Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Posgrado en Ciencias Matemáticas

Clases unimodales de polinomios

Tesis

presentada para obtener el título de
Doctorado en Ciencias Matemáticas

Presenta
Paulino Antonio Gómez Salgado

Directores de Tesis
Dr. César Bautista Ramos
Dr. Carlos Guillén Galván

Puebla, Puebla. Diciembre 2021

May you grow up to be righteous
May you grow up to be true
May you always know the truth
And see the lights surrounding you
Bob Dylan, *For ever young.*

A Toñito porque aunque no nos faltaba nada, nos diste todo...

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a todas las personas que de alguna u otra manera formaron parte de la realización de este proyecto.

En primer lugar al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por su apoyo al proyecto, que hizo posible la elaboración de esta tesis.

Al Dr. César Bautista Ramos y al Dr. Carlos Guillén Galván, asesores de tesis, por apoyarme durante la elección y desarrollo del tema, por el tiempo dedicado a la elaboración y revisión, sin su dirección esto no habría sido posible.

A mis sinodales: Dr. Carlos Alberto López Andrade, Dra. Patricia Domínguez Soto, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna y Dr. Javier Mendoza Torres, por sus contribuciones y correcciones al trabajo, además de su disponibilidad y deseo de ayudar.

Finalmente a mi familia, las 6 personas más importates para mí, los que estuvieron desde el inicio. Gracias mami, papá, Pioja, Mono. Finalmente a mi nueva familia por ser mi motor y mi apoyo porque sin ustedes no tengo nada. Gracias Toñito y Ciri.

Índice general

Índice de figuras **IX**

Símbolos **XI**

Introducción **XIII**

1. Teoría de grafos **1**
1.1. Conceptos básicos 2
1.2. Operaciones con grafos 6
1.3. Polinomio de independencia 8
1.4. Cómo calcular el polinomio de independencia 9
1.5. Polinomios de independencia de árboles de Fibonacci . . . 11

2. Sincronía y sincronía parcial **21**
2.1. Sincronía parcial 22
2.2. Sincronía 24
2.3. Otros resultados importantes 27

3. Aplicaciones a polinomios de independecia **29**
3.1. Aplicación a concatenaciones de grafos 30
3.1.1. Puntos 32
3.1.2. Caminos 32
3.2. Aplicaciones a árboles de Fibonnacci 33
3.3. Aplicaciones a árboles de caminos estables 35

Conclusiones y trabajo futuro **43**

Bibliografía **45**

Índice de figuras

1.1. Representación de un grafo simple 2
1.2. Ejemplos de grafos completos. 3
1.3. Quinta concatenación de una estrella a través de uno de sus vértices de grado 1 5
1.4. Oruga de tamaño 5. 5
1.5. 5-camino con grafo colgante K_3 6
1.6. Árbol de Fibonacci F_5. 7
1.7. Árbol de caminos estables $T^{\prec}_{K_4,1}$ 8
1.8. El grafo G_n 12
1.9. Árbol de Tribonacci $\mathcal{T}_6$ 14
1.10. El grafo $\mathcal{G}_n$ 14

3.1. El grafo $\mathcal{P}(G, w, n)$. 32
3.2. Árbol $\mathfrak{B}(K_1, \omega, 4, 1, 1, 2, 2)$. 33
3.3. Grafos tipo estrella $\mathfrak{B}(P_{2n}, v, 1, \ldots, 1)$ para enteros arbitrarios n y k. 33
3.4. Árbol de Tribonacci $\mathcal{T}_4$ 34
3.5. Grafo tipo Fibonacci $\mathfrak{T}_3$ con condiciones iniciales K_3 y K_4 35
3.6. Árbol $T^{<}_{\mathcal{K}_{3_4^-}(0),0}$. 36
3.7. Árbol de caminos estables $T^{<}_{\mathcal{K}_{4_1^-}(0),0}$ 40

Símbolos

$[X]^k$	Clase de subconjuntos de X con k elementos.
G	Grafo.
$A \subseteq B$	A es subconjunto de B.
$a \in X$	a pertenece a X.
$V(G)$	Conjunto de vértices del grafo.
$E(G)$	Conjunto de aristas del grafo.
xy	Arista $\{x, y\}$.
$N(v)$	Vecindad abierta de v.
$N[v]$	Vecindad cerrada de v.
$d(v)$	Grado de v.
$\|G\|$	Orden de G.
$\|\|G\|\|$	Número de aristas de G.
$\emptyset$	Conjunto vacío.
$G[U]$	Subgrafo inducido de G sobre U.
K_n	Grafo completo de n vértices.
P_n	Camino de longitud n.
K_s^r	Grafo r-partito completo de rs vértices.
$K_{n,m}$	Grafo bipartito completo de $n + m$ vértices.
$\overline{G}$	Grafo complemento de G.
$G \simeq H$	G es isomorfo a H.
$\bigcup$	Unión.
$\bigcap$	Intersección.
$\biguplus$	Unión disjunta.
$G[H]$	G compuesto con H.
$G_n^-(w)$	n-concatenación de G a través de w.
α_G	Número de independencia de G.
$I(G; x)$	Polinomio de independencia de G.

$i_k(G)$	Número de conjuntos independientes del cardinalidad k en G.
$\mathcal{F}_n$	n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci.
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales.
$\mathbb{C}$	Conjunto de los números complejos.
$\delta(p)$	Si $p = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, $\delta(p) = \text{mín}\{i \mid a_i \neq 0\}$.
$\partial(p)$	Grado de p.
$\forall$	Para todo.
$A \preccurlyeq B$	A es radio-dominada parcialmente por B.
$\mathbb{R}_+^\infty$	Conjunto de sucesiones reales no negativas sin ceros internos.
$\mathcal{L}$	Conjunto de suceciones log-cóncavas sin ceros internos.
$A \sim B$	A está sincronizada con B.
$A \sim_p B$	A está sincronizada parcialmente con B.
$\mathcal{L}^\sim$	Clase de conjuntos de suceciones log-cóncavas sin ceros internos sincronizadas dos a dos.
$A \lesssim B$	A es menor radialmente que B.
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales incluyendo a cero.
$V_n^{(m)}$	Vertebrado de tamaño n con nm vértices.
F_n	n-ésimo árbol de Fibonacci.
$\mathcal{T}_n$	n-ésimo árbol de Tribonacci.
$\mathfrak{T}_n$	n-ésimo grafo tipo Fibonacci.
$(T_{G,u}^{\prec}, \bar{u})$	Árbol de caminos estables de un grafo G.
f_n	Término n-ésimo de la sucesión de Fibonacci con $f_0 = 1$ y $f_1 = 0$.
v_n	Término n-ésimo de la sucesión de Tribonacci con $v_0 = 1$, $v_1 = 0$ y $v_2 = 1$.
t_n	Término n-ésimo de la sucesión de Tribonacci con $t_1 = 2$, $t_2 = 4$ y $t_3 = 7$.
$P(G, w, n)$	n-camino con grafo colgante G.

Introducción

Los polinomios asociados a un grafo siempre han sido objeto de estudio, para relacionar propiedades gráficas con las propiedades algebraicas de dichos polinomios [8, 13, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 25]. En específico el estudio de la sucesión de coeficientes de estos polinomios ha sido de interés para los investigadores del área.

Centrandonos en el polinomio de independencia de un grafo, un problema que ha sido ampliamente estudiado es responder a la pregunta ¿cuándo el polinomio de independencia de un grafo es log-cóncavo? Muchas conjeturas han surgido para responder esta pregunta, pero existe una que continua sin respuesta.

En 1987 Alavi, Malde, Schwenk y Erdös se preguntaron si el polinomio de independencia de cualquier árbol era unimodal [1], esta ha sido uno de las conjeturas más estudiadas en el área y hasta la fecha no ha sido probada.

Existen algunas dficultades que no permiten probar dicha conjetura, primero no se conocen muchas propiedades que nos aseguren que un polinomio sea unimodal, segundo los árboles son grafos muy generales por lo que no es posible determinar alguna fórmula para generalizar sus polinomios de independencia.

Para poder esquivar estas dificultades, los investigadores del área han optado por verificar otras propiedades de los polinomios que en casos particulares nos aseguren la unimodalidad como el hecho de solo tener raíces reales [6, 8, 10, 11, 13, 23, 29] o la log-cóncavidad [14, 19, 26, 27]. Ya que estas cuentan con propiedades que nos permiten determinar que ciertos polinomios las cumplen. Y además los polinomios de independencia cumplen condiciones para que sea suficiente probar la log-concavidad ya que cuentan con alguna de estas propiedades para ser también unimodal.

Otro proceso que ha sido de utilidad es estudiar familias particulares de árboles cuyo polinomio de independencia pueda ser cálculado. Es decir, se trabaja en dirección de probar la conjetura de unimodalidad de manera parcial[4, 5, 6, 13, 16, 21, 24, 28, 29].

Nuestro objetivo es probar la log-cóncavidad de algunas familias de árboles y grafos relacionados a través de los conceptos de sincronía y dominación radial.

Para esto en el primer capítulo se presentan los conceptos básicos

de la teoría de grafos que serán necesarios para definir el polinomio de independencia. Además se definen los árboles y grafos que serán estudiados en el capítulo 3 y se presentan fórmulas para sus polinomios de independencia.

En el capítulo 2 se definen los conceptos de sincronía, sincronía parcial, dominación radial y dominación radial parcial y algunas de sus propiedades que son útiles en las pruebas que se presentan en el último capítulo.

Finalmente en el tercer capítulo aplicamos los resultados presentados en los primeros dos capítulos para estudiar la log-concavidad de familias de árboles y grafos relacionados. En particular trabajaremos con polinomios de independencia de árboles de Fibonacci, cuyo polinomio de independencia se conoce que tiene solo raíces reales. Aquí presentamos construcciones semejantes cambiando los árboles iniciales, posteriormente buscamos condiciones generales que deberían cumplir dos grafos G y H para que al construir el grafo tipo Fibonacci su polinomio de independencia sea log-cóncavo.

Posteriormente nos preguntamos por generalizaciones del resultado anterior y proponemos aumentar el número de condiciones iniciales a 3 y verificamos que en efecto, los árboles de Tribonacci con condiciones iniciales $T_1 = T_2 = T_3 = K_1$ tienen polinomio de independencia log-cóncavo.

En 2007 Wang y Zhu [28] obtuvieron una fórmula cerrada para el polinomio de independencia de concatenaciones de grafos, mientras que en 2018 Bencs [6] propuso una factorización para árboles de caminos estables. Combinando ambos resultados hemos probado que bajo ciertas condiones para un grafo G, el polinomio de independencia del árbol de caminos estables de la concatenación de dicho grafo es log-cóncavo.

Finalmente verificamos que los árboles de caminos estables de cualquier concatenación de grafos completos tiene polinomio de independencia log-cóncavo.

Como resultado de esta investigación se obtuvo un teorema que nos permite determinar la unimodaldad de n-caminos con grafos colgantes y construcciones iteradas de los mismo, que puede ser revisada en *Log-concavity of some independence polynomials via a partial ordering* (ver [4]).

También determinamos la log-concavidad de árboles de Fibonacci

y algunas de sus generalizaciones a través de su relación con el árbol de caminos estables de un grafo, resultado que puede ser revisado en *Independence polynomials of Fibonacci Trees are log-concave.* (ver [5]).

Capítulo 1

Teoría de grafos

Quiero decirte que yo
contigo pude aprender
lo grande del corazón
lo que se puede querer

Fito Cabrales, A quemarropa.

En este capítulo se presentan algunos conceptos de teoría de grafos [7, 12] que son de utilidad para definir el polinomio de independencia para, en capítulos posteriores, verificar la log-concavidad de dichos polinomios de algunas familias de árboles.

Con el objetivo de atacar la conjetura de unimodalidad del polinomio de independencia de los árboles (a través de la log-concavidad) en las primeras tres secciones se presentan los conceptos básicos para definir ciertas familias de árboles cuyo polinomio de independencia es log-cóncavo.

Las últimas tres secciones están dedicadas a calcular fórmulas recursivas para los polinomio de independencia de familias de árboles, estas fórmulas combinadas con propiedades como la sincronía o la dominación radial, son la herramienta para verificar la log-concavidad de dichos polinomios de independencia.

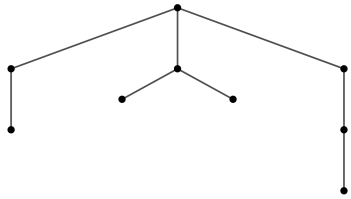


Figura 1.1: Representación de un grafo simple

1.1. Conceptos básicos

Si X es un conjunto y k un entero mayor o igual que 0, entonces $[X]^k$ es la clase de subconjuntos de X con k elementos.

Definición 1.1.1. Un *grafo* es un par ordenado de conjuntos $G = (V, E)$; donde $E \subseteq [V]^2$.

Los elementos de V son los vértices del grafo G, los elementos de E son sus aristas, a los elementos de una arista regularmente se les llama *extremos*, además la arista $\{v_1, v_2\} = \{v_2, v_1\}$ y $\{v_1, v_1\}$ no puede ser una arista del grafo ya que dicho conjunto consta únicamente de un elemento. A este tipo de grafos se les llama regularmente *grafo simple*. En este trabajo solo consideramos grafos simples.

Un vértice v es incidente a una arista e si $v \in e$. Para representar una arista usualmente se escribe xy en lugar de $\{x, y\}$. Dos vértices x, $y \in G$ son adyacentes si xy es una arista de G y dos aristas $e \neq f$ son adyacentes si tienen un vértice en común.

Generalmente representamos a un grafo dibujando un punto u otra figura geométrica por cada vértice y uniendo dos de ellos por una línea si los vértices correspondientes forman una arista (ver figura 1.1). La representación de un grafo no es única, pero podemos referirnos a la representación gráfica como grafo. La posición de los puntos y las líneas no dan información adicional de un grafo salvo sus incidencias y adyacencias. Algunas de las definiciones y conceptos en la teoría de grafos son sugeridos por su representación gráfica.

Denotamos por $V(G)$ al conjunto de vértices del grafo G, y como $E(G)$ a su conjunto de aristas. A veces no se distingue entre un grafo y su conjunto de vértices o aristas es decir en lugar de escribir $x \in V(G)$ ó bien $xy \in E(G)$ escribimos simplemente $x \in G$ ó $xy \in G$.

Si dos vértices son adyacentes decimos que son *vecinos*. Para un vértice $v \in G$, denotamos por $N(v)$ al conjunto de los vértices adyacentes a v, es decir $N(v) = \{w \in V(G) \,|\, vw \in E(G)\}$. Al conjunto $N(v)$ se le llama *vecindad abierta* de v. El conjunto $N[v] = N(v) \bigcup \{v\}$ y es llamado *vecindad cerrada* de v.

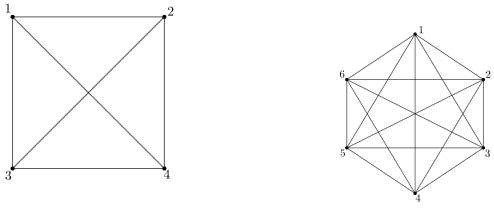
El *grado* de un vértice, denotado $d_G(v)$, es el número de vértices adyacentes a él, es decir $d_G(v) = |N(v)|$.

El número de vértices de un grafo es su *orden* y se denota por $|G|$. Mientras que el número de aristas se denota por $\|G\|$. Un grafo de orden 0 ó 1 es llamado *grafo trivial*. Para el grafo vacío $(\emptyset, \emptyset)$ escribimos simplemente $\emptyset$.

Dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$, son iguales si y solo si $V' = V$ y $E' = E$ y se escribe $G = G'$. G' es *subgrafo* de G si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$ y se denota por $G' \subseteq G$. Si $G' \subseteq G$ pero $G' \neq G$ entonces G' es *subgrafo propio* de G y se escribe $G' \subset G$. Si $G' \subseteq G$ y para cada arista $xy \in E$ con x, $y \in V'$ entonces $xy \in E'$, decimos que G' es *subgrafo inducido* de G y escribimos $G' =: G[V']$, es decir si $U \subseteq V$, entonces $G[U]$ es el grafo sobre U cuyas aristas están precisamente en G con ambos vértices en U. Si $X \subseteq V$ definimos $G - X$ al grafo que se obtiene de borrar todos los vértices que pertenecen a X y sus aristas adyacentes, es decir $G - X = G[V - X]$, usualmente escribimos $G - v$ en lugar de $G - \{v\}$ para $v \in V$.

A continuación se presentan algunas clases de grafos que se caracterizan por cumplir propiedades en común.

Definición 1.1.2. Un grafo G es *completo* si para cada par de vértices x, $y \in G$ la arista $xy \in G$, es decir si todas las parejas de vértices en G son adyacentes. Un *grafo completo* de n vértices se denota por K_n.



(a) Grafo completo K_4 (b) Grafo completo K_6

Figura 1.2: Ejemplos de grafos completos.

En la figura 1.2 se puede ver los grafos completos de 4 y 6 vértices. Otra clase de grafos importantes está dada por la siguiente definición.

Definición 1.1.3. Un *camino* P es un grafo no vacío $P = (V, E)$ en el cual $V = \{x_0, x_1, ..., x_k\}$ y $E = \{x_0x_1, x_1x_2, ..., x_{k-1}x_k\}$ donde cada $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.

El número de aristas de un camino es su *longitud* y el camino de longitud k se denota por P_k. Note que $P_0 = K_1$. A menudo nos referimos a un camino por la sucesión natural de sus vértices, es decir $P = x_0x_1...x_k$ y llamamos a P un camino de x_0 a x_k. Un camino que inicia y termina en el mismo nodo es llamado *ciclo*.

Definición 1.1.4. Un grafo no vacío G es llamado *conectado* si cualquier par de vértices x, $y \in G$ están unidos por un camino en G. Si $U \subseteq V(G)$ y $G[U]$ es conectado, decimos que G es conectado en U. Llamamos *desconectado* a un grafo que es no conectado.

Un grafo conectado que no tiene ciclos es un *árbol*, por ejemplo el grafo de la figura 1.1 es un árbol. En un árbol dados dos vértices existe un único camino que los une. Algunas veces es conveniente elegir un vértice en particular en un árbol al que llamamos *raíz*. Los vértices de grado 1 en un árbol se llaman *hojas*. Un *bosque* es una colección (unión disjunta) de dos o más árboles.

Definición 1.1.5. Sea $r \geq 2$ un entero. Un grafo $G = (V, E)$ es llamado *r-partito* si V admite una partición en r clases tales que cada arista tiene vértices en una clase diferente, es decir dos vértices de la misma no son adyacentes.

A un grafo G que es "2−partito" se le llama usualmente *bipartito*. Un grafo bipartito en el cual alguna de las clases tiene exactamente un elemento es una *estrella*. Al vértice perteneciente a esa clase se le llama *centro*. Un grafo r-partito es llamado *completo* si cada par de vértices en clases diferentes son adyacentes.

Los grafos r-partitos completos para todo r son los *grafos multipartitos completos*, denotados por $K_{n_1,...,n_r}$, donde cada n_i, $i = 1, ..., r$, es la cardinalidad de la clase i-ésima; si $n_1 = ... = n_r = s$, abreviamos la notación anterior como K_s^r. Así K_s^r es el grafo r-partito completo en el cual cada clase de la partición tiene exactamente s vértices.

A continuación se presenta una operación que es útil para la construcción de grafos de forma recursiva.

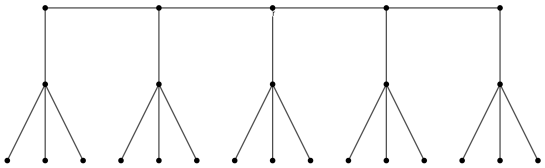


Figura 1.3: Quinta concatenación de una estrella a través de uno de sus vértices de grado 1

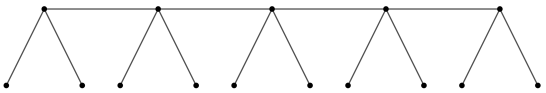


Figura 1.4: Oruga de tamaño 5.

Definición 1.1.6. [28] Sea G un grafo y $w \in G$. La *n-ésima concatenación* de G a través de w, o simplemente *n-concatenación* de G, es el grafo resultante de tomar n copias de G e identificar un vértice particular w y unir estos vértices para formar un camino de longitud $n-1$. Regularmente denotamos a la n-concatenación de G a través de w por $G_n^-(w)$.

En la figura 1.3 se puede ver la quinta concatenación de una estrella de 5 vértices a través de uno de sus vértices de grado 1. Además la concatenación nos permite construir de forma sencilla grafos generales a partir de grafos más simples por ejemplo se puede notar que la n-concatenación de K_1 es el camino de longitud $n-1$, es decir $K_1{}_n^-(w) = P_{n-1}$. La siguiente definición nos presenta una familia conocida de grafos como una concatenación.

Definición 1.1.7. [29] Un vertebrado, $V_k^{(m)}$, es la k-concatenación del grafo bipartito $K_{1,m}$ a través de v el único vértice de grado m en $K_{1,m}$ y $k \geq 0$. Es decir $V_k^{(m)} = (K_{1,m})_k^-(n)$

En particular una oruga [16] es el vertebrado $V_k^{(2)}$. En la figura 1.4 se puede ver la oruga de tamaño 5, $V_5^{(2)}$. Otro grafo que se puede construir a través del concepto de concatenación es el siguiente.

Definición 1.1.8. [4] Sea G un grafo y $w \in G$.

i) Definimos un nuevo grafo denotado $G^|(w)$ agregando un nuevo vértice $v \notin V$ a G, además de una nueva arista vw.

ii) Definimos al *n-camino con grafo colgante* G, denotado por $\mathcal{P}(G, w, n)$, como la concatenación $(G^|(w))_n^-(v)$.

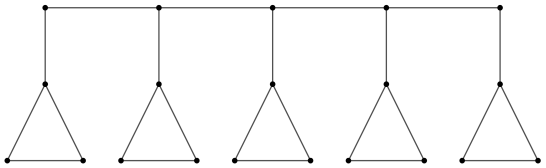


Figura 1.5: 5-camino con grafo colgante K_3

En la figura 1.5 se puede ver el 5-camino con grafo colgante K_3.

1.2. Operaciones con grafos

La siguiente operación es muy importante para el cálculo del polinomio de independencia de ciertos grafos.

Definición 1.2.1. Si $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son dos grafos, la *unión disjunta* de G y G', denotada por $G \uplus G'$, se define como la unión de G y G' considerando sus conjuntos de vértices como conjuntos disjuntos, es decir $V \cap V' = \emptyset$.

Ahora que tenemos a la mano la operación de unión disjunta, podemos definir la siguiente familia de árboles.

Definición 1.2.2. Un *árbol de Fibonacci*, F_n, es un grafo enraizado definido recursivamente como sigue:

i) $F_0 = K_1$ cuya raíz es $r_0 \in V(F_0)$,

ii) $F_1 = K_1$ cuya raíz es $r_1 \in V(F_1)$,

iii) para $n \geq 2$, el árbol F_n se define como la unión disjunta de F_{n-1} y F_{n-2}, junto con un nuevo vértice r_n conectado con las raices r_{n-1} y r_{n-2}.

En la figura 1.6 se muestra el árbol de Fibonacci F_5. Sin embargo, otros tipos de árboles de Fibonacci aparecen en la literatura con diferentes condiciones iniciales. Cuando las condiciones iniciales no son árboles vamos a hablar de *grafos tipo Fibonacci* únicamente.

Otras operaciones que simplifican el cálculo del polinomio de independencia son las siguientes.

Definición 1.2.3. Si $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son dos grafos, la *suma* de G y G' es un grafo denotado por $G + G'$, donde $V(G + G') = V \uplus V'$ y $E(G + G') = E \cup E' \cup \{v_1v_2 | v_1 \in V, v_2 \in V'\}$.

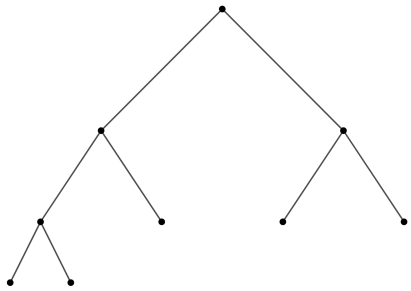


Figura 1.6: Árbol de Fibonacci F_5.

Definición 1.2.4. [9] Sean G y H dos grafos, la composición $G[H]$ es un grafo con conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$ y cuyos vértices son pares ordenados de la forma (v, x) con $v \in G$ y $x \in H$. Dos vértices (v, x), $(w, y) \in G[H]$ son adyacentes si y solo si $vw \in G$ o bien $v = w$ y $xy \in H$.

Proposición 1.2.1. [9] La operación composición de grafos es asociativa es decir para G, H, F grafos se cumple que $G[(H[F])] = (G[H])[F]$.

De lo anterior podemos hablar de las potencias de un grafo.

Definición 1.2.5. [9] Si G es un grafo entonces

i) $G^0 = \emptyset$,

ii) $G^1 = G$,

iii) $G^k = G[G^{k-1}]$.

Dado un grafo cualquiera cuyos vértices están ordenados podemos definir un árbol cuyo polinomio de independencia este directamente relacionado con el polinomio de independencia del grafo inicial.

Definición 1.2.6. Sea G un grafo, $\prec$ un orden sobre su conjunto de vértices $V(G)$, y sea $u \in V(G)$ fijo. Podemos definir su *árbol de caminos estables*, $(T^{\prec}_{G,u}, \bar{u})$, como sigue. Si u es un vértice aislado, entonces $(T^{\prec}_{G,u}, \bar{u})$ es solamente el vértice $\bar{u}$. Si el conjunto de vecinos de u es distinto del vacío podemos denotar su vecindad abierta $N(u) = \{u_1 \prec u_2 \prec \ldots \prec u_d\}$, entonces para cada $u_i \in N(u)$ sea $G^i = G[V(G) - \{u, u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}\}]$ y $(T_i, r_i) = (T^{\prec}_{G,u_i}, \bar{u_i})$, tomando el orden inducido sobre $V(G^i)$. Considere la unión disjunta de los T^i con raíces r_i, un nuevo vértice etiquetado $\bar{u}$ y agregue las aristas (u, r_i) para cada $u_i \in N(u)$. El árbol obtenido es $(T^{\prec}_{G,u}, \bar{u})$ y su raíz es $\bar{u}$.

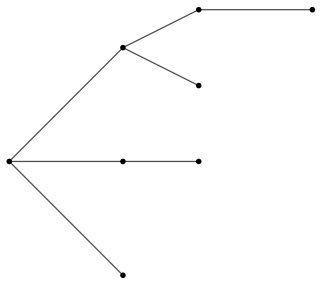


Figura 1.7: Árbol de caminos estables $T^{\prec}_{K_4,1}$

En la figura 1.7 podemos ver el árbol de caminos estables del grafo complelto K_4, se puede notar que la primera rama es el árbol de caminos estables del grafo completo K_3, la segunda rama es el árbol de caminos estables del grafo completo K_2 y la tercera rama es el árbol de caminos estables del grafo completo K_1.

1.3. Polinomio de independencia

Antes de definir el polinomio de independecia de un grafo debemos introducir algunos conceptos necesarios.

Definición 1.3.1. Dos vértices x, $y \in V(G)$ son *independientes* si no son adyacentes.

A partir de la definición anterior podemos generalizar el concepto a un conjunto independiente como sigue.

Definición 1.3.2. Un subconjunto $I \subseteq V(G)$ se llama *conjunto independiente* de G si para cualquier par de vértices x, $y \in I$ la arista $xy \notin G$. Es decir, si cada par de vértices de I es independiente.

Un conjunto independiente es maximal si al agregar cualquier otro vértice se forma al menos una arista. Un grafo es *bien cubierto* si sus conjuntos independientes maximales son de la misma cardinalidad.

Definición 1.3.3. Sea k_I el número de vértices de un conjunto independiente $I \subseteq G$, el *número de independencia de* G, denotado por α_G, es

$$\alpha_G := \text{máx}\{k_I |\ \ I \text{ es conjunto independiente de } G\}.$$

Para un grafo G y un entero no negativo k. Sea i_k el número de conjuntos independientes de G de cardinalidad k. El número de indepen-

dencia de un grafo y cada $i_k(G)$ son grafo invariantes, entonces podemos presentar la siguiente definición.

Definición 1.3.4. El *polinomio de independencia* de G es el polinomio definido por:

$$I(G;x) = \sum_{k=0}^{\alpha_G} i_k x^k$$

donde α_G es el número de independencia de G.

Otro concepto importante relacionado con el polinomio de independencia es el *número de Fibonacci* de un grafo G, que se define como el número total de conjuntos independientes del grafo, es decir el número de Fibonacci coincide con $i(G;1)$. No es difícil verificar que el número de Fibonacci de un camino de longitud $n-1$ coincide con $\mathcal{F}_n$, donde $\mathcal{F}_n$ es el n-ésimo termino de la sucesión de Fibonacci.

Definición 1.3.5. El *polinomio de independencia reducido* de G es el polinomio generado por:

$$f(G;x) = I(G;x) - 1 = \sum_{k=1}^{\alpha_G} i_k x^k$$

donde α_G es el número de independencia de G.

El polinomio de independencia reducido de un grafo puede ser visto como el polinomio de independencia sin tomar al vacío como un conjunto independiente.

1.4. Cómo calcular el polinomio de independencia

Algunas operaciones de grafos nos permiten simplificar el cálculo del polinomio de independencia del grafo resultante. Aquí presentamos algunos resultados conocidos que son de utilidad para esta tarea.

Para algunas cardinalidades el número de conjuntos independientes es conocido o fácil de calcular como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.4.1. Si G es un grafo de orden n y $\|G\| = m$ tenemos:

i) $i_0 = 1$,

ii) $i_1 = n$,

iii) $i_2 = \binom{n}{2} - m$.

El polinomio de independencia se comporta de manera interesante con respecto a la composición de grafos, como lo describe el siguiente teorema.

Teorema 1.4.1. [9] Si G y H son dos grafos, entonces el *polinomio de independencia* de $G[H]$ está dado por:

$$I(G[H];x) = I(G;x) \circ f(H;x). \tag{1.1}$$

Mientras que el polinomio de independencia reducido tiene la propiedad siguiente.

Corolario 1.4.1. Si G y H son dos grafos, entonces el *polinomio de independencia reducido* de $G[H]$ está dado por:

$$f(G[H];x) = f(G;x) \circ f(H;x). \tag{1.2}$$

Otras operaciones de grafos también son útiles en el cálculo del polinomio de independencia.

Proposición 1.4.2. Si G y H son dos grafos entonces

i) $I(G \uplus H;x) = I(G;x)I(H;x)$,

ii) $I(G + H;x) = I(G;x) + I(H;x) - 1$.

Un resultado conocido que será una herramienta importante en el cálculo de polinomios de independencia se presenta en el siguiente lema.

Lema 1.4.1. [2] Si G es un grafo y $v \in V(G)$, entonces

$$I(G;x) = I(G - v;x) + x\, I(G - N[v];x). \tag{1.3}$$

Aplicando el lema anterior es posible verificar la siguiente fórmula que se utilizan en la prueba de la unimodalidad de n-caminos con grafo colgante G.

Lema 1.4.2. Si $p_n = I(P(G,w,n);x)$, $g = I(G;x)$ y $g' = I(G - w;x)$ entonces para $n \geq 0$

$$p_n = g(p_{n-1} + xg'p_{n-2}) \tag{1.4}$$

La prueba del lema anterior se sigue directamente de la definición de n-camino con grafo colgante G y del lema 1.4.1.

Para el árbol de caminos estables de un grafo los polinomios de independencia de ambos están estrechamente relacionados como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 1.4.2. [6] Sea G un grafo y $u \in V(G)$. Entonces para $(T, r) = (T_{G,u}, \bar{u})$ se cumple que

$$\frac{I(G - u^{<}; x)}{I(G; x)} = \frac{I(T - r; x)}{I(T; x)}. \tag{1.5}$$

Con este resultado a la mano es posible probar una técnica de mayor utilidad para calcular el polinomio de independencia de un árbol de caminos estables de un grafo conectado G si se conoce el polinomio de independencia de G y de algunos subgrafos inducidos.

Teorema 1.4.3. [6] Si G es un grafo conectado y $u \in V(G)$, entonces existe una sucesión de subgrafos inducidos de G; $G_1, \ldots, G_k$ tales que

$$I(T^{\prec}_{G,u}; x) = I(G; x) \prod_{i=1}^{k} I(G_i; x). \tag{1.6}$$

En [6] se presenta una versión general de este resultado pero para los fines de este trabajo no es necesario generalizar la definición de un árbol de caminos estables. El teorema anterior nos asegura además que el polinomio de independecia de un grafo conectado G divide al polinomio de independencia de su árbol de caminos estables. Nuestro objetivo será utilizar este resultado y propiedades de la log-concavidad de polinomios para asegurar la unimodalidad del polinomio de independencia de algunos árboles.

1.5. Polinomios de independencia de árboles de Fibonacci

Sea $p_n = I(F_n; x)$ el polinomio de independencia del árbol de Fibonacci $T_n, n \geq 0$. Del lema 1.4.1 con $v = r_n$, la raíz natural del árbol de Fibonacci F_n, obtenemos

$$p_n = p_{n-2}(p_{n-1} + x p_{n-3}^2 p_{n-4}), \qquad n \geq 4. \tag{1.7}$$

Cuyas condiciones iniciales son las siguientes.

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 + x, \\ p_1 &= 1 + x, \\ p_2 &= 1 + 3x + x^2, \\ p_4 &= 1 + 5x + 6x^2 + 2x^3, \end{aligned}$$

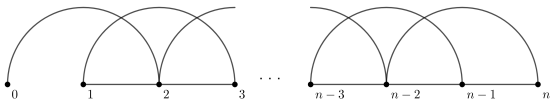


Figura 1.8: El grafo G_n

Vamos a definir un grafo auxiliar para escribir el polinomio de independencia de los árboles de Fibonacci de una manera más "útil".

Para $n \geq 0$, definimos al grafo G_n con conjunto de vértices $\{0, 1, ..., n\}$ y con aristas $E_n = \{\{i, j\} | 0 < |i - j| \leq 2\} \backslash \{\{0, 1\}\}$ (ver figura 1.8).

Sea $\hat{p}_n = I(G_n; x)$ el polinomio de independencia del grafo $G_n, n \geq 0$. La siguiente es una factorización del polinomio p_n, puede ser deducida de [6], que probaremos por inducción.

Teorema 1.5.1. Para cada entero $n \geq 1$,

$$p_n = \left(\frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_0}\right)^{f_{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \hat{p}_i^{f_{n-i}}, \tag{1.8}$$

donde $f_0 = 1, f_1 = 0$ y $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geq 2$.

Demostración. Para $n = 1, 2, 3, 4$ cálculos directos muestran que la ecuación (1.8) se cumple.

Ahora supongamos que la ecuación (1.8) se cumple para $n \geq 5$ vemos que

$$p_{n+1} = p_n p_{n-1} + x p_{n-1} p_{n-2}^2 p_{n-3}$$

Definamos $l = p_n p_{n-1}$, tenemos que

$$\begin{aligned} l &= \left(\frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_0}\right)^{f_{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \hat{p}_i^{f_{n-i}} \left(\frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_0}\right)^{f_{n-2}} \prod_{i=2}^{n-1} \hat{p}_i^{f_{n-1-i}} \\ &= \left(\frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_0}\right)^{f_{n-1}+f_{n-2}} \hat{p}_n^{f_0} \prod_{i=2}^{n-1} \hat{p}_i^{f_{n-i}+f_{n-1-i}} \\ &= \left(\frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_0}\right)^{f_n} \hat{p}_n \prod_{i=2}^{n-1} \hat{p}_i^{f_{n+1-i}} \end{aligned}$$

Ahora sea $r = p_{n-1}p_{n-2}^2p_{n-3}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
r &= \left(\frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_0}\right)^{f_{n-2}} \prod_{i=2}^{n-1} \hat{p}_i^{f_{n-1-i}} \left(\frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_0}\right)^{2f_{n-3}} \prod_{i=2}^{n-2} \hat{p}_i^{2f_{n-2-i}} \left(\frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_0}\right)^{f_{n-4}} \prod_{i=2}^{n-3} \hat{p}_i^{f_{n-3-i}} \\
&= \left(\frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_0}\right)^{f_{n-2}+2f_{n-3}+f_{n-4}} \hat{p}_{n-1}^{f_0}\hat{p}_{n-2}^{f_1}\hat{p}_{n-2}^{2f_0} \prod_{i=2}^{n-3} \hat{p}_i^{f_{n-1-i}+2f_{n-2-i}+f_{n-3-i}} \\
&= \left(\frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_0}\right)^{f_n} \hat{p}_{n-2}\hat{p}_{n-1}^{f_2}\hat{p}_{n-2}^{f_3} \prod_{i=2}^{n-3} \hat{p}_i^{f_{n+1-i}} \\
&= \left(\frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_0}\right)^{f_n} \hat{p}_{n-2} \prod_{i=2}^{n-1} \hat{p}_i^{f_{n+1-i}}
\end{aligned}$$

sustituimos l y r y obtenemos

$$p_{n+1} = \left(\frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_0}\right)^{f_n} (\hat{p}_n + x\hat{p}_{n-2}) \prod_{i=2}^{n-1} \hat{p}_i^{f_{n+1-i}}$$

Recordemos que $\hat{p}_n + x\hat{p}_{n-2} = \hat{p}_{n+1}$ y que $f_0 = 1$ y $f_1 = 0$ de donde concluimos que

$$p_{n+1} = \left(\frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_0}\right)^{f_n} \prod_{i=2}^{n+1} \hat{p}_i^{f_{n+1-i}}$$

■

De la fórmula anterior obtenemos que para $n \geq 6$, cada p_n tiene como uno de sus factores $\hat{p}_4 = 1 + 5x + 4x^2 + x^3$ que solo tiene una raíz real.

Corolario 1.5.1. Para $n \geq 6$, el polinomio de independencia de F_n tiene raices complejas.

Una generalización de los árboles de Fibonacci que surge de forma natural es incrementar el número de condiciones iniciales.

Definición 1.5.1. Un *árbol de Tribonacci*, $\mathcal{T}_n$, es un grafo enraizado definido recursivamente como sigue:

i) $\mathcal{T}_0 = K_1$ cuya raíz es $r_0 \in V(\mathcal{T}_0)$,

ii) $\mathcal{T}_1 = K_1$ cuya raíz es $r_1 \in V(\mathcal{T}_1)$,

ii) $\mathcal{T}_2 = K_1$ cuya raíz es $r_1 \in V(\mathcal{T}_2)$,

iii) para $n \geq 3$, el árbol $\mathcal{T}_n$ se define como la unión disjunta de $\mathcal{T}_{n-1}, \mathcal{T}_{n-2}$ y $\mathcal{T}_{n-3}$, junto con un nuevo vértice r_n conectado con las raices r_{n-1}, r_{n-2} y r_{n-3}.

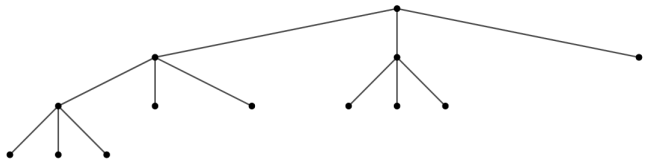


Figura 1.9: Árbol de Tribonacci $\mathcal{T}_6$

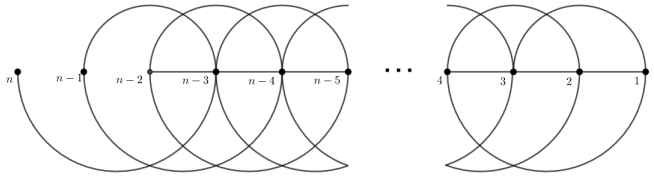


Figura 1.10: El grafo $\mathcal{G}_n$

Sea $p_n = I(\mathcal{T}_n; x)$ el polinomio de independencia del árbol de Tribonacci $\mathcal{T}_n$; $n \geq 0$. Del lema 1.4.1 con $v = r_n$, la raíz natural del árbol de Tribonacci $\mathcal{T}_n$ y la proposición 1.4.2 tenemos

$$p_n = p_{n-1}p_{n-2}p_{n-3} + xp_{n-2}p_{n-3}^2p_{n-4}^3p_{n-5}^2p_{n-6}, \qquad n \geq 7. \tag{1.9}$$

Con las siguientes condiciones iniciales:

$p_1 = 1 + x,$
$p_2 = 1 + x,$
$p_3 = 1 + x,$
$p_4 = 1 + 4x + 3x^2 + x^3,$
$p_5 = 1 + 7x + 15x^2 + 14x^3 + 6x^4 + x^5,$
$p_6 = 1 + 13 + 66x^2 + 175x^3 + 276x^5 + 276x^5 + 179x^6 + 74x^7 + 18x^8 + 2x^9.$

Ahora para cada $n \geq 0$ definimos el grafo $\mathcal{G}_n$ (Ver figura 1.10) cuyo conjunto de vértices es $\{1, 2, \ldots, n\}$ y con aristas

$$E_n = \{ij | 0 < |i - j| \leq 3\} \setminus \{n(n-1), n(n-2), (n-1)(n-2)\}.$$

Si $\bar{p}_n = I(\mathcal{G}_n; x)$ es el polinomio de independencia del grafo $\mathcal{G}_n$, $n \geq 0$. Del lema 1.4.1 con $v = n \in G_n$, tenemos

$$\bar{p}_n = \bar{p}_{n-1} + x\bar{p}_{n-4}, \qquad n \geq 7. \tag{1.10}$$

La siguiente factorización de p_n puede ser deducida de [6] o puede ser probada por inducción matemática.

Teorema 1.5.2. Para cualquier entero $n \geq 7$.

$$p_n = (x+1)^{t_{n-6}} \left(\frac{\bar{p}_3}{\bar{p}_2}\right)^{v_{n-3}} \prod_{i=4}^{n} \bar{p}_i^{v_{n-i}} \tag{1.11}$$

Donde la sucesión $\{v_n\}$ se define por $v_0 = 1, v_1 = 0, v_2 = 1$, y $v_n = v_{n-1} + v_{n-2} + v_{n-3}$ para $n \geq 3$; y la sucesión $\{t_n\}$ se define por $t_1 = 2, t_2 = 4t_3 = 7$, and $t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3}$ para $n \geq 4$.

Demostración. Para $n = 7, 8, 9, 10, 12$ cálculos directos muestran que la ecuación (1.11) se cumple.
Para $n \geq 13$

$$p_n = p_{n-1}p_{n-2}p_{n-3} + xp_{n-2}p_{n-3}^2p_{n-4}^3p_{n-5}^2p_{n-6}. \tag{1.12}$$

Y para $m \leq n$

$$p_m = (x+1)^{t_{m-6}} \left(\frac{\bar{p}_3}{\bar{p}_2}\right)^{v_{m-3}} \prod_{i=4}^{m} \bar{p}_i^{v_{m-i}}, \tag{1.13}$$

En la ecuación (1.12) denotamos

$$\begin{aligned} l_1 &= p_{n-1}p_{n-2}p_{n-3} \\ l_2 &= l_2 = xp_{n-2}p_{n-3}^2p_{n-4}^3p_{n-5}^2p_{n-6} \end{aligned}$$

y en la ecuación (1.13)

$$g_m = \left(\frac{\bar{p}_3}{\bar{p}_2}\right)^{v_{m-3}} \prod_{i=4}^{m} \bar{p}_i^{v_{m-i}} \tag{1.14}$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} l_1 &= (x+1)^{t_{n-7}+t_{n-8}+t_{n-9}} g_{n-1}g_{n-2}g_{n-3} \\ &= (x+1)^{t_{n-6}} g_{n-1}g_{n-2}g_{n-3}, \end{aligned}$$

ya que $t_{n-7} + t_{n-8} + t_{n-9} = t_{n-6}$ y

$$\begin{aligned} l_2 &= x(x+1)^{t_{n-8}+2t_{n-9}+3t_{n-10}+2t_{n-11}+t_{n-12}} g_{n-2}g_{n-3}^2g_{n-4}^3g_{n-5}^2g_{n-6} \\ &= (x+1)^{t_{n-6}}(xg_{n-2}g_{n-3}^2g_{n-4}^3g_{n-5}^2g_{n-6}), \end{aligned}$$

debido a $t_{n-8} + 2t_{n-9} + 3t_{n-10} + 2t_{n-11} + t_{n-12} = t_{n-7} + t_{n-8} + t_{n-9} = t_{n-6}$.

Al sustituir l_1, l_2 y g_m apropiadamente en las ecuaciones (1.12) y (1.13) obtenemos

$$p_n = (x+1)^{t_{n-6}} \left(g_{n-1}g_{n-2}g_{n-3} + xg_{n-2}g_{n-3}^2g_{n-4}^3g_{n-5}^2g_{n-6}\right). \tag{1.15}$$

Como resultado de la ecuación (1.15) tenemos una factorización de p_n, a partir de la cual podemos trabajar con

$$g = g_{n-1}g_{n-2}g_{n-3} + xg_{n-2}g_{n-3}^2g_{n-4}^3g_{n-5}^2g_{n-6}, \tag{1.16}$$

denotemos $q_1 = g_{n-1}g_{n-2}g_{n-3}$, $q_2 = xg_{n-2}g_{n-3}^2g_{n-4}^3g_{n-5}^2g_{n-6}$ en las ecuaciones (1.16) y

$$g_m = \left(\frac{\bar{p}_3}{\bar{p}_2}\right)^{v_{m-3}} h_m, \tag{1.17}$$

donde

$$h_m = \prod_{i=4}^{m} \bar{p}_i^{v_{m-i}} \tag{1.18}$$

Ahora, tenemos

$$\begin{aligned} q_1 &= \left(\frac{\bar{p}_3}{\bar{p}_2}\right)^{v_{n-4}+v_{n-5}+v_{n-6}} h_{n-1}h_{n-2}h_{n-3} \\ &= \left(\frac{\bar{p}_3}{\bar{p}_2}\right)^{v_{n-3}} h_{n-1}h_{n-2}h_{n-3}, \end{aligned}$$

ya que $v_{n-4} + v_{n-5} + v_{n-6} = v_{n-3}$ y

$$\begin{aligned} q_2 &= x\left(\frac{\bar{p}_3}{\bar{p}_2}\right)^{v_{n-5}+2v_{n-6}+3v_{n-7}+2v_{n-8}+v_{n-9}} h_{n-2}h_{n-3}^2h_{n-4}^3h_{n-5}^2h_{n-6} \\ &= \left(\frac{\bar{p}_3}{\bar{p}_2}\right)^{v_{n-3}} xh_{n-2}h_{n-3}^2h_{n-4}^3h_{n-5}^2h_{n-6} \end{aligned}$$

debido a $v_{n-5}+2v_{n-6}+3v_{n-7}+2v_{n-8}+v_{n-9} = v_{n-4}+v_{n-5}+v_{n-6} = v_{n-3}$ Además por sustituir q_1, q_2 y h_m apropiadamente en las ecuaciones (1.16) y (1.17) obtenemos

$$g = \left(\frac{\bar{p}_3}{\bar{p}_2}\right)^{v_{n-3}} (h_{n-1}h_{n-2}h_{n-3} + xh_{n-2}h_{n-3}^2h_{n-4}^3h_{n-5}^2h_{n-6}) \tag{1.19}$$

Ahora denotemos

$$h = h_{n-1}h_{n-2}h_{n-3} + xh_{n-2}h_{n-3}^2h_{n-4}^3h_{n-5}^2h_{n-6} \tag{1.20}$$

Hasta ahora hemos obtenido una factorización de p_n al sustituir q_1 y q_2 en la ecuación (1.19) y h y g en las ecuaciones (1.19) y (1.15) respectivamente

$$p_n = (x+1)^{t_{n-6}} \left(\frac{\bar{p}_3}{\bar{p}_2}\right)^{v_{n-3}} h \tag{1.21}$$

En la ecuación (1.20) denotamos

$$s_1 = h_{n-1}h_{n-2}h_{n-3}, \tag{1.22}$$

y

$$s_2 = x h_{n-2} h_{n-3}^2 h_{n-4}^3 h_{n-5}^2 h_{n-6}. \tag{1.23}$$

Por un lado

$$\begin{aligned}
s_1 &= \prod_{i=4}^{n-1} \bar{p}_i^{v_{n-1-i}} \prod_{i=4}^{n-2} \bar{p}_i^{v_{n-2-i}} \prod_{i=4}^{n-3} \bar{p}_i^{v_{n-3-i}} \\
&= \bar{p}_{n-1}\bar{p}_{n-2} \prod_{i=4}^{n-3} \bar{p}_i^{v_{n-1-i}} \prod_{i=4}^{n-3} \bar{p}_i^{v_{n-2-i}} \prod_{i=4}^{n-3} \bar{p}_i^{v_{n-3-i}} \\
&= \bar{p}_{n-1}\bar{p}_{n-2} \prod_{i=4}^{n-3} \bar{p}_i^{v_{n-1-i}} \bar{p}_i^{v_{n-2-i}} \bar{p}_i^{v_{n-3-i}} \\
&= \bar{p}_{n-1}\bar{p}_{n-2}^{v_2} \prod_{i=4}^{n-3} \bar{p}_i^{v_{n-i}} \\
&= \bar{p}_{n-1} \prod_{i=4}^{n-2} \bar{p}_i^{v_{n-i}}
\end{aligned}$$

Ahora, por otro lado

$$
\begin{aligned}
s_2 &= x\prod_{i=4}^{n-2}\bar{p}_i^{v_{n-2-i}}\prod_{i=4}^{n-3}\bar{p}_i^{2v_{n-3-i}}\prod_{i=4}^{n-4}\bar{p}_i^{3v_{n-4-i}}\prod_{i=4}^{n-5}\bar{p}_i^{2v_{n-5-i}}\prod_{i=4}^{n-6}\bar{p}_i^{v_{n-6-i}}\\
&= x\bar{p}_{n-5}^2\prod_{i=2}^{n-2}\bar{p}_i^{v_{n-2-i}}\prod_{i=4}^{n-3}\bar{p}_i^{2v_{n-3-i}}\prod_{i=4}^{n-4}\bar{p}_i^{3v_{n-4-i}}\prod_{i=4}^{n-6}\bar{p}_i^{2v_{n-5-i}}\prod_{i=4}^{n-6}\bar{p}_i^{v_{n-6-i}}\\
&= x\bar{p}_{n-4}^3\bar{p}_{n-5}^2\prod_{i=2}^{n-2}\bar{p}_i^{v_{n-2-i}}\prod_{i=4}^{n-3}\bar{p}_i^{2v_{n-3-i}}\prod_{i=4}^{n-6}\bar{p}_i^{3v_{n-4-i}}\prod_{i=4}^{n-6}\bar{p}_i^{2v_{n-5-i}+v_{n-6-i}}\\
&= x\bar{p}_{n-3}^2\bar{p}_{n-4}^3\bar{p}_{n-5}^4\prod_{i=2}^{n-2}\bar{p}_i^{v_{n-2-i}}\prod_{i=4}^{n-6}\bar{p}_i^{2v_{n-3-i}}\prod_{i=4}^{n-6}\bar{p}_i^{v_{n-3-i}+2v_{n-4-i}+v_{n-5-i}}\\
&= x\bar{p}_{n-2}\bar{p}_{n-3}^2\bar{p}_{n-4}^4\bar{p}_{n-5}^6\prod_{i=2}^{n-6}\bar{p}_i^{f_{n-2-i}}\prod_{i=4}^{n-6}\bar{p}_i^{3v_{n-3-i}+2v_{n-4-i}+v_{n-5-i}}\\
&= x\bar{p}_{n-2}\bar{p}_{n-3}^2\bar{p}_{n-4}^4\bar{p}_{n-5}^6\prod_{i=4}^{n-6}\bar{p}_i^{2v_{n-2-i}+2v_{n-3-i}+v_{n-4-i}}\\
&= x\bar{p}_{n-2}\bar{p}_{n-3}^2\bar{p}_{n-4}^4p_{n-5}^6\prod_{i=4}^{\bar{n}-6}\bar{p}_i^{v_{n-1-i}+v_{n-2-i}+v_{n-3-i}}\\
&= x\bar{p}_{n-2}^{f_2}\bar{p}_{n-3}^{f_3}\bar{p}_{n-4}^{f_4+1}\bar{p}_{n-5}^{f_5}\prod_{i=4}^{n-6}\bar{p}_i^{v_{n-i}}\\
&= x\bar{p}_{n-4}\prod_{i=4}^{n-2}\bar{p}_i^{v_{n-i}}
\end{aligned}
$$

Así, al sustituir s_1 y s_2 en la ecuación (1.20) obtenemos

$$
\begin{aligned}
h &= (\bar{p}_{n-1} + x\bar{p}_{n-4}\prod_{i=4}^{n-2}\bar{p}_i^{v_{n-i}}\\
&= \bar{p}_n\prod_{i=4}^{n-2}\bar{p}_i^{v_{n-i}}
\end{aligned}
$$

Luego podemos multiplicar h por $\bar{p}_{n-1}^{v_1}$ y obtener

$$
\begin{aligned}
h &= \bar{p}_n^{v_0}\bar{p}_{n-1}^{v_1}\prod_{i=4}^{n-2}\bar{p}_i^{v_{n-i}}\\
&= \prod_{i=4}^{n}\bar{p}_i^{v_{n-i}}
\end{aligned}
$$

Finalmente, por sustituir h en la ecuación (1.21)

$$p_n = (x+1)^{t_{n-6}} \left(\frac{\bar{p}_3}{\bar{p}_2}\right)^{v_{n-3}} \prod_{i=4}^{n} \bar{p}_i^{v_{n-i}}$$

■

Otra generalización que surge naturalmente son los *grafos de tipo Fibonacci* $\mathfrak{T}_n$, que surgen al cambiar la condiciones inicales por grafos arbitrarios $\mathfrak{T}_0 = G$ con raíz r_0, y $\mathfrak{T}_1 = H$ con raíz r_1.

Para $n \geq 0$, definimos $\mathfrak{G}_n$ como el grafo obtenido de G_n, G y H por pegar a los vértices 0 y 1 de G_n las raices r_0 y r_1 respectivamente. Sea $q_n = I(\mathfrak{G}; x)$ y $p_n = I(\mathfrak{T}_n; x)$ los polinomios de independencia de $\mathfrak{G}$ y $\mathfrak{T}$ respectivamente, para $n \geq 0$. Tenemos una generalización de la factorización dada por el Teorema 1.4.1.

Teorema 1.5.3. Para cualquier entero $n \geq 1$,

$$p_n = \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{f_{n-1}} \prod_{i=2}^{n} q_i^{f_{n-i}}, \tag{1.24}$$

donde f_n se define como sigue $f_0 = 1, f_1 = 0$ y $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geq 2$.

Demostración. Sean $h = I(H; x)$ y $g = I(G; x)$. Para $n = 1$, $p_1 = h = \frac{q_1}{q_0}$, ya que $q_1 = gh$ y $q_0 = g$. Para $n = 2$, tenemos que $p_2 = q_2$ porque T_2 es isomorfo a $\mathcal{G}_2$. Para $n = 3$ tenemos que $p_3 = h(q_2 + xg\bar{h})$, donde $\bar{h} = I(H - N[r_1]; x)$ y también podemos ver que $q_3 = q_2 + xh\bar{h}$ así

$$p_3 = hq_3 = \left(\frac{q_1}{q_0}\right) p_3.$$

Para $n = 4$ tenemos que $p_4 = p_2(p_3 + xp_1^2 p_0)$, podemos sustituir los tres casos anteriores y obtenemos

$$p_4 = q_2\,(p_0)\,\frac{q_1}{q_0} q_3 + x\left(\frac{q_1}{q_0}\right)^2 p_0 = hq_2(q_3 + xgh)$$

Finalmente obtenemos que $p_4 = \left(\frac{q_1}{q_0}\right) q_2 q_4$

Así tenemos que la ecuación (1.21) se cumple para $n = 1, 2, 3, 4$. Ahora supongamos que la ecuación (1.21) se cumple para $n \geq 5$ vemos que

$$p_{n+1} = p_n p_{n-1} + x p_{n-1} p_{n-2}^2 p_{n-3}$$

Primero sea $l = p_n p_{n-1}$, entonces

$$
\begin{aligned}
l &= \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{f_{n-1}} \prod_{i=2}^{n} q_i^{f_{n-i}} \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{f_{n-2}} \prod_{i=2}^{n-1} q_i^{f_{n-1-i}} \\
&= \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{f_{n-1}+f_{n-2}} q_n^{f_0} \prod_{i=2}^{n-1} q_i^{f_{n-i}+f_{n-1-i}} \\
&= \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{f_n} q_n \prod_{i=2}^{n-1} q_i^{f_{n+1-i}}
\end{aligned}
$$

Después definimos $r = p_{n-1}p_{n-2}^2 p_{n-3}$, tenemos,

$$
\begin{aligned}
r &= \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{f_{n-2}} \prod_{i=2}^{n-1} q_i^{f_{n-1-i}} \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{2f_{n-3}} \prod_{i=2}^{n-2} q_i^{2f_{n-2-i}} \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{f_{n-4}} \prod_{i=2}^{n-3} q_i^{f_{n-3-i}} \\
&= \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{f_{n-2}+2f_{n-3}+f_{n-4}} q_{n-1}^{f_0} q_{n-2}^{f_1} q_{n-2}^{2f_0} \prod_{i=2}^{n-3} q_i^{f_{n-1-i}+2f_{n-2-i}+f_{n-3-i}} \\
&= \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{f_n} q_{n-2} q_{n-1}^{f_2} q_{n-2}^{f_3} \prod_{i=2}^{n-3} q_i^{f_{n+1-i}} \\
&= \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{f_n} q_{n-2} \prod_{i=2}^{n-1} q_i^{f_{n+1-i}}
\end{aligned}
$$

sustituimos l y r y obtenemos

$$
p_{n+1} = \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{f_n} (q_n + x q_{n-2}) \prod_{i=2}^{n-1} q_i^{f_{n+1-i}}
$$

Recordemos que $q_n + x q_{n-2} = q_{n+1}$ y que $f_0 = 1$ y $f_1 = 0$ de donde conclimos que

$$
p_{n+1} = \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{f_n} \prod_{i=2}^{n+1} q_i^{f_{n+1-i}}
$$

■

Capítulo 2

Sincronía y sincronía parcial

Deja que te abrace
deja que te diga porque
nada es como antes de que te pudiera tener
me has dado más de lo que nunca imagine

Jorge Ruíz Flores, Calcetines.

El estudio de polinomios asociados a un grafo ha sido un área ampliamente explorada. En este trabajo nuestro objetivo es probar que los polinomios de independencia de ciertas familias de grafos son log-cóncavos.

Una de las conjeturas más importantes en el estudio de polinomios relacionados a un grafo plantea que el polinomio de independencia de un árbol es unimodal. Sin embargo, no existen suficientes resultados para estudiar la unimodalidad de polinomios, pero sabemos que un polinomio con coeficientes positivos y sin ceros internos que es log-cóncavo es también unimodal.

Aprovechando que los polinomios de indenpendencia de un grafo solo tienen coeficientes positivos y no tienen ceros internos, nuestro interés se centrará en estudiar propiedades que nos aseguren la log-convidad de polinomios para utilizarlas en dirección de probar esta propiedad para polinomios de independencia de familias de grafos.

En este capítulo estudiaremos los conceptos de sincronía y dominación radial y su relación con el concepto de log-concavidad además de algunos resultados clásicos que nos permiten asegurar cuando algunas operaciones de polinomios preservan dicha propiedad.

2.1. Sincronía parcial

El estudio de los polinomios está fuertemente relacionado con propiedades que cumplen la sucesiones de sus coeficientes.

Definición 2.1.1. Una sucesión de números reales $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ es

i) *logaritmicamente cóncava (log-cóncava)* si $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ para todo $i \geq 1$,

ii) *unimodal* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots a_{k-1} \leq a_k \geq a_{k+1} \geq a_{k+2} \geq \ldots$.

Un polinomio $p = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ es log-cóncavo o unimodal si la sucesión de sus coeficientes lo es. Por ejemplo si tomamos a G como el árbol de la figura 1.1 su polinomio de independencia, $I(G;x) = 1 + 9x + 28x^2 + 37x^3 + 20x^4 + 4x^5$, es log-cóncavo y también unimodal.

Denotemos por ∂p el grado del polinomio p y por δp el primer término positivo del polinomio p, es decir, $\delta p = \text{mín}\{k | a_k \neq 0\}$, donde a_i es un coeficiente de p. Decimos que p es un polinomio sin ceros internos si para $\delta p \leq i, j \leq \partial p$, $a_ia_j \neq 0$. Sea $\mathcal{W}$ el conjunto de los polinomios distintos de cero con coeficientes reales y sin ceros internos. Entonces, tenemos las siguientes propiedades.

Lema 2.1.1. Sean $p, q \in \mathcal{W}$. Entonces

i) $pq \in \mathcal{W}$,

ii) si además asumimos que $\delta q \leq \partial p$, entonces $p + q$ no tiene ceros internos si y solo si $\delta p \leq \partial q + 1$

El concepto de *sincronía parcial* definido en [19], nos permite explorar la log-concavidad y por lo tanto la unimodalidad de algunas familias de árboles. Sea $\mathbb{R}^{\geq 0}[x]$ el conjunto de polinomios con coeficientes reales no negativos. La *sincronía parcial* se define sobre este conjunto.

Definición 2.1.2. Sean $p = \sum_i a_ix^i$ y $q = \sum_i b_ix^i$ dos polinomios con coeficientes no negativos. Decimos que p y q están *parcialmente sincronizados*, y escribimos $p \sim_p q$, si

$$a_{m+1}b_{n-1} + a_{n-1}b_{m+1} \leq a_mb_n + a_nb_m \tag{2.1}$$

para cada $m \geq n$.

Por ejemplo si tomamos $p_0 = 1+x$ el polinomio de independencia del primer árbol de Fibonacci y $p_2 = 1 + 3x + x^2$ el polinomio de independencia del tercer árbol de Fibonacci podemos verificar que $xp_0 \sim_p p_2$, además como $p_0 = p_1$ también tenemos que $xp_1 \sim_p p_2$.

Sea $\mathcal{L}$ el conjunto de todos los polinomios log-cóncavos en $\mathbb{R}^{\geq 0}[x]$ que no tienen ceros internos; además denotemos por $\mathcal{L}^*$ el conjunto $\mathcal{L} - \{0\}$. Originalmente el concepto de sincronía parcial fue definido sobre $\mathcal{L}$, pero resulta de utilidad extenderlo a $\mathbb{R}^{\geq 0}[x]$, además se puede verificar que $\sim_p$ es simétrica en $\mathbb{R}^{\geq 0}[x]$ y reflexiva sobre $\mathcal{L}$. Los siguientes teoremas son probados en [19].

Teorema 2.1.1. Sean $p, q, r \in \mathbb{R}^{\geq 0}[x]$. Si $p \sim_p r$ y $q \sim_p r$, entonces $p + q \sim_p r$.

El teorema anterior funciona como una especie de acotación. Mientras que el siguiente nos asegura que la sincronía parcial es consistente con el producto, siempre que se multiplique por un polinomio log-cóncavo.

Teorema 2.1.2. Sean $p, q, r \in \mathcal{L}^*$.Si $p \sim_p q$, entonces $pr \sim_p qr$.

Como vimos antes tenemos que $xp_1 \sim_p p_2$ y además $p_1 \in \mathcal{L}$, entonces podemos obtener que $xp_1^2 \sim_p p_2p_1$.

La suma de polinomios log-cóncavos no siempre resulta en un polinomio log-cóncavo. El siguiente teorema nos presenta condiciones suficientes para que la suma de polinomios preserve la log-concavidad.

Teorema 2.1.3. Si $p, q \in \mathcal{L}$ y $p \sim_p q$, entonces $p + q \in \mathcal{L}$.

Como ya verificamos $xp_1^2 \sim_p p_2p_1$ y además tanto p_2p_1 como xp_1^2 son log-cóncavos, lo que nos permite probar que $I(T_3; x) = p_2p_1 + xp_1^2$ es log-cóncavo como consecuencia del teorema anterior.

Una propiedad que es importante en la prueba de algunos de nuestros resultados principales se establece en el siguiente lema.

Lema 2.1.2. Si $p \in \mathcal{L}$, entonces $p \sim_p xp$.

Demostración. Como p no tiene ceros internos podemos escribirlo

$$p = \sum_{i=h}^{t} a_i x^i$$

donde cada $a_i > 0$ para $h \leq i \leq t$. Tenemos que probar que

$$a_{m+1}a_{n-2} \leq a_n a_{m-1} \tag{2.2}$$

se cumple para $m \geq n$. Debemos considerar 3 casos *i*) $h > n-2$, *ii*) $h \leq n-2$ y $m \leq t$, y *iii*) $h \leq n-2$ y $m > t$.

i) Tenemos que $a_{n-2} = 0$, entonces la ecuación (2.2) se cumple.

ii) Tenemos que $t \geq m \geq m-1 \geq \ldots \geq n > h$. Entonces $t > m-2 \geq m-3 \geq \ldots \geq n-2 \geq h$. Así, podemos escribir

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} \leq \frac{a_m}{a_{m-1}} \text{ y } \frac{a_m}{a_m - 1} \leq \frac{a_m - 1}{a_{m-2}}$$

porque $p \in \mathcal{L}$. Si multiplicamos estas dos desigualdades obtenemos

$$\frac{a_{m+1}}{a_{m-1}} \leq \frac{a_m}{a_{m-2}},$$

con un proceso similar podemos obtener

$$\frac{a_m}{a_{m-2}} \leq \frac{a_{m-1}}{a_{m-3}} \leq \ldots \leq \frac{a_{n+2}}{a_n + 1} \leq \frac{a_n}{a_{n-2}},$$

por transitividad tenemos

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} \leq \frac{a_n}{a_{n-2}}$$

o equivalentemente

$$a_{m+1}a_{n-2} \leq a_n a_{m-1}.$$

Con lo que verificamos que la ecuación (2.2) se cumple.

iii) En este caso $a_{m+1} = 0$. Entonces la ecuación (2.2) se cumple.

■

2.2. Sincronía

Para definir el concepto de sincronía es necesario presentar algunos conceptos.

Definición 2.2.1. Sean $p, q \in \mathcal{W}$. Decimos que q *domina radial parcialmente* a p, y lo denotamos por $p \preccurlyeq q$, si

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} \leq \frac{b_k}{b_{k-1}}, \tag{2.3}$$

para $\text{mín}\{\delta p, \delta q\} \leq k \leq \text{máx}\{\partial p, \partial q\}$

Esta dominación está basada en el concepto de *dominación radial* presentado en [14] que se define formalmente como sigue.

Definición 2.2.2. Sean $p, q \in \mathcal{W}$. El polinomio q *domina radialmente* a p, denotado por $p \lesssim q$, si y solo si $p \preccurlyeq q$ y $q \preccurlyeq xp$.

Al eliminar la condición $q \preccurlyeq xp$ de la dominación radial, obtenemos un orden parcial. Para probar esta afirmación presentamos el siguiente lema.

Lema 2.2.1. Sea $p, q \in \mathcal{W}$ tales que $q \preccurlyeq q$, entonces

i) $\partial p \leq \partial q$,

ii) $\delta p \leq \delta q$.

La proposición siguiente nos permite verificar que la dominación radial parcial induce un orden parcial en un espacio proyectivo de $\mathcal{W}$.

Proposición 2.2.1. Sean $p, q, r \in \mathcal{W}$, entonces

i) $p \preccurlyeq p$,

ii) si $p \preccurlyeq q$ y $q \preccurlyeq r$, entonces $p \preccurlyeq r$,

iii) si $p \preccurlyeq q$ y $q \preccurlyeq p$, entonces $p = cq$ para algún real c.

Demostración. Podemos escribir

$$p = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, q = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k, r = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

sin pérdida de generalidad (podemos agregar ceros en caso de requirlo).
i) Se sigue inmediatamente de la definición.
ii) Por hipótesis tenemos que $a_i b_{i-1} \leq b_i a_{i-1}$ y $b_i c_{i-1} \leq c_i b_{i-1}$ para $i = 1, \ldots, n$. Debemos probar que $a_i c_{i-1} \leq a_{i-1} c_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Podemos calcular directamente que

$$c_{i-1} a_i b_{i-1} \leq c_{i-1} b_i a_{i-1} \leq c_i b_{i-1} a_{i-1}$$

si $b_{i-1} \neq 0$ podemos cancelar el factor b_{i-1} y obtener $a_i c_{i-1} \leq a_{i-1} c_i$; ahora si $b_{i-1} = 0$ tenemos dos casos $i - 1 < \delta q$ o $i - 1 > \partial q$ (porque estamos trabajando con polinomios sin ceros internos). Si $i - 1 < \delta q$ tenemos que $i - 1 < \delta r$ ya que $\delta q \leq \delta r$, entonces $c_{i-1} = 0$ y se cumple que $a_i c_{i-1} \leq a_{i-1} c_i$. Ahora si $i - 1 > \partial q$ obtenemos que $i - 1 > \partial p$ debido a $\partial p \leq \partial q$, entonces $a_{i-1} = 0 = a_i$ y por lo tanto se cumple que $a_i c_{i-1} \leq a_{i-1} c_i$.

iii) Tenemos que $\partial p \leq \partial q$ y $\partial q \leq \partial p$, entonces $\partial p = \partial q$. Análogamente se verifica que $\delta p = \delta q$. Además tenemos que

$$\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} = \frac{a_k}{b_k}, \text{ para } k = \delta p, \ldots, \partial p$$

entonces

$$a_k = \frac{a_k}{b_k} b_k = \frac{a_{\delta p}}{b_{\delta p}} b_k, \text{ para } k = \delta p, \ldots, \partial p.$$

Por lo tanto, $p = cq$ donde $c = \frac{a_{\delta p}}{b_{\delta p}} \neq 0$. ■

Pero nosotros no trabajamos con la propiedad antisimétrica por lo que podemos concentrarnos en $\mathcal{W}$.

Teorema 2.2.1. Sean $p, q, r \in \mathbb{R}^{\geq 0}[x]$.

i) Si $p \preccurlyeq q$ y $p \preccurlyeq r$, entonces $p \preccurlyeq q + r$,

ii) si $p \preccurlyeq r$ y $q \preccurlyeq r$, entonces $p + q \preccurlyeq r$.

También es posible verificar que la dominación radial parcial se preserva sobre la multiplicación de polinomios.

Teorema 2.2.2. Sean $p, q, r \in \mathbb{R}^{\geq 0}[x]$, si $p \preccurlyeq q$ y $r \in \mathcal{L}$, entonces $pr \preccurlyeq qr$

El orden parcial inducido por la proposición 2.2.1 junto con los teoremas 2.2.1 y 2.2.2 son de gran utilidad para determinar lo log-concavidad de polinomios de independencia que se estudia en el próximo capítulo.

Corolario 2.2.1. Sean $p, q, r, s \in \mathcal{W}$, si $p \preccurlyeq q$, $r \preccurlyeq s$, y $q, r \in \mathcal{L}$, entoces $pr \preccurlyeq qs$.

Directamente de la definición tenemos la siguiente propiedad.

Propiedad 2.2.1. Sea $p \in \mathcal{W}$. Entonces $p \in \mathcal{L}$ si y solo si $p \preccurlyeq xp$.

Gracias a esto tenemos una prueba muy corta del siguiente resultado clásico.

Corolario 2.2.2. Sean $p, q \in \mathcal{W}$. Si $p, q \in \mathcal{L}$, entonces $pq \in \mathcal{L}$.

Demostración. Tenemos que $p \preccurlyeq xp$ y $q \in \mathcal{L}$, entonces por el teorema 2.2.2 tenemos que $pq \preccurlyeq xpq$. ■

Otro resultado que es consecuencia directa de la propiedad 2.2.1 es el siguiente.

Corolario 2.2.3. Si $p, q \in \mathcal{W}$ tal que $p \lesssim q$, entonces $p, q \in \mathcal{L}$.

Demostración. Tenemos que $p \preccurlyeq q \preccurlyeq xp$, entonces por transitividad tenemos $p \preccurlyeq xp$. De donde $p \in \mathcal{L}$. Además $p \preccurlyeq q$ y $x \in \mathcal{L}$, entonces $xp \preccurlyeq xq$ nuevamente por transitividad $q \preccurlyeq xq$ y finalmente $q \in \mathcal{L}$. ■

Sabemos que en general la suma de polinomios log-cóncavos no siempre resulta en un polinomio log-cóncavo, por eso se ha trabajado para obtener condiciones suficientes para que esto suceda. La siguiente es una condición natural para asegurar la log-concavidad de la suma.

Definición 2.2.3. Sean $p, q \in \mathcal{W}$. Decimos que el polinomio p está *sincronizado* con q, y lo denotamos por $p \sim q$, si y solo si $p \preccurlyeq xq$ y $q \preccurlyeq xp$.

Por ejemplo tenemos que $p(x) = 1 + 2x + x^2$ y $q(x) = x$ están sincronizados, $p \sim q$. El concepto fue definido previamente en [14].

Corolario 2.2.4. Sean $p, q \in \mathcal{L}$ tal que $p \sim q$. Entonces $p + q \in \mathcal{L}$.

Demostración. Tenemos que $p \preccurlyeq xq$ y además $p \preccurlyeq xp$ por ser p log-cóncavo entonces $p \preccurlyeq x(p+q)$ análogamente tenemos que $q \preccurlyeq x(p+q)$ y finalmente podemos ver que $p+q \preccurlyeq x(p+q)$ por lo tanto $p+q \in \mathcal{L}$. ■

Ahora retomando el ejemplo anterior obtenemos que $p(x) + q(x) = 1 + 2x + x^2 + x = 1 + 3x + x^2 = I(P_2; x) \in \mathcal{L}$, ya que $p, q \in \mathcal{L}$ y además $p \sim q$. Es decir, el polnomio de independencia del camino de longitud 2 es log-cóncavo.

2.3. Otros resultados importantes

El siguiente lema nos permite probar la log-concavidad de familias de grafos generales que se construyen de manera similar a los árboles de Fibonacci.

Lema 2.3.1. Sea $\{q_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de polinomios en $\mathbb{R}^{\geq 0}[x]$ tales que $q_n = q_{n-1} + xq_{n-3}$ para $n \geq 3$. Si

$$q_n \sim_p xq_{n-2}, q_n \sim_p xq_{n-1}, \text{ y } q_n \in \mathcal{L} \tag{2.4}$$

se cumple para $n = 2, 3, 4$, entonces (2.4) se cumple para $n \geq 2$.

También tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.3.2. Sea $\{q_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de polinomios log-cóncavos en $\mathbb{R}^{\geq 0}[x]$ tales que $q_n = q_{n-1} + xq_{n-4}$ para $n \geq 4$. Si

$$q_{n-1} \preceq q_n \tag{2.5}$$
$$q_n \preceq xq_{n-1} \tag{2.6}$$
$$q_n \preceq xq_{n-2} \tag{2.7}$$
$$q_n \in \mathcal{L} \tag{2.8}$$

se cumplen para $6 \leq n \leq 11$, entonces (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) se cumplen para toda $n \geq 6$

Demostración. (2.5) Sea $n \geq 10$, $q_{n-1} \preceq q_{n-1}$ ya que q_{n-1} es log-cóncavo, y $q_{n-1} \preceq xq_{n-3} \preceq xq_{n-4}$ por (2.5) y (2.7), entonces $q_{n-1} \preceq q_n$.

(2.6) Sea $n \geq 10$, $q_{n-1} \preceq xq_{n-1}$ debido a que q_{n-1} es log-cóncavo, $xq_{n-4} \preceq xq_{n-3} \leq xq_{n-2} \preceq xq_{n-1}$ por (2.5), entonces $q_n \preceq xq_{n-1}$.

(2.7) Sea $n \geq 10$, $q_{n-1} \preceq xq_{n-2}$ por (2.6), y $xq_{n-4} \preceq xq_{n-3} \preceq xq_{n-2}$ por (2.5), entonces $q_n \preceq xq_{n-2}$

(2.8) Sea $n \geq 11$, $q_{n-2} \preceq x^2q_{n-4}$ por (2.7) y $xq_{n-5} \preceq x^2q_{n-4}$ por (2.5), entonces $q_{n-1} \preceq x^2q_{n-4}$. Ahora $xq_{n-4} \preceq xq_{n-3} \preceq xq_{n-2} \preceq xq_{n-1}$, entonces $xq_{n-4} \preceq xq_{n-1}$, por lo tanto $q_{n-1} \sim xq_{n-4}$. Finalmente $q_n \in \mathcal{L}$ por (2.8).

■

Capítulo 3

Aplicaciones a polinomios de independecia

Yo daría un brazo por vos
pero a decir verdad
papá sabe ser muy tonto
mejor, dale la mano a mamá

Iván Noble, Bienbenito.

En 1987 Alavi et. al. se preguntaron si el polinomio de independencia de cualquier árbol era unimodal (ver [1]), debido a esto se ha estrablecido una de las conjeturas más importantes en el estudio de polinomios relacionados a un grafo. Desde entonces hasta ahora muchos investigadores en el área han trabajado en dirección de probar la conjetura.

Al ser los árboles grafos tan diferentes y variados ha sido díficil verificar totalmente la conjetura, razón por la cual muchos autores han optado por encontrar familias de árboles cuyo polinomio de independencia sea unimodal.

Otra de las dificultades con la que se han encontrado los investigadores, es que el concepto de unimodalidad no cuenta con muchas propiedades que nos permitan estudiarlo directamente. Por esto se ha optado

por estudiar conceptos que estén relacionados con la unimodalidad de polinomios como la log-concavidad o las raíces reales.

En este capítulo usaremos el concepto de log-concavidad junto con las propiedades estudiadas en el capítulo anterior para determinar la log-cóncavidad del polinomio de independencia de familias de árboles y grafos relacionados.

3.1. Aplicación a concatenaciones de grafos

Nosotros estudiamos la log-concavidad de una sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n\geq 0}$. en $\mathcal{W}$ definida por una recurrencia lineal de la forma

$$p_n = gp_{n-1} + xhp_{n-2}, \qquad n \geq 2 \tag{3.1}$$

donde $h, g \in \mathcal{W}$. Este tipo de polinomios aparecen como polinomios de independencia de las n-concatenaciones de grafos. De hecho, en [28], prueban que el polinomio de independencia de las n-concatenaciones cumple la siguiente recurrencia:

$$I(G_n^-(v);x) = I^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(G-v;x) \prod_{s=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \left[I(G-v;x) + 4xI(G-N[v];x)\cos^2\frac{s\pi}{n+2} \right]. \tag{3.2}$$

Para probar que $I(G_n^-(v);x)$ es suficiente verificar que cada factor en el lado derecho de la igualdad es log-cóncavo. Sin embargo para probar que cada factor es log-cóncavo es suficiente probar que

$$I(G-v;x) \sim 4xI(G-N[v];x)\cos^2\frac{s\pi}{n+2} \tag{3.3}$$

están sincronizados y $I(G-v;x), 4xI(G-N[v];x)\cos^2\frac{s\pi}{n+2} \in \mathcal{L}$.

Para probar la ecuación (3.3) es suficiente probar que $I(G-v;x) \sim xI(G-N[v];x)$ por la definición de la dominación radial parcial. Probamos la siguiente propiedad.

Propiedad 3.1.1. Sea G un grafo simple y v un vértice de G. Si $I(G-v;x), xI(G-N[v];x) \in \mathcal{L}$ y $I(G-v;x) \sim xI(G-N[v];x)$, entonces $I(G_n^-(v);x) \in \mathcal{L}$.

Podemos aplicar este resultado a los grafos oruga.

Lema 3.1.1. Sea $p_k = I(V_k^{(2)};x)$, $k \geq 0$. Entonces $p_k \sim p_{k-1}$ para $k \geq 1$.

Demostración. Sabemos que el polinomio de independencia de cada grafo vertebrado $V_k^{(m)}$ es log-cóncavo para $k \geq 0$ y $m \geq 1$ [28], en particular el polinomio de las orugas es unimodal para $k \geq 0$. Ahora podemos

verificar que el polinomio de independencia de las orugas cumple la siguiente recurrencia lineal $p_k = (1+x)^2(p_{k-1} + xp_{k-2})$, $k \geq 2$. De modo que debemos probar lo siguiente

i) $p_k \preccurlyeq x^2 p_{k-1}$,

ii) $p_{k-1} \preccurlyeq p_k$.

Para la prueba de *i)* revisar [4].

Vamos a proceder a probar *ii)* por inducción. Para $k = 1$, tenemos que $p_0 = 1 \preccurlyeq 1+3x+x^2 = p_1$. Para $k = 2$, $p_1 = 1+3x+x^2 \preccurlyeq 1+6x+10x^2+6x^3+x^4 = p_2$. Tenemos que verificar $p_{k-1} \preccurlyeq (1+x)^2(p_{k-1}+xp_{k-2}) = p_k$. Ahora sabemos $p_{k-1} \in \mathcal{L}$ y además $1 \preccurlyeq (1+x)^2$, entonces $p_{k-1} \preccurlyeq (1+x)^2 p_{k-1}$ por el teorema 2.2.2. Después suponemos $p_{k-3} \preccurlyeq p_{k-2}$ si multiplicamos ambos lados por $x \in \mathcal{L}$ obtenemos $xp_{k-3} \preccurlyeq xp_{k-2}$ (por el teorema 2.2.2 y usamos $p_{k-2} \preccurlyeq xp_{k-2}$ pues $p_{k-2} \in \mathcal{L}$ por el teorema 2.2.1 $p_{k-2} + xp_{k-3} \preccurlyeq xp_{k-2}$, por el corolario 2.2.1 obtenemos $p_{k-1} \preccurlyeq (1+x)^2 p_{k-2}$. Si volvemos a aplicar el teorema 2.2.1 tenemos $p_{k-1} \preccurlyeq (1+x)^2(p_{k-1} + xp_{k-2}) = p_k$. ■

Una consecuencia directa del lema anterior es la siguiente.

Corolario 3.1.1. Sea v uno de los dos vértices de grado 3 en la oruga $V_k^{(2)}$. Entonces, la n-concatenación $(V_k^{(2)})_n^-(v)$ tiene polinomio de independencia log-cóncavo para $k \geq 2$ y $n \geq 0$.

También podemos aplicar la propiedad 3.1.1 a los n-caminos con grafo colgante G.

Corolario 3.1.2. Sea G un grafo simple enraizado con raíz ω. Si $I(G;x)$, $I(G-\omega;x) \in \mathcal{L}$ y $I(G;x) \sim xI(G-\omega;x)$, entonces el polinomio de independencia $I(\mathcal{P}(G,w,n);x)$ del n-camino con grafo colgante G es log-cóncavo, para $n \geq 0$.

Si, en el corolario anterior, cambiamos la sincronía por la dominación radial, obtenemos una construcción iterada. A continuación, desarrollamos esa idea.

Lema 3.1.2. Sea g, $h \in \mathcal{L}$ y $\{p_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de polinomios que cumplen la recurrencia (3.1) con condiciones iniciales $p_0 = 1$, $p_1 = g+xh$. Si $h \lesssim g$ entonces $p_n \in \mathcal{L}$ y $gp_{n-1} \lesssim p_n$ para $n \geq 1$.

Para establecer la construcción recursiva es importante identificar el vértice a través del cual "uniremos" los grafos.

Definición 3.1.1. Sea G un grafo simple y v un vértice de G. Decimos que v es un *vértice ancla* si y solo si $I(G-v;x) \preccurlyeq I(G;x)$.

Teorema 3.1.1. Sea G un grafo simple enraizado con raíz w. Sea v_1 el vértice de $\mathcal{P}(G, w, n)$ como en la figura 3.1 y w un vértice ancla de G. Entonces $I(\mathcal{P}(G, w, n); x) \in \mathcal{L}$ y v_1 es vértice ancla de $\mathcal{P}(G, w, n)$ para cualquier $n \geq 1$.

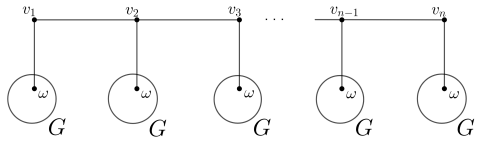


Figura 3.1: El grafo $\mathcal{P}(G, w, n)$.

El teorema 3.1.1 nos da un proceso iterado para la construcción de un grafo con polinomio de indepencia log-cóncavo. Tal construcción inicia con un grafo simple y vértice ancla w. Primero se construye el n_1-camino con grafo colgante G, es decir, $\mathcal{P}(G, w, n_1)$, para algún entero positivo n_1 cuyo polinomio de independencia es log-cóncavo y tiene vértice ancla v_1. Después, para otro entero positivo n_2, podemos construir un nuevo n_2-camino con grafo colgante $\mathcal{P}(G, w, n_1)$, es decir, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(G, w, n_1), v_2, n_2)$ que también tiene polinomio de indepencia log-cóncavo y un vértice ancla. Así para una sucesión de enteros positivos $n_1, n_2, \ldots, n_k$ denotamos al grafo resultante por $\mathfrak{B}(G, w, n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Corolario 3.1.3. Sea G un grafo simple w un vértice ancla de G. Si $I(G - w; x) \lesssim I(G; x)$, entonces, para cualquier sucesión finita de enteros positivos $n_1, \ldots, n_k$ el grafo $\mathfrak{B}(G, w, n_1, \ldots, n_k)$ tiene polinomio de independencia log-cóncavo.

A continuación se presentan algunos ejemplos de grafos con vértice ancla.

3.1.1. Puntos

Sea w el único vértice de un grafo $G = K_1$, entonces $I(G-w; x) = 1 \lesssim 1 + x = I(G; x)$, así por el corolario 3.1.3 tenemos que para cualquier sucesión de enteros positivos $n_1, n_2, \ldots, n_k$, el árbol $\mathfrak{B}(K_1, n_1, n_2, \ldots, n_k)$ tiene polinomio de independencia log-cóncavo.

En la figura 3.2 se puede ver el grafo $\mathfrak{B}(K_1, \omega, 4, 1, 1, 2, 2)$.

3.1.2. Caminos

Dado n un entero no negativo y P_n el camino con n vértices. Denotamos por p_n al polinomio de independencia de P_n.

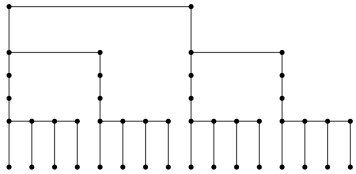


Figura 3.2: Árbol $\mathfrak{B}(K_1, \omega, 4, 1, 1, 2, 2)$.

Lema 3.1.3. Sea n un entero positivo, entonces

i) $p_{n-1} \lesssim p_n$, para $n \geq 1$;

ii) $p_{n-2} \lesssim p_n$, para $n \geq 2$.

Proposición 3.1.1. Sea $n \geq 2$ y v el vértice central de un camino P_{2n}. Entonces

$$I(P_{2n} - v; x) \lesssim I(P_{2n}; x).$$

Corolario 3.1.4. Sea v el vértice central de un camino P_{2n}, donde $n \geq 2$. Entonces, para cualquier sucesión de enteros positivos, el árbol $\mathfrak{B}(P_{2n}, v, n_1, n_2, \ldots, n_k)$ tiene polinomio de independencia log-cóncavo. En particular los árboles tipo estrella $\mathfrak{B}(P_{2n}, v, 1, 1, \ldots, 1)$ tienen polinomio de independencia log-cóncavo.

En la figura 3.3 se puede ver el árbol tipo estrella $\mathfrak{B}(P_{2n}, v, 1, 1, \ldots, 1)$ para enteros arbitrarios n y k.

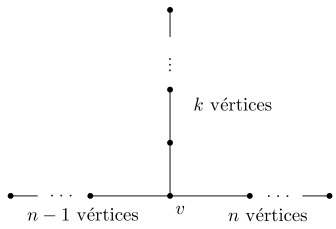


Figura 3.3: Grafos tipo estrella $\mathfrak{B}(P_{2n}, v, 1, \ldots, 1)$ para enteros arbitrarios n y k.

3.2. Aplicaciones a árboles de Fibonnacci

Sea $\{F_n\}_{n\geq 0}$ la familia de árboles de Fibonacci y p_n el polinomio de independencia del árbol de Fibonacci F_n, entonces para $n \geq 3$

$$p_{n+1} = p_{n-1}p_n + xp_{n-2}^2 p_{n-3}). \tag{3.4}$$

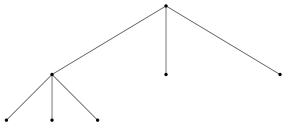


Figura 3.4: Árbol de Tribonacci $\mathcal{T}_4$

Lema 3.2.1. Si $p_{n-1}, p_n \in \mathcal{L}$ y $n \geq 3$. Entonces, $p_{n-2}^2 p_{n-3} \lesssim p_n(x)$ implica $p_n(x)p_{n-1}(x) \lesssim p_{n+1}$.

Teorema 3.2.1. Sea $p_n = I(F_n; x)$, $n \geq 0$. Entonces para $n \geq 3$,

$$p_n \in \mathcal{L} \text{ y } p_{n-2}^2 p_{n-3} \lesssim p_n. \tag{3.5}$$

Con esto hemos probado que el polinomio de independencia de los árboles de Fibonacci es log-cóncavo pero además tenemos información adicional.

Corolario 3.2.1. [4] Sea w_n la raíz del árbol de Fibonacci F_n,

i) la raíz w_{n+1} es un vértice ancla de F_{n+1} para $n \geq 3$,

ii) para cualquier sucesión de enteros positivos $k_1, k_2, \ldots, k_m$, el polinomio de independencia de $\mathfrak{B}(F_{n+1}, w_{n+1}, k_1, k_2, \ldots, k_m)$ es log-cóncavo para $n \geq 3$.

En el capítulo anterior también exploramos el concepto de sincronía parcial que nos permite demostrar mediante otros métodos la unimodalidad del polinomio de independencia de los árboles de Fibonacci, pero además nos permite construir otras generalizaciones de los mismos.

Teorema 3.2.2. Para $n \geq 0$, el polinomio de independecia de los árboles de Fibonacci F_n es log-cóncavo.

Demostración. Para $n = 0, 1$, el resultado es obvio. Para $n \geq 2$ es suficiente probar que cada factor $\hat{p}_i$ en la ecuación (1.8) del teorema 1.4.1 es log-cóncavo. Cálculos directos muestran que

$$\hat{p}_i \sim_p x\hat{p}_{i-2}, \hat{p}_i \sim_p x\hat{p}_{i-1}, \text{ y } \hat{p}_i \in \mathcal{L} \tag{3.6}$$

para $i = 2, 3, 4$. Además tenemos que p_i cumple la recurrencia del lema 2.3.1, entonces $\hat{p}_i \in \mathcal{L}$. ■

La primera generalización será la que surge naturalmente de agregar un grafo más a las condiciones iniciales para obtener un árbol de Tribonacci como se muestra en la figura 3.4.

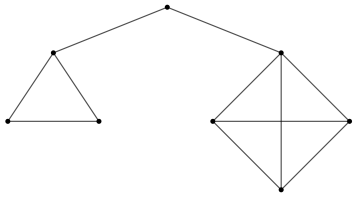


Figura 3.5: Grafo tipo Fibonacci $\mathfrak{T}_3$ con condiciones iniciales K_3 y K_4

Teorema 3.2.3. Para $n \geq 1$ el polinomio de independencia del árbol de Tribonacci $\mathcal{T}_n$ is log-cóncavo.

Demostración. Para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ cálculo directos verifican esta propiedad. Para $n \geq 6$ es suficiente probar que cada $\bar{p}_i$, for $i \geq 4$ en la ecuación (1.11) del teorema 1.5.2, es log-cóncavo. Podemos probar que (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) se cumplen para $i = 6, ..., 11$. Entonces, el lema 2.3.2 muestra que $\bar{p}_i \in \mathcal{L}$ para cada $i \geq 6$, además cálculos directos muestran que $\bar{p}_4, \bar{p}_5 \in \mathcal{L}$. Finalmente de la (1.11) en el teorema 1.5.2, $p_n \in \mathcal{L}$ para $n \geq 7$. ■

La segunda generalización propuesta son los grafos tipo Fibonacci (ver figura 3.5) que definimos en el capítulo 1. En este caso para verificar que su polinomio de independencia es log-concavo basta probar que cada factor q_i en la ecuación (1.24) del teorema 1.5.3 es log-cóncavo. Note que $\frac{q_1}{q_0} = I(H; x)$ y el lema 2.3.1 nos da las condiciones bajo las cuales cada factor q_i es log-cóncavo. Con estas consideraciones obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.4. Si $I(H; x) \in \mathcal{L}$ y $q_n \sim_p xq_{n-2}$, $q_n \sim_p xq_{n-1}$ y $q_n \in \mathcal{L}$ se cumplen para $n = 2, 3, 4$. Entonces para $n \geq 1$, el polinomio de independencia p_n del grafo tipo Fibonacci $\mathfrak{T}_n$ con condiciones iniciales G y H es log-cóncavo.

3.3. Aplicaciones a árboles de caminos estables

Sea $T_0 = T^{<}_{K_3,1}$ el árbol de caminos estables de K_3 y $T_1 = T^{<}_{\mathcal{K}_3,0}$ donde $\mathcal{K}_3$ es el grafo obtenido de agregar un vértice 0 a K_3 y unir 0 y 1 por una arista.

Ahora definimos $T_n = T^{<}_{\mathcal{K}_{3_{n-1}}^{-}(0),0}$ el árbol de caminos estables de la concatenación $n-1$ de $\mathcal{K}_3$ a través de 0, en la figura 3.6 se puede ver el árbol $T^{<}_{\mathcal{K}_{3_4}^{-}(0),0}$. Haciendo uso de la factorización probada en [6] es posible

demostrar que esta familia de árboles tiene polinomio de independencia log-cóncavo.

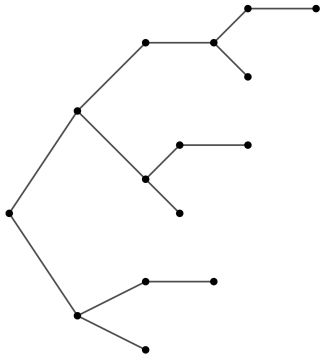


Figura 3.6: Árbol $T^{<}_{\mathcal{K}_{3_4^-}(0),0}$.

Sean $p_n = I(\mathcal{K}_{3n}^-(0); x)$ para $n \geq 1$ y $p_0 = I(K_3; x)$, por el lema 1.4.2 se cumple que

$$p_n = p_0(p_{n-1} + x(1+2x)p_{n-2}) \text{ para } n \geq 2. \tag{3.7}$$

Usaremos esta fórmula para encontrar la factorización de $I(T_n; x)$ propuesta en [6]

Teorema 3.3.1. Sea T_n la familia árboles definidos anteriormente, entonces

$$I(T_n; x) = p_n(1+x)^n, \text{ para } n \geq 1. \tag{3.8}$$

Demostración. Para $n = 1, 2$ cálculos directos muestran que se cumple la ecuación (3.8). Ahora para demostrar la fórmula general procederemos por inducción. Denotemos por $t_n = I(T_n; 0)$ para $x \geq 0$; sabemos que $t_0 = p_0(1+x)$, entonces

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1}t_0 + xt_{n-2}t_0(1+2x)(1+x) \text{ (por el lema 1.4.1)} \\ &= p_{n-1}(1+x)^{n-1}p_0(1+x) + xp_{n-2}(1+x)^{n-2}p_0(1+x)(1+2x)(1+x) \\ &= (1+x)^n(p_{n-1} + x(1+2x)p_{n-2}) \\ &= p_n(1+x)^n \end{aligned}$$

■

Para verificar que $t_n \in \mathcal{L}$ solo necesitamos probar que $p_n \in \mathcal{L}$ para $n \geq 0$, en ese sentido tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3.2. Sean $p_n = I(\mathcal{K}_{3_n}^-(0); x)$ para $n \geq 1$ y $p_0 = I(K_3; x)$, entonces $p_n \in \mathcal{L}$.

Demostración. Note que $0 \in \mathcal{K}_{3_n}^-(0)$ es un vértice ancla, entonces $p_n = I(\mathcal{K}_{3_n}^-(0); x) = I(\mathcal{P}(K_3, \omega, n); x) \in \mathcal{L}$ por el corolario 3.1.1 ■

Una consecuencia directa de este teorema es la log-concavidad de la familia de polinomios t_n.

Corolario 3.3.1. $T_n = T^{<}_{\mathcal{K}_{3_{n-1}}^-(0),0}$, entonces $I(T_n; x) \in \mathcal{L}$.

Podemos generalizar este proceso para obtener las condiciones que debe cumplir un grafo G de modo que el árbol de caminos estables de las n-concatenaciones de G tenga polinomio de independecia log-cóncavo.

Dado G un grafo con un orden sobre su conjunto de vértices, para simplificar pensemos que sus vértices son un subconjunto de $\mathbb{N}$. Sea $u = 1 \in V(G)$ y $v = 0$ un nuevo vértice que agregamos a G a través de la arista $(0, 1)$, para obtener $\mathcal{G}$.

Denotemos por $T_n = T^{<}_{\mathcal{G}_n, v}$ donde $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}_n^-(v)$ y $\mathcal{G}_0 = G$. Finalmente denotemos por $t_n = I(T_n; x)$.

Entonces por el lema 1.4.1 tenemos que

$$t_n = t_{n-1}t_0 + xt_{n-2}t_0t_0', \text{ donde } t_0' = I(T^{<}_{G,u} - u; x). \tag{3.9}$$

Si además denotamos por $p_n = I(\mathcal{G}_n; x)$ y $p_0' = I(G - u; x)$, por el teorema 1.4.3 tenemos que existen g_n y g_0' tales que $t_n = p_n g_n$ para cada $n \geq 0$ y $t_0' = p_0' g_0'$. Con todo lo anterior tenemos el resultado siguiente

Teorema 3.3.3. Sea la familia de grafos $\mathcal{G}_i$ construida anteriormente. Si $g_0 \in \mathcal{L}$, $g_0 = g_1 = g_0'$ y $u \in V(G)$ es un vértice ancla, entonces $g_n = g_0^n$, $g_n \in \mathcal{L}$ y $t_n \in \mathcal{L}$ para cada $n \geq 0$.

Demostración. Sabemos (por el lema 1.4.2) que para $n \geq 0$

$$p_n = p_0(p_{n-1} + xp_0'p_{n-2}) \tag{3.10}$$

y por la ecuación (3.9) $t_2 = t_1t_0 + xt_0t_0'$, si sustituimos $t_i = p_ig_i$ para $i = 0, 1, 2$ y $t_0' = p_0'g_0'$ obtenemos $t_2 = p_1g_1p_0g_0 + xp_0g_0p_0'g_0'$. Ahora usando la hipótesis

$$p_2g_2 = p_0(p_1 + xp_0p_0')g_1g_0 = p_2g_0^2 \tag{3.11}$$

de donde $g_2 = g_0^2 \in \mathcal{L}$. Ahora supongamos que para $n \geq 3$ $g_n = g_0^n$ y $g_n \in \mathcal{L}$, entonces

$$p_{n+1}g_{n+1} = t_{n+1} = t_nt_0 + xt_{n-1}t_0t_0' \tag{3.12}$$

sustuimos $t_i = p_i g_i$ y $t_0' = p_0' g_0'$ para obtener

$$p_{n+1}g_{n+1} = p_n g_n p_0 g_0 + x p_{n-1} g_{n-1} p_0 g_0 p_0' g_0' \tag{3.13}$$

ahora por la hipótesis inductiva tenemos

$$p_{n+1}g_{n+1} = p_0(p_n + x p_{n-1} p_0') g_0^n g_0 = p_{n+1} g_0^n g_0 \tag{3.14}$$

de donde $g_{n+1} = g_0^{n+1}$ y $g_{n+1} \in \mathcal{L}$.

Finalmente tanto p_{n+1} como g_{n+1} son log-cóncavos y por lo tanto $t_n \in \mathcal{L}$ para cada $n \geq 0$. ■

Para poder aplicar el teorema 3.3.3 primero vamos a verificar que los árboles de caminos estables de los grafos completos cumplen la fórmula recursiva siguiente.

Lema 3.3.1. Si $I(T^{<}_{K_n,0}; x) = t_n$ y $I(K_n; x) = k_n$, entonces

$$t_n = k_n \prod_{i=1}^{n-2} t_i^{n-1-i}. \tag{3.15}$$

Demostración. Note que $t_1 = k_1$ y $t_2 = k_2$. Ahora por el lema 1.4.1 tenemos $t_3 = t_2 t_1 + x t_1 = (k_2 + x) t_1 = k_3 t_1$.

Ahora supongamos que $t_j = p_j \prod_{i=1}^{j-2} t_i^{j-1-i}$ para $1 \leq j < n$. Nueva-

mente por el lema 1.4.1 tenemos que

$$\begin{aligned}
t_n &= \prod_{i=1}^{n-1} t_i + x \prod_{i=1}^{n-2} t_i^{n-1-i} \\
&= t_{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} t_i + x \prod_{i=1}^{n-2} t_i^{n-1-i} \\
&= k_{n-1} \prod_{i=1}^{n-3} t_i^{n-2-i} \prod_{i=1}^{n-2} t_i + x \prod_{i=1}^{n-2} t_i^{n-1-i} \\
&= k_{n-1} t_{n-2} \prod_{i=1}^{n-3} t_i^{n-2-i} \prod_{i=1}^{n-3} t_i + x \prod_{i=1}^{n-2} t_i^{n-1-i} \\
&= k_{n-1} t_{n-2} \prod_{i=1}^{n-3} t_i^{n-1-i} + x \prod_{i=1}^{n-2} t_i^{n-1-i} \\
&= k_{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} t_i^{n-1-i} + x \prod_{i=1}^{n-2} t_i^{n-1-i} \\
&= (k_{n-1} + x) \prod_{i=1}^{n-2} t_i^{n-1-i} \\
&= k_n \prod_{i=1}^{n-2} t_i^{n-1-i}
\end{aligned}$$

■

Con la factorización dada por el lema 3.3.1 podemos verificar que los polinomios de independencia de los árboles de caminos estables de los grafos completos son log-cóncavos.

Lema 3.3.2. El polinomio de independencia $I(T^{<}_{K_n,0}; x) \in \mathcal{L}$ para $n \geq 1$.

Demostración. Recordemos que $I(K_n; x) = 1 + nx \in \mathcal{L}$ para $n \geq 1$.

Para $n = 1, 2$ tenemos que $I(T^{<}_{K_n,0}; x) = I(K_n; x) \in \mathcal{L}$

Ahora para $n \geq 3$, supongamos que $I(T^{<}_{K_i,0}; x)\mathcal{L}$ para $1 \leq i \leq n-1$, además por el lema 3.3.1 tenemos que

$$I(T^{<}_{K_n,0}; x) = I(K_n; x) \prod_{i=1}^{n-2} I(T^{<}_{K_i,0}; x)^{n-1-i},$$

de donde $I(T^{<}_{K_n,0}; x) \in \mathcal{L}$. ■

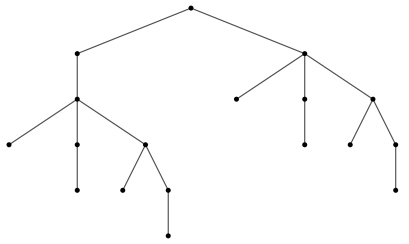


Figura 3.7: Árbol de caminos estables $T^{<}_{\mathcal{K}_{4_1^-}(0),0}$

Finalmente podemos pensar en generalizar la familia presentada en el teorema 3.3.2, si consideramos como casos iniciales $T_0 = T^{<}_{K_m,1}$ y $T'_0 = T^{<}_{K_m,1} - r$ para obtener la familia de grafos $T_n = T^{<}_{\mathcal{K}_{m_{n-1}^-}(0),0}$ (ver figura 3.7), tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3.4. $T_n = T^{<}_{\mathcal{K}_{m_{n-1}^-}(0),0}$, entonces $I(T_n;x) \in \mathcal{L}$.

Demostración. Tenemos que $T_0 = T^{<}_{K_m,1}$, entonces por el lema 3.3.2

$$I(T_0;x) = I(T^{<}_{K_m,1};x) = I(K_m;x)\prod_{i=1}^{m-2} I(T^{<}_{K_i,1};x)^{m-1-i} \in \mathcal{L}$$

Ahora para $T_1 = T^{<}_{\mathcal{K}_{m_0^-}(0),0}$ tenemos que

$$I(T_1;x) = I(T^{<}_{K^{|}_{m},1};x) = I(T_0;x) + xI(T_0 - r_0;x)$$

Note que

$$\begin{aligned} I(T_0 - r_0;x) &= \prod_{i=1}^{m-1} I(T^{<}_{K_i,1};x) \\ &= I(T^{<}_{K_{m-1},1};x)\prod_{i=1}^{m-2} I(T^{<}_{K_i,1};x) \\ &= I(K_{m-1};x)\prod_{i=1}^{m-2} I(T^{<}_{K_i,1};x)^{m-2-i}\prod_{i=1}^{m-2} I(T^{<}_{K_i,1};x) \\ &= I(K_{m-1};x)\prod_{i=1}^{m-2} I(T^{<}_{K_i,1};x)^{m-1-i} \end{aligned}$$

Ahora si en la construcción del teorema 3.3.3 hacemos $G = K_m$, tenemos que $1 \in K_m$ es un vértice ancla (en general cualquier vértice de K_m cumple esta propiedad) y además $g_0 = g_0' = g_1 = \prod_{i=1}^{m-2} I(T^{<}_{K_i,1}; x)^{m-1-i} \in \mathcal{L}$ por el lema 3.3.2. Finalmente tenemos que $I(T_n; x) \in \mathcal{L}$ para cada $n \geq 0$. ■

Conclusiones y trabajo futuro

Como mencionamos anteriormente en 1987 Alavi et. al. se preguntaron si el polinomio de independencia de cualquier árbol es unimodal [1]. Atacar este problema directamente no es una tarea sencilla debido a la variedad de grafos incluidos dentro de esta conjetura.

Al estudiar una variedad tan amplia de familias de árboles no siempre es posible determinar una forma de calcular el polinomio de independencia. Por lo que en muchos casos nos concentramos en probar la unimodalidad de familias de árboles que tengan propiedades en común.

En este trabajo haciendo uso de conceptos como sincronía parcial, sincronía y dominación radial. Estudiamos la log-concavidad de polinomios de independencia de familias de árboles, o grafos relacionados, cuya construcción nos permite determinar fórmulas para dichos polinomios.

Nos concentramos en la log-concavidad aprovechando que sabemos que cualquier polonimio log-cóncavo con coeficientes positivos y sin ceros internos es también unimodal. Para nuestro interés los polinomios de independencia son polinomios sin ceros internos y con coeficientes positivos.

Hemos verificado la log-concavidad de árboles de Fibonacci y Tribonacci, además de una generalización de los primeros que no necesariamente son árboles. Para esto aprovechamos la relación existente entre la sincronía parcial y la log-concavidad.

Anteriormente definimos el concepto de vértice ancla, para verificar que el polinomio de independencia de una concatenación de un grafo (con algunas restricciones) a través de su vértice ancla es log-cóncavo. Ahora combinamos este concepto con la construcción del árbol de cami-

nos estables de un grafo (ver [6]), para determinar que el polinomio de independencia del árbol de caminos estables de algunas concatenaciones es también log-cóncavo bajo ciertas condiciones.

Nuestro objetivo es seguir trabajando en la dirección de determinar la unimodalidad de familias de árboles para atacar la conjetura de Alavi et. al.de manera parcial. Otro de nuestros objetivos es construir familias de árboles cuyo polinomio de independencia sea log-cóncavo.

Bibliografía

[1] Alavi Y., Erdös P., Malde J., Schwenk A. J. (1987). *The vertex independence sequence of a graph is not constrained.* Congressus Numerantium 58, 15-23.

[2] Arocha J. L. (1984). *Propiedades del polinomio independiente de un grafo.* Revista Ciencias Matemáticas, 3, 103-110.

[3] Bautista-Ramos C. y Guillén-Galván C. (2012). *Fibonacci Numbers of Generalized Zykov Sums.* Journal of Integer Sequences, 15, 1-22.

[4] Bautista C., Guillén C., Gómez P. A. (2019). *Log-concavity of some independence polynomials via a partial ordering.*, Discrete Mathematics 342, 18-28.

[5] Bautista C., Guillén C., Gómez P. A. (2020). *Independence polynomials of Fibonacci Trees are log-concave.*, The Fibonacci Quarterly, Vol. 58, Number 1, 51-54.

[6] Bencs F. (2018). *On trees with real rooted independence polynomial.*, Discrete Mathematics 341, 3321-3330.

[7] Bondy J. A. y Murty U. S. R. (2008). *Graph Theory.* Estados Unidos: Springer.

[8] Brown J. I., Dilcher K. y Nowakowski R. J. (2000). *Roots of Independence Polynomials of Well Covered Graphs.* Journal of Algebraic Combinatorics, 11, 197-210.

[9] Brown J. I., Hickman C. A. y Nowakowski R. J. (2003). *The Independence Fractal of a Graph.* Journal of Combinatorial Theory, B 87, 209-230.

[10] Brown J. I., Hickman C. A. y Nowakowski R. J. (2004). *On the Location of Roots of Independence polynomials.* Journal of Algebraic Combinatorics, 19, 273-282.

[11] Brown J. I., Hickman C. A., Thomas H. y Wagner D. G. (2001). *Bounding the Roots of the Independence Polynomials.* Ars Combin., 58, 113-120.

[12] Diestel R. (2005). *Graph Theory.* Estados Unidos: Springer-Verlag Heidelberg.

[13] Galvin D. y Hilyard J. (2017). *The independent set sequence of some families of trees.* Revisado el 24 de octubre de 2017, de https://arxiv.org/pdf/1701.02204.pdf

[14] Gross J. L., Mansour T., Tucker T. W. y Wang D. G. L. (2015). *Log-concavity of combinations of sequences and applications to genus distributions.* SIAM Journal of Discrete Math., Vol. 29, No. 2, 1002-1029.

[15] Hamidoune Y. O. (1990). *On the number of independent k-sets in a Claw Free Grap.* Journal of Combinatorial Theory, 50, 241-244.

[16] Harary F., Schwenk A. J., (1973) *The number of caterpillars.* Discrete Math. 6, 359-365.

[17] Heilmann O. L. y Lieb E. H. (1972). *Theory of Monomer-Dimer Systems.* Commun. math. Phys., 25, 190-232.

[18] Heilmann C. y Xueliang L. (1994). *Clique Polynomials and Independent Set Polynomials of Graphs.* Discrete Mathematics, 125, 219-228.

[19] Hu H., Wang D. G. L., Zhao F. y Xhao T. (2017). *Convolution preserves partial synchronicity of log-concave sequences.* Mathematical Inequalities and Applications, vol. 20, no. 1, 91-103.

[20] Levit V. E. y Mandrescu E. (2006). *Independence Polynomials of Well-Covered Graphs: Generic Counterexamples for the Unimodality Conjecture.* European Journal of Combinatorics, 27, 2931-939.

[21] Levit V. E. y Mandrescu E. (2003). *On unimodality of independence polynomial of some Well-covered trees.* Discrete Mathematics and Theorical Computer Science, 2731, 237-256.

[22] Levit V. E. y Mandrescu E. (2005). *The independence polynomial of a graph - a survey.* Proceedings of the 1st International Conference on Algebraic Informatics, 233-254.

[23] Mandrescu E. (2009). *Boulding Graphs Whose Independence Polynomials Have Only Real Roots.* Graph and Combinatorics, 25, 545-556.

[24] Mandrescu E. y Spivak A. (2016) *Maximal trees with log-concave independence polynomials.* Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, vol. 22, No. 2, 44-53.

[25] Song L., Staton W. y Wei B. (2012). *Independence Polynomial of some Compound Graphs.* Discrete Applied Mathematics, 160, 657-663.

[26] Stanley R. (1989). *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics and geometry.* Graph theory and its applications: East and West, Ann. New York Acad. Sci., 576, New York, 500-535.

[27] Stanley R. (1980). *Unimodal sequences arrising from Lie Algebras.*, Young Day Proceeding, Dekker, New York/Basel, 127-136.

[28] Wang Y., Zhu B. X. (2011). *On the unimodality of independence polynomials of some graphs* European Journal of Combinatorics, 32, 10-20.

[29] Zhu Z. F. (2007). *The unimodality of independence polynomials of some graphs.*, Australasian Journal of Combinatorics, 38, 27-33.