Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Aproximación a la Derivada Generalizada

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Actuaría

por

Enrique Pulido Gómez

Asesorado por

Dr. Andrés Fraguela Collar

Dr. José M. Sigarreta

Puebla Pue.
Octubre de 2021

Título: Aproximación a la Derivada Generalizada
Estudiante: ENRIQUE PULIDO GÓMEZ

COMITÉ

Dr. José Asunción Hernández
Presidente

Dr. Moisés Soto Bajo
Secretario

Dr. José M. Sigarreta Almira
Vocal

Dr. Andrés Fraguela Collar
Asesor

Agradecimientos

A mis directores de tesis el Dr. Andrés Fraguela Collar y el Dr. José María Sigarreta Almira por todo su apoyo y dedicación en la elaboración y revisión de este trabajo.

A mis padres Enrique Pulido Galán, Olga Gómez Morales y mi hermana Evelyn Pulido por todo su apoyo incondicional, sus consejos y toda la motivación que me han dado para poder superarme.

A los miembros del jurado Dr. José Asunción Hernández, el Dr. Moisés Soto Bajo y Dr. José María Sigarreta Almira por dedicar su tiempo y realizar las sugerencias para la mejora de este trabajo.

A todos mis amigos, profesores y personas que influyeron en mi formación personal y profesional.

Dedicatoria

A mi familia, pareja, amigos y seres queridos.

Índice general

Resumen

A lo largo de los siglos, la Matemática ha jugado un papel crucial en el desarrollo de la civilización humana, pues entre otros alcances, ha permitido describir y predecir sucesos del mundo real, mediante representaciones matemáticas. En este punto, es válido enfatizar la importancia del Cálculo Diferencial e Integral para el estudio de muchas de las leyes de la naturaleza.

En el presente trabajo se expone una aproximación a la derivada generalizada (conformable y no conformable), de orden fraccionario para $0 < \alpha < 1$. Bajo esta perspectiva se generalizan algunos resultados del Cálculo clásico (Teorema de Rolle, Teorema del Valor Medio, Teorema de Flett, entre otros). En la misma dirección, se muestran algunas propiedades básicas del operador integral generalizado para $0 < \alpha < 1$. Además, se aplica la teoría desarrollada para estudiar un modelo generalizado de Gompertz asociado a un problema concreto de crecimiento económico.

Capítulo 1

Introducción

Antecedentes, motivación y planteamiento del problema

Los orígenes del Cálculo Fraccionario se remontan a Newton y Leibniz, por lo que esta rama del Análisis Matemático puede ser considerada tan antigua como el Cálculo clásico (ver [37]). El Cálculo Fraccionario extiende la derivación e integración a órdenes no enteros arbitrarios, es decir, órdenes reales o incluso complejos. Dicho cálculo en la actualidad, es utilizado con éxito para modelar una amplia gama de fenómenos que ocurren en Física, Economía y la ciencia en general, ya que se ha observado que la evolución temporal o espacial de muchos procesos reales puede describirse con mayor precisión cuando se introducen derivadas de orden fraccionario (ver [8], [9], [26], [34], [39]).
La primera referencia sobre el Cálculo Fraccionario se remonta al 30 de septiembre de 1695 [29], cuando el Marqués de L'Hospital dirige una carta a Leibniz preguntándole de la notación que usó para la derivada enésima de cierta función $f(t)$,

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n}, \tag{1.1}$$

y por el significado que tendría dicha notación en el caso de ser $n = 1/2$. Leibniz responde de manera visionaria: "esta aparente paradoja permitirá en el futuro extraer interesantes consecuencias".

En 1730 Euler propone las derivadas como tasa entre funciones y variables que pueden expresarse algebraicamente, bajo esta perspectiva, la solución para órdenes no enteros es el uso de interpolaciones.

En 1738 aparece la primera extensión de la derivada ordinaria en un artículo escrito por Euler [10], observando que considerar la derivada $\frac{d^n}{dx^n}$ de la potencia x^m tenía sentido para p fraccionario. Partiendo de $y = x^m$, procedió a determinar su formulación para la derivada n-ésima:

$$\begin{aligned}\frac{d^n y}{dx^n} &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}{1\cdot 2\cdot 3\cdots (m-n)}x^{m-n}\\ &= \frac{\displaystyle\int_0^1 (-\ln t)^m\,dt}{\displaystyle\int_0^1 (-\ln t)^{m-n}\,dt}x^{m-n}.\end{aligned} \tag{1.2}$$

De esta forma, extiende (1.2) para el caso del orden fraccionario:

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{\displaystyle\int_0^1 (-\ln t)^m\,dt}{\displaystyle\int_0^1 (-\ln t)^{m-p}\,dt}x^{m-p}, \quad m > p,\ p\in\mathbb{R}^+. \tag{1.3}$$

La función Gamma, denotada por Γ, es una generalización de la función factorial para el plano complejo.

Definición 1. *Sea $z\in\mathbb{C}$, $\quad Re(z) > 0$. La función Gamma es definida como*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt. \tag{1.4}$$

En 1819, Lacroix [27], siguiendo la idea de Euler, desarrolla la derivada de la función potencia $y = x^m$ utilizando la notación de Legendre para la función Gamma.

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-p+1)}x^{m-p}, \tag{1.5}$$

donde para el caso particular $y = x$ y $p = 1/2$ obtiene:

$$\frac{d^{1/2}y}{dt^{1/2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}, \tag{1.6}$$

puesto que $\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Este resultado coincide con el que se obtendría utilizando la actual definición de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

Posteriormente, Fourier en 1822 [17] sugirió la utilización de su representación integral para $f(x)$, dando lugar a una definición de derivada fraccionaria.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\alpha)\int_{-\infty}^\infty \cos(p(x-\alpha))dp\ d\alpha, \tag{1.7}$$

donde

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos(p(x-\alpha)) = p^n \cos\left[p(x-\alpha) + n\frac{\pi}{2}\right]. \tag{1.8}$$

Reemplazando n por un u arbitrario, obtiene una generalización para el caso ordinario:

$$\frac{d^u}{dx^u}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} p^u \cos\left[p(x-\alpha) + u\frac{\pi}{2}\right] dp. \tag{1.9}$$

Abel, en 1823 [2, 3], presenta una aplicación concreta al denominado Cálculo Fraccionario, al utilizar la derivada de orden 1/2 para resolver la ecuación integral

$$\int_0^x (x-t)^{-1/2} f(t)dt = k, \tag{1.10}$$

resultante de la formulación del *problema de la Tautócrona*, presentado por Huygens en 1673.

La Ecuación (1.10) se conoce como *Ecuación Integral de Abel*, que salvo por el factor multiplicativo $\frac{1}{\Gamma(1/2)}$, corresponde a la integral fraccionaria de orden 1/2 de Riemann-Liuoville de la función $f(x)$. Abel escribió el lado izquierdo como $\sqrt{\pi}[\frac{d^{-1/2}}{dx^{-1/2}}]f(x)$, por lo que trabajó con ambos lados de la ecuación como

$$\sqrt{\pi}f(x) = \left[\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}\right]k.$$

La primera ecuación integral de la historia había sido resuelta. Se observan dos hechos: se considera la suma de los órdenes y la derivada de una constante no es cero.

El trabajo de Abel fue tan inspirador para Liuoville, quien en 1832 [32, 31] definió la derivada fraccionaria partiendo del conocido resultado para las derivadas de orden entero n de la función exponencial

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{ax} = a^n e^{ax}, \tag{1.11}$$

donde $a \in \mathbb{R}$, extendiendo luego este resultado para las derivadas de orden fraccionario p

$$\frac{d^p}{dx^p}e^{ax} = a^p e^{ax}. \tag{1.12}$$

En la misma dirección, Liouville propone que la derivada de orden arbitrario de una función que pueda expresarse como la serie de funciones exponenciales del tipo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \tag{1.13}$$

tiene la forma

$$\frac{d^p f}{dx^p} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^p e^{a_n x}. \tag{1.14}$$

Esta fórmula se conoce como la *primera definición de la derivada fraccionaria de Liouville*, con las desventajas de ser sólo aplicable a funciones expresables en la forma (1.13) y para aquellos valores de p para los cuales la serie (1.14) converge. Liouville adoptó otro método con el fin de definir la derivada de orden arbitrario para las funciones del tipo x^{-a}, con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $x > 0$. Considerando la integral

$$I = \int_0^\infty u^{a-1} e^{-xu} du, \tag{1.15}$$

obtuvo

$$x^{-a} \;=\; \frac{1}{\Gamma(a)} I. \tag{1.16}$$

Aplicando el operador fraccionario $\dfrac{d^p}{dx^p}$ a ambos miembros de (1.16), Liouville obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d^p}{dx^p} x^{-a} &= \frac{(-1)^p}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a+p-1} e^{-xu} du \\ &= \frac{(-1)^p \Gamma(a+p)}{\Gamma(a)} x^{-(a+p)}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Llegando así, a su *segunda definición de derivada fraccionaria.*

Pero ambas definiciones eran de corto alcance, debido a ser válidas sólo para un conjunto restringido de funciones. Luego de varios intentos para definir derivadas fraccionarias, su atención se desplazó hacia la integral fraccionaria, pensando quizás que de ésta se deduciría la definición de derivada como la de su operador inverso izquierdo, en analogía al caso ordinario. En 1832, Liouville [32] obtuvo la fórmula

$$\frac{d^{-p}}{dx^{-p}} f(x) = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(p)} \int_0^\infty \tau^{p-1} f(x+\tau) d\tau, \qquad Re(p) > 0, \tag{1.18}$$

la cual, salvo por el término $(-1)^p$, es conocida hoy en día como la *definición de Liouville por la derecha de la integral fraccionaria de orden p.*

En 1832, Liouville escribió acerca de una generalización de la regla de Leibniz sobre la enésima derivada de un producto:

$$D^v f(x) g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{v}{n} D^n f(x) D^{v-n} g(x),$$

donde D^n es el operador diferencial ordinario de orden n, D^{v-n} el operador fraccionario y $\binom{v}{n}$ el coeficiente binomial expresado en términos de la función Gamma.

Liouville amplió los coeficientes en (1.14) como:

$$a_n^v = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^v}(1-e^{-ha_n})^v, a_n \geq 0,$$

$$(-1)^v a_n^v = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^v}(1-e^{ha_n})^v, a_n < 0.$$

Y al sustituirlas en la (1.14), se obtiene:

$$\frac{d^v}{dx^v}f(x) = \lim_{h\to 0}\{\frac{1}{h^v}\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^m\binom{v}{n}f(x-mh)]\},$$

$$\frac{d^v}{dx^v}f(x) = (-1)^v\lim_{h\to 0}\{\frac{1}{h^v}\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^m\binom{v}{n}f(x+mh)]\}$$

Estas fórmulas serían retomadas por Grünwald y Letnikov.

La actual definición de *integral fraccionaria de Riemann-Liouville* se debe al trabajo de N. Ya. Sonine en 1870 [42], pero fue Laurent [28] quien en 1884 llegó a su formulación definitiva. Para ello, ambos autores partieron de la conocida *fórmula de Cauchy para integral iterada* (1.19).

$$\begin{aligned} \frac{d^{-n}f(x)}{dx^{-n}} &= I_a^n f(x) \\ &= \int_a^x \int_a^{\tau_1} \cdots \int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau)d\tau d\tau_{n-1}d\tau_{n-2}\cdots d\tau_2 d\tau_1 \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Generalizando el factorial a través de la función Gamma, obtuvieron:

$$\frac{d^{-\alpha}f(x)}{dx^{-\alpha}} = I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \quad Re(\alpha) > 0. \tag{1.20}$$

Definición 2. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ y $n = \lceil \alpha \rceil$. El operador diferencial de Riemann-Liouville de orden fraccionario α por la izquierda y por la derecha se definen por* *(ver [26])*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha}_{a+}f(x) &= D^n I^{n-\alpha}_{a+} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} D^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n+\alpha}} dt. \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha}_{b-}f(x) &= (-D)^n I^{n-\alpha}_{b-} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (-D)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n+\alpha}} dt. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Dado $s \in \mathbb{R}$, denotamos como $\lceil s \rceil$ la *parte entera mayor* de s, i.e., el menor entero mayor o igual a s, por el contrario $\lfloor s \rfloor$ como la *parte entera menor* de s, o sea, el mayor entero menor o igual a s.

Definición 3. *Sea $\alpha, a \in \mathbb{R}$ con $\alpha, a > 0$ y $n = \lceil \alpha \rceil$ el operador diferencial fraccionario de Caputo de orden α se define por*

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\alpha}_{a}f(x) &= I^{n-\alpha}_{a+} D^n f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{D^n f(t)}{(a-t)^{1-n+\alpha}} dt. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Riemann desarrolló su teoría del Cálculo Fraccionario cuando preparaba su tesis doctoral, pero su obra fue publicada posteriormente en 1892. Buscó una generalización de la serie de Taylor, en la que definió el n-ésimo coeficiente diferencial de una función $f(x)$ como el coeficiente que acompaña a h^n en la expansión de $f(x+h)$ con potencias enteras de h. Así, generaliza esta definición a potencias no enteras y sugiere que

$$f(x+h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n+\alpha} (\partial_x^{n+\alpha} f)(x) h^{n+\alpha}, \tag{1.24}$$

es válido para $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$. El factor $c_{n+\alpha}$ está determinado por la condición $\partial^{\beta}(\partial^{\alpha} f) = \partial^{\beta+\alpha} f$ y encontró que ésta era $\frac{1}{\Gamma(n+\alpha+1)}$. Riemann derivó entonces la expresión (1.24) para α negativo:

$$\partial^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_k^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} K_n \frac{x^{-\alpha-n}}{\Gamma(-n-\alpha+1)}, \tag{1.25}$$

donde k, K_n son constantes.

En 1867, Anton Karl Grünwald [20], Aleksey Vasilievich Letnikov [30] en 1868, proponen una nueva definición de derivada fraccionaria partiendo de la definición clásica de derivada e iterando dicho operador n veces:

$$D^n f(x) = \lim_{h \to 0} h^{-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x-kh), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.26}$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}. \tag{1.27}$$

Esto les permitió obtener la derivada fraccionaria de orden $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} {}^{GL}D_a^{\alpha} f(x) &= \lim_{h\to 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh), & (1.28)\\ {}^{GL}D_a^{\alpha} f(x) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x-a}{n}\right)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f\left[x - k\left(\frac{x-a}{n}\right)\right], & (1.29) \end{aligned}$$

donde $a < x$.

Uno de los elementos de mayor relevancia que justifican el estudio de las derivadas fraccionarias locales es que las derivadas fraccionarias clásicas (Caputo, Riemann-Leuville y Grünwald-Letnikov) no captan toda la información local. Por otro lado, las derivadas fraccionarias clásicas D^{α} no satisfacen las siguientes propiedades:

1. La regla del producto (cociente) para dos funciones:

$$D^{\alpha}(fg) = gD^{\alpha}(f) + fD^{\alpha}(g).$$

$$D^{\alpha}(\frac{f}{g}) = \frac{gD^{\alpha}(f) - fD^{\alpha}(g)}{g^2},\ g \neq 0.$$

2. La regla de la cadena para composición de funciones:

$$D^{\alpha}(f \circ g)(t) = D^{\alpha} f(g(t)) D^{\alpha} g(t).$$

3. La regla de índices en general:

$$D^{\alpha} D^{\beta}(f) = D^{\alpha+\beta}(f).$$

En 2014, Khalil publica el artículo: *A new definition of fractional derivative* [23], el cual es considerado por muchos la obra que da comienzo al estudio de la llamada *derivada fraccionaria conformable local*. Así, para una función f, la derivada fraccionaria conformable de orden $\alpha \in (0, 1]$ se define por:

Definición 4. *Dada una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, la "derivada fraccionaria conformable" de f de orden α es definida por*

$$T_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \tag{1.30}$$

para todo $t > 0$, $\alpha \in (0, 1)$. Si f es α-diferenciable en algún intervalo $(0, a)$ con $a > 0$ y $\lim\limits_{t \to 0^+} T_\alpha f(t)$ existe, entonces

$$T_\alpha f(0) = \lim_{t \to 0^+} T_\alpha f(t). \tag{1.31}$$

Además, si la derivada fraccionaria conformable de f de orden α existe, entonces decimos simplemente que f es α-diferenciable.

Definición 5. *Sean $\alpha \in (n, n+1]$, f una función n-diferenciable en t donde $t > 0$. Entonces la derivada fraccionaria conformable de f de orden α es definida como*

$$T_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(t + \varepsilon t^{(\lceil \alpha \rceil - \alpha)}) - f^{(\lceil \alpha \rceil)}(t)}{\varepsilon}. \tag{1.32}$$

En la citada obra ([23]) se muestran los siguientes resultados.

Teorema 6. *Si una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es α-diferenciable en $t_0 > 0$ con $\alpha \in (0, 1]$, entonces f es continua en t_0.*

Teorema 7. *Sean $\alpha \in (0, 1]$ y f, g funciones α-diferenciables en $t > 0$. Entonces*

1. $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$, *para todo $a, b \in \mathbb{R}$.*

2. $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ *para todo $p \in \mathbb{R}$.*

3. $T_\alpha(\lambda) = 0$ *para toda $\lambda \in \mathbb{R}$.*

4. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$.

5. $T_\alpha(\frac{f}{g}) = \dfrac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$ *, para $g \neq 0$.*

6. *Si f es diferenciable, entonces $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha}\frac{df}{dt}(t)$.*

En ese mismo año, Katugampola define una nueva derivada en un artículo titulado: *A new fractional derivative with classical properties* [25], de la siguiente manera:

Definición 8. *Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Entonces la derivada fraccionaria de f de orden α es definida por*

$$\mathcal{D}^{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)}{\varepsilon}, \tag{1.33}$$

para $t > 0$ y $\alpha \in (0,1)$. Si f es α-diferenciable en el intervalo $(0, a)$ con $a > 0$ y $\lim_{t \to 0^+} \mathcal{D}^{\alpha}(f)(t)$ existe, entonces

$$\mathcal{D}^{\alpha}(f)(0) = \lim_{t \to 0^+} \mathcal{D}^{\alpha}(f)(t). \tag{1.34}$$

Se obtienen resultados análogos a los teoremas descritos para el caso de la derivada T_α con este nuevo enfoque.

Luego Karci propone la siguiente definición en un artículo llamado: *Chain rule for fractional order derivatives* [24].

Definición 9. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces la derivada de orden fraccionario α de f se define como*

$$f^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{\alpha}(x+h) - f^{\alpha}(x)}{(x+h)^{\alpha} - x^{\alpha}}. \tag{1.35}$$

Por otro lado, Tallafha en 2015 define una derivada para funciones reales de varias variables en un artículo titulado: *Total and directional fractional derivatives* [43], tomando como base la idea de la derivada de Khalil [23].

Definición 10. *Sean $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función, $\alpha \in (0,1]$, $u \in \mathbb{R}^n$ un vector no nulo y $c \in D_f$. Entonces*

$$D_f^{\alpha} f(c) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(c + t|c \cdot u|^{\alpha-1} u\right) - f(c)}{t}. \tag{1.36}$$

Después Almeida *et. al.*, proponen un nuevo tipo de derivada con un kernel en el siguiente sentido [7]:

Definición 11. *Sea $k : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua no negativa tal que $k(t) \neq 0$ para $t > a$. Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in (0,1)$, decimos que f es α-diferenciable en $t > a$ con respecto al kernel k si el límite*

$$f^{(\alpha)}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon\, k(t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \tag{1.37}$$

existe. La α-derivada en $t = a$ se define por

$$f^{(\alpha)}(a) = \lim_{t \to a^+} f^{(\alpha)}(t), \tag{1.38}$$

si el límite existe.

Los resultados obtenidos con la derivada fraccional conformable de Khalil [23], fueron generalizados por Almeida et. al. en [7]. Notese que $\lim_{\alpha\to 1} D^\alpha f(t) = f'(t)$, es decir, se verifica que $D^\alpha f(t)$ preserva el ángulo de la recta tangente a la curva, hecho que no se satisface en los casos no conformables. Así, en 2018, Nápoles *et. al.* en [19], publican la siguiente derivada local no conformable, abriendo una nueva área de investigación en este sentido, ya que permite obtener resultados no clásicos cuando $\alpha \to 1$.

Definición 12. *Dada una función $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, la N-derivada de f de orden α está definida por*

$$N_1^{(\alpha)} f(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(t+\varepsilon e^{t^{-\alpha}}) - f(t)}{\varepsilon}, \quad t > 0,\ \alpha \in (0,1). \tag{1.39}$$

Si f es α-diferenciable en el intervalo $(0,a)$ y $\lim_{t\to 0^+} N_1^{(\alpha)} f(t)$ existe, entonces $N_1^{(\alpha)} f(0) = \lim_{t\to 0^+} N_1^{(\alpha)} f(t)$.

En el año 2019 se introduce la denominada Derivada Generalizada Local [11] (conformable y no conformable) de la siguiente manera:

Definición 13. *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y una función continua positiva $K(t,\alpha)$ en I, la* derivada *$D_K^\alpha f$ de f de orden α en $t \in I$ es definida por*

$$D_K^\alpha f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\lceil\alpha\rceil}} \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil} (-1)^k \binom{\lceil\alpha\rceil}{k} f\big(t - khK(t,\alpha)\big). \tag{1.40}$$

Si $a = \min\{t \in I\}$ ($b = \max\{t \in I\}$ respectivamente), entonces $D_K^\alpha f(a)$ ($D_K^\alpha f(b)$) es definida con $h \to 0^-$ ($h \to 0^+$ respectivamente) en lugar de $h \to 0$ en el límite.

Si elegimos la función $K(t,\alpha) = t^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}$, entonces obtenemos el siguiente caso particular de D_K^α. Nótese primeramente que $K(t,\alpha) = t^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} = 1$ para cada $\alpha \in \mathbb{N}$.

Definición 14. *Sean I un intervalo $I \subseteq (0,\infty)$, $f : I \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$. La* derivada conformable *$D^\alpha f$ de f de orden α en el punto $t \in I$ es definida por*

$$D^\alpha f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\lceil\alpha\rceil}} \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil} (-1)^k \binom{\lceil\alpha\rceil}{k} f\big(t - kht^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}\big). \tag{1.41}$$

Sabemos por el Cálculo clásico que si f es una función definida en una vecindad del punto t y existe $D^n f(t)$, entonces

$$D^n f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(t-kh). \tag{1.42}$$

La Derivada Generalizada D_K^α, depende de un kernel $K(t,\alpha)$, incluyendo así varias derivadas conformables y no conformables introducidas y estudiadas anteriormente en la literatura científica. Para más información de la derivada generalizada, ver [6, 12, 13, 14, 15, 16, 40].

Cabe resaltar los siguientes casos:

1. Si $\alpha \in (0,1]$ y $K(t,\alpha) = t^{1-\alpha}$, entonces se obtiene la derivada conformable definida en [23], ver [1, 22, 25] para más información.

2. Si $\alpha \in (0,1]$ y $K(t,\alpha) = k(t)^{1-\alpha}$, entonces se obtiene la derivada conformable general definida en [7].

3. Si $\alpha \in (0,1]$ y $K(t,\alpha) = e^{t^{-\alpha}}$, entonces se obtiene la derivada no conformable definida en [19].

En función de lo antes expuesto, el problema de investigación que se resolvió fue el siguiente: **¿Cómo generalizar teoremas del Cálculo clásico para la derivada generalizada (conformable y no conformable)?**

En esta tesis se trabajó con la Definición 13 denominada Derivada Generalizada de orden $\alpha > 0$, en particular con $0 < \alpha \leq 1$. Dicha definición permitió inferir directamente las derivadas conformables y no conformables de cualquier orden positivo y calcular derivadas generalizadas de funciones definidas en cualquier conjunto abierto de la recta real (y no sólo en la semirrecta positiva). Además, en esta tesis se presentan resultados análogos a los del Cálculo clásico en el contexto de la Derivada Generalizada. En tal dirección, los objetivos específicos alcanzados fueron los siguientes:

- Análisis de la evolución histórica de las derivadas fraccionarias clásicas.

- Presentación de resultados análogos a teoremas del Cálculo clásico (Teorema Rolle, Teorema del Valor Medio, Teorema de Flett, entre otros) para la Derivada Generalizada.

La metodología seguida para la investigación, estuvo sustentada en las etapas de trabajo siguientes:

- Aproximación problémica;

- Concreción;

- Representación-Valoración.

La etapa de Aproximación, constó de dos momentos básicos: identificación y formulación del problema de investigación; para hacer explícito el problema de investigación a resolver, hemos llevado a cabo una primera aproximación (identificación) al problema de investigación. Así, en la misma dirección se realizó una nueva revisión bibliográfica exhaustiva, para conocer los nuevos resultados y/o métodos utilizados en el tema y se analizó las posibles técnicas empleadas por otros matemáticos, para enfrentar estas problemáticas. En la etapa de Concreción, se puso en práctica los métodos y estrategias seleccionadas, para la solución de los problemas (teoremas a tratar) delimitados en la primera etapa. En la etapa de Representación-Valoración, se redactó el informe de la tesis teniendo en cuenta los resultados (teoremas tratados) con sus respectivas demostraciones. Así mismo, se valoraron los alcances teórico-prácticos de los resultados de la investigación.

Capítulo 2

Propiedades Básicas de la Derivada Generalizada con $\alpha \in (0,1]$

En este capítulo se muestran las principales propiedades y resultados asociados con los operadores derivada e integral genaralizados con $\alpha \in (0,1]$. Para más información sobre este tema ver [11, 12, 13, 14, 15, 16].

Teorema 15. *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in (0,1]$. Existe $D^1 f$ en el punto $t \in I$, si y sólo si f es D_K^α-diferenciable en t y $D_K^\alpha f(t) = K(t,\alpha) D^1 f(t)$.*

Demostración. Suponemos primero que existe $D^1 f$ en el punto t. Si tomamos $q = hK(t,\alpha)$ en la definición de $D_K^\alpha f$, entonces obtenemos

$$D_K^\alpha f(t) = K(t,\alpha) \lim_{q\to 0} \frac{f(t) - f(t-q)}{q} = K(t,\alpha) f'(t).$$

□

El siguiente resultado contiene algunas propiedades básicas de la derivada D_K^α.

Teorema 16. *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f, g : I \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in (0,1]$. Suponemos que f, g son funciones D_K^α-diferenciables en $t \in I$. Entonces :*

1. *$af + bg$ es D_K^α-diferenciable en t para todo $a, b \in \mathbb{R}$, y $D_K^\alpha(af + bg)(t) = a\, D_K^\alpha f(t) + b\, D_K^\alpha g(t)$.*
2. *fg es D_K^α-diferenciable en t y $D_K^\alpha(fg)(t) = f(t) D_K^\alpha g(t) + g(t) D_K^\alpha f(t)$.*
3. *Si $g(t) \neq 0$, entonces f/g es D_K^α-diferenciable en t y $D_K^\alpha(\frac{f}{g})(t) = \frac{g(t) D_K^\alpha f(t) - f(t) D_K^\alpha g(t)}{g(t)^2}$.*
4. *$D_K^\alpha(\lambda) = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

5. $D_K^\alpha(t^p) = pt^{p-1}K(t,\alpha)$*, para todo* $p \in \mathbb{R}$*.*

Demostración. [1] Por el Teorema 15 $D_K^\alpha(af+bg)(t) = K(t,\alpha)\,\text{lím}_{q\to 0}\frac{(af+bg)(t)-(af+bg)(t-q)}{q}$. Como f, g son D_K^α-diferenciables en t entonces $D_K^\alpha(af+bg)(t) = K(t,\alpha)(\text{lím}_{q\to 0}\frac{(af)(t)-(af)(t-q)}{q} + \text{lím}_{q\to 0}\frac{(bg)(t)-(bg)(t-q)}{q}) = D_K^\alpha(af)(t) + D_K^\alpha(bg)(t)$.

[4] $D_K^\alpha(\lambda)(t) = K(t,\alpha)\,\text{lím}_{q\to 0}\frac{(\lambda)(t)-(\lambda)(t-q)}{q} = 0$.

El Teorema 15 nos da que f, g son funciones diferenciables en t y $D_K^\alpha h(t) = K(t,\alpha)h'(t)$ para alguna función diferenciable h. Estos hechos implican las afirmaciones [2] y [3].

Finalmente, como $f(t) = t^p$ es una función de clase C^∞ en $(0,\infty)$, por el Teorema 15 se sigue que $D_K^\alpha(t^p) = K(t,\alpha)D(t^p)$, lo cual demuestra la afirmación [5].

□

Aunque el Teorema 15 proporciona una forma de obtener $D_K^\alpha f$, desafortunadamente, la regla de índices para derivadas iteradas no se cumple. En esta dirección, proponemos una regla general con el fin de calcular las derivadas generalizadas iteradas.

Teorema 17. *Sean* $I \subseteq (0,\infty)$ *un intervalo,* $t \in I$*,* $f : I \to \mathbb{R}$*,* $n \geq 1$ *y* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in (0,1]$*. Si existe* $f^{(n)}(t)$ *y* $K^{(n-i)}(t,\alpha_i)$ *para* $1 \leq i \leq n-1$ *entonces*

$$D_K^{\alpha_n} \cdots D_K^{\alpha_2} D_K^{\alpha_1} f(t) = K(t,\alpha_n) b_{n-1,1}(t),$$

donde

$$b_{0,m}(t) = f^{(m)}(t), 1 \leq m \leq n,$$

$$b_{k,m}(t) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} K^{(j)}(t,\alpha_k) \times b_{k-1,m+1-j}(t),$$

$1 \leq k \leq n-1$ *,* $1 \leq m \leq n-k$*.*

Demostración. Primero demostraremos por inducción sobre k, que existe $b_{k,m}(t)$ para $1 \leq k \leq n-1$ y $1 \leq m \leq n-k$.

Tenemos para $k = 1$ y $1 \leq m \leq n-1$,

$$b_{1,m}(t) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} K^{(j)}(t,\alpha_1) b_{0,m+1-j}(t) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} K^{(j)}(t,\alpha_1) f^{(m+1-j)}(t).$$

Por hipótesis, $K^{(j)}(t,\alpha_1)$ existe para $1 \leq j \leq m \leq n-1$ y como $m+1-j \leq m+1 \leq n$ entonces $f^{(m+1-j)}(t)$ existe tambien y entonces $b_{1,m}(t)$ existe para $1 \leq m \leq n-1$. Asumimos ahora que la hipótesis de inducción se cumple para $k-1 \geq 1$, i.e. $b_{k-1,m}(t)$

existe para $1 \le m \le n-k+1$, y probemos que $b_{k,m}(t)$ existe para $1 \le m \le n-k$. Tenemos que

$$b_{k,m}(t) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} K^{(j)}(t,\alpha_k) b_{k-1,m+1-j}(t).$$

Por hipótesis, $K^{(j)}(t,\alpha_k)$ existe para $1 \le j \le m \le n-k$ y como $m \le n-k < n-k+1$ entonces $m+1-j \le m+1 \le n-k+1$ y por la hipótesis de inducción tenemos que $b_{k-1,m+1-j}(t)$ existe para $0 \le j \le m$.

Demostraremos la fórmula $D(b_{k,m}) = b_{k,m+1}$ para $1 \le m \le n-k-1$ por inducción sobre $0 \le k \le n-1$. La fórmula trivialmente se mantiene para $k=0$ y $1 \le m \le n-1$. Asumamos que $D(b_{k,m}) = b_{k,m+1}$ para cada $0 \le k$ y $1 \le m \le n-k-1$ con $k < n-1$ y demostraremos que $D(b_{k+1,m}) = b_{k+1,m+1}$ para $1 \le m \le n-k-2$:

$$D(b_{k+1,m}(t)) = D\left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} K^{(i)}(t,\alpha_{k+1}) b_{k,m+1-i}(t)\right) =$$

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \left(K^{(i)}(t,\alpha_{k+1}) D(b_{k,m+1-i}(t)) + K^{(i+1)}(t,\alpha_{k+1}) b_{k,m+1-i}(t)\right) =$$

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \left(K^{(j)}(t,\alpha_{k+1}) b_{k,m+2-j}(t) + \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{j-1} K^{(j)}(t,\alpha_{k+1}) b_{k,m+2-j}(t)\right) =$$

$$\sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} K^{(j)}(t,\alpha_{k+1}) b_{k,m+2-j}(t) = b_{k+1,m+1}(t),$$

con $m+1-j \le m+1 \le n-k-1$.

Probaremos ahora el teorema por inducción sobre n. Si $n=1$ entonces por el Teorema 15 $D_K^{\alpha_1} = K(t,\alpha_1) f'(t) = K(t,\alpha_1) b_{0,1}(t)$, y la fórmula se mantiene en este caso.

Asumimos ahora que la hipótesis de inducción se cumple para $n-1 \ge 1$ y probaremos para n. Por la hipótesis de inducción y el Teorema 15 $D_K^{\alpha_n} D_K^{\alpha_{n-1}} \cdots D_K^{\alpha_1} f(t) = D_K^{\alpha_n}(K(t,\alpha_{n-1}) b_{n-2,1}(t)) = K(t,\alpha_n)[K(t,\alpha_{n-1}) D(b_{n-2,1}(t)) + K'(t,\alpha_{n-1}) b_{n-2,1}(t)] = K(t,\alpha_n)[K(t,\alpha_{n-1}) b_{n-2,2}(t) + K'(t,\alpha_{n-1}) b_{n-2,1}(t)] = K(t,\alpha_n) b_{n-1,1}(t)$,

ya que $1 \le n-(n-2)-1$ y la fórmula se cumple para n.

$\square$

El Teorema 15 y teorema de Fermat del Cálculo clásico permiten obtener la siguiente generalización:

Proposición 18. *Sea f una función con un extremo local en t_0 que sea punto interior. Si f es D_K^α-diferenciable en t_0 para algún $\alpha \in (0,1]$, entonces $D_K^\alpha f(t_0) = 0$.*

Demostración. Supongamos que f es D_K^α-diferenciable en t_0 para $\alpha \in (0,1]$, por lo que:

$$D_K^\alpha f(t_0) = D_K^\alpha f(t_0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(t_0) - f(t_0 - hK(t_0,\alpha))}{h} \geq 0,$$
$$D_K^\alpha f(t_0) = D_K^\alpha f(t_0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(t_0) - f(t_0 - hK(t_0,\alpha))}{h} \leq 0.$$

Por tanto $D_K^\alpha f(t_0) = 0$. □

Un argumento similar al usado en la prueba del Teorema 16 proporciona la regla de la cadena para la derivada generalizada.

Teorema 19. *Sean $\alpha \in (0,1]$, g una función D_K^α-diferenciable en t y f una función diferenciable en $g(t)$. Entonces $f \circ g$ es D_K^α-diferenciable en t y $D_K^\alpha(f \circ g)(t) = f'(g(t))\, D_K^\alpha g(t)$.*

Demostración. Sabemos que g es D_K^α-diferenciable en t, así por el Teorema 15, g es diferenciable en t. Lo anterior nos indica que $f \circ g$ es diferenciable en t, como $\alpha \in (0,1]$, por el Teorema 15 se sigue que $f \circ g$ es D_K^α-diferenciable en t y se satisface la siguiente igualdad:
$$D_K^\alpha(f \circ g)(t) = K(t,\alpha)D(f \circ g)(t) = K(t,\alpha)f'(g(t))g'(t) = f'(g(t))D_K^\alpha(g(t)).$$ □

Teorema 20. *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in (0,1]$. Entonces f es D_K^α-diferenciable en $t \in I$ si y sólo si es D_K^β-diferenciable en t y además*

$$D_K^\alpha f(t) = \Big(\frac{K(t,\alpha)}{K(t,\beta)}\Big) D_K^\beta f(t).$$

Demostración. Si tomamos $q = hK(t,\alpha)$ en la definición de $D_K^\alpha f$, entonces obtenemos

$$\begin{aligned} D_K^\alpha f(t) &= K(t,\alpha) \lim_{q \to 0} \frac{f(t) - f(t-q)}{q} \\ &= \Big(\frac{K(t,\alpha)}{K(t,\beta)}\Big) D_K^\beta f(t), \end{aligned}$$

y existe $D_K^\alpha f(t)$ si y sólo si existe $D_K^\beta f(t)$. □

Teorema 21. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) = f(b)$ y f es D_K^α-diferenciable en (a,b) para algún $\alpha \in (0,1]$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $D_K^\alpha f(c) = 0$.*

Demostración. Ya que f es continua en $[a,b]$ y $f(a) = f(b)$, por el Teorema de Weierstrass, hay al menos un punto extremo local $c \in (a,b)$. Como f es D_K^α-diferenciable en c con $\alpha \in (0,1]$, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} D_K^\alpha f(c) = D_K^\alpha f(c^+) &= \lim_{h\to\ 0^+} \frac{f(c) - f(c - hK(c,\alpha))}{h} \\ = D_K^\alpha f(c^-) &= \lim_{h\to\ 0^-} \frac{f(c) - f(c - hK(c,\alpha))}{h}. \end{aligned}$$

Como $K(c,\alpha) > 0$ y c es un punto extremo local de f, concluimos que $D_K^\alpha f(c^+)$ y que $D_K^\alpha f(c^-)$ tienen signos opuestos, por lo tanto la Proposición 18 nos permite concluir que $D_K^\alpha f(c) = 0$. □

Corolario 22. *(Teorema de Rolle). Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) = f(b)$ y f es diferenciable en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Teorema 23. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua que es D_K^α-diferenciable en (a,b) para algún $\alpha \in (0,1]$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\frac{c^{1-\alpha}}{\alpha\, K(c,\alpha)}\, D_K^\alpha f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b^\alpha - a^\alpha}.$$

Demostración. Consideremos la función

$$g(t) = f(t) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b^\alpha - a^\alpha}\,(t^\alpha - a^\alpha).$$

Esta función g satisface las hipótesis del Teorema 21 y además, existe $c \in (a,b)$ tal que $D_K^\alpha g(c) = 0$.

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} D_K^\alpha f(t) &= D_K^\alpha \left(g(t) + f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b^\alpha - a^\alpha}\,(t^\alpha - a^\alpha) \right) \\ &= D_K^\alpha g(t) + \frac{f(b) - f(a)}{b^\alpha - a^\alpha}\, D_K^\alpha (t^\alpha), \\ D_K^\alpha f(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b^\alpha - a^\alpha}\, D_K^\alpha (t^\alpha)(c). \end{aligned}$$

Como $\alpha \in (0,1]$, el Teorema 15 nos da $D_K^\alpha (t^\alpha) = K(t,\alpha)\,\alpha\, t^{\alpha-1}$, así concluimos

$$D_K^\alpha f(c) = K(c,\alpha)\,\alpha\, c^{\alpha-1} \frac{f(b) - f(a)}{b^\alpha - a^\alpha}.$$

□

Como caso particular del resultado anterior se obtiene el Teorema del Valor Medio del Cálculo clásico.

Corolario 24. *(Teorema de Valor Medio). Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua y diferenciable en* (a,b). *Entonces existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

En [23], los autores muestran algunos resultados equivalentes a otros bien conocidos del Cálculo clásico para funciones diferenciables fraccionarias conformables, que a continuación enunciaremos como corolarios de los Teoremas 21 y 23, respectivamente.

Corolario 25. *Sean* $a > 0$ *y* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función dada que satisface:*
1. f *es continua en* $[a,b]$.
2. f *es* α*-diferenciable en* (a,b) *para algún* $\alpha \in (0,1)$.
3. $f(a) = f(b)$.
Entonces, existe $c \in (a,b)$ *tal que* $f^{(\alpha)}(c) = 0$.

Corolario 26. *Sean* $a > 0$ *y* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función dada que satisface:*
1. f *es continua en* $[a,b]$.
2. f *es* α*-diferenciable en* (a,b) *para algún* $\alpha \in (0,1)$.
Entonces, existe $c \in (a,b)$ *tal que* $f^{(\alpha)}(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}$.

Proposición 27. *Sea* f *una función continua en* $[a,b]$, D_K^{α}*-diferenciable en* (a,b) *para algún* $\alpha \in (0,1]$ *con* $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$ *donde* λ *y* θ *no son cero simultáneamente, entonces existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$D_K^{\alpha} f(c) = \frac{K(c,\alpha)\left[(\theta - \lambda)f(c) + \lambda f(b) - \theta f(a)\right]}{\lambda(c-a) + \theta(b-c)}. \tag{2.1}$$

Demostración. Consideremos la función auxiliar

$$F(t) = \lambda(t-a)[f(t) - f(b)] - \theta(t-b)[f(t) - f(a)].$$

La función F es continua en $[a,b]$ y D_K^{α}-diferenciable en (a,b). Además, tenemos que $F(a) = F(b) = 0$. Por el Teorema 21, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$D_K^{\alpha} F(c) = 0.$$

Como

$D_K^{\alpha} F(t) = \lambda K(t,\alpha)[f(t) - f(b)] + \lambda(t-a)D_K^{\alpha} f(t) - \theta K(t,\alpha)[f(t) - f(a)] - \theta(t - b)D_K^{\alpha} f(t)$

tenemos que
$D_K^\alpha F(c) = \lambda K(c,\alpha)[f(c)-f(b)] + \lambda(c-a)D_K^\alpha f(c) - \theta K(c,\alpha)[f(c)-f(a)] - \theta(c-b)D_K^\alpha f(c) = 0,$

así,

$$D_K^\alpha f(c) = \frac{K(c,\alpha)\,[(\theta-\lambda)f(c)+\lambda f(b)-\theta f(a)]}{\lambda(c-a)+\theta(b-c)}.$$

Concluyendo lo requerido.

□

Teorema 28. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua que es D_K^α-diferenciable en (a,b) para algún $\alpha\in(0,1]$. Si $D_K^\alpha f(t)=0$ para todo $t\in(a,b)$, entonces f es constante en $[a,b]$.*

Demostración. Sean $s,t\in[a,b]$ con $s\neq t$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $s<t$. Por el Teorema 23, existe $c\in(s,t)\subseteq(a,b)$ tal que

$$\frac{c^{1-\alpha}}{\alpha\,K(c,\alpha)}\,D_K^\alpha f(c) = \frac{f(t)-f(s)}{t^\alpha-s^\alpha}.$$

Ya que $D_K^\alpha f(c)=0$, concluimos que $f(s)=f(t)$, por lo tanto, f es constante en $[a,b]$. □

Corolario 29. *Si f es una función continua en $[a,b]$ que es D_K^α-diferenciable en (a,b) para algún $\alpha\in(0,1]$, entonces $D_K^\alpha f(t)\geq 0$ (respectivamente, ≤ 0) si y sólo si f es una función no decreciente (respectivamente, no creciente). Si $D_K^\alpha f(t)>0$ (respectivamente, $D_K^\alpha f(t)<0$), entonces f es una función estrictamente creciente (respectivamente, decreciente).*

Demostración. Sean $s,t\in[a,b]$ con $s\neq t$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $s<t$. Por el Teorema 23, existe $c\in(s,t)\subseteq(a,b)$ tal que

$$\frac{c^{1-\alpha}}{\alpha\,K(c,\alpha)}\,D_K^\alpha f(c) = \frac{f(t)-f(s)}{t^\alpha-s^\alpha}.$$

Ya que $D_K^\alpha f(c)\geq 0$, se concluye que $f(s)\leq f(t)$, por lo que f es no decreciente.

Para el resto de los casos la prueba es similar. □

Teorema 30. *Sean f, g funciones continuas en $[a,b]$, las cuales son D_K^α-diferenciables en (a,b) para algún $\alpha \in (0,1]$. Si $D_K^\alpha f(t) > D_K^\alpha g(t)$ para toda $t \in (a,b)$, entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*
(1) Si $f(a) = g(a)$, entonces $f(t) > g(t)$ para toda $t \in [a,b]$.
(2) Si $f(b) = g(b)$, entonces $f(t) < g(t)$ para toda $t \in [a,b]$.

Demostración. Consideremos la función $h(t) = f(t) - g(t)$. Como h es una función continua en $[a,b]$ y D_K^α-diferenciable en (a,b), el Teorema 16 nos indica que $D_K^\alpha h(t) = D_K^\alpha f(t) - D_K^\alpha g(t) > 0$ para toda $t \in (a,b)$. Así, h es una función estrictamente creciente por el Teorema 29. Por lo tanto, $h(a) < h(t) < h(b)$ para cada $t \in [a,b]$.

Si $h(a) = f(a) - g(a) = 0$, entonces $f(t) - g(t) = h(t) > h(a) = 0$ para cada $t \in [a,b]$.

Si $h(b) = f(b) - g(b) = 0$, entonces $f(t) - g(t) = h(t) < h(b) = 0$ para cada $t \in [a,b]$. $\square$

Teorema 31. *Sea f una función real definida sobre $[a,b]$, D_K^α-diferenciable en $c \in (a,b)$ para algún $\alpha \in (0,1]$ y $D_K^\alpha f(c) > 0$ ($D_K^\alpha f(c) < 0$), existe $\delta > 0$ tal que si $x \in [a,b]$ y $c < x < c + \delta$ ($c - \delta < x < c$) entonces $f(c) < f(x)$.*

Demostración. Por el Teorema 15, tenemos que $D_K^\alpha f(c) = K(t,\alpha) f'(c)$.

Sea $0 < \epsilon < f'(c)$. Existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que si $x \in [a,b]$ y $c < x < c + \delta$, tenemos que

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)\right| < \epsilon.$$

Así, se tiene que:

$$-\epsilon < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c).$$

Ya que $x - c > 0$, lo anterior implica que

$$0 < [f'(c) - \epsilon](x - c) < f(x) - f(c)$$

El otro caso se demuestra de manera análoga. $\square$

Cabe destacar que el resultado puede ser obtenido de aplicar de forma adecuada el Teorema 21 y resultados básicos del Cálculo clásico.

Teorema 32. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas que son D_K^α-diferenciables en (a,b) para algún $\alpha \in (0,1]$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\big(g(b) - g(a)\big)\, D_K^\alpha f(c) = \big(f(b) - f(a)\big)\, D_K^\alpha g(c).$$

Además, si $g(a) \neq g(b)$ y $D_K^\alpha g(c) \neq 0$, entonces

$$\frac{D_K^\alpha f(c)}{D_K^\alpha g(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Demostración. Definamos

$$F(t) = \big(g(b) - g(a)\big)\big(f(t) - f(a)\big) - \big(f(b) - f(a)\big)\big(g(t) - g(a)\big).$$

Como F satisface los supuestos del Teorema 21, existe $c \in (a,b)$ tal que $D_K^{\alpha}F(c) = 0$. Por lo tanto,

$$D_K^{\alpha}F(c) = \big(g(b) - g(a)\big)\, D_K^{\alpha}f(c) - \big(f(b) - f(a)\big)\, D_K^{\alpha}g(c) = 0,$$

concluyendo lo requerido. □

Corolario 33. *(Teorema de Valor Medio de Cauchy) Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas que son diferenciables en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\big(g(b) - g(a)\big)\, f'(c) = \big(f(b) - f(a)\big)\, g'(c).$$

Además, si $g(a) \neq g(b)$ y $D_K^{\alpha}g(c) \neq 0$, entonces

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Una versión general de la regla de Bernoulli-L'Hôpital se puede obtener como consecuencia directa del Teorema 32.

Corolario 34. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas que son D_K^{α}-diferenciables en (a,b) tales que $\lim_{t \to a} f(t) = \lim_{t \to a} g(t) = 0$. Si existe $\lim_{t \to a} D_K^{\alpha}f(t)/D_K^{\alpha}g(t)$ para algún $\alpha \in (0,1]$, entonces*

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \to a} \frac{D_K^{\alpha}f(t)}{D_K^{\alpha}g(t)}.$$

Corolario 35. *(Regla de L'Hôpital) Sean f, g funciones tales que $\lim_{t \to a} f(t) = \lim_{t \to a} g(t) = 0$. Si existe $\lim_{t \to a} D_K^{\alpha}f(t)/D_K^{\alpha}g(t)$ para $\alpha = 1$, entonces*

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \to a} \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

Presentamos una versión generalizada del Teorema de Flett.

Teorema 36. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función D_K^{α}-diferenciable en $[a,b]$ para algún $\alpha \in (0,1]$ tal que $f'(a) = f'(b)$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\frac{D_K^{\alpha}f(c)}{K(c,\alpha)} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f'(a) = f'(b) = 0$, de no ser así, podríamos trabajar con $f(t) - tf'(a)$.

Consideremos la función

$$H(t) = \begin{cases} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}, & t \neq a, \\ 0, & t = a. \end{cases}$$

El Teorema 15 nos dice que H es una función continua en $[a,b]$; ya que $f'(a) = 0$. Por otro lado el Teorema 16 nos indica que H es D_K^α-diferenciable en $(a,b]$, entonces tenemos para $a < t \leq b$,

$$D_K^\alpha H(t) = D_K^\alpha \left[\frac{f(t) - f(a)}{t-a} \right] = -\frac{(f(t) - f(a))\, K(t,\alpha)}{(t-a)^2} + \frac{D_K^\alpha f(t)}{t-a}. \tag{2.2}$$

Si $H(b) = 0$, entonces $H(a) = H(b)$ y el resultado es una consecuencia inmediata de (2.2) y el Teorema de Rolle (Teorema 21).

Supongamos que $H(b) \neq 0$. Podemos tomar $H(b) > 0$ (el caso $H(b) < 0$ es similar). Como $D_K^\alpha f(b) = 0$, de (2.2) se sigue que

$$D_K^\alpha H(b) = -\frac{H(b)K(b,\alpha)}{b-a} < 0.$$

Por el Teorema 31, existe $c_1 \in (a,b)$ tal que $H(c_1) > H(b)$. Como H es una función continua en $[a, c_1]$ y $0 = H(a) < H(b) < H(c_1)$, por el Teorema del Valor Intermedio, existe $c_2 \in (a, c_1)$ tal que $H(c_2) = H(b)$. A partir del Teorema de Rolle, en $[c_2, b]$ tenemos

$$D_K^\alpha H(c) = -\frac{(f(c) - f(a))\, K(c,\alpha)}{(c-a)^2} + \frac{D_K^\alpha f(c)}{c-a} = 0.$$

De lo anterior se deduce el resultado.

$\square$

Corolario 37. *(Teorema de Flett) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función D_K^α-diferenciable en $[a,b]$ para $\alpha = 1$ tal que $f'(a) = f'(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c-a}.$$

Corolario 38. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones D_K^α-diferenciables en $[a,b]$ para algún $\alpha \in (0,1]$, con $D_K^\alpha g(a) \neq 0$, $g(t) \neq g(a)$ para todo $t \in (a,b]$, $D_K^\alpha g(b)\,(g(b) - b(a)) > 0$ y $\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{f'(b)}{g'(b)}$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$(g(c) - g(a))\, D_K^\alpha f(c) = (f(c) - f(a))\, D_K^\alpha g(c).$$

Sea Ω un conjunto abierto del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función medible en el sentido de Lebesgue. Si la integral de Lebesgue: $\displaystyle\int_B |f|dx$ es finita para todo conjunto acotado $B \subset \Omega$, con $\overline{B} \subseteq \Omega$, entonces f es una función localmente integrable.

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $a, t \in I$ y $\alpha \in (0,1]$. En [16] el operador integral $J^{\alpha}_{K,a}$ es definido para toda función localmente integrable f en I como

$$J^{\alpha}_{K,a}(f)(t) = \int_a^t \frac{f(s)}{K(s,\alpha)}\, ds.$$

En [16] aparece el siguiente resultado.

Proposición 39. *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $a \in I$, $\alpha \in (0,1]$ y f una función diferenciable en I tal que f' es una función localmente integrable en I. Entonces tenemos que para toda $t \in I$*

$$J^{\alpha}_{K,a}\big(D^{\alpha}_K(f)\big)(t) = f(t) - f(a).$$

Demostración. Como f' es una función localmente integrable en I, el Teorema 15 nos indica que

$$J^{\alpha}_{K,a}\big(D^{\alpha}_K(f)\big)(t) = \int_a^t \frac{D^{\alpha}_K(f)(s)}{K(s,\alpha)} ds = \int_a^t f'(s) ds = f(t) - f(a),$$

concluyendo el resultado deseado. □

En [23] se define el operador integral $J^{\alpha}_{K,a}$ para la elección del kernel K dado por $K(t,\alpha) = t^{1-\alpha}$ y [23, Theorem 3.1] muestra que

$$T^{\alpha} J^{\alpha}_{K^{1-\alpha},\,a}(f)(t) = f(t),$$

para cada función continua f en I, $a, t \in I$ y $\alpha \in (0,1]$. La Proposición 40 (ver [16]) extiende a cualquier K esta importante igualdad.

Proposición 40. *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $a \in I$ y $\alpha \in (0,1]$. Entonces*

$$D^{\alpha}_K\big(J^{\alpha}_{K,a}(f)\big)(t) = f(t),$$

para toda función continua f en I y $a, t \in I$.

Para más información sobre el operador integral y sus aplicaciones ver [40, 16]. El siguiente resultado resume algunas propiedades elementales del operador integral $J^{\alpha}_{K,a}$.

Teorema 41. *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $a, b \in I$ y $\alpha \in (0,1]$. Supongamos que f, g son funciones localmente integrables en I y $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, entonces tenemos*

1. $J^{\alpha}_{K,a}\big(k_1 f + k_2 g\big)(t) = k_1 J^{\alpha}_{K,a} f(t) + k_2 J^{\alpha}_{K,a} g(t)$,
2. *Si $f \geq g$, entonces $J^{\alpha}_{K,a} f(t) \geq J^{\alpha}_{K,a} g(t)$ para cada $t \in I$ con $t \geq a$,*
3. $\left|J^{\alpha}_{K,a} f(t)\right| \leq J^{\alpha}_{K,a} |f| (t)$ *para cada $t \in I$ con $t \geq a$,*
4. $\int_a^b \frac{f(s)}{K(s,\alpha)} ds = J^{\alpha}_{K,a} f(t) - J^{\alpha}_{K,b} f(t)$ *para cada $t \in I$.*

Capítulo 3

Aplicación de la Derivada Generalizada con $\alpha \in (0, 1]$

En junio de 1825, Gompertz escribió al matemático Francis Baily ofreciéndole un artículo para la Royal Society, que trataba sobre una manera funcional de ver la ley de la mortalidad humana y una nueva forma de determinar el valor de la denominada "Life contigences", bajo la idea de que es posible que la muerte sea fundamentalmente consecuencia de dos causas coexistentes; el componente independiente de la edad, considerado como factor externo y el deterioro propio del envejecimiento, lo que él denominaba como el *agotamiento promedio del poder de un hombre para evitar la muerte*, el cual crece exponencialmente a medida que la edad avanza.

Gompertz [18] menciona que los incrementos de las diferencias de los logaritmos de la forma:

$$Log(L_n) - Log(L_{n+m}), Log(L_{n+m}) - Log(L_{n+2m}), \cdots, Log(L_{n+(k-1)m}) - Log(L_{n+km}),$$

son constantes cuando L_n es una progresión geométrica y representa el número de personas vivas que hay en una población de edad n. De tal forma que pudo adaptar esta propuesta a algunas tablas de mortalidad disponibles en su tiempo.

Gompetz propone bajo la notación $d \cdot \overline{g|}^{q^x}$ como la intensidad de la mortalidad de un sujeto de edad x, donde

$$\log(g) = c,$$

$$q = p^{(\frac{1}{r})},$$

$$m = \log(L_n) - \log(L_{n+r}),$$

$$d = \frac{L_a}{\epsilon},$$

$$\log(\epsilon) = \frac{m}{1-q^r}.$$

A partir de la idea anterior, se llega a: $Y(x) = Ke^{-e^{(a-bx)}}$, por lo que se buscó la generalización del modelo a partir de la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial Y(x)}{\partial x} = bY(x)e^{(a-bx)}, \tag{3.1}$$

que se puede reescribir como:

$$\frac{\partial Y(x)}{\partial x} = bY(x)\ln(\frac{K}{Y(x)}). \tag{3.2}$$

El modelo de Gompertz tiene múltiples aplicaciones en diversas ramas de las ciencias en general, por ejemplo; para la biomedicina se utiliza para modelar el crecimiento de tumores [5], en el área biológica se utiliza para explicar el crecimiento poblacional de bacterias [45, 44, 47], en el área demográfica [36, 38, 35, 21]. Además, existen artículos que muestran una comparación del ajuste de los datos de interés con distintos modelos incluyendo el de Gompertz [41, 46]. En particular, resulta atinado plantear que recientemente el modelo de Gompertz ha sido aplicado con éxito al estudio de los mercados y las finanzas (ver [33, 4]).

Partiendo del modelo de ecuación diferencial (3.2), se da la siguiente ecuación diferencial generalizada asociada al modelo de Gompertz.

Proposición 42. *Sea* $\alpha \in (0,1]$, $a, T > 0$ *y* $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$. *Entonces la solución de la ecuación diferencial generalizada de Gompertz*

$$D_K^\alpha y(t) = ay(t)ln(\frac{T}{y(t)}), \tag{3.3}$$

está dada por

$$y(t) = Te^{Ce^{-aJ_{K,t_0}^{\alpha}(1)(t)}} \tag{3.4}$$

con $C \in \mathbb{R}$.

Demostración. Si $y(t)$ está dada por (3.4), entonces de los Teoremas 16, 19 y la

Proposición 40 se tiene

$$\begin{aligned}
D_K^{\alpha} y(t) &= T D_K^{\alpha}\left(e^{Ce^{-aJ^{\alpha}_{K,t_0}(1)(t)}}\right)\\
&= TK(t,\alpha)\frac{d}{dt}\left(e^{Ce^{-aJ^{\alpha}_{K,t_0}(1)(t)}}\right)\\
&= TK(t,\alpha)e^{Ce^{-aJ^{\alpha}_{K,t_0}(1)(t)}}\frac{d}{dt}\left(Ce^{-aJ^{\alpha}_{K,t_0}(1)(t)}\right)\\
&= TK(t,\alpha)e^{Ce^{-aJ^{\alpha}_{K,t_0}(1)(t)}}Ce^{-aJ^{\alpha}_{K,t_0}(1)(t)}\frac{d}{dt}\left(-aJ^{\alpha}_{K,t_0}(1)(t)\right)\\
&= TK(t,\alpha)e^{Ce^{-aJ^{\alpha}_{K,t_0}(1)(t)}}Ce^{-aJ^{\alpha}_{K,t_0}(1)(t)}\left(-aK^{-1}(t,\alpha)\right)\\
&= -aTe^{Ce^{-aJ^{\alpha}_{K,t_0}(1)(t)}}Ce^{-aJ^{\alpha}_{K,t_0}(1)(t)}\\
&= -ay(t)Ce^{-aJ^{\alpha}_{K,t_0}(1)(t)}\\
&= -ay(t)\ln\left(\frac{T}{T}e^{Ce^{-aJ^{\alpha}_{K,t_0}(1)(t)}}\right)\\
&= -ay(t)\ln\left(\frac{y(t)}{T}\right)\\
&= ay(t)\ln\left(\frac{T}{y(t)}\right)
\end{aligned}$$

y $y(t)$ es una solución de (3.3).

Consideremos ahora el problema de valor inicial (3.3) con $y(t_0) = y_0$. Si elegimos $C = y_0$, entonces

$$y(t) = Te^{y_0\, e^{-aJ^{\alpha}_{K,t_0}(1)(t)}} \tag{3.5}$$

satisface $y(t_0) = y_0$.

La solución única está dada por:

$$y(t) = Te^{\ln\left(\frac{y_0}{T}\right)\, e^{-aJ^{\alpha}_{K,t_0}(1)(t)}}. \tag{3.6}$$

□

Notemos que cuando $\alpha = 1$ para derivadas generalizadas conformables o para el caso en el que $K(t,\alpha) = 1$ para cierto $\alpha \in (0,1]$ entonces la solución a la ecuación diferencial generalizada de Gompertz, es igual a la original, también notemos que esta propuesta nos permite encontrar un mejor ajuste a los datos y no migrar a otro modelo que pertenezca a la familia de curvas sigmoideas como lo pueden ser las distribuciones Logisticas, Weibull o sus generalizaciones, entre otras.

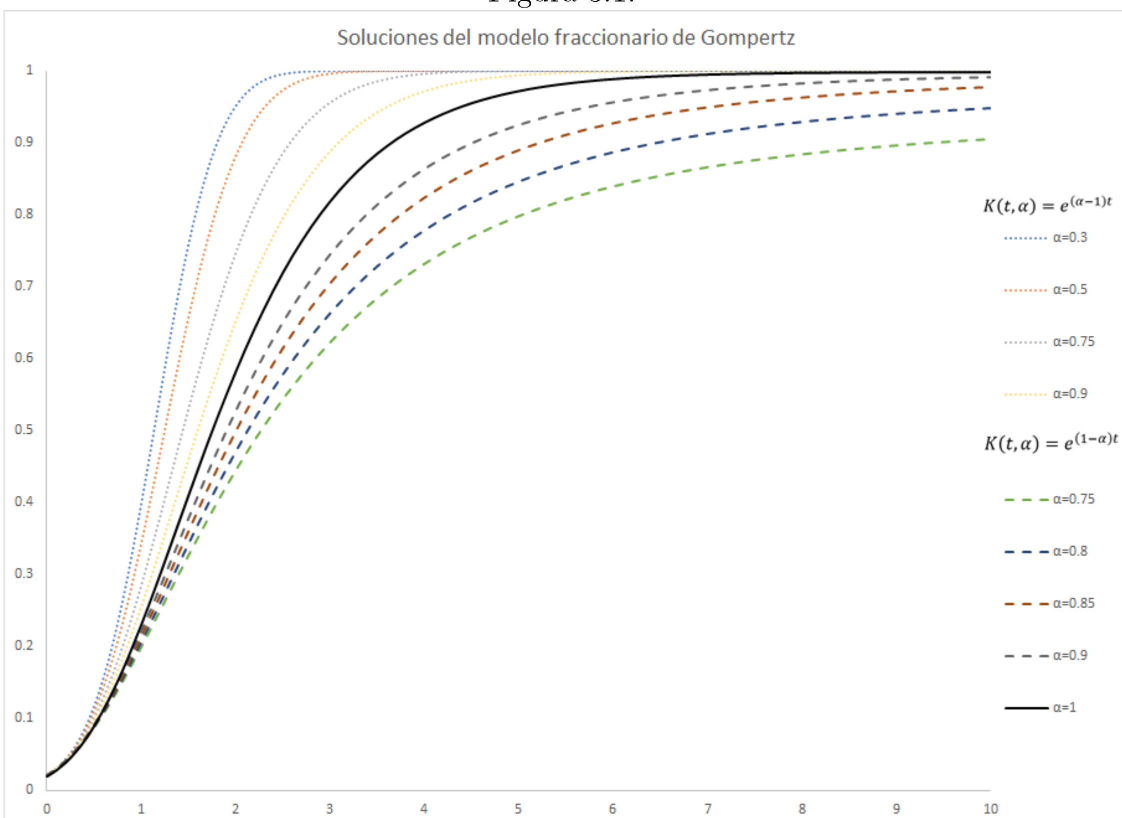
A continuación se muestra una comparación de la solución de la ecuación diferencial generalizada de Gompertz para distintos valores de α y para los kernel $K(\alpha,t) = e^{(\alpha-1)t}$ y $K(\alpha,t) = e^{(1-\alpha)t}$, tomando los valores de $T = 1, t_0 = 0, y_0 = 0{,}02, a = 1$.

De tal forma para estos kernels y los valores dados, la solución del modelo de Gompertz nos queda (Ver Figura 3.1):

$$y(t) = e^{\ln(0,02)\, e^{-\frac{e^{(\alpha-1)t}-1}{\alpha-1}}}, K(t, \alpha) = e^{(1-\alpha)t}, \tag{3.7}$$

$$y(t) = e^{\ln(0,02)\, e^{-\frac{e^{(1-\alpha)t}-1}{1-\alpha}}}, K(t, \alpha) = e^{(\alpha-1)t}. \tag{3.8}$$

Figura 3.1:



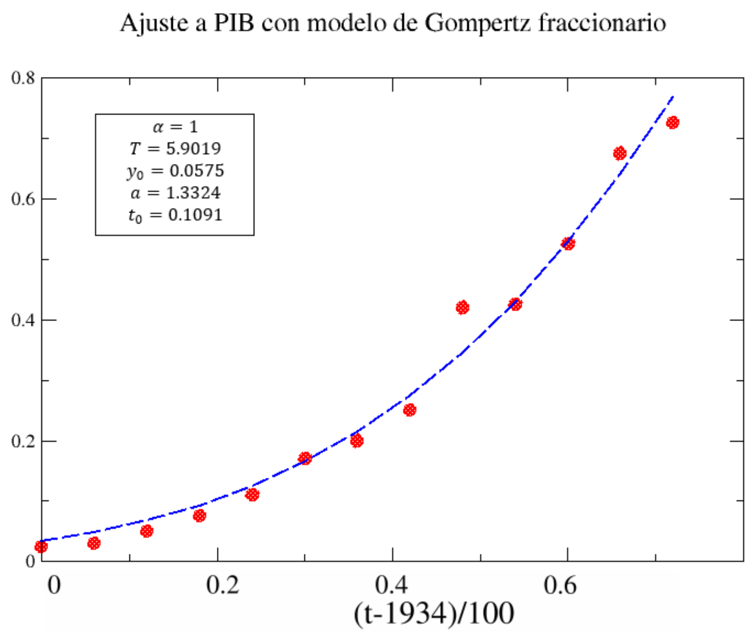
Nos basaremos en la aplicación que se realiza en [33], en la cual se aplica un ajuste a datos del PIB de 4 países utilizando el modelo de Gompertz y un modelo propuesto basado en el modelo de Gompertz. Se utilizarán datos del PIB de México por sexenio a partir de 1934 a 2019 utilizando el modelo generalizado de Gompertz para el kernel $K(t, \alpha) = e^{(1-\alpha)t}$.

Se procede a realizar una normalización de los datos y posteriormente se hace el ajuste con la Ecuación (3.6), para el Kernel $K(t, \alpha) = e^{(\alpha-1)t}$:

$$y(t) = Te^{\ln\left(\frac{y_0}{T}\right) e^{-a\left(\frac{e^{(\alpha-1)t}-e^{(\alpha-1)t_0}}{\alpha-1}\right)}}$$

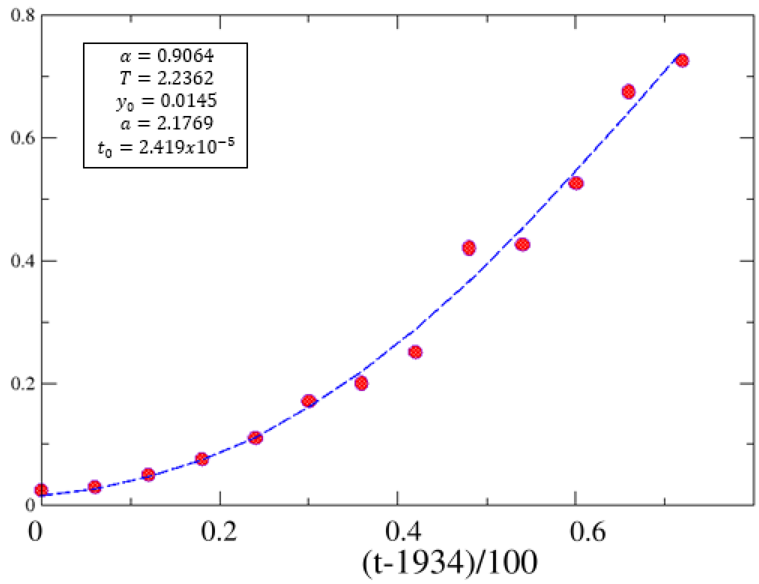
Con ayuda del programa Grace, se realiza un primer ajuste a los datos con la ecuación propuesta y con una primera semilla inicial con valores cercanos a los dados por las Ecuaciones (3.7) y (3.8) y para $\alpha = 1$ se tiene el siguiente ajuste (Ver Figura 3.2):

Figura 3.2:



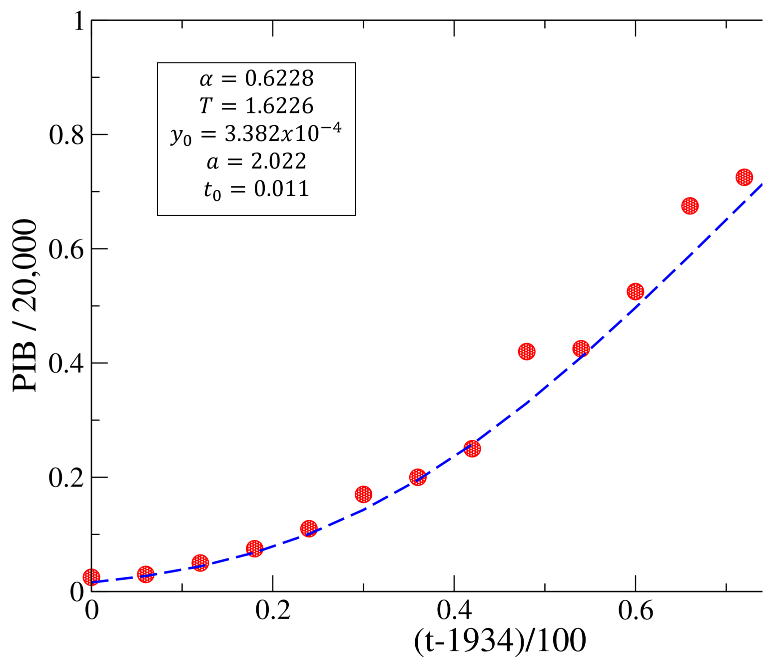
Luego se agrega como variable el valor de α, llegando así a lo siguente (Ver Figura 3.3):

Figura 3.3:



En la siguente figura, se muestra el mejor ajuste para los datos (Ver Figura 3.4).

Figura 3.4:


$\alpha = 0.6228$
$T = 1.6226$
$y_0 = 3.382x10^{-4}$
$a = 2.022$
$t_0 = 0.011$
PIB / 20,000
(t-1934)/100
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Capítulo 4

Conclusión

En este trabajo se analizó la derivada generalizada(conformable y no conformable). Notando que resultados conocidos y útiles en el cálculo son generalizados cuando $\alpha \in (0, 1]$. Destacando en este sentido la relevancia del Teorema 15 para lograr lo antes mencionado. A continuación a modo de resumen se presentará una tabla con los principales resultados obtenidos y sus análogos en el Cálculo Clásico.

Resumen de resultados		
Nombre	Cálculo Generalizado	Cálculo Clásico
Propiedades Algebraicas	$D_K^\alpha(af + bg) = aD_K^\alpha f + bD_K^\alpha g$	$(af + bg)' = af' + bg'$
	$D_K^\alpha(fg)(t) = f(t)D_K^\alpha g(t) + g(t)D_K^\alpha f(t)$	$(fg)'(t) = f(t)g'(t) + g(t)f'(t)$
	$D_K^\alpha(\frac{f}{g})(t) = \frac{g(t)D_K^\alpha f(t) - f(t)D_K^\alpha g(t)}{g(t)^2}$	$(\frac{f}{g})'(t) = \frac{g(t)f'(t) - f(t)g'(t)}{g(t)^2}$
	$D_K^\alpha(a) = 0$	$f'(a) = 0$
	$D_K^\alpha(t^p) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\lceil\alpha\rceil+1)} t^{p-\lceil\alpha\rceil} K(t,\alpha)^{\lceil\alpha\rceil},\ \alpha \in \mathbb{R}^+$	$t^p = pt^{p-1}$
	$D_K^\alpha(t^{-n}) = (-1)^{\lceil\alpha\rceil} \frac{\Gamma(n+\lceil\alpha\rceil)}{\Gamma(n)} t^{-n-\lceil\alpha\rceil} K(t,\alpha)^{\lceil\alpha\rceil},\ \alpha \in \mathbb{R}^+$	
Regla de los índices	$D_K^{\alpha_n} \cdots D_K^{\alpha_2} D_K^{\alpha_1} f(t) = K(t, \alpha_n) b_{n-1,1}(t)$	$f^{(n_1)} \cdots f^{(n_k)} = f^{(\sum_{i=1}^k n_i)}$

Nombre	Cálculo Generalizado	Cálculo Clásico
Regla de la Cadena	$D_K^\alpha(f\circ g)(t)=f'(g(t))\,D_K^\alpha g(t)$	$(f\circ g)'(t)=f'(g(t))g'(t)$
Teorema de Rolle	$\exists c\in(a,b)$ tal que $D_K^\alpha f(c)=0$	$\exists c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$
Teorema Valor Medio	$\frac{c^{1-\alpha}}{\alpha\,K(c,\alpha)}\,D_K^\alpha f(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b^\alpha-a^\alpha}$	$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
TVM Cauchy	$\frac{D_K^\alpha f(c)}{D_K^\alpha g(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$	$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$
Regla de L'Hôpital	$\text{lím}_{t\to a}\frac{f(t)}{g(t)}=\text{lím}_{t\to a}\frac{D_K^\alpha f(t)}{D_K^\alpha g(t)}$	$\text{lím}_{t\to a}\frac{f(t)}{g(t)}=\text{lím}_{t\to a}\frac{f'(t)}{g'(t)}$
Teorema de Flett	$\frac{D_K^\alpha f(c)}{K(c,\alpha)}=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$	$f'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$
Teorema Fundamental Cálculo integral	$J_{K,a}^\alpha\big(D_K^\alpha(f)\big)(t)=f(t)-f(a)$	$\int_a^t f'(x)dx=f(t)-f(a)$
TFC	$D_K^\alpha\big(J_{K,a}^\alpha(f)\big)(t)=f(t)$	$(\int_a^t f(x)dx)'=f(t)$
Propiedades Algebraicas	$J_{K,a}^\alpha\big(k_1f+k_2g\big)(t)=k_1J_{K,a}^\alpha f(t)+k_2J_{K,a}^\alpha g(t)$ Si $f\geq g$, $J_{K,a}^\alpha f(t)\geq J_{K,a}^\alpha g(t)$ $\left\|J_{K,a}^\alpha f(t)\right\|\leq J_{K,a}^\alpha\left\|f\right\|(t)$ $\int_a^b\frac{f(s)}{K(s,\alpha)}ds=J_{K,a}^\alpha f(t)-J_{K,b}^\alpha f(t)$	$\int(k_1f(x)+k_2g(x))dx=k_1\int f(x)dx+k_2\int g(x)dx$ Si $f\geq g$, $\int f(x)dx\geq\int g(x)dx$ $\|\int f(t)dt\|\leq\int\|f(t)\|dt$ $\int_a^b f(t)dt=\int_{a_0}^b f(t)dt-\int_{a_0}^a f(t)dt$
Derivada extremo local	$D_K^\alpha f(t_0)=0$	$f'(t_0)=0$
Derivada cero es constante	Si $D_K^\alpha f=0, f=c$ (T. 28)	Si $f'=0, f=c$
Monotonía	$D_K^\alpha f(t)\geq 0\Leftrightarrow f$ no decreciente (T.29) $D_K^\alpha f(t)\leq 0\Leftrightarrow f$ no creciente (T.29) $D_K^\alpha f(t)>D_K^\alpha g(t)\Leftrightarrow f(t)>g(t)(f(t)<g(t))$ (T. 30) $D_K^\alpha f(c)>0\Rightarrow f(c)<f(x)$ para $c<x$ (T. 31)	$f'(t)\geq 0\Leftrightarrow f$ no decreciente $f'(t)\leq 0\Leftrightarrow f$ no creciente $f'(t)>g'(t)\Leftrightarrow f(t)>g(t)(f(t)<g(t))$ $f'(c)>0\Rightarrow f(c)<f(x)$ para $c<x$

En este punto, nos cuestionamos si algunos de estos resultados se verifican para valores generales de $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Para esto, notemos primeramente que dado $n > 1$, $D^n f$ definido en (1.42) coincide con la derivada clásica cuando esta existe, permitiéndonos demostrar sólo una implicación del Teorema 15 para $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Indicándonos que podemos obtener resultados inesperados como los que se presentan a continuación (ver [14]).

Proposición 43. *Dado algún $t_0 \in \mathbb{R}$, existe una función D_K^α-diferenciable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en t_0 para cada $\alpha \in (1, 2]$ que no es continua en t_0.*

Somos del criterio que una vía para extender los resutados analizados en esta tesis para $\alpha \in \mathbb{R}^+$, es la siguente:

Definición 44. *Dado $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $f : I \to \mathbb{R}$, decimos que f es n-continua en $t \in I$ si*

$$\lim_{s \to 0} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} f\big(t + ks\big) = f(t).$$

Es claro que f es 1-continua si y sólo si es continua.

Teorema 45. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Si f es D_K^α-diferenciable en el punto $t \in I$, entonces f es $\lceil \alpha \rceil$-continua en t.*

Demostración. Tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} f\big(t+ks\big) - f(t) = -h^{\lceil \alpha \rceil} \frac{1}{-h^{\lceil \alpha \rceil}} \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} f\big(t + ks\big) - f(t) \right] . \tag{4.1}$$

Tomando $j = k - 1$ en,

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} f\big(t + ks\big) - f(t).$$

Se tiene,

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+2} \binom{n}{j+1} f\big(t + (j+1)s\big) - f(t) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} f\big(t + js\big)$$

$$= -\sum_{j=0}^{n} (-1)^{j} \binom{n}{j} f\big(t + js\big).$$

Haciendo la sustitución $s = -hK(t,\alpha)$ y del hecho que si $n-1 < \alpha \leq n \rightarrow \lceil\alpha\rceil = n$ se sigue que,

$$= -\sum_{j=0}^{\lceil\alpha\rceil}(-1)^j\binom{\lceil\alpha\rceil}{j}f\big(t - jhK(t,\alpha)\big).$$

Sustituyendo la expresión anterior en 4.1, se tiene,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}f\big(t+ks\big)-f(t) = -h^{\lceil\alpha\rceil}\frac{1}{-h^{\lceil\alpha\rceil}}\left[-\sum_{j=0}^{\lceil\alpha\rceil}(-1)^j\binom{\lceil\alpha\rceil}{j}f\big(t - jhK(t,\alpha)\big)\right].$$

Aplicando que el límite del producto es el producto de los límites y la equivalencia de que si $s \rightarrow 0 \Rightarrow h \rightarrow 0$ dado que $K(t,\alpha)$ nunca es idéntica a cero podemos aplicar límites en ambos miembros y así obtener que:

$$\lim_{s\rightarrow 0}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}f\big(t+ks\big)-f(t) = \lim_{h\rightarrow 0}-h^{\lceil\alpha\rceil}\lim_{h\rightarrow 0}\frac{1}{-h^{\lceil\alpha\rceil}}\left[-\sum_{j=0}^{\lceil\alpha\rceil}(-1)^j\binom{\lceil\alpha\rceil}{j}f\big(t - jhK(t,\alpha)\big)\right]$$

$$\lim_{s\rightarrow 0}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}f\big(t+ks\big)-f(t) = 0 * D_K^{\alpha}f(t) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{s\rightarrow 0}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}f\big(t+ks\big) = f(t).$$

Concluyendo la demostración. □

Trabajos futuros en esta línea de investigación son los siguientes:

- Estudio de la derivada generalizada para $\alpha > 1$.
- Generalización de modelos diferenciales aplicados a Economía y Finanzas.

Bibliografía

[1] Abdejjawad, T., On conformable fractional calculus, *J. Comput. Appl. Math.* **279** (2015), 57-66.

[2] Abel, Niels H. (1823). Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies. Oeuvres. *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel*, Tome Premier, Christiania, 11-18.

[3] Abel, Niels H. (1826). Auflösung einer mechanischen Aufgabe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1, 153-157.

[4] Caravelli, F., Sindoni, L., Caccioli, F., Ududec, C. (2016). Optimal growth trajectories with finite carrying capacity. *Physical Review E*, 94(2), 022315.

[5] D'Onofrio, A. (2005). A general framework for modeling tumor-immune system competition and immunotherapy: Mathematical analysis and biomedical inferences. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 208(3-4), 220-235.

[6] Abreu-Blaya, R., R.,Fleitas, A., Valdés, J. E. Nápoles, Reyes, R., Rodríguez, J. M. Sigarreta, J. M. On the conformable fractional logistic models. Submitted.

[7] Almeida, R., Guzowska, M., Odzijewicz, T. (2016). A remark on local fractional calculus and ordinary derivatives. *Open Mathematics*, 14(1), 1122-1124.

[8] Blaya, R. A., Reyes, J. B., Dagnino, R. M. R. (2015). Boundary value problems for hyperholomorphic solutions of two dimensional Helmholtz equation in a fractal domain. *Applied Mathematics and Computation*, 261, 183-191.

[9] Blaya, R. A., Ávila, R. Á., Reyes, J. B. (2015). Boundary value problems with higher order Lipschitz boundary data for polymonogenic functions in fractal domains. *Applied Mathematics and Computation*, 269, 802-808.

[10] Euler, Leonhard (1738). De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 36-57.

[11] Fleitas, A., Gómez-Aguilar, J. F., Valdés, J. E. N., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M. (2019). Analysis of the local Drude model involving the generalized fractional derivative. *Optik*.

[12] Fleitas, A., Méndez Bermúdez, J. A., Nápoles Valdés, J. E., Rodríguez, J M. Sigarreta, J. M. Fractional approach to nearest-neighbor energy-level spacing distribution. Submitted.

[13] Fleitas, A., Méndez Bermúdez, J. A., Nápoles Valdés, J. E. Sigarreta, J. M.(2019). On fractional Liénard-type systems. *Revista mexicana de física*.

[14] Fleitas, A., Valdés, J. E. Nápoles, Rodríguez, J. M. Sigarreta, J. M. Note on the generalized conformable derivative. *Revista de la Unión Matemática Argentina.*

[15] Fleitas, A., Nápoles Valdés, J.E., Rodríguez, J.M. Sigarreta, J.M. On some general properties of fractional differential equations. Submitted.

[16] Fleitas, A., Gómez, J. F. , Nápoles, J. E., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M., Analysis of the local Drude model involving the generalized fractional derivative, *Optik* **193** (2019), 163008.

[17] Fourier, J. B. (1822). Theorie analytique de la chaleur, par M. Fourier. *Chez Firmin Didot, père et fils*. Paris, I , 561-562.

[18] Gompertz B. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B: Biological Sciences.* 1825;182:513–85.

[19] Guzman, P. M., Langton, G., Motta, L. M. L., Bittencurt, J. M., Valdes, J. E. N. (2018). A new definition of a fractional derivative of local type. *Journal of Mathematical Analysis*, 9(2), 88-98.

[20] Grünwald, A. K(1867). Über "begrenzte" Derivation und deren Anwendung, *Z. angew. Math. und Phys*, 12, 441-480.

[21] Hernández, R. (1979). Aplicaciones del modelo de Gompertz que relaciona estructuras de la fecundidad por edad de las mujeres; resumen del estudio.

[22] Jarad, F., Uğurlu, E., Abdeljawad, T., Baleanu, D. (2017). *On a new class of fractional operators. Advances in Difference Equations*, 2017(1), 247.

[23] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M., A new definition of fractional derivative, *J. Comput. Appl. Math.*, **264** (2014), 65–70.

[24] Karci, A. (2015). Chain rule for fractional order derivatives. Science Innovation, 3, 63-67.

[25] Katugampola, U. N. (2014). A new fractional derivative with classical properties. arXiv preprint arXiv:1410.6535.

[26] Kilbas, A. A., Srivasta, H., Trujillo, J. (2006). Theory and applications of fractional differential equations (Vol. 204). Elsevier Science Limited.

[27] Lacroix, Sylvestre F. (1819). Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. 2 Ed , Courcier, Paris, 409-410.

[28] Laurent, H. (1884). Sur le calcul des dérivées à indices quelconques. *Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, 3, 240-252.

[29] Leibniz, G. W. (1849). Letter from Hanover, Germany to GFA L'Hospital, September 30, 1695. Mathematische Schriften, 2, 301-302.

[30] (1868) Letnikov, A.V. Theory of differentiation of an arbitrary order. *Mat. Sb.*, 3, 1-68.

[31] Liouville Joseph (1832). Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces équations. *Ecole polytechnique*, Paris, 71-162.

[32] Liouville, Joseph (1832). Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions. *Journal l'École Polytechnique*, Paris, 1-69.

[33] Márquez, J. C. P. (2017). Análisis del comportamiento del Modelo de Crecimiento de Gompertz en la predicción del crecimiento de la economía de Argentina, Bolivia, Chile y Perú. *Studies of Applied Economics*, 35(2), 443-464.

[34] Miller, K. S., Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley and Sons, New York.

[35] Mina Valdés, A. (2001). Funciones de sobrevivencia empleadas en el análisis demográfico. Papeles de población, 7(28), 131-154.

[36] Mina-Valdés, A. (2009). Uso de las funciones de supervivencia en las ciencias sociales y en los estudios de población: Aplicación al caso de México. *Papeles de población*, 15(61), 53-74.

[37] Oldham, K., Spanier, J. (1974). The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order (Vol. 111). Elsevier. Academic Press, USA.

[38] Pierce, H. O. (1991). La función de Gompertz-Makeham en la descripción y proyección de fenómenos demográficos. *Estudios Demográficos y Urbanos*, 485-520.

[39] Podlubny, I. (1999). Fractional Differential Equations. Academic Press, USA.

[40] P. Bosch, Gómez, J. F., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M., Analysis of dengue fever outbreak by generalized fractional derivative, *Fractals.* **28**(2020), (8) 2040038.

[41] Ricklefs, R. E., Scheuerlein, A. (2002). Biological implications of the Weibull and Gompertz models of aging. *The Journals of Gerontology Series A: Biological Sciences and Medical Sciences*, 57(2), B69-B76.

[42] Sonine, N. Y. (1870). Report on differentiation with an arbitrary index. *In Proc. Second Congress of Russian Naturalists.* (Vol. 2), No. 1870, 18-21.

[43] Tallafha, A., Al Hihi, S. (2016). Total and directional fractional derivatives.*International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 107(4), 1037-1051.

[44] Valbuena, E., Barreiro, J., Sánchez, E., Castro, G., Bríñez, W., Tovar, A. (2005). Modelos cinéticos aplicados al crecimiento de Lactococcus lactis subsp. lactis en leche. *Revista Científica*, 15(5), 464-475.

[45] Vandepitte, V., Quataert, P., de Rore, H., Verstraete, W. (1995). Evaluation of the Gompertz function to model survival of bacteria introduced into soils. *Soil Biology and Biochemistry*, 27(3), 365-372.

[46] Winsor, C. P. (1932). The Gompertz curve as a growth curve. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 18(1), 1.

[47] Zwietering, M. H., Jongenburger, I., Rombouts, F. M., Van't Riet, K. J. A. E. M. (1990). Modeling of the bacterial growth curve. *Applied and environmental microbiology*, 56(6), 1875-1881.