

# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
MAESTRÍA EN CIENCIAS

COCICLICIDAD COMO PUENTE ENTRE ANILLOS DE KÖTHE Y  
ANILLOS ARTINIANOS DE IDEALES PRINCIPALES.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA  
TANIA GABRIELA PÉREZ QUIJANO

DIRECTOR DE TESIS  
IVAN FERNANDO VILCHIS MONTALVO

PUEBLA, PUE.

2021

# Introducción

En la década de los treinta del siglo pasado, Gottfried Köthe propuso el problema de determinar a qué tipo de anillos  $R$  se les puede caracterizar con la propiedad de que todo  $R$ -módulo izquierdo (derecho) sea la suma directa de  $R$ -módulos cíclicos izquierdos (derechos). Por esta razón, a los anillos que cumplen tal propiedad por ambos lados, se les conoce hogaño como anillos de Köthe, (a los anillos que cumplen la propiedad por un solo lado, se les llama anillos de Köthe izquierdos o derechos, según sea el caso). Dicho planteamiento estableció un escenario teórico que se ha robustecido con el trabajo de muchos matemáticos dedicados a indagar en el tema. Köthe mismo, respondió parcialmente su pregunta en [11], donde demostró que, si  $R$  es un anillo artiniano de ideales principales, entonces  $R$  es de Köthe. A su vez, este teorema inauguró una ruta de estudio que también ha sido asaz transitada, y que estriba en explorar la relación imperante entre este par de conceptos; los anillos de Köthe y los artinianos de ideales principales. Dicho sea de paso, es la línea de estudio sobre la cual descansa este trabajo. Uno de los resultados destacados de dicho trayecto, fue demostrado por Cohen y Kaplansky en [7], y afirma que, si  $R$  es un anillo conmutativo de Köthe, entonces  $R$  es artiniano de ideales principales. De suerte que al reunir el resultado de Köthe con el de Cohen y Kaplansky, obtenemos que, para el caso conmutativo, los conceptos de anillo artiniano de ideales principales y de anillo de Köthe, son equivalentes. Pese al profuso estudio del tema, el problema correspondiente al caso no conmutativo del teorema anterior, es aún un problema abierto. Otro resultado que prevalece en esta materia, fue demostrado en [5] por Chase, y establece que si  $R$  es un anillo con la propiedad de que todo  $R$ -módulo es

la suma directa de  $R$ -módulos finitamente generados, lo cual es una clara generalización de un anillo de Köthe, entonces  $R$  es artiniano izquierdo y todo  $R$ -módulo izquierdo posee una descomposición en inescindibles. El inverso de tal teorema, para el caso conmutativo, se le debe a Warfield, quien lo demostró en [16]. Y fue Zimmermann-Huisgen quien, más tarde, en [18], lo generalizó para anillos arbitrarios. De modo que, todo anillo de Köthe es artiniano. Sin embargo, según Faith, en [10], un anillo artiniano izquierdo (derecho) de ideales principales izquierdos (derechos), no necesariamente es un anillo de Köthe izquierdo (derecho). Por su parte, en [12], Nakayama dio un ejemplo de un anillo de Köthe derecho que no es un anillo de ideales principales derechos. Estos resultados son algunos de los que figuran en la componente clásica del estudio del tema, pero el recorrido continúa y se han hecho aportaciones más recientes, como acaece, por ejemplo, en [4], donde los autores demuestran que para un anillo tal que todos sus idempotentes son centrales, es equivalente ser de Köthe que artiniano de ideales principales. Sobre la base del contexto esbozado, en el presente trabajo también buscamos explorar la trabazón entre estas dos nociones protagónicas. La manera en que procedimos para ese cometido, fue valiéndonos de la noción de módulo cocíclico como puente entre uno y otro concepto. De modo que, revisamos cómo se relacionan cada uno de este tipo de anillos, con los módulos cocíclicos. Esto posicionó a tales módulos en la médula de la tesis, motivo por el cual, dedicamos toda la primera parte del trabajo a estudiarlos, y así erigir la teoría necesaria para poder culminar, en la segunda parte, en algunos resultados *ad hoc* al antedicho objetivo. Así que, es en ese segundo apartado donde estimamos que la tesis alcanza su punto más álgido.

A lo largo del texto trabajaremos con anillos asociativos con elemento

unitario. Además, a no ser que se indique lo contrario, todos los  $R$ -módulos que se mencionen, se considerarán  $R$ -módulos izquierdos. Como es usual  $E(M)$  denotará la cápsula inyectiva de un módulo  $M$ . Por su parte,  $N \leq_{es} M$  señalará que  $N$  es un sumódulo esencial en  $M$ . Además,  $(0 : M)$  y  $(M : 0)$  simbolizará al anulador derecho e izquierdo de  $M$ , respectivamente. Además, si  $f$  es un morfismo, denotaremos por  $Ker(f)$  al núcleo de  $f$ .



# Índice general

Introducción	I
1. Módulos cocíclicos	1
2. Anillos de Köthe y anillos artinianos de ideales principales.	25
2.1. Cociclicidad: un puente. . . . .	26
2.2. Anillos de coköthe . . . . .	48
Bibliografía	50

# Capítulo 1

## Módulos cocíclicos

Basta con revisar las versiones aquí incluidas de las definiciones de módulo cíclico y cocíclico, para comprender la dualidad involucrada. Por otra parte, es evidente la correlación que existe entre los módulos cíclicos y los finitamente generados, así como es bien sabido que, estos últimos, se encuentran estrechamente asociados con los anillos noetherianos. De la misma manera, los módulos cocíclicos están vinculados con los módulos finitamente cogenerados que, a su vez, interactúan asiduamente con los anillos artinianos. Por otro lado, los anillos de Köthe se definen en términos de módulos cíclicos, cuya relación con los módulos cocíclicos, insistimos, es clara. Por estas razones, consideramos que los módulos cocíclicos resultan en una suerte de conducto entre los anillos de Köthe y los anillos artinianos de ideales principales. Por ello dedicamos el presente capítulo al estudio de tales módulos. Esto no significa que hayamos realizado un estudio completo sobre ellos, en cambio sí, una indagación de la teoría afín, que nos permita dar vida a los teoremas del siguiente capítulo. No obstante, creemos que la teoría aquí plasmada, alcanza para hacer patente la formidable actuación que desempeñan, ello pese a que, a nuestro pa-

recer, no son objetos que despunten en la teoría de módulos. Así que, en este primer apartado, esperamos cumplir el doble propósito de retratar lo atractivo de sus cualidades.

**Definición 1.1.** Sean  $R$  un anillo y  $\{M_i\}_{i \in I}$  una familia de  $R$ -módulos. Decimos que un submódulo  $M$  del producto  $\prod_{i \in I} M_i$  es un producto subdirecto de la familia  $\{M_i\}_{i \in I}$  si, para todo  $i \in I$ , la restricción de la  $i$ -ésima proyección en  $M$ ,  $\pi_i|_M: M \rightarrow M_i$ , es un epimorfismo.

**Ejemplo 1.2.** Consideremos el conjunto de los enteros primos  $P \subset \mathbb{Z}$ . Entonces  $\mathbb{Z}$  es isomorfo a un producto subdirecto de la familia  $\{\mathbb{Z}_p\}_{p \in P}$ .

*Demostración.* Para cada  $p \in P$ , consideremos el epimorfismo natural

$$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p \text{ tal que } \varphi(k) = (k + \mathbb{Z}_p)_{p \in P}$$

para cada  $k \in \mathbb{Z}$ . Notemos que  $\varphi(k) = \bar{0}$  si y solo si  $p \mid k$  para todo  $p \in P$ , lo que es absurdo excepto si  $k = 0$ ; por lo tanto,  $\varphi$  es un monomorfismo. Por otro lado, consideremos  $k + \mathbb{Z}_{p'} \in \mathbb{Z}_{p'}$  con  $p' \in P$  fijo. Entonces, si  $\pi_{p'}: \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_{p'}$  es la  $p'$ -ésima proyección, tenemos que

$$\pi_{p'}\varphi(k) = \pi_{p'}((k + \mathbb{Z}_p)_{p \in P}) = k + \mathbb{Z}_{p'}.$$

De modo que,  $\pi_{p'}\varphi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{p'}$ . Luego, podemos inferir que  $\pi_p\varphi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_p$ , para cada  $p \in P$ . De modo que, la restricción  $\pi_p|_{\varphi(\mathbb{Z})}: \varphi(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}_p$  es un epimorfismo, para cada  $p \in P$ . En otras palabras,  $\mathbb{Z} \cong \varphi(\mathbb{Z})$  es un producto subdirecto de  $\{\mathbb{Z}_p\}_{p \in P}$ .

□

**Proposición 1.3.** Sea  $R$  un anillo. Entonces un  $R$ -módulo  $N$  es isomorfo a un producto subdirecto de una familia de  $R$ -módulos  $\{M_i\}_{i \in I}$ , si y solo si existe una familia de epimorfismos  $\{g_i: N \rightarrow M_i\}_{i \in I}$  tal que  $\bigcap_{i \in I} \text{Ker}(g_i) = \{0\}$ .

*Demostración.* Sean  $R$  un anillo,  $\Gamma = \{M_i\}_{i \in I}$  una familia de  $R$ -módulos y  $M$  un producto subdirecto de  $\Gamma$ .

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $N$  es un  $R$ -módulo isomorfo a  $M$ . Luego, podemos considerar un isomorfismo  $\varphi : N \rightarrow M$ . Además, para cada  $i \in I$ , consideremos la proyección  $\pi_i : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_i$ . Como  $M$  es un producto subdirecto de  $\Gamma$ , entonces, para cada  $i \in I$ , la restricción  $\pi_i|_M : M \rightarrow M_i$  es un epimorfismo. Ahora, para cada  $i \in I$ , definimos el morfismo  $g_i : N \rightarrow M_i$  por  $g_i = \pi_i|_M \varphi$ . De este modo, tenemos que

$$\begin{aligned} Ker(g_i) &= \bigcap_{i \in I} Ker(\pi_i|_M \varphi) \\ &= \bigcap_{i \in I} \varphi^{-1}(Ker(\pi_i|_M)) \\ &= \varphi^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} Ker(\pi_i|_M)\right) \\ &= \varphi^{-1}(\{0\}) \\ &= Ker(\varphi) \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

Lo que implica que  $\bigcap_{i \in I} Ker(g_i) = \{0\}$ .

( $\Leftarrow$ ) Sea  $N$  un  $R$ -módulo. Supongamos que existe una familia de epimorfismos  $\{g_i : N \rightarrow M_i\}_{i \in I}$  tal que  $\bigcap_{i \in I} Ker(g_i) = \{0\}$ . Definimos el morfismo  $\psi : N \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$  por  $\psi(n) = (g_i(n))_{i \in I}$ . Ahora, consideremos un elemento  $n \in Ker(\psi)$ . Entonces  $(0_i)_{i \in I} = \psi(n) = (g_i(n))_{i \in I}$ , lo que implica que  $g_i(n) = 0$  para toda  $i \in I$ , luego  $n \in Ker(g_i)$  para toda  $i \in I$ , es decir,  $n \in \bigcap_{i \in I} Ker(g_i) = \{0\}$  y, por lo tanto,  $n = 0$ . En consecuencia tenemos que  $\psi$  es un monomorfismo. Entonces el morfismo correstricción  $\psi|_{\psi(N)} : \psi(N) \rightarrow \psi(N)$  es un isomorfismo, esto es,  $N \cong \psi(N)$ .

Por otro lado, sea  $j \in I$  y consideremos la restricción a  $\psi(N)$  de la  $j$ -ésima proyección,  $\pi_j |_{\psi(N)}: \psi(N) \rightarrow M_j$ . Además, sea  $m_j \in M_j$ . Entonces existe  $n_j \in N$  tal que  $g_j(n_j) = m_j$ . Luego  $\psi(n_j) = (g_i(n_j))_{i \in I}$ . Así que,  $\pi_j(\psi(n_j)) = \pi_j(g_i(n_j))_{i \in I} = g_j(n_j) = m_j$ . Por lo tanto,  $\pi_j |_{\psi(N)}$  es un epimorfismo. Como esto ocurre para toda  $j \in I$ , podemos concluir que  $\varphi(N) \cong N$  es un producto subdirecto de  $\{M_i\}_{i \in I}$ .

□

**Proposición 1.4.** *Sean  $R$  un anillo,  $M$  un  $R$ -módulo y  $\{M_i\}_{i \in I}$  una familia de submódulos de  $M$ . Entonces  $M / \bigcap_{i \in I} M_i$  es isomorfo a un producto subdirecto de la familia  $\{M/M_i\}_{i \in I}$ .*

*Demostración.* Definimos el morfismo  $\varphi : M \rightarrow \prod_{i \in I} (M/M_i)$  por  $\varphi(m) = (m + M_i)_{i \in I}$  para todo  $m \in M$ . Notemos que  $\text{Ker}(\varphi) = \bigcap_{i \in I} M_i$ . En este caso, el Primer Teorema de Isomorfismos, nos asegura que  $\varphi(M) \cong M/\text{Ker}(\varphi) = M / \bigcap_{i \in I} M_i$ . También observemos que, para toda  $i \in I$ , la restricción a  $\varphi(M)$  de la  $i$ -ésima proyección  $\pi_i |_{\varphi(M)}: \varphi(M) \rightarrow M/M_i$ , es un epimorfismo. En efecto, si  $m + M_i \in M/M_i$ , entonces  $\varphi(m) = (m + M_i)_{i \in I} \in \varphi(M)$ . Luego  $\pi_i |_{\varphi(M)} (\varphi(m)) = \pi_i((m + M_i)_{i \in I}) = m + M_i$ . Así que, efectivamente,  $\pi_i |_{\varphi(M)}$  es un epimorfismo y, por lo tanto,  $\varphi(M)$  es un producto subdirecto de  $\{M/M_i\}_{i \in I}$ .

□

**Proposición 1.5.** *Sea  $R$  un anillo. Entonces un  $R$ -módulo  $M$  es cíclico si y solo si existe  $m \in M$  tal que, para todo  $R$ -módulo  $N$  y todo morfismo  $g : N \rightarrow M$ , se tiene que, si  $m \in \text{Im}(g)$ , entonces  $g$  es un epimorfismo.*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $M$  es un  $R$ -módulo cíclico. Sean  $N$  un  $R$ -módulo y  $g : N \rightarrow M$  un morfismo. Como  $M$  es cíclico, podemos considerar un elemento  $m \in M$  tal que  $M = Rm$ . Si asumimos que  $m \in \text{Im}(g)$ , entonces existe  $n \in N$  tal que  $g(n) = m$ . Ahora, sea  $y \in M$ .

Luego existe  $r \in R$  tal que  $y = rm$ . Llamemos  $x = rn \in N$ . Entonces  $g(x) = g(rn) = rg(n) = rm = y$ . Por lo tanto,  $g$  es un epimorfismo.

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que existe  $m \in M$  como en la hipótesis. Consideremos el morfismo  $g : R \rightarrow M$  definido por  $g(r) = rm$ , para todo  $r \in R$ . Notemos que  $m \in \text{Im}(g)$ , ya que  $g(1) = m$ . Entonces la hipótesis implica que  $g$  es un epimorfismo. Luego,  $M = \text{Im}(g) = Rm$ . Es decir,  $M$  es cíclico.  $\square$

Al dualizar la caracterización de módulo cíclico anterior, obtenemos la siguiente definición que, desde luego, es la de módulo cocíclico. Esta definición se puede encontrar en [17] junto con teoría relacionada a estos módulos.

**Definición 1.6.** *Sea  $R$  un anillo. Decimos que un  $R$ -módulo  $M$  es cocíclico si existe un elemento  $0 \neq m \in M$  tal que, para todo  $R$ -módulo  $N$  y todo morfismo  $f : M \rightarrow N$ , se tiene que, si  $m \notin \text{Ker}(f)$ , entonces  $f$  es un monomorfismo.*

**Ejemplo 1.7.** *Todos los  $\mathbb{Z}$ -módulos cocíclicos finitos son de la forma  $\mathbb{Z}_{p^k}$ , y todos los  $\mathbb{Z}$ -módulos cocíclicos infinitos son de la forma  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  con  $k, p \in \mathbb{N}$  y  $p$  primo. Esto se justifica con el inciso g) del Teorema 1.10, que veremos más adelante, junto con el hecho de que los  $\mathbb{Z}$ -módulos simples son, precisamente, de la forma  $\mathbb{Z}_p$ , y que las cápsulas inyectivas de estos simples son de la forma  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ .*

**Observación 1.8.** *Sean  $R$  un anillo,  $M$  un  $R$ -módulo cocíclico y  $0 \neq m \in M$  como en la Definición 1.6. Entonces  $m \in N$  para todo submódulo  $N \leq M$  distinto de cero.*

*Demostración.* Sea  $N \leq M$  un submódulo distinto de cero y supongamos que  $m \notin N$ . Consideremos el cociente  $M/N$  y el epimorfismo natural  $\pi :$

$M \rightarrow M/N$ . Entonces, resulta que  $m \notin \text{Ker}(\pi) = N$ . Esto implica, por ser  $M$  cocíclico, que  $\pi$  es un monomorfismo, por lo que  $\{0\} = \text{Ker}(\pi) = N$ , lo que es una contradicción, en atención a la cual se concluye que  $m \in N$ .  $\square$

**Proposición 1.9.** *Los submódulos de módulos cocíclicos, también son cocíclicos.*

*Demostración.* Sean  $R$  un anillo,  $M$  un  $R$ -módulo cocíclico,  $N \leq M$  un submódulo y  $0 \neq m \in M$  como en la definición de módulo cocíclico (Definición 1.6). Asimismo, sean  $L$  un  $R$ -módulo y  $f : N \rightarrow L$  un morfismo. Supongamos que  $m \notin \text{Ker}(f)$ . De acuerdo con la Observación 1.8, esto implica que  $\text{Ker}(f) = \{0\}$  o, dicho de otro modo, que  $f$  es un monomorfismo. Por lo tanto,  $N$  es cocíclico.  $\square$

El siguiente teorema pone de manifiesto un hecho muy interesante sobre el concepto de módulo cocíclico, y este es, la multiplicidad de equivalencias que se conocen de él, sobre todo en comparación con otros conceptos con los que no se ha corrido con tal suerte, por ejemplo, incluso, su noción dual, es decir, la de módulo cíclico.

**Teorema 1.10.** *Sean  $R$  un anillo y  $M$  un  $R$ -módulo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- a)  $M$  es cocíclico;
- b)  $M$  tiene un submódulo simple que está contenido en todo submódulo de  $M$  distinto de cero;
- c) la intersección de todos los submódulos distintos de cero de  $M$ , es distinta de cero;
- d) para cada familia  $\{M_i\}_{i \in I}$  de submódulos propios de  $M$ , el morfismo  $\varphi : M \rightarrow \prod_{i \in I} M/M_i$  definido por  $\varphi(m) = (m + M_i)_{i \in I}$  para cada  $m \in M$ , no es monomorfismo;

- e) para toda familia arbitraria  $\{L_i\}_{i \in I}$  de  $R$ -módulos, y todo monomorfismo  $\varphi : M \rightarrow \prod_{i \in I} L_i$ , existe  $j \in I$  tal que  $\pi_j \varphi : M \rightarrow L_j$  es un monomorfismo;
- f)  $M$  es una extensión esencial de un  $R$ -módulo simple;
- g)  $M$  tiene un submódulo simple  $S$  tal que  $S \leq M \leq E(S)$ .

*Demostración.* a)  $\Rightarrow$  b) Supongamos que  $M$  es cocíclico y sea  $m \in M$  como en la Definición 1.6 de módulo cocíclico. Luego, si  $N \leq M$  es un submódulo distinto de cero, entonces la Observación 1.8 nos asegura que  $m \in N$  y, por lo tanto,  $Rm \leq N$ . Como  $Rm \leq M$  es simple, se verifica lo que queríamos.

b)  $\Rightarrow$  a) Sea  $S \leq M$  un submódulo simple tal que  $S \leq L$  para todo  $L \leq M$  con  $L \neq \{0\}$ . Consideremos un  $R$ -módulo  $N$  y un morfismo  $\varphi : M \rightarrow N$ . Como  $S$  es simple, entonces es cíclico, así que, existe un elemento  $m \in S$  con  $m \neq 0$  tal que  $Rm = S$ . Vamos a suponer que  $m \notin \text{Ker}(\varphi)$ . Luego, si asumimos que  $\text{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$ , la hipótesis nos garantiza que  $Rm = S \leq \text{Ker}(\varphi)$ , lo que da como resultado que  $m \in \text{Ker}(\varphi)$ , pero esto es una contradicción. Se sigue entonces que  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ , es decir, que  $\varphi$  es un monomorfismo. En suma, se concluye que  $M$  es cocíclico.

b)  $\Leftrightarrow$  c) Es claro.

b)  $\Leftrightarrow$  f) Es claro.

a)  $\Rightarrow$  e) Supongamos que  $M$  es cocíclico y sea  $0 \neq m \in M$  como en la Definición 1.6. Además, sean  $N$  un  $R$ -módulo,  $\{L_i\}_{i \in I}$  una familia de  $R$ -

módulos y  $\varphi : M \rightarrow \prod_{i \in I} L_i$  un monomorfismo. En tal caso, podemos notar que  $\text{Ker}(\varphi) = \bigcap_{i \in I} \text{Ker}(\pi_i \varphi)$ . En efecto, si tomamos  $x \in \text{Ker}(\varphi)$ , entonces  $\varphi(x) = (0_i)_{i \in I}$  y, esto implica que  $\pi_j(\varphi(x)) = \pi_j((0_i)_{i \in I}) = 0_j \in L_j$  para toda  $j \in I$ . De modo que  $x \in \text{Ker}(\pi_j \varphi)$  para todo  $j \in I$ , es decir,  $x \in \bigcap_{i \in I} \text{Ker}(\pi_i \varphi)$ . Ahora tomemos  $x \in \bigcap_{i \in I} \text{Ker}(\pi_i \varphi)$ . Esto supone que  $x \in \text{Ker}(\pi_i \varphi)$  para todo  $i \in I$ , lo que significa que  $\pi_i \varphi(x) = 0_i$  para toda  $i \in I$ . Luego, si denotemos por  $(y_i)_{i \in I} = \varphi(x)$ , entonces, para toda  $i \in I$ , tenemos que  $0_i = \pi_i \varphi(x) = \pi_i(\varphi(x)) = \pi_i((y_i)_{i \in I}) = y_i$ . Esto equivale a decir que  $(y_i)_{i \in I} = (0_i)_{i \in I}$ . De tal forma que  $\varphi(x) = (0_i)_{i \in I}$  y, en consecuencia,  $x \in \text{Ker}(\varphi)$ . Así que, efectivamente,  $\text{Ker}(\varphi) = \bigcap_{i \in I} \text{Ker}(\pi_i \varphi)$ . Esto, junto con el hecho de que  $\varphi$  es un monomorfismo, implica que  $\{0\} = \text{Ker}(\varphi) = \bigcap_{i \in I} \text{Ker}(\pi_i \varphi)$ , lo que quiere decir que  $m \notin \bigcap_{i \in I} \text{Ker}(\pi_i \varphi)$ , pues  $m \neq 0$ . Así que, existe  $j \in J$  tal que  $m \notin \text{Ker}(\pi_j \varphi)$ . Esto implica, de acuerdo con la Observación 1.8, que  $\text{Ker}(\pi_j \varphi) = \{0\}$ . Por lo tanto,  $\pi_j \varphi : M \rightarrow L_j$  es un monomorfismo.

$c) \Rightarrow d)$  Sean  $\{M_i\}_{i \in I}$  una familia de submódulos propios de  $M$ , y para cada familia  $\{M_i\}_{i \in I}$  de submódulos propios de  $M$  el morfismo  $\varphi : M \rightarrow \prod_{i \in I} M/M_i$  definido por  $\varphi(m) = (m + M_i)_{i \in I}$  para cada  $m \in M$ . Por hipótesis la intersección de la familia de los submódulos distintos de cero de  $M$  es no cero, en particular  $\bigcap_{i \in I} M_i \neq 0$ . Así que si  $\varphi : M \rightarrow \prod_{i \in I} M/M_i$  es monomorfismo, entonces  $\text{Ker}(\varphi) = \bigcap_{i \in I} M_i = \{0\}$  lo que es absurdo.

$d) \Rightarrow c)$  Sea  $\{N_i\}_{i \in I}$  la familia de submódulos de  $M$  distintos de cero. Supongamos que  $\bigcap_{i \in I} N_i = \{0\}$ . Consideremos el morfismo  $\varphi : M \rightarrow \prod_{i \in I} M/N_i$  definido por  $\varphi(m) = (m + N_i)_{i \in I}$  para cada  $m \in M$ . En cuyo caso, resulta que  $\text{Ker}(\varphi) = \bigcap_{i \in I} N_i = \{0\}$ , lo que nos indica que  $\varphi$  es un monomorfismo, lo que es absurdo.

$e) \Rightarrow a)$  Gracias a la Proposición 1.12, podemos afirmar que existe un monomorfismo  $\varphi : M \rightarrow \prod_{i \in I} C_i$  con  $C_i$  cocíclico para toda  $i \in I$ . Entonces, por hipótesis, debe existir  $j \in I$  tal que  $\pi_j \varphi$  es un monomorfismo. Así que, por la Proposición 1.9, resulta que  $\varphi(M)$  es cocíclico, y como  $\varphi(M) \cong M$ , entonces  $M$  también lo es.

$f) \Rightarrow g)$  Por la hipótesis, sabemos que  $M$  tiene un submódulo simple esencial  $S$ , en cuyo caso, se tiene que  $E(M) = E(S)$ . De este hecho, obtenemos que  $M \leq E(S)$ .

$g) \Rightarrow f)$  Supongamos que existe un submódulo simple  $S$  tal que  $S \leq M \leq E(S)$ , y consideremos un submódulo  $N \leq M$  con  $N \neq \{0\}$ . Notemos que, en particular,  $N \leq E(S)$ . Entonces  $N \cap S \neq \{0\}$ , a causa de que  $S \leq_e E(S)$ . Por lo tanto  $S \leq_e M$ .  $\square$

**Proposición 1.11.** *Todo módulo distinto de cero tiene un cociente cocíclico.*

*Demostración.* Sean  $R$  un anillo y  $M$  un  $R$ -módulo distinto de cero. Tomemos un elemento  $x \in M$  con  $x \neq 0$ . Ahora, como  $\{0\} \neq Rx$  es finitamente generado, entonces tiene un submódulo máximo y, por lo tanto, un cociente simple. Llamemos  $S$  a dicho cociente. Podemos entonces considerar un epimorfismo  $g : Rx \rightarrow S$ . Asimismo, consideremos  $j : Rx \hookrightarrow M$  e  $i : S \hookrightarrow E(S)$  las respectivas inclusiones. Tenemos una situación como la que se describe en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 Rx & \xhookrightarrow{j} & M \\
 g \downarrow & & \\
 S & & \\
 i \downarrow & & \\
 E(S) & & 
 \end{array}$$

En tal caso, la inyectividad de  $E(S)$  nos asegura que existe un morfismo  $f : M \rightarrow E(S)$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 Rx & \xhookrightarrow{j} & M \\
 \downarrow g & & \searrow f \\
 S & & \\
 \downarrow i & & \\
 E(S) & & 
 \end{array}$$

Luego la restricción del morfismo  $f$  en  $f(M)$ ,  $f|_{f(M)}: M \rightarrow f(M)$ , es un epimorfismo. Además, como el morfismo  $ig = fj$  es distinto de cero, entonces también lo es  $f$ . Por consiguiente,  $\{0\} \neq f(M) \leq E(S)$ . De tal suerte que,  $S$  es esencial en  $f(M)$ . Así que, por el inciso  $f)$  del Teorema 1.10, tenemos que  $f(M)$  es cocíclico.  $\square$

Nótese que la demostración de la siguiente proposición contiene una prueba alternativa de la Proposición 1.11.

**Proposición 1.12.** *Todo módulo distinto de cero es isomorfo a un producto subdirecto de sus cocientes cocíclicos.*

*Demostración.* Sean  $R$  un anillo,  $M$  un  $R$ -módulo distinto de cero y  $m \in M$  con  $m \neq 0$ . Consideremos el conjunto  $\Gamma = \{N \leq M \mid m \notin N\}$ . Notemos que  $\Gamma \neq \emptyset$  ya que  $\{0\} \in \Gamma$ . Por otro lado, observemos que, si  $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I} \subseteq \Gamma$  es una cadena, entonces  $\bigcup \mathcal{C} \in \Gamma$ , de lo contrario, existiría  $i \in I$ , tal que  $m \in C_i$ , contradiciendo que  $\{C_i\}_{i \in I} \subseteq \Gamma$ . Bajo estos supuestos, el Lema de Zorn nos garantiza que  $\Gamma$  tiene un elemento máximo, al que nombraremos por  $L_m$ . De modo que, para todo  $N \leq M$ , si  $L_m < N$ , entonces  $m \in N$ . Esto implica, por un lado, que si consideramos un submódulo  $\{0\} \neq N/L_m \leq M/L_m$ , entonces  $m \in N$  y, por lo tanto,  $(Rm + L_m)/L_m \leq N/L_m$ . Y, por otro lado, que  $L_m$  es un submódulo

máximo en  $Rm + L_m$ , y por ello,  $(Rm + L_m)/L_m$ , es simple. O sea que,  $(Rm + L_m)/L_m \leq M/L_m$  es un submódulo simple que está contenido en todo submódulo distinto de cero, de  $M/L_m$ . Esto significa, en virtud del inciso b) del Teorema 1.10, que  $M/L_m$  es cocíclico.

Sobre la base de lo que acabamos de describir, podemos considerar una familia  $\{M/L_m\}_{m \in M}$  de cocientes cocíclicos de  $M$ . Ahora procedamos a verificar que  $M$  es isomorfo a un producto subdirecto de dicha familia. Para ello, vamos a considerar a la familia de epimorfismos naturales  $\{\pi_n : M \rightarrow M/L_n\}_{n \in M}$  tomando en cuenta la condición de que  $n \neq 0$ . En este caso,

$$\bigcap_{\substack{n \in M \\ n \neq 0}} \text{Ker}(\pi_n) = \{0\}.$$

Esto demuestra, en atención a la Proposición 1.3, que  $M$  es isomorfo a un producto subdirecto de la familia  $\{M/L_m\}_{m \in M}$ .

□

**Definición 1.13.** Sean  $R$  un anillo y  $\mathcal{C}$  una clase de  $R$ -módulos. Decimos que un  $R$ -módulo  $M$  está cogenerado por  $\mathcal{C}$ , o bien, que es  $\mathcal{C}$ -cogenerado, si para todo  $R$ -módulo  $L$  y para cada par de morfismos  $f : L \rightarrow M$  y  $g : L \rightarrow M$  distintos, existe un morfismo  $h : M \rightarrow C$  con  $C \in \mathcal{C}$ , tal que  $hf \neq hg$ . En el caso de que todo  $R$ -módulo es  $\mathcal{C}$ -cogenerado, decimos que la clase  $\mathcal{C}$  cogenera a  $R\text{-Mod}$ .

**Proposición 1.14.** Sean  $R$  un anillo y  $\mathcal{C}$  un conjunto de módulos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes para un  $R$ -módulo  $M$ :

- a)  $M$  es  $\mathcal{C}$ -cogenerado;
- b) para todo  $R$ -módulo  $L$  y todo morfismo  $f : L \rightarrow M$  con  $f \neq \bar{0}$ , existe un morfismo  $h : M \rightarrow C$ , donde  $C \in \mathcal{C}$ , tal que  $hf \neq \bar{0}$ ;

c) existe un monomorfismo  $M \rightarrow \prod_{i \in I} C_i$ , donde  $C_i \in \mathcal{C}$  para todo  $i \in I$ .

*Demostración.* a)  $\Rightarrow$  b) Consideremos el morfismo cero  $\bar{0} : L \rightarrow M$  y supongamos que  $f : L \rightarrow M$  es un morfismo con  $f \neq \bar{0}$ . Luego, por hipótesis, existen un módulo  $C \in \mathcal{C}$  y un morfismo  $h : M \rightarrow C$  que cumple que  $fh \neq f\bar{0} = \bar{0}$ .

b)  $\Rightarrow$  c) Para cada  $C \in \mathcal{C}$ , consideremos

$$C' = \prod_{\alpha \in \text{Hom}(M, C)} C_\alpha$$

con  $C_\alpha = C$  para todo  $\alpha \in \text{Hom}(M, C)$ . Ahora, tomemos el morfismo  $\psi : M \rightarrow \prod_{C \in \mathcal{C}} C'$  definido por  $\psi(m) = (\varphi_{C'})_{C \in \mathcal{C}}$  donde  $\varphi_{C'} = (\alpha(m))_{\alpha \in \text{Hom}(M, C)}$ . Sea  $m \in \text{Ker}(\psi)$ . Entonces  $\varphi_{C'} = \bar{0}$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ . Supongamos que  $m \neq 0$  y consideremos  $\{0\} \neq Rm$  junto con la inclusión  $i : Rm \hookrightarrow M$ . Entonces, por hipótesis, existe un morfismo  $h : M \rightarrow C_0$  con  $C_0 \in \mathcal{C}$  tal que  $hi = h \neq \bar{0}$ . Luego,  $h(m) \neq 0$ . Así que,  $\varphi_{C'_0} = \bar{0}$  implica que  $\alpha(m) = 0$  para todo  $\alpha \in \text{Hom}(M, C_0)$ , en particular,  $h(m) = 0$ , lo que es una contradicción. Por lo tanto  $\psi$  es un monomorfismo.

c)  $\Rightarrow$  a) Sean  $f : N \rightarrow M$  y  $g : N \rightarrow M$  un par de morfismos distintos. Entonces existe  $n \in N$  tal que  $f(n) \neq g(n)$ . Luego  $0 \neq f(n) - g(n) = m \in M$ . Ahora, por la hipótesis sabemos que existe un monomorfismo  $\varphi : M \rightarrow \prod_{i \in I} C_i$  con  $C_i \in \mathcal{C}$ . Luego, que  $m \neq 0$  y que  $\varphi$  sea un monomorfismo, derivan en que  $\varphi(m) \neq 0$ . Por esta razón, sabemos que existe un elemento  $j \in I$  tal que  $\pi_j \varphi(m) \neq 0$ . Así que, si hacemos  $h = \pi_j \varphi$ , entonces  $(hg)(m) \neq (hf)(m)$ . Lo que implica que  $hf \neq hg$ .

□

En lo sucesivo, denotaremos por *R-simp* a un conjunto de representantes de clases de isomorfismos de módulos simples. Asimismo, para cada

$S \in R\text{-simp}$ , denotaremos por  $[S, E(S)]$  al conjunto conformado por todos los  $R$ -módulos  $M$  tales que  $S \leq M \leq E(S)$ . Es claro que

$$\bigcup_{S \in R\text{-simp}} [S, E(S)]$$

es un conjunto. Así que, por el Teorema 1.10, tenemos que hay una colección cardinable de clases de isomorfismo de módulos cocíclicos. Finalmente, a una selección de un conjunto de representantes de clases de isomorfismos de módulos cocíclicos le llamaremos  $R\text{-cocíc}$ .

**Proposición 1.15.**  *$R\text{-cocíc}$  cogenera a  $R\text{-Mod}$ .*

*Demostración.* Podemos afirmar que todo módulo se sumerge en un producto de cocíclicos, pues la Proposición 1.12 avala este hecho, y eso quiere decir, a tenor de la Proposición 1.14, que  $M$  está  $R\text{-cocíc}$  cogenerado.  $\square$

**Definición 1.16.** *Decimos que un módulo  $M$  es finitamente cogenerado si para todo conjunto  $I$  tal que la familia  $\{M_i\}_{i \in I}$  de submódulos de  $M$ , tiene intersección cero, existe un subconjunto finito  $F \subseteq I$  tal que la subfamilia finita  $\{M_i\}_{i \in F}$  tiene también intersección cero.*

**Proposición 1.17.** *La clase de los módulos finitamente cogenerados es cerrada bajo submódulos.*

*Demostración.* Sean  $M$  un módulo finitamente cogenerado y  $N \leq M$  un submódulo. Supongamos que  $\{N_i\}_{i \in I}$  es una familia de submódulos de  $N$  cuya intersección es cero. Como esta es, a su vez, una familia de submódulos de  $M$ , entonces, por hipótesis, existe una subfamilia finita  $\{N_i\}_{i \in F}$  con intersección cero, lo que implica que  $N$  es finitamente cogenerado.

$\square$

**Proposición 1.18.** *La clase de los módulos finitamente cogenerados es cerrada bajo cápsulas inyectivas.*

*Demostración.* Sean  $M$  un módulo finitamente cogenerado y  $\{N_i\}_{i \in I}$  una familia de submódulos de  $E(M)$  tal que  $\bigcap \{N_i\}_{i \in I} = \{0\}$ . Entonces  $\{0\} = M \cap (\bigcap \{N_i\}_{i \in I}) = \bigcap \{M \cap N_i\}_{i \in I}$ . Como  $M$  es finitamente cogenerado, existe un subconjunto finito  $F \subseteq I$  tal que  $\bigcap \{M \cap N_i\}_{i \in F} = \{0\}$ . Luego  $M \cap (\bigcap \{N_i\}_{i \in F}) = \{0\}$ . Esto implica que  $\bigcap \{N_i\}_{i \in F} = \{0\}$ , ya que  $M$  es esencial en  $E(M)$ . Por lo tanto,  $E(M)$  es finitamente cogenerado.  $\square$

**Proposición 1.19.** *Sea  $\{0\} \neq M$  un módulo finitamente cogenerado. Además, sean  $I$  un conjunto y  $\{N_i\}_{i \in I}$  una familia de módulos. Si existe un monomorfismo*

$$\varphi : M \rightarrow \prod_{i \in I} N_i,$$

*entonces existen un subconjunto  $F \subseteq I$  finito y un monomorfismo*

$$\psi : M \rightarrow \prod_{i \in F} N_i.$$

*Demostración.* Dado el monomorfismo  $\varphi : M \rightarrow \prod_{i \in I} N_i$ , consideremos el morfismo  $\pi_j \varphi : M \rightarrow \prod_{i \in I} N_i$  donde  $\pi_j : \prod_{i \in I} N_i \rightarrow N_j$  es la respectiva proyección, para cada  $j \in I$ . Notemos que cada  $\pi_j \varphi$  es distinto del morfismo cero. También observemos que  $\bigcap_{j \in I} \text{Ker}(\pi_j \varphi) = \{0\}$ . En efecto, sea  $x \in \bigcap_{j \in I} \text{Ker}(\pi_j \varphi)$ . Entonces  $(\pi_j \varphi)(x) = \pi_j(\varphi(x)) = 0$  para todo  $j \in I$ . Luego  $\varphi(x) = 0$ . De modo que  $x \in \text{Ker}(\varphi)$ , lo que implica, por ser  $\varphi$  un monomorfismo, que  $x = 0$ . Así que, ciertamente,  $\bigcap_{j \in I} \text{Ker}(\pi_j \varphi) = \{0\}$ . Entonces, como  $M$  es finitamente cogenerado, tenemos que existe un subconjunto finito  $F \subseteq I$  tal que  $\bigcap_{j \in F} \text{Ker}(\pi_j \varphi) = \{0\}$ . Ahora definamos el morfismo  $\psi : M \rightarrow \prod_{i \in F} N_i$  por  $\psi(m) = \pi_j \varphi(m)$  para todo  $m \in M$ . En tal caso, como  $\text{Ker}(\psi) = \bigcap_{j \in F} \text{Ker}(\pi_j \varphi) = \{0\}$ , resulta que  $\psi$  es un monomorfismo.  $\square$

**Proposición 1.20.** *Sea  $M$  un módulo semisimple. Entonces  $M$  es finitamente generado si y solo si  $M$  es finitamente cogenerado.*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $M$  es finitamente generado. Tenemos como premisa que  $M$  es semisimple, así que se puede representar como una suma directa de submódulos simples y, por ser finitamente generado, dicha suma directa es finita. Es decir que, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$M = \bigoplus_{i=1}^n S_i$$

donde  $S_i \leq M$  es simple, para toda  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Demostraremos que  $M$  es finitamente cogenerado, por inducción sobre  $n$ . Ciertamente, si  $n = 1$ , entonces  $M$  es simple y, por lo tanto, finitamente cogenerado. Ahora, por inducción, supongamos que  $n > 1$  y que  $M$  es finitamente cogenerado para todo  $m < n$ . Sea  $\Gamma$  una familia de submódulos de  $M$  tal que  $\bigcap \Gamma = \{0\}$ . Entonces  $S_n \cap L = \{0\}$  para algún  $L \in \Gamma$ . Luego, se sigue de [3, Proposición 9.4 ], que

$$L = S_1 \oplus \dots \oplus S_l$$

donde  $l < n$  y  $S_i$  es simple para todo  $i \in \{1, \dots, l\}$ . Consideremos ahora  $\Gamma' = \{N \cap L \mid N \in \Gamma\}$ . Entonces  $\Gamma'$  es una familia de submódulos de  $L$  tal que  $\bigcap \Gamma' = \{0\}$ . Así que existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que el conjunto  $\{N_1, \dots, N_k\} \subseteq \Gamma'$  cumple que  $L \cap N_1 \cap \dots \cap N_k = \{0\}$ . Por lo tanto,  $M$  es finitamente cogenerado.

( $\Leftarrow$ ) Por ser  $M$  semisimple, sabemos que existe un conjunto  $I$  tal que  $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$ , donde  $S_i$  es simple para todo  $i \in I$ . Luego existe un monomorfismo  $\varphi : \bigoplus_{i \in I} S_i \rightarrow \prod_{i \in I} S_i$ . Así pues, como consecuencia de la hipótesis junto con la Proposición 1.19, resulta que existe otro monomorfismo  $\psi : M \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n S_i$ . En tal caso,  $M \cong \psi(M) = \bigoplus_{k=1}^m S_{i_k}$  con  $m \leq n$ . Por lo tanto,  $M$  es finitamente generado.

□

**Proposición 1.21.** Sean  $M$  un módulo y  $N \leq M$  un submódulo. Entonces  $N \cap \text{zoc}(M) = \text{zoc}(N)$ .

*Demostración.* Claramente, si  $f : N \rightarrow M$  es un morfismo, entonces

$$f(\text{zoc}(N)) = \sum \{f(S) \leq M \mid S \leq N, S \text{ simple}\} \leq \text{zoc}(M)$$

ya que  $f(S)$  es simple, o bien,  $\{0\}$ . Por ello, si consideramos un módulo  $M$ , un submódulo  $N$  y la inclusión  $\iota : N \hookrightarrow M$ , entonces tenemos que  $\text{zoc}(N) = \iota(\text{zoc}(N)) \leq \text{zoc}(M)$ . Por lo tanto,  $\text{zoc}(N) \leq N \cap \text{zoc}(M) \leq N$ . Además,  $N \cap \text{zoc}(M)$  es semisimple, así que  $N \cap \text{zoc}(M) \leq \text{zoc}(N)$ .  $\square$

**Proposición 1.22.** Un módulo  $M$  es finitamente cogenerado si y solo si  $\text{zoc}(M)$  es un submódulo finitamente generado y esencial de  $M$ .

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Si  $M$  es finitamente cogenerado, entonces, por la Proposición 1.17,  $\text{zoc}(M)$  también es finitamente cogenerado. Además, como  $\text{zoc}(M)$  es semisimple, entonces la Proposición 1.20 nos asegura que  $\text{zoc}(M)$  es finitamente generado. Ahora verifiquemos que  $\text{zoc}(M)$  es esencial en  $M$ . Para ello, supongamos lo contrario, es decir, que existe un submódulo  $N \leq M$  con  $N \neq \{0\}$ , tal que  $N \cap \text{zoc}(M) = \{0\}$ . Entonces, por la Proposición 1.21, tenemos que  $\text{zoc}(N) = \{0\}$ . Esto significa, precisamente, que

$$\bigcap \{N \leq M \mid N \leq_{es} M\} = \{0\}.$$

En este caso, otra vez la Proposición 1.17, nos dice que  $N$  es finitamente cogenerado. Por lo tanto, existe una subfamilia finita  $\Gamma \subseteq \{N \leq M \mid N \leq_{es} M\}$  tal que  $\bigcap \Gamma = \{0\}$ , lo que es absurdo, pues  $\bigcap \Gamma$  es una intersección de módulos esenciales. Concluimos entonces que  $\text{zoc}(M)$  es esencial en  $M$ .

( $\Leftarrow$ ) Recíprocamente, si suponemos que  $\text{zoc}(M)$  es finitamente generado, entonces, de acuerdo con la Proposición 1.20,  $\text{zoc}(M)$  es finitamente

cogenerado. Luego, por la Proposición 1.18, tenemos que  $E(\text{zoc}(M))$  es finitamente cogenerado. Además, asumiendo que  $\text{zoc}(M)$  es esencial en  $M$ , obtenemos que  $E(\text{zoc}(M)) = E(M)$ , lo que implica, según la Proposición 1.17, que  $M$  es finitamente cogenerado.  $\square$

En vista de la proposición anterior, resulta natural preguntarse cómo son los módulos cuyo zoclo es esencial, pero, no solo finitamente generado, sino, más aún, 1-generado. Estos módulos resultarán ser, precisamente, los módulos cocíclicos, como lo establece la siguiente proposición.

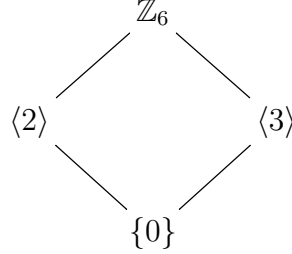
**Proposición 1.23.** *Un módulo es cocíclico si y solo si es finitamente cogenerado y tienen un único submódulo simple.*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Sea  $M$  un módulo cocíclico. Entonces existe un submódulo  $S$  simple y esencial en  $M$ . Si existiera otro submódulo simple  $S'$  de  $M$ , entonces tendría que ocurrir que  $S \cap S' \neq \{0\}$ , en cuyo caso, resultaría que  $S = S'$ . Por lo tanto,  $\text{zoc}(M) = S \leq_e M$  y, claramente, es finitamente generado. Luego, por la Proposición 1.22,  $M$  es finitamente cogenerado.

( $\Leftarrow$ ) Si  $M$  es finitamente cogenerado y contiene un único submódulo simple  $S$ , entonces  $S = \text{zoc}(M) \leq_e M$ . Esto demuestra la cociclicidad de  $M$ .  $\square$

Notemos que la proposición anterior, en el fondo, nos dice que un módulo es cocíclico si y solo si tiene un único submódulo simple que además es esencial. Por otra parte, de esta proposición obtenemos, en particular, que todo módulo cocíclico es finitamente cogenerado, sin embargo, queda claro, a la luz de este mismo resultado, que no todo módulo finitamente cogenerado es un módulo cocíclico; basta considerar, por ejemplo, un módulo semisimple finito con más de un simple, para que este no sea cocíclico, pero sí finitamente cogenerado. Verbigracia, el grupo abeliano

$\mathbb{Z}_6$ , cuya retícula de submódulos tiene la forma:



**Proposición 1.24.** *Un módulo es finitamente cogenerado si y solo si es isomorfo un producto subdirecto finito de módulos cocíclicos.*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Sea  $M$  un módulo finitamente cogenerado. La Proposición 1.12, nos garantiza que existe  $N$  un producto subdirecto de cocientes cocíclicos de  $M$ , tal que  $N \cong M$ . Llamemos  $\varphi : M \rightarrow N$  al isomorfismo que existe entre  $M$  y  $N$ . Consideremos la familia  $\{C_i\}_{i \in I}$  de todos los cocientes cocíclicos de  $M$  y al producto  $\prod_{i \in I} C_i$  de dicha familia. Definamos el morfismo  $\psi : M \rightarrow \prod_{i \in I} C_i$  por  $\psi(m) = \iota\varphi(m)$ , donde  $\iota : N \hookrightarrow \prod_{i \in I} C_i$  es la inclusión. Como  $M$  es finitamente cogenerado, por la Proposición 1.19, sabemos que existe un subconjunto finito  $F \subseteq I$  y un monomorfismo  $\phi : M \rightarrow \prod_{i \in F} C_i$ . Así que,  $M \cong \phi(M)$  que, en efecto, es un producto subdirecto finito de módulos cocíclicos.

( $\Leftarrow$ ) Supongamos  $N$  un producto subdirecto de cocientes cocíclicos de  $M$  tal que  $N \cong M$ . Consideremos el producto  $\prod_{i \in I} C_i$  de todos los cocientes cocíclicos de  $M$ . Entonces, por la Proposición 1.23,  $C_i$  es finitamente cogenerado para todo  $i \in I$ . Esto implica, como la Proposición 1.19 sostiene, que existe un subconjunto finito  $F \subseteq I$  y un monomorfismo

$$N \rightarrow \prod_{i \in F} C_i = \bigoplus_{i \in F} C_i$$

Por otro lado,

$$zoc\left(\bigoplus_{i \in F} C_i\right) = \bigoplus_{i \in F} zoc(C_i) = \bigoplus_{i \in F} S_i$$

donde  $S_i$  es simple para cada  $i \in F$ . Por lo tanto,  $\text{zoc}\left(\bigoplus_{i \in F} C_i\right)$  es finitamente generado. Asimismo, como  $\text{zoc}(C_i) \leq_{es} C_i$  para cada  $i \in F$ , entonces

$$\text{zoc}\left(\bigoplus_{i \in F} C_i\right) = \bigoplus_{i \in F} \text{zoc}(C_i) \leq_{es} \bigoplus_{i \in F} C_i$$

Esto implica, según la Proposición 1.22, que  $\bigoplus_{i \in F} C_i$  es finitamente cogenerado, y como  $N$  es un submódulo de  $\bigoplus_{i \in F} C_i$ , entonces también lo es. Esto, a su vez, evidencia que  $M$  es finitamente cogenerado.

□

**Definición 1.25.** *Sea  $R$  un anillo. Decimos que un  $R$ -módulo  $M$  es uniserial si su retícula de submódulos es una cadena. Además, decimos que un anillo  $R$  es uniserial izquierdo si es uniserial como  $R$ -módulo izquierdo. Asimismo,  $R$  es uniserial derecho si es uniserial como  $R$ -módulo derecho. Finalmente, decimos que  $R$  es uniserial si es uniserial como  $R$ -módulo izquierdo y derecho.*

El concepto de anillo uniserial resultará muy útil a la hora de trabajar con módulos cocíclicos, como lo atestiguan diversos de los resultados ulteriores.

**Proposición 1.26.** *Un módulo uniserial  $M$  tal que  $\text{zoc}(M) \neq \{0\}$ , es cocíclico.*

*Demostración.* Sea  $N \leq M$  un submódulo distinto de cero. Como  $\text{zoc}(M) \neq \{0\}$ , podemos tomar un submódulo simple  $S \leq M$ . Luego, a causa de que  $M$  es uniserial, debe ocurrir, ya sea que  $S \leq N$ , o bien, que  $N \leq S$ , en cuyo caso resulta que  $N = S$ , ya que  $S$  es simple. En cualquiera de los casos, tenemos que  $N \cap S = S \neq \{0\}$ . Por lo tanto,  $S$  es esencial en  $M$ , lo que implica, como ya hemos visto, que  $M$  es cocíclico. □

**Axioma 1.27** (De Elección). Sean  $A$  un conjunto,  $S$  una colección no vacía de subconjuntos de un conjunto  $B$ , y  $\sigma : A \rightarrow S$  una función. Entonces existe una función  $f : A \rightarrow B$  tal que  $f(a) \in \sigma(a)$  para cada  $a \in A$ .

Recordemos el siguiente teorema clásico de la teoría de módulos:

**Teorema 1.28.** Los siguientes enunciados son equivalentes para un módulo  $M$ :

- a)  $M$  es artiniiano;
- b) toda familia no vacía de submódulos de  $M$  tiene un elemento mínimo;
- c) todo cociente de  $M$  es finitamente cogeneratedo.

*Demostración.* a)  $\Rightarrow$  b) Sea  $A$  una familia no vacía de submódulos de  $M$ , y supongamos que  $A$  no tiene elemento mínimo. Notemos que, para cada  $L \in A$ , el conjunto

$$L_A = \{L' \in A \mid L' < L\}$$

no es vacío. Ahora consideremos el conjunto  $\Gamma = \{L_A \mid L \in A\}$  y la función  $\sigma : A \rightarrow \Gamma$  definida por  $\sigma(L) = L_A$ . Luego, si denotamos por  $B$  al conjunto de todos los submódulos de  $M$ , entonces, por el Axioma 1.27, sabemos que existe una función  $f : A \rightarrow B$  tal que, para cada  $L \in A$ , se tiene que  $f(L) = L' \in L_A$ . Así las cosas, resulta que si tomamos un elemento  $L \in A$ , entonces debe existir una sucesión infinita descendente de submódulos propios de  $M$ :

$$L > L' > L'' > \dots$$

pero esto da lugar a una contradicción, por lo que, podemos concluir que  $A$  tiene mínimo.

$b) \Rightarrow c)$  Sea  $M/K$  un cociente de  $M$ . Supongamos que  $A$  es una familia de submódulos de  $M$  que contienen a  $K$  tal que  $\cap A = K$ . Consideremos ahora la siguiente colección de submódulos de  $M$ :

$$P = \{ \cap F \mid F \subseteq A \text{ con } F \text{ finito} \}.$$

La hipótesis nos garantiza la existencia de un subconjunto finito  $F_0$  de  $A$ , tal que  $\cap F_0$  es mínimo en  $P$ . Es claro que  $\cap A \leq \cap F_0$ . Además, notemos que si existiera  $x \in \cap F_0$  tal que  $x \notin \cap A$ , entonces tendría que haber un módulo  $B \in A$  tal que  $x \notin B$ , lo que implicaría que  $\cap(F \cup \{B\}) \subset \cap F_0$  y eso sería absurdo. Por lo tanto,  $M/K$  es finitamente cogeneratedo.

$c) \Rightarrow a)$  Sea  $L_1 \geq L_2 \geq \dots L_n \geq \dots$  una cadena descendente de submódulos de  $M$ . Nombremos  $K = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} L_j$ . Luego, tenemos la siguiente cadena descendente de submódulos del módulo finitamente cogeneratedo  $M/K$ :

$$L_1/K \geq L_2/K \geq \dots L_n/K \geq \dots$$

Como  $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} (L_j/K) = K$ , entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $L_n = \bigcap_{j=1}^n L_j = K$ . De aquí que, para todo  $i \geq n$ , se tenga que  $L_n = L_{n+i}$ .

□

**Definición 1.29.** *Decimos que un módulo  $M$  es uniforme si todo submódulo distinto de cero de  $M$ , es esencial en  $M$ .*

A partir de la definición, queda claro que todo módulo cocíclico es uniforme. Además, notemos que todo módulo uniserial es uniforme, aunque, desde luego, el inverso no necesariamente es cierto, por ejemplo,  $\mathbb{Z}$  como  $\mathbb{Z}$ -módulo es uniforme pero no uniserial. En relación a esto, un resultado muy interesante para los fines de este trabajo, fue demostrado en [6, Proposición 2.7] y, en otras cosas, afirma lo siguiente:

**Teorema 1.30.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un módulo  $M$ :*

- a)  $M$  es uniserial;
- b) todo cociente distinto de cero de  $M$  es uniserial;
- c) todo cociente distinto de cero de  $M$  es uniforme.

Ya habíamos advertido que los  $\mathbb{Z}$ -módulos cocíclicos son los subgrupos de  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  con  $p$  un número entero primo. Debido a este hecho, se tiene que cocientes de  $\mathbb{Z}$ -módulos cocíclicos son, a su vez, cocíclicos. Por esta razón, resulta natural preguntarse cuándo cocientes de módulos cocíclicos son cocíclicos. La siguiente proposición responde esta pregunta.

**Proposición 1.31.** *Sea  $R$  un anillo. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- a)  $E(S)$  es uniserial izquierdo y artiniano izquierdo para cada  $R$ -módulo simple  $S$ .
- b) la clase de todos los  $R$ -módulos cocíclicos es cerrada bajo cocientes.
- c) El conjunto de los submódulos de  $E(S)$  está bien ordenado con respecto a la inclusión para todo  $R$ -módulo simple  $S$ .

*Demostración.* a)  $\Rightarrow$  b) Sean  $M$  un módulo cocíclico y  $M \rightarrow L$  un epimorfismo. Entonces existe un módulo simple  $S$  tal que  $S \leq M \leq E(S)$ . En este caso, se sigue de la hipótesis que  $E(S)$  es artiniano y uniserial y, en consecuencia,  $M$  también lo es, lo que a su vez deriva en que, de igual forma,  $L$  sea artiniano y uniserial. Ahora bien, si nos valemos de la artinianidad de  $L$ , obtenemos un submódulo simple  $T \leq L$ . Así como, usando la linealidad de  $L$ , tenemos que  $T \leq_e L$ . De lo anterior, se concluye que

$M$  es cocíclico.

$b) \Rightarrow a)$  Consideremos un epimorfismo  $E(S) \rightarrow L$  con  $S$  un módulo simple. Como  $E(S)$  es cocíclico, entonces, por hipótesis,  $L$  también lo es, y por lo tanto, es uniforme. Así que, podemos concluir que  $E(S)$  es uniserial izquierdo, como hace constar el Teorema 1.30. Por otra parte, también por ser  $L$  cocíclico, se tiene que es finitamente cogenerado, en cuyo caso resulta, como lo confirma el Teorema 1.28, que  $E(S)$  es artiniano izquierdo.

$a) \Rightarrow c)$  Si toda familia no vacía de submódulos de  $E(S)$  tiene mínimo, y por añadidura,  $E(S)$  es uniserial, entonces resulta que  $E(S)$  tiene elemento menor.

$c) \Rightarrow a)$  Es claro. □

**Lema 1.32.** *Sea  $R$  un anillo e  $I \leq R$  un ideal bilateral. Entonces  $M$  es un  $R/I$ -módulo si y solo si  $M$  es un  $R$ -módulo tal que  $IM = \{0\}$ .*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Si  $M$  es un  $R/I$ -módulo, entonces  $M$  es un  $R$ -módulo con el producto  $\cdot : R \times M \rightarrow M$  dado por  $r \cdot m = (r + I)m$ . Así que, si  $r \in I$  y  $m \in M$ , entonces  $r \cdot m = (r + I)m = (0 + I)m = 0$ . Se sigue que  $IM = \{0\}$ .

( $\Leftarrow$ ) Definamos el producto  $\cdot : R/I \times M \rightarrow M$  por  $(r + I) \cdot m = rm$ , para cualesquiera  $r \in R$  y  $m \in M$ . Veamos que este producto está bien definido. Para ello, consideremos  $r, r' \in R$  tales que  $r + I = r' + I$ . Entonces  $rm = (r + I) \cdot m = (r' + I) \cdot m = r'm$ , para toda  $m \in M$ . De modo que,  $(r - r') \in I$ , luego  $(r - r') \cdot m = 0$ , para toda  $m \in M$ . Así que,  $rm = r'm$ , para toda  $m \in M$ . Por lo tanto, el producto está bien definido y, en consecuencia,  $M$  es un  $R/I$ -módulo. □

**Proposición 1.33.** *Sean  $R$  un anillo e  $I \leq R$  un ideal bilateral. Supongamos que la clase de los  $R$ -módulos cíclicos coincide con la clase de los  $R$ -módulos cocíclicos. Entonces la clase de los  $R/I$ -módulos cíclicos coincide con la clase de los  $R/I$ -módulos cocíclicos.*

*Demostración.* Sea  $M$  un  $R/I$ -módulo cíclico. Esto significa que existe  $m_0 \in M$  tal que  $(R/I)m_0 = M$ . Por el Lema 1.32, tenemos que  $M$  es un  $R$ -módulo con el producto  $rm := (r + I)m$ . Por lo anterior, es claro que  $Rm_0 = M$ , por lo que,  $M$  es un  $R$ -módulo cíclico y, necesariamente, un  $R$ -módulo cocíclico por hipótesis. Además,  $M$  es anulado por  $I$ . Entonces  $M$  es un  $R/I$ -módulo cocíclico, ya que cualquier  $R$ -submódulo de  $M$  es anulado por  $I$ , en particular el  $R$ -submódulo simple esencial que existe por ser  $M$  un  $R$ -módulo cocíclico.

Recíprocamente, pongamos que  $M$  es un  $R/I$ -módulo cocíclico, y consideremos  $S$  un  $R/I$ -submódulo simple esencial de  $M$ . Entonces cualquier  $R$ -submódulo de  $S$  está anulado por  $I$ . Luego  $S$  es un  $R$ -submódulo simple de  $M$ . Notemos, que el mismo argumento sostiene el hecho de que  $S$  sea un  $R$ -submódulo esencial del  $R$ -módulo  $M$ . De esta manera, podemos ver que  $M$  es un  $R$ -módulo cíclico usando la hipótesis. A partir de aquí, es fácil ver que  $M$  es un  $R/I$ -módulo cíclico.  $\square$

## Capítulo 2

# Anillos de Köthe y anillos artinianos de ideales principales.

Como ya hemos mencionado, el artífice de la teoría sobre la cual descansa este trabajo es G. Köthe, quien, en [11], demostró el Teorema 2.21. A pesar de la envergadura de este resultado, su demostración se presenta en la literatura de una manera, por poco, inexpugnable. Con base en esta situación, decidimos que era un designio capital incluir en la tesis una demostración de ese teorema, misma que está contenida en este capítulo. Por otro lado, en [2], los autores demuestran un resultado (Teorema 2.6) que pone de manifiesto la relación entre módulos cíclicos y cocíclicos respecto a los anillos artinianos de ideales principales. Nosotros continuamos explorando esa correspondencia en este apartado. En el mismo trabajo, demuestran un teorema (Teorema 2.23) que atañe a los anillos artinianos de ideales principales, y que nosotros transformamos en un teorema que compete a los anillos de Köthe. Otra de las obtenciones aquí incluidas, fue

demostrar el Teorema 2.29, que si bien, puede ser visto como consecuencia de la teoría desarrollada en [4], tiene el atributo de estar aquí demostrado con técnicas diferentes a las del trabajo citado. Finalmente, introducimos el concepto de anillo de coköthe, con miras a futuras investigaciones.

### 2.1. Cociclicidad: un puente.

**Definición 2.1.** *Decimos que un anillo  $R$  es autoinyectivo izquierdo si es inyectivo como  $R$ -módulo izquierdo ( ${}_R R$  es inyectivo).*

**Definición 2.2.** *Sea  $R$  un anillo. Decimos que  $R$  es cuasi Frobenius si es noetheriano izquierdo y autoinyectivo izquierdo. Estos anillos también son conocidos en la literatura como anillos  $QF$ , por sus siglas en Inglés.*

Es bien sabido que esta definición es equivalente a que el anillo  $R$  sea noetheriano derecho y autoinyectivo derecho, así como que  $R$  sea artiniano izquierdo y autoinyectivo izquierdo, o bien, que  $R$  sea artiniano derecho y autoinyectivo derecho. Por lo tanto, coloquialmente hablando, diríamos que ser un anillo cuasi Frobenius «no tiene lado». En realidad, a consecuencia del intenso trabajo de investigación que se ha hecho en relación con estos anillos, se conocen muchas caracterizaciones interesantes. En particular una de ellas será de utilidad posteriormente, y por ello es bueno tenerla presente:

**Proposición 2.3.** *Un anillo  $R$  es cuasi Frobenius si y solo si es noetheriano izquierdo y derecho, y además se cumplen las siguientes dos condiciones:*

$$((0 : I) : 0) = I \text{ para todo ideal derecho } I;$$

$$(0 : (J : 0)) = J \text{ para todo ideal izquierdo } J.$$

La demostración de esta proposición se puede revisar en [13, Teorema 1.50].

**Definición 2.4.** *Decimos que un anillo  $R$  es artiniiano de ideales principales si es un anillo artiniiano izquierdo y derecho, y de ideales principales izquierdos y derechos.*

**Ejemplo 2.5.** .

*Sean  $D$  un dominio conmutativo de ideales principales y  $a \neq 0$  un elemento de  $D$  que no es unidad. Además, sea  $I/\langle a \rangle$  un ideal de  $D/\langle a \rangle$ . Como  $D$  es de ideales principales, existe un elemento  $b \in D$  tal que  $I = \langle b \rangle$ . De modo que  $I/\langle a \rangle = \langle b \rangle/\langle a \rangle$ . Luego, como  $\langle a \rangle \leq \langle b \rangle$ , entonces existe  $c \in D$  tal que  $a = bc$  donde  $c$  es, claramente, distinto de 0. Ahora, consideremos la inclusión  $\iota : \langle b \rangle/\langle a \rangle \hookrightarrow D/\langle a \rangle$  y sea  $h : \langle b \rangle/\langle a \rangle \rightarrow D/\langle a \rangle$  un morfismo. Además, sea  $d \in D$  el elemento tal que  $h(\bar{b}) = \bar{d}$ . Entonces*

$$\bar{0} = h(\bar{0}) = h(\bar{a}) = h(\bar{bc}) = \bar{c}h(\bar{b}) = \bar{c}\bar{d} = \bar{cd}.$$

*Por lo que  $cd \in \langle a \rangle$ . Luego existe  $t \in D$ , tal que  $cd = at$ . Así que  $cd = at = bct$ . Como  $D$  es dominio, podemos cancelar a  $c$ , para así obtener que  $d = bt$ . Definamos ahora  $f : D/\langle a \rangle \rightarrow D/\langle a \rangle$  por  $f(1) = t$ . Es claro que  $f$  extiende a  $h$ . Entonces, por el Criterio de Baer,  $D/\langle a \rangle$  es autoinyectivo izquierdo. De tal forma, tenemos que por ser  $D/\langle a \rangle$  de ideales principales, en particular, es noetheriano izquierdo, y como hemos visto, también es autoinyectivo izquierdo, esto equivale a decir que  $D/\langle a \rangle$  es cuasi Frobenius, lo que implica que es artiniiano izquierdo y derecho. Todo ello deviene en que  $D/\langle a \rangle$  es un anillo artiniiano de ideales principales.*

En [2], los autores hacen una valiosa investigación en la que involucran tanto los módulos cocíclicos, como a los anillos artniianos de ideales principales. Por ello, este artículo se sitúa como uno de los primordiales para la tesis. El siguiente teorema pertenece a dicho trabajo.

## 28 Anillos de Köthe y anillos artinianos de ideales principales.

**Teorema 2.6.** *Sea  $R$  un anillo. Entonces la clase de los  $R$ -módulos cíclicos distintos de cero coincide de con la clase de los  $R$ -módulos cocíclicos distintos de cero si y solo si  $R$  es artiniano de ideales principales y uniserial izquierdo.*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Con base en el Teorema 1.28, sabemos que para demostrar que  $R$  es artiniano izquierdo, basta verificar que todo cociente de  ${}_R R$  es finitamente cogenerado o, equivalentemente, que todo  $R$ -módulo cíclico es finitamente cogenerado. De tal suerte que, por la hipótesis, es suficiente demostrar que todo  $R$ -módulo cocíclico es finitamente cogenerado, pero esto queda garantizado, como ya hemos visto, por la Proposición 1.22.

Ahora veamos que  $R$  es autoinyectivo. Para ello, supongamos lo contrario, es decir, que  $R \not\leq E(R)$ . Como  ${}_R R$  es cíclico, entonces es cocíclico, debido a la hipótesis. Por esta razón, existe un submódulo simple esencial  $S \leq R$ , así que,  $E(R) = E(S)$ . Esto implica que  $E(R)$  es cíclico, ya que  $E(S)$  es cocíclico y, por lo tanto, cíclico. En consecuencia, existe un epimorfismo  $f : R \rightarrow E(R)$ . Ahora, consideremos el siguiente diagrama conmutativo donde  $i : f^{-1}(R) \hookrightarrow R$  y  $j : R \hookrightarrow E(R)$  son las inclusiones:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(R) & \xhookrightarrow{i} & R \\ f|_{f^{-1}(R)} \downarrow & & \downarrow f \\ R & \xhookrightarrow[\neq]{j} & E(R) \end{array}$$

Notemos que si  $i$  fuera suprayectiva, entonces  $j$  también tendría que serlo, pero esto no es posible, pues estamos suponiendo que  $R \not\leq E(R)$ . Se sigue que  $f^{-1}(R) \not\leq R$ . Ahora vamos a formar otro nivel del diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
f^{-1}(f^{-1}(R)) & \hookrightarrow & f^{-1}(R) \\
\downarrow f|_{f^{-1}(f^{-1}(R))} & & \downarrow f|_{f^{-1}(R)} \\
f^{-1}(R) & \xrightarrow[\neq]{i} & R \\
\downarrow f|_{f^{-1}(R)} & & \downarrow f \\
R & \xrightarrow[\neq]{j} & E(R)
\end{array}$$

De la misma manera que hicimos en el diagrama anterior, podemos obtener que la inclusión superior no puede ser suprayectiva y, por lo tanto,  $f^{-1}(f^{-1}(R)) \subsetneq f^{-1}(R)$ . Si continuamos construyendo más niveles sobre los diagramas anteriores, obtenemos una cadena descendente infinita:

$$R \supsetneq f^{-1}(R) \supsetneq f^{-1}(f^{-1}(R)) \supsetneq f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(R))) \supsetneq \dots$$

lo que contradice que  ${}_R R$  es artiniiano. Esta contradicción demuestra que  $R$  es autoinyectivo.

Hasta el momento, hemos demostrado que  $R$  es artiniiano y autoinyectivo, y por ello, es válido decir que  $R$  es cuasi Frobenius.

Consideremos ahora un ideal bilateral  $I \leq R$ . Observemos que, en virtud de la Proposición 1.33, tenemos que el anillo  $R/I$  también satisface la hipótesis, es decir, que un  $R/I$ -módulo es cíclico si y solo si es, a su vez, cocíclico. Entonces, por lo que demostramos arriba, podemos concluir que  $R/I$  es cuasi Frobenius para cada ideal bilateral  $I \leq R$ . Esto es equivalente, según [9, Proposición 25.4.6 B], a que  $R$  es artiniiano de ideales principales.

Ahora nos proponemos demostrar que  $R$  es uniserial izquierdo. Como todo cociente distinto de cero de  $R$  es cíclico, entonces es cocíclico, lo que implica que todo cociente distinto de cero de  $R$  es uniforme. Por lo tanto,  $R$  es uniserial izquierdo, y de ello da testimonio el Teorema 1.30.

### 30 Anillos de Köthe y anillos artinianos de ideales principales.

( $\Leftarrow$ ) Tomemos un  $R$ -módulo cíclico distinto de cero, digamos  $R/I$  para algún ideal bilateral  $I \leq R$ . Notemos que la retícula de submódulos de  $R/I$  es una cadena, ya que es isomorfa a la retícula de submódulos de  $R$  que contienen a  $I$ , y  $R$  es uniserial por hipótesis. Luego, como  ${}_R R$  es artiniano, existe un ideal  $J \leq R$  mínimo tal que  $I \not\leq J \leq R$ . En tal caso, la linealidad de  $[I, R]$  nos asegura que  $J$  es esencial en  $[I, R]$ , por lo que,  $J/I$  es un submódulo simple esencial de  $R/I$ , lo que demuestra la cociclicidad de  $R$ .

Recíprocamente, sea  $M$  un  $R$ -módulo cocíclico. Entonces existe un módulo simple esencial  $S \leq_{es} M$ . Asimismo, ya que  ${}_R R$  es artiniano, existe algún submódulo simple  $T \leq R$ . Además, de la linealidad de  $R$ , se deduce que  $R$  debe ser local y, por tanto, local izquierdo, luego  $S \cong T$ . Llamemos  $\varphi : S \rightarrow T$  a tal isomorfismo. Luego, como  $R$  es artiniano de ideales principales, en particular es cuasi Frobenius y, por lo tanto, es autoinyectivo izquierdo, así que podemos extender al morfismo  $i\varphi : S \rightarrow R$ , donde  $i : T \hookrightarrow R$  es la inclusión, a un morfismo  $\xi : M \rightarrow R$  que, además, debe ser un monomorfismo, ya que  $S$  es esencial en  $M$ . Esta situación es representada en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xhookrightarrow{es} & M \\
 \varphi \downarrow & & \nearrow \xi \\
 T & & \\
 i \downarrow & & \\
 R & & 
 \end{array}$$

Se sigue que  $M$  es isomorfo a algún ideal izquierdo de  $R$  que, por hipótesis, debe ser principal, es decir, cíclico.  $\square$

El teorema anterior describe cuándo la clase de los módulos cocíclicos y la de los cíclicos coinciden; pero, en el corazón de la demostración, se

encuentra escondida una caracterización de anillos artinianos izquierdos y uniseriales izquierdos, usando únicamente, que la clase de los módulos cíclicos esté contenida en la clase de los módulos cocíclicos, como veremos en el siguiente resultado. Por otro lado, como hemos visto, los módulos cocíclicos, son un caso particular de los finitamente cogenerados. Además, sabemos que un anillo es artiniano si todos sus cocientes son finitamente cogenerados. Desde esta perspectiva, tiene sentido preguntarse para qué tipo de anillos será cierto que todos sus cocientes son cocíclicos; también en el siguiente teorema respondemos esa pregunta. Pero antes, recordemos esta definición:

**Definición 2.7.** *Sea  $R$  un anillo. Decimos que  $R$  es semiartiniano si, para todo  $R$ -módulo  $M$  distinto de cero, se tiene que  $\text{zoc}(M)$  es distinto de cero.*

**Teorema 2.8.** *Los siguientes enunciados son equivalentes para un anillo  $R$ :*

- a) *Todo  $R$ -módulo cíclico es cocíclico.*
- b)  *$R$  es artiniano izquierdo y uniserial izquierdo.*
- c) *todo subconjunto no vacío de ideales izquierdos de  $R$  tiene menor elemento.*
- d)  *$R$  semiartiniano izquierdo y uniserial izquierdo.*
- e) *la retícula de ideales izquierdos de  $R$  es:*

$$0 < J^{n-1} < J^{n-2} < \dots < J < R$$

*donde  $J$  es el radical de Jacobson y, además,  $J^m$  es un ideal principal para todo  $m \in \mathbb{N}$ .*

### **32 Anillos de Köthe y anillos artinianos de ideales principales.**

*Demostración.*  $a) \Rightarrow b)$  Supongamos que  $M$  es un cociente de  ${}_R R$ . Luego,  $M$  es cíclico y, por lo tanto, cocíclico. Consecuentemente  $M$  es uniforme y finitamente cogenerado. Se deduce del Teorema 1.30 aunado al Teorema 1.28, que  $R$  es uniserial izquierdo y artiniano izquierdo.

$b) \Rightarrow c)$  Si consideramos una familia no vacía de ideales izquierdos de  $R$ , entonces, como  $R$  es artiniano izquierdo, tal familia tiene mínimo y, por ser  $R$  uniserial izquierdo, dicho mínimo es un elemento menor.

$b) \Rightarrow a)$  Sea  $M$  un módulo cíclico izquierdo. Luego al ser  $M$  un cociente de  ${}_R R$ , resulta ser artiniano izquierdo y uniserial izquierdo. Con lo que,  $M$  contiene un submódulo simple  $S$  por artinianidad, y dicho simple es esencial en  $M$  por linealidad. Por lo tanto,  $M$  es un módulo cocíclico.

$c) \Rightarrow d)$  Sean  $I$  e  $J$  ideales izquierdos de  $R$ . Entonces debe ocurrir, ya sea que  $I \leq J$ , o bien, que  $J \leq I$ , esto debido a que, por hipótesis, el conjunto  $\{I, J\}$  tiene un elemento menor. De aquí que podamos afirmar que  $R$  es uniserial izquierdo. Además, claramente, la hipótesis implica que  $R$  es artiniano izquierdo y, consecuentemente, semiaritniano izquierdo.

$d) \Rightarrow a)$  Sea  $M$  un módulo cíclico. Entonces  $M$ , al ser cociente de  $R$ , es uniserial izquierdo y semiartiano izquierdo. Es decir,  $M$  tiene zoclo esencial, y dicho zoclo consta de un solo módulo simple, por ser  $M$  uniserial. En consecuencia,  $M$  es cocíclico.

$e) \Rightarrow b)$  Es claro.

$b) \Rightarrow e)$  Notemos que en este momento ya podemos suponer los cuatro

enunciados equivalentes anteriores. Con esto en mente, observemos que  $R$  contiene un único ideal izquierdo máximo ya que es uniserial izquierdo. De lo anterior se desprende que  $R$  es local y, por lo tanto, el radical de Jacobson  $J$  es distinto de cero y, de hecho, coincide con ese único máximo. También notemos que, al ser  $R$  artiniiano izquierdo, resulta que  $J$  es nilpotente. De modo que, estamos en condiciones de demostrar por inducción sobre el índice de nilpotencia del radical, que todo ideal izquierdo  $I$  de  $R$  es de la forma  $I = J^m$  para algún natural  $m$ . Sea  $n$  el índice de nilpotencia del radical. Si  $n = 2$ , entonces  $J$  es anulado por  $J$  mismo, y esto hace que  $J$  sea un  $R/J$ -módulo izquierdo. Además,  $R/J$  es un anillo con división, por lo que,  $J$  es un  $R/J$ -módulo semisimple y, por lo tanto, un  $R$ -módulo semisimple. Luego, por la linealidad de  $R$ , se infiere que  $J$  es simple. Consideremos  $I$  un ideal izquierdo de  $R$  distinto de cero. Entonces  $I \leq J$  o  $J \leq I$ , en otros términos,  $I = J$  o  $I = R = J^0$ . Ahora, para el caso inductivo, primero notemos que  $J^{n-1} \neq \{0\}$ , y además, usando el mismo argumento que antes, obtenemos que  $J^{n-1}$  es un módulo simple. Así que, si tomamos un ideal  $\{0\} \neq I \leq R$ , entonces  $J^{n-1} \leq I$ , y por lo anterior,  $R/J^{n-1}$  es un anillo artiniiano y uniserial con índice de nilpotencia menor que  $n$ , con  $I/J^{n-1} \leq R/J^{n-1}$ . Luego, la hipótesis de inducción junto con el Teorema de la Correspondencia, constatan que  $I = J^m$  para alguna  $m \in \mathbb{N}$ . En este punto, lo único que resta probar es que  $J$  es un  $R$ -módulo cíclico. Para esto, tomemos  $x \in J$  tal que  $x \in J^2$ . Entonces por linealidad, se tiene que  $J^2 < Rx \leq J$ . Finalmente, debido a que todo ideal es una potencia del radical, podemos concluir que  $J = Rx$ .

□

En [1], los autores demuestran el siguiente teorema:

**Teorema 2.9.** *Sea  $R$  un anillo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

### 34 Anillos de Köthe y anillos artinianos de ideales principales.

- a) Sea  $\mathcal{C}$  una clase de  $R$ -módulos. Entonces  $\mathcal{C}$  es cerrada bajo submódulos si y solo si es cerrada bajo cocientes;
- b)  $R$  es isomorfo a un producto directo finito de anillos artinianos de ideales principales;
- c) para todo  $R$ -módulo  $M$  se tiene que un  $R$ -módulo  $N$  es submódulo de  $M$  si y solo si  $N$  es un cociente de  $M$ .

**Proposición 2.10.** Si  $R$  es un anillo semiartiniano, entonces  $\text{zoc}(M)$  es un submódulo esencial de  $M$ , para todo  $R$ -módulo  $M$ .

*Demostración.* Supongamos que  $N \leq M$  es un submódulo tal que  $N \neq \{0\}$  y  $N \cap \text{zoc}(M) = \{0\}$ . Esto implica, de acuerdo con la Proposición 1.21, que  $\text{zoc}(N) \neq \{0\}$ , lo que contradice que  $R$  sea semiartiniano.  $\square$

**Definición 2.11.** Decimos que un anillo  $R$  es de Köthe izquierdo (derecho) si todo  $R$ -módulo izquierdo (derecho) es una suma directa de  $R$ -módulos cíclicos izquierdos (derechos). Finalmente, decimos que un anillo es de Köthe si es de Köthe izquierdo y derecho.

**Ejemplo 2.12.** Consideremos el anillo  $\mathbb{Z}_n$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Es claro que:

$$\mathbb{Z}_n\text{-Mod} = \{M \in \mathbb{Z}\text{-Mod} \mid nM = \{0\}\}.$$

Entonces  $\mathbb{Z}_n$  es un anillo de Köthe, y de ello da fe el Teorema de Prüfer-Baer ([14, Corolario 10.37]) que afirma que todo grupo abeliano  $M$  de orden acotado (i.e.  $nM = \{0\}$  para algún  $n > 0$ ) es una suma directa de cíclicos.

**Definición 2.13.** Un  $R$ -módulo  $M$  es finitamente presentado si  $M \cong F/K$  con  $F$  y  $K$  finitamente generados y  $F$  proyectivo. Además, un submódulo  $N$  de  $M$  es puro si para todo módulo finitamente presentado  $F$  tenemos

que el morfismo

$$\pi^* : \text{Hom}(F, M) \rightarrow \text{Hom}(F, M/N)$$

es un epimorfismo definido por  $\pi^*(f) = \pi f$  donde  $\pi : M \rightarrow M/N$  es el epimorfismo natural. Por último, un módulo  $P$  es proyectivo puro, si para cada módulo  $M$  y cada submódulo puro  $N$  de  $M$  el morfismo

$$\pi^* : \text{Hom}(P, M) \rightarrow \text{Hom}(P, M/N)$$

es un epimorfismo.

Es conveniente observar que todo módulo finitamente presentado es proyectivo puro.

La siguiente observación nos muestra que el concepto de submódulo puro es una generalización del de sumando directo.

**Observación 2.14.** Si  $N$  es un sumando directo de  $M$ , entonces  $N$  es puro en  $M$ .

*Demostración.* Sean  $F$  un módulo finitamente presentado y  $L \leq M$  tal que  $N \oplus L = M$ . Entonces existe un isomorfismo  $f : M/N \rightarrow L$  definido por  $f(l + N) = l$ . Así que, si consideramos  $g \in \text{Hom}(F, M/N)$  y definimos el morfismo  $\psi : F \rightarrow M$  por  $\psi = ifg$  donde  $i : L \rightarrow M$  es la inclusión, entonces  $\pi^*(\psi) = \pi\psi = (\pi if)g = g$ . Por lo que,

$$\pi^* : \text{Hom}(F, M) \rightarrow \text{Hom}(F, M/N)$$

es un epimorfismo. □

**Proposición 2.15.** Supongamos que  $L \leq N \leq M$  y que  $L$  es puro en  $M$ . Entonces  $L$  es puro en  $N$ .

### 36 Anillos de Köthe y anillos artinianos de ideales principales.

*Demostración.* Sean  $F$  un módulo finitamente presentado y  $\pi : N \rightarrow N/L$  el epimorfismo natural. Nos proponemos demostrar que

$$\pi^* : \text{Hom}(F, N) \rightarrow \text{Hom}(F, N/L)$$

es un epimorfismo. Para ello, consideremos un morfismo  $f : F \rightarrow N/L$ , la inclusión  $i : N/L \hookrightarrow M/L$  y el epimorfismo natural  $\bar{\pi} : M \rightarrow M/L$ . Luego, como  $L$  es puro en  $M$  y  $fi$  es un morfismo de  $F$  en  $M/L$ , entonces existe  $g : F \rightarrow M$  tal que  $\bar{\pi}g = fi$ . Ahora, si tomamos  $x \in F$ , resulta que  $f(x) = n + L$  y entonces  $n + L = g(x) + L$ , lo que deriva en que  $g(x) - n \in L \leq N$ . Así que  $g(x) \in N$  y, por lo tanto,  $g$  es un elemento en  $\text{Hom}(F, N)$ , y además cumple que  $\pi g = f$ . En consecuencia,  $L$  es puro en  $N$ .  $\square$

**Proposición 2.16.** *Sean  $K, N$  y  $M$   $R$ -módulos tales que  $K \leq N \leq M$  con  $K$  puro en  $M$  y  $N/K$  puro en  $M/K$ . Entonces  $N$  es puro en  $M$ .*

*Demostración.* Sea  $F$  un módulo finitamente presentado. Entonces, por hipótesis, existen epimorfismos naturales:

$$\text{Hom}(F, M) \rightarrow \text{Hom}(F, M/K) \quad \text{y}$$

$$\text{Hom}(F, M/K) \rightarrow \text{Hom}(F, M/N)$$

Por lo que, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(F, M) & \longrightarrow & \text{Hom}(F, M/K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}(F, M) & \longrightarrow & \text{Hom}(F, M/N) \end{array}$$

donde  $\text{Hom}(F, M) \rightarrow \text{Hom}(F, M/N)$  es, claramente, un epimorfismo. Se concluye que  $N$  es puro en  $M$ .  $\square$

La siguiente proposición precisa, para su demostración, algunos resultados relacionados con productos tensoriales y límites directos en módulos, que se alejan del discurso de este trabajo y, por ello, decidimos solo esbozar su demostración citando los teoremas que se requieren.

**Proposición 2.17.** *Si  $\{M_i\}_{i \in I}$  es una cadena de submódulos puros de  $M$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} M_i$  es puro en  $M$ .*

*Demostración.* Sea  $\{M_i\}_{i \in I}$  es una cadena de submódulos puros de  $M$ . Sabemos por [16, Proposición 3], que  $M_i$  es puro en  $M$  para toda  $i \in I$  si y solo si  $F \otimes M_i \rightarrow F \otimes M$  es monomorfismo para toda  $i \in I$  con  $F$  finitamente presentado derecho. También se sabe que el producto tensorial conmuta con límites directos, es decir,  $F \otimes \varinjlim M_i \cong \varinjlim (F \otimes M_i)$  (ver [15, Proposición 8.4]). Pero al ser  $\{M_i\}_{i \in I}$  una cadena de submódulos, resulta que  $\varinjlim M_i = \bigcup_{i \in I} M_i$ . Además, por [15, Proposición 5.3], el funtor límite directo es exacto. Así que, uniendo todo lo anterior obtenemos que

$$F \otimes \bigcup_{i \in I} M_i \rightarrow F \otimes M$$

es monomorfismo. En otras palabras,  $\bigcup_{i \in I} M_i$  es puro en  $M$ . □

Recordemos que una familia  $\{N_i\}_{i \in I}$  de submódulos de  $M$  es independiente si para cada  $j \in I$ , tenemos que  $N_j \cap (\sum_{i \neq j} N_i) = \{0\}$ . Por lo que

$$\sum_{i \in I} N_i = \bigoplus_{i \in I} N_i.$$

**Teorema 2.18.** *Sean  $R$  un anillo y  $\mathcal{F}$  una clase que consta de  $R$ -módulos finitamente presentados. Si cada  $R$ -módulo izquierdo contiene un submódulo puro isomorfo a algún elemento de  $\mathcal{F}$ , entonces cada  $R$ -módulo es una suma directa de copias de módulos en  $\mathcal{F}$ .*

### 38 Anillos de Köthe y anillos artinianos de ideales principales.

*Demostración.* Sean  $M$  un  $R$ -módulo distinto de cero y  $\{F_i\}_{i \in I}$  una familia independiente de submódulos de  $M$  que son isomorfos a algún miembro de  $\mathcal{F}$  y tal que  $F = \bigoplus_{i \in I} F_i$  es puro en  $M$ . Por hipótesis, podemos considerar que  $I \neq \emptyset$ . Luego, usando el Lema 2.17 junto con el Lema de Zorn, podemos asegurar la existencia de una familia máxima con todas las propiedades descritas. Si ocurre que  $F = M$ , entonces terminamos. Supongamos que  $F < M$ . Luego  $M/F$  es distinto de cero y, por lo tanto, contiene un submódulo puro distinto de cero  $N/F$ , tal que  $N/F \cong B$  con  $B \in \mathcal{F}$ . Además,  $F$  es puro en  $M$ , entonces, conforme al Lema 2.16, tenemos que  $N$  es puro en  $M$ . Notemos que  $B$  es finitamente presentado pues  $B \in \mathcal{F}$ . Asimismo,  $F$  es puro en  $N$ , lo que puede cerciorarse con la Proposición 2.15. Luego, si consideramos  $\pi : N \rightarrow N/F$  el epimorfismo natural, entonces tenemos que  $\pi^* : \text{Hom}(B, N) \rightarrow \text{Hom}(B, N/F)$  es un epimorfismo, razón por la cual, si  $f : B \rightarrow N/F$  es el isomorfismo que existe por lo ya mencionado, resulta que, a su vez, existe un morfismo  $g : B \rightarrow N$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ g \swarrow & & \downarrow f \\ N & \xrightarrow{\pi} & N/F \end{array}$$

Por lo que,

$$N = \text{Ker}(\pi) \oplus g(B) \cong \text{Ker}(\pi) \oplus B = F \oplus B,$$

donde  $g(B) \cong B$  porque  $g : B \rightarrow N$  es monomorfismo. Por lo tanto,  $B \oplus F = N$  es puro en  $M$ . En otras palabras,  $\{B\} \cup \{F_i\}_{i \in I}$  es una familia independiente y su suma directa es pura en  $M$ , lo que contradice la maximalidad de la familia  $\{F_i\}_{i \in I}$ . Esto demuestra que  $F = M$ .

□

**Teorema 2.19.** *Sean  $R$  un anillo artiniiano izquierdo y  $\mathcal{C}$  la clase de los  $R$ -módulos cíclicos izquierdos. Si  $\mathcal{C}$  es una clase cerrada bajo monomorfismos esenciales y epimorfismos superfluos, entonces  $R$  es un anillo de Köthe izquierdo.*

*Demostración.* Notemos que cada  $R$ -módulo cíclico es de la forma  $R/I$  con  $I$  finitamente generado, esto, por la artinianidad izquierda del anillo  $R$ . Por ello, todo  $R$ -módulo cíclico es finitamente presentado. Esto significa que  $\mathcal{C}$  consta de módulos finitamente presentados. Luego, en vista del Teorema 2.18, basta demostrar que todo  $R$ -módulo  $M$  distinto de cero contiene un submódulo cíclico distinto de cero que sea puro en  $M$ . Así que consideremos un  $R$ -módulo distinto de cero  $M$ . Como  $R$  es artiniiano izquierdo, entonces  $\text{zoc}(M) \neq \{0\}$ , en otros términos,  $M$  contiene un submódulo simple  $S \in \mathcal{C}$ . Por otra parte, como  $R$  es artiniiano izquierdo, entonces todo  $R$ -módulo cíclico izquierdo es artiniiano y noetheriano. De modo que todo módulo cíclico es de longitud finita, y dicha longitud está acotada por la longitud de  ${}_R R$ , la cual denotaremos por  $l({}_R R)$ . Por lo anterior, podemos escoger un módulo  $N \in \mathcal{C}$  de longitud máxima isomorfo a un submódulo de  $M$ . Ahora consideremos un submódulo  $L \leq M$  máximo con la propiedad de que  $L \cap N = \{0\}$ , y tomemos  $\pi : M \rightarrow M/L$  el epimorfismo natural. Observemos que la restricción  $\pi|_N : N \rightarrow M/L$  es un monomorfismo, ya que  $L \cap N = \{0\}$ . Más aún,  $\pi|_N : N \rightarrow M/L$  es un monomorfismo esencial, ya que, si  $\pi(N) \cap K' = \{\bar{0}\}$  con  $K' = K/L$ , entonces  $(N + L) \cap K = L$ , lo que implica que  $N \cap K \leq L$ , es decir,  $N \cap K = \{0\}$ . Como  $L \leq K \leq M$ , resulta que  $L = K$  por cómo elegimos a  $L$ , luego  $K' = \{\bar{0}\}$ . Entonces, a causa de la hipótesis, se tiene que  $M/L \in \mathcal{C}$ , ya que  $\mathcal{C}$  es cerrada bajo monomorfismos esenciales. Ahora notemos que, si  $\pi|_N : N \rightarrow M/L$  fuera un isomorfismo, entonces tendría que ocurrir que  $N \oplus L = M$ , y en virtud de la Observación 2.14,  $N$

## 40 Anillos de Köthe y anillos artinianos de ideales principales.

tendría que ser un submódulo puro de  $M$ , con lo cual, terminaríamos la demostración. Así que podemos suponer que  $\pi|_N: N \rightarrow M/L$  no es un isomorfismo. Esto implica que  $\pi(N) \neq M/L$ , y entonces  $l(N) < l(M/L)$  ya que  $N \cong \pi(N)$ . Ahora, como  $M/L \in \mathcal{C}$ , resulta que es cíclico, así que, existe  $m \in M$ , tal que  $\pi(Rm) = M/L$ . Usando los mismos argumentos que al principio de la demostración, podemos suponer que existe un submódulo  $A \leq M$  de longitud mínima tal que  $\pi(A) = M/L$ . Afirmamos que el epimorfismo  $\pi|_A: A \rightarrow M/L$  es superfluo. Supongamos que existe  $B \leq A$  tal que  $\text{Ker}(\pi|_A) + B = A$ . Entonces  $\pi(B) = \pi(A) = M/L$ . Luego, por la elección de  $A$ , tenemos que  $A = B$ . Así que  $\pi|_A: A \rightarrow M/L$  es superfluo y, por lo tanto,  $A \in \mathcal{C}$ . Consecuentemente,  $l(N) < l(M/L) < l(A)$ , lo que contradice nuestra elección de  $N$ . Por esta contradicción, se deduce que  $\pi(N) = M/L$  y entonces  $\pi|_N: N \rightarrow M/L$  es un isomorfismo. Por lo tanto,  $N$  es puro en  $M$ .

□

**Teorema 2.20.** *Sean  $R$  un anillo artiniano izquierdo y  $\mathcal{C}$  la clase de los  $R$ -módulos cíclicos. Si  $\mathcal{C}$  es cerrada bajo submódulos, cocientes, cápsulas inyectivas y cubiertas proyectivas, entonces  $R$  es de Köthe izquierdo.*

*Demostración.* En atención al Teorema 2.19, nos proponemos demostrar que  $\mathcal{C}$  es cerrada bajo monomorfismos esenciales y epimorfismos superfluos. Para ello, consideremos un monomorfismo esencial  $f: M \rightarrow N$  con  $M \in \mathcal{C}$ . Entonces  $f(M)$  es esencial en  $N$ , lo que nos da la igualdad  $E(f(M)) = E(N)$ . Además, como  $f(M) \cong M$ , entonces  $E(f(M)) \cong E(M)$ . De ello que resulta que  $E(N) \in \mathcal{C}$ , pues  $E(M) \in \mathcal{C}$  por hipótesis. Eso a su vez implica que  $N \in \mathcal{C}$  ya que  $\mathcal{C}$  es cerrada bajo submódulos. Con lo que, hemos mostrado que  $\mathcal{C}$  es cerrada bajo monomorfismos esenciales.

Por otra parte, tomemos  $g: M \rightarrow N$  un epimorfismo superfluo con

$N \in \mathcal{C}$ . Como  $R$  es artiniiano izquierdo, podemos considerar  $h : P(N) \rightarrow N$  una cubierta proyectiva de  $N$ . Luego, como  $P(N)$  es proyectivo, existe un morfismo  $f : P(N) \rightarrow M$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & P(N) & \\ & \swarrow f & \downarrow h \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

donde  $M = f(P(N)) + \text{Ker}(g)$ , ya que,  $h : P(N) \rightarrow N$  es un epimorfismo. Luego  $M = f(P(N))$ , pues  $\text{Ker}(g)$  es superfluo en  $M$ . Entonces tenemos que  $f : P(N) \rightarrow M$  es un epimorfismo. Además, por hipótesis,  $P(N) \in \mathcal{C}$ . Así pues, como  $\mathcal{C}$  es cerrada bajo cocientes, se sigue que  $M \in \mathcal{C}$ . De lo anterior se concluye que  $\mathcal{C}$  es cerrada bajo epimorfismos superfluos.  $\square$

A continuación, presentamos el teorema que, como hemos mencionado reiteradamente a lo largo de la tesis, fue demostrado por Köthe en [11]. Este teorema, que otrora fue muy innovador, actualmente pertenece a la categoría de teoremas clásicos de la teoría de módulos. A pesar de este carácter, decidimos que era acertado demostrarlo en la tesis, en primera instancia porque representa una piedra angular del trabajo, y después, porque nos parece relevante tener disponible una demostración con técnicas más modernas que las originales.

**Teorema 2.21.** *Si  $R$  es un anillo artiniiano de ideales principales, entonces  $R$  es de Köthe.*

*Demostración.* Sean  $\mathcal{C}$  la clase de los  $R$ -módulos cíclicos izquierdos y  $M \in \mathcal{C}$ . Entonces  $M$  tiene la forma  $R/I$  con  $I$  un ideal izquierdo de  $R$ . Luego, por ser  $R$  de ideales principales derechos, se tiene que, si consideramos  $(I : 0)$  el anulador derecho de  $I$ , entonces existe  $x \in R$  tal que  $xR = (I : 0)$ .

## 42 Anillos de Köthe y anillos artinianos de ideales principales.

Así es claro que  $I \leq (0 : x)$ . Además, teniendo en cuenta que  $R$  un anillo cuasi Frobenius, deducimos que  $(0 : xR) = (0 : (I : 0)) = I$ , pero, claramente,  $(0 : x) \leq (0 : xR)$ , razón por la cual  $(0 : x) \leq I$ , así que  $I = (0 : x)$  y, en consecuencia  $R/I = R/(0 : x) \cong Rx$ . En otras palabras,  $R/I$  es isomorfo a un ideal principal izquierdo de  $R$ . Luego  $E(R/I)$  es isomorfa a un sumando directo de  $E({}_R R) = {}_R R$ . Por lo tanto,  $E(R/I)$  es cíclica y pertenece a  $\mathcal{C}$ . Consecuentemente,  $\mathcal{C}$  es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

Por otro lado, consideremos  $f : P(M) \rightarrow M$  una cubierta proyectiva de  $M$ , cuya existencia queda justificada por el hecho de que  $R$  es artiniano izquierdo. Como  $M$  es cíclico, existe un epimorfismo  $h : R \rightarrow M$ . En tal caso, la proyectividad de  $R$  hace constar la existencia de un morfismo  $g : R \rightarrow P(M)$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ & \swarrow g & \downarrow h \\ P(M) & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

donde  $g(R) + \text{Ker}(f) = P(M)$  debido a que  $h : R \rightarrow M$  es un epimorfismo. Entonces, la superfluidez de  $\text{Ker}(f)$  en  $P(M)$  garantiza que  $g(R) = P(M)$ . Por lo tanto  $g : R \rightarrow P(M)$  es un epimorfismo, lo que implica que  $P(M)$  es cíclico o, dicho de otro modo,  $P(M) \in \mathcal{C}$ . Esto demuestra que  $\mathcal{C}$  es cerrada bajo cubiertas proyectivas.

Ahora, sea  $J/I$  un submódulo de  $R/I$ . Como  $R$  es de ideales principales izquierdos, entonces  $J = Rx$  y, por lo tanto,  $J/I = R(x+I) \in \mathcal{C}$ . Con ello se verifica que  $\mathcal{C}$  es una clase cerrada bajo submódulos. Por último, notemos que  $\mathcal{C}$  es, claramente, cerrada bajo cocientes. Bajo estas condiciones, podemos afirmar que  $R$  es de Köthe izquierdo, y de ello da constancia el Teorema 2.20. Más aún, como la definición de anillo artiniano de ideales principales es simétrica, podemos concluir que  $R$  es, a su vez, un anillo de

Köthe derecho, y por lo tanto, vale decir que  $R$  es de Köthe.  $\square$

**Proposición 2.22.** *Sea  $R$  un anillo. Entonces  $R$  es noetheriano izquierdo si y solo si todo  $R$ -módulo finitamente generado es noetheriano.*

*Demostración.* Supongamos que  $R$  es noetheriano izquierdo. Entonces, debido a que la clase de los módulos noetherianos es cerrada bajo extensiones, se tiene que todo módulo libre finitamente generado, es noetheriano. Además, al ser todo módulo finitamente generado un cociente de un noetheriano, resulta que todo módulo finitamente generado  $M$  es noetheriano, ya que la clase de los módulos noetherianos es también cerrada bajo cocientes.

Por el contrario, al ser  $R$  cíclico, resulta ser noetheriano, como la propia hipótesis lo establece.  $\square$

En [2], los autores demuestran el siguiente resultado que alude a los anillos artinianos de ideales principales. Posteriormente, vamos a demostrar que este *mismo* teorema se cumple para anillos de Köthe, lo cual constituye otro tipo de acercamiento entre nuestros anillos estelares.

**Teorema 2.23.** *Sea  $R$  un anillo artiniano de ideales principales. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes para un  $R$ -módulo  $M$ .*

- a)  $M$  es finitamente generado;
- b)  $M$  es finitamente cogenerado;
- c)  $M$  es artiniano;
- d)  $M$  es noetheriano.

*Demostración.*  $d) \Rightarrow a)$  y  $c) \Rightarrow b)$  son claras.

#### 44 Anillos de Köthe y anillos artinianos de ideales principales.

---

$a) \Rightarrow d)$  Es una consecuencia de la Proposición 2.22 aunada al hecho de que  $R$  es un anillo artiniano y, por lo tanto, noetheriano.

$b) \Rightarrow c)$  Sean  $M$  un  $R$ -módulo finitamente cogenerado y  $N$  un cociente de  $M$ . Como  $R$  es artiniano de ideales principales, entonces el Teorema 2.9 nos asegura que  $N$  es un submódulo de  $M$ . Esto implica, de acuerdo con la Proposición 1.17, que  $N$  es finitamente cogenerado. De modo que todo cociente de  $M$  es finitamente cogenerado, es decir,  $M$  es artiniano.

$d) \Rightarrow b)$  Sea  $M$  un  $R$ -módulo noetheriano. Entonces,  $\text{zoc}(M)$  es finitamente generado. Además, como  $R$  es artiniano, entonces es semiartiniano, lo que implica, conforme a la Proposición 2.10, que  $\text{zoc}(M)$  es esencial en  $M$ . Así que, de acuerdo con la Proposición 1.22, tenemos que  $M$  es finitamente cogenerado.

$c) \Rightarrow a)$  Si  $M$  es un  $R$ -módulo artiniano, entonces  $M$  es finitamente cogenerado, lo que implica, por la Proposición 1.22, que  $\text{zoc}(M)$  es finitamente generado y esencial en  $M$ , lo que supone que  $E(\text{zoc}(M)) = E(M)$  y que  $\text{zoc}(M) = \bigoplus_{i=1}^n S_i$  donde  $S_i$  es un módulo simple para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . De modo que  $E(M) = E(\text{zoc}(M)) = E(\bigoplus_{i=1}^n S_i) = \bigoplus_{i=1}^n E(S_i)$ . Ahora notemos que  $E(S)$  es cíclico para cada  $R$ -módulo  $S$ . En efecto, sea  $S$  un módulo simple. Entonces existe un epimorfismo  $R \rightarrow S$ . Luego, como  $R$  es artiniano de ideales principales, el Teorema 2.9 nos asegura que existe un monomorfismo  $S \rightarrow R$ , lo que a su vez implica que existe un monomorfismo  $E(S) \rightarrow E(R)$ . Además, como  $R$  es artiniano de ideales principales, entonces es cuasi Frobenius y, por lo tanto, autoinyectivo. Así que,  $E(R) = R$ , luego tenemos un monomorfismo  $E(S) \rightarrow R$ . Entonces, como  $E(S)$  es inyectivo, es un sumando directo de  $R$ , motivo por el

cual existe un epimorfismo  $R \rightarrow E(S)$ . Por lo tanto,  $E(S)$  es cíclico. De tal forma que, como  $E(S_i)$  es cíclico para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , entonces  $E(M) = \bigoplus_{i=1}^n E(S_i)$  es finitamente generado y, en consecuencia,  $M$  es finitamente generado.  $\square$

Otro teorema que invocaremos, es el demostrado por el matemático estadounidense Stephen U. Chase en su notable artículo [5], en el que determina cuándo un producto directo de módulos planos es plano; cuándo un producto directo de módulos proyectivos es proyectivo. Además de que contiene la primera demostración de que  $R$  es noetheriano izquierdo si y solo si cualquier suma directa de módulos inyectivos es inyectivo, aunque dicho resultado le fue comunicado personalmente por el distinguido algebrista Hyman Bass. Por si lo anterior no fuera suficiente, contiene, como ya lo habíamos mencionado, el siguiente:

**Teorema 2.24.** *Si  $R$  es un anillo con la propiedad de que todo módulo izquierdo es una suma directa de módulos finitamente generados, entonces  $R$  es artiniiano izquierdo.*

**Definición 2.25.** *Decimos que un anillo  $R$  es coartiniano izquierdo si  $E(S)$  es noetheriano para todo módulo simple izquierdo  $S$ .*

**Teorema 2.26.** *Sea  $R$  un anillo de Köthe izquierdo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes para un  $R$ -módulo  $M$ :*

- 1)  $M$  es finitamente generado,
- 2)  $M$  es finitamente cogenerado,
- 3)  $M$  es artiniiano,
- 4)  $M$  es noetheriano.

## 46 Anillos de Köthe y anillos artinianos de ideales principales.

*Demostración.* 1)  $\Leftrightarrow$  2) Sea  $S$  un  $R$ -módulo simple izquierdo. Como  $R$  es un anillo de Köthe izquierdo, entonces  $E(S) = \bigoplus_{i \in I} C_i$  con  $C_i$  cíclico para todo  $i \in I$ . Además, por ser  $S$  simple, tenemos que  $E(S)$  es uniforme; ergo, es inescindible. Por lo tanto, resulta que  $E(S)$  es cíclico. Hemos demostrado que  $E(S)$  es finitamente generado para todo  $R$ -módulo simple  $S$ . Esto, aunado al hecho de que  $R$  es artiniano y, por lo tanto, noetheriano, implica que  $E(S)$  es noetheriano para todo  $R$ -módulo simple  $S$ , es decir,  $R$  es coartiniano izquierdo. Así que, como atestigua el [2, Teorema 3.2], tenemos que las clases de los  $R$ -módulos finitamente generados y de los finitamente cogenerados coinciden.

2) $\Rightarrow$  3) Sea  $M$  un módulo finitamente cogenerado. Como la clase de los módulos finitamente generados es cerrada bajo cocientes, entonces la clase de los módulos finitamente cogenerados también lo es, debido a que, por los mismos argumentos que usamos en el inciso anterior, tenemos que las clases de los  $R$ -módulos finitamente generados y finitamente cogenerados coinciden. Por lo tanto,  $M$  es artiniano.

4)  $\Rightarrow$  1) Es claro.

1)  $\Rightarrow$  4) Sea  $M$  un  $R$ -módulo finitamente generado. Como  $R$  es de Köthe izquierdo, entonces es artiniano, de conformidad con el Teorema 2.24, y, por lo tanto, noetheriano. Así que, por la Proposición 2.22,  $M$  es noetheriano.

3)  $\Rightarrow$  2) Es claro.

□

**Lema 2.27.** *Si  $R$  es un anillo de Köthe izquierdo, entonces  $R/I$  es un*

anillo de Köthe izquierdo para todo ideal bilateral  $I$  de  $R$ .

*Demostración.* Sea  $M$  un  $R/I$ -módulo con  $I \leq R$  un ideal bilateral. En este caso, el Lema 1.32 establece que  $M$  es un  $R$ -módulo anulado por  $I$ . Además, por ser  $R$  de Köthe izquierdo, tenemos que  $M = \bigoplus_{j \in J} C_j$  donde  $C_j$  es un  $R$ -submódulo cíclico de  $M$  para toda  $j \in J$ . Entonces  $IC_j = \{0\}$  para toda  $j \in J$ . Luego  $C_j$  es un  $R/I$ -módulo cíclico para toda  $j \in J$ . Por lo tanto,  $R/I$  es un anillo de Köthe izquierdo para cada ideal bilateral  $I$  de  $R$ .  $\square$

**Proposición 2.28.** *Si  $R$  es un anillo artiniiano izquierdo y  $E(R)$  es un módulo cíclico izquierdo, entonces  $R$  es autoinyectivo izquierdo.*

*Demostración.* Como  $E(R)$  es cíclico, entonces existe un epimorfismo  $f : R \rightarrow E(R)$ . Como  $R$  es proyectivo, existe un morfismo  $g : R \rightarrow R$  que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ g \swarrow & & \downarrow i \\ R & \xrightarrow{f} & E(R) \end{array}$$

donde  $i : R \hookrightarrow E(R)$  es la inclusión. Eso implica que  $g : R \rightarrow R$  es un monomorfismo, ya que  $fg = i$ . Por lo que, el anulador izquierdo  $(g(1) : 0) = \{0\}$ . Por otro lado, debido a que  $R$  es artiniiano izquierdo, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $Rg(1)^n = Rg(1)^{n+1}$ . Así que existe  $a \in R$  tal que  $ag(1)^{n+1} = g(1)^n$  o, equivalentemente,  $(ag(1) - 1)g(1)^n = 0$ . Pero, como ya notamos, el único elemento de  $R$  que anula a  $g(1)$  es el cero, motivo por el cual, podemos concluir que  $ag(1) = 0$ . En otras palabras,  $Rg(1) = R = g(R)$ . Así que, de hecho,

$$R = i(R) = fg(R) = f(g(R)) = f(R) = E(R).$$

$\square$

**Teorema 2.29.** *Son equivalentes para un anillo uniserial  ${}_R R$  los siguientes enunciados:*

- a)  *$R$  es un anillo izquierdo de Köthe;*
- b)  *$R$  es un anillo de Köthe;*
- c)  *$R$  es un anillo artiniano de ideales principales;*
- d)  *$R$  es artiniano izquierdo y cada módulo cocíclico izquierdo es un módulo cíclico izquierdo.*

*Demostración.* a)  $\Rightarrow$  c) Consideremos un ideal bilateral  $I$  de  $R$ . Entonces por el Lema 2.27, sabemos que  $R/I$  es un anillo de Köthe izquierdo. Como  ${}_R R$  es uniserial, entonces  ${}_{R/I} R/I$  es uniserial, y consecuentemente,  $E(R/I)$  es un  $R/I$ -módulo inescindible. Más aún,  $E(R/I)$  es una suma directa de  $R/I$ -módulos cíclicos, lo que obliga a que  $E(R/I)$  sea cíclico. Además, como  $R/I$  es un anillo de Köthe, satisface las hipótesis del Teorema 2.24, entonces podemos afirmar que  $R/I$  es artiniano izquierdo. De ello deducimos, con base en la Proposición 2.28, que  $R/I$  es autoinyectivo izquierdo. En consecuencia,  $R/I$  es un anillo cuasi Frobenius y, por lo tanto,  $R$  es artiniano de ideales principales, como hace constar [9, Proposición 25.4.6 B].

c)  $\Rightarrow$  b) Se verifica gracias al Teorema 2.21.

b)  $\Rightarrow$  a) Es claro.

c)  $\Rightarrow$  d) Es claro a la luz del Teorema 2.6.

d)  $\Rightarrow$  c) Basta recordar el Teorema 2.8. □

## 2.2. Anillos de coköthe

Este breve apartado figura en la tesis a modo de propuesta. Valiéndonos del estudio realizado sobre los módulos cocíclicos y de su caracter

dual respecto a los cíclicos, introdujimos la noción de anillo de coköthe. Asimismo, incluimos un teorema que explora la relación entre los anillos de Köthe y los artinianos de ideales principales, con los de coköthe. Si bien esta sección se compone de este único resultado, creemos que podría funcionar como punto de partida para estudios ulteriores.

**Definición 2.30.** *Sea  $R$  un anillo. Decimos que  $R$  es coköthe izquierdo (derecho) si y solo si todo  $R$ -módulo es una suma directa de  $R$ -módulos cocíclicos izquierdos (derechos). Decimos que  $R$  es coköthe si es de coköthe por ambos lados.*

**Ejemplo 2.31.** *Consideremos un anillo  $\mathbb{Z}_{p^n}$  con  $n, p \in \mathbb{N}$  y  $p$  primo. En tal caso, el Ejemplo 2.12 nos asegura que  $\mathbb{Z}_{p^n}$  es un anillo de Köthe, en otras palabras, todo  $\mathbb{Z}_{p^n}$ -módulo es la suma directa de  $\mathbb{Z}_{p^n}$ -módulos cíclicos. Luego, cada uno de estos cíclicos debe ser la forma  $\mathbb{Z}_m$  con  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $m \mid p^n$ . Por ende,  $m = p^i$  para algún  $i \in \mathbb{N}$ . Entonces, en consideración del Ejemplos 1.7, tenemos que los módulos cíclicos son, a su vez, cocíclicos. Por lo tanto,  $\mathbb{Z}_{p^n}$  es coköthe.*

**Teorema 2.32.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo  $R$ :*

- a) *La clase de los  $R$ -módulos cíclicos es igual a la de los  $R$ -módulos cocíclicos;*
- b)  *$R$  es de Köthe uniserial;*
- c)  *$R$  es artiniano de ideales principales uniserial;*
- d)  *$R$  es coköthe uniserial.*

*Demostración.* Sabemos que se cumplen  $a) \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow c)$  gracias al Teorema 2.29.

## **50 Anillos de Köthe y anillos artinianos de ideales principales.**

---

$c) \Rightarrow d)$  Si suponemos que  $R$  es artiniano de ideales principales uniserial, entonces, por un lado, el Teorema 2.21 nos asegura que  $R$  es de Köthe, y por otro lado, el Teorema 2.29 implica que la clase de los  $R$ -módulos cíclicos coincide con la de los  $R$ -módulos cocíclicos. En conclusión, tenemos que  $R$  es un anillo coköthe.

$d) \Rightarrow c)$  Bajo el supuesto de que  $R$  es coköthe, tenemos que, en particular, todo módulo cíclico es una suma directa de módulos cocíclicos. Esto implica que todo cíclico tiene un submódulo simple. Además, por ser  $R$  uniserial, resulta que todo  $R$ -módulo cíclico es uniserial. Así que, la unicidad de dicho simple queda garantizada por linealidad. En conclusión, tenemos que todo módulo cíclico es cocíclico. Esto demuestra, a la luz del Teorema 2.8, que  $R$  es artiniano de ideales principales y uniserial.

□

# Bibliografía

- [1] Alvarado-García, A., Rincón-Mejía H. A., Ríos-Montes J., *On some lattices of module classes*, J. Algebra Appl. 5 (1), 105-117, 2006.
- [2] Alvarado-García, A., Cejudo-Castilla, C., Rincón-Mejía, H. A., Vilchis-Montalvo, I. F., Zorrilla-Noriega, M. G. *On QF rings and artinian principal ideal rings*. Hacet. J. Math. Stat. Vol 48 (1), 1-8, 2019.
- [3] Anderson F. W., Fuller K. R. *Rings and categories of modules*, Springer-Verlag, 1974.
- [4] Behboodi, M., Ghorbani, A., Moradzadeh-Dehkordi, A., Shojaee, S., *On left Köthe rings and a generalization of the Kothe-Cohen-Kaplansky theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 142, No. 8, PP. 2625-2631, 2014.
- [5] Chase, S. *Direct products of modules*. Trans. Amer. Math. Soc. 97, 457-473, 1960
- [6] Chen, J.L., Shen, L. *On strong Goldie dimension*, Comm. Algebra 35, 3018-3025, 2017.
- [7] Cohen, I. S., Kaplansky I. (1951) *Rings for which every module is a direct sum of cyclic modules*, Math. Z. 54 , 97–101.

- 
- [8] Douglas, G. *Köthe Rings*, M.Sc. Dissertation, McMaster University, 1973.
- [9] Faith, C. *Algebra II Ring Theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 191, Springer-Verlag, 1976.
- [10] Faith, C. *On Köthe rings*, Math. Ann. 164, 207-212, 1966.
- [11] Köthe, G. *Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexem Operatorenring*, Math. Z. 39 , no. 1, 31 – 44, 1935.
- [12] Nakayama, T. *Note on uni–serial and generalized uni–serial rings* , Proc. Imp. Acad.Tokyo 1, 285–289, 1940.
- [13] Nicholson, W., Yousif, M. *Quasi-Frobenius Rings*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 2003.
- [14] Rotman, J. *An Introduction to the Theory of Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Fourth Edition, Springer-Verlag, 1995.
- [15] Stenström, B. *Rings of Quotients*, Springer-Verlag, 1975.
- [16] Warfield Jr. R.B., *Rings whose modules have nice decompositions*, Math. Z. 125, 187–192, 1972.
- [17] Wisbauer, R. *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers, 1991.
- [18] Zimmermann-Huisgen, B. *Rings whose right modules are direct sums of indecomposable modules*, Proc. Amer. Math. Soc. 77, no. 2, 191–197, 1979.