



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Alternativas en recuperación de fase

Tesis

Como requisito para obtener el grado de

Maestría en Ciencias (Física Aplicada)

Presenta:

Lic. Viridiana González Escalante

Asesores:

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez

Dr. Rigoberto Juárez Salazar

Diciembre 2021

FCFM

Título: Alternativas en recuperación de fase
Estudiante: Viridiana González Escalante

COMITÉ

Dra. Areli Montes Pérez
Presidente

Dra. Rosibel Carrada Legaria
Secretaria

Dr. W. Fermín Guerrero Sánchez
Vocal

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar
Suplente

Dr. Carlos Robledo Sánchez
Asesor

Dr. Rigoberto Juárez Salazar
Asesor

Alternativas en recuperación de fase

Resumen: En esta tesis presentamos un conjunto de alternativas de recuperación de fase. Iniciamos con antecedentes teóricas del fenómeno de interferencia y difracción. Presentamos el fenómeno de difracción junto con la teoría de Fourier y la idea general de recuperación de fase. Entonces, se da paso a la recuperación de fase por difracción, con la explicación teórica de la funcionalidad de la lente delgada dentro de un sistema óptico $4f$ y del algoritmo Gerchberg-Saxton, los cuales están completamente relacionados. Después se muestra la eficiencia del algoritmo con ejemplos de simulaciones. Como aporte extra se hace una evaluación experimental usando mediciones de intensidad, presentando obstáculos en la ejecución directa del algoritmo.

Posteriormente, se estudia la recuperación de fase por interferencia mostrando la estimación de luz de fondo la cual es un principal inconveniente para algunos métodos de recuperación por el fenómeno de interferencia. También presentamos cinco métodos los cuales, en orden de interés, son Takeda, Brunning, Greivenkamp, Gram-Schmidt y minimización del coeficiente de variación. Es el último método al cual se le encontró una mayor aportación al problema de recuperación de fase por interferencia, ya que es eficiente bajo complicaciones experimentales y de procesamiento computacional.

Los métodos de recuperación de fase abordados fueron analizados de forma detallada con su respectiva simulación computacional. Adicionalmente, se realiza una evaluación experimental del método de minimización del coeficiente de variación usando dos interferogramas. A lo largo de la presentación de los métodos de recuperación por interferencia, se hace uso del desenvolvimiento de fase, es por eso que se incluye el desarrollo teórico de este.

Palabras clave: Fase, recuperación, desenvolvimiento, algoritmo, difracción, interferencia, interferogramas.

Phase recovery alternatives

Abstract: In this thesis we present a set of phase recovery alternatives. We begin with theoretical antecedents of the phenomenon of interference and diffraction. We present the phenomenon of diffraction together with Fourier theory and the general idea of phase recovery. Then, phase recovery by diffraction takes place, with the theoretical explanation of the functionality of the thin lens within a 4f optical system and the Gerchberg-Saxton algorithm, which are so completely related. The efficiency of the algorithm is then shown with examples of simulations. As an extra contribution, an experimental evaluation is made using intensity measurements, presenting obstacles in the direct execution of the algorithm.

Subsequently, the phase recovery by interference is studied showing the estimation of the background light which is the main drawback for some recovery methods by the interference phenomenon. We also present five methods which, in order of interest, are Takeda, Brunning, Greivenkamp, Gram-Schmidt, and minimization of the coefficient of variation. It is the last method to which was found a greater contribution to the phase recovery by interference problem, since it is efficient under experimental complications and computational processing.

The phase recovery methods addressed were analyzed in detail with their respective computational simulation. Additionally, an experimental evaluation of the method of minimization of the coefficient of variation is carried out using two interferograms. Throughout the presentation of the phase recovery methods by interference, the unwrapped phase is used, that is why its theoretical development is included.

Keywords: Phase, recovery, unwrap, algorithm, diffraction, interference, interferograms.

Objetivos

Objetivo general

El objetivo de esta tesis es analizar la recuperación de fase desde el punto de vista de la difracción y de la interferencia, así como dar a conocer las ventajas y desventajas de los métodos propuestos en este trabajo para finalmente encontrar el mejor método de recuperación de fase.

Objetivos particulares

- Desarrollo del algoritmo Gerchberg-Saxton y su implementación en MATLAB con criterios de convergencia para simulaciones computacionales.
- Análisis computacional de cinco métodos de recuperación de fase por interferencia (Takeda, Brunning, Greivenkamp, Gram-Schmidt, y minimización del coeficiente de variación).
- Eliminación de la luz de fondo en patrones de interferencia.
- Implementación del algoritmo de desenvolvimiento de fase por mínimos cuadrados y redondeo.

Índice general

	Página
1. Introducción	1
1.1. Recuperación de fase por difracción	2
1.2. Recuperación de fase por interferencia	4
1.3. Estructura del documento	7
2. Recuperación de fase por difracción	8
2.1. El fenómeno de difracción	8
2.2. Difracción de Fresnel	9
2.3. Difracción de Fraunhofer	11
2.4. Sistema óptico con lente delgada	12
2.4.1. Formalismo operacional	12
2.4.2. Lente delgada simple	15
2.5. Algoritmo iterativo de Gerchberg-Saxton	18
2.5.1. Inicio	20
2.5.2. Actualización en el plano de difracción	21
2.5.3. Actualización en el plano imagen	21
2.5.4. Iteración	21
2.5.5. Paro	23
2.6. Evaluación en simulación por computadora	24
2.6.1. Amplitud continua	24
2.6.2. Amplitud discontinua	26
2.6.3. Amplitud continua y fase discontinua	28

2.7. Evaluación experimental y discusión	29
3. Recuperación de fase por interferencia	32
3.1. Estimación de la luz de fondo	32
3.2. Método de Takeda	36
3.3. Brunning	40
3.4. Greivenkamp	43
3.5. Gram-Schmidt	47
3.6. Minimización del coeficiente de variación	50
3.6.1. Optimización por búsqueda en intervalos	51
3.6.2. Coeficiente de variación	55
3.6.3. Luz de modulación $b(x, y)$ y fase $\phi(x, y)$	58
3.6.4. Minimización del coeficiente de variación de $b(x, y)$	60
3.6.5. Evaluación por simulación	60
3.6.6. Evaluación usando patrones experimentales	62
4. Conclusiones y trabajo futuro	66
Apéndice A	68
Apéndice B	71
Referencias	76

Capítulo 1

Introducción

Los avances en la comprensión del mundo que nos rodea ha sido posible gracias a las herramientas y métodos que permiten adquirir información sobre los fenómenos que ocurren en la naturaleza. Un ejemplo clásico es la *Teoría de la Relatividad* de Einstein desarrollada a partir de mediciones de alta precisión de la velocidad de la luz [1]. La necesidad de realizar mediciones sobre fenómenos físicos ha sido de importancia considerable en los últimos cien años. En particular, con la invención del láser a mediados del siglo pasado, científicos de todo el mundo han revolucionado la tecnología con novedosos métodos de medición óptica. El impacto que ha tenido la metrología óptica va desde la microscopía por contraste de fase en aplicaciones médicas hasta la espectroscopía para entender de qué está hecho el universo [2].

En metrología óptica, el uso de fuentes láser ha permitido explotar propiedades de la luz (coherencia, polarización, longitud de onda, fase, etc), así como métodos de medición dependientes de la cantidad física a medir, como es el caso de la interferometría. Por otro lado, existen otras aplicaciones tales como la deflectometría óptica donde se emplean fuentes de luz blanca en lugar de fuentes láser. En otras aplicaciones como interferometría de doble ventana y perfilometría por proyección de franjas, además de elementos ópticos convencionales, se emplean dispositivos opto-electrónicos como las pantallas de cristal líquido y video-proyectores [3, 4].

En metrología óptica, las propiedades ópticas de la luz juegan un papel relevante. Sin embargo, no en todos los casos es posible medir directamente alguna cantidad relacionada con la luz. Por ejemplo, en una fotografía (grabación en dos dimensiones de una escena tridimensional) lo que se graba experimentalmente es la intensidad de la luz en el plano de la película fotográfica. Como resultado se pierde toda la información sobre fases relativas de la escena real [5].

En general, la recuperación de fase es un tema crucial en problemas prácticos relacionados con reconstrucción de superficies, microscopía, mediciones de profundidad, tomografía, y difracción de rayos X [6, 7]. Sin embargo, reconstruir un objeto tanto en amplitud como en fase ha sido difícil de conseguir.

La forma más simple de representar un campo de luz es

$$E(x, y) = A(x, y)e^{i\phi(x, y)}, \quad (1.1)$$

donde $A(x, y)$ es la amplitud del campo y $\phi(x, y)$ la fase. La tecnología actual de sensores fotosensibles nos permite realizar mediciones de magnitud de un campo de luz. Esto es, del campo de luz $E(x, y)$ podremos detectar

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \|E(x, y)\|^2 \\ &= E^*(x, y)E(x, y) \\ &= A^2(x, y), \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde $[\cdot]^*$ denota el complejo conjugado. Observe que la información de fase $\phi(x, y)$ se pierde durante la grabación [8].

La comunidad científica ha abordado el problema de recuperación de fase y varias técnicas exitosas han sido propuestas. En general, los métodos propuestos se pueden clasificar en dos grupos que dependen del fenómeno de la luz que se use para deducir la distribución de fase; específicamente, difracción e interferencia.

1.1. Recuperación de fase por difracción

Los métodos de extracción de fase basados en difracción explotan la capacidad que de predecir cómo se propaga la luz. En estos métodos, se parte del hecho de que la luz es una onda electromagnética y su propagación se puede describir con exactitud usando la teoría de difracción como se ilustra en la Fig. 1.1.

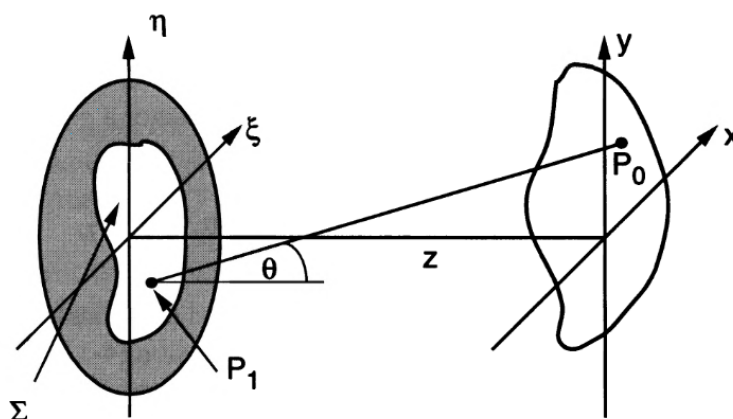


Fig. 1.1. Teoría de difracción para determinar el campo de luz en el plano xy resultante de la propagación del campo de luz en el plano $\xi\eta$. Imagen tomada del libro de Joseph W. Goodman [9].

A diferencia de la extracción de fase basada en interferencia, los métodos basados en difracción no requieren de un campo de luz de referencia. Esto representa

ciertas ventajas experimentales que hacen posible su aplicación en estudios tales como análisis de estructuras cristalinas por difracción de rayos X [10]. La difracción no solo ocurre en materiales cristalinos, también ocurre en proteínas y muestras nanoestructuradas. Así, el análisis de intensidad de campos difractados permite la obtención de imágenes de alta resolución sobre la estructura interna de este tipo de muestras [11].

A grandes rasgos, los métodos de extracción de fase basados en difracción analizan la intensidad del campo de luz en varios planos. Matemáticamente, considere que

$$E_0(x, y) = A_0(x, y)e^{i\phi_0(x, y)}, \quad (1.3)$$

es el campo de luz en el plano de entrada $\xi\eta$. Supongamos que \mathcal{T} es el operador que describe la difracción y propagación del campo de luz, entonces el campo de luz detectado en el plano de detección xy estará dado por

$$E_1(x, y) = \mathcal{T}[E_0(x, y)]. \quad (1.4)$$

El operador \mathcal{T} puede estar definido como la transformada de Fresnel o la transformada de Fourier según se considere difracción de campo cercano (Fresnel) o lejano (Fraunhofer), respectivamente.

Debido a que en la práctica solo podemos realizar mediciones de intensidad, entonces el problema de recuperación de fase por difracción se puede establecer como sigue. Dadas las mediciones de intensidad

$$\begin{aligned} I_0(x, y) &= \|A_0(x, y)e^{i\phi_0(x, y)}\|^2, \\ I_1(x, y) &= \|\mathcal{T}[E_0(x, y)]\|^2, \end{aligned} \quad (1.5)$$

y el modelo de difracción \mathcal{T} , determine la función de fase $\phi_0(x, y)$ tal que

$$I_1(x, y) = \left\| \mathcal{T} \left[\sqrt{I_0(x, y)} e^{i\phi_0(x, y)} \right] \right\|^2. \quad (1.6)$$

Experimentalmente, se capturan las distribuciones de intensidad del campo de luz de interés en varios planos para analizar cómo el campo de luz se ha propagado. De esta forma, conociendo el modelo de propagación \mathcal{T} y la intensidad del campo de luz $I(x, y)$ en dos o más planos, se determina la distribución de fase que debe contener el campo de luz analizado para reproducir los mapas de intensidad observados.

La relevancia de las aplicaciones desarrolladas en base a este enfoque ha motivado la generación de varias metodologías de recuperación de fase basadas en difracción [8, 12, 13]. En la actualidad, este es un tema de investigación activo que trata de resolver algunas dificultades de su implementación. Por ejemplo, la ambigüedad de fase y la longitud de coherencia que obliga a que la fase del campo de luz analizado no exceda una longitud de onda. Asimismo, la comunidad también busca resolver limitaciones experimentales como la necesidad de desplazar elementos ópticos del arreglo experimental y los subsecuentes errores debido a inestabilidades mecánicas.

Los métodos de recuperación de fase por difracción más eficientes están basados en el algoritmo iterativo propuesto por Gerchberg-Saxton [14]. En el capítulo 2.5 de esta tesis se realizará un estudio detallado sobre las propiedades del algoritmo de Gerchberg-Saxton, detalles de la implementación, y su desempeño tanto en simulaciones computacionales como en el procesamiento de datos experimentales.

1.2. Recuperación de fase por interferencia

La fase de un campo de luz no se puede detectar usando solo mediciones de intensidad. Sin embargo, cuando dos campos de luz se superponen, digamos

$$\begin{aligned} E_1(x, y) &= A_1(x, y)e^{i\phi_1(x, y)}, \\ E_2(x, y) &= A_2(x, y)e^{i\phi_2(x, y)}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

entonces la intensidad resultante será una función de la diferencia de fase entre los campos superpuestos. Matemáticamente,

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \|E_1(x, y) + E_2(x, y)\|^2 \\ &= E_1^*(x, y)E_1(x, y) + E_2^*(x, y)E_2(x, y) + 2E_1(x, y)E_2(x, y) \\ &= A_1^2(x, y) + A_2^2(x, y) + 2A_1(x, y)A_2(x, y) \cos [\phi_1(x, y) - \phi_2(x, y)], \end{aligned} \quad (1.8)$$

o

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos \phi(x, y), \quad (1.9)$$

donde $I(x, y)$ es conocido como *patrón de franjas* debido a la particular forma de la intensidad resultante, $a(x, y) = A_1^2(x, y) + A_2^2(x, y)$ es la *luz de fondo*, $b(x, y) = 2A_1(x, y)A_2(x, y)$ es la *luz de modulación*, y

$$\phi(x, y) = \phi_1(x, y) - \phi_2(x, y) \quad (1.10)$$

es la fase codificada en el patrón de franjas. De esta forma, si usamos como referencia el campo de luz $E_2(x, y)$ y conocemos su fase $\phi_2(x, y)$, entonces se podrá recuperar la distribución de fase $\phi_1(x, y)$ del campo de luz de interés. Los métodos de recuperación de fase basados en esta idea son conocidos como métodos de extracción de fase por procesamiento de patrones de franjas [15].

El interferómetro de Michelson es un instrumento muy útil para observar la intensidad resultante de la interferencia de dos campos de luz [16]. En la Fig. 1.2 se muestra la construcción experimental del interferómetro de Michelson. En la Fig. 1.3 se muestran patrones de franjas típicos obtenidos con este interferómetro.

Cuando el espejo de referencia del interferómetro de Michelson es trasladado a lo largo del eje óptico, se introducirán incrementos de fase constante conocidos como *corrimientos de fase*. En las Figs. 1.3(a)-(c) se muestran tres patrones de franjas con corrimiento de fase introducidos trasladando el espejo de referencia del

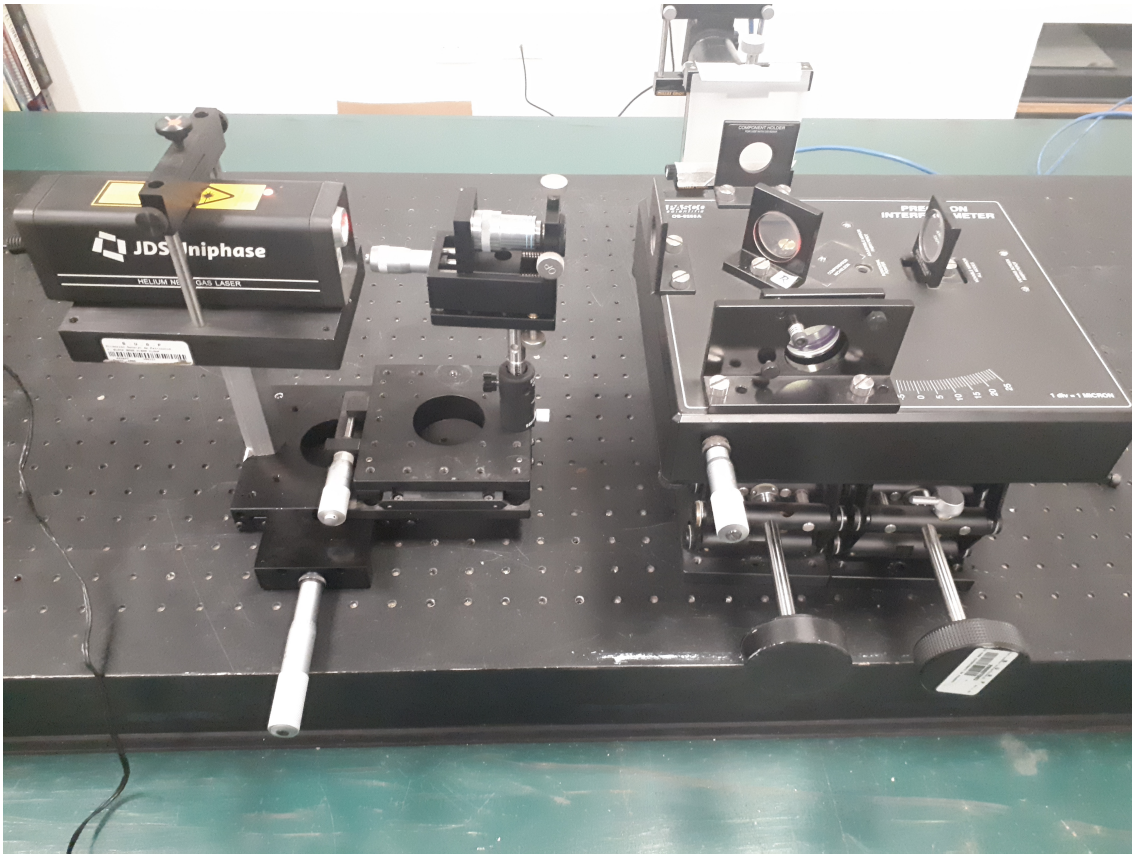


Fig. 1.2. Arreglo experimental del interferómetro de Michelson.

interferómetro. Estos patrones de franjas se pueden describir matemáticamente como

$$\begin{aligned}
 I_1(x, y) &= a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x, y) + \delta_1], \\
 I_2(x, y) &= a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x, y) + \delta_2], \\
 &\vdots \\
 I_n(x, y) &= a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x, y) + \delta_n],
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

donde el corrimiento de fase δ_k , $k = 1, 2, \dots, n$, es proporcional a la traslación dada al espejo de referencia. En los algoritmos clásicos, el corrimiento de fase se asume conocido y se usa como referencia para calcular la luz de fondo $a(x, y)$, $b(x, y)$, y fase $\phi(x, y)$ [17, 18].

Alternativamente, en lugar de realizar traslaciones axiales, se puede inclinar el espejo de referencia del interferómetro de Michelson. El resultado será un patrón de franjas con “corrimiento de fase espacial” como se muestra en la Fig. 1.3(d). Este patrón de franjas se puede describir matemáticamente como

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x, y) + \omega_x x + \omega_y y],
 \tag{1.12}$$

donde las frecuencias angulares ω_x y ω_y son proporcionales a la inclinación dada al espejo de referencia. Se puede mostrar que las frecuencias ω_x y ω_y trasladan

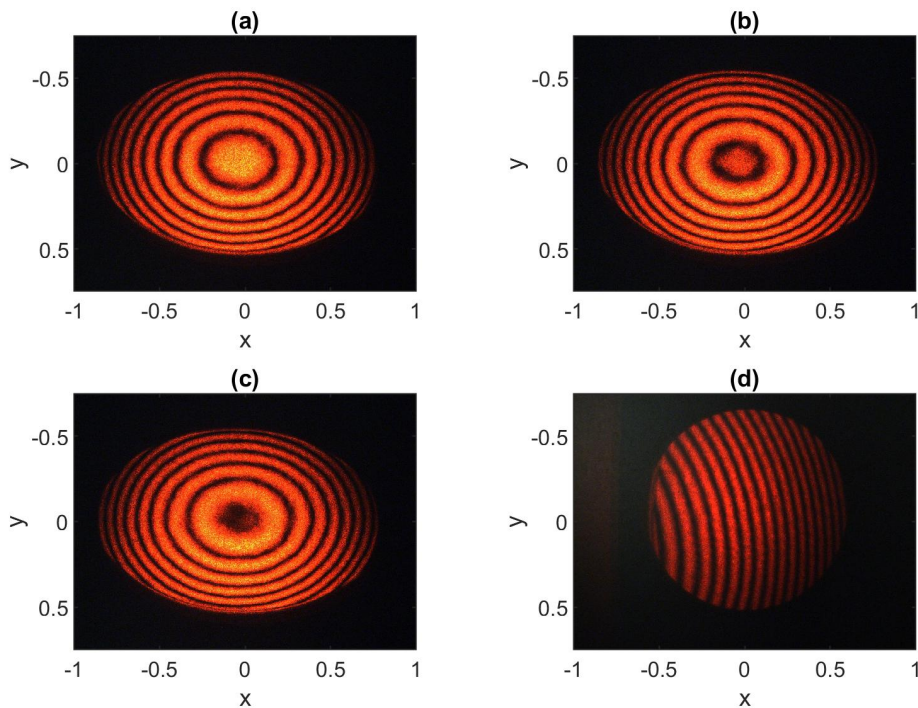


Fig. 1.3. Patrones de franjas típicos generados con el interferómetro de Michelson. (a)-(c) Patrones de franjas con corrimiento de fase introducido trasladando el espejo de referencia. (d) Patrón de franjas con “corrimiento de fase espacial” introducido inclinando el espejo de referencia.

convenientemente el contenido espectral de la función de fase $\phi(x, y)$ en el plano de Fourier. Así, se puede usar la transformada de Fourier de $I(x, y)$ para extraer la fase de interés $\phi(x, y)$ a través de un proceso de filtraje [19, 20]. Los detalles de este método de recuperación de fase usando solo un patrón de franjas con corrimiento de fase espacial será analizado en la sección 3.2 de esta tesis.

El método de corrimiento de fase [17, 18] y el método de análisis de Fourier [19, 20] son enfoques clásicos de extracción de fase basados en interferencia. En la sección 3 de esta tesis se presentarán los principios teóricos de operación de estos métodos.

Desde entonces, la extracción de fase por procesamiento de patrones de franjas ha sido un tema de investigación muy activo [21, 22]. Recientemente, se han sugerido alternativas a los métodos clásicos de extracción de fase que incrementan la flexibilidad y eficiencia de estos métodos. A continuación se hace una breve descripción de las alternativas que serán analizadas en este trabajo de tesis.

La característica más restrictiva de los algoritmos de corrimiento de fase clásicos es la necesidad de conocer el corrimiento de fase *a priori*. En muchas condiciones experimentales, el corrimiento de fase es difícil de controlar. En estas aplicaciones, los algoritmos clásicos de corrimiento de fase son inaplicables. Para afrontar este problema, se han propuesto generalizados algoritmos que incluyen rutinas especia-

les para la estimación de corrimiento de fase. Es por eso que en el capítulo 3 se profundiza el problema de conocer el valor de corrimiento de fase analizando los métodos de Takeda, Brunning y Gravenkamp. Así como un especial análisis del método de Gram-Schmidt [23] y la alternativa de extraer la fase por medio de la minimización del coeficiente de variación [24] en la sección 3.5

En general, los métodos de corrimiento de fase están basados en la explotación de propiedades de los patrones de franjas. Por ejemplo, la ortogonalidad de los patrones de franjas con corrimiento de fase [23] o que el valor esperado de una señal cosenoidal es cero [25, 26]. Recientemente, se ha propuesto un enfoque diferente basado en optimización que consiste en la minimización del coeficiente de variación de la luz de modulación [27]. En la sección 3.6 de esta tesis se analizarán los detalles de esta nueva propuesta y se plantearán las ventajas y desventajas de este enfoque.

1.3. Estructura del documento

El contenido de esta tesis está organizado en cuatro capítulos. El capítulo 1 realiza la introducción de esta tesis. El capítulo 2 presenta la teoría detrás de la recuperación de fase por el fenómeno de difracción, el formalismo operacional usado para la descripción del arreglo 4f, la presentación del algoritmo Gerchberg –Saxton, y finalmente la implementación computacional así como la evaluación experimental. El capítulo 3 contiene la descripción de métodos de recuperación de fase por el fenómeno de interferencia. En este capítulo se abordan 5 métodos en los cuales se resaltan las ventajas y desventajas de estos, así como sus respectivas simulaciones computacionales. En este capítulo también se incluyen secciones donde se aborda la estimación de la luz de fondo, el desenvolvimiento de fase, el método de búsqueda por intervalos y el concepto de coeficiente de variación. Finalmente, el capítulo 4 presenta las conclusiones de este trabajo sobre alternativas de recuperación de fase por el fenómeno de difracción y por el fenómeno de interferencia.

Capítulo 2

Recuperación de fase por difracción

En este capítulo se analizará el método de extracción de fase por difracción usando el algoritmo iterativo de Gerchberg-Saxton. Iniciaremos con una breve introducción sobre la teoría de difracción. Posteriormente, se abordará el algoritmo iterativo de Gerchberg-Saxton. Se realizará la implementación computacional y se evaluará el rendimiento del algoritmo usando simulaciones computacionales y datos experimentales.

2.1. El fenómeno de difracción

La difracción es un fenómeno característico de cualquier onda, como las ondas sonoras y las ondas electromagnéticas [28]. En el espacio libre, las ondas se propagan con direcciones radiales desde la fuente de emisión. Sin embargo, cuando la onda encuentra un obstáculo, las direcciones de propagación dejan de ser rectas observándose que las ondas “rodean” el obstáculo.

Newton consideraba que la luz estaba formada por trenes de pequeñas partículas que viajaban en línea recta. Esta teoría predecía que se debería observar una sombra bien definida cuando la luz encuentra un obstáculo durante su propagación. Sin embargo, las observaciones experimentales realizadas por Thomas Young, que consistía en hacer llegar hasta una pantalla la luz de un haz que pasa a través de dos finísimas ranuras muy cercanas, mostraron que dos haces que se superponen producen bandas luminosas alternadas con bandas oscuras. Este tipo de fenómenos puede darse con ondas y nunca con partículas.

Para que Young se interesara sobre el cuestionamiento de la naturaleza de la luz, hizo uso del principio de Huygens. En la teoría de Huygens, un frente de onda está compuesta por la contribución de los frentes de onda provenientes de ondas secundarias. En otras palabras, un frente de onda es la envolvente de las ondas secundarias.

Un campo difractado por una abertura puede interpretarse entonces, como si surgiera de fuentes puntuales secundarias ubicadas dentro de la propia abertura. Para calcular el campo difractado podemos usar la suposición de Fresnel que es una consecuencia inherente de la naturaleza ondulatoria de la luz, como lo ideó Kirchhoff. Para esto es conveniente considerar a cada fuente puntual como una onda secundaria con cierta amplitud y fase. Esto nos lleva a considerar el campo difractado como una función compleja.

La ventaja de usar funciones complejas para describir la difracción de la luz es que permite usar herramientas matemáticas potentes bien conocidas como la convolución y la transformada de Fourier. Esto nos permitirá calcular el frente de onda de un campo difractado a una distancia dada si se conoce la amplitud y la fase del frente de onda de entrada [9].

2.2. Difracción de Fresnel

Los avances de Huygens y Young se reunieron en 1818 cuando Augustin Jean Fresnel realizó algunas suposiciones, bastante arbitrarias, sobre las amplitudes y fases de las fuentes secundarias de Huygens. Fresnel consideró que las diversas ondulaciones interfieren mutuamente, y así logró calcular la distribución de la luz en patrones de difracción con excelente precisión [9]. A continuación se ilustra brevemente el principio de Huygens-Fresnel.

Considere una abertura en el plano (ξ, η) iluminada en dirección $+z$ como se muestra en la Fig. 2.1. El campo de luz que alcanza el plano (x, y) , paralelo a (ξ, η) , puede calcularse usando el principio de Huygens-Fresnel como [9]

$$U_I(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \cos \theta ds, \quad (2.1)$$

donde θ es el ángulo entre la normal de salida \hat{n} y el vector $r_{01}^{\vec{}}$ apuntando de P_0 a P_1 .

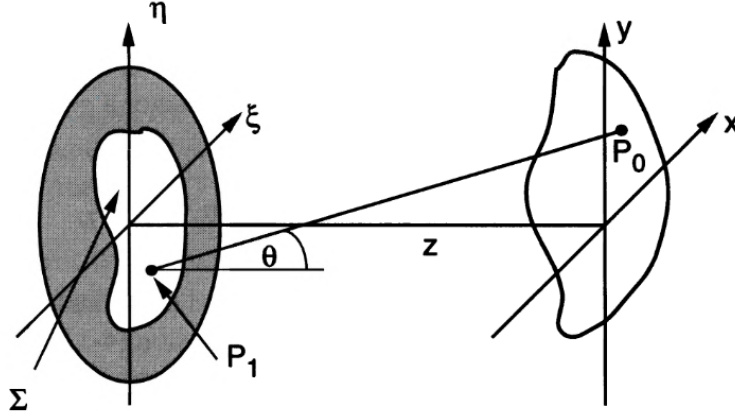


Fig. 2.1. Geometría de la difracción de Fresnel. Imagen tomada del libro de Joseph W. Goodman [9].

De la Fig. 2.1 se puede ver que el término $\cos \theta$ es exactamente dado por $\cos \theta = z/r_{01}$. Así, podemos reescribir el principio de Huygens-Fresnel como

$$U(x, y) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}^2} d\xi d\eta, \quad (2.2)$$

donde $r_{01}^2 = z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$. Podemos aproximar la distancia r_{01} , usando la serie de Taylor $\sqrt{1 + b} = 1 + b/2 - b^2/8 + \dots$, como

$$r_{01} \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - \xi}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - \eta}{z} \right)^2 \right]. \quad (2.3)$$

Observe que la distancia r_{01} aparece en la integral de Huygens-Fresnel como amplitud (en el denominador) y como fase (dentro de la función exponencial compleja). Esta observación permite discutir si es necesario usar la misma aproximación en cada caso, o si podemos usar diferentes aproximaciones y qué grado de aproximación será suficiente.

Es fácil comprobar experimentalmente que la amplitud de un haz de luz propagándose cambia muy lentamente con la distancia z . Por el contrario, la fase de un haz de luz cambia muy rápidamente con la distancia recorrida z . Con este razonamiento, podemos justificar una aproximación de primer orden de r_{01} para la amplitud y una aproximación de segundo orden para la fase. Por lo tanto, el campo de luz difractado se puede expresar como

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp \left\{ j \frac{k}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta, \quad (2.4)$$

que es conocida como la integral de Huygens-Fresnel. La ecuación (2.4) se puede visualizar como la siguiente convolución

$$U(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (2.5)$$

donde $h(x, y)$ es el kernel de la convolución dado por

$$h(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \exp \left[\frac{jk}{2z}(x^2 + y^2) \right]. \quad (2.6)$$

Es posible desarrollar los binomios cuadrados en la exponencial compleja de la Ec. (2.4) y factorizar el término $\exp[jk(x^2+y^2)/2z]$. De esta forma se puede reescribir el principio de Huygens-Fresnel como

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(\xi, \eta) e^{j\frac{k}{2z}(\xi^2+\eta^2)} \right\} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta, \quad (2.7)$$

que es conocida como *difracción de Fresnel*. Cuando esta aproximación es válida, se dice que el observador está en la región de difracción de Fresnel, o de manera equivalente en el campo cercano de la abertura. En la siguiente sección analizaremos el caso cuando la distancia entre la abertura es mayor, campo lejano, tal que se pueden aplicar otras aproximaciones.

2.3. Difracción de Fraunhofer

Analizando nuevamente la función de fase en la función exponencial, vemos que las ondas esféricas secundarias del principio Huygens-Fresnel pueden ser reemplazadas por ondas parabólicas. De forma general, esta aproximación será válida cuando la distancia de propagación z es suficientemente grande como para que las ondas esféricas secundarias puedan considerarse parabólicas. Formalmente,

$$z \gg \frac{k(\xi^2 + \eta^2)_{max}}{2}. \quad (2.8)$$

Cuando esta aproximación es válida, los cálculos se simplifican considerablemente como veremos a continuación. Observe que en la difracción de Fresnel dada por la Ec. (2.7), se considera el producto del campo de intensidad observado $U(x, y)$ con una fase cuadrática; es decir,

$$U(\xi, \eta) \exp \left[j\frac{k}{2z}(\xi^2 + \eta^2) \right]. \quad (2.9)$$

Sin embargo, el factor de fase cuadrática $\exp[jk(\xi^2 + \eta^2)/2z]$ es aproximadamente la unidad sobre toda la abertura. Por lo tanto, el campo observado se puede calcular directamente (excepto un factor de fase multiplicativo) a través de la transformada de Fourier

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz} e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp \left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta) \right] d\xi d\eta, \quad (2.10)$$

que es conocida como *difracción de Fraunhofer*. En otras palabras, la distribución del campo óptico en el patrón de difracción de Fraunhofer es la transformada de Fourier de la distribución del campo óptico sobre la abertura.

Las condiciones requeridas para la validez de la aproximación de Fraunhofer pueden llegar a ser extremas. Por ejemplo, para una longitud de onda de 600 nanómetros (luz roja) y una abertura de 2.5 centímetros, la condición es que $z \gg 1600$ metros. Aún con las condiciones teóricas, los patrones de difracción de Fraunhofer se pueden observar a distancias mucho menores. Por ejemplo, usando una lente positiva simple como se describe a continuación.

2.4. Sistema óptico con lente delgada

En esta sección emplearemos la teoría de difracción que se ha expuesto en las secciones previas para introducir la notación operacional de la óptica de Fourier. Esto nos ayudara expresar los desarrollos analíticos en una forma más simple y compacta. Por otro lado, se mostrará que una lente delgada simple puede ser empleada para obtener una transformada de Fourier de un campo óptico.

2.4.1. Formalismo operacional

En etapas posteriores de esta tesis se desea determinar la distribución de amplitud compleja en un plano de salida de un sistema óptico cuando se conoce la distribución en un plano de entrada. Por ejemplo, en la Fig. 2.2 se muestra un campo de entrada $U_1(\vec{p}_1)$ en el plano 1, y el respectivo campo de salida $U_2(\vec{p}_2)$ que corresponde a la propagación de U_1 a través de la distancia d . Para describir la propagación de un campo de manera operacional se hace uso del concepto de difracción de Fresnel descrita por la ecuación 2.7.

Sea la integral de Huygens-Fresnel descrita como

$$U_2(\vec{p}_2) = \frac{\exp(jkd)}{j\lambda d} \int \exp\left(\frac{jk(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)^2}{2d}\right) U_1(\vec{p}_1) d\vec{p}_1 \quad (2.11)$$

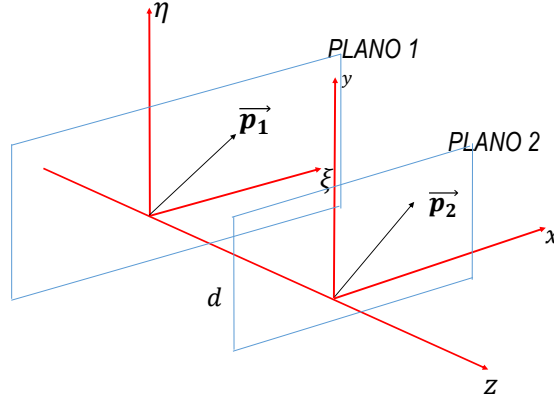


Fig. 2.2. Propagación de un campo óptico desde un plano 1, hasta un plano 2.

Se desarrolla el lado derecho de la ecuación 2.11, obteniendo lo siguiente

$$\begin{aligned}
 U_2(\vec{p}_2) &= \frac{\exp(jkd)}{j\lambda d} \exp\left(\frac{jkp_2^2}{2d}\right) \int U_1(\vec{p}_1) \exp\left(\frac{jkp_1^2}{2d}\right) \times \exp\left(-j\frac{kp_2}{d} \cdot \vec{p}_1\right) d\vec{p}_1 \\
 &= \frac{\exp(jkd)}{j\lambda d} \exp\left(\frac{jkp_2^2}{2d}\right) \mathcal{F} \left\{ U_1(\vec{p}_1) \exp\left(\frac{jkp_1^2}{2d}\right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Para el análisis subsecuente, es conveniente realizar las siguientes definiciones. Definimos un vector \vec{p} de manera estándar como un radio vector transversal $\vec{p} = x\hat{x} + y\hat{y}$. Asimismo, d es el espacio relativo entre el plano de entrada y el plano de salida. También, \vec{v} es un vector independiente al que comúnmente se le asocian las variables de frecuencias. Finalmente, $p = |\vec{p}|$. Con estas definiciones podemos definir el operador de transformada de Fourier \mathcal{F} sobre una función $f(\vec{p})$ como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(\vec{p})] &= \int f(\vec{p}) \exp(-j2\pi\vec{v} \cdot \vec{p}) d\vec{p} \\
 &= \int \exp(-j2\pi\vec{v} \cdot \vec{p}) f(\vec{p}) d\vec{p} \\
 &= \mathcal{F}f(\vec{p}).
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

También son de utilidad los operadores de escala \mathcal{V} y fase cuadrática \mathcal{Q} que operan sobre una función $f(\vec{p})$ y están definidos como

$$\mathcal{V}[s]f(\vec{p}) = f(s\vec{p}), \tag{2.14}$$

con s parámetro del operador, y

$$\mathcal{Q}[a]f(\vec{p}) = \exp\left[j\frac{ak}{2}p^2\right] f(\vec{p}). \tag{2.15}$$

Con los operadores definidos, la ecuación (2.12) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
 U_2(\vec{p}_2) &= \frac{\exp(jkd)}{j\lambda d} \exp\left(\frac{jkp_2^2}{2d}\right) \int U_1(\vec{p}_1) \exp\left(\frac{jkp_1^2}{2d}\right) \times \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda d}\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_1\right) d\vec{p}_1 \\
 &= \frac{\exp(jkd)}{j\lambda d} \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d}\right] \underbrace{\int \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda d}\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_1\right) \exp\left(\frac{jkp_1^2}{2d}\right) U_1(\vec{p}_1) d\vec{p}_1}_E
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Observe que la integral E en la ecuación (2.16) es una transformada de Fourier escalada. Así, usando el operador escala, tenemos

$$\begin{aligned}
 U_2(\vec{p}_2) &= \frac{\exp(jkd)}{j\lambda d} \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d}\right] \mathcal{V}\left[\frac{1}{\lambda d}\right] \mathcal{F}\left[\exp\left(\frac{jkp_1^2}{2d}\right) U_1(\vec{p}_1)\right] \\
 &= \frac{\exp(jkd)}{j\lambda d} \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d}\right] \mathcal{V}\left[\frac{1}{\lambda d}\right] \mathcal{F}\mathcal{Q}\left[\frac{1}{d}\right] U_1(\vec{p}_1).
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

La ecuación (2.17) representa la propagación del campo U_1 en el plano de entrada a través de una distancia d hasta obtener el campo u_2 en el plano de salida. Este fenómeno se puede expresar más directamente usando el operador de propagación en el espacio libre definido como

$$\mathcal{R}[d] = \frac{\exp(jkd)}{j\lambda d} \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d}\right] \mathcal{V}\left[\frac{1}{\lambda d}\right] \mathcal{F}\mathcal{Q}\left[\frac{1}{d}\right]. \tag{2.18}$$

Una expresión alternativa para el operador de propagación en el espacio libre viene de la definición elemental del fenómeno de difracción. Recordemos que cada punto de un campo óptico se comporta como una fuente puntual y su contribución se propaga de forma esférica. En la aproximación paraxial, un frente de onda esférico se aproxima a un frente de onda cuadrático. Además, en campo óptico difractado, interfieren las contribuciones de todos los puntos en el campo de entrada. Esto se puede escribir de forma simple como la convolución de una fuente puntual (aproximada por una fase cuadrática) con el campo de óptico de entrada; es decir,

$$U_2(\vec{p}_2) = \frac{\exp(jkd)}{j\lambda d} \exp\left(\frac{jkp_2^2}{2d}\right) \otimes U_1(\vec{p}_1), \tag{2.19}$$

donde \otimes es el operador de convolución. Usando propiedades de la transformada de Fourier podemos obtener el espacio de frecuencias como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[U_2(\vec{p}_2)] &= \mathcal{F}\left[\frac{\exp(jkd)}{j\lambda d} \exp\left(\frac{jkp_2^2}{2d}\right)\right] \mathcal{F}[U_1(\vec{p}_1)] \\
 &= e^{jkd} \exp\left[-\frac{k}{2}\lambda^2 dp_2^2\right] \mathcal{F}[U_1(\vec{p}_1)] \\
 &= e^{jkd} \mathcal{Q}[-\lambda^2 d] \mathcal{F}[U_1(\vec{p}_1)].
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

De esta forma, aplicando la transformada de Fourier inversa, obtenemos el campo difractado $U_2(\vec{p}_2)$ como

$$U_2(\vec{p}_2) = \mathcal{F}^{-1} \left[e^{jkd} \mathcal{Q} \left[-\lambda^2 d \right] \mathcal{F} [U_1(\vec{p}_1)] \right]. \quad (2.21)$$

De este análisis, se obtiene una segunda definición del operador de difracción en el espacio libre como

$$\mathcal{R}[d] = e^{jkd} \mathcal{F}^{-1} \mathcal{Q} \left[-\lambda^2 d \right] \mathcal{F}. \quad (2.22)$$

2.4.2. Lente delgada simple

En la Fig. 2.3 se muestra el esquema de una lente delgada donde U_i y U'_i son el campo de entrada y salida, respectivamente. Se sabe de la literatura, que una lente delgada agrega un término de fase cuadrática al campo de entrada [9]. Así, el campo de salida se puede expresar como

$$U'_i(x, y) = U_i(x, y) \exp \left[-j \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right]. \quad (2.23)$$

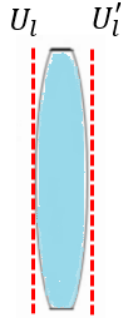


Fig. 2.3. Lente delgada simple.

La ecuación (2.23) se puede escribir de forma compacta como

$$U'_i(x, y) = \mathcal{Q} \left[-\frac{1}{f} \right] U_i(x, y), \quad (2.24)$$

donde \mathcal{Q} es un operador que agrega un término de fase cuadrática y está definido como

$$\mathcal{Q} \left[-\frac{1}{f} \right] = \exp \left[-j \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right]. \quad (2.25)$$

De manera general una distribución $U_{entrada}$, que incide sobre una lente delgada (u otro elemento óptico delgado) emergerá una como una distribución U_{salida} dada por

$$U_{salida} = \mathcal{T}U_{entrada}, \quad (2.26)$$

donde \mathcal{T} es un operador que representa la función de transferencia de la lente o cualquier otro sistema óptico en general.

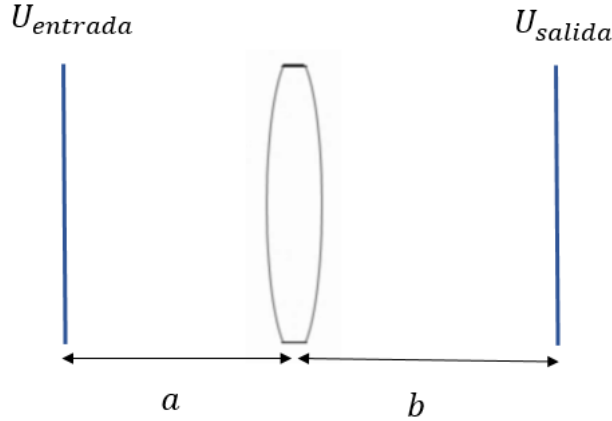


Fig. 2.4. Sistema óptico con una lente delgada de distancia focal f .

Considere la configuración particular ilustrada en la Fig. 2.4. El campo óptico de entrada se propaga por el espacio libre una distancia a , después atraviesa la lente que induce un término de fase cuadrática, y posteriormente continúa propagándose en el espacio libre una distancia b . Para este sistema óptico simple, el operador \mathcal{T} está definido matemáticamente a través de la cadena de operadores

$$\mathcal{T} = \mathcal{R}[b] \mathcal{Q} \left[-\frac{1}{f} \right] \mathcal{R}[a]. \quad (2.27)$$

De la ecuación (2.27) se pueden encontrar propiedades útiles de la lente simple. Por ejemplo, eligiendo apropiadamente a y b con respecto a la distancia focal de la lente, el sistema óptico de la figura 2.4 puede formar la imagen del campo de entrada, o se puede emplear para obtener la transformada de Fourier como veremos a continuación.

De la ecuación (2.27), sustituimos el operador de propagación $\mathcal{R}[a]$ y $\mathcal{R}[b]$ por las definiciones en (2.22) y (2.18), respectivamente, obteniendo

$$\mathcal{T} = \frac{e^{jk(b+a)}}{j\lambda b} \mathcal{Q} \left[\frac{1}{b} \right] \mathcal{V} \left[\frac{1}{\lambda b} \right] \mathcal{F} \mathcal{Q} \left[\frac{1}{b} \right] \mathcal{Q} \left[-\frac{1}{f} \right] \mathcal{F}^{-1} \mathcal{Q} \left[-\lambda^2 a \right] \mathcal{F}, \quad (2.28)$$

si $b = f$, los operadores \mathcal{Q} en la parte central del lado derecho de la ecuación se cancelan. Entonces, el producto $\mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}$ se cancelará también. Conmutando \mathcal{V} con \mathcal{Q} se obtiene

$$\mathcal{T} = \frac{e^{jk(f+a)}}{j\lambda f} \mathcal{Q} \left[\frac{1}{f} \left(1 - \frac{a}{f} \right) \right] \mathcal{V} \left[\frac{1}{\lambda f} \right] \mathcal{F} \quad (2.29)$$

Esta ecuación es una transformada de Fourier con una escala y una fase cuadrática que se pueden cancelar tomando $a = f$. En esta configuración, de la ecuación (2.29),

se sigue que la lente simple obtiene la transformada de Fourier (escalada) del campo de entrada; matemáticamente,

$$\mathcal{T} = \frac{e^{jk(2f)}}{j\lambda f} \mathcal{V} \left[\frac{1}{\lambda f} \right] \mathcal{F} \quad (2.30)$$

Como podemos ver el sistema óptico generalizado con una lente, se considera como un sistema óptico de construcción a bloques por los operadores. El cual puede conectarse en cascada para construir un sistema óptico más complejo. Por ejemplo, la Fig. 2.5 un sistema óptico de dos lentes con distancia focal f . El plano intermedio es considerado como el plano de Fourier, de difracción o espacio de Frecuencias.

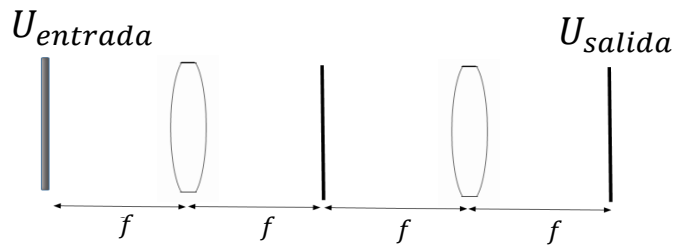


Fig. 2.5. Sistema óptico con dos lentes delgadas f .

Podemos observar que el sistema óptico es dos veces la configuración de la Fig.2.4. Es por eso que podemos llevar a cabo el análisis con el formalismo operacional. Tenemos que el operador de transferencia esta dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{e^{jk(2f)}}{j\lambda f} \mathcal{V} \left[\frac{1}{\lambda f} \right] \mathcal{F} \frac{e^{jk(2f)}}{j\lambda f} \mathcal{V} \left[\frac{1}{\lambda f} \right] \mathcal{F} \\ &= -\frac{e^{jk(4f)}}{\lambda^2 f^2} \mathcal{V} \left[\frac{1}{\lambda f} \right] \mathcal{V} [\lambda f] \mathcal{F} \mathcal{F} \\ &= -\frac{e^{jk(4f)}}{\lambda^2 f^2} \mathcal{V} [-1] \end{aligned} \quad (2.31)$$

Por lo tanto, la distribución de salida se obtiene como

$$U_{salida} = -\frac{e^{jk(4f)}}{\lambda^2 f^2} \mathcal{V} [-1] U_{entrada} \quad (2.32)$$

Este resultado significa que el patrón de entrada se reproduce exactamente igual pero al revés. De manera que esta propiedad que brinda esta configuración es de mucha ayuda para la siguiente sección ya que se necesita las mediciones de intensidad del plano imagen y el de difracción para implementar el método de Gerchberg-Saxton.

2.5. Algoritmo iterativo de Gerchberg-Saxton

En experimentos de recuperación de fase, es posible construir arreglos experimentales para registrar la intensidad del haz de luz de interés en dos planos que llamaremos: *plano imagen* y *plano de difracción*. Usando la teoría de difracción, se puede obtener la solución de los siguientes problemas.

- Dada la amplitud y fase del campo de luz en el plano imagen, calcular la correspondiente amplitud y fase en el plano de difracción.
- De forma similar, dada la amplitud y fase del campo de luz en el plano de difracción, calcular la correspondiente amplitud y fase en el plano imagen.

Para la solución de los problemas anteriores, basta con resolver la integral de Fresnel. Sin embargo, se requiere conocer tanto la amplitud como la fase del campo. Desafortunadamente, con la tecnología actual no es posible sensar la fase de un haz de luz. Sólo es posible realizar mediciones de intensidad (de la cual se obtiene la amplitud). Por lo tanto, la recuperación de fase de un campo de luz se puede formular como un nuevo problema de estimación como se enuncia a continuación.

- Dada la amplitud de un campo de luz en el plano imagen y el plano de difracción, calcular la fase en el plano imagen [29, 30].

Para resolver el problema de recuperación de fase, iniciemos con el siguiente análisis. Considere que una onda se propaga desde el plano imagen hasta el plano de difracción. Suponga que solo se conoce la amplitud de la onda en los dos planos. Entonces, se debe hallar de alguna manera la función de fase desconocida de tal forma que al introducirla en la integral de Fresnel se pueda reproducir las medidas de amplitud conocidas.

Resolver la transformada de Fresnel implica una carga computacional que puede ser considerable, especialmente para imágenes de alta resolución (millones de píxeles). Podemos reducir la carga computacional realizando las mediciones de intensidad en dos planos elegidos convenientemente. Específicamente, el plano imagen y su correspondiente plano de Fourier. En este caso, la recuperación de fase se puede realizar eficientemente usando la transformada de Fourier en el algoritmo iterativo de Gerchberg-Saxton que se analizará en este capítulo.

Para realizar mediciones de intensidad en el plano de Fourier, podemos construir un procesador óptico que recibe el campo de luz a analizar en el plano imagen y la “propaga hasta el infinito” tal que en la salida del procesador se obtiene la transformada de Fourier de la entrada (difracción de campo lejano). En este caso particular, podemos sustituir la integral de Fresnel por la transformada de Fourier para realizar los cálculos de amplitud y fases necesarios. Este es el principio de operación del método de Gerchberg-Saxton [31].

El enfoque de Gerchberg-Saxton ofrece enormes ventajas computacionales y de implementación. Numéricamente, la implementación computacional es bastante eficiente usando el algoritmo de transformada rápida de Fourier. Asimismo, la implementación experimental podría incluso solo requerir de una lente simple para analizar frentes de onda obtenidos a través de fuentes láser.

En la Fig. 2.6 se muestra un diagrama de bloques que ilustra el algoritmo iterativo de Gerchberg-Saxton. El algoritmo usa como entradas las intensidades

$$I_1(x, y) \quad \text{e} \quad I_2(x, y) \tag{2.33}$$

medidas en el plano imagen y el plano de difracción, respectivamente. Con esta información, el algoritmo busca las funciones de fase

$$\phi(x, y) \quad \text{y} \quad \varphi(x, y) \tag{2.34}$$

tal que los campos resultantes,

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \sqrt{I_1(x, y)} \exp [i\phi(x, y)] \quad \text{y} \\ G(x, y) &= \sqrt{I_2(x, y)} \exp [i\varphi(x, y)], \end{aligned} \tag{2.35}$$

satisfagan el modelo de difracción. Los elementos constitutivos del algoritmo iterativo de Gerchberg-Saxton son los siguientes:

1. Inicio.
2. Actualización en el plano de difracción.
3. Actualización en el plano imagen.
4. Iteración.
5. Paro.

A continuación se describen los detalles de los cinco elementos que conforman el algoritmo de Gerchberg-Saxton. El algoritmo de Gerchberg-Saxton es ilustrado mediante el diagrama de bloques mostrado en la Fig. 2.6.

Observe que en la Figura 2.6 podemos darnos cuenta que el mecanismo del diagrama de bloques se rige básicamente en el cambio de la distribución de amplitud cada vez que la transformada de Fourier se aplica, esto resulta en un cambio o una actualización de la fase.

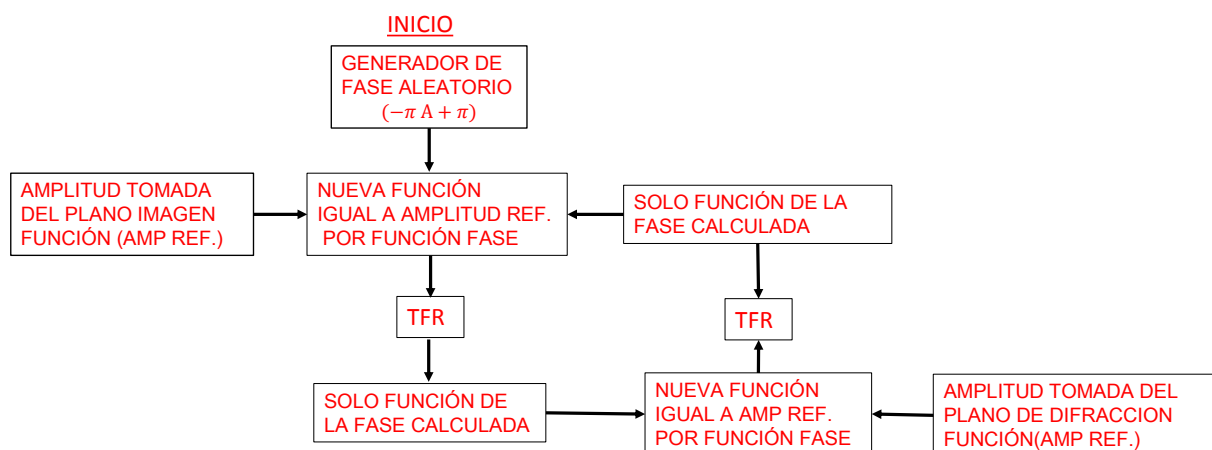


Fig. 2.6. Diagrama de bloques del algoritmo iterativo de Gerchberg-Saxton para recuperación de fase por difracción.

2.5.1. Inicio

Iniciamos en el plano imagen. Para construir el campo E , se propone una función de fase con números aleatorios uniformemente distribuidos en el intervalo $[-\pi, \pi]$ radianes. Matemáticamente,

$$E_0(x, y) = \sqrt{I_1(x, y)} \exp [i\phi_0(x, y)], \quad (2.36)$$

con la fase inicial

$$\phi_0(x, y) \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi), \quad (2.37)$$

donde $\mathcal{U}(a, b)$ regresa números aleatorios uniformemente distribuidos en el intervalo $[a, b]$.

La función de fase inicial no debe ser necesariamente generada como números aleatorios. Por el contrario, una función de fase inicial aproximada a la fase correcta disminuirá el número de iteraciones requerido para que el algoritmo reduzca el error a un valor aceptable. Sin embargo, ciertas distribuciones de fase inicial podrían hacer que el algoritmo falle. Por ejemplo, cuando el valor de fase es idéntico para todos los píxeles y el patrón de intensidad tanto en la imagen como en el plano de difracción posee simetría circular. Esto provocará que la distribución de fase no cambie en la transformación de Fourier y por lo tanto el algoritmo falle al no poder modificar la función de fase entre cada iteración.

2.5.2. Actualización en el plano de difracción

Una vez construido el campo complejo $E_0(x, y)$, se calcula el campo $G_0(x, y)$ correspondiente al plano de difracción usando la transformada de Fourier como

$$G_0(x, y) = B_0(x, y) \exp [i\varphi_0(x, y)] = \mathcal{F}[E_0(x, y)]. \quad (2.38)$$

El resultado es un nuevo campo complejo con amplitud $B_0(x, y)$ y fase φ_0 . De este nuevo campo solo tenemos certeza de la amplitud (puesto que se conoce experimentalmente a través de las mediciones de intensidad proporcionadas). Entonces, actualizamos el campo complejo conservando solo la fase φ_0 y sustituyendo la amplitud con la información experimental como

$$\tilde{G}_0(x, y) = \sqrt{I_2(x, y)} \exp [i\varphi_0(x, y)]. \quad (2.39)$$

Este paso finaliza con la obtención del campo complejo “corregido” \tilde{G}_0 , que será usado en el siguiente paso del algoritmo.

2.5.3. Actualización en el plano imagen

Ahora, desde el plano de difracción, podemos usar el campo complejo \tilde{G}_0 para calcular el campo complejo correspondiente en el plano imagen. Para ello, calculamos la transformada inversa de Fourier como

$$E_1(x, y) = A_1(x, y) \exp [i\phi_1(x, y)] = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{G}_0(x, y)]. \quad (2.40)$$

Nuevamente, del campo $E_1(x, y)$ solo tenemos certeza de su amplitud. Por lo tanto, conservamos la fase calculada $\phi_1(x, y)$ y sustituimos la amplitud calculada $A_1(x, y)$ por la medición experimental proporcionada; es decir,

$$\tilde{E}_1(x, y) = \sqrt{I_1(x, y)} \exp [i\phi_1(x, y)]. \quad (2.41)$$

El resultado de este paso es una nueva aproximación de la función de fase que debería existir en el plano imagen que satisface el modelo de difracción (Fraunhofer en este caso).

2.5.4. Iteración

El proceso de actualización del campo complejo en los planos imagen y difracción se puede repetir para mejorar iterativamente la fase estimada. Esto es, para la k -ésima iteración, tenemos disponible el campo complejo $\tilde{E}_k(x, y)$ en el plano imagen. Entonces calculamos la correspondiente fase y campo complejo en el plano de difracción como

$$\begin{aligned} \varphi_k(x, y) &= \arg \left(\mathcal{F} \left[\tilde{E}_k(x, y) \right] \right), \\ \tilde{G}_k(x, y) &= \sqrt{I_2(x, y)} \exp [i\varphi_k(x, y)], \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde $\arg(\cdot)$ retorna el argumento o fase de la función compleja dada como entrada. El bucle se cierra tomando el campo $\tilde{G}_k(x, y)$ del plano de difracción y regresar al plano imagen calculando la correspondiente fase y campo complejo como

$$\begin{aligned}\phi_{k+1}(x, y) &= \arg\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\tilde{G}_k(x, y)\right]\right), \\ \tilde{E}_{k+1}(x, y) &= \sqrt{I_1(x, y)} \exp[i\phi_{k+1}(x, y)].\end{aligned}\tag{2.43}$$

De forma compacta, el proceso iterativo de recuperación de fase del algoritmo de Gerchberg-Saxton se puede describir como sigue. Dadas las intensidades I_1 , I_2 , y la fase ϕ_k en el plano imagen, calculamos una nueva fase ϕ_{k+1} como

$$\phi_{k+1} = \arg\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\sqrt{I_2} \exp\left[i \arg\left(\mathcal{F}\left[\sqrt{I_1} \exp[i\phi_k]\right]\right)\right]\right]\right),\tag{2.44}$$

donde la dependencia explícita en (x, y) fue omitida por brevedad en la notación. En la Figura. 2.7 se presenta una descripción gráfica del bucle de iteración del algoritmo de Gerchberg-Saxton, recalamos que una vez que se tiene una fase ϕ_{k+1} esta se renombra como ϕ_k . Así $\sqrt{I_1}$ participa como amplitud y ϕ_k como argumento del campo \tilde{E}_k . Después de construir \tilde{E}_k de nuevo se aplica la transformada de Fourier.

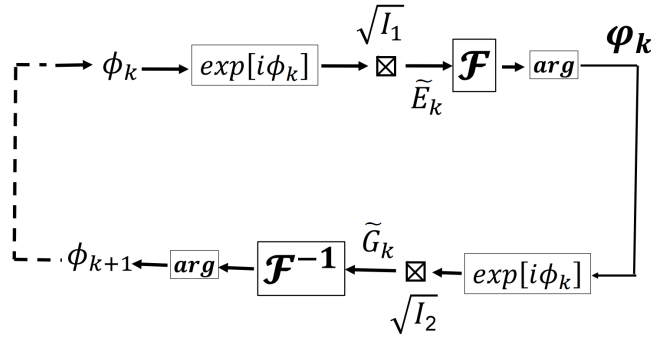


Fig. 2.7. Bucle de iteración del algoritmo de Gerchberg-Saxton.

Como el campo resultante es complejo, en el código (ver Figura 2.8) se observa que se utiliza la función `angle` lo que nos da la fase φ_k en la Figura 2.7 esta fase se usa como argumento para construir el campo \tilde{G}_k . Nuevamente como se indica en la Figura 2.8, usamos la transformada inversa de Fourier `ifft2`, al campo complejo obtenido extraemos la fase la cual hace que se inicie otra vez el ciclo.

```

1  function [phi,e,k] = gs_algorithm(I1,I2,n,tol,phi0)
2  %GS_ALGORITHM implements the Gerchberg-Saxton algorithm.
3  % This function returns the phase on the image plane
4  % given the intensities in the image and Fourier planes.
5  %
6  %Syntax:
7  % [phi,e,k] = gs_algorithm(I1,I2,n,tol,phi0)
8  %
9
10
11  if nargin == 4
12      phi0 = random('unif', -pi, pi, size(I1));
13  end
14
15  for k = 1:n
16      Et0 = sqrt(I1).*exp(1i*phi0);
17
18      G = fftshift(fft2(Et0));
19      Gt = sqrt(I2).*exp(1i*angle(G));
20
21      Et1 = ifft2(ifftshift(Gt));
22      phil = angle(Et1);
23
24      e = mean( (phil(:) - phi0(:)).^2 );
25      if e > tol
26          phi0 = phil;
27      else
28          break
29      end
30  end
31  phi = phil;
    
```

Fig. 2.8. Implementación en Matlab del algoritmo iterativo de Gerchberg-Saxton para la recuperación de fase.

2.5.5. Paro

Para detener el proceso iterativo del algoritmo de Gerchberg-Saxton, se pueden usar tres criterios. El primer criterio es la convergencia relativa de la fase calculada. Este criterio detiene el algoritmo cuando se satisface

$$\frac{1}{MN} \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N [\phi_k(x, y) - \phi_{k-1}(x, y)]^2 \leq \epsilon_\phi, \quad (2.45)$$

donde M y N son el número de columnas y filas (píxeles) de la imagen, respectivamente, y ϵ_ϕ es un valor de tolerancia fijado por el usuario. El segundo criterio considera el error cuadrático medio de las amplitudes calculadas. Este criterio detiene el algoritmo cuando se satisface

$$\begin{aligned} & \frac{1}{MN} \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N [I_1(x, y) - A_k^2(x, y)]^2 \\ & + \frac{1}{MN} \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N [I_2(x, y) - B_k^2(x, y)]^2 \leq \epsilon_I, \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde ϵ_I es un valor determinado por el usuario. El tercer criterio de paro es el número máximo de iteraciones. Este criterio detiene el algoritmo cuando se satisface

$$k > n, \quad (2.47)$$

donde n es el número máximo de iteraciones fijado por el usuario. En la práctica es típico usar el primer y tercer criterio. El primer criterio considera directamente la fase calculada (el cuál es el principal interés más que la amplitud), mientras que el tercer criterio impide que el algoritmo se ejecute indefinidamente cuando se pierde la convergencia.

2.6. Evaluación en simulación por computadora

2.6.1. Amplitud continua

De la implementación computacional mostrada en la Figura 2.8 observamos la función de amplitud y de fase que se presentan en la Figura 2.9(a) y 2.9(b) respectivamente. También podemos visualizar en 2D los planos imagen y de difracción los cuales fungen como entradas al algoritmo implementado en una función en Matlab. Note que la amplitud usada es de forma continua.

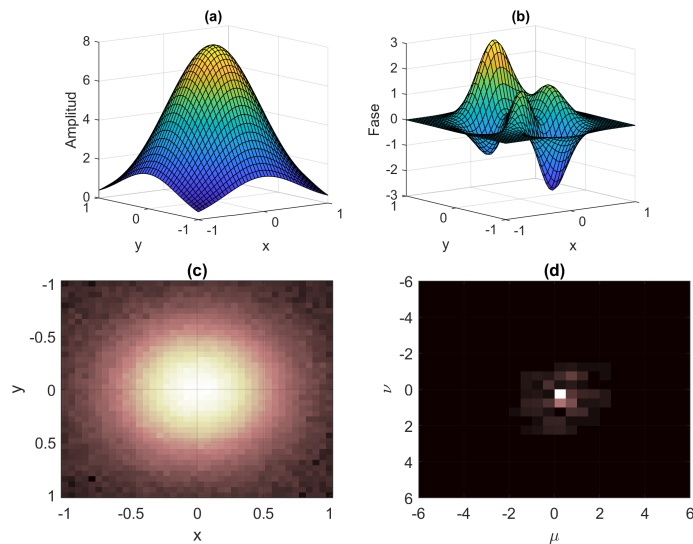


Fig. 2.9. Datos para la primera simulación por computadora considerando una amplitud continua. (a) Amplitud del campo complejo en el plano imagen. (b) Fase del campo en el plano imagen (a recuperar). (c) Intensidad en el plano imagen. (d) Intensidad en el plano de difracción. Los ejes xy en las Figs. (a)-(c) están dados en unidades de longitud, mientras que en la Fig. (d) los ejes $\mu\nu$ están dados en unidades de frecuencia espacial.

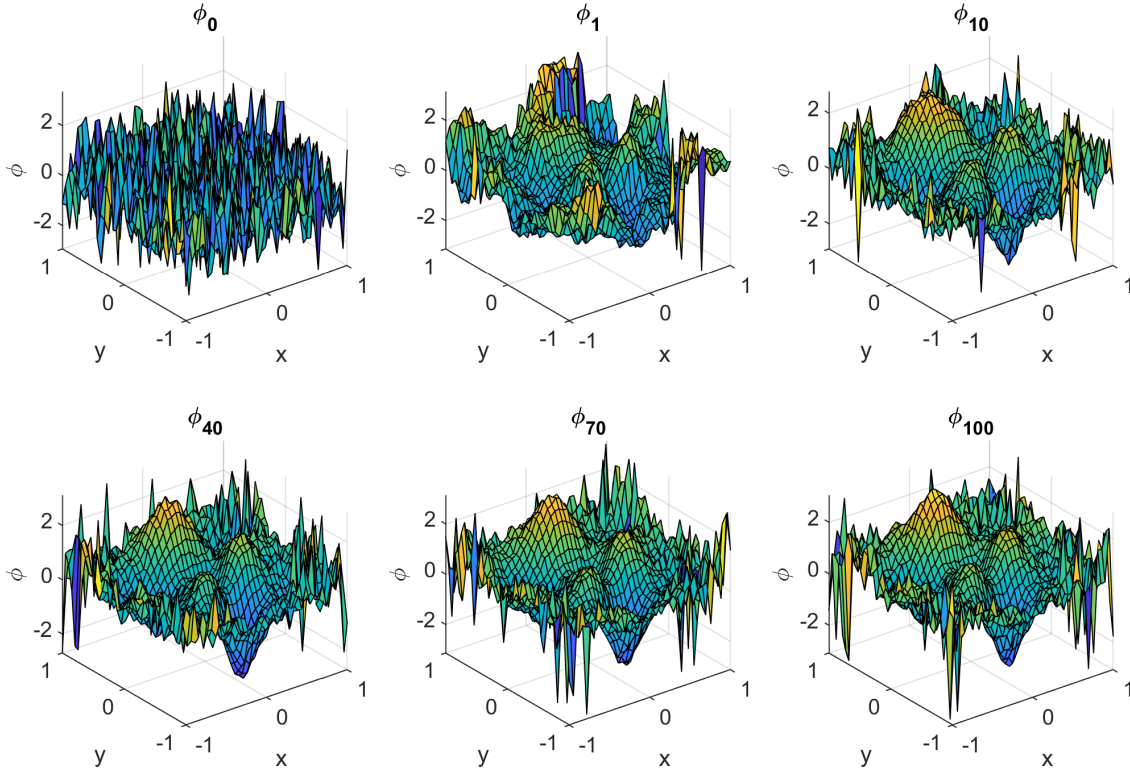


Fig. 2.10. Resultados de la primera simulación. (ϕ_0) Fase inicial. (ϕ_1) - (ϕ_{100}) Fase recuperada por el algoritmo de Gerchberg-Saxton usando 1, 10, 40, 70 y 100 iteraciones.

El desempeño del algoritmo iterativo de Gerchberg-Saxton fue evaluado usando una simulación en computadora. Para ello, consideramos una amplitud continua de la forma

$$A(x, y) = 8e^{-\frac{3}{2}(x^2+y^2)}, \quad (2.48)$$

y la fase en el plano imagen dada como

$$\phi(x, y) = \pi \left[3(1-x)^2 e^{-x^2-(y+1)^2} - 10 \left(\frac{x}{5} - x^3 - y^5 \right) e^{-x^2-y^2} - \frac{1}{3} e^{-(x+1)^2-y^2} \right], \quad (2.49)$$

donde las variables independientes fueron definidas en el intervalo $x, y \in [-3, 3]$ con 128 muestras uniformemente distribuidas en cada eje coordenado. En las Figs. 2.9(a) y 2.9(b) se muestran las gráficas de las funciones de amplitud $A(x, y)$ y fase $\phi(x, y)$ definidas en las Ecs. (2.48) y (2.49). Con estas funciones, los campos complejos $E(x, y)$ y $G(x, y)$ en los planos imagen y difracción, respectivamente, se construyeron como

$$\begin{aligned} E(x, y) &= A(x, y) \exp[i\phi(x, y)], \\ G(x, y) &= \mathcal{F}[E(x, y)]. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Las intensidades correspondientes en los planos de detección se determinaron como

$$\begin{aligned} I_1(x, y) &= |E(x, y)|^2 + \mathcal{N}(0, 1), \\ I_2(x, y) &= |G(x, y)|^2 + \mathcal{N}(0, 1 \times 10^3), \end{aligned} \quad (2.51)$$

donde $|\cdot|$ indica el valor absoluto y $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ genera números aleatorios de media cero y desviación estándar σ . Las intensidades resultantes se muestran en las Figs. 2.9(c) y 2.9(d).

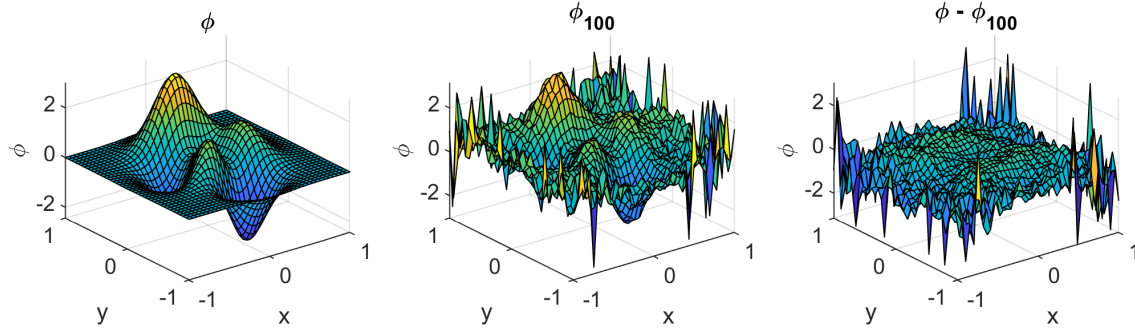


Fig. 2.11. Error de recuperación de fase en la primera simulación. (ϕ) Fase exacta a recuperar. (ϕ_{100}) Fase recuperada en cien iteraciones del algoritmo de Gerchberg-Saxton. $(\phi - \phi_{100})$ Error del proceso de recuperación de fase.

Se consideró una fase inicial dada por

$$\phi_0(x, y) = \frac{1}{4}\phi(x, y) + \mathcal{N}(0, 1). \quad (2.52)$$

La fase inicial resultante se muestra en la Fig. 2.10(ϕ_0). Observe que se asume que se cuenta con una aproximación inicial de la fase. Más adelante se hablará más sobre esta suposición.

La recuperación de fase al aplicar el algoritmo de Gerchberg-Saxton después de 1, 10, 40, 70, y 100 iteraciones se muestra en la Fig. 2.10(ϕ_1)-(ϕ_{100}). El error en la recuperación de fase se muestra en la Fig. 2.11. Observe que el error en la recuperación de fase tiende a cero en zonas de máxima amplitud del campo complejo. Por el contrario, el error en la recuperación de fase es mayor en regiones donde la amplitud del campo es cercana a cero. Este comportamiento obedece al hecho de que la intensidad es cero cuando la amplitud es cero, independientemente de su valor de fase.

2.6.2. Amplitud discontinua

En esta simulación usaremos la función de fase definida por la Ec. (2.49). Sin embargo, ahora consideramos una amplitud discontinua definida como la apertura cuadrada centrada en el origen dada por

$$A(x, y) = \begin{cases} 8, & \text{máx}(|x|, |y|) > 2/5, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (2.53)$$

La gráfica de esta función de amplitud se muestra en la Fig. 2.12(a). Construimos los campos complejos y los mapas de intensidad usando las Ecs. (2.50) y (2.51). Los mapas de intensidad resultantes se muestran en las Figs. 2.12(b) y 2.12(c).

2. Recuperación de fase por difracción

Los patrones de intensidad generados se proporcionan como entrada al algoritmo de Gerchberg-Saxton usando la función de fase inicial dada en la Ec. (2.52). El resultado del algoritmo después de 1, 10, 40, 70, y 100 iteraciones se muestra en la Fig. 2.13(ϕ_1)-(ϕ_{100}). Para fines ilustrativos, la función de fase exacta a recuperar se muestra en la Fig. 2.13(ϕ) y el error en la recuperación de fase se muestra en la Fig. 2.13($\phi - \phi_{100}$). Observe que, al igual que en la simulación anterior, el algoritmo de Gerchberg-Saxton se desempeña bien cuando los valores de amplitud son altos. Por el contrario, para valores bajos de la función de amplitud (cero en esta simulación), el algoritmo es incapaz de determinar los valores de fase correctos debido a que cualquier valor de fase puede reproducir un valor de intensidad cero porque ello depende de la amplitud.

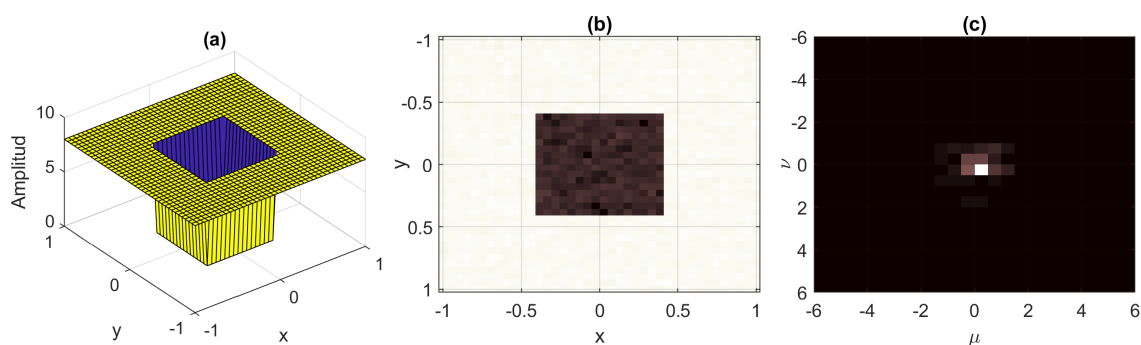


Fig. 2.12. Datos para la segunda simulación por computadora considerando una amplitud discontinua. (a) Amplitud del campo complejo en el plano imagen dado por la Ec. (2.53). (b) Intensidad en el plano imagen. (d) Intensidad en el plano de difracción.

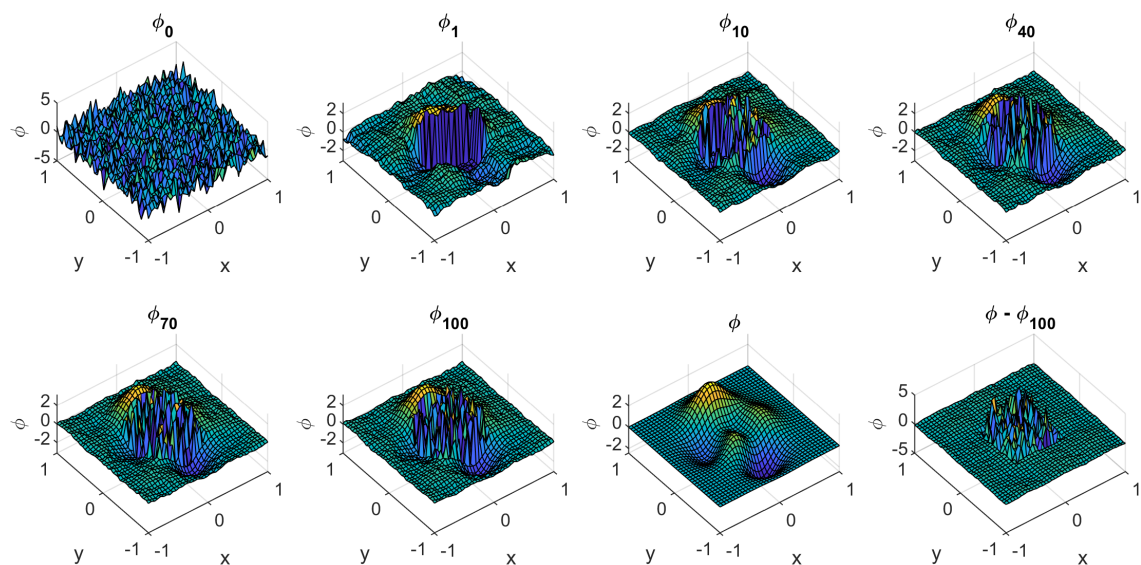


Fig. 2.13. Resultados de la segunda simulación. (ϕ_0) Fase inicial. (ϕ_1)-(ϕ_{100}) Fase recuperada por el algoritmo de Gerchberg-Saxton usando 1, 10, 40, 70 y 100 iteraciones. (ϕ) Fase exacta. ($\phi - \phi_{100}$) Error de recuperación de fase.

2.6.3. Amplitud continua y fase discontinua

Para la tercera simulación, consideraremos nuevamente la amplitud continua dada por la Ec. (2.48). Sin embargo, ahora usaremos una función de fase discontinua dada como

$$\phi(x, y) = \begin{cases} 2n(x, y) - 2, & x < 0, \\ 4n(x, y) - 2, & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (2.54)$$

donde

$$n(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 < 4/5, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (2.55)$$

La función de fase $\phi(x, y)$ resultante se muestra en la Fig. 2.14(a). La función de fase y la amplitud fueron usadas para determinar la intensidad en los planos imagen y difracción usando las Ecs. (2.50) y (2.51). La Fig. 2.14(b) y 2.14(c) muestran las intensidades resultantes.

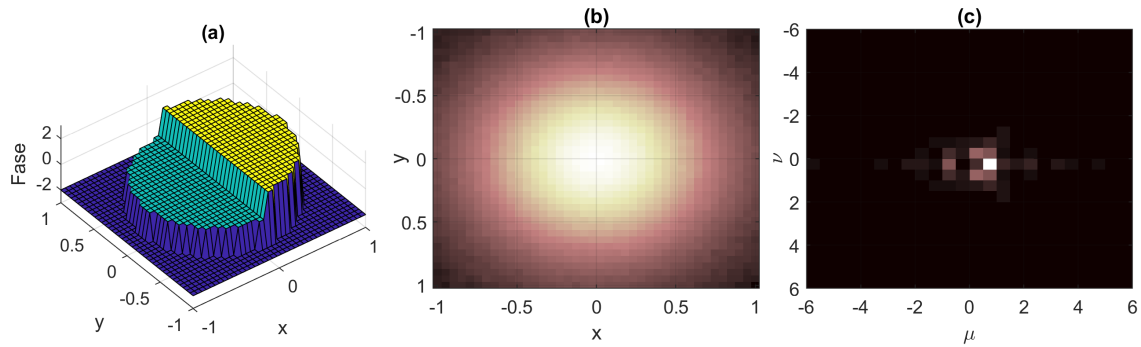


Fig. 2.14. Datos de la tercera simulación por computadora considerando una fase discontinua. (a) Fase del campo complejo en el plano imagen dado por la Ec. (2.54). (b) Intensidad en el plano imagen. (d) Intensidad en el plano de difracción.

De forma similar a las simulaciones anteriores, los patrones de intensidad generados se proporcionan como entrada al algoritmo de Gerchberg-Saxton usando la función de fase inicial dada en la Ec. (2.52). El resultado del algoritmo después de 1, 10, 40, 70, y 100 iteraciones se muestra en la Fig. 2.13(ϕ_1)-(ϕ_{100}). Observe que, el algoritmo de Gerchberg-Saxton es capaz de recuperar funciones de fase discontinuas y la recuperación solo se ve afectada por valores de amplitud bajos como se observó desde las simulaciones anteriores.

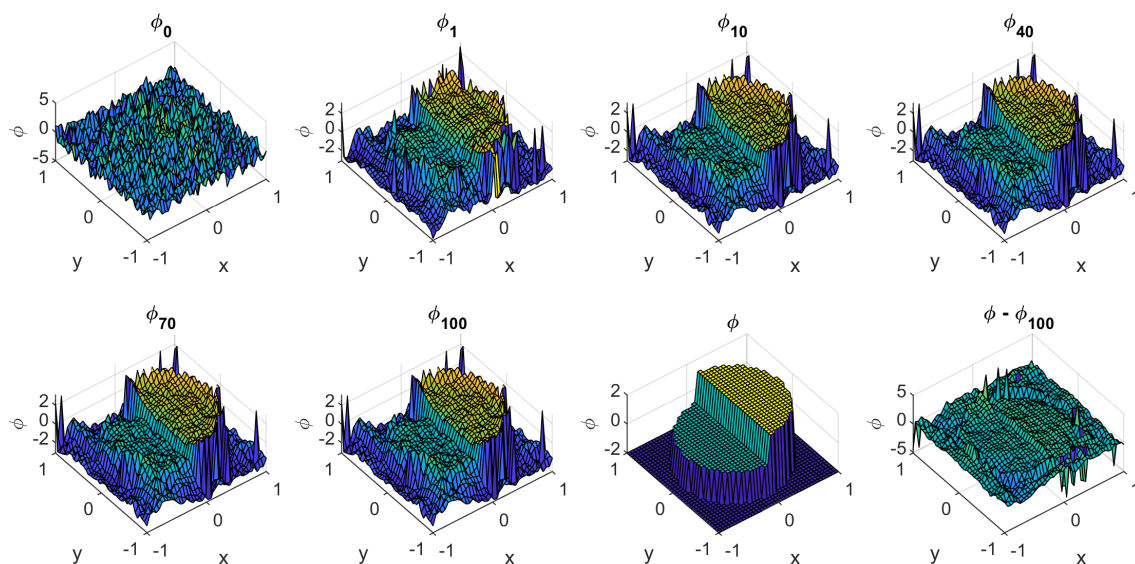


Fig. 2.15. Resultados de la tercera simulación. (ϕ_0) Fase inicial. (ϕ_1)-(ϕ_{100}) Fase recuperada por el algoritmo de Gerchberg-Saxton usando 1, 10, 40, 70 y 100 iteraciones. (ϕ) Fase exacta. ($\phi - \phi_{100}$) Error de recuperación de fase.

2.7. Evaluación experimental y discusión

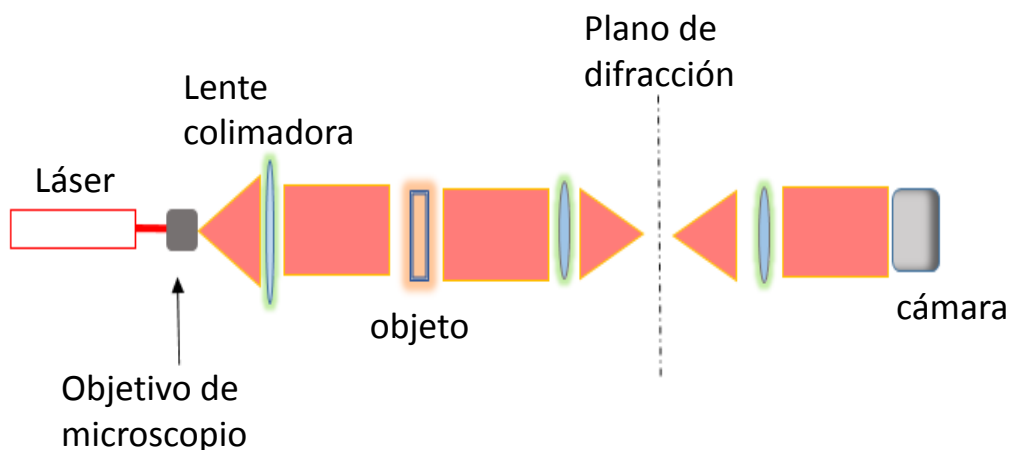


Fig. 2.16. Configuración experimental del arreglo óptico de Fourier $4f$.

El algoritmo de Gerchberg-Saxton fue evaluado experimentalmente usando mediciones de intensidad capturadas con el sistema $4f$. El arreglo experimental construido se muestra en la Fig. 2.16. Se emplearon dos lentes de 200 mm de distancia focal. El sistema $4f$ fue iluminado con una onda plana generada con luz láser de

2. Recuperación de fase por difracción

longitud de onda de 633 nm, un objetivo de microscopio, un pinhole de 10 μm , y una lente colimadora de 250 mm de longitud focal. Las mediciones de intensidad en el plano de Fourier y el plano de salida del sistema fueron realizadas con una cámara monocromática Pixelink.

El objeto a analizar fue un pinhole de 500 μm que se colocó en el plano de entrada del sistema $4f$. Entonces, la cámara se colocó en el plano de Fourier para realizar la captura la intensidad del plano de difracción. Finalmente, la cámara se colocó en el plano de salida del sistema $4f$ para capturar la intensidad del plano imagen. Las imágenes capturadas del objeto y el patrón de difracción se muestran en la Fig. 2.17.

En las imágenes capturadas se puede observar que existen tres problemas que evitan la aplicación directa del algoritmo de Gerchberg-Saxton.

Primero, en el plano de Fourier se observa saturación debido al orden cero del patrón de difracción. Este es un fenómeno bien conocido asociado a funciones de fase constantes o cuasi-constantes. En el caso de que la función de fase sea constante, su transformada de Fourier es una delta de Dirac. En la práctica, se observa un punto muy intenso que satura la cámara. Así las componentes de frecuencia diferentes al orden cero dejan de ser visibles. Una forma de corregir este problema es eliminando la zona saturada y sustituyendo por los niveles de intensidad obtenidos por interpolación empleado la zona de la imagen que no sufre saturación. En el Apéndice A se muestra el método de interpolación empleado en esta tesis.

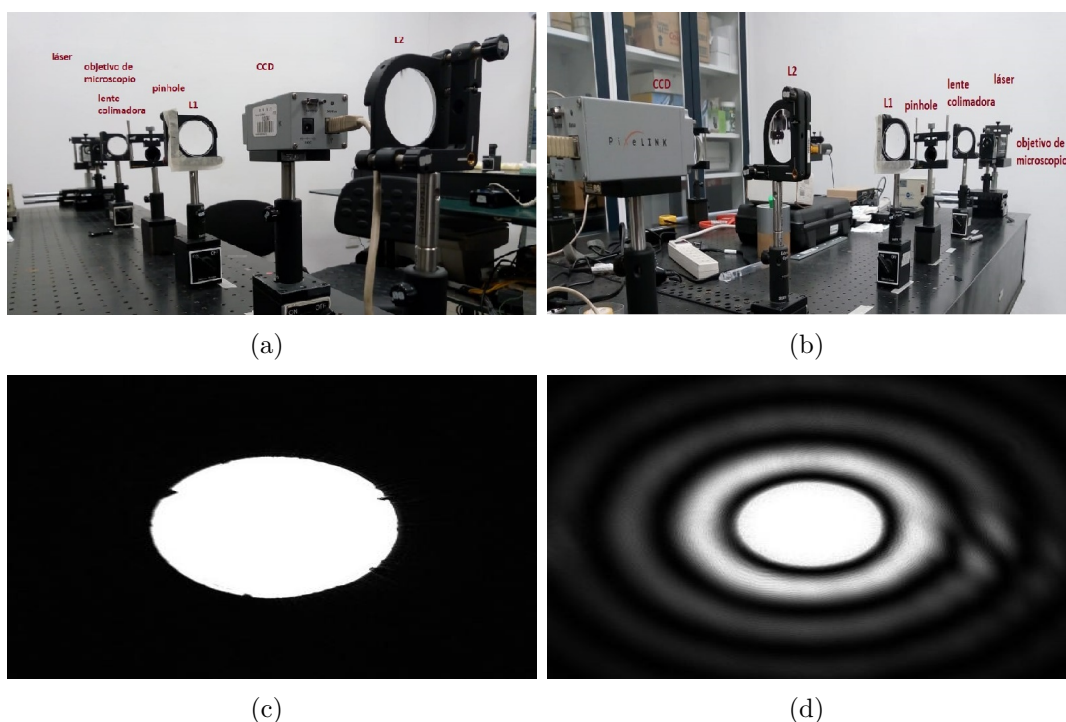


Fig. 2.17. Arreglo experimental para medir (a) intensidad en el plano de Fourier, y (b) intensidad en el plano de salida. Imágenes experimentales capturadas del (c) objeto (pinhole 500 μm), y (d) su correspondiente transformada de Fourier.

Segundo, el algoritmo numérico de la transformada de Fourier emplea una escala que no coinciden con la escala física observada en el plano de difracción. Para el algoritmo numérico de la transformada de Fourier, la escala es determinada en función del tamaño de la imagen de entrada. Por otro lado, la escala de la transformada de Fourier obtenida por el sistema $4f$ depende de la longitud de onda del láser y la longitud focal de la lente. Para aplicar el algoritmo de Gerchberg-Saxton, es necesario reescalar las imágenes capturadas de tal forma que la escala empleada por el algoritmo numérico de la transformada de Fourier y la escala inducida por el sistema $4f$ sean iguales.

Tercero, la configuración experimental no es suficientemente flexible para inducir funciones de fase conocidas. Por ejemplo, se hicieron pruebas con funciones de fase constante empleando un pinhole. También se analizaron funciones de fase esféricas desenfocando la lente de colimación. Sin embargo, no es tan directo analizar funciones de fase más generales, incluso con discontinuidades.

En los experimentos realizados, no se encontró convergencia del algoritmo de Gerchberg-Saxton debido a los tres inconvenientes descritos en los párrafos previos. Es posible que el sistema $4f$ con doble ventana pueda ser de utilidad para continuar el análisis experimental del algoritmo de Gerchberg-Saxton.

Capítulo 3

Recuperación de fase por interferencia

Como mencionamos anteriormente, en el capítulo introductorio, del análisis de patrones de franjas se puede extraer la fase. Por lo tanto, en este capítulo describimos el proceso preliminar al que están sujetos los patrones de franjas con la eliminación de la luz de fondo, así como la presentación de diversos métodos para la recuperación de fase. Cada método muestra un ejemplo detallado que describe su relevancia.

3.1. Estimación de la luz de fondo

Un patrón de franjas de la forma dada por la Ec. (1.11), o la Ec. (1.12), se puede escribir en general como

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\Phi(x, y)] + n(x, y), \quad (3.1)$$

donde $n(x, y)$ es función aleatoria que representa ruido en el patrón de franjas, anteriormente mencionamos a las funciones $a(x, y)$ y $b(x, y)$ como funciones de intensidad que en conjunto con la función $\Phi(x, y)$ forman el patrón de franjas

En aplicaciones en donde la información de interés se codifica como una función de fase, es necesario desarrollar métodos que obtengan la función de fase $\Phi(x, y)$ a partir de uno o más patrones de franjas $I(x, y)$.

En la literatura, se han propuesto varios métodos de procesamiento de patrones de franjas para extracción de fase. como el método de Takeda [19][20], Brunning [17], Greivenkamp [18], por mencionar algunos.

Los métodos reportados en la literatura pueden clasificarse de acuerdo a sus requerimientos, exactitud, y robustez al ruido. Sin embargo, una característica común de todos los métodos de extracción de fase, es la mejora de su rendimiento cuando se aplican tareas de pre-procesamiento para eliminar ruido aleatorio e información no deseada.

Ya sea usando corrimiento de fase temporal o espacial la información extra que aporta la luz de fondo y de modulación resulta innecesaria para la obtención de información de fase, para solucionar esto se han propuesto varios métodos, entre ellos filtrar el orden cero en el plano de Fourier hasta una normalización del patrón de franjas.

Los métodos de extracción de fase se enfrentan a dificultades en el proceso de estimación cuando los patrones de franjas presentan variaciones de intensidad no deseadas. Por ejemplo, en un interferómetro se observan variaciones de intensidad debido a la naturaleza propia de la fuente de iluminación láser. Estas variaciones se reflejan en las funciones $a(x, y)$ y $b(x, y)$ que representan la luz de fondo y luz de modulación del patrón de franjas, respectivamente.

Las funciones $a(x, y)$ y $b(x, y)$ suelen ser funciones suaves y continuas, varían lentamente en comparación con el ruido aleatorio $n(x, y)$, la variación introducida por el factor cosenoidal $\cos[\Phi(x, y)]$ y/o factores cosenoidales ocasionados por frecuencias portadoras. En seguida en la Fig. 3.1(a) mostramos un patrón de franjas común, así como la luz de fondo del espectro en la Fig.3.1(b) y finalmente en la Fig.3.1(c) graficamos los perfiles transversales tanto del patrón de franjas como el de su función de luz de Fondo.

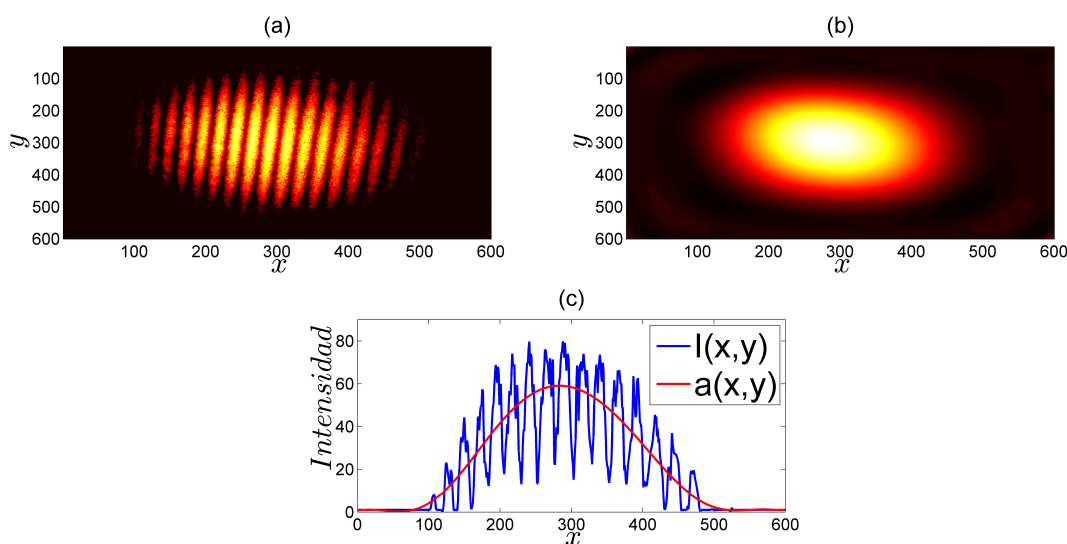


Fig. 3.1. (a) patrón de franjas comúnmente obtenido de un interferómetro de Michelson, (b) Luz de fondo extraída de un patrón de franjas, (c) comparación de variación de intensidad entre la luz de fondo y el patrón.

El principal objetivo del análisis de patrones de franjas es la extracción de la fase envuelta. Sin embargo, se puede ver la información de interés esta como argumento de la función coseno multiplicada por la función de modulación $b(x, y)$,

$$b(x, y) \cos \Phi(x, y) \tag{3.2}$$

es por eso, que la mayoría de los métodos requieren solamente de la filtración de la luz de fondo $a(x, y)$. Para el caso de interferometría la luz de fondo obedece al perfil

3. Recuperación de fase por interferencia

de intensidad de la fuente de iluminación láser que se emplea. Se sabe de la literatura que el perfil de intensidad de un láser es Gaussiano. Para el caso unidimensional el perfil de intensidad tiene la forma

$$f(x) = \alpha e^{\beta x^2}, \quad (3.3)$$

Entonces se puede aproximar en series de Taylor como sigue

$$f(x) = \alpha + \alpha\beta x^2 + \frac{1}{2}\alpha\beta^2 x^4 + \frac{1}{6}\alpha\beta^3 x^6 + \dots \quad (3.4)$$

Por lo tanto, consideramos la función luz de fondo como

$$a(x, y) = \tilde{a}(x, y), \quad (3.5)$$

donde \tilde{a} es un polinomio de aproximación de la forma

$$\tilde{a}(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + \dots, \quad (3.6)$$

donde c_i , $i = 1, 2, \dots$, son los coeficientes de polinomio, mientras (x, y) son las coordenadas espaciales en el patrón de franjas.

Para estimar la función $a(x, y)$, empleamos el polinomio $\tilde{a}(x, y)$ y el método de mínimos cuadrados el cual parte de construir una matriz de regresión \mathbb{A} de dimensión $n \times m$ y un vector $\vec{I} \in \mathbf{R}^m$, tal que $\vec{c}_0 \in \mathbf{R}^n$ es una solución de

$$\mathbb{A}\vec{c}_0 = \vec{I} \quad (3.7)$$

Entonces matemáticamente tenemos la siguiente ecuación que muestra la estimación de parámetros nos lleva a ajustar el polinomio $\tilde{a}(x, y)$ (ver Apéndice A) y dando como resultado la estimación de la aproximación de la luz de fondo.

$$\tilde{a}(x, y) = \underbrace{\mathbb{A} \left[(\mathbb{A}^T \mathbb{A})^{-1} \mathbb{A}^T \vec{I} \right]}_{\vec{c}_0}, \quad (3.8)$$

las columnas de la matriz \mathbb{A} son funciones base, las cuales pueden ser términos del polinomios de Taylor de grado par, impar o ambas. Como ejemplo ilustrativo, a continuación construiremos un patrón de franjas y estimaremos la luz de fondo a partir de los valores de intensidad resultantes.

Consideremos que la luz de fondo $a(x, y)$, $b(x, y)$, y $\Phi(x, y)$ están dadas por

$$a(x, y) = A_{ampl} \exp \left[- \left(\frac{(x - x_0)^2}{2} + \frac{(y - y_0)^2}{2} \right) \right], \quad (3.9)$$

con $A_{ampl} = 50$, $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$,

$$b(x, y) = B_0 - B_1(x^2 + y^2), \quad (3.10)$$

con $B_0 = 10$ y $B_1 = 5$, y

$$\Phi(x, y) = 4 \prod (x, y) + 8x, \quad (3.11)$$

donde

$$\prod(x, y) = 3(1-x)^2 e^{-x^2-(y+1)^2} - 10\left(\frac{x}{5} - x^3 - y^5\right) e^{-x^2-y^2} - \frac{1}{3} e^{-(x+1)^2-y^2}, \quad (3.12)$$

es una combinación de funciones gaussianas y que está implementada en MATLAB como la función picos (`peaks(·)`) [32]. Entonces, con la ecuación (3.1) generamos un patrón de franjas, donde el ruido aleatorio $n(x, y)$ es de media cero y varianza unitaria. La Fig. 3.2 (a) muestra el patrón de franjas resultante.

Para realizar la estimación de la luz de fondo se requiere una matriz de regresión definida como

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & \cdots & y_1^8 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & \cdots & y_2^8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & x_n^2 & \cdots & y_n^8 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

La tabla 3.1 describe los regresores de la matriz \mathbb{A} . Como podemos ver, se tienen 45 columnas considerando los términos intermedios del polinomio así como los grados par e impar del polinomio, pues estos aportan una mejor estimación.

Dada la ecuación (3.8), podemos ver que obtendremos el vector \vec{c}_0 con 45 elementos que a continuación se muestran en la siguiente tabla 3.1

i	Término polinomial	c_i	i	Término polinomial	c_i
1	1	49.9383	24	$x^4 y^2$	-2.0519
2	x	0.0922	25	$x^3 y^3$	-0.0019
3	y	-0.1589	26	$x^2 y^4$	-1.7475
4	x^2	-23.9949	27	$x y^5$	0.0844
5	y^2	-24.5076	28	y^6	-0.6229
6	xy	-0.1659	29	x^7	-0.0228
7	x^3	-0.2606	30	$x^6 y$	-0.0059
8	$x^2 y$	-0.1358	31	$x^5 y^2$	0.0088
9	$x y^2$	0.1821	32	$x^4 y^3$	-0.0155
10	y^3	0.3871	33	$x^3 y^4$	0.0187
11	x^4	4.6420	34	$x^2 y^5$	0.0089
12	y^4	5.4484	35	$x y^6$	-0.0004
13	$x^2 y^2$	10.8760	36	y^7	0.0268
14	$x^3 y$	0.3088	37	x^8	-0.0529
15	$y^3 x$	-0.1403	38	$x^7 y$	0.0187
16	x^5	0.1502	39	$x^6 y^2$	0.1772
17	$x^4 y$	0.0725	40	$x^5 y^3$	0.0074
18	$x^3 y^2$	-0.1073	41	$x^4 y^4$	0.1393
19	$x^2 y^3$	0.0016	42	$x^3 y^5$	-0.0067
20	$x y^4$	-0.0423	43	$x^2 y^6$	0.1125
21	y^5	-0.1914	44	$x y^7$	-0.0115
22	x^6	-0.1504	45	y^8	0.0284
23	$x^5 y$	-0.1433			

Tabla 3.1. tabla de coeficientes

Después de estimar los parámetros \vec{c}_0 la estimación de la luz de fondo se encuentra de manera practica y enseguida se muestra los resultados de esta estimación en la Fig. 3.2. Observemos en la Fig. 3.2(a) el patrón de franjas sin eliminación de la luz de fondo, en la Fig. 3.2(b) la fase envuelta extraída después de quitar la luz de fondo, 3.2(c) la representación de la luz de fondo exacta $a(x, y)$ y la luz de fondo estimada $\tilde{a}(x, y)$, y finalmete 3.2(c) la diferencia de $a(x, y)$ y $\tilde{a}(x, y)$.

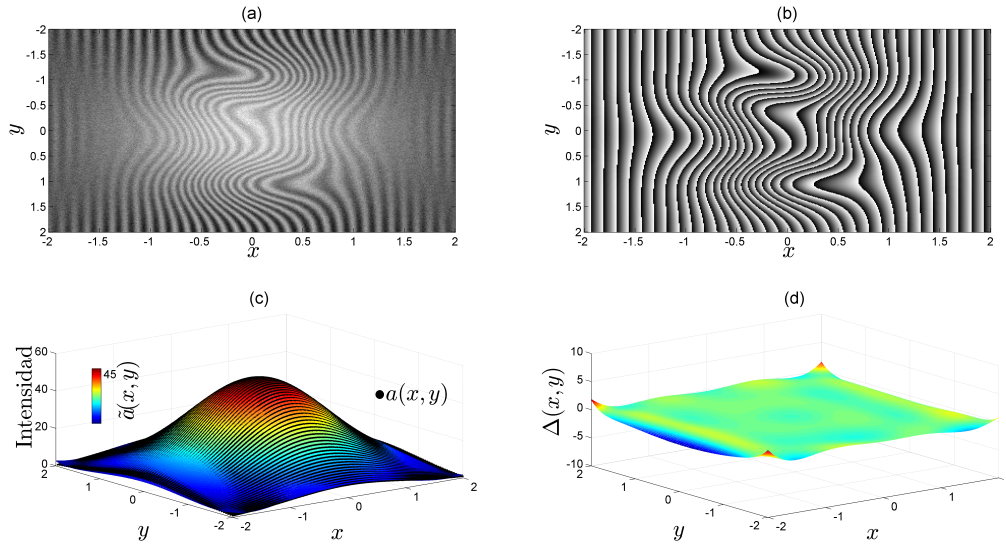


Fig. 3.2. Simulación computacional de (a) patrón de franjas, (b) fase envuelta extraída, (c) luz de fondo exacta $a(x, y)$ y luz de fondo estimada $\tilde{a}(x, y)$, (d) diferencia entre luz de fondo estimada y luz de fondo exacta.

En experimentos de interferometría, los datos que resultan del fenómeno de interferencia son datos de intensidad del patrón de franjas. Con el proceso de estimación descrito se puede recuperar la luz fondo, que es necesaria para los métodos de extracción de fase que se verán más adelante.

3.2. Método de Takeda

El método de Takeda procesa patrones de franja analizando el espectro de Fourier, resuelve algunos problemas como la determinación del signo de fase y la limitación en la precisión de los coeficientes de luz de fondo y modulación.

A partir de las propiedades de Fourier, el método de takeda se centra en los espectros resultantes de Fourier que están separados por la frecuencia portadora, para así trasladar alguno de ellos en el origen y facilitar la transformada inversa de Fourier. Finalmente se obtiene la información necesaria para determinar la fase.

Para establecer el proceso de este método es necesario presentar un patrón de franjas como en la ecuación (1.12) y de manera general como en la ecuación (3.1).

Donde la fase Φ se observa como

$$\Phi(x, y) = \phi(x, y) + w_x x + w_y y. \quad (3.14)$$

con $w_x = 2\pi f_0$, $w_y = 0$.

Como se observa la ecuación (3.14), w_x tiene como estructura una frecuencia portadora f_0 , esta se introduce comúnmente en mediciones ópticas. Entonces para facilitar la descripción del método de Takeda reescribimos el patrón de franjas de la siguiente manera.

$$g(x, y) = a(x, y) + c(x, y) \exp(2\pi i f_0 x) + c^*(x, y) \exp(-2\pi i f_0 x), \quad (3.15)$$

con $c(x, y) = \frac{1}{2}b(x, y) \exp[i\phi(x, y)]$.

Utilizando la transformada de Fourier, tenemos la siguiente ecuación donde las letras mayúsculas denotan el espectro de Fourier.

$$G(\mu, \nu) = A(\mu, \nu) + C(\mu - f_0, \nu) + C^*(\mu + f_0, \nu), \quad (3.16)$$

En general, en el plano de Fourier, el espectro $G(f)$ tiene 3 lóbulos: El espectro $A(f)$ (orden cero) y lóbulos simétricos C y C^* centrados en $+f_0$ y $-f_0$ respectivamente.

Eliminar el orden cero es el primer problema que se enfrenta el método, pues la información de interés se encuentra en C o en C^* , se puede mencionar el análisis de la sección 1.5 que es un enfoque que elimina el orden cero, por lo que, los patrones a procesar serán de la forma.

$$g(x, y) = \cos(\phi(x, y) + 2\pi f_0 x) \quad (3.17)$$

Entonces, aplicando la transformada de Fourier, se tiene el siguiente espectro

$$G(\mu, \nu) = C(\mu - f_0, \nu) + C^*(\mu + f_0, \nu). \quad (3.18)$$

Nos centramos en solo uno de los dos espectros que están en la portadora. Lo siguiente sería, siguiendo el método de Takeda, el traslado del espectro un f_0 sobre el eje μ para obtener un espectro $C(\mu, \nu)$. No obstante, nos podemos dar cuenta que hacer el traslado no es forzosamente necesario y el proceso de análisis se puede plantear de la siguiente manera.

Como hacer un traslado sobre el espacio de frecuencias es complicado en la práctica, simplemente dejamos el espectro en esa posición y continuamos con la implementación, esto es la transformada inversa de Fourier (TIF) del espectro $C(\mu - f_0, \nu)$.

$$c_{0f} = \mathcal{F}^{-1} \{C(\mu - f_0, \nu)\}. \quad (3.19)$$

Veamos que $c_{0f} = c(x - f_0, y)$ y contiene información con respecto a ϕ , por lo que, basta con separar la parte real e imaginaria de c_{0f} y aplicar la tangente inversa para obtener una distribución de fase envuelta, que a su vez es también una distribución de fase desplazada y discontinua.

$$\phi_{env} = \tan^{-1} \left(\frac{\Im(c_{0f})}{\Re(c_{0f})} \right) \quad (3.20)$$

3. Recuperación de fase por interferencia

Para analizar el funcionamiento del método de Takeda, realizamos una simulación para extraer la función de fase a partir de un patrón de franjas con frecuencias portadoras espaciales f_x y f_y en x , y respectivamente. Se considera la luz de fondo $a(x, y)$ definida por la ecuación (3.9) con $A_{ampl} = 200$, $x_0 = -0.5$ y $y_0 = 0$. Así mismo, la luz de modulación esta dada por la ecuación (3.10) con $B_0 = 100$ y $B_1 = 0.2$. Definimos la función de fase Φ como en la ecuación (3.14), que se ve como argumento del coseno en las ecuaciones (1.12) y (3.1).

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= \phi(x, y) + w_x x + w_y y \\ &= 4 \prod + (2\pi)7x + (2\pi)9y,\end{aligned}\tag{3.21}$$

De la ecuación (3.1) definimos $\eta(x, y)$ como una función de ruido aleatoria, con distribución normal de media μ igual a 0 y desviación estándar σ igual a 50.

Como se menciona anteriormente, en el método de Takeda el proceso de filtraje se simplifica usando patrones de franjas en los que la luz de fondo se ha eliminado. Es decir, en el espectro de Fourier el lóbulo central (orden cero) es eliminado. En la Fig. 3.3(a) podemos notar el spot en el patrón de franjas eso nos quiere decir que aún no se ha eliminado la luz de fondo esto en consecuencia nos resulta el espectro de Fourier de la Fig 3.3(b). Seguido de la implementación computacional se muestra en la Fig. 3.3(c) el patrón de franjas sin luz de fondo, así como el espectro de Fourier respectivo en la Fig 3.3(d).

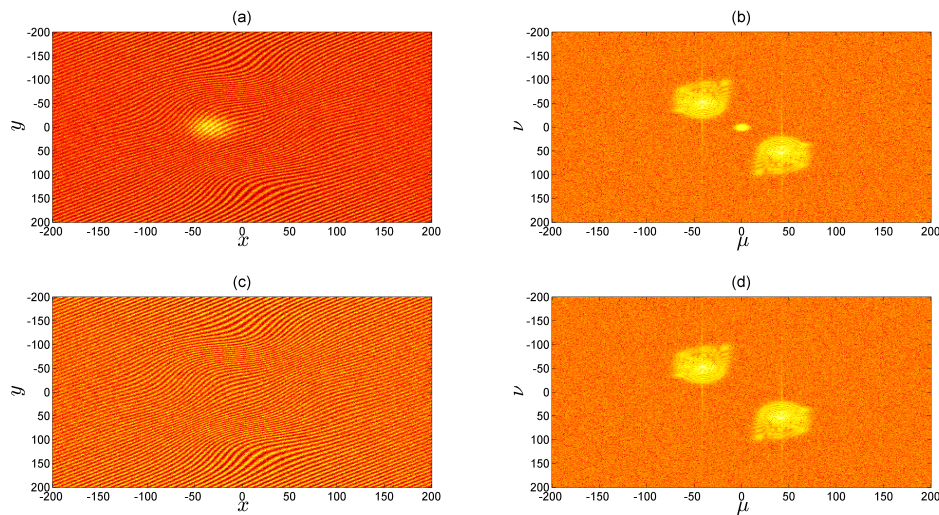


Fig. 3.3. (a) Patrón de franjas con luz de fondo, (b) espectro de Fourier con orden cero. (c) Eliminación de la luz de fondo del patrón de franjas y (d) el espectro de Fourier sin el orden cero.

De acuerdo con el método de Takeda, el siguiente paso es filtrar uno de los dos lóbulos que están en la Fig. 3.3 (d). Para esto se requiere de una máscara circular que suprima la información no deseada del espectro de Fourier eso se observa en la

3. Recuperación de fase por interferencia

Fig. 3.4(a). Al nuevo espectro se le aplica la transformada inversa de Fourier, con ayuda del comando `ifft` (Inverse fast Fourier transform) de MATLAB. Siguiendo las ecuaciones (3.19) y (3.20) encontramos una distribución de fase envuelta con portadora (ver Fig.3.4(b)).

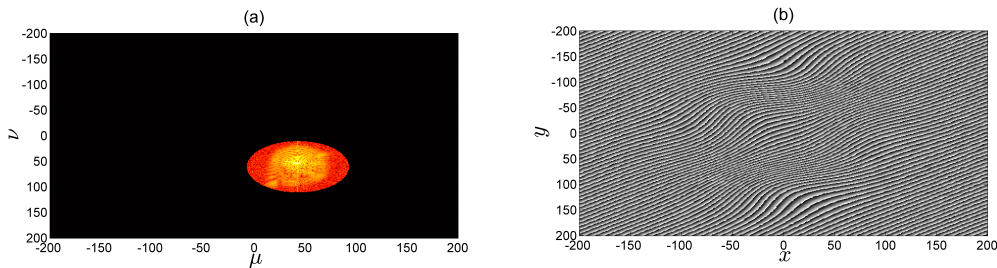


Fig. 3.4. (a) Filtraje del lóbulo +1, (b) distribución de fase envuelta.

Para obtener la función de fase original con portadora, se debe realizar un proceso de desenvolvimiento de fase que da como resultado la Fig. 3.5(a).

Existe en la literatura varios algoritmos para realizar el desenvolvimiento de fase [33]. En el Apéndice B, se describe el método de desenvolvimiento de fase que se utiliza en este trabajo.

Después se procede a restar la portadora que como vemos es un plano, fácilmente obtenemos la Fig.3.5(b). En la Fig.3.5(c) se muestra la fase exacta y finalmente en la Fig. 3.5(d) la diferencia que existe entre la fase desenvuelta exacta y la estimada.

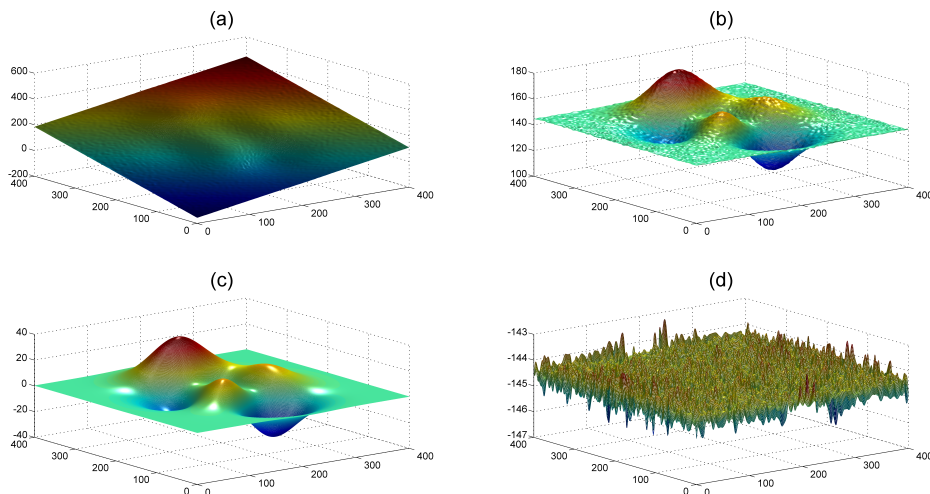


Fig. 3.5. (a) Fase desenvuelta con la contribución de las frecuencias portadoras. (b) Fase desenvuelta sin la contribución de las frecuencias portadoras. (c) Fase exacta. (d) Error entre la fase exacta y fase estimada ((c)-(b)).

3.3. Brunning

Brunning aporta un análisis al patrón de interferencia, adquirido por el frente de onda de prueba y el de referencia, cuando representa la ecuación de intensidad en una serie de Fourier. Las propiedades de ortonormalidad proporcionan gran sencillez para calcular los coeficientes de la serie, encontrando información del frente de onda de prueba y por tanto de la fase.

Consideremos un interferómetro en el que uno de los brazos se coloca la superficie de prueba que deseamos medir y en el otro brazo, un piezoeléctrico que aleja o acerca un espejo. Suponiendo componentes perfectos, consideramos los frentes de onda de referencia y de prueba, como en la ecuación (1.7), respectivamente.

$$\begin{aligned} E_1(x, y) &= A_1(x, y) \exp(i\phi_1(x, y)), \\ E_2(x, y) &= A_2(x, y) \exp(\phi_2(x, y)), \end{aligned} \quad (3.22)$$

con $\phi_1(x, y) = 2kl$, $\phi_2(x, y) = 2k\omega(x, y)$. Donde $k = 2\pi/\lambda$ y l es la longitud desde el divisor de haz hasta la superficie de referencia, y $\omega(x, y)$ representa el perfil de la superficie de prueba. De esto denotamos el patrón de franjas como la ecuación (1.8), podemos ver que $a(x, y) = A_1^2(x, y) + A_2^2(x, y)$ y $b(x, y) = 2A_1(x, y)A_2(x, y)$. De manera general tenemos, otra vez, un patrón de la forma

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Phi), \quad (3.23)$$

con $\Phi = 2k(\omega(x, y) - l)$.

Como la función de interés es $w(x, y)$, se puede visualizar a $I(x, y)$ como una función sinusoidal de l para todo (x, y) dentro del patrón de franjas.

El método de Brunning sugiere que la función $I(x, y, l)$ se defina en series de Fourier, consideremos entonces una representación alternativa de la ecuación 3.23,

$$I(x, y, l) \triangleq a_0(x, y) + a_1(x, y) \cos 2kl + b_1(x, y) \sin 2kl. \quad (3.24)$$

Como podemos ver la ecuación (3.24) es una combinación lineal de funciones complejas relacionadas entre si, donde la frecuencia fundamental de esta serie, para el caso continuo, es $\nu_0 = 2\pi/T$ con $T = \lambda/2$. Se entiende que los coeficientes son funciones de x y y . Por comparación el primer coeficiente de la serie corresponde a la luz de fondo dada por la función $a(x, y)$.

En los patrones de franjas capturados, los coeficientes a_0 , a_1 , b_1 para cada punto (x, y) se encuentran cambiando secuencialmente por el cambio en la distancia l , como se muestra en las ecuaciones (3.23) y (3.24). Observe que l cambia conforme se desplaza la superficie de referencia en pasos de T/n , es decir habrá un corrimiento de fase temporal, el cual estará dado por

$$\begin{aligned} l &= l_i = \frac{i \lambda}{n 2}, \\ i &= 1, 2, \dots, np. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Con p el número de periodos (después de n pasos, cada franja se desplazará un periodo). Haciendo uso de las propiedades de ortogonalidad de las funciones trigo-

nométricas encontramos los coeficientes de la serie de la siguiente manera.

$$a_0(x, y) = \frac{1}{np} \sum_{i=1}^{np} I(x, y, l_i) = A_1^2 + A_2^2, \quad (3.26)$$

$$a_1(x, y) = \frac{1}{np} \sum_{i=1}^{np} I(x, y, l_i) \cos(2kl_i) = 2A_1A_2 \cos(2k\omega(x, y)), \quad (3.27)$$

$$b_1(x, y) = \frac{1}{np} \sum_{i=1}^{np} I(x, y, l_i) \sin(2kl_i) = 2A_1A_2 \sin(2k\omega(x, y)), \quad (3.28)$$

De las ecuaciones (3.27) y (3.28) obtenemos la fórmula de Brunning.

$$2k\omega(x, y) = \tan^{-1}(b_1/a_1) \quad (3.29)$$

Con el fin de enriquecer el método de Brunning mostramos la siguiente simulación. Definimos la luz de fondo como la ecuación (3.9) con $A_{amp1} = 200$, $x_0 = -0.5$ y $y_0 = 0$, la modulación como la ecuación (3.10) con $B_0 = 100$, $B_1 = 0.2$. La fase como

$$\Phi(x, y) = \omega(x, y) - l, \quad (3.30)$$

con $\omega(x, y) = 4 \prod$, $l = \frac{jT}{n}$ con $T = 2\pi$, $n = 10$, $j = 1, \dots, np$ y $p = 3$. Observe que se generan patrones de franjas variando l . En adición a la ecuación (3.23) y de acuerdo a la forma general de patrones de franjas dada por la ecuación (3.1), se incluye $\eta(x, y)$ como una función de ruido aleatoria, con distribución normal de media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 50$. Enseguida mostramos los resultados de la simulación computacional usando como entrada los patrones generados y aplicando el método de Brunning.

Primero tenemos en la Fig. 3.6(a) la función de luz de fondo en 3D, luego en la Fig. 3.6(b) tenemos la función de modulación en 3D, la Fig 3.6(c) muestra la fase exacta en 3D representada por $\omega(x, y)$. Debajo de estas en forma bidimensional se tiene la Fig. 3.6(d) del patrón de franjas con la luz de fondo.

3. Recuperación de fase por interferencia

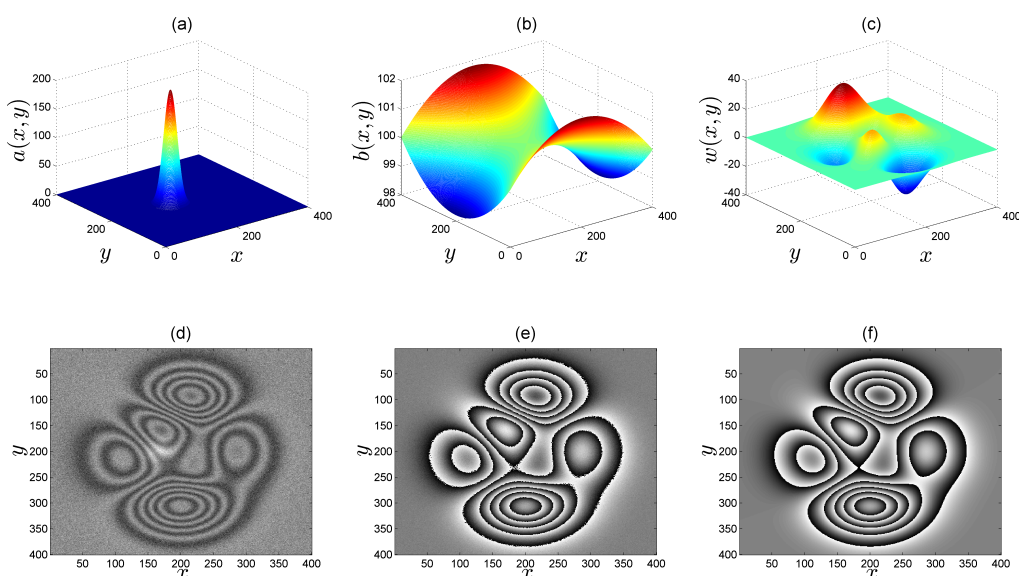


Fig. 3.6. (a) función de luz de fondo, (b) función de modulación, (c) fase $\omega(x, y)$ exacta, (d) patrón de franjas (interferencia), (e) fase $\omega(x, y)$ envuelta estimada por método de Brunning y (f) fase $\omega(x, y)$ envuelta exacta

Como podemos ver en las Figs. 3.6(e) y 3.6(f) , la fase $\omega(x, y)$ envuelta estimada bidimensional es cualitativamente semejante a la fase envuelta exacta, para demostrar que la recuperación de fase envuelta fue bastante cercana se procede a desarrollarla.

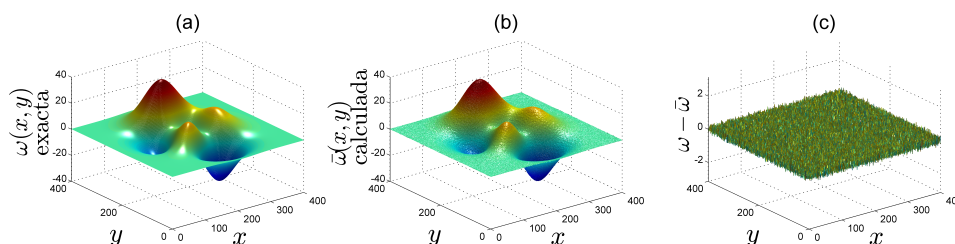


Fig. 3.7. (a) fase $\omega(x, y)$ exacta, (b) fase desenvuelta calculada, (c) diferencia entre (a) y (b)

Desenvolvemos la fase en la Fig. 3.7(b) y la comparamos con la exacta en la Fig. 3.7(a) y representamos la diferencia con $\Delta\omega(x, y)$ en la Fig. 3.7(c). Mencionando los puntos principales del método tenemos que, Brunning visualiza la ecuación de intensidad como una serie de Fourier, los coeficientes de la serie son obtenidos de una colección ordenada de patrones con corrimientos de fase igualmente espaciados en el periodo. A partir de esto podemos observar que en la practica el traslado del espejo es mecánicamente difícil de controlar, por lo tanto, el desplazamiento de la franja en el periodo deseado no recae exactamente.

Siguiendo con la idea de utilizar varios patrones de franjas con corrimientos de

fase controlados, podemos encontrar el método de Greivenkamp el cual utiliza menos patrones de interferencia, este se describe en la siguiente sección.

3.4. Greivenkamp

El método de Greivenkamp ofrece, una excelente resolución de la medición de fase de manera automática y una recopilación de datos insensibles al ruido. Este método se basa en un ajuste por mínimos cuadrados, valido para enfoques con corrimiento de fase. El corrimiento de fase entre dos haces es realizado, en el interferómetro heterodino, por alguna traslación de un espejo. La expresión del patrón de intensidad de un interferograma tiene la forma de la ecuación (1.11). Por lo que definimos el patrón de franjas como

$$I(x, y, \delta) = a(x, y) + b(x, y) \cos \Phi, \quad (3.31)$$

Con $\Phi(x, y) = \phi - \delta$, ϕ la diferencia de fase desconocida entre los dos frentes de onda, y $\delta(x, y)$ es el corrimiento de fase variable entre los dos haces interferentes.

Los datos requeridos son una serie de interferogramas grabados con diferentes corrimientos de fase. Para el corrimiento de fase es permitido variar linealmente la fase sobre un rango de Δ durante las mediciones.

El interferograma de muestra es la integral de los patrones de intensidad de $(\delta_i - \Delta/2)$ a $(\delta_i + \Delta/2)$

$$I_i(x, y) = \frac{1}{\Delta} \int_{\delta_i - \Delta/2}^{\delta_i + \Delta/2} I(x, y, \delta) d\delta \quad (3.32)$$

El corrimiento de fase en el centro de cada periodo de integración es δ_i , y el termino $\frac{1}{\Delta}$ es el factor de normalización que permite que la señal integrada promedio en cada interferograma sea independiente de Δ . En el limite $\Delta \rightarrow 0$, se obtiene la aproximación del corrimiento de fase. Es decir, la fase se mantiene constante durante la captura de un interferograma muestra.

El resultado de la ecuación 3.32 es el siguiente.

$$I_i(x, y) = a(x, y) - \frac{1}{\Delta} b(x, y) \{ \sin [\phi(x, y) - \delta_i - \Delta/2] - \sin [\phi(x, y) - \delta_i + \Delta/2] \} \quad (3.33)$$

Usando identidades trigonométricas obtenemos

$$\begin{aligned} I_i(x, y) &= a(x, y) - \frac{1}{\Delta} b(x, y) \left\{ \sin(\phi(x, y) - \delta_i) \cos\left(\frac{\Delta}{2}\right) \right. \\ &\quad - \cos(\phi(x, y) - \delta_i) \sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) - \left[\sin(\phi(x, y) - \delta_i) \cos\left(\frac{\Delta}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos(\phi(x, y) - \delta_i) \sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) \right] \right\} \\ &= a(x, y) + b(x, y) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta}{2}\right) \cos(\phi(x, y) - \delta_i) \end{aligned} \quad (3.34)$$

3. Recuperación de fase por interferencia

Al introducir corrimientos de fase se consigue la modulación temporal del patrón de franjas. Esta modulación es sinusoidal en cada punto del patrón como se muestra en la ecuación (3.34). Por lo que, integrar el interferograma, mientras se cambia la fase entre los dos haces, es reducir la modulación de las franjas registrado en el conjunto de datos del interferograma. Para la interferometría heterodina se requiere, como ya vimos, de interferogramas con diferentes corrimientos de fase. Los datos obtenidos del patrón de interferencia, con la variación sinusoidal con respecto de δ_i , pueden ajustarse a una curva seno de periodo conocido pero de fase y amplitud variable. Por lo tanto la fase desconocida $\phi(x, y)$ puede determinarse con el uso del ajuste por mínimos cuadrados.

Consideremos una ventana de integración en el limite cuando $\Delta \rightarrow 0$, esto reduce a la función $\frac{\sin(\Delta/2)}{\Delta/2}$ a 1. Por lo que, la ecuación para cada interferograma es de la forma

$$I_i(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\phi(x, y)) \cos(\delta_i) + b(x, y) \sin(\phi(x, y)) \sin(\delta_i) \quad (3.35)$$

para n patrones de franjas tenemos

$$\begin{aligned} I_1(x, y) &= a(x, y) + b(x, y) \cos(\phi(x, y)) \cos(\delta_1) + b(x, y) \sin(\phi(x, y)) \sin(\delta_1) \\ I_2(x, y) &= a(x, y) + b(x, y) \cos(\phi(x, y)) \cos(\delta_2) + b(x, y) \sin(\phi(x, y)) \sin(\delta_2) \\ &\vdots \\ I_n(x, y) &= a(x, y) + b(x, y) \cos(\phi(x, y)) \cos(\delta_n) + b(x, y) \sin(\phi(x, y)) \sin(\delta_n) \end{aligned} \quad (3.36)$$

De forma matricial tenemos

$$\begin{aligned} &\underbrace{\begin{bmatrix} I_1(\vec{p}_1) & I_1(\vec{p}_2) & \cdots & I_1(\vec{p}_N) \\ I_2(\vec{p}_1) & I_2(\vec{p}_2) & \cdots & I_2(\vec{p}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_n(\vec{p}_1) & I_n(\vec{p}_2) & \cdots & I_n(\vec{p}_N) \end{bmatrix}}_Y \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cos(\delta_0) & \sin(\delta_0) \\ 1 & \cos(\delta_1) & \sin(\delta_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\delta_{n-1}) & \sin(\delta_{n-1}) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} a(\vec{p}_1) & \cdots & a(\vec{p}_N) \\ b(\vec{p}_1) \cos(\phi(\vec{p}_1)) & \cdots & b(\vec{p}_N) \cos(\phi(\vec{p}_N)) \\ b(\vec{p}_1) \sin(\phi(\vec{p}_1)) & \cdots & b(\vec{p}_N) \sin(\phi(\vec{p}_N)) \end{bmatrix}}_C \end{aligned} \quad (3.37)$$

Con un conjunto de n patrones de franjas que representa la matriz Y de tamaño $n \times N$ y $\vec{p}_i = [x_i, y_i]^T$ representa cada coordenada espacial con $i = 1, \dots, N$, donde N representa el número de píxeles en cada patrón de franjas, A es una matriz de tamaño $n \times 3$ (matriz de regresión) y C de $3 \times N$ (vector de incógnitas). Considerando que $A^T A$ es una matriz no singular, la ecuación a resolver es de la forma $AC = Y$, que resolvemos usando el método de mínimos cuadrados como

$$C = \begin{bmatrix} c_1(\vec{p}) \\ c_2(\vec{p}) \\ c_3(\vec{p}) \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T Y. \quad (3.38)$$

Con el vector C obtenemos de manera sencilla, la luz de fondo, la luz de modulación y la fase como

$$a(x, y) = c_1(\vec{p}), \quad (3.39)$$

$$b(x, y) = \sqrt{c_2^2(\vec{p}) + c_3^2(\vec{p})}, \quad (3.40)$$

y

$$\tan \phi(x, y) = \frac{c_3(\vec{p})}{c_2(\vec{p})}. \quad (3.41)$$

La fase se obtiene usando la ecuación (3.41) aplicando la función arco-tangente. Sin embargo, aparecerán discontinuidades de 2π debido a la periodicidad de las funciones trigonométricas. La fase discontinuo resultante es conocida como fase envuelta. Para eliminar las discontinuidades de 2π y recuperar la fase de interés es necesario aplicar un procedimiento de desenvolvimiento de fase [33].

A continuación se presenta la simulación del método aquí presentado. La luz de fondo esta dada por la ecuación (3.9) con $A_{ampl} = 200$, $x_0 = -0.5$ y $y_0 = 0$. La función de modulación esta dada por la ecuación (3.10), con $B_0 = 100$, $B_1 = 0.2$. La fase esta dada como

$$\Phi(x, y) = \phi(x, y) - \delta, \quad (3.42)$$

con $\delta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Observe que se generan cuatro patrones de franjas, los cuales son correspondientes a la ecuación (3.31). En adición a esta y de acuerdo a la forma general de patrones de franjas dada por la ecuación (3.1), se incluye $\eta(x, y)$ como una función de ruido aleatoria, con distribución normal de media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 50$. Este conjunto de patrones son procesados por la ecuación (3.38).

Como se menciona anteriormente, de los patrones de franjas obtenidos al variar δ (ver Figs. 3.8(a)-(d)) se construye una ecuación matricial. La cual se resuelve por el método de mínimos cuadrados y del cual se obtiene la luz de fondo, la luz de modulación y la fase envuelta. Esta ultima se observa en la Fig. 3.8(e).

3. Recuperación de fase por interferencia

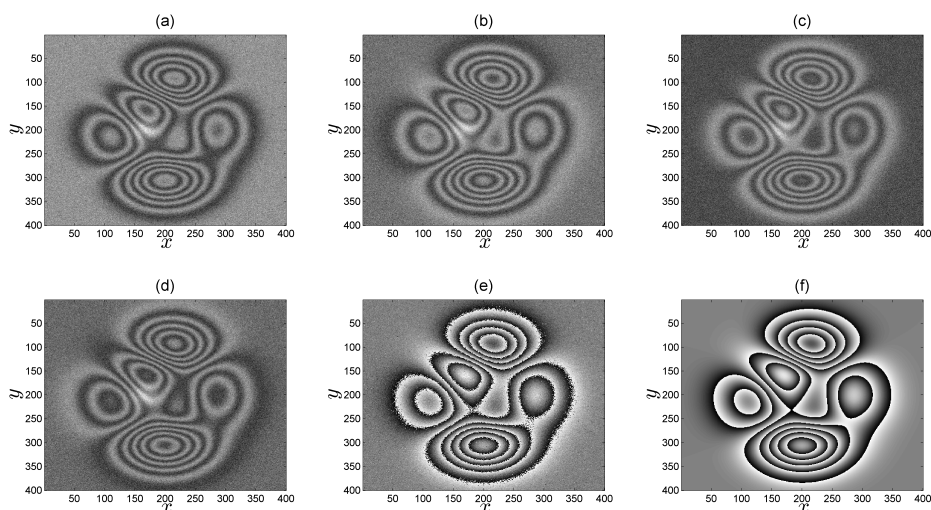


Fig. 3.8. Patrones de franjas con diferentes corrimientos de fase, (a) $\delta = 0$, (b) $\delta = \pi/2$, (c) $\delta = \pi$, (d) $\delta = 3\pi/2$. (e) Fase envuelta ϕ estimada, (f) fase envuelta ϕ exacta.

Desenvolvemos la fase en la Fig. 3.9(b) y la comparamos con la exacta en la Fig. 3.9(a) y representamos la diferencia con $\phi - \bar{\phi}$. Para el ejemplo aquí planteado, se observa una convergencia a la fase exacta no mayor a π (ver Fig. 3.9(c)) con solo cuatro patrones de interferencia, esto indica una mayor facilidad en la parte experimental, al contrario, a Brunning que se necesitan varias tomas.

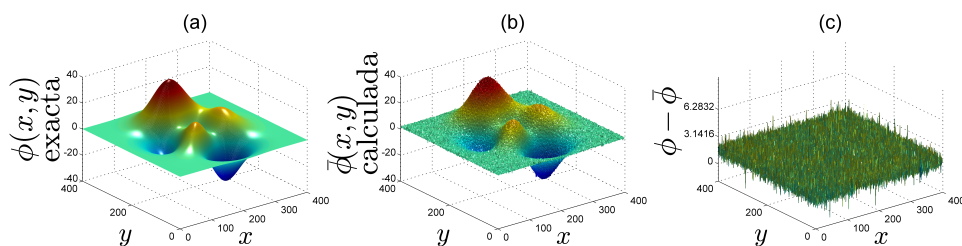


Fig. 3.9. (a) Fase desenvuelta exacta, (b) fase desenvuelta estimada, (c) diferencia entre la gráfica (a) y (b).

Por otro lado, tanto el método de Brunning como el de Greivenkamp si bien ofrecen obtener la luz de modulación y la luz de fondo, esto se contrarresta con capturas de patrones con corrimientos de fase controlados en los que debe existir un cierto orden.

Existen métodos a parte de Takeda que, aunque necesitan la eliminación de la luz de fondo, resultan más sencillos en la práctica, tal es el caso del método de Gram-Schmidth que requiere de dos interferogramas.

3.5. Gram-Schmidt

La demodulación por el método de Gram-Schmidt parte de mostrar que cualquier interferograma, filtrando la luz de fondo, se puede descomponer en dos señales, las cuales contienen la información necesaria para construir el mapa de fase. Siguiendo esta línea se demuestra que a partir de dos interferogramas con corrimiento de fase se pueden formar otros dos de carácter ortonormal, por tanto, la suma de estos seguirá siendo una señal ortonormal, quedando entonces una señal con elementos bien definidos para usarlos en la búsqueda de la fase.

Partimos de describir un interferograma con corrimiento de fase temporal como se ve en la ecuación (1.11), para este método se necesitará de dos interferogramas $I_1(x, y)$ e $I_2(x, y)$ con δ_1 y δ_2 sus corrimientos de fase temporal respectivamente. Generalizando podemos describir a los interferogramas como

$$I_n = a + b (\cos[\phi] \cos[\delta_n] - \sin[\phi] \sin[\delta_n]). \quad (3.43)$$

Agrupando términos se tiene lo siguiente

$$I_n = a + a_n I_c + \beta_n I_s, \quad (3.44)$$

con $n \in [1, 2]$, $a_n = \cos[\delta_n]$, $\beta_n = \sin[\delta_n]$, $I_c = b \cos[\phi]$ y $I_s = -b \sin[\phi]$. Vemos entonces que cualquier interferograma puede ser descompuesto en tres señales. Típicamente la luz de fondo es una señal suave y como hemos demostrado al inicio del capítulo esta se puede filtrar. Sin embargo, en algunos casos la luz de fondo se puede descomponer en dos señales. Como lo mencionamos al inicio de la sección, se necesita encontrar una base de interferogramas ortonormalizados, a partir de interferogramas muestra, utilizando el método de Gram-Schmidt. Este método toma un conjunto finito de vectores $S = \{u_1, \dots, u_j\}$ y generamos de este un conjunto ortonormal $\tilde{S} = \{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k\}$, con $k \leq j$. Como nuestro conjunto S tiene dos vectores, se puede mostrar en seguida el proceso que consiste en tres pasos. Primero, tomamos uno de los dos vectores y lo normalizamos.

$$\tilde{u}_1 = u_1 / \sqrt{\langle u_1, u_1 \rangle} = u_1 / \|u_1\|. \quad (3.45)$$

Después ortogonalizamos u_2 con respecto al vector \tilde{u}_1 , substrayendo su proyección como sigue

$$\hat{u}_2 = u_2 - \langle u_2, \tilde{u}_1 \rangle \cdot \tilde{u}_1. \quad (3.46)$$

Finalmente, obtenemos \tilde{u}_2 dividiendo \hat{u}_2 por su norma como

$$\tilde{u}_2 = \hat{u}_2 / \sqrt{\langle \hat{u}_2, \hat{u}_2 \rangle} = \hat{u}_2 / \|\hat{u}_2\|, \quad (3.47)$$

el operador $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es determinado por la definición del producto interior. Para el producto interior de dos interferogramas, nosotros lo definimos como

$$\langle I_1(x, y), I_2(x, y) \rangle = \sum_{x=1}^{N_x} \sum_{y=1}^{N_y} I_1(x, y) I_2(x, y), \quad (3.48)$$

3. Recuperación de fase por interferencia

donde N_x y N_y corresponden a las columnas y filas de la imagen, respectivamente. Entonces siguiendo los pasos de ortonormalización, tenemos dos señales ortonormales \tilde{I}_1 e \tilde{I}_2 de dos interferogramas (con luz de fondo filtrada) I_1 e I_2 . Siguiendo con el método GS descrito en las ecuaciones 3.45, 3.46 y 3.47, se tiene lo siguiente

$$\tilde{I}_1 = b \cos(\phi) / k_1 = \frac{b \cos(\phi)}{\sqrt{\sum_{x=1}^{N_x} \sum_{y=1}^{N_y} (b \cos(\phi))^2}} \quad (3.49)$$

Si consideramos $\delta_1 = 0$ y $\delta_2 = \delta = (\delta_2 - \delta_1)$ vemos que no se pierde la generalidad ya que estos corrimientos de fase no introduce términos relevantes en la recuperación de fase. Sumado a esto, usando la ecuación 3.46, que es el segundo paso del método GS, obtenemos la versión ortonormal \tilde{I}_2 de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \hat{I}_2 &= b \cos(\phi + \delta) \\ &- \left(\sum_{x=1}^{N_x} \sum_{y=1}^{N_y} b^2 \cos(\phi + \delta) \cos(\phi) \right) b \cos(\phi) / k_1^2 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Ahora bien, si consideramos tener mas de una franja en los interferogramas, podemos usar la aproximación $|\sum_{x=1}^{N_x} \sum_{y=1}^{N_y} \cos^2(\phi) \cos(\delta)| \gg |\sum_{x=1}^{N_x} \sum_{y=1}^{N_y} \cos(\phi) \sin(\phi) \sin(\delta)|$, por lo que reescribimos la ecuación 3.50 como

$$\hat{I}_2 \cong -b \sin(\phi) \sin(\delta) \quad (3.51)$$

Finalmente, obtenemos \tilde{I}_2 dividiendo \hat{I}_2 por su norma. De la ecuación 3.46 tenemos

$$\tilde{I}_2 = -b \sin(\phi) / k_2 = -b \sin(\phi) / \sqrt{\sum_{x=1}^{N_x} \sum_{y=1}^{N_y} (b \sin(\phi))^2} \quad (3.52)$$

Note que \hat{I}_2 tiene valores bajos si δ esta cerca de cero o π . En este caso, la señal es afectada por ruido. Por otro lado, la fase modulada puede ser recuperada con una función arcotangente

$$\phi \cong \arctan(-\tilde{I}_2 / \tilde{I}_1). \quad (3.53)$$

Para analizar el funcionamiento de este método se propone la siguiente simulación de extracción de fase usando patrones de franjas. La luz de fondo no se incluye en este método pues se considera que ya ha sido filtrada. En la practica, la luz de fondo de puede estimar y eliminar de los patrones de franjas usando el método de estimación visto en la sección 3.1. La función de modulación está dada por la ecuación (3.10), con $B_0 = 100$ y $B_1 = 0.2$ la visualización de la función está en la Fig 3.10(a). La fase está dada como

$$\Phi(x, y) = \phi(x, y) + \delta_k, \quad k = 0, 1, \quad (3.54)$$

con $\phi(x, y) = 4 \prod(x, y)$, $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = 2$. Se agrega una función de ruido aleatorio $\eta(x, y)$ con distribución normal de media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 15$. Con estos valores se producen los dos interferogramas que se muestran en las Figs. 3.10(b) y 3.10(c). Estos patrones de franjas simulados se toman como entrada para el método Gram-Schmidt de recuperación de fase envuelta. Recordemos que los

3. Recuperación de fase por interferencia

patrones tienen corrimientos de fase $\delta_1 = 0$ y $\delta_2 = 2$ y aunque la diferencia de estos no está cerca de π o de 0, conocer los corrimientos no es necesario.

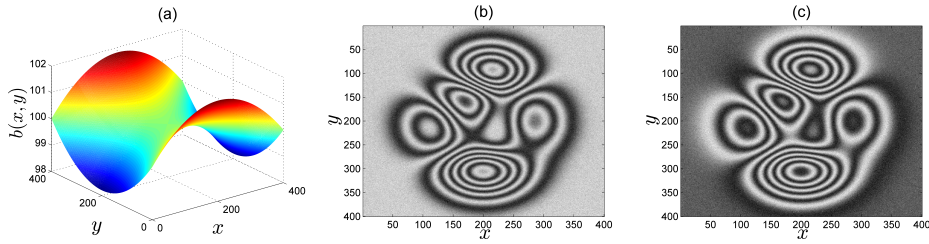


Fig. 3.10. (a) Función de modulación. (b) y (c) Dos patrones de franjas usados en simulación para probar el método de Gram-Schmidt.

Como sabemos el proceso de ortonormalización es llevado por las ecuaciones (3.49), (3.51) y (3.52). El patrón ortonormalizado \tilde{I}_1 está en la Fig. 3.11(a), el patrón ortonormalizado \tilde{I}_2 está representado en la Fig. 3.11(b), La fase envuelta bi-dimensional estimada por Gram-Schmidt se muestra en la Fig. 3.11(c) y finalmente la fase envuelta exacta en la Fig. 3.11(d)

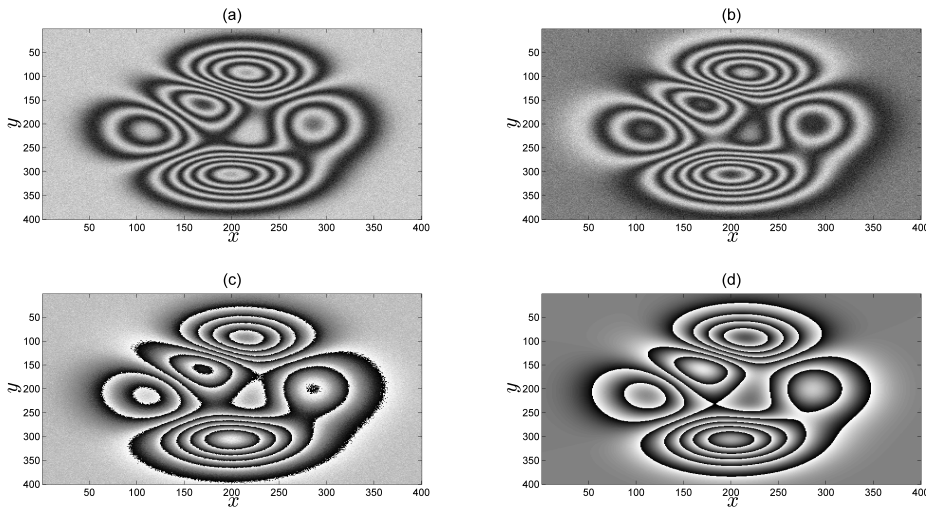


Fig. 3.11. (a)-(b) Patrón de franjas ortonormalizados \tilde{I}_1 , \tilde{I}_2 , (c) fase envuelta estimada por el método de Gram-Schmidt, (d) fase envuelta exacta.

De acuerdo con el método de Gram-Schmidt, establecido por los autores en [23], si se tiene mas de una franja en los interferograms se usa la siguiente aproximación.

$$k_1 \cong k_2 \quad (3.55)$$

En el ejemplo que se simula en en este trabajo, visiblemente la fase envuelta recuperada es muy diferente a la exacta (ver figura 3.11(c)). Podemos inferir que

debido al ruido, establecido en la simulación, la aproximación de normas no se cumple. Es por eso que se prosigue al desenvolvimiento de fase, en la Fig.3.12(b), en la Fig.3.12(a) se muestra la fase exacta y finalmente en la Fig. 3.12(c) la diferencia que existe entre la fase desenvuelta exacta y la estimada que se denota como $\phi - \bar{\phi}$.

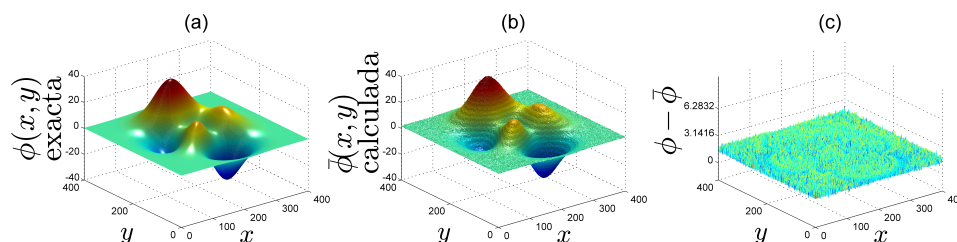


Fig. 3.12. (a) Fase desenvuelta exacta, (b) Fase desenvuelta estimada, (c) diferencia entre (a) y (b)

Note que la fase estimada puede coincidir en algunas dimensiones espaciales como la altura, sin embargo, son claras las curvas de nivel sobre la superficie, lo que hace que la recuperación de fase no sea suave. Durante la simulación computacional se puede notar que tal efecto corresponde al cociente de las normas k_1 y k_2 . Es decir, mientras $k_1/k_2 \neq 1$ las curvas de nivel aparecen y se vuelven más marcadas con forme aumenta el ruido.

Podemos ver que el método en la práctica resulta ser sencillo, al solo capturar dos patrones de franjas, pero es en la parte del proceso numérico donde se ve afectado la recuperación de fase. Es el método en general el que no prevé la participación del ruido como un efecto en contra de la recuperación de fase.

En el análisis a diversos métodos a lo largo de este trabajo hemos visto tanto mejoras como fallas en la recuperación de fase. Sin embargo, la búsqueda de un buen método no acabaría sin antes mencionar el método basado en la minimización del coeficiente de variación el cual hace de la recuperación de fase un proceso simple, sobre este método se habla a continuación.

3.6. Minimización del coeficiente de variación

Antes de comenzar con la descripción y el análisis, es necesario definir algunas herramientas que son usadas por el método, estas son el método de búsqueda y el concepto de coeficiente de variación. Según los autores en [27] se recomienda el clásico algoritmo de búsqueda de Fibonacci, pero se llega al mismo fin usando la optimización de búsqueda por intervalos.

3.6.1. Optimización por búsqueda en intervalos

Consideremos un problema de optimización de la forma

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(\mathbf{x}) \\ & \text{sujeto a} && \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \tag{3.56}$$

La función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que se desea minimizar es una función de valor real llamada función objetivo, y \mathbf{x} es un vector de variables independientes

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n. \tag{3.57}$$

Las variables x_1, \dots, x_n son denominadas variables de decisión. El conjunto Ω es un subconjunto de \mathbb{R}^n , llamado conjunto de restricciones o conjunto factible. Este problema de optimización se puede ver como un problema de decisión que implica encontrar el “mejor” vector \mathbf{x} de las variables de decisión, sobre todos los vectores posibles en Ω . Por el “mejor” vector nos referimos a aquel que resulta en el valor más pequeño de la función objetivo. Este vector se denomina minimizador de f sobre Ω .

Los métodos de búsqueda son aquellos que nos permiten determinar el minimizador de una función. Como ejemplo se usan funciones en una dimensión de la forma $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sobre un intervalo cerrado $[a_0, b_0]$. Si asumimos la propiedad unimodal de la función objetivo f , se considera entonces que se tiene solo un único minimizador local como se muestra en la figura 3.13.

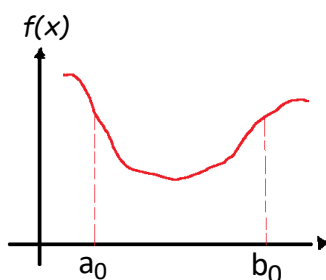


Fig. 3.13. Función unimodal.

Los métodos en general están basados en la evaluación de la función objetivo f en diferentes puntos en el intervalo $[a_0, b_0]$. Elegimos estos puntos de manera que se pueda lograr una aproximación al minimizador de f en el menor número de evaluaciones posibles. Nuestro objetivo es reducir progresivamente el rango hasta que el minimizador este “ajustado” con suficiente precisión. Considere una función unimodal f de una sola variable en el intervalo $[a_0, b_0]$. Si evaluamos f en un solo punto intermedio del intervalo, no podemos reducir el rango dentro del cual sabemos se encuentra el minimizador. Tenemos que evaluar f en dos puntos intermedios como se muestra en la Fig. 3.14.

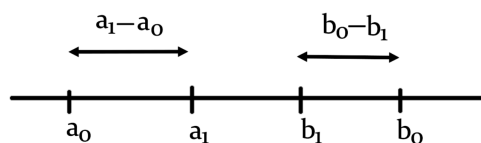


Fig. 3.14. Evaluación de la función objetivo en dos puntos intermedios.

Elegimos los puntos intermedios de forma que la reducción del rango sea simétrica, de manera que

$$a_1 - a_0 = b_0 - b_1 = \rho(b_0 - a_0), \quad (3.58)$$

donde

$$\rho < \frac{1}{2}. \quad (3.59)$$

Siguiendo la ecuación 3.58, evaluamos f en los puntos intermedios. Si $f(a_1) < f(b_1)$, entonces el minimizador debe caer en el rango $[a_0, b_1]$. Por el contrario, si $f(a_1) \geq f(b_1)$, entonces el minimizador es localizado en $[a_1, b_0]$ (ver Fig. 3.15).

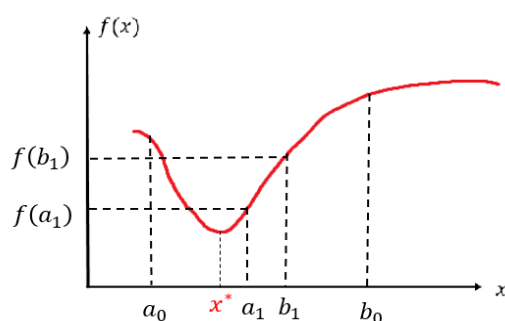


Fig. 3.15. Caso donde $f(a_1) < f(b_1)$; el minimizador $x^* \in [a_0, b_1]$.

Comenzamos con el rango reducido de incertidumbre, se repite el proceso y, de manera similar, encontramos dos nuevos puntos, sea a_2 y b_2 , usando el mismo valor $\rho < \frac{1}{2}$ como se ve anteriormente. Sin embargo, si queremos minimizar el número de evaluaciones de la función objetivo mientras se reduce la amplitud del intervalo de incertidumbre, se hace lo siguiente.

Suponga, que $f(a_1) < f(b_1)$, como la Fig. 3.15. Entonces, sabemos que $x^* \in [a_0, b_1]$. Debido a que a_1 ya está en el intervalo de incertidumbre y $f(a_1)$ ya se conoce, podemos hacer coincidir a_1 con b_2 . Por lo tanto, sería necesario solamente una nueva evaluación de f en a_2 . Para encontrar el valor de ρ que de como resultado una sola evaluación de f , puede consultar la Fig. 3.16.

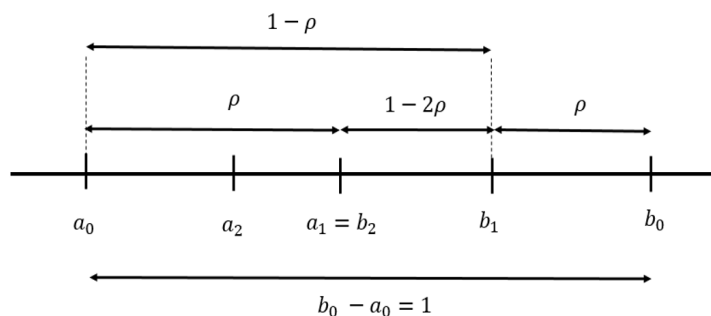


Fig. 3.16. Selección del valor ρ para que se tenga una nueva evaluación de f .

De manera general, imagine que el rango original a_0, b_0 es de longitud unitaria. Entonces, para tener solo una nueva evaluación de f es suficiente elegir ρ tal que

$$\rho(b_1 - a_0) = b_1 - b_2. \quad (3.60)$$

Ya que $b_1 - a_0 = 1 - \rho$ y $b_1 - b_2 = 1 - 2\rho$, tenemos

$$\rho(1 - \rho) = 1 - 2\rho. \quad (3.61)$$

De forma cuadrática se tiene

$$\rho^2 - 3\rho + 1 = 0. \quad (3.62)$$

La solución es

$$\rho_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad \rho = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}. \quad (3.63)$$

Puesto que se requiere $\rho < \frac{1}{2}$ se toma

$$\rho = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.382 \quad (3.64)$$

Observe que

$$1 - \rho = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad (3.65)$$

y

$$\frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1 - \rho}{1}, \quad (3.66)$$

resultando

$$\frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{1 - \rho}{1}. \quad (3.67)$$

Entonces, dividir un rango en razón de ρ entre $1 - \rho$ es similar al efecto de que la razón del segmento mas corto entre mas largo sea igual a la razón del mas largo entre la suma de los dos. Esta regla fue referida por los antiguos geómetras griegos como la *sección Áurea*. El uso de esta regla de la *sección Áurea* significa que en cada

etapa de la reducción del rango de incertidumbre (excepto la primera), la función objetivo f solo necesita ser evaluada en un nuevo punto. El rango de incertidumbre se reduce a la relación $1 - \rho \approx 0.61803$ en cada etapa. Entonces, para N pasos de reducción usando el método de la *sección Áurea* se reduce el rango por un factor de

$$(1 - \rho)^N \approx (0.61803)^N. \quad (3.68)$$

Ejemplo 3.6.1 Usamos el método de búsqueda de *sección Áurea* para encontrar el valor de x que minimiza

$$f(x) = x^4 - 14x^3 + 60x^2 - 70x \quad (3.69)$$

en el rango $[0, 2]$. Localizamos el valor de x en un rango de 0.3. Después de N pasos el rango $[0, 2]$ es reducido por $(0.61803)^N$ escogemos N tal que

$$(0.61803)^N \leq 0.3/2. \quad (3.70)$$

Para cuatro pasos de reducción, $N=4$ tenemos lo siguiente.

Iteración 1. Se evalúa la función (3.111) en dos puntos intermedios a_1 y b_1 .

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + \rho(b_0 - a_0) = 0.7639, \\ b_1 &= a_0 + (1 - \rho)(b_0 - a_0) = 1.236, \end{aligned} \quad (3.71)$$

donde $\rho = (3 - \sqrt{5})/2$. Calculamos

$$\begin{aligned} f(a_1) &= -24.36, \\ f(b_1) &= -18.96. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Esto significa que $f(a_1) < f(b_1)$, así que el intervalo de incertidumbre es reducido a

$$[a_0, b_1] = [0, 1.236]. \quad (3.73)$$

Iteración 2. Escogemos b_2 de manera que coincida con a_1 , y f evalúe solo al valor

$$a_2 = a_0 + \rho(b_1 - a_0) = 0.4721, \quad (3.74)$$

tenemos entonces que

$$\begin{aligned} f(a_2) &= -21.10, \\ f(b_2) &= f(a_1) = -24.36. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Ahora, $f(b_2) < f(a_2)$, así que el intervalo de incertidumbre es reducido a

$$[a_2, b_1] = [0.4721, 1.236]. \quad (3.76)$$

De esta misma manera se obtienen las siguientes iteraciones, obteniendo un intervalo reducido de

$$[a_4, b_3] = [0.6525, 0.9443]. \quad (3.77)$$

Así como este método, para minimizar una función, existen otros de mayor complejidad estos pueden ser revisados en [36]. Por su sencillez, en este trabajo de tesis, usamos la optimización por búsqueda en intervalos sobre la función de coeficiente de variación, que se aborda en la siguiente sección.

3.6.2. Coeficiente de variación

Para una mayor comprensión del método de extracción de fase que se abordará en esta sección, revisaremos brevemente algunos conceptos de probabilidad importantes. Nos referimos a un experimento aleatorio, al experimento en el que el resultado no se puede predecir, representando los posibles resultados en un conjunto de eventos $\{A\}$. Es decir, si repetimos el experimento N veces y un evento específico A ocurre n veces, entonces, la frecuencia con la que ocurre A es dada por n/N . Entonces la probabilidad del evento A se define como

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N} \quad (3.78)$$

Intuitivamente podemos construir un modelo estadístico que esperamos represente el experimento. El modelo estadístico debe juzgarse sobre la base de la precisión al describir el comportamiento de los resultados experimentales en muchos ensayos. Con esto introducimos el concepto de variable aleatoria. Para cada posible evento A del experimento aleatorio se le asigna un número real $u(A)$. Es decir, la variable U consta de todos los posibles $u(A)$. La variable U es discreta si los resultados consisten en un conjunto discreto de números posibles y continua si los resultados pueden encontrarse en cualquier lugar de un continuo de valores posibles. Para cualquiera de los casos la función de distribución de probabilidades se define por

$$F_U = \text{Prob}\{U \leq u\}, \quad (3.79)$$

En otras palabras la ecuación (3.79) significa la probabilidad de que la variable U asuma un valor menor o igual al valor específico u . Cuando U cae entre dos límites $a < U \leq b$ la probabilidad esta dada por

$$\text{Prob}\{a < U \leq b\} = F_U(b) - F_U(a). \quad (3.80)$$

Derivamos a continuación la función de densidad para una variable aleatoria U

$$P_U(u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{F_U(u) - F_U(u - \Delta u)}{\Delta u}, \quad (3.81)$$

para un Δu suficientemente pequeño se tiene

$$P_U(u) \cong \text{Prob}\{u - \Delta u < U \leq u\}. \quad (3.82)$$

Propiedades fundamentales de $F_U(u)$

$$P_U \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} P_U(u) du = 1, \quad (3.83)$$

$$\text{Prob}\{a < U \leq b\} = \int_a^b P_U(u) du, \quad (3.84)$$

la función δ con la propiedad de

$$\begin{aligned} \delta(u - u_k) &= 0 & u \neq u_k, \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \delta(u - u_k) du &= g(u_k) \end{aligned} \quad (3.85)$$

Promedio estadístico.

Sea $g(u)$ una función tal que para cada número real u se asigna un nuevo número real $g(u)$. Si u representa el valor de una variable aleatoria, $g(u)$ es también el valor de una variable aleatoria. Definimos el promedio estadístico (valor medio, valor esperado) de $g(u)$ por

$$\bar{g}(u) = E[g(u)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g(u)P_U(u)du, \quad (3.86)$$

Momentos de variable aleatoria.

Las propiedades más simples del promedio de una variable aleatoria son sus momentos, que si existen se obtienen estableciendo

$$g(u) = u^n. \quad (3.87)$$

De la ecuación (3.86) tenemos de manera particular el primer momento (valor medio, valor esperado)

$$\bar{u} = E[u] = \int_{-\infty}^{\infty} uP_U(u)du, \quad (3.88)$$

y el segundo momento (valor medio cuadrático)

$$\bar{u}^2 = E[u^2] = \int_{-\infty}^{\infty} u^2P_U(u)du. \quad (3.89)$$

Frecuentemente, las fluctuaciones de una variable aleatoria sobre su media son de gran interés, en cuyos casos nos concentramos en los momentos centrales, obtenidos con

$$g(u) = (u - \bar{u})^n, \quad (3.90)$$

De más importancia es el segundo momento central, o varianza, definido por

$$\sigma^2 = E[(u - \bar{u})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (u - \bar{u})^2P_U(u)du, \quad (3.91)$$

donde σ^2 es conocida como *varianza*, y

$$\sigma = \sqrt{E[(u - \bar{u})^2]} \quad (3.92)$$

es la *desviación estándar*.

Existe una variedad de situaciones en las que es de interés la dispersión de datos, más que su valor medio u otro momento central. En algunas aplicaciones, es de utilidad considerar medidas de dispersión. Para este propósito es apropiado conocer una medida de dispersión dividida por la medida apropiada de tendencia central, en vez de una medida bruta de dispersión. La desviación estándar podría ser útil para esta finalidad. Más aún, se podría considerar usar la desviación estándar normalizada al valor medio de la señal; es decir,

$$\zeta(u) = \frac{\sqrt{E[(u - \bar{u})^2]}}{E[u]}, \quad (3.93)$$

que es conocida en la literatura como *coeficiente de variación*. En esta medida, el valor medio representa el contenido de información de la señal, mientras que la desviación estándar representa ruido y otras señales de interferencia.

Vale la pena resaltar que el coeficiente de variación está relacionado con la *relación señal-ruido* (SNR, por la siglas en inglés *Signal-to-noise Ratio*), que es otra medida ampliamente usada en la literatura definida como

$$SNR = \frac{E[u]}{\sqrt{E[(u - \bar{u})^2]}} = \frac{1}{\zeta(u)}. \quad (3.94)$$

Observe que para la SNR, la desviación estándar no es importante en sí misma, sino solo en comparación con la media. Se puede ver que el coeficiente de variación está relacionado con la SNR como el recíproco. Por ejemplo, una señal (u otro grupo de valores de medición) con un CV de 0.02 tiene un SNR de 50. Mejores datos significan un valor más alto para el SNR y un valor más bajo para el CV.

Propiedades del valor medio, desviación estándar, y el coeficiente de variación

A continuación se describen brevemente algunas propiedades importantes del valor medio, la desviación estándar, y el coeficiente de variación.

- Propiedades del valor medio. Sea $Y = aX + b$ una transformación lineal de X , donde el factor a representa un cambio de escala y b es una traslación. Entonces, el valor medio de Y está dado como

$$E[Y] = aE[X] + b. \quad (3.95)$$

- Propiedades de la desviación estándar. Sea $Y = aX + b$ una transformación lineal de X , donde a y b son escalares constantes. Entonces, la desviación estándar de Y está dada por

$$\sigma_Y = a\sigma_X, \quad (3.96)$$

donde σ_X es la desviación estándar de X . Es decir, la desviación estándar es invariante con respecto al cambio de origen dado por b .

- Propiedades de CV. Sea $Y = aX$ un cambio de escala de X . Entonces, el coeficiente de variación de Y está dado por

$$\zeta(Y) = \frac{a\sigma_X}{aE[X]} = \zeta(X). \quad (3.97)$$

Es decir, el coeficiente de variación es invariante con respecto al cambio de escala a . El coeficiente de variación es positivo cuando el valor medio es positivo y negativo cuando el valor medio es negativo. El coeficiente de variación no está definido cuando el valor medio es cero.

3.6.3. Luz de modulación $b(x, y)$ y fase $\phi(x, y)$

En metrología óptica moderna, cada vez es más importante la exactitud en aplicaciones tales como medición de frentes de onda y reconstrucción de perfiles tridimensionales, entre otros. El método de corrimiento de fase ha demostrado alcanzar niveles altos de exactitud. En este método, es crítico conocer los corrimientos de fase entre dos patrones de franjas. Sin embargo, en la práctica, los corrimientos de fase se introducen mecánicamente, o son afectados por vibraciones y turbulencias del ambiente experimental. Esto provoca que los corrimientos de fase reales no coincidan con los corrimientos de fase esperados. Como resultado, la calidad de la fase recuperada será baja.

En teoría, demodular la información de fase de un solo patrón se realiza de manera sencilla, pero en la práctica nos encontramos con ambigüedades de signo en los resultados de fase. En los últimos años se ha trabajado sobre la posibilidad de realizar la extracción de fase usando solo dos patrones de franjas con un corrimiento de fase. A continuación, se describirá el principio teórico de la extracción de fase usando solo dos patrones de franjas.

Dos patrones de franjas con un corrimiento de fase entre ellos están dados matemáticamente por

$$\begin{aligned} I_1(x, y) &= a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x, y)], \\ I_2(x, y) &= a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x, y) + \alpha]. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Observe que, por cada punto (x, y) , se tienen tres incógnitas: a , b , y ϕ . Sin embargo, solo se tienen dos restricciones I_1 e I_2 . Por lo que el problema no tiene solución en el sentido clásico. Sin embargo, es posible realizar la extracción de fase eliminando la luz de fondo como se describe a continuación.

Existen métodos de estimación de la luz de fondo y luz de modulación conocidos como *normalización de patrones de franjas* [37]. Así, el problema de extracción de fase se puede resolver usando solo dos patrones de franjas si se estima, y elimina, previamente la luz de fondo $a(x, y)$. Esto se puede realizar aplicando un método de normalización de patrones de franjas. En la sección 3.1, se presentó un método para la estimación de la luz de fondo. Usando este método, se puede estimar la luz de fondo $a(x, y)$ y eliminarla de los patrones de franjas como $I(x, y) - a(x, y)$. Así, a través de la eliminación previa de la luz de fondo, podemos asumir que los patrones de franjas son de la forma

$$\begin{aligned} I_1(x, y) &= b(x, y) \cos [\phi(x, y)], \\ I_2(x, y) &= b(x, y) \cos [\phi(x, y) + \alpha]. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Usando la propiedad trigonométrica $\cos(\xi - \varsigma) = \cos \xi \cos \varsigma - \sin \xi \sin \varsigma$, las ecuaciones (3.99) se convierten en

$$\begin{aligned} I_1(x, y) &= b(x, y) \cos \phi, \\ I_2(x, y) &= b(x, y) (\cos \phi \cos \alpha - \sin \phi \sin \alpha) \\ &= b(x, y) \cos \phi \cos \alpha - b(x, y) \sin \phi \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.100)$$

3. Recuperación de fase por interferencia

La ecuación (3.100) se escribe de manera matricial como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} b \cos \phi \\ b \sin \phi \end{bmatrix}}_{\Theta}. \quad (3.101)$$

La ecuación (3.101) tiene la forma de $\mathbb{A}\Theta = Y$. La cual su solución Θ esta dada por

$$\Theta = (\mathbb{A})^{-1} Y. \quad (3.102)$$

Entonces, se procede a calcular \mathbb{A}^{-1}

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbb{A})} (\text{cof}(\mathbb{A}))^T, \quad (3.103)$$

donde $\det(\mathbb{A})$ es el determinante de la matriz \mathbb{A} y $\text{cof}(\mathbb{A})$ es la matriz de cofactores de \mathbb{A} . El determinante de \mathbb{A} es $\det(\mathbb{A}) = -\sin \alpha$. Por otro lado, la matriz de cofactores de \mathbb{A} esta dada por

$$\text{cof}(\mathbb{A}) = \begin{bmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.104)$$

Entonces, obtenemos la matriz inversa de \mathbb{A} como

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{-\sin \alpha} \begin{bmatrix} -\sin \alpha & 0 \\ -\cos \alpha & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.105)$$

De la ecuaciones (3.105) y (3.102) tenemos los siguiente

$$\begin{bmatrix} b \cos \phi \\ b \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \alpha / \sin \alpha & -1 / \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \quad (3.106)$$

De la ecuación (3.106) podemos encontrar la luz de modulación $b(x, y)$ como sigue

$$\begin{aligned} b(x, y) &= \sqrt{(b \cos \phi)^2 + (b \sin \phi)^2} \\ &= \sqrt{I_1^2 + (I_1 / \tan \alpha - I_2 / \sin \alpha)^2}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

De la misma forma, se tiene que la fase $\phi(x, y)$ y los patrones de franjas, I_1 e I_2 , están relacionados por

$$\frac{b \sin \phi}{b \cos \phi} = \tan \phi = \frac{I_1 / \tan \alpha - I_2 / \sin \alpha}{I_1}. \quad (3.108)$$

Por lo tanto, la fase (envuelta) se obtiene usando la función arco tangente como

$$\phi_w = \text{atan} \left[\frac{I_1 / \tan \alpha - I_2 / \sin \alpha}{I_1} \right]. \quad (3.109)$$

Observe que las ecuaciones (3.107) y (3.109) dependen de conocer α este valor se puede obtener de forma sencilla minimizando la función de modulación (3.109). Este proceso se describe de manera detallada en la siguiente subsección

3.6.4. Minimización del coeficiente de variación de $b(x, y)$

En la sección anterior, se mostró cómo calcular la fase envuelta usando dos patrones de franjas con un corrimiento de fase entre ellos a través de la ecuación (3.109). Sin embargo, es importante resaltar que se requiere conocer el corrimiento de fase α . En la práctica, este corrimiento de fase es desconocido, o no se conoce con precisión. Si en la ecuación (3.107) se usa un corrimiento de fase inexacto, entonces la luz de modulación resultante $b(x, y)$ exhibirá franjas remanentes. Sabemos que la luz de modulación no debe presentar franjas. Además, las franjas incrementarán la varianza de la luz de fondo. Es por eso que se puede usar el coeficiente de variación de $b(x, y)$ para probar qué tan exacto es el corrimiento de fase. La idea es determinar un corrimiento de fase tal que elimine las franjas en la luz de modulación. Esto es equivalente a decir que se debe encontrar un corrimiento de fase α tal que minimice el coeficiente de variación de la luz de modulación. Cuando se encuentra el valor de α que minimiza el coeficiente de variación de $b(x, y)$, entonces se podrá calcular la fase envuelta usando la ecuación (3.109). En esta sección, mostraremos cómo calcular el corrimiento de fase α aplicando el principio de minimización del coeficiente de variación.

$$\begin{aligned} \alpha &= \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \zeta(b(x, y)) \\ &= \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \zeta \left(\sqrt{I_1^2 + (I_1/\tan \alpha - I_2/\sin \alpha)^2} \right) \end{aligned} \quad (3.110)$$

3.6.5. Evaluación por simulación

Para analizar el método de minimización del coeficiente de variación realizamos una simulación para extraer la función de fase a partir de dos patrones de franjas con un corrimiento $\alpha = 1.5$ rad entre ellos. Se considera que la luz de fondo ha sido filtrada en los patrones de franjas (ver Figs 3.17(b) y 3.17(c)) por lo que los patrones de franjas son de la forma dada por la ecuación (3.99). De la misma forma que en el método de Gram-Shmidt el conocer el corrimiento de fase de los patrones no es necesario ya que ese es el objetivo de minimizar el coeficiente de variación

La función de la luz de modulación está dada por la ecuación (3.10) (ver Fig. 3.17(a)), con $B_0 = 100$ y $B_1 = 0.2$. Definimos la ecuación de fase como $\phi(x, y) = 4 \prod$. De la ecuación (3.1) definimos $\eta(x, y)$ como una función de ruido aleatorio, con distribución normal de media cero y desviación estándar $\sigma = 30$.

3. Recuperación de fase por interferencia

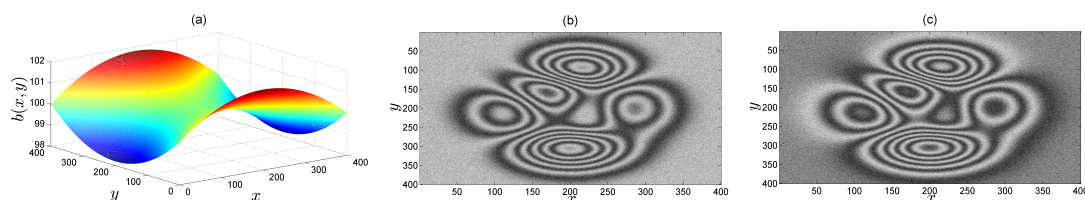


Fig. 3.17. (a) Función luz de modulación, (b) Patrón de franjas I_1 y (c) Patrón de franjas I_2 .

Para encontrar el valor del corrimiento de fase, minimizamos la función

$$f(\alpha) = \zeta(b(x, y, \alpha)). \quad (3.111)$$

El mínimo de la función $f(\alpha)$ se encuentra usando el método de optimización por búsqueda en intervalos. El intervalo inicial para la búsqueda es $[0, \pi]$ radianes, el número máximo de iteraciones fue fijado a 50, y la exactitud requerida fue 1×10^{-4} radianes. Los resultados en cada iteración calculados se muestran en la tabla 3.2. Observe que la exactitud requerida se alcanzó en 22 iteraciones

Iteración	Intervalo
1	[0, 1.9416]
2	[0.74163, 1.9416]
3	[1.2, 1.9416]
4	[1.2, 1.6583]
5	[1.3751, 1.6583]
6	[1.4833, 1.6583]
7	[1.4833, 1.5915]
8	[1.4833, 1.5501]
9	[1.5088, 1.5501]
10	[1.5088, 1.5343]
11	[1.5186, 1.5343]
12	[1.5186, 1.5283]
13	[1.5223, 1.5283]
14	[1.5246, 1.5283]
15	[1.5246, 1.5269]
16	[1.5246, 1.526]
17	[1.5251, 1.526]
18	[1.5251, 1.5257]
19	[1.5253, 1.5257]
20	[1.5253, 1.5255]
21	[1.5254, 1.5255]
22	[1.5254, 1.5255]

Tabla 3.2. Tabla de intervalos por iteración.

El último intervalo obtenido por la iteración número 22 tenemos como resultado

la mejor aproximación del valor de α , dado por el promedio de

$$\alpha = \frac{a_{22} + b_{22}}{2} = 1.52545. \quad (3.112)$$

Con este valor de α obtenemos la fase envuelta dada por la ecuación (3.109). La fase envuelta $\phi_w(x, y)$ exacta y la estimada $\bar{\phi}_w(x, y)$ están representadas en las Figs. 3.18(a), y 3.18(b) respectivamente. Observe que las diferencias en la Fig. 3.18(c) son debido al ruido aleatorio en las zonas de discontinuidad que aparecen debido al efecto de envoltimiento. La Fig. 3.18(d) representa la fase desenvuelta exacta, la Fig. 3.18(e) es la estimada. Note que al obtener la diferencia de las dos (ver Fig. 3.18(f)) da como resultado una distribución uniforme y casi plana sobre el plano $\bar{\phi} - \phi = 0$.

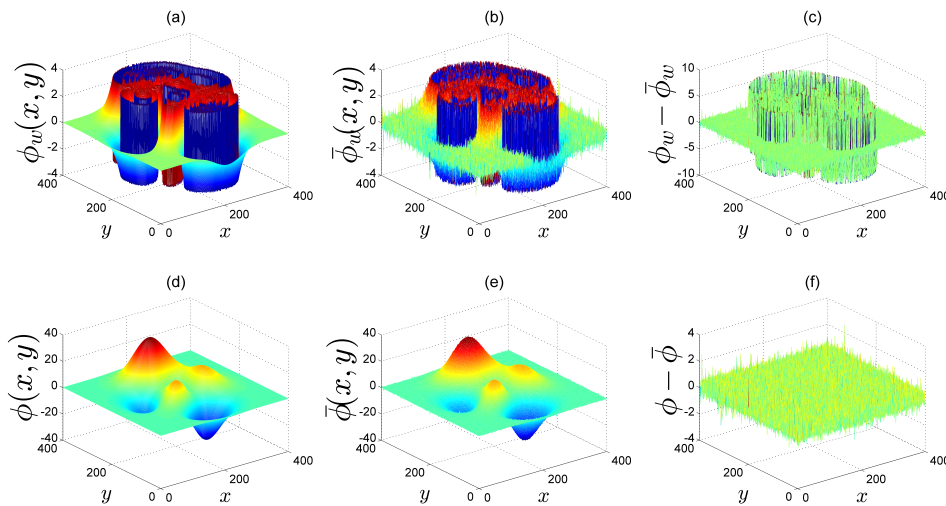


Fig. 3.18. (a) Fase envuelta ϕ_w exacta, (b) fase envuelta $\bar{\phi}_w$ estimada, (c) diferencia entre (a) y (b), (d) fase desenvuelta ϕ exacta, (e) fase desenvuelta $\bar{\phi}$ estimada y (f) diferencia entre (d) y (e).

A diferencia de los demás métodos, este tiene la capacidad de recuperar la fase con solo dos patrones de franjas, con corrimiento de fase desconocido y con un ruido adicional. Teniendo en cuenta las ventajas del método, basado en la minimización del coeficiente de variación, se da paso a emplearlo libremente sobre interferogramas experimentales.

3.6.6. Evaluación usando patrones experimentales

En esta sección analizamos dos patrones de franjas experimentales que tienen un corrimiento de fase α . Estos patrones de franjas fueron obtenidos experimentalmente usando un interferómetro de Michelson, iluminado con una fuente láser [38]. La Fig. 3.19 ilustra el arreglo experimental empleado, mientras que las Figs. 3.20(a) y 3.20(b) muestran dos patrones de franjas experimentales.

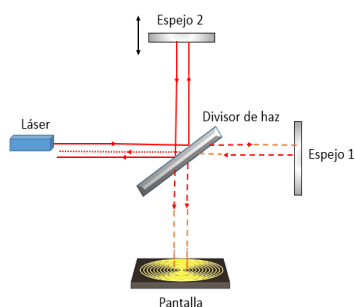


Fig. 3.19. Interferómetro de Michelson.

El primer paso en el proceso de extracción de fase por minimización del coeficiente de variación, es remover la luz de fondo de los patrones de franjas dando como resultado los patrones I'_1 y I'_2 presentados en las Figs 3.20(c) y 3.20(d). Para esto se utiliza el método de estimación de la luz de fondo que se presentó en la sección 3.1.

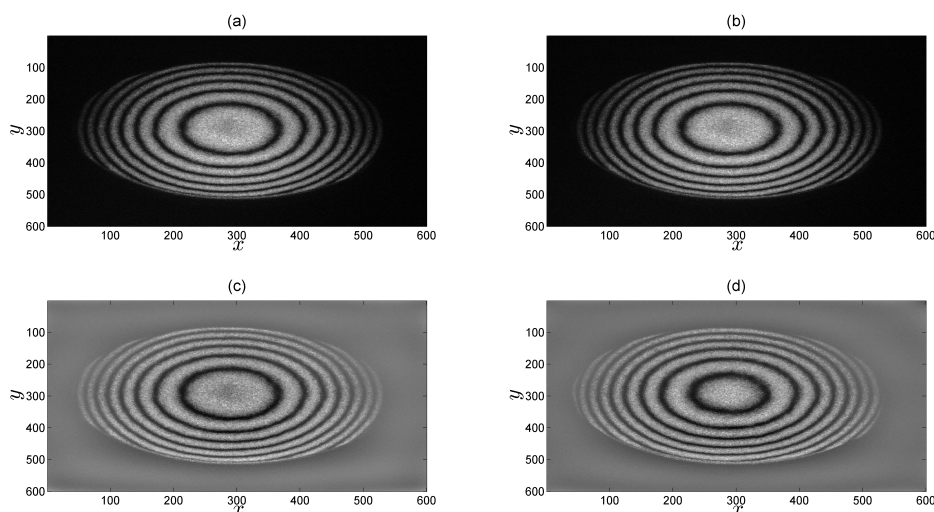


Fig. 3.20. (a) y (b) Patrones de franjas I_1 e I_2 . (c) y (d) Patrones de franjas I'_1 e I'_2 , correspondientes a I_1 e I_2 sin luz de fondo.

De la misma forma que en la sección 3.6.5 se utiliza el método de optimización por búsqueda en intervalos. El intervalo inicial para la búsqueda es $[0, \pi]$ radianes, el número máximo de iteraciones fue fijado a 50, y la exactitud requerida fue 1×10^{-4} radianes. Los resultados calculados en cada iteración se muestran en la tabla 3.3. Observe que la exactitud requerida se alcanzó en 22 iteraciones

3. Recuperación de fase por interferencia

Iteración	Intervalo
1	[1.2, 3.1416]
2	[1.2, 2.4]
3	[1.6583, 2.4]
4	[1.6583, 2.1167]
5	[1.8334, 2.1167]
6	[1.9416, 2.1167]
7	[1.9416, 2.0498]
8	[1.9829, 2.0498]
9	[2.0085, 2.0498]
10	[2.0085, 2.034]
11	[2.0182, 2.034]

Iteración	Intervalo
12	[2.0182, 2.028]
13	[2.022, 2.028]
14	[2.0243, 2.028]
15	[2.0243, 2.0266]
16	[2.0243, 2.0257]
17	[2.0248, 2.0257]
18	[2.0248, 2.0254]
19	[2.0248, 2.0252]
20	[2.0249, 2.0252]
21	[2.0249, 2.0251]
22	[2.025, 2.0251]

Tabla 3.3. Intervalos de búsqueda por cada iteración.

El intervalo final es empleado para calcular el corrimiento de fase como

$$\alpha = \frac{a_{22} + b_{22}}{2} = 2.02505. \quad (3.113)$$

El valor de corrimiento de fase resultante es empleado para obtener la fase envuelta usando la ecuación (3.109). La Fig. 3.21(a) muestra la fase envuelta resultante ϕ_w contenida entre $-\pi$ y $+\pi$ esto concuerda perfectamente con la literatura en referencia a otros métodos.

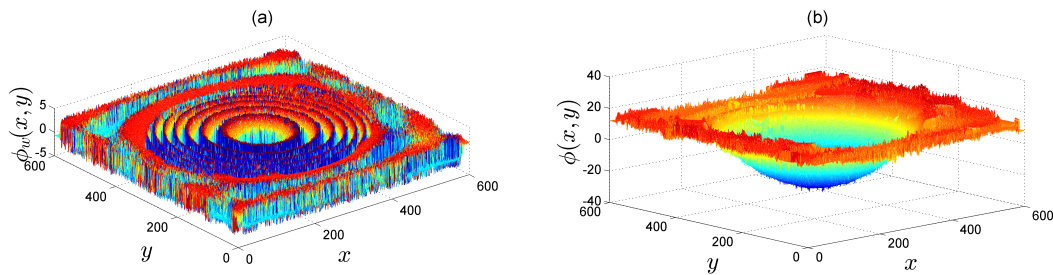


Fig. 3.21. (a) Fase ϕ_w envuelta experimental y (b) fase ϕ desenvuelta experimental.

3. Recuperación de fase por interferencia

Como comprobación observamos en la figura 3.21 (b) la superficie paraboloides elíptica como fase desenvuelta ϕ , esta superficie es acorde a los interferogramas experimentales.

Capítulo 4

Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo, se abordó el problema de recuperación de fase con el análisis de seis alternativas abarcando tanto el enfoque de difracción como el de interferencia. De experimentos basados en difracción, se reporta en la literatura que frecuentemente la mayoría de ellos hacen referencia al trabajo de Gerchberg y Saxton, por lo que, en este trabajo se analizó el algoritmo iterativo Gerchberg-Saxton. Por otro lado, de las aplicaciones basadas en el fenómeno de interferencia se analizaron cinco algoritmos de corrimiento de fase.

Los principios teóricos en los que está basado el algoritmo de Gerchberg-Saxton fueron presentados en detalle. Posteriormente, el algoritmo fue evaluado a través de simulaciones por computadora, por medio del software MATLAB, usando diferentes funciones de amplitud y fase. En la simulación se pudo notar que la linealidad de la transformada rápida de Fourier acopló perfectamente las amplitudes simuladas del plano imagen y del plano de difracción arrojando la fase esperada. Finalmente, se propuso una configuración experimental para evaluar el algoritmo de Gerchberg-Saxton empleando patrones de intensidad experimentales.

Durante la evaluación experimental, se encontraron aspectos que dificultaron el buen funcionamiento del algoritmo. Algunos de ellos fueron: (1) la saturación de los píxeles en las imágenes de intensidad experimentales, (2) el escalamiento en la aproximación del patrón de difracción generada de manera estándar por la transformada rápida de Fourier, (3) deficiencias en la alineación de la cámara para captura de imágenes, y (4) dificultades para introducir funciones de fase arbitrarias. El conocimiento de estas dificultades es de esencial importancia para trabajos futuros, si se requiere trabajar con métodos de recuperación de fase con patrones de difracción o espectros de Fourier experimentales. En esta tesis, se propuso una solución al problema de saturación la cual se describe en el apéndice A.

Los cinco métodos de recuperación de fase basados en el fenómeno de interferencia fueron: Takeda, Brunning, Greivenkamp, Gram-Schmidt y minimización del coeficiente de variación. Para analizar el método de Takeda, de manera computacional, se generó un patrón de franjas con corrimiento de fase espacial, así como el espectro de Fourier del patrón. Takeda indica que uno de los órdenes $+1$ o -1 debe

trasladarse al origen para obtener la fase envuelta, pero en este trabajo se propuso que era más viable que la frecuencia portadora permaneciera hasta el proceso de desenvolvimiento de fase y después restarla. Como se observó este método requirió de solo un patrón de franjas, pero esta ventaja se traduce en un inconveniente si se quiere utilizar de manera experimental, ya que el traslado de ordenes o eliminación de frecuencias portadoras no es un proceso flexible.

Para el análisis de los métodos de Brunning y Greivenkamp se requirió de generar varios patrones de franjas, estos patrones de franjas fueron generados computacionalmente de acuerdo a la teoría de patrones de interferencia con corrimiento de fase temporal. Para Brunning los corrimientos de fase temporal requieren tener la misma diferencia entre ellos. Este método mejora la recuperación de fase mientras la cantidad de patrones de franjas aumente, lo que resulta un obstáculo experimental.

Por otro lado, el método de Greivenkamp permite que los corrimientos de fase temporales utilizados pueden tener diferentes valores, es decir no requiere de un orden. Este hecho, experimentalmente, se convierte en un proceso más simple. Sin embargo, tanto Greivenkamp como Brunning requieren de conocer exactamente el valor de los corrimientos temporales. Es por eso que el método de Gram-Schmith fue analizado en este trabajo pues este requiere de solo dos interferogramas.

En análisis del método de Gram-Schmith se consideró utilizar solo un corrimiento de fase. Después de un proceso de ortonormalización se recuperó la fase envuelta. El disminuir notablemente la cantidad de patrones de franjas experimentalmente es de mucha ayuda. Sin embargo, observamos que aún quedaría la interrogante de conocer el valor del corrimiento de fase.

Finalmente la simulación del método de minimización del coeficiente de variación de la función modulación, requirió como entrada solo dos patrones de franjas, de igual manera estos fueron generados por corrimiento de fase temporal, pero sin conocer el corrimiento entre los patrones. De la misma forma que los otros métodos la fase envuelta recuperada puede desenvolverse de manera sencilla. A parte de que solo son dos patrones de franjas, lo que reduce problemas experimentales de montaje y ruido, este método aporta una ventaja superior a las demás. Esta ventaja es la de, sin conocer con exactitud el corrimiento de fase, recuperar la fase envuelta con éxito como en los demás métodos. En otras palabras, es más conveniente usar el método de minimización del coeficiente de variación en la práctica. En este trabajo se comprobó la utilidad de este método con dos patrones de franjas experimentales.

En esta tesis, en la sección 3.1, se destacó que para el procesamiento de los patrones de franjas es necesario eliminar la luz de fondo definida como $a(x, y)$. En esta tesis se describió detalladamente como se estima la luz de fondo para luego eliminarla de los patrones. De igual forma se describió el proceso para el desenvolvimiento de fase requerido en cada uno de los métodos. Este proceso se desarrolló en el Apéndice B de esta tesis.

Apéndice A

Ajuste de saturación por mínimos cuadrados

La interpolación se hace usando mínimos cuadrados. Como primer paso se determina el modelo teórico del patrón de difracción con datos experimentales. Para esto se usan tres puntos importantes para la preparación de la interpolación.

- Datos de entrada y salida del proceso
- Un modelo teórico
- Un criterio (mínimos cuadrados).

El criterio significa que tanto un modelo se ajusta a los datos experimentales.

El modelo es basado en variables observables y de parámetros. Específicamente la estimación de esos parámetros, cuando estos son constantes, se basa en el vector parámetro solución $\vec{\theta}$ que es único y mínimo. Fijémonos en la ecuación

$$\vec{Y} = A\vec{\theta} + \eta \quad (1)$$

Donde \vec{Y} son los datos experimentales obtenidos, $A\vec{\theta}$ el modelo y $\vec{\eta}$ el ruido. Definimos entonces el vector error como

$$\vec{E} = \vec{Y} - A\vec{\theta} \quad (2)$$

Por otro lado, se tiene que el problema de estimación se soluciona encontrando el argumento que minimiza el funcional. El funcional es dado de la siguiente manera.

$$\mathfrak{S} = \vec{E}^T \vec{E} = (\vec{Y} - A\vec{\theta})^T (\vec{Y} - A\vec{\theta}) \quad (3)$$

$$= \vec{Y}^T \vec{Y} - 2\vec{\theta}^T A^T \vec{Y} + \vec{\theta}^T A^T A \vec{\theta}$$

Para minimizar el funcional $\mathfrak{S}(\vec{\theta})$ derivamos e igualamos a cero. Consideremos que $\vec{A}^T \vec{A}$ es simétrica por lo que el gradiente queda de la siguiente manera

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \vec{\theta}} = -2A^T \vec{Y} + 2A^T A \vec{\theta} = \vec{0} \quad (4)$$

Y si aparte $\vec{A}^T \vec{A}$ es no singular entonces

$$\vec{\theta} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{Y} \quad (5)$$

Por otra, parte realizando una expansión en serie de Taylor del vector error alrededor de $\vec{\theta}$ tenemos lo siguiente.

$$\vec{E} \approx \vec{E}(\vec{\theta}_0) + J_E(\vec{\theta}_0)(\vec{\theta} - \vec{\theta}_0) \quad (6)$$

Donde $\vec{E}(\vec{\theta}_0) = \vec{Y} - A\vec{\theta}_0$

$$\begin{aligned} J_E(\vec{\theta}_0) &= \frac{\partial}{\partial \vec{\theta}} [\vec{Y} - A\vec{\theta}] \\ &= -\frac{\partial}{\partial \vec{\theta}} A\vec{\theta} \end{aligned} \quad (7)$$

Si definimos a $A\vec{\theta}$ como una función de variables observables y de parámetros, tenemos lo siguiente.

$$J_E(\vec{\theta}_0) = -J_f(\vec{\theta}_0) \quad (8)$$

Si cambiamos a $(\vec{\theta} - \vec{\theta}_0) = \vec{h}$, el funcional de mínimos cuadrados se puede aproximar entonces como.

$$\mathfrak{S} \approx \vec{E}^T \vec{E} - 2\vec{h}^T J_f^T(\vec{\theta}_0) \vec{E} + \vec{h}^T J_f^T J_f \vec{h} \quad (9)$$

De lo anterior obtenemos el mínimo con $\vec{\theta}$.

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}_0 + J_f^\dagger [\vec{Y} - f(\cdot, \vec{\theta}_0)] \quad (10)$$

De los principios antes mencionados, implementamos el ajuste por mínimos cuadrados de datos recabados por la medición experimental con el modelo del patrón de difracción de una abertura circular. Partimos en considerar la función Bessel para la construcción del modelo. Haciendo uso de la ecuación

$$B \{circ(r)\} = \frac{1}{2\pi\rho^2} \int_0^{2\pi\rho} r' J_0(r') dr' = \frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho} \quad (11)$$

Consideramos el patrón de difracción de la forma

$$f(r) = a + b \left[\frac{2J_1(\omega r)}{r} \right]^2 \quad (12)$$

con $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ y el vector de parámetros como

$$\vec{\theta} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \omega \\ x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Procedemos a calcular \mathcal{J}_f (el cambio de la literal J fue para no confundirse con la función Bessel) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_f &= \frac{\partial}{\partial \theta} f \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial a} f \quad \frac{\partial}{\partial b} f \quad \frac{\partial}{\partial \omega} f \quad \frac{\partial}{\partial x_0} f \quad \frac{\partial}{\partial y_0} f \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Para obtener el funcional hacemos uso de la siguiente propiedad de la función Bessel.

$$\frac{d}{dx} [J_n(ax)] = aJ_{n-1}(ax) - \frac{n}{x} J_n(ax) \quad (15)$$

De esto podemos calcular los elementos del funcional

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b} f &= \mathbf{1} \\ \frac{\partial}{\partial b} f &= \left[\frac{2J_1(\omega r)}{r} \right]^2 \\ \frac{\partial}{\partial \omega} f &= 4b \frac{J_1(\omega r)}{r} \left[2J_0(\omega r) - \frac{J_1(2\omega r)}{\omega r} \right] \\ \frac{\partial}{\partial x_0} f &= 4b \left(\frac{2J_1(\omega r)}{\omega r} \right) \frac{(x-x_0)}{r^2} \left[-J_0(\omega r) + \frac{2J_1(\omega r)}{r} \right] \\ \frac{\partial}{\partial y_0} f &= 4b \left(\frac{2J_1(\omega r)}{\omega r} \right) \frac{(y-y_0)}{r^2} \left[-J_0(\omega r) + \frac{2J_1(\omega r)}{r} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

Con lo anterior se puede crear un algoritom con un codigo de la siguiente forma;

```
e=0.001
for k=1:N
    Yh=Bessel_Fun(r,theta_0)
    E=datos -Yh
    J= Jacobiano_sistema(r,theta_0)
    theta = theta_0 + J'E
    if norm(theta - theta_0)<=e
        break
    end
    theta_0=theta
end
```

A continuación se presenta la interpolación con datos experimentales.

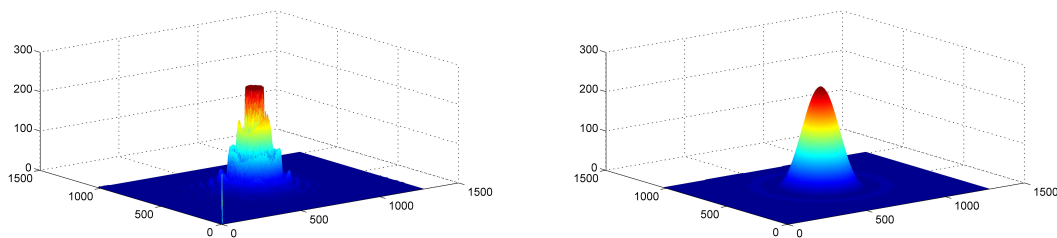


Fig. 1. Restauración de niveles de intensidad en pixeles saturados.

Apéndice B

Desenvolvimiento de fase

Los algoritmos se pueden clasificar en dos grupos, desenvolvimiento temporal y desenvolvimiento espacial. Los algoritmos de desenvolvimiento de fase temporal son simples y robustos frente a ruido pero requieren más de un mapa de fase para trabajar. Por otro lado, los algoritmos de desenvolvimiento de fase espacial requieren un único mapa de fase. A continuación, abordaremos el problema de desenvolvimiento de fase espacial.

El funcionamiento de los algoritmos de desenvolvimiento de fase espacial se puede describir como la acción de sumar o restar múltiplos de 2π , conocidos como saltos de fase. Si $\psi(x, y)$ es el mapa de fase envuelto, este es representado como

$$\psi(x, y) = \phi(x, y) - 2\pi k(x, y), \quad (17)$$

donde $k(x, y)$ es una función de valor entero con la cual definimos el término de salto de fase como $2\pi k(x, y)$.

Esta es una función constante a trozos y su gradiente $2\pi\nabla k(x, y)$ es cero a trozos. Por lo que, si a la ecuación (17) aplicamos el operador gradiente, esta se transforma de a cuerdo al método de Itoh [34] en lo siguiente

$$\nabla\phi(x, y) = \mathcal{W}[\nabla\psi(x, y)], \quad (18)$$

donde el operador \mathcal{W} envuelve a la fase $\phi(x, y)$ en el intervalo de $[-\pi, \pi]$. En la ecuación (18) se observa que la función de saltos de fase es eliminada, por lo que es conveniente trabajar sobre $\nabla 2\pi k(x, y)$, resolver para $2\pi k(x, y)$ y sustituir el resultado en la ecuación (17) para obtener la fase desenvuelta.

Se observa que $\nabla\psi$ tiene una infinidad de valores posibles, mientras que $\nabla k(x, y)$ es un conjunto finito de valores posibles que podemos llamar como

$$D = \{-1, 0, +1\}, \quad (19)$$

el cual define los valores de la derivada de la función de saltos de fase ($D = -1$ para saltos de fase de π a $-\pi$, $D = 0$ cuando no hay salto de fase, $D = +1$ para salto de fase de $-\pi$ a π).

Consideremos $\boldsymbol{\psi}(x, y)$, $\phi(x, y)$ y $k(x, y)$ funciones discretas representadas por matrices de tamaño $M \times N$. Entonces, definir el gradiente de una función discreta se ve de la siguiente forma. Sea f una función discreta, su gradiente esta dado como

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f L_x^T \\ L_y f \end{bmatrix}, \quad (20)$$

donde L_x y L_y son los operadores de diferencias finitas a lo largo de las direcciones x y y . Con el fin de aproximar las derivadas, provenientes del gradiente, se define los operadores de diferencias finitas como

$$L_x = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(N-1) \times N}, \quad (21)$$

$$L_y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(M-1) \times M}. \quad (22)$$

La definición de L_x y L_y es suficiente para que $L_x^T L_x$ y $L_y^T L_y$ sean matrices de tamaño $N \times N$ y $M \times M$ respectivamente, las cuales son usadas durante el proceso de descripción teórica.

Se calcula el gradiente de la fase envuelta dada por la ecuación (17) y el resultado se divide por 2π . A continuación se aplica el operador de redondeo obteniendo.

$$\begin{aligned} \mathbf{redondeo} \left(\frac{1}{2\pi} \nabla \boldsymbol{\psi} \right) &= \mathbf{redondeo} \left(\frac{1}{2\pi} \nabla \phi - \nabla k \right) \\ &= \mathbf{redondeo} \left(\frac{1}{2\pi} \nabla \phi \right) - \nabla k. \end{aligned} \quad (23)$$

Observe que al aplicar el operador $\mathbf{redondeo}(\cdot)$ no se afecta al ∇k puesto que esta es ya una función de valor entero. Consideramos la condición de Nyquist,

$$|\nabla \phi(x, y)| < \pi \quad \forall x, y. \quad (24)$$

Si se cumple la condición (24), entonces $|\frac{\nabla \phi}{2\pi}|$ es menor que 1/2 para todo x, y . Por lo tanto, $\mathbf{redondeo} \left(\frac{\nabla \phi}{2\pi} \right) = 0$. Es decir, el término ∇k es la componente entera de $\left(\frac{\nabla \boldsymbol{\psi}}{2\pi} \right)$. Por lo tanto podemos encontrar el campo ∇k de la siguiente forma

$$\nabla k = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \end{bmatrix} = -\mathbf{redondeo} \left(\frac{1}{2\pi} \nabla \boldsymbol{\psi} \right). \quad (25)$$

De la ecuación (25) se procede a obtener k , esto se formula como el siguiente problema de optimización por mínimos cuadrados

$$\min_k \left\{ \|k_x - \tilde{k} L_x^T\|_F^2 + \|k_y - L_y \tilde{k}\|_F^2 \right\}, \quad (26)$$

donde $\|\cdot\|_F$ es la norma de Frobenius, k_x y k_y están dadas en la ecuación (25). Con este enfoque, el método de mínimos cuadrados permite encontrar una función

\tilde{k} , como aquella cuyas derivadas se aproximan a las derivadas encontradas en (25). Aplicando la definición de la norma de Frobenius, desarrollamos el funcional a minimizar como

$$\begin{aligned} \|k_x - \tilde{k}L_x^T\|_F^2 + \|k_y - L_y\tilde{k}\|_F^2 = & \text{tr} \left\{ (k_x - \tilde{k}L_x^T) (k_x - \tilde{k}L_x^T)^T \right\} \\ & + \text{tr} \left\{ (k_y - L_y\tilde{k}) (k_y - L_y\tilde{k})^T \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

donde $\text{tr}(\cdot)$ indica la traza de la matriz. Expandiendo términos, la ecuación (27) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \|k_x - \tilde{k}L_x^T\|_F^2 + \|k_y - L_y\tilde{k}\|_F^2 = & \text{tr} \left\{ k_x k_x^T - k_x L_x \tilde{k}^T - \tilde{k} L_x^T k_x^T + \tilde{k} L_x^T L_x \tilde{k}^T \right\} \\ & + \text{tr} \left\{ k_y k_y^T - k_y \tilde{k}^T L_y^T - L_y \tilde{k} k_y^T + L_y \tilde{k} \tilde{k}^T L_y^T \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

Para encontrar el mínimo, derivamos con respecto a \tilde{k} e igualamos a cero. El resultado de este procedimiento es la ecuación

$$L_y^T L_y \tilde{k} + \tilde{k} L_x^T L_x - L_y^T k_y - k_x L_x = 0. \quad (29)$$

Esta ecuación se puede resolver para \tilde{k} de manera estable y única usando los eigenvalores de $L_y^T L_y$ y $L_x^T L_x$. La ecuación (29), se puede reescribir en forma compacta como

$$A\tilde{k} + \tilde{k}B = C, \quad (30)$$

donde $A = L_y^T L_y$, $B = L_x^T L_x$ y $C = L_y^T k_y + k_x L_x$. La ecuación (30) es conocida en la literatura como *Ecuación de Lyapunov* [35].

Para resolver numéricamente la ecuación de Lyapunov, se hace una simplificación de la ecuación matricial original (30) mediante transformaciones de semejanza. Definimos a $U\Sigma V^T$ como la descomposición en valores singulares de B . Donde B es una matriz simétrica, U y V son matrices ortogonales iguales y $\Sigma = \text{diagonal}(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ es una matriz cuadrada diagonal con σ_i los valores singulares de B . De acuerdo con esto, multiplicamos el lado derecho de (30) por U y obtenemos

$$A\tilde{k}U + \tilde{k}BU = CU. \quad (31)$$

Usando el hecho de que $B = IB$ con $I = UU^T$, podemos escribir la ecuación (31) como $A\tilde{k}U + \tilde{k}UU^T BU = CU$, y reescribirla como

$$AK + K\Sigma = D, \quad (32)$$

donde $K = \tilde{k}U$ y $D = CU$. Se puede resolver para K la ecuación modificada (32) analizando las columnas de la matriz K . Un camino para resolver esta ecuación es aplicando directamente el producto matricial de Kronecker. Para esto tenemos las siguientes definiciones.

Definición .1 Sea \mathcal{A} una matriz $m \times n$ y \mathcal{B} una matriz de $s \times t$, el producto de Kronecker $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ es de tamaño $ms \times nt$ y se define como sigue

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = (\alpha_{ij}\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\mathcal{B} & \cdots & \alpha_{1n}\mathcal{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}\mathcal{B} & \cdots & \alpha_{mn}\mathcal{B} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Una de las propiedades más importantes de este producto es el de convertir matrices a vectores columna y se define a continuación.

Definición .2 Sea $\mathcal{A}_{*,j}$ la j -ésima columna de la matriz \mathcal{A} , entonces el vector columna $\text{VEC}\mathcal{A}$ se define como

$$\text{VEC}\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{*,1} \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{*,n} \end{bmatrix}, \quad (34)$$

con los elementos del vector definidos como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{*,1} &= [\alpha_{11} \quad \alpha_{21} \cdots \quad \alpha_{m1}]^T, \\ &\vdots \\ \mathcal{A}_{*,n} &= [\alpha_{1n} \quad \alpha_{2n} \cdots \quad \alpha_{mn}]^T. \end{aligned} \quad (35)$$

De esta definición se tiene el siguiente teorema.

Teorema .1 Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} matrices con diferentes dimensiones. Entonces

$$\begin{aligned} \text{VEC}(\mathcal{A}\mathcal{B}) &= (I_t \otimes \mathcal{A}) \text{VEC}\mathcal{B} \\ &= (\mathcal{B}^T \otimes I_m) \text{VEC}\mathcal{A}. \end{aligned} \quad (36)$$

De acuerdo con la definición dada por la ecuación (34) y el teorema dado por la ecuación (36) podemos aplicarlo a la ecuación (32), donde las matrices K y D son de tamaño $M \times N$, A de tamaño $M \times M$ y Σ de $N \times N$, quedando como

$$\begin{aligned} AK + K\Sigma &= D, \\ (I_N \otimes A) \text{VECK} + (\Sigma^T \otimes I_M) \text{VECK} &= \text{VECD}. \end{aligned} \quad (37)$$

De este modo encontramos el vector columna de K como sigue

$$\text{VECK} = (I_N \otimes A + \Sigma^T \otimes I_M)^{-1} \text{VECD} \quad (38)$$

Para visualizar esta operación describimos los productos de Kronecker como sigue

$$I_N \otimes A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} (1)a_{11} & \cdots & (1)a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (1)a_{M1} & \cdots & (1)a_{MM} \end{bmatrix}_{11} & \cdots & \cdots & \begin{bmatrix} (0)a_{11} & \cdots & (0)a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (0)a_{M1} & \cdots & (0)a_{MM} \end{bmatrix}_{1N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} (0)a_{11} & \cdots & (0)a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (0)a_{M1} & \cdots & (0)a_{MM} \end{bmatrix}_{N1} & \cdots & \cdots & \begin{bmatrix} (1)a_{11} & \cdots & (1)a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (1)a_{M1} & \cdots & (1)a_{MM} \end{bmatrix}_{NN} \end{bmatrix},$$

$$\Sigma^T \otimes I_M = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1(1) & \cdots & \sigma_1(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1(0) & \cdots & \sigma_1(1) \end{bmatrix}_{11} & \cdots & \cdots & \begin{bmatrix} (0)(1) & \cdots & (0)(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (0)(0) & \cdots & (0)(1) \end{bmatrix}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} (0)(1) & \cdots & (0)(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (0)(0) & \cdots & (0)(1) \end{bmatrix}_{N1} & \cdots & \cdots & \begin{bmatrix} \sigma_N(1) & \cdots & \sigma_N(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_N(0) & \cdots & \sigma_N(1) \end{bmatrix}_{NN} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Como podemos observar las matrices descritas en la ecuación (39) son de tamaño $MN \times MN$ por lo que quedan bien definidas para aplicar la inversa de la suma de estas al vector columna VECD , el cual esta definido como

$$\text{VECD} = \begin{bmatrix} D_{*,1} \\ \vdots \\ D_{*,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Y de forma similar, el resultado de la ecuación (38), el vector columna de K , queda descrito como

$$\text{VECK} = \begin{bmatrix} K_{*,1} \\ \vdots \\ K_{*,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_N \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Observe que calcular la i -ésima columna se consigue con la siguiente ecuación

$$\kappa_i = (A + \sigma_i I)^{-1} d_i, \quad (42)$$

con $i = 1, 2, \dots, N$. Cuando todas la columnas son calculadas, se está resolviendo la ecuación (30) con $\tilde{k} = KU^T$. Debido a que el procedimiento numérico para resolver \tilde{k} arroja valores reales, el redondeo se aplica nuevamente para obtener \bar{k} (valores enteros). Se encuentra finalmente la función de saltos dada por \bar{k} , con lo cual el desenvolvimiento de fase se da por medio de la ecuación (17), escribiéndose finalmente como

$$\phi = \Psi + 2\pi\bar{k}. \quad (43)$$

Observe que la integración numérica es el aspecto más importante en la solución del problema de desenvolvimiento de fase. En el método de desenvolvimiento visto aquí, implica la solución de la ecuación de Lyapunov donde las matrices A y B se puede interpretar como el operador de “doble derivada parcial” a lo largo de los ejes x, y , respectivamente. Como en cualquier proceso de integración numérica, la solución depende de la condición inicial. Esto provoca que la fase desenvuelta sea relativa; es decir, que la fase está afectada por la adición de una constante de integración arbitraria desconocida. La constante de integración se puede encontrar indicando el valor de la fase en algún punto conocido. Sin embargo, en varias aplicaciones prácticas es suficiente con conocer la fase desenvuelta relativa.

Referencias

- [1] Albert Einstein (translated by Yoshimasa A. Ono). «How I created the theory of relativity». En: *Physics Today* 35 (1982), págs. 45-47.
- [2] Dorine Keusters, Howe-Siang Tan y Warren. «Role of Pulse Phase and Direction in Two-Dimensional Optical Spectroscopy». En: *The Journal of Physical Chemistry A* 103.49 (1999), págs. 10369-10380.
- [3] Noel-Ivan Toto-Arellano, Gustavo Rodriguez-Zurita, Cruz Meneses-Fabian y Jose Vazquez-Castillo. «Phase shifts in the Fourier spectra of phase gratings and phase grids: An application for one-shot phase-shifting interferometry». En: *Optics express* 16 (dic. de 2008), págs. 19330-41. DOI: 10.1364/OE.16.019330.
- [4] Jason Geng. «Structured-light 3D surface imaging: a tutorial». En: *Adv. Opt. Photon.* 3.2 (2011), págs. 128-160. DOI: 10.1364/AOP.3.000128.
- [5] Ting Cung Poon. *Optical Scanning Holography with MATLAB*. First edition. Springer Science, Business Media, LLC, 2007, págs. 42-45.
- [6] Guillermo J. Tearney Brett E. Bouma. *handbook of Optical Coherence Tomography*. First edition. Marcel Dekker, Inc, 2002, págs. 450-455.
- [7] Ofer Margalit¹ Hamootal Duadi¹. «Digital Holography and Phase Retrieval». En: *Holography, Research and Technologies* (2011), págs. 407-420.
- [8] W. O. Giancarlo Pedrini. *Wave-front reconstruction from a sequence of interferograms recorded at different planes*. Optics Letters, 2005, págs. 833-835.
- [9] J. W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. Third. Roberts y Company, 2005, págs. 16-118.
- [10] John M. Cowley. *Diffraction Physics*. Third edition. Elsevier Science B.V, 1995, págs. 17-19.
- [11] Xianghui Xiao y Qun Shen. *Wave propagation and phase retrieval in Fresnel diffraction by a distorted-object approach*. PHYSICAL REVIEW B 72, 2005, págs. 033103-1.
- [12] Grant R. Fowles. *Introduction to modern optics*. Second edition. Dover Publications, Inc, 1995, págs. 110-115.
- [13] J. Rodenburg. *Ptychography and Related Diffractive Imaging Methods*. Advances in imaging y electron physics, 2007, págs. 87-184.

-
- [14] R. W. Gerchberg y W. O. Saxton. *A practical Algorithm for the Determination of Phase from Image and Diffraction Plane Pictures*. Optik, 1972, págs. 237-246.
- [15] D. Malacara, M. Servin y Z. Malacara. *Interferogram analysis for optical testing*. Second. London: Taylor & Francis Group, 2005.
- [16] Daniel Malacara. *Optical shop testing*. 3rd. John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [17] J. H. Bruning, D. R. Herriott, J. E. Gallagher, D. P. Rosenfeld, A. D. White y D. J. Brangaccio. «Digital Wavefront Measuring Interferometer for Testing Optical Surfaces and Lenses». En: *Appl. Opt.* 13.11 (1974), págs. 2693-2703.
- [18] John E. Greivenkamp. «Generalized data reduction for heterodyne interferometry». En: *Optical Engineering* 23.4 (1984), págs. 234350-234352.
- [19] Mitsuo Takeda, Hideki Ina y Seiji Kobayashi. «Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry». En: *J. Opt. Soc. Am.* 72.1 (1982), págs. 156-160.
- [20] Mitsuo Takeda. «Fourier fringe analysis and its application to metrology of extreme physical phenomena: a review [Invited]». En: *Appl. Opt.* 52.1 (2013), págs. 20-29.
- [21] Gannavarpu Rajshekhar y Pramod Rastogi. «Fringe analysis: Premise and perspectives». En: *Optics and Lasers in Engineering* 50.8 (2012), págs. iii -x.
- [22] Abhijit Patil y Pramod Rastogi. «Moving ahead with phase». En: *Optics and Lasers in Engineering* 45.2 (2007), págs. 253 -257.
- [23] J. Vargas, J. Antonio Quiroga, C. O. S. Sorzano, J. C. Estrada y J. M. Carazo. «Two-step demodulation based on the Gram–Schmidt orthonormalization method». En: *Opt. Lett.* 37.3 (2012), págs. 443-445.
- [24] Zhangtao Cheng, Dong Liu y Lei Zhang. «Random tow-frame phase-shifting interferometry via minimization of coefficient of variation». En: *Applied Physics Letters* 115.12 (2019), pág. 121107. DOI: 10.1063/1.5118296.
- [25] Rigoberto Juarez-Salazar, Carlos Robledo-Sanchez, Cruz Meneses-Fabian, Fermin Guerrero-Sanchez y L.M. Arevalo Aguilar. «Generalized phase-shifting interferometry by parameter estimation with the least squares method». En: *Optics and Lasers in Engineering* 51.5 (2013), págs. 626 -632.
- [26] Rigoberto Juarez-Salazar, Carlos Robledo-Sanchez, Fermin Guerrero-Sanchez, Antonio Barcelata-Pinzon, Jorge Gonzalez-Garcia y Agustin Santiago-Alvarado. «Intensity normalization of additive and multiplicative spatially multiplexed patterns with n encoded phases». En: *Optics and Lasers in Engineering* 77 (2016), págs. 225 -229.
- [27] Zhongtao Cheng, Dong Liu y Lei Zhang. «Random two-frame phase-shifting interferometry via minimization of coefficient of variation». En: *Applied Physics Letters* 115.12 (2019), pág. 121107.
- [28] Luis de la Peña. *Cien años en la vida de la luz*. Fondo de cultura económica, 2004, págs. 15-19.

-
- [29] J. R. Fienup. «Phase retrieval algorithms: a comparison». En: *Appl. Opt.* 21.15 (1982), págs. 2758-2769.
- [30] James R. Fienup. «Phase retrieval algorithms: a personal tour [*Invited*]». En: *Appl. Opt.* 52.1 (2013), págs. 45-56.
- [31] Zeev Zalevsky, David Mendlovic y Rainer G. Dorsch. «Gerchberg–Saxton algorithm applied in the fractional Fourier or the Fresnel domain». En: *Opt. Lett.* 21.12 (1996), págs. 842-844.
- [32] MathWorks. *function*. 2014. URL: https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/peaks.html?_tid=srchtile.
- [33] Rigoberto Juarez-Salazar, Carlos Robledo-Sanchez y Fermin Guerrero-Sanchez. «Phase-unwrapping algorithm by a rounding-least-squares approach». En: *Optical Engineering* 53.2 (2014), págs. 1 -8.
- [34] Kazuyoshi Itoh. «Analysis of the phase unwrapping algorithm». En: *Appl. Opt.* 21.14 (1982), págs. 2470-2470. DOI: 10.1364/AO.21.002470.
- [35] C.S.Lu. «Solution of the matrix equation $AX+XB = C$ ». En: *Electronics Letters* 7.14 (1971), págs. 185-186. DOI: 10.1049/e1:19710123.
- [36] Stanislaw H. Zak Edwin K. P. Chong. *An introduction to optimization*. 2nd ed. Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization. Wiley, 2001, págs. 91-95.
- [37] Juan Antonio Quiroga, Jose Antonio Gomez-Pedrero y Angel Garcia-Botella. «Algorithm for fringe pattern normalization». En: *Optics Communications* 197 (2001), págs. 43-51.
- [38] Rigoberto Juarez-Salazar, Ceciibet Mendoza-Rodriguez, Jose E Hernandez-Beltran y Carlos Robledo-Sanchez. «How do phase-shifting algorithms work?». En: *European Journal of Physics*. 39.6 (2018), pág. 065302.