica aumenta el valor de la fracción de llenado hasta el punto máximo, el cual se encuentra justo antes de que los dispersores puedan tocarse, considerando la capa viscosa de magnitud  $\delta$ . Cabe mencionar que para fracciones de llenado muy cercanas a la ocupación máxima, el modelo no describe de manera correcta el comportamiento del coeficiente de decaimiento. Nuevamente se consideran los parámetros  $\rho_{Al}=2700 \text{ kg/m}^3$ ,  $\lambda_{Al}=51 \text{ GPa}$  y  $\rho_s = \rho_{Al} \cdot 10^3$ ,  $\lambda_s = \lambda_{Al} \cdot 10^3$  y el parámetro es de red  $5.5 \text{ mm}$  para todas las morfologías.

## 5.2 Celda unitaria cuadrada

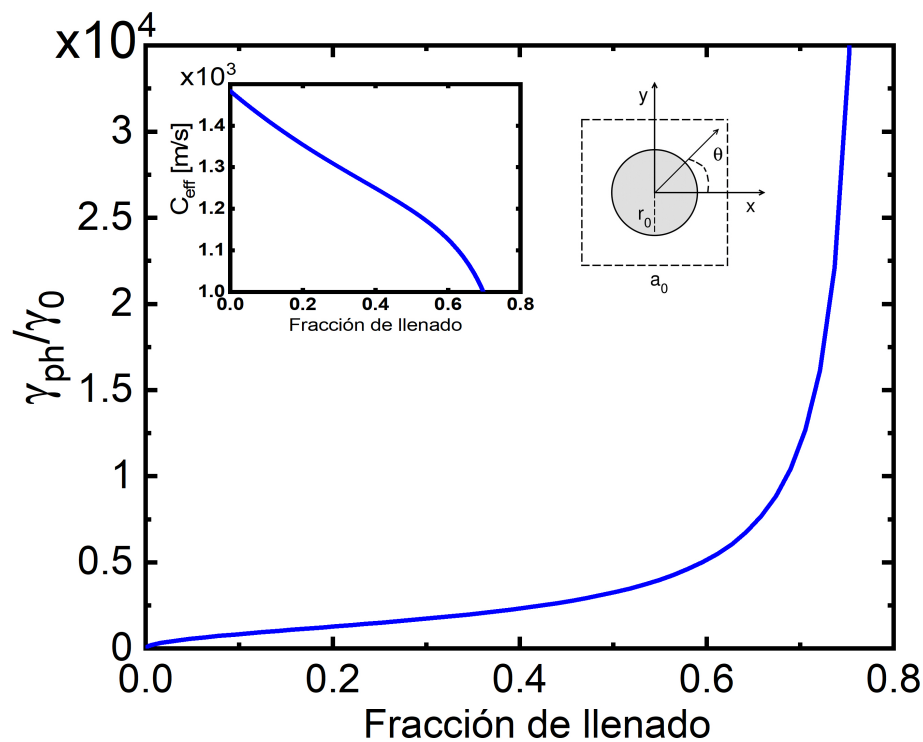


Figura 5.2: Coeficiente de decaimiento del sonido normalizado para una celda de unitaria cuadrada con inclusión circular, como función de la fracción de llenado  $f$ . La figura a la izquierda muestra la velocidad del sonido en [m/s] en función de la fracción de llenado  $f$ ; la figura de la derecha muestra un esquema de la celda unitaria

La figura anterior muestra que para una inclusión sólida con sección transversal circular en una red cuadrada, el coeficiente de decaimiento del sonido no depende de la dirección de propagación. Se puede observar como incluso para valores menores al 50 % de la fracción de llenado máxima el coeficiente de decaimiento del cristal es mayor, al menos en 3 órdenes de magnitud, que el decaimiento en agua.

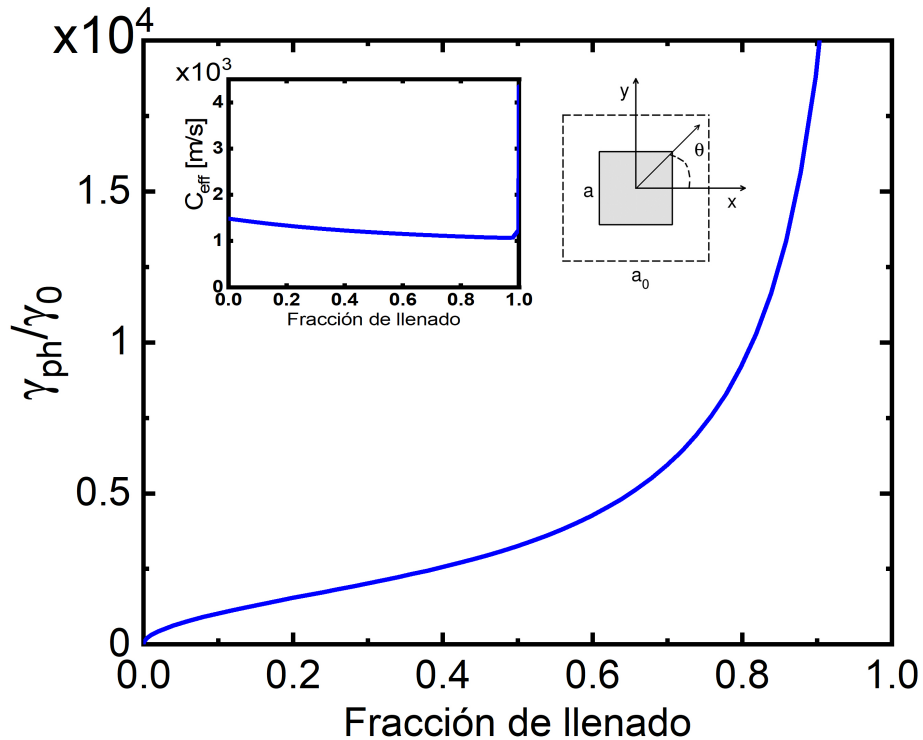


Figura 5.3: Coeficiente de decaimiento del sonido normalizado para una celda de unitaria cuadrada con inclusión cuadrada, como función de la fracción de llenado  $f$ . La figura a la izquierda muestra la velocidad del sonido en [m/s] en función de la fracción de llenado  $f$ ; la figura de la derecha muestra un esquema de la celda unitaria.

Como se puede observar en la Figura (5.2) mientras se tiene un dispersor isotrópico en una red de alta simetría, el decaimiento no mostrará esa característica de anisotropía. Por lo que a pesar de la variación de la propagación de la onda dentro del cristal, la viscosidad efectiva no será alterada. Esta isotropía también se presenta en el sistema con inclusiones cuadradas de la Figura (5.3), sin embargo, en este caso es debido a que la red tiene la misma geometría que el dispersor. En este caso, la fracción de llenado máxima cubre el total de la celda unitaria, es por eso que la velocidad del sonido efectiva tiende a la velocidad del

sonido en el aluminio al acercarse al 100% de la ocupación.

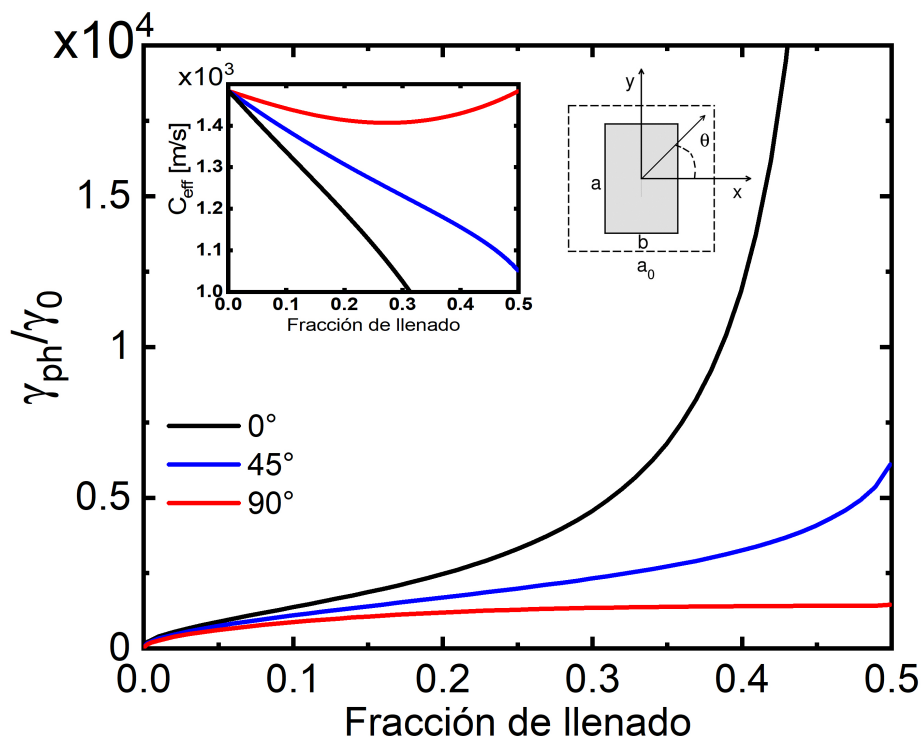


Figura 5.4: Coeficiente de decaimiento del sonido normalizado para una celda de unitaria cuadrada con inclusión rectangular, como función de la fracción de llenado  $f$ . La figura a la izquierda muestra la velocidad del sonido en [m/s] en función de la fracción de llenado  $f$ ; la figura de la derecha muestra un esquema de la celda unitaria. Los colores representan las diferentes direcciones de propagación de la onda.

La Figura (5.4) muestra el comportamiento anisótropo de la viscosidad efectiva en un cristal de menor simetría. Se podría pensar que al tener mayor superficie de contacto con la capa viscosa, la propagación en dirección paralela al lado mayor mostraría el mayor coeficiente de decaimiento. Sin embargo, comparando las curvas, el sistema que presenta una mayor viscosidad es aquel donde las ondas se propagan sobre el lado de menor longitud del paralelogramo.

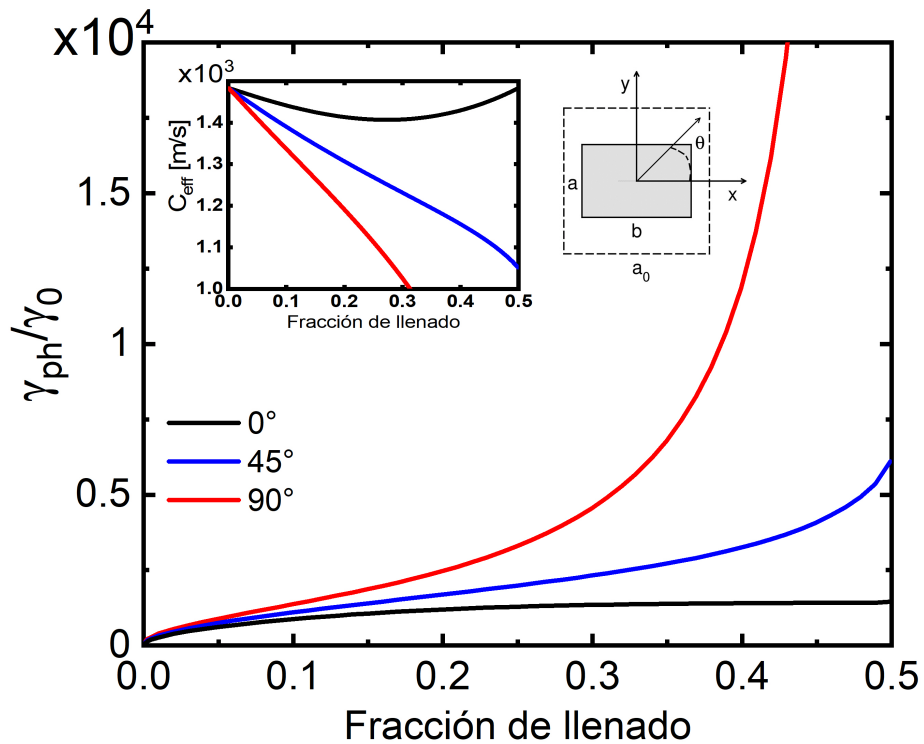


Figura 5.5: Coeficiente de decaimiento del sonido normalizado para una celda de unitaria cuadrada con inclusión rectangular, como función de la fracción de llenado  $f$ . La figura a la izquierda muestra la velocidad del sonido en [m/s] en función de la fracción de llenado  $f$ ; la figura de la derecha muestra un esquema de la celda unitaria. Los colores representan las diferentes direcciones de propagación de la onda.

Las Figuras (5.4) y (5.5) muestran el mismo sistema de incusiones rectangulares, donde la razón entre los lados  $a$  y  $b$  es de 2. Estos representa el mismo sistema con una rotación de  $90^\circ$ , es por esto que las gráficas coinciden con la respectiva rotación. Es posible apreciar que, cercano a la ocupación máxima del dispersor, se crea un sistema de canales. Podemos relacionar el crecimiento de la viscosidad efectiva con el ancho de estos canales, pues al aumentar la fracción de llenado, la disipación es máxima al propagar la onda a través de los canales mas estrechos.

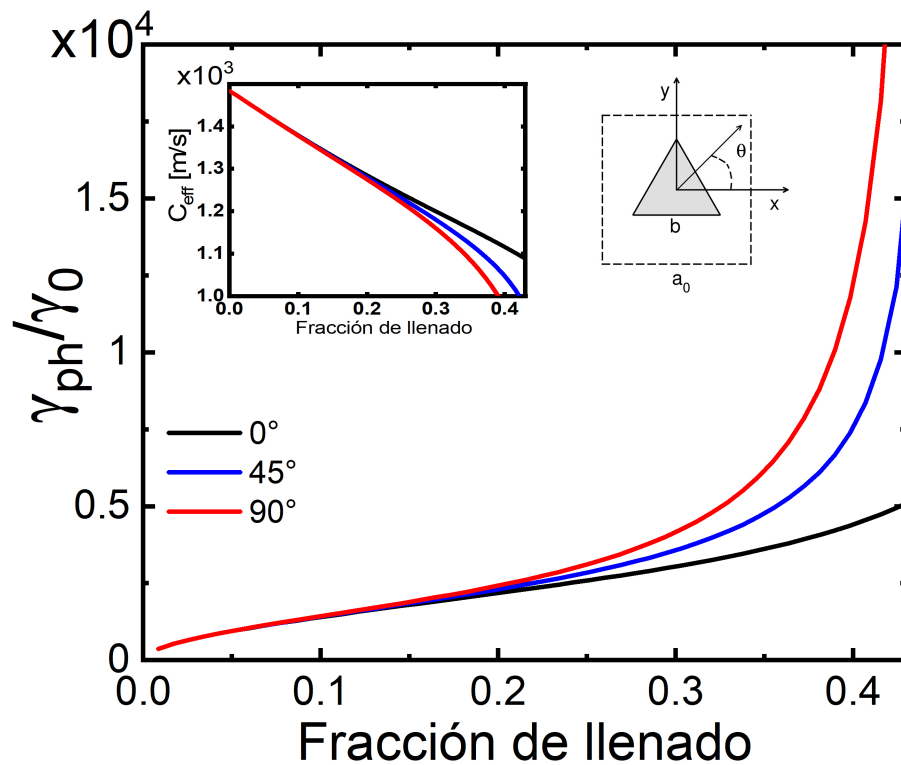


Figura 5.6: Coeficiente de decaimiento del sonido normalizado para una celda de unitaria cuadrada con inclusión triangular, como función de la fracción de llenado  $f$ . La figura a la izquierda muestra la velocidad del sonido en [m/s] en función de la fracción de llenado  $f$ ; la figura de la derecha muestra un esquema de la celda unitaria. Los colores representan las diferentes direcciones de propagación de la onda.

El sistema en la Figura (5.6) es un sistema anisótropo, sin embargo, este sistema se puede considerar como un sistema isótropo por debajo del 50% de la ocupación máxima. Al aumentar la fracción de llenado de este sistema en la dirección de máxima disipación obtenemos un sistema de rendijas. Estas rendijas son las que consiguen maximizar la disipación en el cristal.

### 5.3 Celda unitaria hexagonal

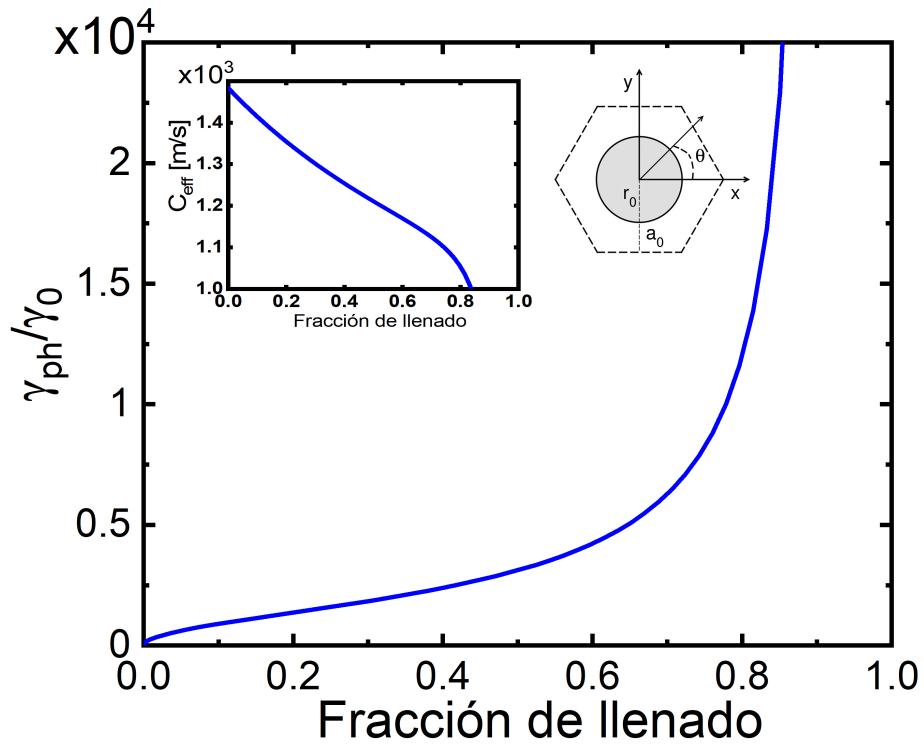


Figura 5.7: Coeficiente de decaimiento del sonido normalizado para una celda de unitaria hexagonal con inclusión circular, como función de la fracción de llenado  $f$ . La figura a la izquierda muestra la velocidad del sonido en [m/s] en función de la fracción de llenado  $f$ ; la figura de la derecha muestra un esquema de la celda unitaria.

Como se observa en la Figura (5.7), el comportamiento del decaimiento continua siendo isótropo. Este es muy parecido al comportamiento en una red cuadrada como se mostró en la Figura (5.2).

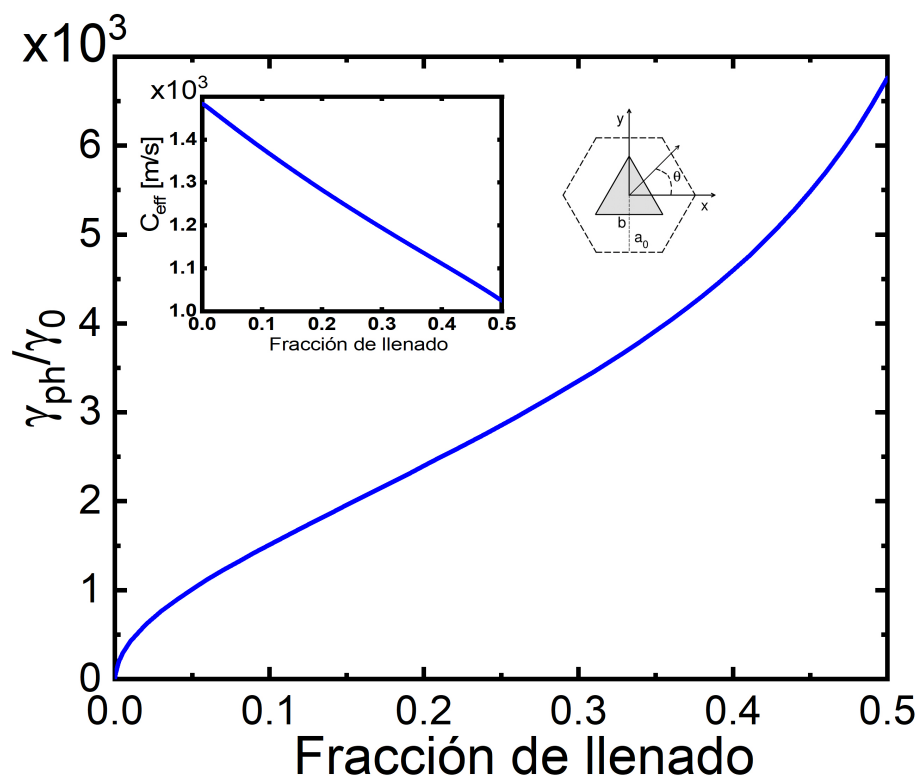


Figura 5.8: Coeficiente de decaimiento del sonido normalizado para una celda de unitaria hexagonal con inclusión triangular, como función de la fracción de llenado  $f$ . La figura a la izquierda muestra la velocidad del sonido en [m/s] en función de la fracción de llenado  $f$ ; la figura de la derecha muestra un esquema de la celda unitaria.

En el caso de la celda hexagonal, la inclusión circular (Figura 5.7) sigue manteniendo el carácter isotrópico debido a la alta simetría tanto de la red como del dispersor. En una red hexagonal, el decaimiento para una inclusión triangular (Figura 5.8) presenta un comportamiento isotrópico en contraste con la dependencia en el ángulo de incidencia que presentaba en la geometría de red cuadrada. Como se mencionó anteriormente, esto es debido a la correspondencia de simetría entre la figura y la red. Por el contrario, en el caso de una inclusión cuadrada en red hexagonal (Figura 5.9), esta ahora muestra una ligera anisotropía en el coeficiente de decaimiento.

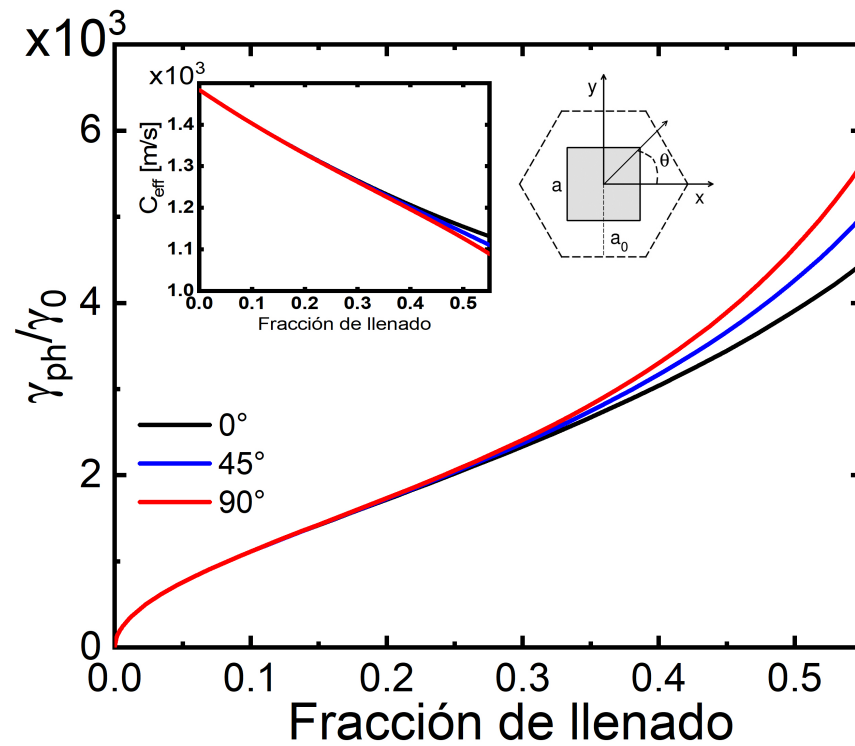


Figura 5.9: Coeficiente de decaimiento del sonido normalizado para una celda de unitaria hexagonal con inclusión cuadrada, como función de la fracción de llenado  $f$ . La figura izquierda muestra la velocidad del sonido en [m/s] en función de la fracción de llenado  $f$ ; la figura de la derecha muestra un esquema de la celda unitaria. Los colores representan las diferentes direcciones de propagación de la onda.

En el caso de una inclusión cuadrada en una red hexagonal podemos ver como cuando el dispersor no comparte simetría con la red este se ve afectado por la dirección de propagación. En la Figura (5.9) podemos observar que cuando la fracción de llenado se encuentra por debajo del 50% de la ocupación máxima el sistema se comporta como un sistema isótropo. Cuando la ocupación es mayor, se puede apreciar una ligera anisotropía. Esto se debe a que las separaciones entre dispersores no son iguales en las direcciones del plano. A pesar de esto, la variación es relativamente pequeña en comparación con otras morfologías presentadas.

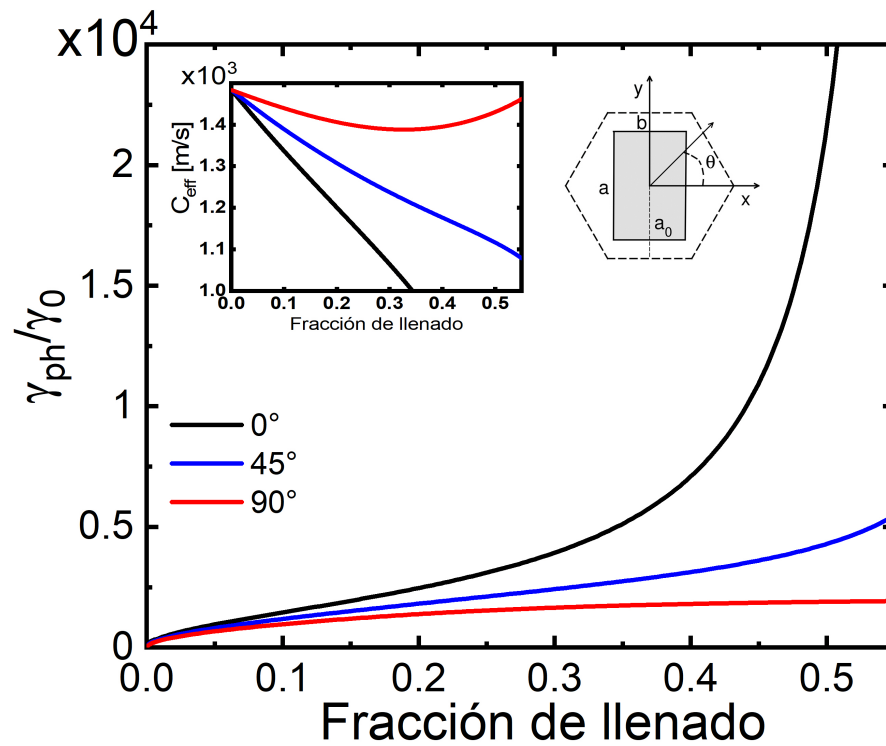


Figura 5.10: Coeficiente de decaimiento del sonido normalizado para una celda de unitaria hexagonal con inclusión rectangular, como función de la fracción de llenado  $f$ . La figura izquierda muestra la velocidad del sonido en [m/s] en función de la fracción de llenado  $f$ ; la figura de la derecha muestra un esquema de la celda unitaria. Los colores representan las diferentes direcciones de propagación de la onda.

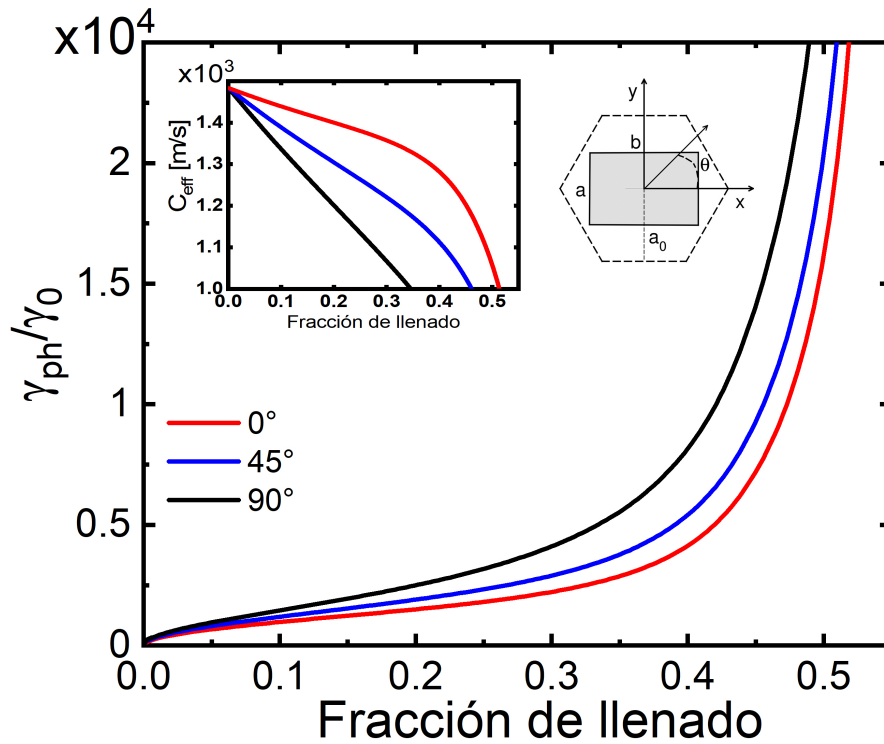


Figura 5.11: Coeficiente de decaimiento del sonido normalizado para una celda de unitaria hexagonal con inclusión rectangular, como función de la fracción de llenado  $f$ . La figura izquierda muestra la velocidad del sonido en [m/s] en función de la fracción de llenado  $f$ ; la figura de la derecha muestra un esquema de la celda unitaria. Los colores representan las diferentes direcciones de propagación de la onda.

Las Figuras (5.10) y (5.11) muestran nuevamente el mismo sistema de inclusiones rectangulares con una rotación de  $90^\circ$ . En este caso se evidencia como la celda hexagonal no mantiene la misma distancia entre dispersores en ambas direcciones del plano. Esta diferencia se ve alterada por la forma asimétrica del dispersor, es por eso que para el caso de dispersores horizontales (Figura(5.11)) las curvas tienen un comportamiento muy parecido en comparación con el cristal de dispersores rectangulares verticales, donde se acentúa esta diferencia de distancias. Este sistema forma nuevamente el sistema de canales que se mencionó anteriormente.

## 5.4 Celda unitaria rectangular

Pasamos al caso de la celda unitaria rectangular. Con esta geometría la red pierde cierta simetría por lo que todos los dispersores logran una viscosidad anisótropa, incluso aquellos con alta simetría, como el caso del dispersor circular (Figura (5.12)). Para esta red se consideró una razón entre sus lados de  $(a_0/b_0 = 2)$ .

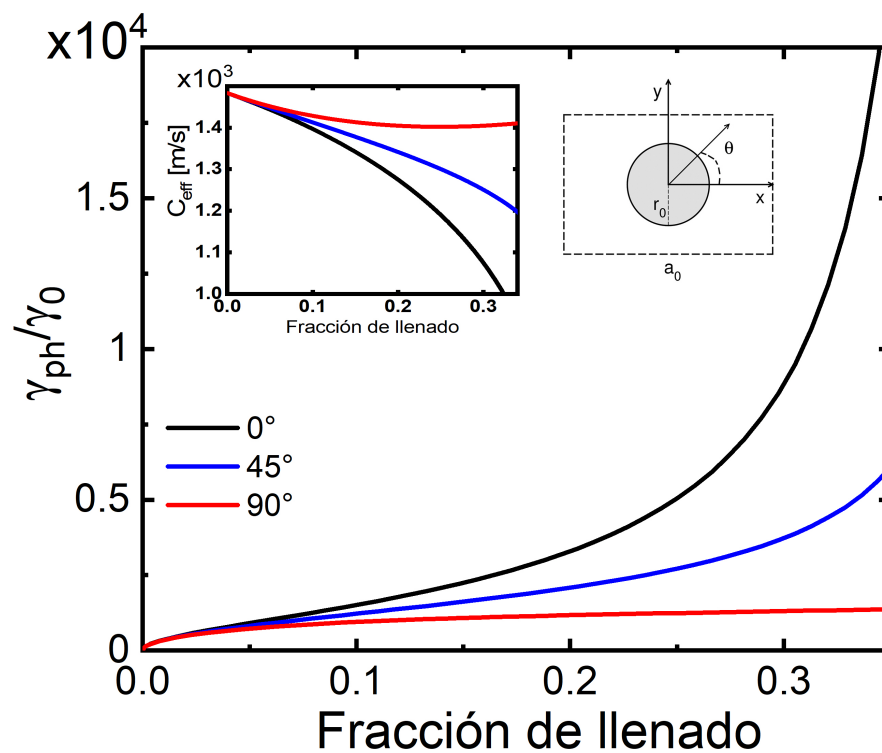


Figura 5.12: Coeficiente de decaimiento del sonido normalizado para una celda de unitaria rectangular con inclusión circular, como función de la fracción de llenado  $f$ . La figura izquierda muestra la velocidad del sonido en [m/s] en función de la fracción de llenado  $f$ ; la figura de la derecha muestra un esquema de la celda unitaria. Los colores representan las diferentes direcciones de propagación de la onda.

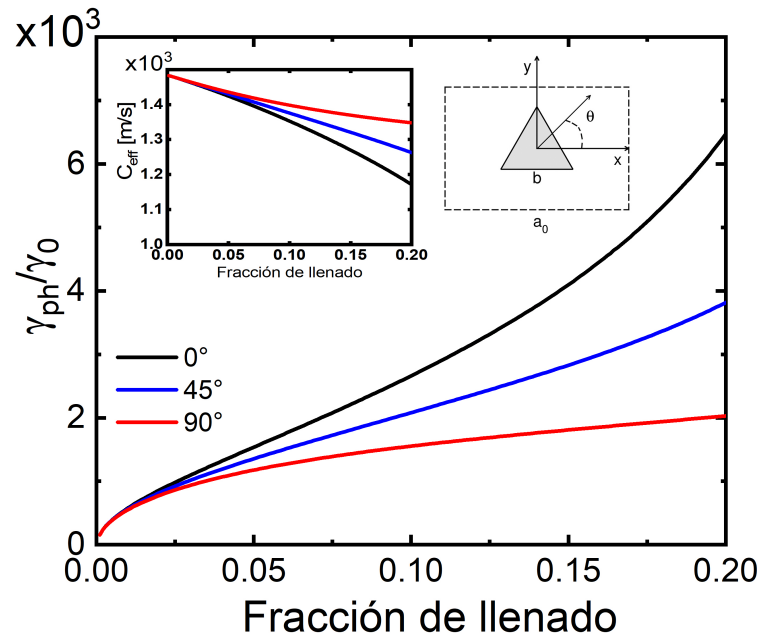


Figura 5.13: Coeficiente de decaimiento del sonido normalizado para una celda de unitaria rectangular con inclusión triangular, como función de la fracción de llenado  $f$ . La figura izquierda muestra la velocidad del sonido en [m/s] en función de la fracción de llenado  $f$ ; la figura de la derecha muestra un esquema de la celda unitaria. Los colores representan las diferentes direcciones de propagación de la onda.

En este tipo de red las inclusiones triangulares pueden alcanzar una fracción bastante baja, sin embargo, esta fracción es suficiente para poder observar el comportamiento anisotrópico. El mayor decaimiento se presenta cuando la dirección de propagación coincide nuevamente con el sistema de rendijas creado por la punta y base de los triángulos contiguos.

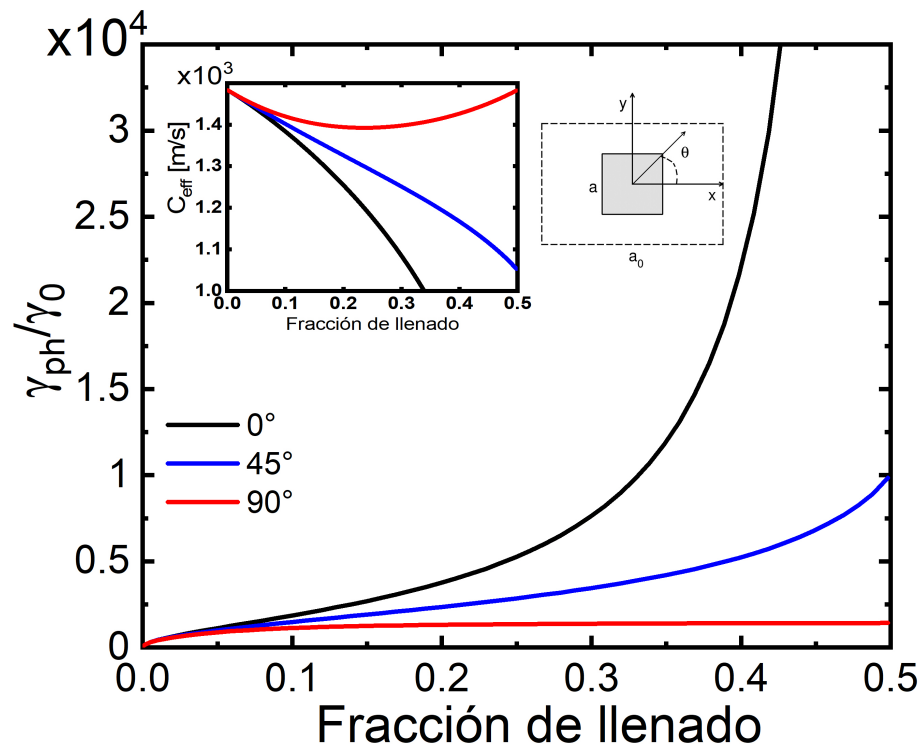


Figura 5.14: Coeficiente de decaimiento del sonido normalizado para una celda de unitaria rectangular con inclusión cuadrada, como función de la fracción de llenado  $f$ . La figura izquierda muestra la velocidad del sonido en [m/s] en función de la fracción de llenado  $f$ ; la figura de la derecha muestra un esquema de la celda unitaria. Los colores representan las diferentes direcciones de propagación de la onda.

La geometría rectangular de la red permite la formación de canales de diferente anchura. La Figura (5.14) muestra nuevamente como el coeficiente de decaimiento es mucho mayor en la dirección de los canales más estrechos.

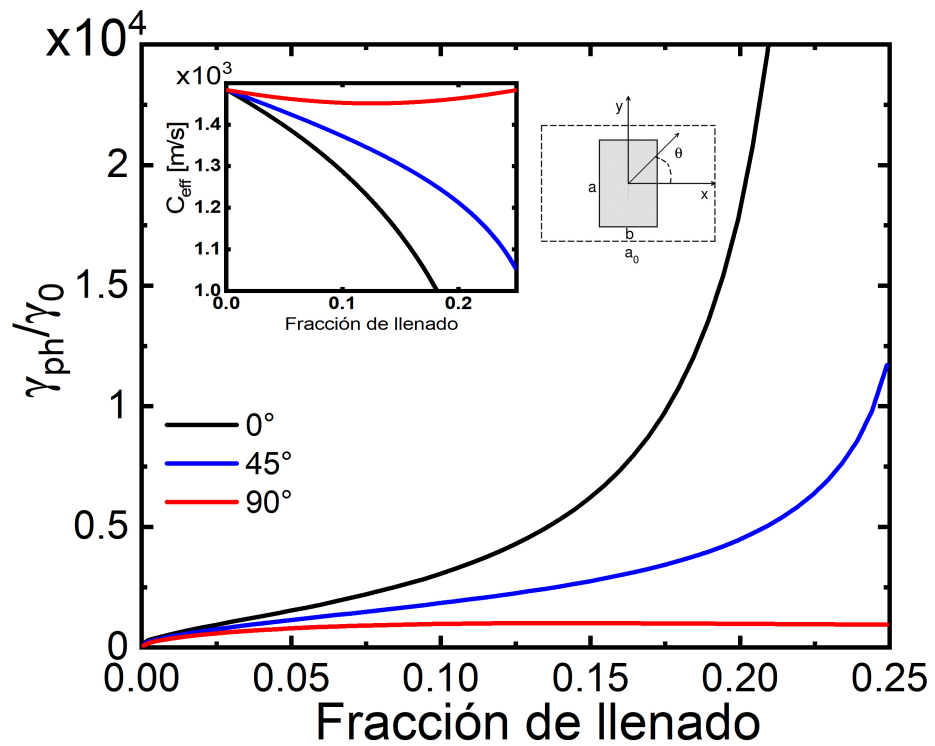


Figura 5.15: Coeficiente de decaimiento del sonido normalizado para una celda de unitaria rectangular con inclusión rectangular, como función de la fracción de llenado  $f$ . La figura izquierda muestra la velocidad del sonido en [m/s] en función de la fracción de llenado  $f$ ; la figura de la derecha muestra un esquema de la celda unitaria. Los colores representan las diferentes direcciones de propagación de la onda.

La Figura (5.15) muestra que no se necesita una fracción de llenado muy grande para poder obtener un coeficiente de decaimiento elevado, simplemente basta con disminuir la distancia entre los dispersores, de manera que la anchura de los canales formados disminuya.

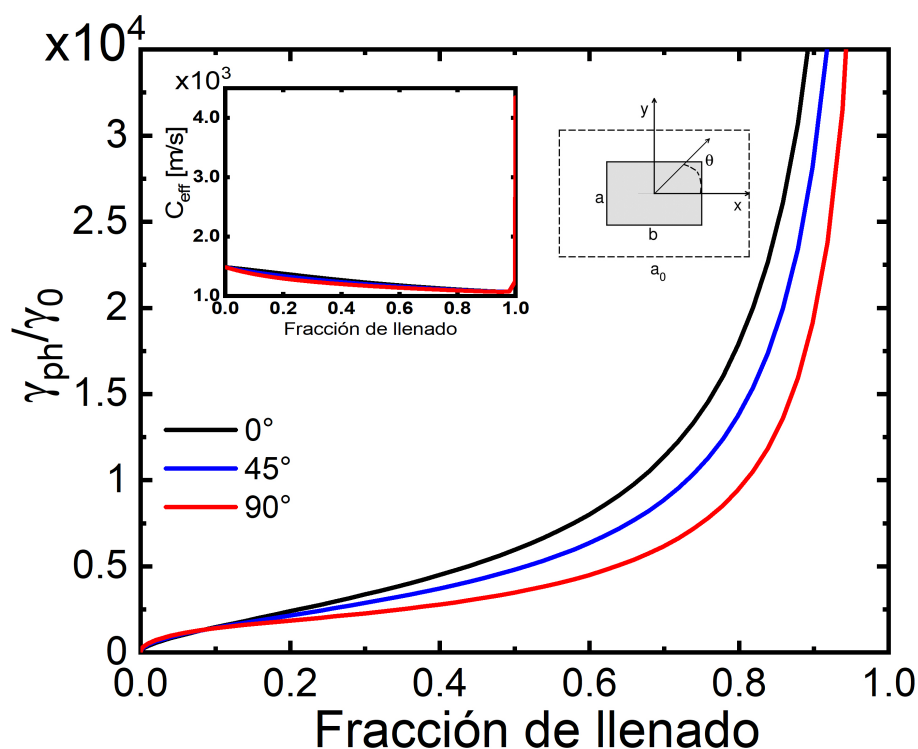


Figura 5.16: Coeficiente de decaimiento del sonido normalizado para una celda de unitaria rectangular con inclusión rectangular, como función de la fracción de llenado  $f$ . La figura izquierda muestra la velocidad del sonido en [m/s] en función de la fracción de llenado  $f$ ; la figura de la derecha muestra un esquema de la celda unitaria. Los colores representan las diferentes direcciones de propagación de la onda.

A pesar de contar con la misma simetría de la red, incluso con la misma razón entre sus lados, el sistema con inclusiones rectangulares no muestra un comportamiento isótropo para la viscosidad efectiva. Esto nos deja ver que la isotropía no es debida únicamente a la coincidencia de simetrías entre la red y el dispersor, si no un conjunto de ambas. A pesar de esto, el comportamiento es muy similar entre las diferentes direcciones de propagación

## Capítulo 6

# Conclusiones generales

### 6.1 Conclusiones

El tipo de simetría de la viscosidad efectiva para cada configuración obtenida a través del cálculo numérico coincide con la teoría en el campo de los cristales fotónicos propuesto en la referencia [22]. A partir de los resultados obtenidos se puede observar que la anisotropía dentro de un sistema de cristales fonónicos depende en conjunto de la geometría de red, así como de la geometría del dispersor. Comparando un sistema fonónico con su análogo fotónico, la referencia [22] nos dice que cuando el cristal posee un eje rotacional de, al menos tercer orden, nuestro cristal 2D es uniaxial por lo que su constante dieléctrica efectiva es la misma en las direcciones del plano. Este resultado se puede trasladar a nuestro sistema fonónico, por lo que nuestro parámetro efectivo del decaimiento se mantendrá isotrópico para aquellas configuraciones que correspondan a cristales uniaxiales.

Cuando se utilizan fracciones de llenado muy cercanas a la fracción de llenado máxima el método utilizado ya no reproduce resultados efectivos. Sin embargo, se puede observar que al incrementar la ocupación del sólido, el decaimiento del sonido es mucho mayor en la dirección de propagación sobre los canales más estrechos formados por las inclusiones. También se puede apreciar que una característica común para los sistemas de máxima disipación es la geometría rectangular. Cuando se tiene un dispersor rectangular, es mucho más evidente la anisotropía del sistema, pues la geometría del dispersor no permite una anchura tan pequeña en el canal paralelo al lado mayor del dispersor. A pesar de que en esta dirección se maximiza la superficie de contacto con la capa viscosa en la frontera sólido-líquido, la cual se dijo que caracteriza al sistema debido a su magnitud, esta disipación se ve

sobrepasada por los efectos de los gradientes de velocidad en las esquinas de los dispersores, como se menciona en la referencia [11]. Es por esto que se puede decir que la configuración que maximiza la viscosidad efectiva es aquella que minimiza la anchura del sistema de canales que se forma al incrementar la fracción de llenado. Observando los sistemas con inclusiones triangulares, puede asegurarse que el fenómeno de rendijas también es parte del incremento en la viscosidad efectiva, como se muestra en la referencia [7], pues al incrementar la fracción de llenado de esta geometría lo que obtenemos es un sistema de rendijas en lugar del sistema de canales. En estos también se logra apreciar como el coeficiente de decaimiento se maximiza al atravesar por estas rendijas.

Los sistemas con configuración de celda hexagonal y celda cuadrada, ambas con inclusiones rectangulares, maximizan el coeficiente de decaimiento según los resultados numéricos obtenidos. Sin embargo, al tener una geometría de celda unitaria diferente, la celda hexagonal necesita una fracción de llenado mayor para lograr el mismo resultado. Debido a esto y a la simpleza de la red, es que se propone a la red cuadrada con inclusiones rectangulares como la configuración que maximiza el coeficiente de decaimiento del sonido en cristales fonónicos para las geometrías estudiadas en este trabajo.

# Bibliografía

- [1] S. A. Cummer, J. Christensen, and A. Alù, “Controlling sound with acoustic metamaterials,” *Nature Reviews Materials*, vol. 1, no. 3, pp. 1–13, 2016.
- [2] V. G. Veselago, “Electrodynamics of substances with simultaneously negative and,” *Usp. fiz. nauk*, vol. 92, p. 517, 1967.
- [3] J. Li and C. T. Chan, “Double-negative acoustic metamaterial,” *Physical Review E*, vol. 70, no. 5, p. 055 602, 2004.
- [4] J. Christensen and F. J. G. de Abajo, “Anisotropic metamaterials for full control of acoustic waves,” *Physical Review Letters*, vol. 108, no. 12, p. 124 301, 2012.
- [5] C. Shen, Y. Xie, N. Sui, W. Wang, S. A. Cummer, and Y. Jing, “Broadband acoustic hyperbolic metamaterial,” *Physical Review Letters*, vol. 115, no. 25, p. 254 301, 2015.
- [6] E. Reyes-Ayona, D. Torrent, and J. Sánchez-Dehesa, “Homogenization theory for periodic distributions of elastic cylinders embedded in a viscous fluid,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 132, no. 4, pp. 2896–2908, 2012.
- [7] G. Ward, R. Lovelock, A. Murray, A. P. Hibbins, J. R. Sambles, and J. Smith, “Boundary-layer effects on acoustic transmission through narrow slit cavities,” *Physical review letters*, vol. 115, no. 4, p. 044 302, 2015.
- [8] M. Molerón, M. Serra-García, and C. Daraio, “Visco-thermal effects in acoustic metamaterials: From total transmission to total reflection and high absorption,” *New Journal of Physics*, vol. 18, no. 3, p. 033 003, 2016.
- [9] X. Jiang, Y. Li, and L. Zhang, “Thermoviscous effects on sound transmission through a metasurface of hybrid resonances,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 141, no. 4, EL363–EL368, 2017.

- 
- [10] V. C. Henríquez, V. M. García-Chocano, and J. Sánchez-Dehesa, “Viscothermal losses in double-negative acoustic metamaterials,” *Physical Review Applied*, vol. 8, no. 1, p. 014 029, 2017.
- [11] M. Ibarias, Y. Zubov, J. Arriaga, and A. Krokhin, “Phononic crystal as a homogeneous viscous metamaterial,” *Physical Review Research*, vol. 2, no. 2, p. 022 053, 2020.
- [12] L. Landau and L. See, *Landau, em lifshitz, fluid mechanics*, 1943.
- [13] D. Torrent and J. Sánchez-Dehesa, “Multiple scattering formulation of two-dimensional acoustic and electromagnetic metamaterials,” *New Journal of Physics*, vol. 13, no. 9, p. 093 018, 2011.
- [14] A. Krokhin, J. Arriaga, L. Gumen, and V. Drachev, “High-frequency homogenization for layered hyperbolic metamaterials,” *Physical Review B*, vol. 93, no. 7, p. 075 418, 2016.
- [15] J. Flores-Méndez and F. Perez-Rodríguez, “Metasolid with anisotropic mass density,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 103, no. 5, p. 54 001, 2013.
- [16] M. S. Kushwaha, P. Halevi, G. Martínez, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani, “Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites,” *Physical Review B*, vol. 49, no. 4, p. 2313, 1994.
- [17] L. Gumen, J. Arriaga, and A. Krokhin, “Metafluid with anisotropic dynamic mass,” *Low Temperature Physics*, vol. 37, no. 11, pp. 975–978, 2011.
- [18] V. Cerdán-Ramírez, B. Zenteno-Mateo, M. Sampedro, M. Palomino-Ovando, B. Flores-Desirena, and F. Pérez-Rodríguez, “Anisotropy effects in homogenized magnetodielectric photonic crystals,” *Journal of Applied Physics*, vol. 106, no. 10, p. 103 520, 2009.
- [19] C. Kittel, P. McEuen, and P. McEuen, *Introduction to solid state physics*. Wiley New York, 1996, vol. 8.
- [20] A. A. Krokhin, J. Arriaga, and L. Gumen, “Speed of sound in periodic elastic composites,” *Physical review letters*, vol. 91, no. 26, p. 264 302, 2003.
- [21] L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens, and J. V. Sanders, *Fundamentals of acoustics*. John Wiley & Sons, 1999.

- [22] A. Krokhin, P. Halevi, and J. Arriaga, “Long-wavelength limit (homogenization) for two-dimensional photonic crystals,” *Physical Review B*, vol. 65, no. 11, p. 115 208, 2002.