



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA
OPCIÓN EN AUTOMATIZACIÓN

**“Influencia de la exactitud de fabricación en la relación de transmisión
de los engranajes cilíndricos de dientes rectos.”***

T E S I S

Presentada para obtener el título de:
Maestro en Ciencias de la Electrónica

Presenta:

Ing. Alfonso Daniel Reyes Méndez *

Directores:

Dra. Olga Guadalupe Félix Beltrán (MCEA-FCE-BUAP)

Dr. Jesús Alberto Mendoza Quiñones (MCEA-FCE-BUAP)

Puebla, México

Noviembre 2021

*BECARIO CONACYT

*Dedicado a
mi familia,
a mis padres Alfonso y Rocio
y a mis abuelos Basilia y Guillermo.*

Agradecimientos

¡Muchas gracias a todos!

Quiero agradecer profundamente a mis padres Alfonso y Rocio y a mis abuelos Guillermo y Basilia por los valores que me inculcaron y por brindarme la educación adecuada que me ha proporcionado las herramientas necesarias para poder llegar a culminar mi proyecto de tesis. En general también agradezco a mi familia.

A mis amigos que siempre me apoyaron en esta etapa, agradezco a mis mejores amigos, Julio Cesar y Enrique Ponce, agradezco también a mis amigos Edgar Hernandez , Lady Feliciano, Ricardo Ruiz, Brandon Sanchez, Diego Rosas, Sara Itzel. Agradezco profundamente también a Luis Camacho, Juan Rodriguez, a Rolando Maroño y al Fablab Puebla su apoyo y la inspiración que me otorgaron para emprender esta aventura.

A la Dra. Olga Guadalupe Felix Beltran, Dr. Jesus Alberto Mendoza Quiñones y al Dr. Javier Flores Mendez por su apoyo y orientación tanto personal como académica para llevar a buen puerto la obtención de los objetivos de este proyecto. Los conocimientos y los consejos otorgados los guardo siempre conmigo.

A la plantilla de profesores de la Maestría en Ciencias de la Electrónica, al Dr. Fernando Reyes, Dra. Amparo Palomino, Dr. Sergio Vergara Limon, Dra. Aurora Vargas, Dr. Felix Gonzales, Dr. Moises Gutierrez, Dr. Luis Gaspariano por haber compartido una parte de su vasto conocimiento para mi formación académica.

A la facultad de Ciencias de la Electrónica por aceptarme como uno de sus alumnos tanto de Licenciatura como de Maestría y a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla por ser mi alma mater.

Al CONACYT por el apoyo económico brindado como uno de sus estudiantes becados.

A los antiguos maestros del Renacimiento por brindarnos gran parte de la teoría ocupada hoy en día, a Leonardo da Vinci, Miguel Angel, El Bosco. A los matemáticos de antaño Leonhard Euler, Joseph Fourier, Aleksandr Liapunov, Pierre Laplace, Joseph Lagrange.

“ La belleza parece en la vida pero es inmortal en el arte” - Leonardo Da Vinci.

Resumen

El propósito del presente trabajo es el de desarrollar un modelo matemático que permita conocer la manera en que la relación de transmisión de un tren de engranajes cilíndrico de dientes rectos depende de las tolerancias dimensionales normalizadas de sus parámetros geométricos. Para hallar el modo en el que la exactitud en la relación de transmisión depende de las tolerancias dimensionales normalizadas se debe encontrar, para cada etapa cinemática del tren de engranajes, las diferenciales totales de las ecuaciones de restricción cinemática de un modelo equivalente de cuatro barras. A su vez, se define la relación de transmisión total del tren, y la diferencial total de esta relación de transmisión. El conocimiento de las magnitudes de estos errores y sus signos permite asignar el grado de precisión IT más conveniente para cada parámetro geométrico del tren de engranajes con el fin de disminuir el error en la relación de transmisión. Se encuentra el interesante resultado de que el modelo matemático puede ser ampliado para estudiar la influencia de los errores de fabricación en la exactitud de posicionamiento y la relación de transmisión de los mecanismos de cuatro barras. Además, se determina que el modelo equivalente usado para hallar los errores en la relación de transmisión debido a los errores en los parámetros geométricos de una transmisión por engranajes es un caso particular de un mecanismo de cuatro barras estacionario.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
Introducción	XIII
Objetivos	XVII
1 Tipos de Engranés e involuación	1
1.1 Tipos de Engranés	1
1.1.1 Cilindros Rodantes	1
1.1.2 Engranés cilíndricos de dientes rectos.	2
1.1.3 Engranés helicoidales.	2
1.1.4 Engranés cónicos.	3
1.1.5 Engranés cónicos espirales.	3
1.1.6 Engranés hipoidales.	4
1.1.7 Tornillo sinfín.	4
1.2 Involuación y nomenclatura de engranes cilíndricos de dientes rectos.	5
1.2.1 Geometría del contacto y longitud de acción en engranes cilíndricos de dientes rectos.	6
1.2.2 Ángulo de presión	7
1.2.3 Nomenclatura del diente del engrane cilíndrico de dientes rectos.	7
1.2.4 Ley Fundamental de engranaje.	10
1.3 Tolerancia dimensional.	11
1.4 Normas ISO para tolerancias dimensionales.	11
2 Mecanismos de cuatro barras	13
2.1 Mecanismos de cuatro barras	13
2.1.1 Cinemática de un mecanismo de cuatro barras	13
2.1.2 Grados de libertad del mecanismo de cuatro barras (Movilidad)	14
2.1.3 Expresión de θ_3 en función de θ_1	15
2.1.4 Expresión de θ_2 en función de θ_1	18
2.2 Errores totales del mecanismo de cuatro barras	21
2.3 Ley de Grashof	25
2.4 Relación de Transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$	26

2.5	Relación de Transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$	27
2.6	Errores Totales en la Relación de Transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$	29
2.7	Errores Totales en la Relación de Transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$	30
2.8	Cota de error máxima en las relaciones de transmisión	32
2.9	Análisis de Velocidad Angular	33
2.10	Primer caso de estudio particular: Mecanismo de cuatro barras clásico.	37
2.11	Segundo caso de estudio particular: Paralelogramo articulado.	60
2.12	Conclusiones del capítulo 2.	74
3	Engranajes cilíndricos de dientes rectos	75
3.1	Engranajes cilíndricos de dientes rectos	75
3.2	Radio de Curvatura de una curva involuta	76
3.3	Relación de transmisión en engranes cilíndricos de dientes rectos.	79
3.3.1	Terminología y definiciones.	79
3.3.2	Ley Fundamental del engranado.	80
3.4	Mecanismo equivalente de cuatro barras para una transmisión por engranajes.	85
3.5	Errores totales del mecanismo equivalente de cuatro barras.	88
3.6	Primer caso de estudio particular.	91
3.7	Segundo caso de estudio particular.	94
3.8	Grados de libertad del mecanismo equivalente de cuatro barras (Movilidad).	97
3.9	Comparativa entre mecanismos de cuatro barras y transmisiones por engranajes cilíndricos de dientes rectos.	98
3.10	Función de transferencia en engranajes cilíndricos de dientes rectos.	99
3.11	Conclusiones del capítulo 3.	102
4	Arreglo experimental de engranes cilíndricos de dientes rectos.	103
4.1	Arreglo experimental de engranes cilíndricos de dientes rectos.	103
4.2	Metodología de desarrollo.	105
4.3	Sensor de efecto Hall.	106
4.4	Diagrama de Flujo de la metodología de desarrollo.	107
4.5	Par de engranes con error en el ángulo de presión de 0.005 grados.	108
4.6	Par de engranes con error en el ángulo de presión de 0.05 grados.	111
4.7	Par de engranes con error en el ángulo de presión de 0.5 grados.	113
4.8	Impresora 3D Flapforge Creator Pro y Tacómetro UT371.	117
4.9	Recomendaciones de diseño.	120
	Conclusiones	121
	Apéndice A: Signos para δ_i.	123
	Apéndice B: Artículo Nacional.	125
	Apéndice C: Constancia Congreso Nacional.	139
	Apéndice D: Constancia Seminario MCEA.	141

Apéndice E: Constancia Charla Ibero Puebla.	143
Apéndice F: Constancia TOEFL.	145
Bibliografía	147

Índice de figuras

1.1	Piñón y Corona (Engranos cilíndricos de dientes rectos.)	2
1.2	Piñón de tipo helicoidal.	2
1.3	Engrane Cónico Recto.	3
1.4	Piñón y corona de tipo cónico espiral.	3
1.5	Engrane Hipoidal.	4
1.6	Tornillo sinfín.	4
1.7	Curva involuta.	5
1.8	Geometría del contacto de engranes cilíndricos de dientes rectos.	6
1.9	Punto de paso, círculos primitivos, ángulo de presión, longitud de acción, arco de acción y ángulos de aproximación y recesión durante el engranado de un engrane y piñón. [23]	7
1.10	Nomenclatura de los dientes de engranes rectos. [23]	8
1.11	Mecanismo de leva seguidor.	10
2.1	Mecanismo de cuatro barras clásico con todos sus parámetros geométricos indicados	14
2.2	Configuración cruzada y abierta en un mecanismo de cuatro barras de Grashof.	19
2.3	Esquema general del análisis de posición de un mecanismo de cuatro barras.	20
2.4	Ley de Grashof en un mecanismo de cuatro barras clásico y en un paralelogramo articulado.	26
2.5	Diferentes formas de obtener las relaciones de transmisión en mecanismos de cuatro barras.	28
2.6	Mecanismo de cuatro barras y sus parámetros asociados	33
2.7	Representación de un número complejo	33
2.8	Esquema general de velocidades angulares y relación de transmisión	37
2.9	Mecanismo de cuatro barras con longitudes diferentes diseñado en Solidworks	38
2.10	Posiciones Angulares de Salida θ_2 y θ_3 en configuración abierta.	39
2.11	Posiciones Angulares de Salida θ_2 y θ_3 en configuración cerrada.	39
2.12	Coefficientes de influencia asociados al eslabón de salida l_2 en función de la coordenada angular de entrada θ_1 en configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).	40
2.13	Coefficientes de influencia asociados al eslabón de salida l_3 en función de la coordenada angular de entrada θ_1 en configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).	41
2.14	Errores $\delta\theta_2$ asociados al eslabón l_2 con diferentes grados de precisión IT. Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).	42

2.15 Errores $\delta\theta_3$ asociados al eslabón l_3 con diferentes grados de precisión IT. Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).	43
2.16 Relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ para la configuración abierta (Azul) y la configuración cerrada (Rojo), se presenta simetría entre ambas configuraciones	44
2.17 Relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ para la configuración abierta (Azul) y la configuración cerrada (Rojo), se presenta simetría entre ambas configuraciones.	45
2.18 Coeficientes λ_{l_1} , λ_{l_2} , λ_{l_3} , λ_{l_4} y λ_{θ_1} . Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).	46
2.19 Error $\delta i_{21_{TOTAL}}$ con diferentes grados de calidad IT, mientras mayor es el grado IT mayor es el error. Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).	47
2.20 Coeficientes γ_{l_1} , γ_{l_2} , γ_{l_3} , γ_{l_4} y γ_{θ_1} . Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).	48
2.21 Error $\delta i_{31_{TOTAL}}$ con diferentes grados de calidad IT, mientras mayor es el grado IT mayor es el error. Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).	49
2.22 Diferentes relaciones de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ en configuración abierta	50
2.23 Error $\epsilon_{21_{TOTAL}}$ con diferentes grados de calidad IT, mientras mayor es el grado IT mayor es el error. Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo) para el primer caso de estudio.	51
2.24 Error $\epsilon_{31_{TOTAL}}$ con diferentes grados de calidad IT, mientras mayor es el grado IT mayor es el error. Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo) para el primer caso de estudio.	52
2.25 Esquema general de MATLAB y Solidworks	53
2.26 Comparativa de posición angular de salida θ_2 del mecanismo de cuatro barras en configuración abierta obtenida en Solidworks y MATLAB.	54
2.27 Comparativa de posición angular de salida θ_3 del mecanismo de cuatro barras en configuración abierta obtenida en Solidworks y MATLAB.	55
2.28 Comparativa de velocidad angular de salida ω_2 obtenida en Solidworks y MATLAB.	56
2.29 Comparativa de magnitud de velocidad angular de salida ω_2 del eslabón l_2 obtenida en Solidworks y MATLAB.	57
2.30 Comparativa de velocidad angular de salida ω_3 del eslabón l_3 obtenida en Solidworks y MATLAB.	58
2.31 Comparativa de velocidad angular de salida ω_3 obtenida en Solidworks y MATLAB.	59
2.32 Paralelogramo articulado y sus parámetros geométricos.	60
2.33 Posiciones Angulares de Salida θ_2 y θ_3 del paralelogramo articulado en configuración abierta.	61
2.34 Posiciones Angulares de Salida θ_2 y θ_3 del paralelogramo articulado en configuración cerrada.	61
2.35 Relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ para la configuración abierta (Azul) y la configuración cerrada (Rojo), se presenta simetría entre ambas configuraciones.	62
2.36 Relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ para la configuración abierta (Azul) y la configuración cerrada (Rojo), se presenta simetría entre ambas configuraciones	63
2.37 Gráfico de $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ obtenido del artículo "Transmission ratio based analysis and robust design of mechanisms"[22]	63
2.38 Coeficientes λ_{l_1} , λ_{l_2} , λ_{l_3} , λ_{l_4} y λ_{θ_1} . Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).	65

2.39	Error $\delta i_{21_{TOTAL}}$ con diferentes grados de calidad IT, mientras mayor es el grado IT mayor es el error. Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo)	66
2.40	Coefficientes $\gamma_{l_1}, \gamma_{l_2}, \gamma_{l_3}, \gamma_{l_4}$ y γ_{θ_1} . Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).	67
2.41	Coefficientes $\gamma_{l_1}, \gamma_{l_2}, \gamma_{l_3}$ y γ_{l_4} obtenidos del artículo "Transmission ratio based analysis and robust design of mechanisms" [22]	68
2.42	Error $\delta i_{31_{TOTAL}}$ con diferentes grados de calidad IT, mientras mayor es el grado IT mayor es el error. Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).	69
2.43	Diferentes relaciones de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ en configuración abierta	70
2.44	Error $\epsilon_{21_{TOTAL}}$ con diferentes grados de calidad IT, mientras mayor es el grado IT mayor es el error. Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo) para el segundo caso de estudio particular.	71
2.45	Error $\epsilon_{31_{TOTAL}}$ con diferentes grados de calidad IT. Mientras mayor es el grado IT, mayor es el error. Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo) para el segundo caso de estudio particular.	72
3.1	Círculo base (Azul) y su curva involuta (Magenta).	76
3.2	Terminología en un engrane cilíndrico de dientes rectos. [26]	80
3.3	Mecanismo de Leva-seguidor. Se muestran las rectas $\overline{O_{12}A}$ y $\overline{O_{13}A}$ y sus respectivas perpendiculares por A	81
3.4	Mecanismo de Leva-seguidor. Trazado por $\overline{PO_{12}}$ y $\overline{PO_{13}}$ de perpendiculares a la línea normal, estas intersectan en los puntos a y b a dicha línea normal.	82
3.5	Mecanismo de Leva-seguidor. Relación entre los segmentos $\overline{O_{13}b}$ y $\overline{O_{12}a}$ con los segmentos $\overline{O_{12}P}$ y $\overline{O_{13}P}$.	83
3.6	Geometría de contacto en una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos. [23]	86
3.7	Modelo de cuatro barras estático equivalente para una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos.	86
3.8	Diferentes relaciones de transmisión i_{Real} con diferentes grados de calidad IT.	93
3.9	Diferentes relaciones de transmisión i_{Real} con diferentes grados de calidad IT.	96
3.10	Tipos de relación de transmisión i en engranes cilíndricos de dientes rectos.	97
3.11	Diagrama de Venn que ilustra la relación que existe entre un mecanismo de paralelogramo articulado y una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos.	99
3.12	Tren de engranes cilíndricos de dientes rectos. [37]	100
3.13	Tren de engranes cilíndricos de dientes rectos. [37]	101
4.1	Ensamblaje realizado en Solidworks	104
4.2	Esquema de la metodología de desarrollo para el arreglo experimental.	105
4.3	Diagrama de bloques de la metodología de desarrollo para el arreglo experimental.	105
4.4	Conexión de los sensores de efecto Hall con la tarjeta Arduino y sus Puertos.	106
4.5	Diagrama de Flujo del arreglo experimental.	107
4.6	Velocidades angulares del piñón (Rojo) y del engrane (Azul) obtenidas a través de Solidworks.	109

4.7	Diferentes relaciones de transmisión para el primer par de engranes cilíndricos de dientes rectos. Las curvas son: i teórica (Azul) comparada con MATLAB (Rojo), Solidworks (Magenta), Arduino (Negro) y tacómetro industrial (Azul oscuro).	110
4.8	Velocidades angulares del piñón (Rojo) y del engrane (Azul) obtenidas a través de Solidworks.	112
4.9	Diferentes relaciones de transmisión para el primer par de engranes cilíndricos de dientes rectos, i teórica (Azul) comparada con MATLAB (Rojo), Solidworks (Magenta), Arduino (Negro) y tacómetro industrial (Azul oscuro).	112
4.10	Velocidades angulares del piñón (Rojo) y del engrane (Azul) obtenidas a través de Solidworks.	114
4.11	Diferentes relaciones de transmisión para el par de engranes cilíndricos de dientes rectos con error angular de 0.5 grados en el ángulo de presión, i teórica (Azul) comparada con MATLAB (Rojo), Solidworks (Magenta), Arduino (Negro) y tacómetro industrial (Azul oscuro).	115
4.12	Arreglo experimental funcional con tacómetro y fuente DC de 30 V.	116
4.13	Arreglo experimental y su implementación física.	117
4.14	Esquema General de interconexión entre Arduino y MATLAB	117
4.15	Impresora 3D Flashforge Creator Pro utilizada para fabricar los engranes del arreglo experimental.	118
4.16	Especificaciones de la impresora 3D Flashforge Creator pro utilizada para fabricar los engranes del arreglo experimental.	118
4.17	Tacómetro UT371.	119
4.18	Especificaciones del tacómetro UT371.	119
19	Diferentes relaciones de transmisión con calidad IT16 cuando los signos de las tolerancias en un paralelogramo articulado conducen a mecanismos de Grashof y no Grashof respectivamente.	124

Índice de cuadros

1.1	Módulos Normalizados. [25]	9
1.2	Tabla extraída de la norma ISO 286. [28]	12
1.3	Tabla extraída de la norma ISO 2768. [29]	12
2.1	Parámetros de entrada para el mecanismo de cuatro barras con longitudes diferentes diseñado en Solidworks	38
2.2	Tolerancias para las longitudes l_1, l_2, l_3, l_4 (tomado de la Norma ISO 286).	42
2.3	Parámetros de entrada para el mecanismo de paralelogramo articulado.	60
2.4	Tolerancias para las longitudes l_1, l_2, l_3, l_4 (tomado de la Norma ISO 286).	64
3.1	Parámetros de entrada para una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos con diferentes longitudes en sus radios base.	91
3.2	Tolerancias para las longitudes l_1, l_4 (tomado de la Norma ISO 286).	92
3.3	Diferentes relaciones de transmisión para diferentes valores de calidad IT	92
3.4	Porcentajes de error máximos entre la relación de transmisión teórica y la real.	93
3.5	Parámetros de entrada para una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos con diferentes longitudes en sus radios base.	94
3.6	Tolerancias para las longitudes l_1, l_4 (tomado de la Norma ISO 286).	94
3.7	Diferentes relaciones de transmisión para diferentes valores de calidad IT	95
3.8	Porcentajes de error máximos entre la relación de transmisión teórica y la real.	95
3.9	Comparativa de desempeño entre mecanismos de cuatro barras y una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos	98
4.1	Tablas en Excel	108
4.2	Parámetros de entrada para el primer par de engranes cilíndricos de dientes rectos con diferentes longitudes en sus radios base.	108
4.3	Tolerancias para los parámetros de entrada del primer par de engranes cilíndricos de dientes rectos.	109
4.4	Comparación de relación de transmisión para el primer par de engranes, los valores de relación de transmisión son muy cercanos.	110
4.5	Parámetros de entrada para el segundo par de engranes cilíndricos de dientes rectos con diferentes longitudes en sus radios base.	111
4.6	Tolerancias para los parámetros de entrada del segundo par de engranes cilíndricos de dientes rectos.	111

4.7	Comparación de la relación de transmisión cuando el error angular es de 0.05 grados.	113
4.8	Parámetros de entrada teóricos para el par de engranes cilíndricos de dientes rectos con error angular de 0.5 grados en el ángulo de presión.	113
4.9	Tolerancias para los parámetros de entrada del tercer par de engranes cilíndricos de dientes rectos con error angular de 0.5 grados en el ángulo de presión.	114
4.10	Comparación de la relación de transmisión entre Solidworks, Arduino, tacómetro y MATLAB	115
11	Signos de las tolerancias dimensionales finales de las dieciséis combinaciones posibles para mecanismos articulados de cuatro barras de rotación completa.	123

Introducción

El mecanismo más antiguo del que se tiene conocimiento, y que aún sobrevive en nuestra era, es el mecanismo de Anticitera, denominado así por la zona donde fue encontrado. Es un dispositivo de precisión probablemente fabricado hacia el 80 a.C. Este conlleva mecanismos complejos dentro de su estructura. Contiene más de 30 engranajes arreglados en un complejo tren diferencial, fue utilizado para calcular la posición solar y lunar, de aquí sabemos que una de las bases para la construcción de mecanismos mucho más complejos era precisamente el engrane recto [1].

Los **engranes** son elementos de máquinas que transmiten movimiento mediante sus dientes que engranan de una manera sucesiva que transmiten movimiento de un eje giratorio a otro. Existen numerosas aplicaciones en las que una razón de velocidad angular constante se debe transmitir de un eje a otro. Debido a la diversidad que existe de tipo de engranes, los ejes de entrada no tienen que estar alineados ni paralelos, así mismo se pueden obtener diferentes razones de velocidad angular variables si los engranes utilizados son no circulares [2].

Durante los últimos cuarenta años, la industria mundial de manufactura ha venido incrementando su foco de atención sobre la calidad de fabricación, en especial con el auge japonés en la década de los setenta, quienes aprendieron a fabricar productos de alta calidad a bajo costo e impulsaron una cadena de mejoras de los productos en el resto del mundo. Hoy la mejora de la calidad es un objetivo de primera línea en cada nivel de una industria competente. Para lograrla se debe tener claramente definido el sistema de fabricación empleado y sobre esta base integrada estudiar la manera de adecuar las variaciones del producto final obtenido a las tolerancias permitidas.

El concepto de variación no debe confundirse con la idea misma de tolerancia. La **tolerancia** es la que determina el diseñador basada en el conjunto de especificaciones de diseño del producto sobre la base de alguna función objetivo. Por su parte, la **variación** del producto es una medida estadística de la desviación de un grupo de ellos durante el propio proceso de fabricación. Es decir, la variación es un fenómeno natural inherente a la fabricación mientras que la tolerancia es una especificación impuesta por el diseñador. Idealmente, el diseñador debe tomar en cuenta las variaciones introducidas por la totalidad del proceso de fabricación cuando él asigna las tolerancias del producto para asegurar su confiabilidad sobre la base de los parámetros establecidos para su funcionamiento.

En 1973, Takanashi, A. [3], del centro de investigaciones de Hitachi, Ltd., escribió un artículo

relacionado con los efectos de las tolerancias dimensionales y las holguras sobre el posicionamiento angular del mecanismo intermitente de Génova. Para ello Takanashi introduce, a partir de consideraciones puramente geométricas, la idea de coeficientes de influencia para cada parámetro dimensional del mecanismo y aunque no toma en cuenta la holgura en el par rotatorio, calcula un valor constante de error debido a la holgura entre la cabeza del perno ligado a la entrada y la ranura de la rueda de salida. En su trabajo el error total es la suma de los errores debido a esa holgura y de los errores debido a las tolerancias dimensionales. Más tarde, en 1978, Morita N., Furuhashi, T. y Matsuura M., del centro de investigaciones de Honda Motor en Japón, desarrollan [4] un modelo que describe la dinámica de un mecanismo de cuatro barras con holguras, con el propósito de conocer la precisión del movimiento y el problema de las vibraciones y ruidos, asumiendo que siempre hay contacto entre el pasador y el buje correspondiente. Se interesan en el cálculo de las fuerzas en los pares a través del tiempo, despreciando los efectos de las fuerzas de amortiguamiento y la elasticidad del par. Proponen considerar la holgura como un eslabón imaginario sin masa y de longitud constante y la introducción de un ángulo de contacto entre los pasadores y los bujes. El mecanismo que consideran tiene 5 grados de libertad. Indica la necesidad de tomar en cuenta la posible presencia de errores en el ángulo de entrada, sin que se desarrolle algún modelo claro para ello. Señalan que un torque impulsivo y fuerzas impulsivas se producen en los pares sin que haya incluso colisiones. El mismo año Funabashi, Ogawa y Horie [5] trabajando para Toyota Motor, publican otro estudio sobre las implicaciones dinámicas de las holguras en mecanismos de palancas. Contribuyeron con este desarrollo los trabajos previos de Tsuda [6] y Yamaguchi [7], [8], [9], realizados para la misma empresa.

En 1978, G. Sutherland y N. Karwa [10] de Ohio State University, en Columbus, USA, abordan el problema del diseño de un mecanismo de cuatro barras considerando los errores introducidos por la propia estructura funcional del mecanismo y por las tolerancias dimensionales en la trayectoria seguida por un punto del acoplador y en el posicionamiento de la biela. Como resultado del trabajo se llega a proponer un valor único de tolerancia dimensional máxima que deben tener todos los parámetros geométricos involucrados para garantizar la exactitud requerida.

La necesidad de concentrar la atención en el control de la holgura radial de un par rotatorio para mejorar la precisión cinemática de posicionamiento deseada de un mecanismo plano es abordada en 1985 por Horie, Funabashi, Ogawa y Kobayashi, [11], quienes analizan para ello un mecanismo espacial de cuatro barras. Posteriormente Funabashi [12], en un trabajo realizado un año después presenta la necesidad de introducir elementos de regulación capaces de calibrar las longitudes efectivas de los eslabones después de su montaje.

Zhongxiu, Fengqiang, Shian y Fei de la Universidad de Qingdao, en Shandong, China [13] abordan en 1997 el tema de la confiabilidad de la trayectoria real seguida por un punto del acoplador de un mecanismo de cuatro barras cuando dicha trayectoria debe ser generada con una precisión específica, tomando en cuenta la influencia que los errores de fabricación dimensional y las holguras pudieran existir en cualquier desviación de la trayectoria fuera de dichos límites. Para ello se define un índice de confiabilidad del mecanismo como una medida de la desviación de la trayectoria actual del punto del acoplador respecto a la deseada. En su trabajo,

se propone la obtención de las tolerancias y las holguras del mecanismo como un problema de optimización determinística tomando en cuenta la minimización de los costos como función objetivo, los índices de confiabilidad como restricciones y las tolerancias dimensionales y las holguras como variables de diseño. Sin embargo, aun cuando se utiliza el método de encontrar las diferenciales totales de las ecuaciones de restricción que rigen la cinemática del mecanismo en el campo de las posiciones, los anteriores investigadores suponen que la movilidad de todo el mecanismo con holguras continua siendo uno y para ello asumen que las holguras aumentan el tamaño de los eslabones en la misma dirección longitudinal de las dimensiones nominales. El trabajo no da indicaciones de cómo las posiciones fundamentales de las tolerancias afectan el posicionamiento y logran mejorar la precisión de posicionamiento cuando se necesita controlar la ubicación alrededor de una posición de salida deseada.

Lo mismo sucede con trabajos previos [11] como los del grupo formado por Horie, Funabashi, Ogawa y Kobayashi, del Tokio Institute of Technology, en Japón, en los que también se supone que las holguras radiales aumentan la longitud efectiva de la dimensión nominal. Debido a esta deficiencia este mismo grupo presenta en 1990, junto a Sakamoto [14] un trabajo en el que estudia aparte la influencia sola de las holguras en la precisión de posicionamiento en los mecanismos de seis barras de Stephenson y Watt. Este modelo señala que la movilidad del mecanismo debido a las holguras aumenta en uno por cada una de las holguras consideradas. Sin embargo su desarrollo parte de suponer que todas las holguras son iguales en todos los pares.

En 1991, R. Weill y B. Shani [15], de la Universidad Technion en Haifa, Israel, señalaron cómo diferentes fuentes de errores en los eslabones y juntas, entre las que se tienen las dilataciones y las deformaciones, pueden modificar la posición final efectiva del brazo de un robot y sin tomar en cuenta todos esos factores desarrollan un programa de computadora capaz de suministrar un mapa coloreado de los errores en toda el área de trabajo del brazo en función de las tolerancias geométricas de fabricación asignadas a los eslabones. No se toca el tema de las holguras aún cuando señalan otras fuentes de referencia en la que se da cuenta de esta influencia. El artículo indica la importancia del control del error posicional de los eslabones que sirven de entrada al mecanismo y en particular el del primero, aunque no da cuenta de cómo puede tomarse esto en cuenta.

Sridhar Kota y Shean-Juinn Chiou, de Michigan, USA, [16] enfocan también su atención en el diseño de mecanismos planos de cuatro barras capaces de generar una trayectoria específica de precisión de un punto de la biela, tomando en cuenta las tolerancias dimensionales, las holguras y las deformaciones de los eslabones, asumiendo para ello que se conoce la magnitud de la suma de estos factores, situándolas arbitrariamente en 1 por ciento de la longitud nominal de cada eslabón. Con relación al avance que se ha experimentado en el diseño de mecanismos de palancas de precisión cabe citar el trabajo de Hachkowski y Peterson [17], quienes muestran como el diseño y fabricación de estructuras aeroespaciales desplegadas ha evolucionado desde exactitudes posicionales de alrededor de 5 mm, en 1975, hasta alcanzar los 2 micrones de exactitud de posicionamiento en 1995. Del mismo modo, Basu [18] muestra cómo es fundamental hoy en día el control de las tolerancias de fabricación en mecanismos muy sensibles usados como armas para la defensa.

Fogarasy y Smith [19] de la Universidad de Newcastle en Inglaterra, llegan a la conclusión de que la vasta literatura especializada y publicada hasta el presente usa diferentes técnicas para la solución de problemas que son básicamente similares y aunque algunas de esas técnicas pueden reducir el tiempo necesario para llevar a cabo cálculos específicos en ciertos tipos de mecanismos, la gran diversidad de técnicas podría hacer pensar que no hay una manera general de abordarlos. Señalan que con tal variedad de procedimientos se hace más bien énfasis en las diferencias, en lugar de las similitudes. Por esta razón, proponen el uso de un método general basado en las denominadas ecuaciones de restricción cinemática, las cuales sirven al doble propósito de resolver la cinemática en los campos de las posiciones, velocidades y aceleraciones y para calcular la sensibilidad del mecanismo a las tolerancias dimensionales asignadas. Los mismos autores divulgan en 1998, con gran claridad y con un alto sentido pedagógico, poco usual en revistas especializadas, la forma [20] en que; partiendo de las ecuaciones de restricción cinemática y sus diferenciales totales, se puede conocer la influencia de las tolerancias dimensionales en la exactitud de posicionamiento de un mecanismo de manivela-corredera y de un interruptor eléctrico de nueve eslabones móviles más el bastidor. Sin embargo, para llegar a ello desprecian los errores que pueda introducir la coordenada generalizada de entrada, los cuales resultan muchas veces de mayor importancia relativa que la suma de todos aquellos. El método de encontrar las ecuaciones de restricción cinemática de un mecanismo y sus diferenciales totales también se conoce con el nombre de método de los desplazamientos virtuales [21] de los eslabones de un mecanismo.

En 2010 Gerald Rothenhöfer [22] propone un acercamiento analítico del diseño robusto de mecanismos, para lograr movimiento y requerimientos de precisión dada una relación de transmisión deseada y variaciones geométricas permitidas. El enfoque que el da es orientado a mecanismos de manivela deslizante y de cuatro barras, los cuales son elementos comunes para la transmisión de movimiento rotatorio, especialmente sobre distancias las cuales son muy grandes para el uso de elementos convencionales como engranes rectos, presenta el caso de un paralelogramo articulado el cual tiene una relación de transmisión unitaria, así como coeficientes de sensibilidad que afectan a la relación de transmisión, sin embargo no queda claro como obtener estos coeficientes ni las expresiones para hallarlos.

Los puntos anteriores son tratados, previa revisión del tema en la literatura, en dos capítulos. En el capítulo 1 describen las definiciones de los diferentes tipos de engranes y la involueta relacionada con engranes cilíndricos de dientes rectos, en el capítulo 2 se trata con mecanismos de cuatro barras y los diferentes errores que se pueden presentar, tanto en su posicionamiento angular y en sus diferentes relaciones de transmisión, en el capítulo 3 se exploran los errores en la relación de transmisión en engranes cilíndricos de dientes rectos por efecto de cambios en sus radios base debido a la calidad de fabricación IT se escriben diferentes programas en MATLAB que permite obtener la respuesta de todo lo antes expuesto. Finalmente se dan las conclusiones.

Objetivos

Los objetivos general y específicos de este trabajo de tesis se enuncian a continuación.

Objetivo general

Determinar la influencia de la exactitud de fabricación en la relación de transmisión de los engranajes cilíndricos de dientes rectos y en los mecanismos de cuatro barras.

Objetivos particulares

1. Describir en términos matemáticos la geometría de movimiento de los engranajes cilíndricos de dientes rectos para dientes de engrane de perfil de involuta.
2. Identificar las fuentes de errores en la relación de transmisión para engranajes cilíndricos de dientes rectos.
3. Definir cómo la relación de transmisión de una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos depende del grado de precisión IT de las tolerancias dimensionales de todos sus parámetros geométricos funcionales.
4. Describir cómo la relación de transmisión de una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos se relaciona con las posiciones fundamentales de las tolerancias dimensionales de todos sus parámetros geométricos funcionales.
5. Realizar el desarrollo computacional correspondiente mediante software MATLAB y Solidworks para el análisis de la influencia de la exactitud de fabricación en la relación de transmisión de los engranajes cilíndricos de dientes rectos.
6. Describir en términos matemáticos la geometría de movimiento de los mecanismos de cuatro barras e identificar las fuentes de errores en la relación de transmisión para estos mecanismos.
7. Definir cómo la relación de transmisión de un mecanismo de cuatro barras depende del grado de precisión IT de las tolerancias dimensionales de todos sus parámetros geométricos funcionales y de la posición fundamental de estas tolerancias.

Capítulo 1

Tipos de Engranés e involu­metría

1.1. Tipos de Engranés

Aeronáutica, minería, cadenas de fabricación del sector de la automoción, industria farmacéutica, textil . . . los sectores y ámbitos en los que se pueden encontrar máquinas que utilizan distintos tipos de engranajes son abundantes, la progresiva sustitución de las antiguas correas y las poleas por engranajes cilíndricos de dientes rectos y de otro tipo se debe al mayor rendimiento que estos transmiten, los engranes, que basan su funcionamiento básico en el acople entre una corona y un piñón como ruedas dentadas (engranes cilíndricos de dientes rectos, por ejemplo), se fabrican en varios materiales, con diferentes grados de fabricación y manufactura y con varios anchos de diente, ancho de cara, circunferencia de cabeza y paso circular, los tipos de engranes son diversos y para distintas aplicaciones de tipo industrial, los hay de tipo recto, helicoidal, cónicos o de tipo tornillo sinfín, a continuación se detallan los diferentes tipos de engranes que existen. [23]

1.1.1. Cilindros Rodantes

La forma más sencilla de transmitir movimiento de tipo rotatorio de un eje a otro eje es por medio de un par de cilindros rodantes. Estos pueden ser de conjunto externo de cilindros rodantes o interno. Funcionaran de manera adecuada siempre y cuando exista la suficiente fricción en la interfaz rodante, no habrá deslizamiento entre los cilindros hasta que la fuerza de fricción máxima disponible en la junta sea excedida por la demanda de transferencia del par de torsión.

Una variación de estos mecanismos es el que hace que un automóvil o una bicicleta se muevan a lo largo de una carretera, los neumáticos del automóvil o bicicleta se comportan como un cilindro rodante y la carretera como otro (de un radio bastante enorme), La fricción evita el deslizamiento entre ambos, funciona bastante bien a menos que el coeficiente de fricción se reduzca por la presencia de hielo, agua u otra sustancia resbaladiza [23]; Las desventajas principales de los cilindros rodantes son la relativamente baja capacidad de par de torsión y la posibilidad de deslizamiento relativamente alto, para evitar este tipo de detalles se necesita agregar dientes a los cilindros rodantes que pasan a convertirse en engranes.

1.1.2. Engranés cilíndricos de dientes rectos.

Tienen sus dientes paralelos al eje de rotación y se emplean para transmitir movimiento de un eje a otro eje paralelo, de todos los tipos de engranes, el engrane recto es uno de los más sencillos de fabricar, su proceso de fabricación es de bajo costo, este tipo de engrane solo puede engranarse si sus ejes son paralelos, es uno de los tipos de engranes más utilizados a nivel industrial en diferentes tipos de aplicaciones[24], en la figura 1.1 se muestra un piñón y su respectiva corona.

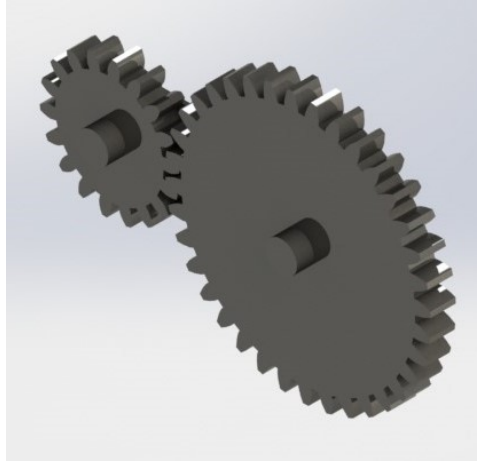


Figura 1.1: Piñón y Corona (Engranés cilíndricos de dientes rectos.)

1.1.3. Engranés helicoidales.

Este tipo de engranes poseen dientes inclinados con respecto al eje de rotación, y se utilizan para las mismas aplicaciones que los engranes rectos y, cuando se utilizan en esta forma no son tan ruidosos, debido al engranado más gradual de los dientes durante el acoplamiento, asimismo, el diente inclinado desarrolla cargas de empuje y pares de flexión que no se encuentran presentes en los engranes rectos, son empleados en aplicaciones donde el movimiento se transmite entre ejes no paralelos [24], en la figura 1.2 se puede ver a un piñón helicoidal.

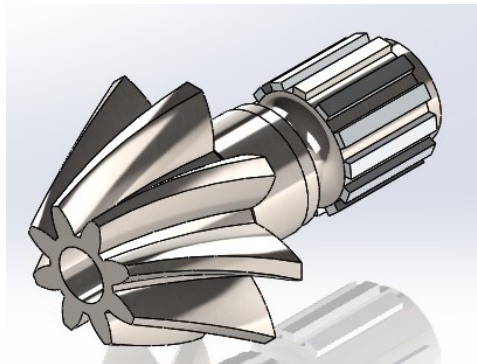


Figura 1.2: Piñón de tipo helicoidal.

1.1.4. Engranés cónicos.

Los engranes cónicos se basan en conos rodantes, este tipo de engrane permite la transmisión de movimiento de ejes que se cortan en un mismo plano, generalmente en ángulo recto pero puede variar dicho ángulo, por medio de superficies cónicas, se utilizan para reducción de velocidad con ejes de 90 grados, este tipo de engranes genera mucho más ruido que un engrane cónico espiral, generalmente este tipo de engranes es muy poco utilizados a nivel industrial [23], en la figura 1.3 se ilustra un engrane cónico de tipo recto.

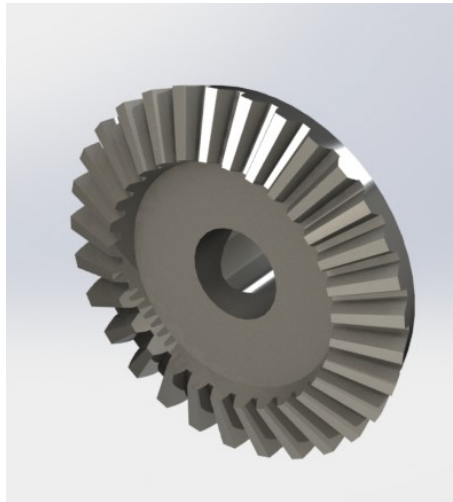


Figura 1.3: Engrane Cónico Recto.

1.1.5. Engranés cónicos espirales.

Si los dientes son paralelos al eje del engrane, será un engrane cónico recto como el que se muestra en la figura 1.3, si los dientes forman un ángulo con respecto al eje será un engrane cónico espiral [23], es análogo a un engrane helicoidal, es mucho más silencioso que el cónico recto [24], y mucho mayormente utilizado, sus dientes no son de tipo involuta, sus dientes están basados en una curva de diente "octoidal", en la figura 1.4 se ilustra un piñón cónico espiral y su respectiva corona.

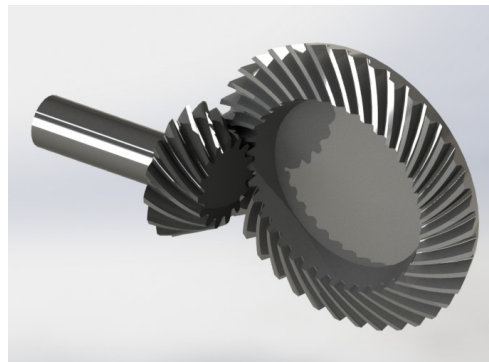


Figura 1.4: Piñón y corona de tipo cónico espiral.

1.1.6. Engranés hipoidales.

Están basados en hiperboloides de revolución, tienen un dentado especial capaz de transmitir el movimiento entre 2 ejes no concurrentes [23]. En el sector automovilístico, los engranajes hipoidales encuentran aplicación frecuentemente en los pares cónicos del grupo de reducción final de los vehículos con motor longitudinal, la figura 1.5 ilustra uno de estos engranes.

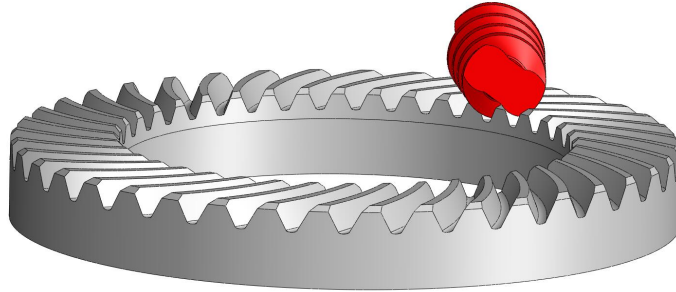


Figura 1.5: Engrane Hipoidal.

1.1.7. Tornillo sinfín.

Se emplean para transmitir fuerza y movimiento entre dos ejes perpendiculares entre sí, los dientes del tornillo sinfín no son involutas en su cara completa [23], Con ellos se pueden conseguir grandes reducciones en espacios reducidos, en los mecanismos con tornillo sin fin se generan bastantes pérdidas de energía por calor debido al rozamiento de sus componentes, por lo que tienen una gran pérdida de rendimiento, en la figura 1.6 tenemos la ilustración de un tornillo sinfín.

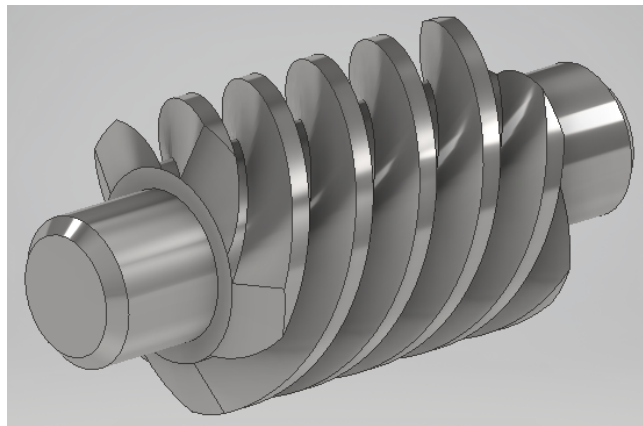


Figura 1.6: Tornillo sinfín.

1.2. Involutura y nomenclatura de engranes cilíndricos de dientes rectos.

La necesidad de una teoría sobre mecanismos con ruedas dentadas estimuló a los matemáticos a elaborar la teoría de las curvas envolventes. El perfil evolvente de los dientes que actualmente se usa ampliamente, fue propuesto por el gran matemático Euler. El estudio de la geometría de la involuta recibe el nombre de involumetría.

Una involuta o evolvente es una curva generada por un punto trazador situado en el extremo de una cuerda enrollada sobre un círculo denominado círculo base, conforme ésta se desenrolla progresivamente del círculo, manteniéndose tensa y tangente a dicho círculo en todo momento. [23]; La involuta o evolvente de un círculo es una curva cuyo radio de curvatura es variable y además va aumentando a medida que se desenrolla la cuerda. Como ya se ha dicho la cuerda sobre cuyo extremo se sitúa el punto trazador siempre es tangente al círculo base y al mismo tiempo es perpendicular a la recta tangente a la propia evolvente en el punto trazador [24] como se muestra en la figura 1.7.

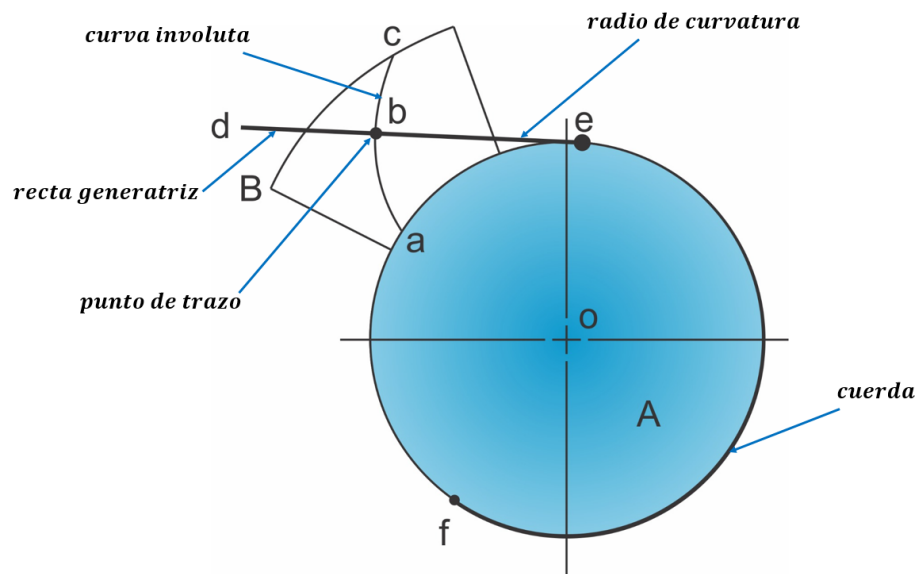


Figura 1.7: Curva involuta.

De acuerdo a la figura 1.7, una curva de involuta se genera al desenrollar una cuerda def enrollada en el cilindro A manteniéndola siempre tangente al cilindro. El punto b en la cuerda representa un punto de trazo, y a medida que la cuerda se enrolla o desenrolla respecto al círculo, el punto b trazara la curva involuta ac . El radio de curvatura de la involuta varía en forma continua, de cero en el punto a hasta un máximo en el punto c . En el punto b , el radio corresponde a la distancia be , puesto que b gira de manera instantánea respecto al punto e . Así entonces, la recta generatriz de es normal a la involuta en todos los puntos de intersección y, al mismo tiempo, siempre es tangente al cilindro A . El círculo sobre el que se genera la involuta se llama círculo base también llamada evoluta [23], algunas propiedades de la curva involuta

son las siguientes:

1. La cuerda siempre es tangente en cilindro.
2. El centro de curvatura de la involuta siempre está en el punto de tangencia de la cuerda con el círculo.
3. Una tangente a la involuta siempre es normal a la cuerda, la longitud de la cual es el radio instantáneo de curvatura de la cuerda involuta.

Solamente se aplica para engranes cilíndricos rectos de diente de tipo involuta.

1.2.1. Geometría del contacto y longitud de acción en engranes cilíndricos de dientes rectos.

La figura 1.8 muestra dos involutas en contacto o engranadas, las involutas representan dientes de engranes rectos, los círculos más pequeños se denotan como círculos base de los engranes respectivos, se observa que los círculos base son necesariamente más pequeños, que los círculos de paso, y se denota r_p al radio de paso del piñón y r_g al radio de paso del engrane [23], los dientes del engrane deben proyectarse tanto por debajo como por arriba de la superficie del círculo de paso, y para engranes cilíndricos de dientes rectos la involuta solo existe fuera del círculo base, el exceso de diente que sobresale por encima del círculo de paso es la cabeza denotada como a_p a la cabeza del piñón, y a_g a la cabeza del engrane como se muestra en la figura 1.8.

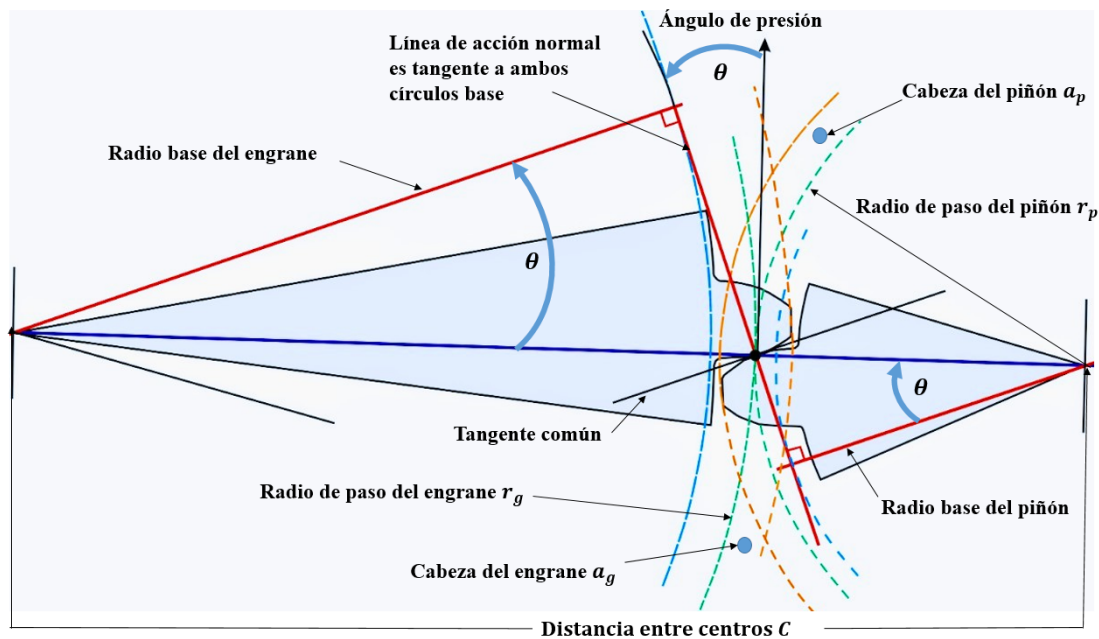


Figura 1.8: Geometría del contacto de engranes cilíndricos de dientes rectos.

1.2. INVOLUMENTRÍA Y NOMENCLATURA DE ENGRANES CILÍNDRICOS DE DIENTES RECTOS.7

En la figura 1.9 se muestran un par de formas de diente de involuta de 2 engranes rectos engranando, se muestran dos posiciones para una mayor comprensión, las normales comunes de estos dos puntos de contacto pasan por el mismo punto de paso, los puntos de inicio y salida del contacto definen el engranado del piñón y el engrane [23], la distancia a lo largo de la línea de acción entre estos puntos del engranaje se llama longitud de acción, y esta definida a por la letra Z , y definida en la ecuación (1.1), la longitud de acción está definida por las intersecciones de los círculos de cabeza respectivos con la línea de acción[24], como se muestra en la figura 1.9.

$$Z = \sqrt{(r_p + a_p)^2 - (r_p \cos(\theta))^2} + \sqrt{(r_g + a_g)^2 - (r_g \cos(\theta))^2} - C \sin(\theta) \quad (1.1)$$

Donde C es la distancia entre centros.

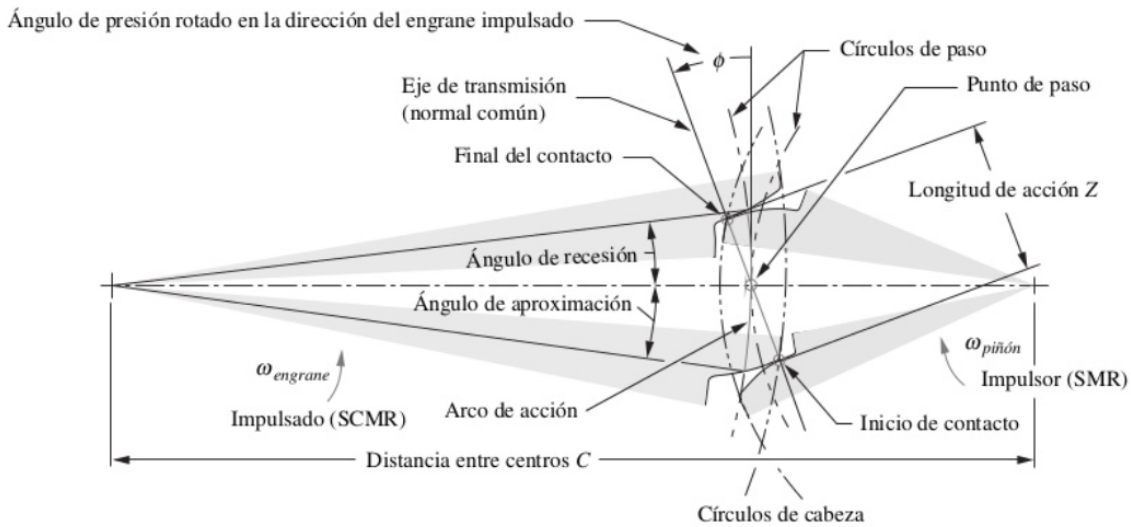


Figura 1.9: Punto de paso, círculos primitivos, ángulo de presión, longitud de acción, arco de acción y ángulos de aproximación y recesión durante el engranado de un engrane y piñón. [23]

1.2.2. Ángulo de presión

Los ángulos de presión de los engranajes son estandarizados en unos cuantos valores por los fabricantes de engranes rectos, y se definen la distancia entre centros nominales del engranaje fresado. Los valores estándar son 14.5° , 20° y 25° , el de 20° es el más utilizado y el de 14.5° es considerado como obsoleto actualmente [23]. Se pueden hacer cualquier ángulo de presión que se desee, pero el costo de los engranes disponibles con ángulos de presión estándar sería difícil de justificar, pues tendrían que fabricarse fresas especiales. Los engranajes que van a funcionar juntos deben ser fresados al mismo ángulo de presión nominal.

1.2.3. Nomenclatura del diente del engrane cilíndrico de dientes rectos.

En la figura 1.10 se muestra la nomenclatura de un engrane cilíndrico de dientes rectos.

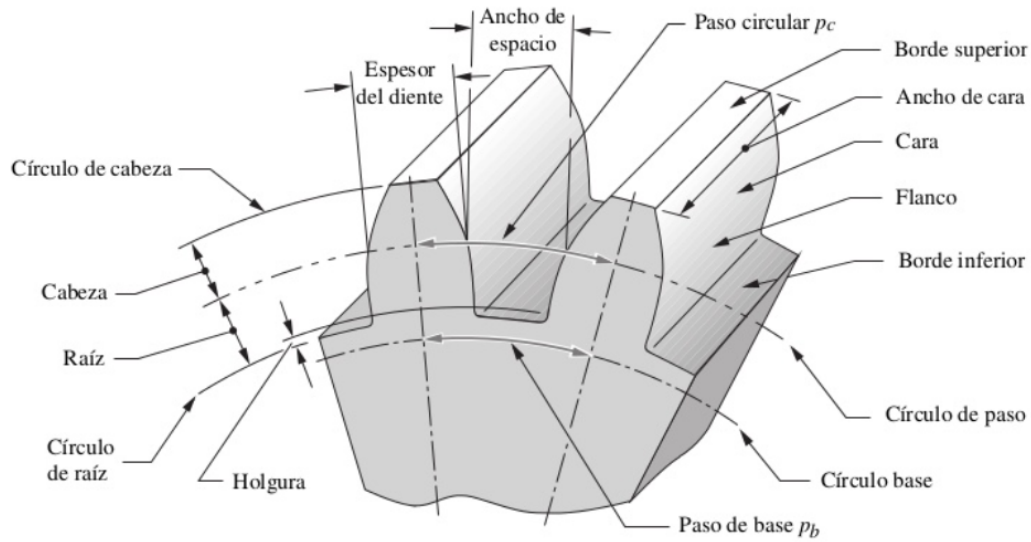


Figura 1.10: Nomenclatura de los dientes de engranes rectos. [23]

La figura 1.10 muestra dos dientes de un engrane con la nomenclatura estándar definida. El círculo de paso y el círculo base ya se han definido, la altura del diente se define por el addendum y el dedendum referidos al círculo de paso nominal. El dedendum es ligeramente más grande que el addendum para crear una pequeña cantidad de holgura entre la punta de un diente engranado (círculo de addendum o de cabeza) y la parte inferior del espacio del otro, (círculo de dedendum o raíz); El espesor del diente se mide en el círculo de paso, y el ancho de espacio del diente es un poco más grande que su espesor, la diferencia entre ambas dimensiones es el juego entre dientes [23], el ancho de la cara del diente se mide a lo largo de la circunferencia del círculo de paso de un punto de un diente al mismo punto del siguiente diente. El paso circular define el tamaño del diente, la definición de paso circular p_c esta dada por la ecuación (1.2).

$$p_c = \frac{\pi d}{N} \quad (1.2)$$

donde d es el diámetro de paso y N es el número de dientes, el paso del diente también se puede medir a lo largo de la circunferencia del círculo base y recibe el nombre de paso base p_b , la ecuación del paso base se describe en la ecuación (1.3).

$$p_b = p_c \cos(\theta) \quad (1.3)$$

Las unidades del paso circular están dadas ya sea en pulgadas o milímetros, una forma más conveniente y común de definir el tamaño del diente es relacionarlo con el diámetro del círculo de paso, en lugar de relacionarlo con su circunferencia [24]. El paso diametral definido como p_d esta dado en la ecuación (1.4).

$$p_d = \frac{N}{d} \quad (1.4)$$

1.2. INVOLUMETRÍA Y NOMENCLATURA DE ENGRANES CILÍNDRICOS DE DIENTES RECTOS.9

Las unidades de p_d son pulgadas reciprocas o número de dientes por pulgada, esta medida se utiliza solo en engranes con especificaciones en Estados Unidos, al combinar las ecuaciones (1.2) y (1.4) nos genera una relación entre el paso circular y el paso diametral que nos genera una nueva expresión para el paso diametral dada en la ecuacion (1.5).

$$p_d = \frac{\pi}{p_c} \quad (1.5)$$

En el sistema internacional las medidas usadas para engranes rectos definen un parámetro llamado modulo, el cual es el reciproco del paso diametral con el diámetro de paso medido en milímetros, el modulo esta dado en la ecuación (1.6), en el cuadro 1.1 se presentan algunas medidas estándar de módulos normalizados [25].

$$m = \frac{d}{N} \quad (1.6)$$

Módulos Normalizados		
Modulo (mm)	p_d equivalente ($pulg^{-1}$)	p_d normaliza- do mas cercano ($pulg^{-1}$)
0.3	84.667	80
0.4	63.500	64
0.5	50.800	48
0.8	31.750	32
1	25.400	24
1.25	20.320	20
1.5	16.933	16
2	12.700	12
2.5	10.160	10
3	8.466	8
4	6.350	6
5	5.080	5
6	4.233	4
8	3.175	3
10	2.540	2.5
12	2.117	2
16	1.587	1.5
20	1.270	1.25
25	1.016	1

Cuadro 1.1: Módulos Normalizados. [25]

1.2.4. Ley Fundamental de engranaje.

La ley fundamental de engranaje establece que *la relación de velocidad angular entre los engranes de un juego de engranes permanece constante mientras permaneces engranados* [23], la acción de los dientes acoplados de los engranes, unos sobre otros, para producir movimientos de tipo rotatorio, puede compararse con una leva y su seguidor. Cuando a los perfiles del diente (los de la leva y el seguidor) se les da una forma tal como para que produzcan una razón constante entre las velocidades angulares durante el endentamiento, se dice que las superficies son "conjugadas"; Es posible especificar cualquier perfil para un diente y luego encontrar un perfil para el diente que se va a acoplar o entrelazar con él, de tal modo que las superficies sean conjugadas; Una de estas soluciones es el perfil de involuta para engranes cilíndricos de dientes rectos [25].

La acción de un solo par de dientes acoplados conforme recorren toda una fase de tal acción debe ser tal que la razón de la velocidad angular del engrane impulsor a la del engrane impulsado se mantenga constante; Este es el criterio fundamental que rige la selección de los perfiles del diente. Si esto no se cumpliera para el engranaje, se tendrían vibraciones muy serias y problemas de impacto físico, incluso a velocidades muy bajas, en la figura 1.11 se observan dos perfiles que están en contacto en A , sea el perfil 2 el impulsor y el 3 el impulsado, una recta normal a los perfiles en el punto de contacto A se intersecta con la línea de los centros O_2O_3 en el centro instantáneo P [26].

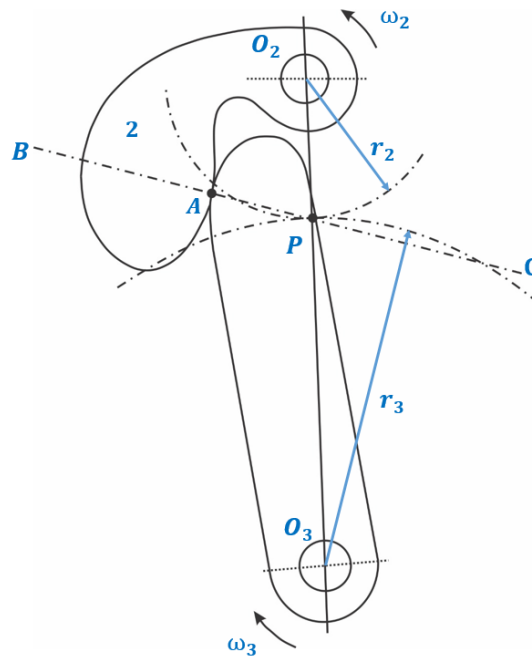


Figura 1.11: Mecanismo de leva seguidor.

En el engranaje recto, P recibe el nombre de punto de paso y BC es la línea de acción; Si los radios del punto de paso de los dos perfiles se designan como r_2 y r_3 , la relación de

transmisión estará dada por la ecuación (1.7).

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_2} \quad (1.7)$$

Esta ecuación se usa con mucha frecuencia para afirmar que el punto de paso se debe mantener fijo sobre la línea de los centros para que la relación de transmisión permanezca constante; Esto significa que todas las líneas de acción de todo punto de contacto instantáneo debe pasar por el punto de paso, si los perfiles de dientes acoplados de engranes rectos tienen la forma de curvas involutas, se satisface la condición de que la normal común en todos los puntos de contacto debe pasar por el punto de paso.

1.3. Tolerancia dimensional.

Una tolerancia dimensional es una definición propia de la metrología industrial, que se aplica a la fabricación de piezas en serie, las piezas generalmente son de índole industrial y pueden ser bielas, troqueles, engranes rectos y todo tipo de componentes y piezas requeridos por la industria. Dada una magnitud significativa y cuantificable propia de un producto industrial (sea alguna de sus dimensiones mecánicas, resistencia, peso o cualquier otra existente), el margen de tolerancia es el intervalo de valores en el que debe encontrarse dicha magnitud para que se acepte como válida, lo que determina la aceptación o el rechazo de los componentes fabricados, según sus valores queden dentro o fuera de ese intervalo, cuanto menor sea el margen de tolerancia, la pieza será más difícil de producir y por tanto mucho más costosa. Existen diferentes normas para tolerancias dimensionales en la manufactura moderna que se abordan a continuación. [27]

1.4. Normas ISO para tolerancias dimensionales.

Existen diferentes normas que hablan de tolerancias dimensionales y dimensionado, una de ellas es la norma ISO 286:1988, esta norma nos habla de tolerancias de dimensiones lineales, define un sistema de tolerancias dimensionales, desviaciones y ajustes, esta norma es reconocida internacionalmente. Esta norma ha sido aceptada en la mayoría de los países industrialmente desarrollados como EE.UU, dentro de esta norma existen 19 grados de calidad internacional (IT01, IT0...IT18), mientras mas grande es la calidad mas grande es la tolerancia admitida. El Sistema ISO de tolerancias y ajustes proporciona un sistema de tolerancias y desviaciones aplicables a las piezas lisas. En el caso de las tolerancias angulares se ocupara lo norma ISO 2768-1:1989 que nos habla de desviaciones angulares. Usaremos estas normas para las tolerancias angulares de nuestros casos de estudio particular. En el capítulo 2 hablaremos de los errores de posicionamiento angular y errores presentes en las diferentes relaciones de transmisión que existen en mecanismos de cuatro barras, mientras que en el capítulo 3 se presenta una metodología para encontrar errores en la relación de transmisión de los engranes cilíndricos de dientes rectos. A través de las normas ISO conectamos el modelado matemático de los mecanismos descritos anteriormente con la parte industrial aplicable.

En el cuadro 1.2 se presenta a la tabla de tolerancias normalizadas IT que ocuparemos para los casos de estudio particular, esta tabla es extraída de la norma ISO 286.

Grupo de dimensiones nominales (mm)	GRADOS DE TOLERANCIAS NORMALIZADAS																	
	IT01	IT0	IT1	IT2	IT3	IT4	IT5	IT6	IT7	IT8	IT9	IT10	IT11	IT12	IT13	IT14	IT15	IT16
Hasta 3	0.3	0.5	0.8	1.2	2	3	4	6	10	14	25	40	60	100	140	250	400	600
3 a 6	0.4	0.6	1	1.5	2.5	4	5	8	12	18	30	48	75	120	180	300	480	750
6 a 10	0.4	0.6	1	1.5	2.5	4	6	9	15	22	36	58	90	150	220	360	580	900
10 a 18	0.5	0.8	1.2	2	3	5	8	11	18	27	43	70	110	180	270	430	700	1100
18 a 30	0.6	1	1.5	2.5	4	6	9	13	21	33	52	84	130	210	330	520	840	1300
30 a 50	0.6	1	1.5	2.5	4	7	11	16	25	39	62	100	160	250	390	620	1000	1600
50 a 80	0.8	1.2	2	3	5	8	13	19	30	46	74	120	190	300	460	740	1200	1900
80 a 120	1	1.5	2.5	4	6	10	15	22	35	54	87	140	220	350	540	870	1400	2200
120 a 180	1.2	2	3.5	5	8	12	18	25	40	63	100	160	250	400	630	1000	1600	2500
180 a 250	2	3	4.5	7	10	14	20	29	46	72	115	185	290	460	720	1150	1850	2900
250 a 315	2.5	4	6	8	12	16	23	32	52	81	130	210	320	520	810	1300	2100	3200
315 a 400	3	5	7	9	13	18	25	36	57	89	140	230	360	570	890	1400	2300	3600
400 a 500	4	6	8	10	15	20	27	40	63	97	155	250	400	630	970	1550	2500	4000
500 a 630			9	11	16	22	32	44	70	110	175	280	440	700	1100	1750	2800	4400
630 a 800			10	13	18	25	36	50	80	125	200	320	500	800	1250	2000	3200	5000
800 a 1000			11	15	21	28	40	56	90	140	230	360	560	900	1400	2300	3600	5600
1000 a 1250			13	18	24	33	47	66	105	165	260	420	660	1050	1650	2600	4200	6600
1250 a 1600			15	21	29	39	55	78	125	195	310	500	780	1250	1950	3100	5000	7800
1600 a 2000			18	25	35	46	65	92	150	230	370	600	920	1500	2300	3700	6000	9200
2000 a 2500			22	30	41	55	78	110	175	280	440	700	1100	1750	2800	4400	7000	11000
2500 a 3150			26	36	50	68	96	135	210	330	540	860	1350	2100	3300	5400	8600	13500

Cuadro 1.2: Tabla extraída de la norma ISO 286. [28]

En el cuadro 1.3 se presentan desviaciones angulares permitidas según la norma 2768, estos valores se ocupan solamente si los mecanismos descritos no dan vueltas completas, esto significa que no tienen un recorrido de 360 grados. Mucho dependerá de la aplicación del mecanismo para la asignación de los valores dados en las tablas ISO.

Desviaciones admisibles de las dimensiones angulares						
Clase de tolerancia		Desviaciones admisibles para rangos de longitudes, en milímetros, del lado más corto del ángulo en cuestión.				
Designación.	Descripción.	Hasta 10	De 10 hasta 50	De 50 hasta 120	De 120 hasta 400	Más de 400
f	fine.	$\pm 1^\circ$	$\pm 0^\circ 30'$	$\pm 0^\circ 20'$	$\pm 0^\circ 10'$	$\pm 0^\circ 5'$
m	medium.	$\pm 1^\circ$	$\pm 0^\circ 30'$	$\pm 0^\circ 20'$	$\pm 0^\circ 10'$	$\pm 0^\circ 5'$
c	coarse.	$\pm 1^\circ 30'$	$\pm 1^\circ$	$\pm 0^\circ 30'$	$\pm 0^\circ 15'$	$\pm 0^\circ 10'$
v	very coarse.	$\pm 3^\circ$	$\pm 2^\circ$	$\pm 1^\circ$	$\pm 0^\circ 30'$	$\pm 0^\circ 20'$

Cuadro 1.3: Tabla extraída de la norma ISO 2768. [29]

Capítulo 2

Mecanismos de cuatro barras

2.1. Mecanismos de cuatro barras

Un mecanismo de cuatro barras o cuadrilátero articulado es un mecanismo formado por tres barras o articulaciones móviles y una cuarta barra o longitud fija (por ejemplo el suelo, o alguna superficie fija, esta superficie o longitud es llamado bastidor fijo), unidos mediante nudos articulados. Las barras móviles están unidas a la fija mediante pivotes. A partir de mecanismos de cuatro barras es posible construir y diseñar mecanismos mas complejos, también es posible combinarlos con otro tipo de mecanismos móviles como mecanismos de tipo prismático o rotatorios como engranes cilíndricos de dientes rectos, helicoidales, cónicos, tornillo sinfín o mecanismos de leva seguidor [23]. Los mecanismos de cuatro barras permiten generar directamente una amplia variedad de movimientos requeridos para diversas aplicaciones de tipo industrial, y también están presentes en la literatura clásica como casos de interés para su estudio cinemático y dinámico. Podemos encontrar este tipo de mecanismos en arreglos de puertas industriales, suspensiones de vehículos automotrices, limpiaparabrisas automotrices, en maquinaria pesada como prensas, excavadoras, maquinas transportadoras etc. En esta sección se estudiara la cinemática, los errores asociados al posicionamiento del mecanismo debido a su fabricación y montaje, sus diferentes relaciones de transmisión, se generaliza la ley de Grashof, se estudiaran los errores vinculados a su relación de transmisión por consecuencia de errores en el posicionamiento de los eslabones, se realizara un análisis de velocidad angular para los dos velocidades angulares de salida, se incorporan dos casos de estudio particular para mecanismos de cuatro barras validados a través de software MATLAB y Solidworks para validar el modelado matemático. [25]

2.1.1. Cinemática de un mecanismo de cuatro barras

En la figura (2.1) se presenta el esquema general de un mecanismo de cuatro barras clásico con todos sus parámetros representados como lo son longitudes y ángulos, se puede ver que tanto el eslabón l_1 como el eslabón l_3 están unidos al bastidor por uno de sus extremos, a partir de la geometría de la figura 2.1 se obtendrá la cinemática asociada. [23]

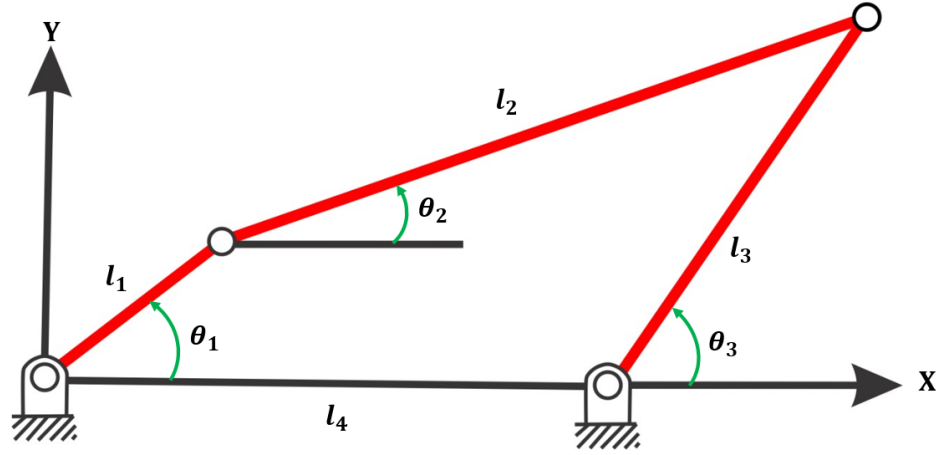


Figura 2.1: Mecanismo de cuatro barras clásico con todos sus parámetros geométricos indicados

Los mecanismos de cuatro barras pueden ser considerados mecanismos planos, las longitudes de los eslabones l_1 , l_2 , l_3 , l_4 representadas en la figura 2.1 son conocidas de fabricación o pueden ser medidas físicamente (Este tipo de medición puede conllevar un error dependiendo de la herramienta o instrumento que se use para medir). Las ecuaciones de restricción cinemática obtenidas de la proyección del mecanismo sobre los ejes x , y están dadas en la ecuación (2.1).

$$\begin{aligned} x &= l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_2) - l_3 \cos(\theta_3) - l_4 = 0 \\ y &= l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2) - l_3 \sin(\theta_3) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

La ecuación 2.1 también puede ser descrita en forma vectorial como se muestra a continuación en la ecuación 2.2.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\theta_1) & l_2 \cos(\theta_2) & -l_3 \cos(\theta_3) & -l_4 \\ l_1 \sin(\theta_1) & l_2 \sin(\theta_2) & -l_3 \sin(\theta_3) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

2.1.2. Grados de libertad del mecanismo de cuatro barras (Movilidad)

Para mecanismos planos en general, cada eslabón contiene tres grados de libertad; dos traslacionales y uno rotacional, al unir los eslabones, las relaciones de restricción reducen el número de coordenadas generalizadas que se necesitan para describir al mecanismo. La movilidad m (Grados de Libertad) de un mecanismo puede ser calculada por la ecuación de Kutzbach-Gruenler [22] [23] dada a continuación

$$m = 3(n - 1) - 2j_1 \quad (2.3)$$

En donde n es el número de eslabones y j_1 es el número total de uniones de un grado de libertad, estas uniones pueden ser de tipo revoluta o prismática, en el caso de los mecanismos de cuatro barras $n = 4$ puesto que tenemos cuatro elementos, las tres barras móviles y el bastidor, $j_1 = 4$ ya que tenemos cuatro uniones, dos que unen el bastidor a los eslabones l_1 y l_3 ,

la unión que existe entre l_1 y l_2 y la unión que une a l_2 con l_3 , a raíz de esto los mecanismos de cuatro barras tienen una movilidad unitaria y pueden ser considerados elementos o sistemas de un grado de libertad.

Para el caso de los mecanismos de cuatro barras se requiere de solo un parámetro para definir por completo las posiciones de los eslabones, en este caso el parámetro de entrada es el ángulo del eslabón l_1 , en la figura 2.1 el ángulo de entrada está denotado como θ_1 , los ángulos θ_2 y θ_3 dependen de el parámetro θ_1 puesto que este es un mecanismo de un grado de libertad. Las dos ecuaciones escalares trigonométricas descritas en la ecuación (2.1) pueden ahora ser resueltas simultáneamente para encontrar las relaciones de los ángulos de salida θ_2 y θ_3 con el parámetro de entrada θ_1 . En general los mecanismos de cuatro barras pueden verse como robots o sistemas de un grado de libertad puesto que solo se necesita un parámetro para definir su posicionamiento angular.

2.1.3. Expresión de θ_3 en función de θ_1 .

Reescribiendo las ecuaciones de cinemática descritas en (2.1) con el fin de aislar la incógnita θ_2 del lado izquierdo y despejar la otra incógnita θ_3 obtenemos las ecuaciones descritas a continuación en (2.4).

$$\begin{aligned} l_2 \cos(\theta_2) &= -l_1 \cos(\theta_1) + l_3 \cos(\theta_3) + l_4 \\ l_2 \sin(\theta_2) &= -l_1 \sin(\theta_1) + l_3 \sin(\theta_3) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Elevando al cuadrado ambas expresiones y posteriormente sumando obtenemos la siguiente expresión:

$$l_2^2 (\cancel{\cos^2(\theta_2)} + \cancel{\sin^2(\theta_2)}) = (-l_1 \cos(\theta_1) + l_3 \cos(\theta_3) + l_4)^2 + (-l_1 \sin(\theta_1) + l_3 \sin(\theta_3))^2 \quad (2.5)$$

Como $\cos^2(\theta_2) + \sin^2(\theta_2) = 1$, la expresión dada en (2.5) solo depende del ángulo θ_3 y de θ_1 . Al desarrollar el lado derecho de la expresión (2.5) obtenemos:

$$l_2^2 = l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 - 2l_1l_3(\cos(\theta_1)\cos(\theta_3) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_3)) - 2l_1l_4\cos(\theta_1) + 2l_3l_4\cos(\theta_3) \quad (2.6)$$

Reestructurando la ecuación (2.6) de manera conveniente obtenemos la siguiente expresión dada en la ecuación (2.7).

$$l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 - 2l_1l_4\cos(\theta_1) + 2l_3l_4\cos(\theta_3) = 2l_1l_3(\cos(\theta_1)\cos(\theta_3) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_3)) \quad (2.7)$$

Para simplificar la expresión (2.7) se dividirá esta por el término $2l_1l_3$ y se definirán las constantes k_1 , k_2 y k_3 en términos de los cocientes resultantes, en las expresiones dadas en (2.8) se muestran a k_1 , k_2 y k_3 . Estas constantes están definidas en función de las longitudes de los eslabones del mecanismo de cuatro barras. [23]

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{l_4}{l_1} \\
k_2 &= \frac{l_4}{l_3} \\
k_3 &= \frac{l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + l_4^2}{2l_1l_3}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Al utilizar las constantes k_1 , k_2 y k_3 dadas en (2.8) la ecuación (2.7) puede reducirse como se muestra a continuación.

$$k_1 \cos(\theta_3) - k_2 \cos(\theta_1) + k_3 = \cos(\theta_1) \cos(\theta_3) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_3) \tag{2.9}$$

Con el fin de reducir la ecuación (2.9) a una forma más manejable para despejar el ángulo de salida θ_3 es útil introducir las identidades trigonométricas semiangulares, que convierten los términos $\cos(\theta_3)$ y $\sin(\theta_3)$ en términos de $\tan(\theta_3)$, a continuación se expresan estas identidades.

$$\begin{aligned}
\sin(\theta_3) &= \frac{2 \tan(\frac{\theta_3}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta_3}{2})} \\
\cos(\theta_3) &= \frac{1 - \tan^2(\frac{\theta_3}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta_3}{2})}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Al sustituir las identidades trigonométricas semiangulares en la ecuación (2.9) obtenemos la siguiente expresión:

$$k_1 \left(\frac{1 - \tan^2(\frac{\theta_3}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta_3}{2})} \right) - k_2 \cos(\theta_1) + k_3 = \cos(\theta_1) \left(\frac{1 - \tan^2(\frac{\theta_3}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta_3}{2})} \right) + \sin(\theta_1) \left(\frac{2 \tan(\frac{\theta_3}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta_3}{2})} \right) \tag{2.11}$$

Al desarrollar la expresión (2.11) obtenemos lo siguiente:

$$\frac{k_1 - k_1 \tan^2(\frac{\theta_3}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta_3}{2})} - k_2 \cos(\theta_1) + k_3 = \left(\frac{\cos(\theta_1) - \cos(\theta_1) \tan^2(\frac{\theta_3}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta_3}{2})} \right) + \left(\frac{2 \sin(\theta_1) \tan(\frac{\theta_3}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta_3}{2})} \right) \tag{2.12}$$

Posteriormente multiplicamos ambos lados de la ecuación por el término $1 + \tan^2(\frac{\theta_3}{2})$ y obtenemos la expresión (2.13).

$$\begin{aligned}
k_1 - k_1 \tan^2(\frac{\theta_3}{2}) - k_2 \cos(\theta_1) - k_2 \cos(\theta_1) \tan^2(\frac{\theta_3}{2}) + k_3 + k_3 \tan^2(\frac{\theta_3}{2}) &= \cos(\theta_1) - \\
&\cos(\theta_1) \tan^2(\frac{\theta_3}{2}) + 2 \sin(\theta_1) \tan(\frac{\theta_3}{2})
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Posteriormente al igualar a cero obtenemos la siguiente expresión:

$$k_1 - k_1 \tan^2\left(\frac{\theta_3}{2}\right) - k_2 \cos(\theta_1) - k_2 \cos(\theta_1) \tan^2\left(\frac{\theta_3}{2}\right) + k_3 + k_3 \tan^2\left(\frac{\theta_3}{2}\right) - \cos(\theta_1) + \cos(\theta_1) \tan^2\left(\frac{\theta_3}{2}\right) - 2 \sin(\theta_1) \tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right) = 0 \quad (2.14)$$

Esto da por resultado la siguiente forma simplificada, donde las longitudes de los eslabones y los términos que contienen la variable conocida del ángulo de entrada θ_1 se han agrupado como las constantes A , B y C , la expresión (2.14) queda compactada como:

$$A \tan^2\left(\frac{\theta_3}{2}\right) + B \tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right) + C = 0 \quad (2.15)$$

En donde las constantes A , B , C , toman los valores expresados en (2.16), de esta forma los cálculos resultan ser mucho mas sencillos. [23]

$$\begin{aligned} A &= -k_1 - k_2 \cos(\theta_1) + k_3 + \cos(\theta_1) \\ B &= -2 \sin(\theta_1) \\ C &= k_1 - k_2 \cos(\theta_1) + k_3 - \cos(\theta_1) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como la ecuación simplificada es de forma cuadrática, el termino $\tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right)$ se expresa en función de A , B y C como se muestra a continuación:

$$\tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right) = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (2.17)$$

Al ser una expresión de tipo cuadrática, las soluciones para el ángulo de salida θ_3 al despejar son:

$$\theta_{3_1} = 2 \arctan\left(\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right) \quad (2.18)$$

$$\theta_{3_2} = 2 \arctan\left(\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right) \quad (2.19)$$

De acuerdo a las soluciones dadas en (2.18) y (2.19), si el discriminante bajo el radical es negativo las soluciones serán complejas conjugadas, lo cual significa que las longitudes de los eslabones no son capaces de conectarse con los valores de entrada del ángulo θ_1 , esto ocurre cuando las longitudes de los eslabones son incapaces de fijar una conexión en cualquier posición, generalmente esto ocurrirá en mecanismos de no Grashof que en este trabajo no son de interés [7]. Al ángulo θ_{3_1} dado en la ecuación (2.18) lo denominaremos ángulo de salida θ_3 en configuración abierta, mientras que al ángulo θ_{3_2} dado en la ecuación (2.19) lo denominaremos ángulo de salida θ_3 en configuración cerrada. Dependerá de en que configuración es mas conveniente trabajar dependiendo de la aplicación, dado el caso se elegirá una u otra o ambas configuraciones. [23]

2.1.4. Expresión de θ_2 en función de θ_1

Para el caso de θ_2 en función de θ_1 el calculo es similar al de θ_3 , volviendo a las ecuaciones dadas en (2.1) y aislando ahora θ_3 obtenemos las siguientes ecuaciones dadas en (2.20):

$$\begin{aligned} l_3 \cos(\theta_3) &= l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_2) - l_4 \\ l_3 \sin(\theta_3) &= l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Al elevar al cuadrado y posteriormente sumar estas ecuaciones se eliminará θ_3 del lado izquierdo, al desarrollar el álgebra adecuadamente obtenemos la siguiente expresión:

$$l_3^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_4^2 + 2l_1l_2(\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) - 2l_1l_4 \cos(\theta_1) - 2l_2l_4 \cos(\theta_2) \quad (2.21)$$

Posteriormente dividiremos sobre el termino $2l_1l_2$ y definiremos nuevas constantes al hacer esto la constante k_1 definida en el calculo de la expresión de θ_3 en función de θ_1 vuelve a aparecer en este calculo por lo tanto se definen solo dos constantes, siendo las siguientes constantes:

$$\begin{aligned} k_4 &= \frac{l_4}{l_2} \\ k_5 &= \frac{l_3^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_4^2}{2l_1l_2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

La ecuación (2.21) queda reducida a la siguiente forma:

$$k_1 \cos(\theta_2) + k_4 \cos(\theta_1) + k_5 = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \quad (2.23)$$

Como en el caso anterior al sustituir por identidades trigonométricas semiangulares y haciendo el álgebra correspondiente obtenemos las siguientes soluciones para θ_2 , como en el caso anterior tendremos dos configuraciones para este ángulo. [23]

$$\theta_{2_1} = 2 \arctan \left(\frac{-E - \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D} \right) \quad (2.24)$$

$$\theta_{2_2} = 2 \arctan \left(\frac{-E + \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D} \right) \quad (2.25)$$

Donde las variables D , E y F están denotadas como:

$$\begin{aligned} D &= \cos(\theta_1) - k_1 + k_4 \cos(\theta_1) + k_5 \\ E &= -2 \sin(\theta_1) \\ F &= k_1 + (k_4 - 1) \cos(\theta_1) + k_5 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Finalmente se muestra un esquema general del mecanismo de cuatro barras con su configuración abierta y cruzada, notese que los ángulos para la configuración abierta son medidos en sentido antihorario y positivo y los ángulos correspondientes a la configuración cerrada se miden horarios y por lo tanto negativos.

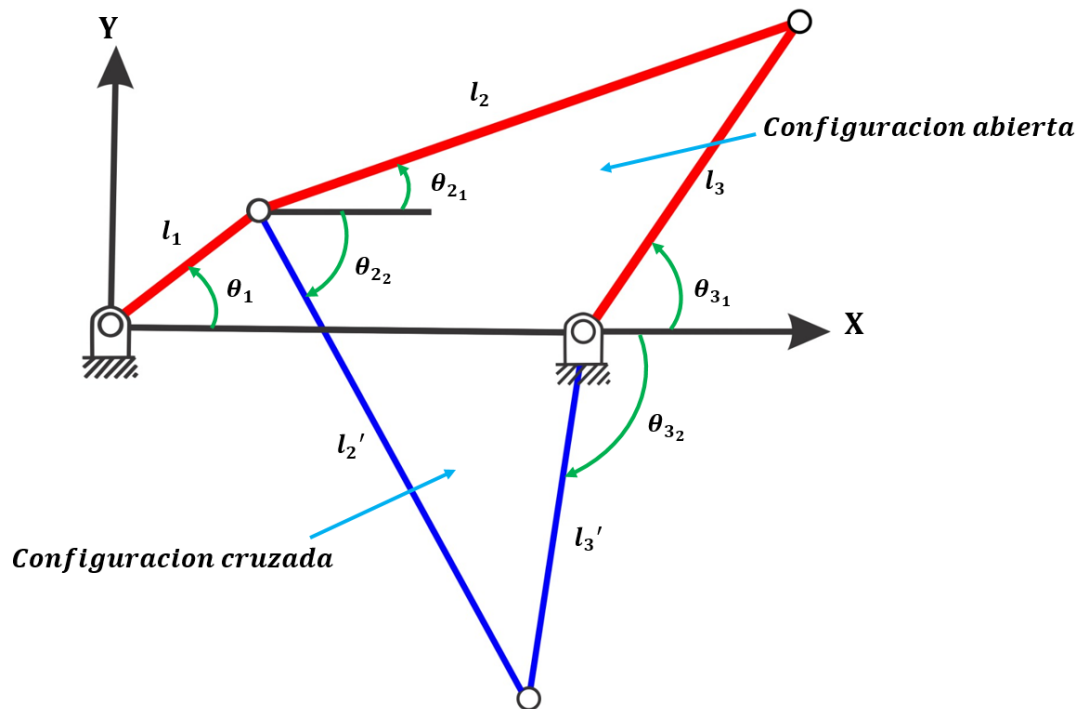


Figura 2.2: Configuración cruzada y abierta en un mecanismo de cuatro barras de Grashof.

En la figura 2.2 observamos observamos la configuración abierta y cerrada del mecanismo de cuatro barras de Grashof. Los términos abierto y cerrado están basados en la suposición de que el eslabón de entrada l_1 , para el cual el ángulo θ_1 esta definido, se encuentra en el primer cuadrante ($0 < \theta_1 < \pi/2$). Un mecanismo de Grashof se define entonces como cerrado si los dos eslabones adyacentes al eslabón mas corto se cruzan entre si, y como abierto si no lo hacen en esa posición. Se puede observar en la figura 2.2 que la configuracion del mecanismo, cerrada o abierta, depende solo de la forma en que los eslabones están ensamblados. No es posible predecir solo con las longitudes de los eslabones cual de las soluciones sera la mas adecuada, se denota que los ángulos en configuración abierta están medidos en sentido antihorario y los ángulos en configuración cerrada se miden en sentido horario [23].

En la figura 2.3 se muestra un esquema con todas las variables involucradas en el análisis de posición de un mecanismo de cuatro barras que ya fue expresado en el desarrollo matemático anterior, la figura 2.3 lo muestra de manera mas visual para una mayor comprensión, como se relacionan de manera general las variables involucradas en el análisis de posición, se nota que los parámetros de entrada están dadas por las longitudes del mecanismo y por el ángulo de entrada θ_1 , así mismo las salidas corresponden a los ángulos θ_2 y θ_3 . En la literatura clásica se aborda esta temática con un método gráfico que consiste en desarrollar el modelo

de un mecanismo de cuatro barras en un software de diseño CAD como puede ser Autocad, Solidworks, Inventor, etc, al generarlo se van introduciendo valores al ángulo de entrada θ_1 y proceden a medir los ángulos de salida, este método es inefectivo dado que el numero de iteraciones debe ser grande para tener los datos suficientes si se quieren determinar todas las posiciones angulares de salida. Para el análisis de posición de mecanismos de cuatro barras el método que mejor determina las posiciones de salida es a través de programación en software, para el desarrollo del modelo matemático computacional se usara MATLAB.

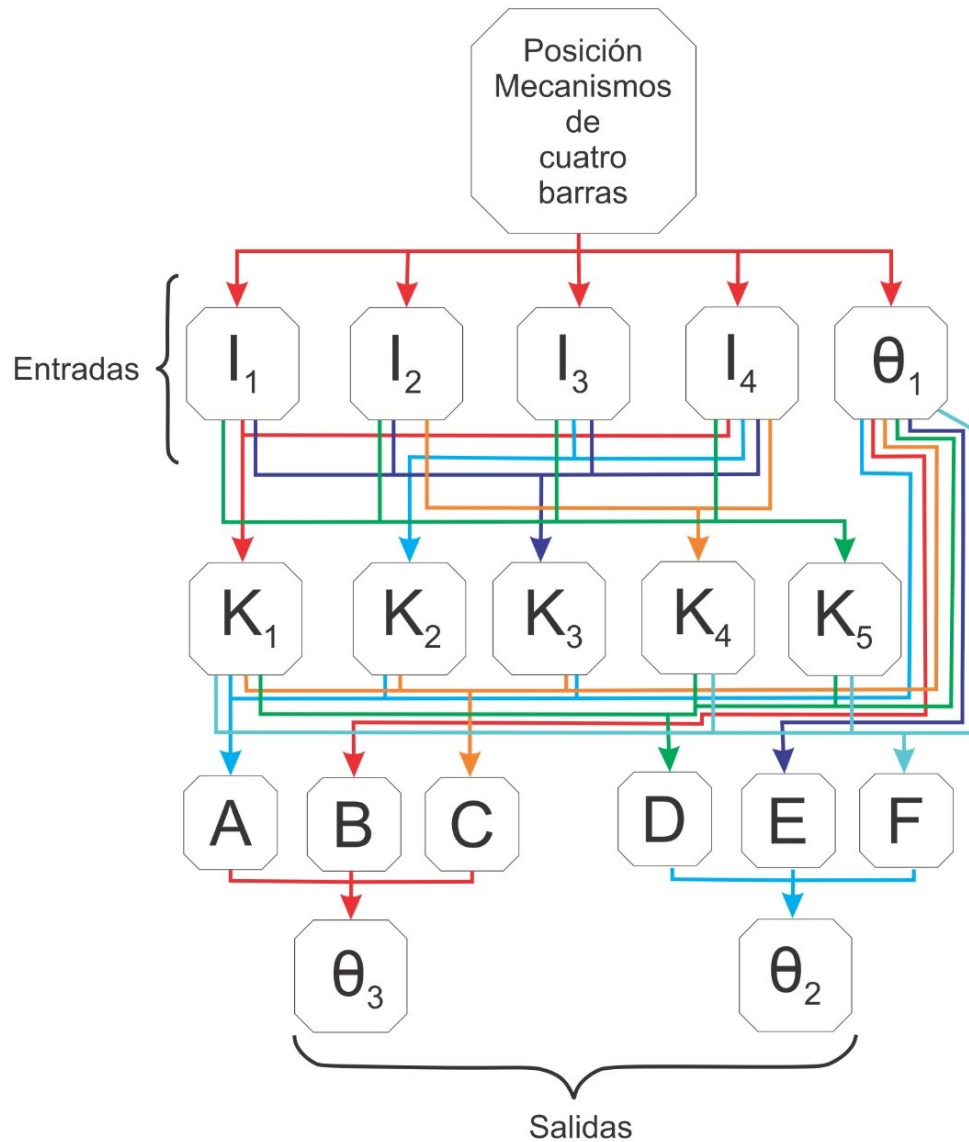


Figura 2.3: Esquema general del análisis de posición de un mecanismo de cuatro barras.

A continuación se desarrollaran los diferenciales totales aplicados a las ecuaciones de restricción cinemática, relacionaremos los diferenciales con los errores de posicionamiento a través de los grados de calidad IT extraídos de la norma ISO 286 [28], de esa forma relacionaremos el

modelo matemático con aplicaciones de tipo industrial y normas nacionales e internacionales establecidas para la fabricación y manufactura de mecanismos.

2.2. Errores totales del mecanismo de cuatro barras

Aplicamos los diferenciales totales [19] [20] a las ecuaciones cinemáticas descritas en la ecuación (2.1) al aplicar la diferencial total se generan nuevas ecuaciones que se describen a continuación:

$$\begin{aligned}\delta x &= \cos(\theta_1)\delta l_1 - l_1 \sin(\theta_1)\delta\theta_1 + \cos(\theta_2)\delta l_2 - l_2 \sin(\theta_2)\delta\theta_2 - \cos(\theta_3)\delta l_3 + l_3 \sin(\theta_3)\delta\theta_3 - \delta l_4 = 0 \\ \delta y &= \sin(\theta_1)\delta l_1 + l_1 \cos(\theta_1)\delta\theta_1 + \sin(\theta_2)\delta l_2 + l_2 \cos(\theta_2)\delta\theta_2 - \sin(\theta_3)\delta l_3 - l_3 \cos(\theta_3)\delta\theta_3 = 0\end{aligned}\quad (2.27)$$

Expresadas en notación matricial, las dos ecuaciones anteriores quedan compactadas como se muestran a continuación:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \cos(\theta_2) & -\cos(\theta_3) & -1 & -l_1 \sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \sin(\theta_2) & -\sin(\theta_3) & 0 & l_1 \cos(\theta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_4 \\ \delta\theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_2 \sin(\theta_2) & l_3 \sin(\theta_3) \\ l_2 \cos(\theta_2) & -l_3 \cos(\theta_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta_2 \\ \delta\theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (2.28)$$

Posteriormente denotamos a las matrices **A** y **B** como se muestra a continuación:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \cos(\theta_2) & -\cos(\theta_3) & -1 & -l_1 \sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \sin(\theta_2) & -\sin(\theta_3) & 0 & l_1 \cos(\theta_1) \end{bmatrix}\quad (2.29)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin(\theta_2) & l_3 \sin(\theta_3) \\ l_2 \cos(\theta_2) & -l_3 \cos(\theta_3) \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz **B** contienen componentes asociados a los ángulos de salida θ_2 y θ_3 y sus respectivas longitudes l_2 y l_3 . Estamos interesados en obtener los errores posicionales de salida, estos errores están en función de la coordenada angular de entrada θ_1 y de las tolerancias dimensionales δl_1 , δl_2 , δl_3 y δl_4 . En forma compacta la ecuación para despejar los errores de salida $\delta\theta_2$ y $\delta\theta_3$ esta dada en la ecuación (2.30).

$$\begin{bmatrix} \delta\theta_2 \\ \delta\theta_3 \end{bmatrix} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_4 \\ \delta\theta_1 \end{bmatrix}\quad (2.30)$$

En la ecuación (2.30) tenemos que un punto importante es el que exista la inversa de la matriz \mathbf{B} , para que las operaciones matriciales puedan realizarse de manera adecuada [14]. A continuación se muestra la inversa de la matriz \mathbf{B} y sus posibles singularidades. [30]

$$[\mathbf{B}]^{-1} = \frac{1}{l_2 l_3 \sin(\theta_2) \cos(\theta_3) - \sin(\theta_3) \cos(\theta_2)} \begin{bmatrix} -l_3 \cos(\theta_3) & -l_3 \sin(\theta_3) \\ -l_2 \cos(\theta_2) & -l_2 \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Hacemos uso de la propiedad $\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$ para reducir el tamaño de las ecuaciones [7].

$$[\mathbf{B}]^{-1} = \frac{1}{l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \begin{bmatrix} -l_3 \cos(\theta_3) & -l_3 \sin(\theta_3) \\ -l_2 \cos(\theta_2) & -l_2 \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

El determinante nulo se presentara cuando $\sin(\theta_2 - \theta_3) = 0$ cuando se presenta la inversa de la matriz \mathbf{B} no existe y en este punto no es posible determinar los errores de salida, la restricción o las singularidades en este caso son $(\theta_2 \neq \theta_3 + n\pi)$. Esto sólo ocurre físicamente en un mecanismo especial de cuatro barras llamado “Paralelogramo articulado”, que es una generalización de un mecanismo de cuatro barras, la indeterminación sucede cuando el ángulo de entrada del elemento primario es 0 o π , en esos dos casos todos los eslabones del mecanismo quedan alineados entre sí [23]. El calculo completo de los errores esta dado a continuación:

$$\begin{bmatrix} \delta\theta_2 \\ \delta\theta_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -l_2 \sin(\theta_2) & l_3 \sin(\theta_3) \\ l_2 \cos(\theta_2) & -l_3 \cos(\theta_3) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \cos(\theta_2) & -\cos(\theta_3) & -1 & -l_1 \sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \sin(\theta_2) & -\sin(\theta_3) & 0 & l_1 \cos(\theta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_4 \\ \delta\theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Al realizar la multiplicación de matrices obtenemos una nueva matriz de 2 x 5 elementos, el producto de $[-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}]$, sera denotado como la matriz \mathbf{E} , la matriz \mathbf{E} contiene los coeficientes de influencia

$$\begin{bmatrix} \delta\theta_2 \\ \delta\theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{24} & \varepsilon_{25} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} & \varepsilon_{34} & \varepsilon_{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_4 \\ \delta\theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

En forma compacta esto se puede ver como:

$$\begin{bmatrix} \delta\theta_2 \\ \delta\theta_3 \end{bmatrix} = \mathbf{E} \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_4 \\ \delta\theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

En donde la matriz \mathbf{E} se denota a continuación:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{24} & \varepsilon_{25} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} & \varepsilon_{34} & \varepsilon_{35} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

La matriz \mathbf{E} contiene los coeficientes de influencia [19] [20]; estos están dados en las expresiones dadas en las variables desde ε_{21} hasta ε_{35} , estos coeficientes están en función de las posiciones angulares de θ_1 que es el ángulo de entrada. Los coeficientes desde ε_{21} a ε_{24} y de ε_{31} a ε_{34} tienen unidades de $\frac{1}{\text{unidad de longitud}}$, las unidades de longitud deben estar dadas en milímetros, el coeficiente ε_{25} es de tipo adimensional y se le puede relacionar con la relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, el coeficiente ε_{35} también es de tipo adimensional y se le puede relacionar con la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$. Cada coeficiente de influencia tiene una magnitud y un signo diferente, estos coeficientes se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{21} &= \frac{\cos(\theta_3 - \theta_1)}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\cos(\theta_3 - \theta_2)}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \\ \varepsilon_{23} &= \frac{-1}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \\ \varepsilon_{24} &= \frac{-\cos(\theta_3)}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \\ \varepsilon_{25} &= \frac{-l_1 \sin(\theta_1 - \theta_3)}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \\ \varepsilon_{31} &= \frac{\cos(\theta_2 - \theta_1)}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \\ \varepsilon_{32} &= \frac{1}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{-\cos(\theta_2 - \theta_3)}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \\ \varepsilon_{34} &= \frac{-\cos(\theta_2)}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \\ \varepsilon_{35} &= \frac{-l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \end{aligned} \quad (2.37)$$

El desarrollo completo de las ecuaciones anteriores da los siguientes errores de posicionamiento para cada uno de los eslabones de un mecanismo de cuatro barras:

$$\begin{aligned} \delta\theta_2 &= \frac{\cos(\theta_3 - \theta_1)}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \delta l_1 + \frac{\cos(\theta_3 - \theta_2)}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \delta l_2 - \frac{1}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \delta l_3 - \frac{\cos(\theta_3)}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \delta l_4 - \frac{l_1 \sin(\theta_1 - \theta_3)}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \delta\theta_1 \\ \delta\theta_3 &= \frac{\cos(\theta_2 - \theta_1)}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \delta l_1 + \frac{1}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \delta l_2 - \frac{\cos(\theta_2 - \theta_3)}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \delta l_3 - \frac{\cos(\theta_2)}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \delta l_4 - \frac{l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \delta\theta_1 \end{aligned} \quad (2.38)$$

De las ecuaciones dadas en (2.38) se deduce que los errores posicionales de los eslabones de salida 2 y 3 asociados a las longitudes l_2 y l_3 son inversamente proporcionales a sus respectivas longitudes y directamente proporcionales a los coeficientes de influencia.

En una notación simplificada y compacta, los errores de posicionamiento $\delta\theta_2$ y $\delta\theta_3$ para cada una de las dos coordenadas generalizadas que ubican los eslabones l_2 y l_3 del mecanismo de cuatro barras, en función de las tolerancias dimensionales $\delta l_1, \delta l_2, \delta l_3, \delta l_4$, y de los errores $\delta\theta_1$ del ángulo de entrada θ_1 son:

$$\begin{aligned}\delta\theta_2 &= \varepsilon_{21}\delta l_1 + \varepsilon_{22}\delta l_2 + \varepsilon_{23}\delta l_3 + \varepsilon_{24}\delta l_4 + \varepsilon_{25}\delta\theta_1 \\ \delta\theta_3 &= \varepsilon_{31}\delta l_1 + \varepsilon_{32}\delta l_2 + \varepsilon_{33}\delta l_3 + \varepsilon_{34}\delta l_4 + \varepsilon_{35}\delta\theta_1\end{aligned}\quad (2.39)$$

En estas expresiones los productos de los coeficientes ε_{21} a ε_{24} por las respectivas tolerancias dimensionales $\delta l_1, \delta l_2, \delta l_3, \delta l_4$ denotan la influencia relativa que tiene cada parámetro geométrico l_1, l_2, l_3, l_4 en el error final de salida del eslabón de salida 2 asociado a la longitud l_2 mientras que el producto $\varepsilon_{25}\delta\theta_1$ refleja el error introducido por los propios errores de posicionamiento de la coordenada de entrada en el error posicional de salida del eslabón 2 asociado a l_2 , del mismo modo los productos de los coeficientes ε_{31} a ε_{34} por las respectivas tolerancias dimensionales $\delta l_1, \delta l_2, \delta l_3, \delta l_4$ denotan la influencia relativa que tiene cada parámetro geométrico l_1, l_2, l_3, l_4 en el error final de salida del eslabón l_3 mientras que el producto $\varepsilon_{35}\delta\theta_1$ refleja el error introducido por los propios errores de posicionamiento de la coordenada angular de entrada en el error de salida del eslabón 3 asociado a la longitud l_3 .

Las magnitudes de $\delta l_1, \delta l_2, \delta l_3, \delta l_4$ que aparecen en la ecuación (2.39) dependen de los valores asignados por las normas internacionales de diseño y fabricación a los parámetros geométricos funcionales l_1, l_2, l_3, l_4 del mecanismo de cuatro barras, los cuales son función del valor de sus propias magnitudes y del grado de precisión IT. Los coeficientes desde ε_{21} a ε_{24} y desde ε_{31} a ε_{34} tienen además un signo variable, por lo que el signo final de los productos $\varepsilon_{ij}\delta l_j$ dependerá de la posición fundamental que se asigne a la tolerancia dimensional δl_j . De esta manera, algunos términos de errores individuales podrían contrarrestarse con otros de los errores individuales que están presentes en la suma. De esta manera, queda abierta la posibilidad de que el diseñador controle el signo final del producto $\varepsilon_{ij}\delta l_j$, así que dependerá del diseñador que la posición de los eslabones de salida sea la adecuada y dependiendo del tipo de proceso que llevara a cabo el mecanismo de cuatro barras. Finalmente la posición real estará definida por las ecuaciones dadas en (2.40). [30]

$$\begin{aligned}\theta_{2_{Real}} &= \theta_2 + \delta\theta_2 \\ \theta_{3_{Real}} &= \theta_3 + \delta\theta_3\end{aligned}\quad (2.40)$$

Expandiendo la ecuación (2.40) para la configuración abierta y cerrada obtenemos lo siguiente para el ángulo θ_2 .

$$\theta_{2_{1_{Real}}} = 2 \arctan \left(\frac{-E - \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D} \right) + \delta\theta_2 \quad (2.41)$$

$$\theta_{2_{2_{Real}}} = 2 \arctan \left(\frac{-E + \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D} \right) + \delta\theta_2 \quad (2.42)$$

Para el caso del ángulo θ_3 tenemos lo siguiente:

$$\theta_{3_{1_{Real}}} = 2 \arctan \left(\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right) + \delta\theta_3 \quad (2.43)$$

$$\theta_{3_{2_{Real}}} = 2 \arctan \left(\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right) + \delta\theta_3 \quad (2.44)$$

2.3. Ley de Grashof

Cuando se trata de un mecanismo de cuatro barras, podemos recurrir a la Ley de Grashof la cual nos dice que para un mecanismo de cuatro barras la suma de longitudes correspondientes a la longitud mas corta y la mas larga no puede ser mayor que la suma de las longitudes de los dos eslabones restantes [26], si se desea que exista una rotación continua entre dos elementos del mecanismo de cuatro barras, dentro de la ley de Grashof tenemos que la longitud mas larga esta denominada por la letra L y la longitud mas corta denominada por la letra S , las longitudes restantes están denominadas como P y Q indistintamente, siguiendo esta notación la ley de Grashof especifica que uno de los eslabones, en particular el mas pequeño, girara continuamente en relación con los otros tres cuando se cumpla la inecuación (2.45)

$$S + L \leq P + Q \quad (2.45)$$

Si la desigualdad no se satisface ninguna de las longitudes correspondientes a los eslabones del mecanismo de cuatro barras efectuara una revolución completa en relación con otro, se puede notar que la Ley de Grashof no especifica el orden en que los eslabones se conectan o cual de los eslabones del mecanismo es el fijo [23], por consecuencia estamos en libertad de fijar cualquiera de los cuatro, de acuerdo a la inecuación dada en (2.45) podemos extraer tres casos:

$$\text{Ley de Grashof} \begin{cases} S + L < P + Q & \text{Mecanismo de cuatro barras clasico} \\ S + L = P + Q & \text{Paralelogramo articulado} \\ S + L > P + Q & \text{Mecanismo de no Grashof} \end{cases} \quad (2.46)$$

En la figura 2.4 se muestran los dos casos de importancia, en el caso del mecanismo de cuatro barras clásico todas sus longitudes son diferentes entre si y conduce a una desigualdad. En el caso de el mecanismo de cuatro barras clásico todas sus longitudes son diferentes entre si, el caso de la igualdad conduce a un mecanismo de cuatro barras conocido como paralelogramo articulado en donde la longitud menor y mayor son iguales a las restantes, los mecanismos excéntricos y de no Grashof no son de interés para este estudio.

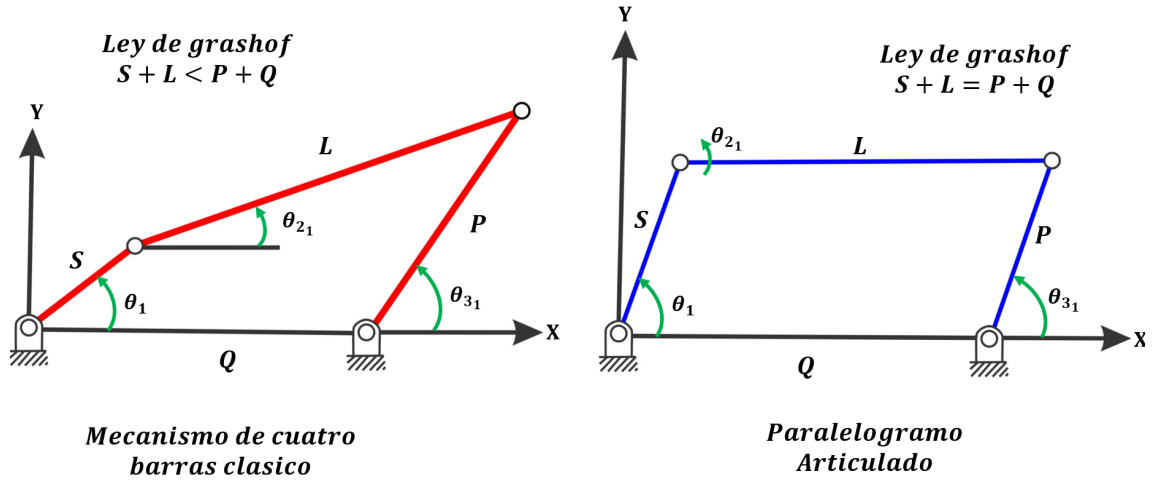


Figura 2.4: Ley de Grashof en un mecanismo de cuatro barras clásico y en un paralelogramo articulado.

En la figura 2.4 podemos notar que el mecanismo de cuatro barras clásico con todas sus longitudes diferentes y el paralelogramo articulado están en configuración abierta, se puede notar que en cada caso se cumple la Ley de Grashof.

2.4. Relación de Transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$

En literatura clásica poco se aborda acerca de la relación de transmisión que existe en los mecanismos de cuatro barras, en 2010 Gerald Rothenhofer [22] propone encontrar la relación de transmisión a través de diferenciación implícita de las ecuaciones para obtener los ángulos de salida en función del ángulo de entrada. Ahora obtendremos las ecuaciones para la relación de transmisión en mecanismos de cuatro barras, concretamente encontraremos la relación de transmisión entre el elemento de entrada asociado al eslabón de la longitud l_1 , con el elemento de salida asociado al eslabón de la longitud l_3 . Tomamos la ecuación descrita en (2.7) y la reordenamos como se muestra en la ecuación (2.47).

$$l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 - 2l_1l_3(\cos(\theta_1)\cos(\theta_3) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_3)) - 2l_1l_4\cos(\theta_1) + 2l_3l_4\cos(\theta_3) = 0 \quad (2.47)$$

Usamos la propiedad $\cos(\theta_1)\cos(\theta_3) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_3) = \cos(\theta_1 - \theta_3)$, para simplificar la ecuación (2.47), al simplificarla obtenemos lo siguiente:

$$l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 - 2l_1l_3(\cos(\theta_1 - \theta_3)) - 2l_1l_4\cos(\theta_1) + 2l_3l_4\cos(\theta_3) = 0 \quad (2.48)$$

Posteriormente la ecuación (2.48) será derivada implícitamente con respecto a θ_1 ya que es el parámetro angular de entrada y obtenemos:

$$2l_1l_3\sin(\theta_1 - \theta_3)\left(1 - \frac{d\theta_3}{d\theta_1}\right) + 2l_1l_4\sin(\theta_1) - 2l_3l_4\sin(\theta_3)\frac{d\theta_3}{d\theta_1} = 0 \quad (2.49)$$

Al desarrollar la ecuación (2.49) y agrupar términos, obtenemos que:

$$[-2l_1l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) - 2l_3l_4 \sin(\theta_3)] \frac{d\theta_3}{d\theta_1} + 2l_1l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + 2l_1l_4 \sin(\theta_1) = 0 \quad (2.50)$$

Finalmente despejamos el termino $\frac{d\theta_3}{d\theta_1}$ y obtenemos la expresión (2.51), sabemos que las derivadas con respecto a la posición se convierten en velocidades angulares, el termino $\frac{d\theta_3}{d\theta_1}$ también puede ser reescrito como $\frac{\omega_3}{\omega_1}$, este cociente es la relación de transmisión entre el elemento de entrada asociado al eslabón de la longitud l_1 , con el elemento de salida asociado al eslabón de la longitud l_3 , la relación de transmisión se denotara como i_{31} .

$$i_{31} = \frac{d\theta_3}{d\theta_1} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{l_1l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1l_4 \sin(\theta_1)}{l_1l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3l_4 \sin(\theta_3)} \quad (2.51)$$

La expresión (2.51) nos da como resultado la relación de transmisión entre el elemento de entrada 1, y el elemento de salida 3, notamos que este termino es de tipo adimensional, la relación de transmisión se puede ver como una ganancia de velocidades angulares y es sensible a los errores de posición y de fabricación. Esta relación de transmisión también puede ser obtenida a través del coeficiente de influencia ε_{35} que es de tipo adimensional y genera la misma respuesta que la ecuación (2.51).

A través del análisis anterior es posible estimar la relación de transmisión a partir de la geometría del mecanismo de cuatro barras, de acuerdo al análisis no es necesario medir la velocidad angular de entrada y de salida para poder obtener su ganancia, basta con conocer su posicionamiento angular y las longitudes de los eslabones. Se denota que la relación de transmisión no es constante para mecanismos de cuatro barras a diferencia de los engranes cilíndricos de dientes rectos cuya relación de transmisión si es constante idealmente. [22]

2.5. Relación de Transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$

Ahora obtendremos las ecuaciones para la relación de transmisión entre el elemento de entrada asociado al eslabón de la longitud l_1 , con el elemento de salida asociado al eslabón de la longitud l_2 , el calculo sera muy similar al anterior. [22] Partiremos de la ecuación (2.21) re-ordenada:

$$l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 + l_4^2 + 2l_1l_2 \left(\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \right) - 2l_1l_4 \cos(\theta_1) - 2l_2l_4 \cos(\theta_2) = 0 \quad (2.52)$$

De acuerdo a la propiedad $\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) = \cos(\theta_1 - \theta_2)$ usaremos esta propiedad para reescribir la ecuación (2.52), al simplificarla obtenemos la ecuación descrita en (2.53)

$$l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 + l_4^2 + 2l_1l_2 \left(\cos(\theta_1 - \theta_2) \right) - 2l_1l_4 \cos(\theta_1) - 2l_2l_4 \cos(\theta_2) = 0 \quad (2.53)$$

Posteriormente la ecuación (2.53) sera derivada implícitamente con respecto a θ_1 ya que es el parámetro angular de entrada y obtendremos la ecuación descrita en (2.54)

$$-2l_1l_2(\sin(\theta_1 - \theta_2))(1 - \frac{d\theta_2}{d\theta_1}) + 2l_1l_4 \sin(\theta_1) + 2l_2l_4 \sin(\theta_2) \frac{d\theta_2}{d\theta_1} = 0 \quad (2.54)$$

Desarrollando y agrupando términos obtenemos la ecuación (2.55)

$$[2l_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2l_2l_4 \sin(\theta_2)] \frac{d\theta_2}{d\theta_1} - 2l_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2l_1l_4 \sin(\theta_1) = 0 \quad (2.55)$$

Al despejar el termino $\frac{d\theta_2}{d\theta_1}$ obtendremos la expresión (2.56), el termino $\frac{d\theta_2}{d\theta_1}$ puede ser reescrito como $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, este cociente es la relación de transmision entre el elemento de entrada asociado al eslabón de la longitud l_1 , con el elemento de salida asociado al eslabón de la longitud l_2 , esta relación de transmision se denotara como i_{21} .

$$i_{21} = \frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{l_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_1l_4 \sin(\theta_1)}{l_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2l_4 \sin(\theta_2)} \quad (2.56)$$

El cociente de velocidades angulares es de tipo adimensional y se puede ver como una ganancia de velocidades angulares. A través de las demostraciones anteriores se puede ver que la relación de transmisión se puede expresar en función de su geometría y de su posicionamiento angular. Esta relación de transmision también puede ser obtenida a través del coeficiente de influencia ε_{25} que también es de tipo adimensional y genera la misma respuesta y el mismo grafico que i_{21} .

De acuerdo a lo anterior es posible estimar la relación de transmision a través de diferentes metodologías, la primera es a través de los coeficientes de influencia ε_{25} y ε_{35} que generan la misma respuesta y el mismo gráfico que $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ y $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ respectivamente, la segunda es que las relaciones de transmision pueden ser obtenidas a través de diferenciación implícita, las ecuaciones (2.51) y (2.56) implican que $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ y $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ se pueden obtener en función de la geometría del mecanismo y de sus posiciones angulares, la tercera metodología seria a través de medición directa de las diferentes velocidades angulares con instrumentos y sensores (encoders por ejemplo), en la figura 2.5 se muestran las tres diferentes formas de obtener las diferentes relaciones de transmision.

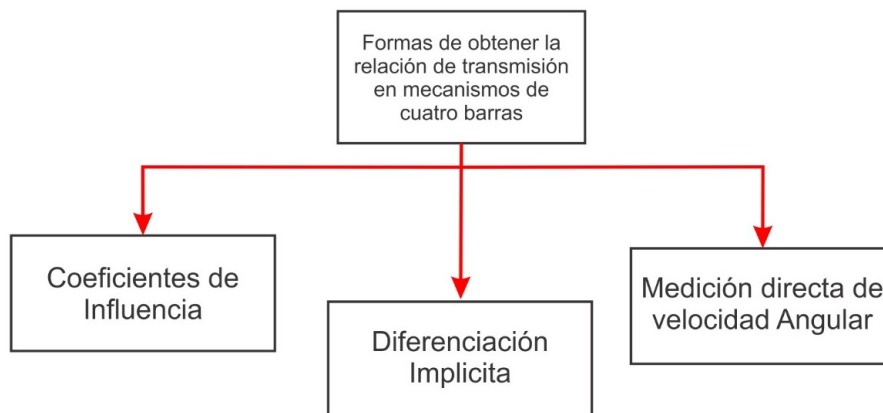


Figura 2.5: Diferentes formas de obtener las relaciones de transmision en mecanismos de cuatro barras.

2.6. Errores Totales en la Relación de Transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$

Las relaciones de transmisión o ganancias de velocidad angular son sensibles a los errores de posición y fabricación [22], se aplicarán diferenciales con respecto a cada una de las variables involucradas en la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ para encontrar los errores en la relación de transmisión en función de las tolerancias dimensionales asociadas a los parámetros geométricos. Los diferenciales totales se aplican a la ecuación (2.51). Al hacerlo obtenemos obtenemos la contribución parcial de cada parámetro geométrico en el error en la relación de transmisión. Estas diferenciales totales conducen a las ecuaciones (2.57) a (2.61).

$$\frac{\partial i_{31}}{\partial l_1} = \frac{[l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_4 \sin(\theta_1)] [l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)] - [l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3)] [l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \delta l_1 \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial i_{31}}{\partial l_3} = \frac{[l_1 \sin(\theta_1 - \theta_3)] [l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)] - [l_1 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_4 \sin(\theta_3)] [l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \delta l_3 \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial i_{31}}{\partial l_4} = \frac{[l_1 \sin(\theta_1)] [l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)] - [l_3 \sin(\theta_3)] [l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \delta l_4 \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial i_{31}}{\partial \theta_1} = \frac{[l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \cos(\theta_1)] [l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)] - [l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)] [l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \delta \theta_1 \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial i_{31}}{\partial \theta_3} = \frac{[-l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)] [l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)] - [-l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \cos(\theta_3)] [l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \delta \theta_3 \quad (2.61)$$

La expresión para el error total en la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ está compuesta por la sumatoria de los términos descritos en las ecuaciones anteriores. El error total en la relación de transmisión se denotará como $\delta i_{31_{TOTAL}}$. La ecuación (2.62) describe el error total en forma compacta.

$$\delta i_{31_{TOTAL}} = \frac{\partial i_{31}}{\partial l_1} + \frac{\partial i_{31}}{\partial l_3} + \frac{\partial i_{31}}{\partial l_4} + \frac{\partial i_{31}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial i_{31}}{\partial \theta_3} \quad (2.62)$$

Se puede notar que la ecuación (2.61) contiene el término $\delta \theta_3$, el cual está expresado en la ecuación (2.38). Éste es el error de posicionamiento del eslabón tres [30], el cual depende a su vez de los coeficientes de influencia ε_{31} a ε_{35} dados en la misma ecuación (2.38). Al sustituir (2.38) en (2.61) y denotar a $\delta i_{31_{TOTAL}}$ en función de los errores individuales δl_1 , δl_2 , δl_3 , δl_4 , $\delta \theta_1$, se tiene que el error total en la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ viene dado por la ecuación (2.63).

$$\delta i_{31_{TOTAL}} = \gamma_{l_1} \delta l_1 + \gamma_{l_2} \delta l_2 + \gamma_{l_3} \delta l_3 + \gamma_{l_4} \delta l_4 + \gamma_{\theta_1} \delta \theta_1 \quad (2.63)$$

Donde cada coeficiente γ_{l_1} , γ_{l_2} , γ_{l_3} , γ_{l_4} , γ_{θ_1} es variable y sus expresiones matemáticas se escriben en las ecuaciones (2.64) a (2.68)

$$\gamma_{l_1} = \frac{l_3^2 l_4 \sin(\theta_1 - \theta_3) \sin(\theta_3) + l_3 l_4^2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_3)}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin(\theta_3)]^2} + \left[\frac{[l_1^2 l_3 l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_3) - l_1 l_3 l_4^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_3) - l_1 l_3^2 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \right] \left[\frac{\cos(\theta_2 - \theta_1)}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \right] \quad (2.64)$$

$$\gamma_{l_2} = \left[\frac{[l_1^2 l_3 l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_3) - l_1 l_3 l_4^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_3) - l_1 l_3^2 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \right] \left[\frac{1}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \right] \quad (2.65)$$

$$\gamma_{l_3} = - \left[\frac{[l_1^2 l_4 \sin(\theta_1 - \theta_3) \sin(\theta_1) + l_1 l_4^2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_3)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \right] + \left[\frac{[l_1^2 l_3 l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_3) - l_1 l_3 l_4^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_3) - l_1 l_3^2 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \right] \left[\frac{-\cos(\theta_2 - \theta_3)}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \right] \quad (2.66)$$

$$\gamma_{l_4} = \frac{l_1^2 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \sin(\theta_1) - l_1 l_3^2 \sin(\theta_1 - \theta_3) \sin(\theta_3)}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin(\theta_3)]^2} + \left[\frac{[l_1^2 l_3 l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_3) - l_1 l_3 l_4^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_3) - l_1 l_3^2 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \right] \left[\frac{-\cos(\theta_2)}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \right] \quad (2.67)$$

$$\gamma_{\theta_1} = \frac{l_1 l_3^2 l_4 \sin(\theta_3) \cos(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_3 l_4^2 \sin(\theta_3) \cos(\theta_1) - l_1^2 l_3 l_4 \sin(\theta_3)}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin(\theta_3)]^2} + \left[\frac{[l_1^2 l_3 l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_3) - l_1 l_3 l_4^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_3) - l_1 l_3^2 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \right] \left[\frac{-l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \right] \quad (2.68)$$

Las ecuaciones (2.62) y (2.63) son equivalentes. Los coeficientes γ_{l_1} , γ_{l_2} , γ_{l_3} , γ_{l_4} , γ_{θ_1} muestran las sensibilidades de la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ a los errores en las longitudes l_1 , l_2 , l_3 , l_4 y al error en el posicionamiento angular de entrada. Estos coeficientes son variables con la posición del elemento de entrada y con la magnitud del grado IT de las tolerancias dimensionales. [22] [28] [30]

2.7. Errores Totales en la Relación de Transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$

Ahora se aplicarán diferenciales con respecto a cada una de las variables involucradas en la relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ para encontrar igual que antes [22], los errores en la relación de transmisión en función de las tolerancias dimensionales asociadas a los parámetros geométricos. Los diferenciales totales se aplican a la ecuación (2.56). Al hacerlo, obtenemos la contribución parcial de cada parámetro geométrico en el error en la relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$. Estas diferenciales totales conducen a las ecuaciones (2.69) a (2.73).

$$\frac{\partial i_{21}}{\partial l_1} = \frac{[l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_4 \sin(\theta_1)] [l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)] - [l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] [l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \delta l_1 \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial i_{21}}{\partial l_2} = \frac{[l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)] [l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)] - [l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_4 \sin(\theta_2)] [l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \delta l_2 \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial i_{21}}{\partial l_4} = \frac{[-l_1 \sin(\theta_1)] [l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)] - [l_2 \sin(\theta_2)] [l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \delta l_4 \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial i_{21}}{\partial \theta_1} = \frac{[l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_4 \cos(\theta_1)] [l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)] - [l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] [l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \delta \theta_1 \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial i_{21}}{\partial \theta_2} = \frac{[-l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] [l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)] - [-l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \cos(\theta_2)] [l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \delta \theta_2 \quad (2.73)$$

La expresión para el error total en la relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ está compuesta por la sumatoria de los términos descritos en las ecuaciones (2.69) a (2.73). El error total en la relación de transmisión se denotará como $\delta i_{21_{TOTAL}}$. La ecuación (2.74) describe el error total en forma compacta. [22]

$$\delta i_{21_{TOTAL}} = \frac{\partial i_{21}}{\partial l_1} + \frac{\partial i_{21}}{\partial l_2} + \frac{\partial i_{21}}{\partial l_4} + \frac{\partial i_{21}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial i_{21}}{\partial \theta_2} \quad (2.74)$$

Se puede notar que la ecuación (2.73) contiene el término $\delta \theta_2$, el cual está expresado en la ecuación (2.38). Este es el error de posicionamiento del eslabón dos, el cual depende a su vez de los coeficientes de influencia ε_{21} a ε_{25} expresados en la ecuación (2.38). Al sustituir (2.38) en (2.73) y denotar $\delta i_{21_{TOTAL}}$ en función de las tolerancias dimensionales δl_1 , δl_2 , δl_3 , δl_4 , $\delta \theta_1$, se tiene que el error total en la relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ viene dado por la ecuación (2.75).

$$\delta i_{21_{TOTAL}} = \lambda_{l_1} \delta l_1 + \lambda_{l_2} \delta l_2 + \lambda_{l_3} \delta l_3 + \lambda_{l_4} \delta l_4 + \lambda_{\theta_1} \delta \theta_1 \quad (2.75)$$

Donde cada coeficiente λ_{l_1} , λ_{l_2} , λ_{l_3} , λ_{l_4} , λ_{θ_1} es de magnitud y signo variable y sus expresiones matemáticas se escriben en las ecuaciones (2.76) a (2.80).

$$\lambda_{l_1} = \frac{l_2^2 l_4 \sin(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_2) - l_2 l_4^2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} + \left[\frac{[-l_1^2 l_2 l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_1 l_2 l_4^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - l_1 l_2^2 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \right] \left[\frac{\cos(\theta_3 - \theta_1)}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \right] \quad (2.76)$$

$$\lambda_{l_2} = \frac{l_1^2 l_4 \sin(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1) + l_1 l_4^2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} + \left[\frac{[-l_1^2 l_2 l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_1 l_2 l_4^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - l_1 l_2^2 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \right] \left[\frac{\cos(\theta_3 - \theta_2)}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \right] \quad (2.77)$$

$$\lambda_{l_3} = \left[\frac{[-l_1^2 l_2 l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_1 l_2 l_4^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - l_1 l_2^2 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \right] \left[\frac{-1}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \right] \quad (2.78)$$

$$\lambda_{l_4} = - \left[\frac{l_1^2 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1) + l_1 l_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_2)}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \right] + \left[\frac{[-l_1^2 l_2 l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_1 l_2 l_4^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - l_1 l_2^2 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \right] \left[\frac{-\cos(\theta_3)}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \right] \quad (2.79)$$

$$\lambda_{\theta_1} = \left[\frac{l_1 l_2^2 l_4 \sin(\theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_2 l_4^2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) + l_1^2 l_2 l_4 \sin(\theta_2)}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \right] + \left[\left[\frac{-l_1^2 l_2 l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_1 l_2 l_4^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - l_1 l_2^2 l_4 \sin(\theta_1)}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \right] \left[\frac{-l_1 \sin(\theta_1 - \theta_3)}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \right] \right] \quad (2.80)$$

Las expresiones (2.74) y (2.75) son equivalentes. Los diferenciales totales de la relación de transmisión de $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ y $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ se pueden expresar en forma matricial, como se señala en (2.81).

Los errores $\delta i_{21_{TOTAL}}$, dependen así de los coeficientes λ_{l_i} y λ_{θ_1} y de las tolerancias dimensionales de los parámetros geométricos, así como del error de posicionamiento de la coordenada de entrada $\delta\theta_1$. Los errores $\delta i_{31_{TOTAL}}$, dependen así de los coeficientes γ_{l_i} y γ_{θ_1} y de las tolerancias dimensionales de los parámetros geométricos, así como del error de posicionamiento de la coordenada de entrada $\delta\theta_1$.

$$\begin{bmatrix} \delta i_{21_{TOTAL}} \\ \delta i_{31_{TOTAL}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{l_1} & \lambda_{l_2} & \lambda_{l_3} & \lambda_{l_4} & \lambda_{\theta_1} \\ \gamma_{l_1} & \gamma_{l_2} & \gamma_{l_3} & \gamma_{l_4} & \gamma_{\theta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_4 \\ \delta\theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

Finalmente las relaciones de transmisión reales quedan definidas como se muestra en las ecuaciones (2.82) y (2.83)

$$i_{21_{Real}} = \frac{l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_4 \sin(\theta_1)}{l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)} + \delta i_{21_{TOTAL}} \quad (2.82)$$

$$i_{31_{Real}} = \frac{l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin(\theta_1)}{l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)} + \delta i_{31_{TOTAL}} \quad (2.83)$$

2.8. Cota de error máxima en las relaciones de transmisión

Los coeficientes λ_{l_1} , λ_{l_2} , λ_{l_3} , λ_{l_4} , λ_{θ_1} y γ_{l_1} , γ_{l_2} , γ_{l_3} , γ_{l_4} , γ_{θ_1} dependen de la posición del elemento de entrada y pueden ser positivos, negativos o cero. De esta manera, el máximo error posible en las relaciones de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ y $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ se consigue tomando el valor absoluto de la multiplicación de los coeficientes anteriores por las respectivas tolerancias dimensionales δl_1 , δl_2 , δl_3 , δl_4 , $\delta\theta_1$ como se indica en las ecuaciones (2.84) y (2.85). De este modo, los errores parciales en las relaciones de transmisión debidos a las tolerancias dimensionales son todos positivos y el error sumario es máximo. [22]

$$\epsilon_{21_{TOTAL}} = |\lambda_{l_1} \delta l_1| + |\lambda_{l_2} \delta l_2| + |\lambda_{l_3} \delta l_3| + |\lambda_{l_4} \delta l_4| + |\lambda_{\theta_1} \delta\theta_1| \quad (2.84)$$

$$\epsilon_{31_{TOTAL}} = |\gamma_{l_1} \delta l_1| + |\gamma_{l_2} \delta l_2| + |\gamma_{l_3} \delta l_3| + |\gamma_{l_4} \delta l_4| + |\gamma_{\theta_1} \delta\theta_1| \quad (2.85)$$

2.9. Análisis de Velocidad Angular

Para el análisis de velocidad angular, la figura 1 será modificada, las longitudes se presentan ahora como vectores que forman un lazo vectorial. La representación vectorial se muestra en la figura 2.6. Se puede notar que el lazo vectorial se cierra sobre si mismo y por lo tanto la suma de vectores recorriendo el lazo en sentido horario o antihorario es igual al vector nulo. [23]

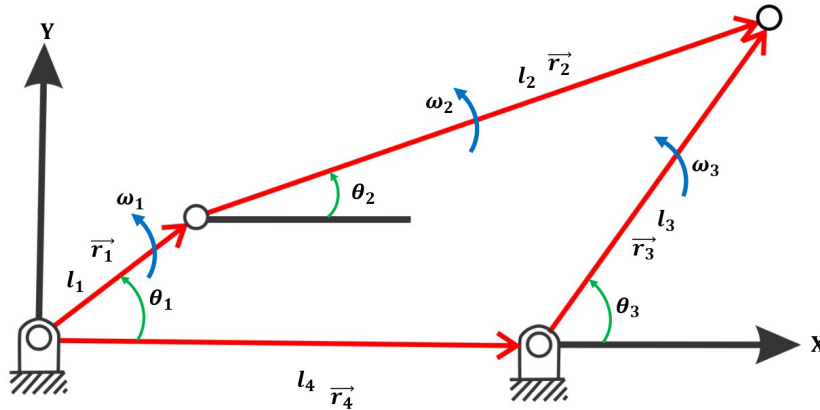


Figura 2.6: Mecanismo de cuatro barras y sus parámetros asociados

En la figura 2.6, las longitudes de los vectores son las longitudes de los eslabones ya conocidas l_1 , l_2 , l_3 , l_4 . Se establece una velocidad angular de entrada denotada como ω_1 aplicada sobre el eslabón l_1 . La velocidad ω_1 puede ser una velocidad de entrada variable en el tiempo. Al establecerse ω_1 como entrada, tanto ω_2 como ω_3 quedan definidas como salidas dependientes de ω_1 . Para el análisis de velocidad angular recurriremos a la notación compleja para vectores. En la figura 2.7 se ilustra la representación del plano complejo en donde el eje real representa la componente en la dirección x del vector del plano, y el eje imaginario, la componente en la dirección y del mismo vector. Para el análisis, el número i se utilizará como operador, por lo tanto, cualquier término en un número complejo que no contenga al operador i será una componente x , mientras que si lo tiene corresponderá a una componente en y . [23]

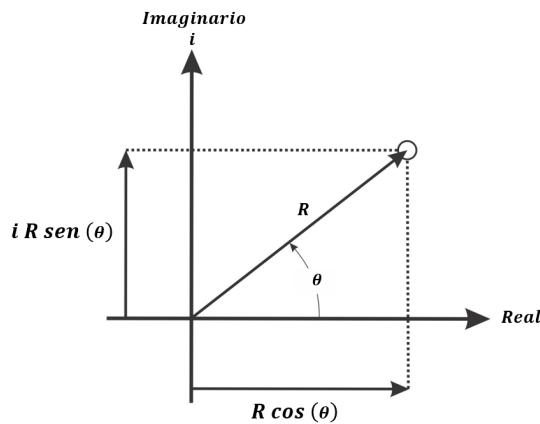


Figura 2.7: Representación de un número complejo

A partir de la figura 2.7, podemos denotar un número complejo de un vector de posición, tanto en su forma polar como en su forma cartesiana, como se indica en (2.86)

$$\begin{aligned} \text{Forma polar} &: Re^{i\theta} \\ \text{Forma cartesiana} &: R \cos(\theta) + iR \sin(\theta) \end{aligned} \quad (2.86)$$

Una de las grandes ventajas de utilizar la notación compleja en vectores planos es la identidad de Euler, la cual facilitará en gran medida disminuir la complejidad de los cálculos. Esta identidad se presenta en (2.87).

$$e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (2.87)$$

Utilizaremos esta notación de números complejos para los vectores, con el fin de desarrollar y derivar las ecuaciones de velocidad angular de los eslabones de los mecanismos de cuatro barras. La ecuación de lazo vectorial cerrado de los vectores de posición del mecanismo de cuatro barras correspondiente a la figura 2.6 se presenta en (2.88)

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_3 - \vec{r}_4 = 0 \quad (2.88)$$

Sustituiremos los vectores por la notación compleja. Se denotarán sus longitudes escalares con los valores ya conocidos l_1, l_2, l_3, l_4 . La ecuación (2.88) se escribe como se señala en (2.89).

$$l_1 e^{i\theta_1} + l_2 e^{i\theta_2} - l_3 e^{i\theta_3} - l_4 = 0 \quad (2.89)$$

Para obtener las expresiones de velocidad angular, esta ecuación (2.89) se deriva con respecto al tiempo. La longitud l_4 no está asociada a ningún ángulo y por lo tanto, es constante. Al derivar con respecto al tiempo obtenemos la expresión dada en (2.90).

$$il_1 \frac{d\theta_1}{dt} e^{i\theta_1} + il_2 \frac{d\theta_2}{dt} e^{i\theta_2} - il_3 \frac{d\theta_3}{dt} e^{i\theta_3} = 0 \quad (2.90)$$

Sabemos también de la literatura clásica, que $\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1, \frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2, \frac{d\theta_3}{dt} = \omega_3$. Estas derivadas corresponden tanto a la velocidad angular de entrada como a las velocidades angulares de salida, por lo tanto, la ecuación (2.90) se reestructura como se indica en (2.91).

$$il_1 \omega_1 e^{i\theta_1} + il_2 \omega_2 e^{i\theta_2} - il_3 \omega_3 e^{i\theta_3} = 0 \quad (2.91)$$

Recurriremos a la identidad de Euler, $e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ para reemplazar las funciones exponenciales de la ecuación (2.91) por $\cos(\theta) + i \sin(\theta)$. De esta forma, se obtiene la ecuación (2.92).

$$il_1\omega_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) + il_2\omega_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) - il_3\omega_3(\cos(\theta_3) + i\sin(\theta_3)) = 0 \quad (2.92)$$

Al desarrollar los productos en esta ecuación (2.92), se llega a (2.93).

$$il_1\omega_1 \cos(\theta_1) - l_1\omega_1 \sin(\theta_1) + il_2\omega_2 \cos(\theta_2) - l_2\omega_2 \sin(\theta_2) - il_3\omega_3 \cos(\theta_3) - l_3\omega_3 \sin(\theta_3) = 0 \quad (2.93)$$

Se nota que los términos en coseno son números imaginarios, dirigidos en y . Los términos en seno son reales y se dirigen hacia x . Separando las partes real e imaginaria, obtenemos las dos ecuaciones señaladas en (2.94).

$$\begin{aligned} l_1\omega_1 \cos(\theta_1) + l_2\omega_2 \cos(\theta_2) - l_3\omega_3 \cos(\theta_3) &= 0 \\ -l_1\omega_1 \sin(\theta_1) - l_2\omega_2 \sin(\theta_2) + l_3\omega_3 \sin(\theta_3) &= 0 \end{aligned} \quad (2.94)$$

Reacomodando (2.94), las variables conocidas θ_1 y ω_1 , tal como se muestra en (2.95) quedan del lado derecho de la igualdad. En este caso, la longitud l_1 , el ángulo de entrada θ_1 y la velocidad angular de entrada ω_1 son variables de entrada. [23]

$$\begin{aligned} l_2\omega_2 \cos(\theta_2) - l_3\omega_3 \cos(\theta_3) &= -l_1\omega_1 \cos(\theta_1) \\ -l_2\omega_2 \sin(\theta_2) + l_3\omega_3 \sin(\theta_3) &= l_1\omega_1 \sin(\theta_1) \end{aligned} \quad (2.95)$$

Expresada en forma matricial, la ecuación (2.95) queda como se indica en la ecuación (2.96). En esta ecuación (2.96), las variables buscadas corresponden a las velocidades angulares de salida ω_2 y ω_3 .

$$\begin{bmatrix} l_2 \cos(\theta_2) & -l_3 \cos(\theta_3) \\ -l_2 \sin(\theta_2) & l_3 \sin(\theta_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\omega_1 \cos(\theta_1) \\ l_1\omega_1 \sin(\theta_1) \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

Ahora, despejaremos ω_2 y ω_3 a través de la regla de Cramer, en donde los determinantes secundarios Δ_1 y Δ_2 se dividirán sobre el determinante principal Δ .

$$\omega_2 = \frac{\begin{vmatrix} -l_1\omega_1 \cos(\theta_1) & -l_3 \cos(\theta_3) \\ l_1\omega_1 \sin(\theta_1) & l_3 \sin(\theta_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l_2 \cos(\theta_2) & -l_3 \cos(\theta_3) \\ -l_2 \sin(\theta_2) & l_3 \sin(\theta_3) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad (2.97)$$

En este caso, el determinante Δ_1 resulta de reemplazar el vector columna de términos independientes en la primera columna de la matriz, con lo cual la velocidad angular ω_2 queda como se refleja en (2.98).

$$\omega_2 = \frac{l_1\omega_1 \sin(\theta_1 - \theta_3)}{l_2 \sin(\theta_3 - \theta_2)} \quad (2.98)$$

En esta ecuación, tenemos que la velocidad angular de salida depende de los parámetros de entrada conocidos, l_1 , l_2 , θ_1 y ω_1 , así como de los parámetros de salida obtenidos en el análisis de posición θ_2 y θ_3 . Esta velocidad angular de salida ω_2 es un vector alrededor del eje z y puede ser tanto negativo como positivo o cero. La magnitud de ω_2 está dada como se expresa en (2.99).

$$|\omega_2| = \left| \frac{l_1 \omega_1 \sin(\theta_1 - \theta_3)}{l_2 \sin(\theta_3 - \theta_2)} \right| \quad (2.99)$$

Para la velocidad angular de salida ω_3 , se tiene la ecuación (2.100).

$$\omega_3 = \frac{\begin{vmatrix} l_2 \cos(\theta_2) & -l_1 \omega_1 \cos(\theta_1) \\ -l_2 \sin(\theta_2) & l_1 \omega_1 \sin(\theta_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l_2 \cos(\theta_2) & -l_3 \cos(\theta_3) \\ -l_2 \sin(\theta_2) & l_3 \sin(\theta_3) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad (2.100)$$

En este caso, el determinante Δ_2 resulta de reemplazar el vector columna de términos independientes en la segunda columna de la matriz, con lo cual la velocidad angular ω_3 queda como se refleja en (2.101).

$$\omega_3 = \frac{l_1 \omega_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_3 \sin(\theta_3 - \theta_2)} \quad (2.101)$$

En esta ecuación, tenemos que la velocidad angular de salida depende de los parámetros de entrada conocidos l_1 , l_3 , θ_1 y ω_1 así como de los parámetros de salida obtenidos en el análisis de posición, θ_2 y θ_3 . Esta velocidad angular de salida está dirigida a lo largo del eje z , y puede ser tanto negativa como positiva o cero. La magnitud de ω_3 está dada en (2.102)

$$|\omega_3| = \left| \frac{l_1 \omega_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_3 \sin(\theta_3 - \theta_2)} \right| \quad (2.102)$$

Las velocidades angulares de salida ω_2 y ω_3 se indeterminarán cuando los ángulos de salida θ_2 y θ_3 sean iguales o sean ambos iguales a cero, como indica el determinante principal Δ en el denominador de las expresiones (2.98) y (2.101). Este determinante principal se indica en (2.103).

$$\Delta = l_2 l_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) \quad (2.103)$$

La indeterminación o singularidad sucede en el mecanismo de cuatro barras conocido como paralelogramo articulado, cuando $\sin(\theta_3 - \theta_2) = 0$. Esto ocurre cuando los eslabones l_1 , l_2 , l_3 y l_4 del paralelogramo articulado se alinean. Cuando esto se presenta, no es posible determinar las velocidades angulares de salida. La restricción en este caso es $(\theta_2 \neq \theta_3 + n\pi)$. [23]

A continuación, en la figura 2.8 se muestra un esquema general con todas las variables involucradas en el análisis de velocidad angular y las relaciones de transmisión de los mecanismos de cuatro barras. El esquema muestra las relaciones que existen entre cada variable. Las relaciones de transmisión están expresadas en forma geométrica. De la figura 2.8 se puede notar que las entradas son las longitudes de los eslabones l_1 , l_2 , l_3 y l_4 , el ángulo de entrada θ_1 , los ángulos de salida θ_2 y θ_3 que ya fueron obtenidos en el análisis de posición angular, y la

velocidad angular de entrada ω_1 . Las salidas están dadas por las velocidades angulares ω_2 , ω_3 y por las relaciones de transmisión i_{21} , i_{31} .

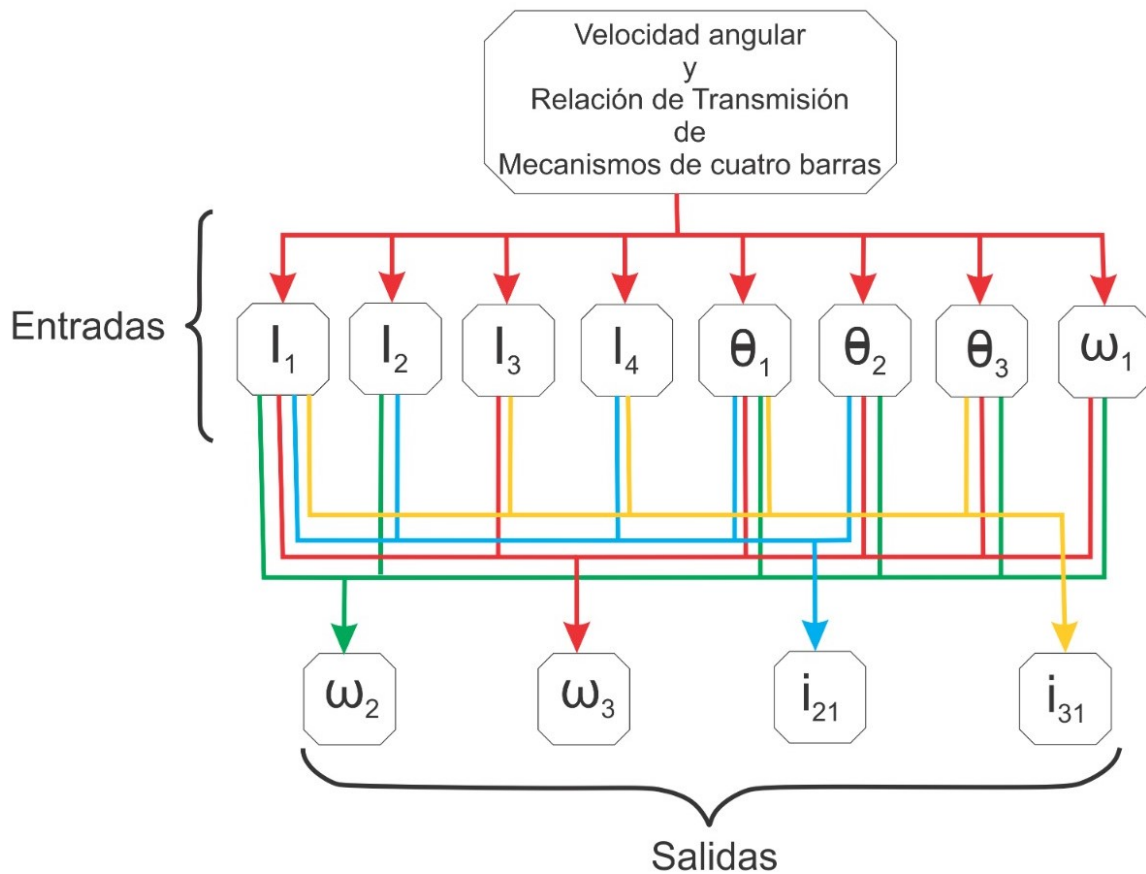


Figura 2.8: Esquema general de velocidades angulares y relación de transmisión

A continuación, se presentarán dos casos de estudio particular para corroborar el modelado matemático. Se analizará un mecanismo de cuatro barras clásico y un paralelogramo articulado. Se validarán a través de SolidWorks de Dassault Systems y de los resultados del artículo "Transmission ratio based analysis and robust design of mechanisms" de Gerald Rothenhofer, Conor Walsh y Alexander Slocum. [22]

2.10. Primer caso de estudio particular: Mecanismo de cuatro barras clásico.

Como primer caso de estudio particular, se estudiará un mecanismo de cuatro barras con longitudes diferentes, el mecanismo es de tipo virtual y es generado en el programa Solidworks de Dassault Systems. A través de este software también se generará los análisis de posición y velocidad angular. En la figura 2.9, se presenta el mecanismo diseñado en Solidworks, se muestra tanto su vista 2D como la 3D. En la figura 2.9, se indican todos sus parámetros geométricos.

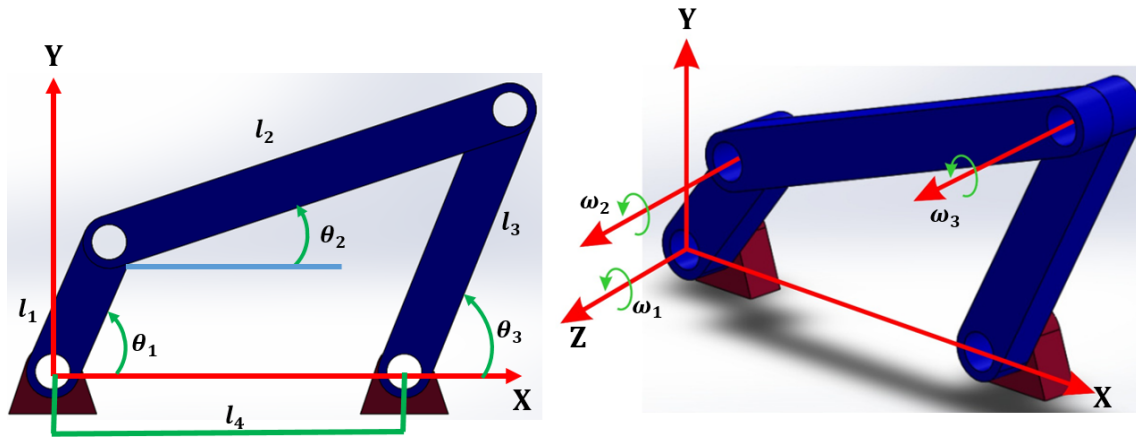


Figura 2.9: Mecanismo de cuatro barras con longitudes diferentes diseñado en Solidworks

Los parámetros de entrada para este caso particular se dan en el cuadro 2.1. Estos parámetros corresponden a las longitudes de los eslabones, al ángulo de entrada θ_1 y a la velocidad de entrada ω_1 . Las longitudes estarán dadas en milímetros, el ángulo de entrada θ_1 tendrá un recorrido completo de 360 grados. Así mismo, la velocidad angular de entrada correspondiente al eslabón l_1 tendrá un valor de 60 revoluciones por minuto, todos estos datos son ingresados tanto en software MATLAB como en Solidworks. El mecanismo de cuatro barras con longitudes diferentes analizado aquí es de dimensiones pequeñas puesto que, mientras mas pequeñas sean las longitudes de los eslabones, los errores tanto de posición como en la relación de transmisión son mayores. [22]

Parámetro	Valor numérico	Unidades
Longitud l_1	40	<i>mm</i>
Longitud l_2	120	<i>mm</i>
Longitud l_3	80	<i>mm</i>
Longitud l_4	100	<i>mm</i>
Ángulo de entrada θ_1	$0 - 2\pi$	<i>rad</i>
Velocidad angular ω_1	60	<i>rpm</i>

Cuadro 2.1: Parámetros de entrada para el mecanismo de cuatro barras con longitudes diferentes diseñado en Solidworks

El posicionamiento angular de los ángulos de salida θ_2 y θ_3 con sus respectivas configuraciones abierta y cerrada se presentan en las figuras 2.10 y 2.11. Las posiciones de salida describen trayectorias suaves, así como cíclicas y de tipo sinusoidal. En general, los mecanismos de cuatro barras con longitudes diferentes presentan este tipo de curvas. En la literatura clásica se aborda un enfoque más sencillo y de tipo gráfico debido al número de variables involucradas en el análisis de posición en los mecanismos de cuatro barras. Los ángulos de salida θ_2 y θ_3 están en función de la coordenada angular de entrada θ_1 . En la figura 2.10 se muestran las posiciones angulares de salida de θ_2 y θ_3 en configuración abierta. Las ecuaciones que describen

estas trayectorias están dadas en (2.18) y (2.24).

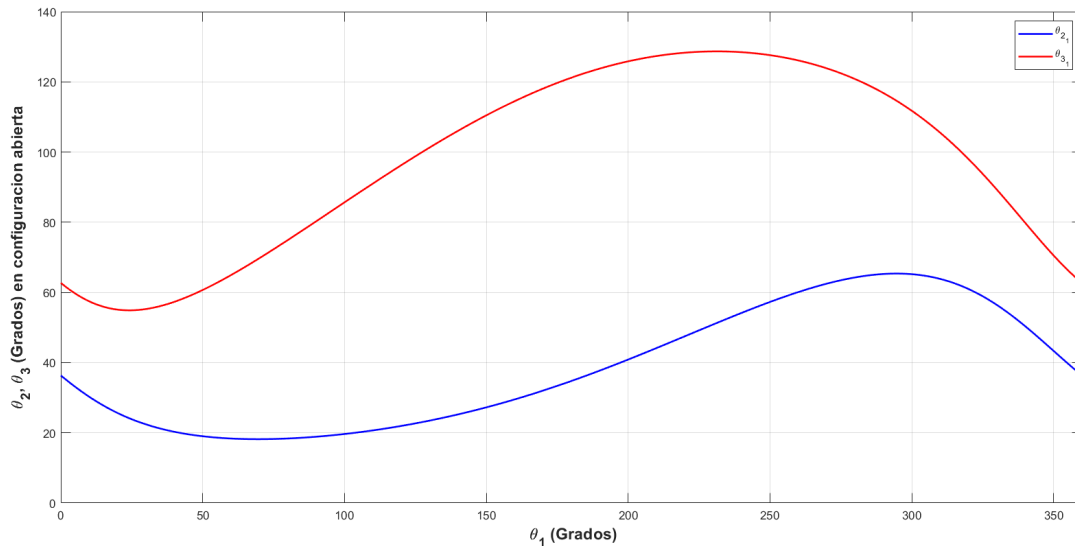


Figura 2.10: Posiciones Angulares de Salida θ_2 y θ_3 en configuración abierta.

En la figura 2.11 se muestran las posiciones angulares de salida de θ_2 y θ_3 en configuración cerrada. Las ecuaciones que describen estas trayectorias están dadas en (2.19) y (2.25).

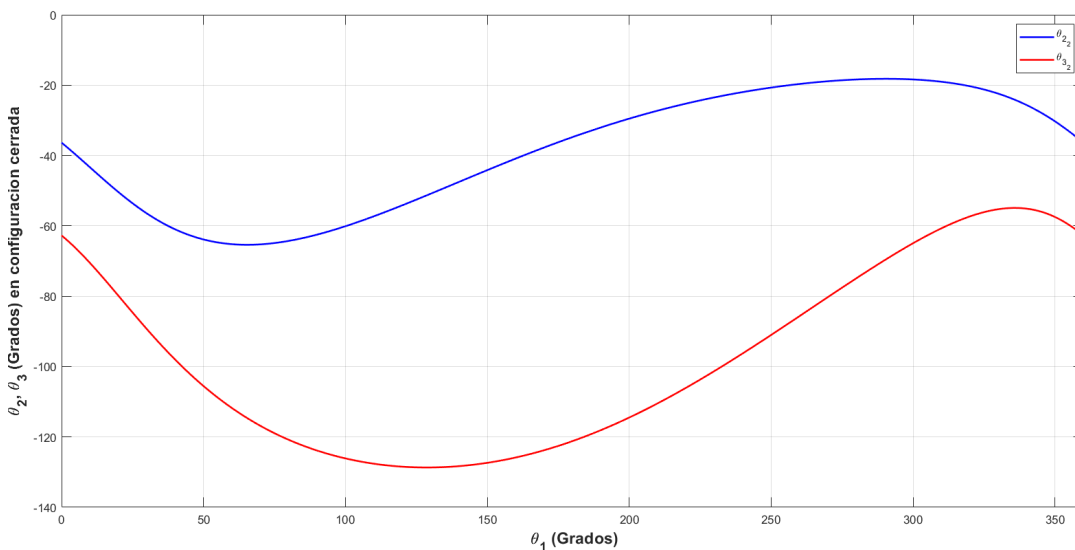


Figura 2.11: Posiciones Angulares de Salida θ_2 y θ_3 en configuración cerrada.

La figura 2.12 muestra las gráficas de los cinco coeficientes de influencia ε_{21} , ε_{22} , ε_{23} , ε_{24} , ε_{25} dados en la ecuación (2.37) en función de la coordenada angular de entrada θ_1 (grados). Estos coeficientes corresponden a las influencias de los errores dimensionales de fabricación de los parámetros geométricos l_1 , l_2 , l_3 , l_4 en el error de posicionamiento del eslabón de salida l_2 para un mecanismo de cuatro barras que tiene las dimensiones (mm) nominales dadas en el

cuadro 2.1. Los coeficientes ε_{21} , ε_{22} , ε_{23} , ε_{24} tienen unidades de $\frac{1}{mm}$, mientras que el coeficiente ε_{25} es de tipo adimensional y está asociado a la relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$. [22]

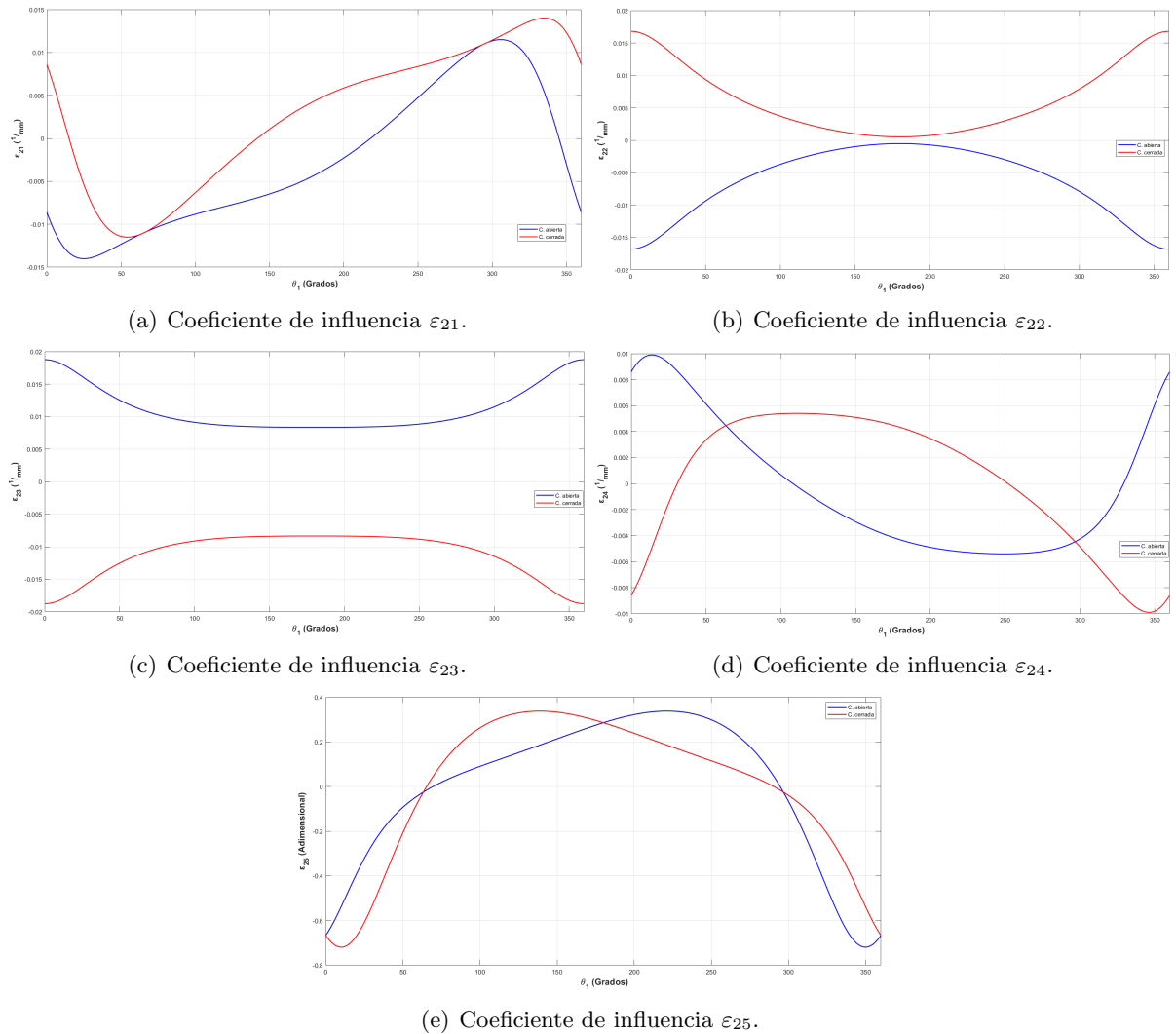


Figura 2.12: Coeficientes de influencia asociados al eslabón de salida l_2 en función de la coordenada angular de entrada θ_1 en configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).

Se puede notar que en algunos coeficientes de influencia se presenta cierta simetría entre sus configuraciones abierta y cerrada.

La figura 2.13 muestra las gráficas de los cinco coeficientes de influencia ε_{31} , ε_{32} , ε_{33} , ε_{34} , ε_{35} dados en la ecuación (2.37) en función de la coordenada angular de entrada θ_1 (grados). Estos coeficientes corresponden a las influencias de los errores dimensionales de fabricación de los parámetros geométricos l_1 , l_2 , l_3 , l_4 en el error de posicionamiento del eslabón de salida l_3 para un mecanismo de cuatro barras que tiene las dimensiones (mm) nominales dadas en el cuadro 2.1. Los coeficientes ε_{31} , ε_{32} , ε_{33} , ε_{34} tienen unidades de $\frac{1}{mm}$, mientras que el coeficiente

2.10. PRIMER CASO DE ESTUDIO PARTICULAR: MECANISMO DE CUATRO BARRAS CLÁSICO.41

ε_{35} es de tipo adimensional y está asociado a la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$.

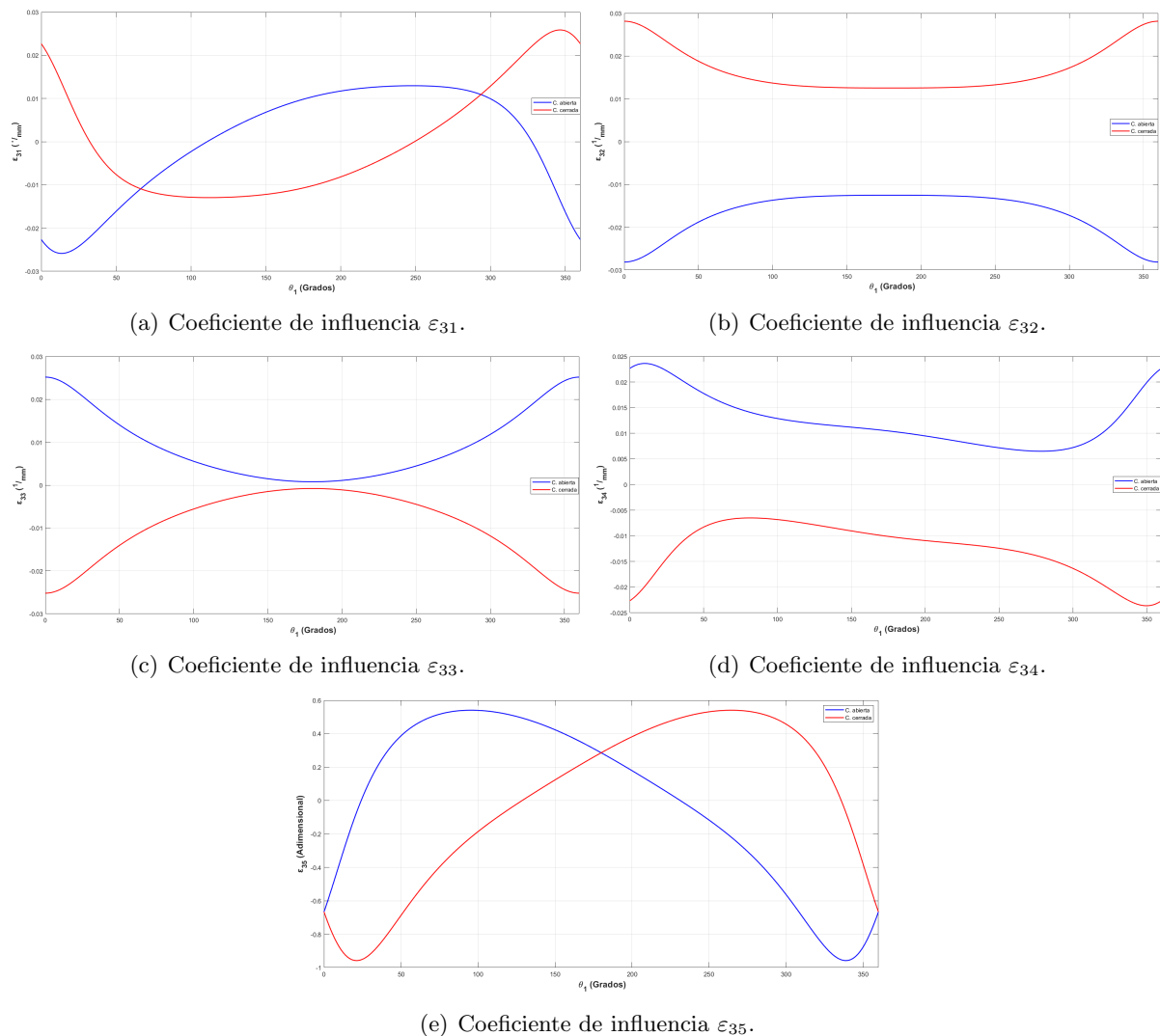


Figura 2.13: Coeficientes de influencia asociados al eslabón de salida l_3 en función de la coordenada angular de entrada θ_1 en configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).

Para los errores totales de posicionamiento en los eslabones de salida, las tolerancias dimensionales serán extraídas de la Norma ISO 286. En las tablas dadas en la norma ISO 286 vienen los diferentes tipos de calidades IT de acuerdo al tamaño nominal de las dimensiones l_1 , l_2 , l_3 , l_4 . Para las dimensiones que ocuparemos en este caso de estudio particular se utilizarán las calidades IT01, IT6, IT9, IT12 e IT16. La calidad IT01 es una calidad de ultra precisión, la calidad IT6 es una calidad de precisión, la calidad IT9 es una calidad estándar que se puede dar en los talleres con facilidad, y las calidades IT12 e IT16 son de baja precisión. En el cuadro 2.2 se presentan las tolerancias admitidas correspondientes a las calidades ya mencionadas. Para este caso de estudio particular asumiremos $\delta\theta_1$ como cero (ver Apéndice A).

Parámetro	IT01	IT6	IT9	IT12	IT16	UNIDADES
δl_1	0.0006	0.016	0.062	0.25	1.6	mm
δl_2	0.001	0.022	0.087	0.35	2.2	mm
δl_3	0.0008	0.019	0.074	0.30	1.9	mm
δl_4	0.001	0.022	0.087	0.35	2.2	mm

Cuadro 2.2: Tolerancias para las longitudes l_1, l_2, l_3, l_4 (tomado de la Norma ISO 286).

En la figura 2.14 se muestran los errores $\delta\theta_2$ asociados al eslabón l_2 con diferentes grados de precisión IT.

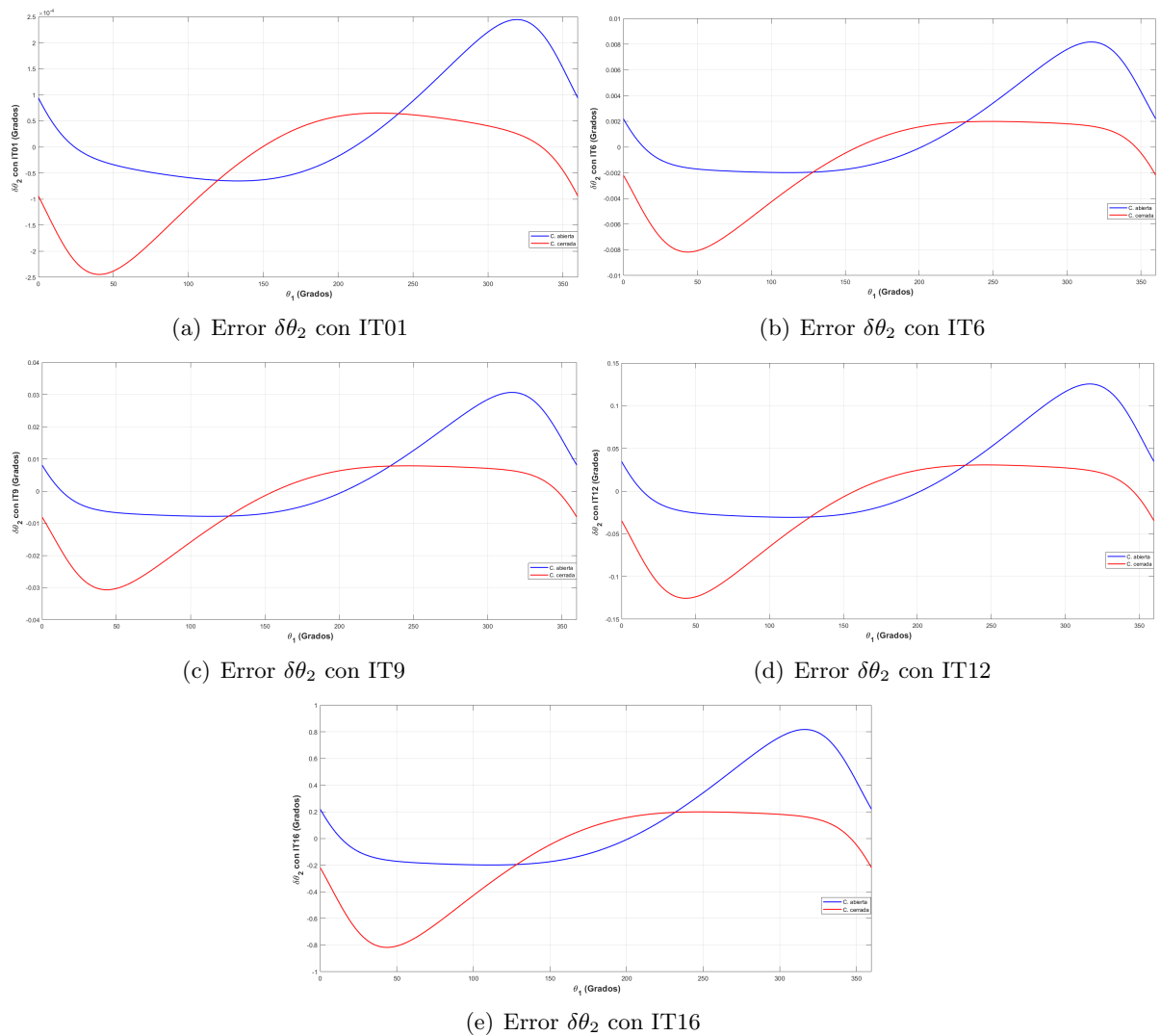


Figura 2.14: Errores $\delta\theta_2$ asociados al eslabón l_2 con diferentes grados de precisión IT. Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).

Se puede notar que dependiendo de la configuración existirá una zona en la que el error es máximo. En la figura 2.15 tenemos los errores $\delta\theta_3$ asociados al eslabón l_3 con diferentes grados de precisión IT. Se nota que mientras mayor es el grado de tolerancia IT mayor es el error. [22]

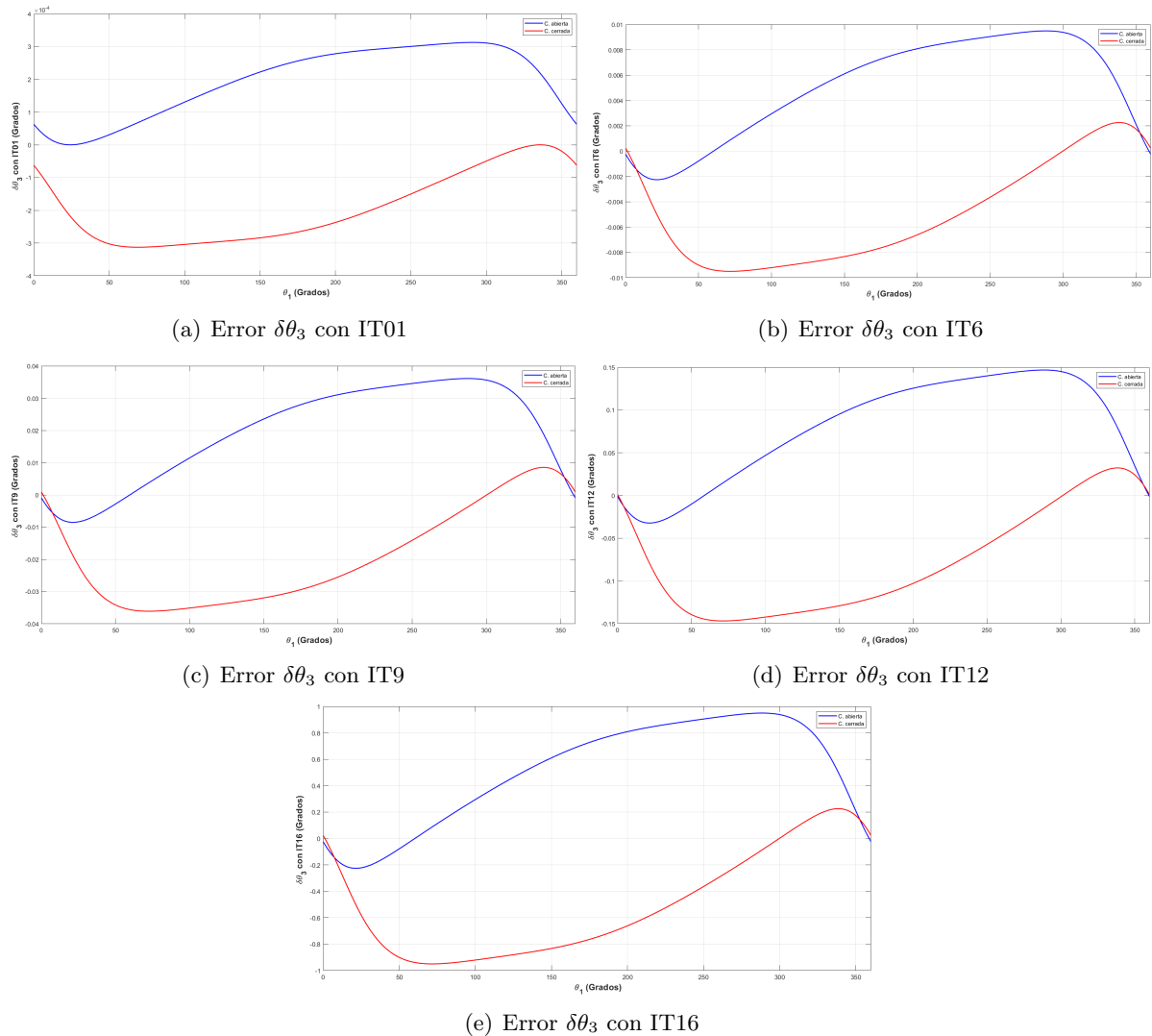


Figura 2.15: Errores $\delta\theta_3$ asociados al eslabón l_3 con diferentes grados de precisión IT. Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).

Las figuras 2.14 y 2.15 son las curvas de errores de salida de los eslabones l_2 y l_3 respectivamente. Las curvas que proporcionan los errores más grandes corresponden al grado de tolerancia IT16. Las curvas que proporcionan los errores más pequeños corresponden al grado de tolerancia IT01. Se puede notar que existe cierta simetría en las curvas de error, entre su configuración abierta y cerrada.

A continuación, en la figura 2.16 tenemos a la relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ dada en la ecuación

ción (2.56), que relaciona la velocidad angular del elemento de entrada asociado al eslabón l_1 con la velocidad angular del elemento de salida asociado al eslabón l_2 . La relación de transmisión entre estos elementos puede verse como una ganancia de velocidades angulares. Se denotan las relaciones de transmisión para la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo). Podemos notar que existe simetría en la respuesta entre ambas configuraciones. [23]

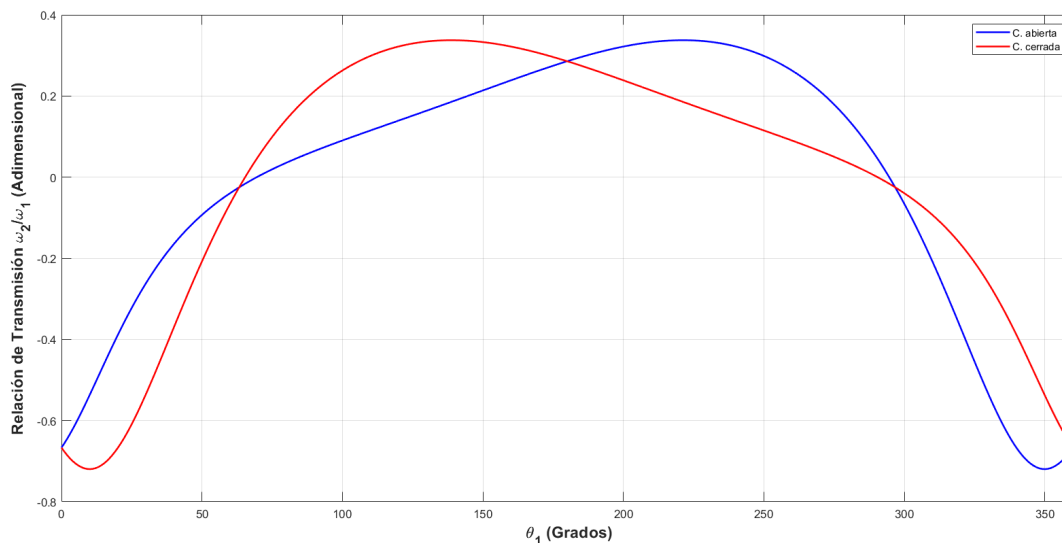


Figura 2.16: Relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ para la configuración abierta (Azul) y la configuración cerrada (Rojo), se presenta simetría entre ambas configuraciones

En la figura 2.16 se puede observar que la relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ es de tipo adimensional y corresponde al mismo gráfico que el del coeficiente ε_{25} dado en la figura 2.12 (e). Esta ganancia de velocidades angulares podría ser obtenida mediante medición directa. Sin embargo, a través del coeficiente de influencia ε_{25} podemos obtenerlo de una manera más sencilla puesto que este coeficiente depende de pocos parámetros, ya que solo depende de las longitudes de los eslabones y del posicionamiento angular de entrada y de salida. En general, las ganancias de velocidad angular serán pequeñas en mecanismos de cuatro barras.

La figura 2.17, muestra la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ dada en la ecuación (2.51), que relaciona la velocidad angular del elemento de entrada asociado al eslabón l_1 con la velocidad angular del elemento de salida asociado al eslabón l_3 . La relación de transmisión entre estos elementos puede verse como una ganancia de velocidades angulares. Se denotan las relaciones de transmisión para la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo). Se observa que existe simetría entre ambas configuraciones. En general, la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ siempre será mayor a $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ en mecanismos de cuatro barras que cumplen la ley de Grashof. [26]

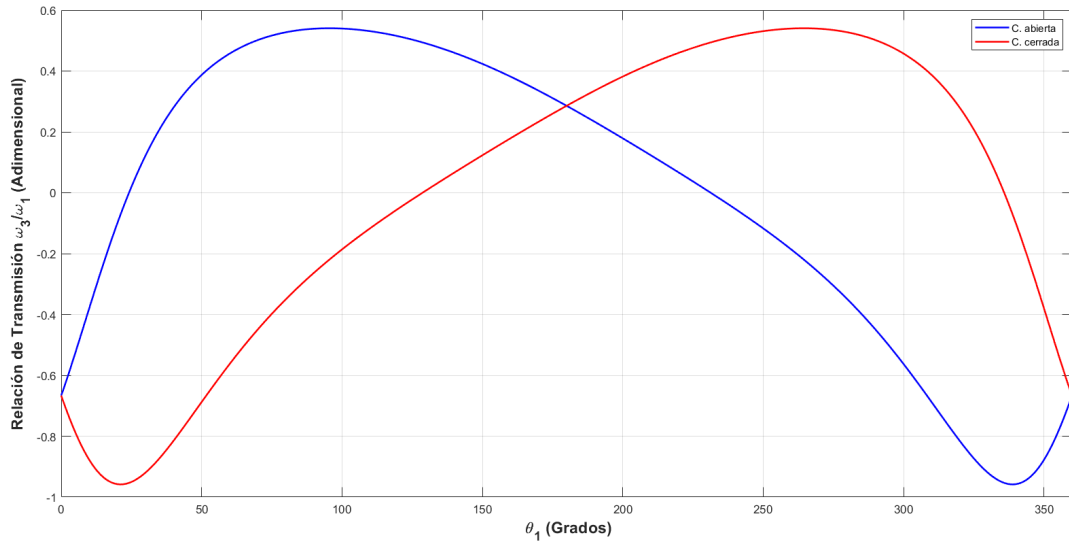


Figura 2.17: Relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ para la configuración abierta (Azul) y la configuración cerrada (Rojo), se presenta simetría entre ambas configuraciones.

En la figura 2.17, se puede observar que la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ es de tipo adimensional y corresponde al mismo gráfico que el del coeficiente ε_{35} dado en la figura 2.13 (e). Esta ganancia de velocidades angulares puede ser obtenida mediante medición directa en los eslabones. Sin embargo, a través del coeficiente de influencia ε_{35} podemos obtener la relación de transmisión de una manera mucho más práctica, puesto que este coeficiente depende de parámetros ya conocidos y fáciles de obtener. Este coeficiente es función solo de las longitudes de los eslabones y del posicionamiento angular de entrada y de salida. La relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ es mayor a $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ en este caso de estudio particular.

En general, las relaciones de transmisión o ganancias de velocidad angular son sensibles a los errores de fabricación y posición. A continuación, se graficarán los diferentes errores totales en las relaciones de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ y $\frac{\omega_3}{\omega_1}$. Se mostrarán los diferentes errores $\delta i_{21TOTAL}$ con diferentes grados de precisión IT y sus respectivos coeficientes λ_{l_i} , λ_{θ_1} . Así mismo, se mostrarán, los diferentes errores $\delta i_{31TOTAL}$ con diferentes grados de precisión IT y sus respectivos coeficientes γ_{l_i} , γ_{θ_1} . Los errores en las relaciones de transmisión son variables ya que los coeficiente también lo son, cada coeficiente tiene una magnitud y un signo diferente. Los errores $\delta i_{21TOTAL}$, dependerán de los coeficientes λ_{l_i} y λ_{θ_1} y de las tolerancias dimensionales de los parámetros geométricos obtenidos de la norma ISO 286. Los errores $\delta i_{31TOTAL}$, dependerán a su vez de los coeficientes γ_{l_i} y γ_{θ_1} y de las tolerancias dimensionales de los parámetros geométricos también obtenidos de la norma ISO 286. Como en el caso de los errores de posicionamiento angular, se utilizarán las calidades IT01, IT6, IT9, IT12 e IT16. En el cuadro 2.2 ya se presentaron los errores admitidos para las respectivas calidades. Seguiremos asumiendo a $\delta\theta_1$ como cero. [27] [28] [29]

A continuación, en la figura 2.18 se muestran los coeficientes λ_{l_1} , λ_{l_2} , λ_{l_3} , λ_{l_4} y λ_{θ_1} dados en las ecuaciones (2.76) a (2.80). Estos coeficientes están involucrados en el error total en la

relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$. Los coeficientes λ_{l_1} , λ_{l_2} , λ_{l_3} , λ_{l_4} tienen unidades de $\frac{1}{mm}$, mientras que el coeficiente λ_{θ_1} es de tipo adimensional. [30]

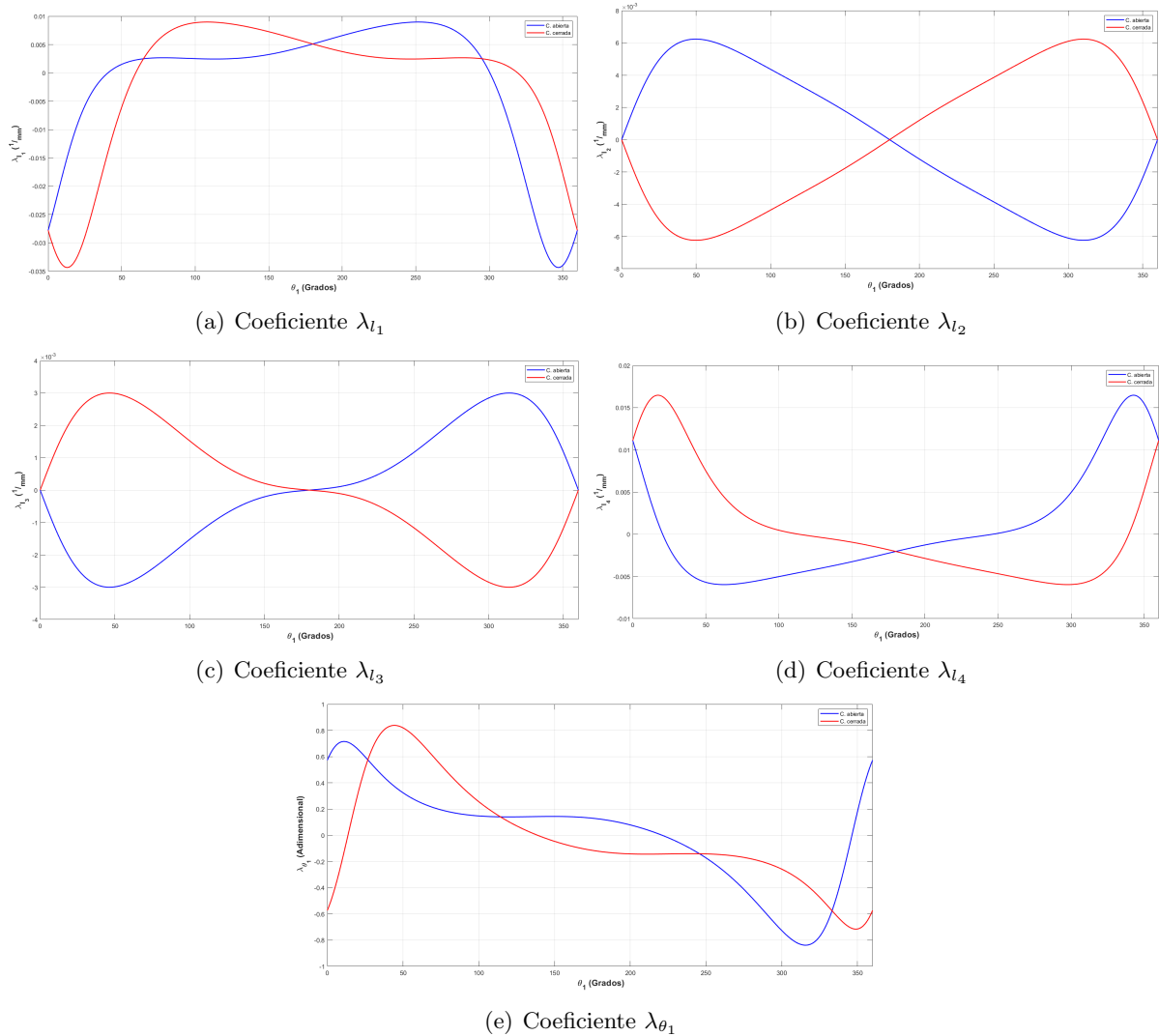


Figura 2.18: Coeficientes λ_{l_1} , λ_{l_2} , λ_{l_3} , λ_{l_4} y λ_{θ_1} . Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).

Se nota que en los coeficientes λ_{l_1} , λ_{l_2} , λ_{l_3} y λ_{l_4} se presenta simetría entre la configuración abierta (Azul) y la configuración cerrada (Rojo), mientras que el coeficiente λ_{θ_1} no presenta esta simetría, estos coeficientes nos muestran las sensibilidades de la relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ a los errores en las longitudes de los eslabones y al error en el posicionamiento angular de entrada. Los coeficientes son variables con la posición de la coordenada angular de entrada. En general, mientras más pequeño sea el mecanismo de cuatro barras con longitudes diferentes, mayor serán estos coeficientes. [22]

Posteriormente, en la figura 2.19 se muestra al error total $\delta i_{21TOTAL}$ en la relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ con diferentes grados de calidad IT, se puede notar que mientras mayor es el grado IT mayor es el error en la relación de transmisión. [30]

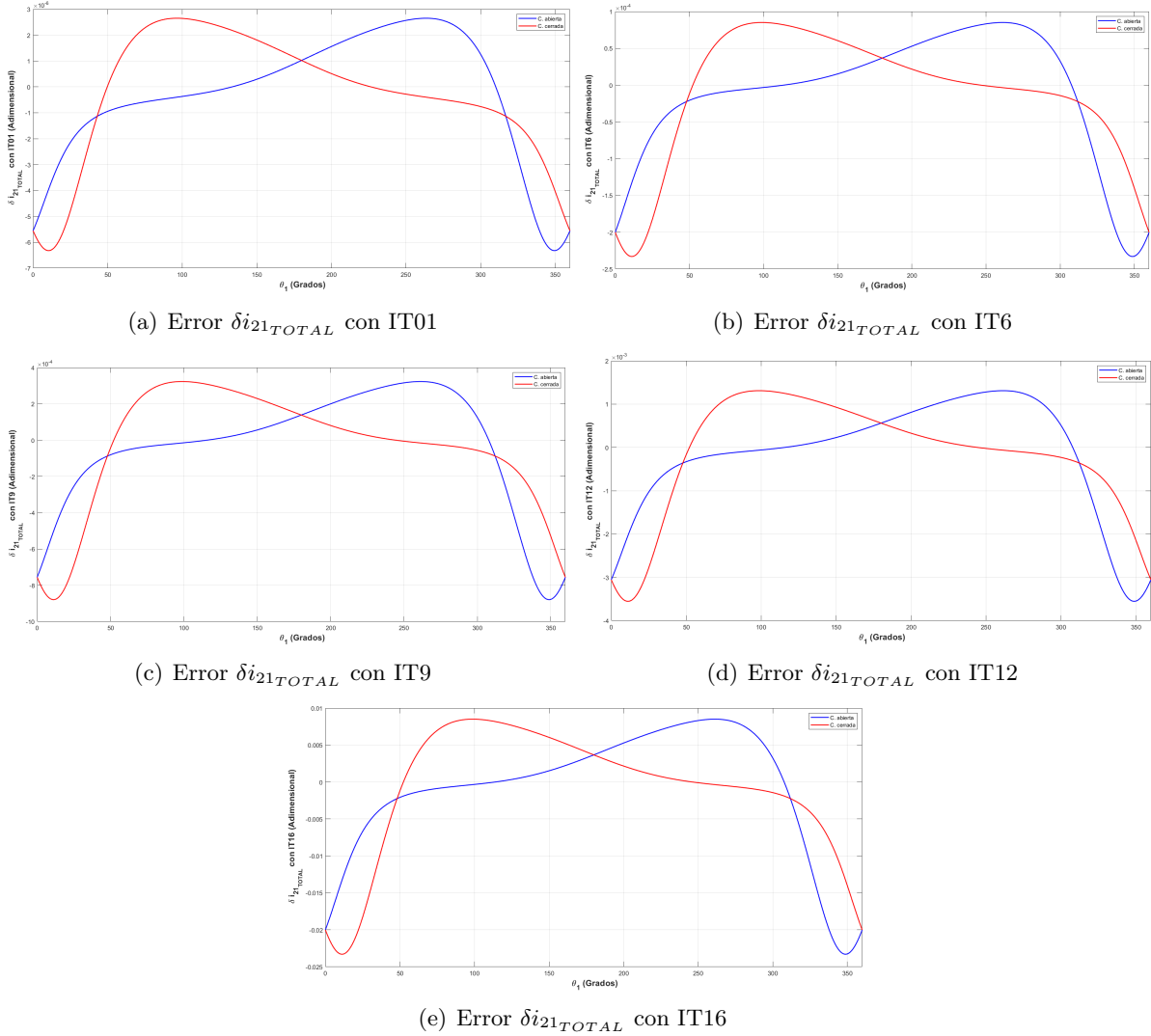


Figura 2.19: Error $\delta i_{21TOTAL}$ con diferentes grados de calidad IT, mientras mayor es el grado IT mayor es el error. Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).

El error total $\delta i_{21TOTAL}$ presenta simetría entre sus configuraciones abierta y cerrada ya que la relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ también presenta simetría entre sus configuraciones, la simetría en el error $\delta i_{21TOTAL}$ se mantiene mientras no exista ninguna desviación o error en la coordenada angular de entrada θ_1 .

A continuación, en la figura 2.20 se muestran los coeficientes γ_{l_1} , γ_{l_2} , γ_{l_3} , γ_{l_4} y γ_{θ_1} dados en las ecuaciones (2.64) a (2.68). Estos coeficientes están involucrados en el error total en la

relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$. Los coeficientes γ_{l_1} , γ_{l_2} , γ_{l_3} , γ_{l_4} tienen unidades de $\frac{1}{mm}$, mientras que el coeficiente γ_{θ_1} es de tipo adimensional y tiene la mayor magnitud de todos los coeficientes por varios ordenes de magnitud.

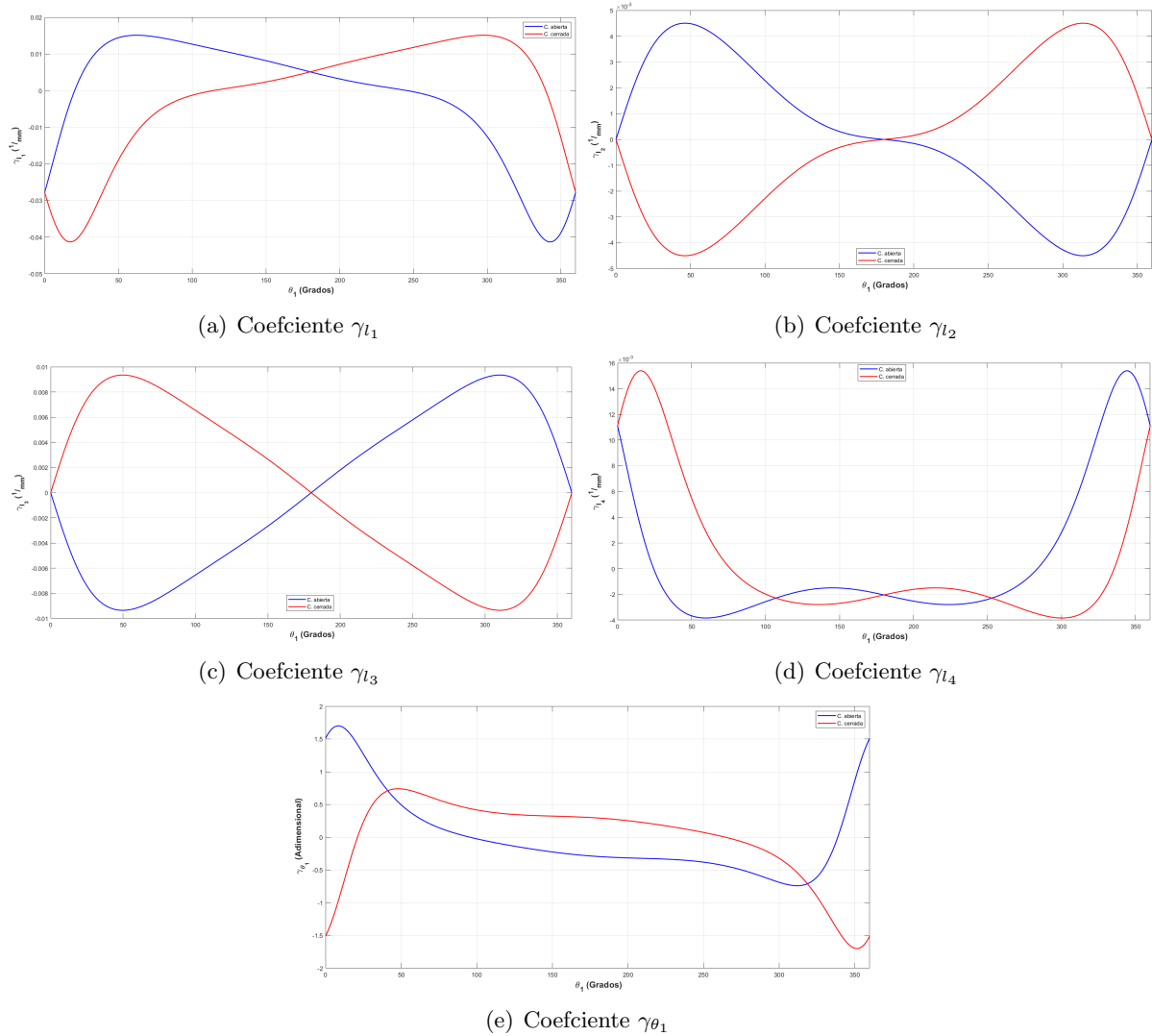


Figura 2.20: Coeficientes γ_{l_1} , γ_{l_2} , γ_{l_3} , γ_{l_4} y γ_{θ_1} . Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).

Se nota que en los coeficientes γ_{l_1} , γ_{l_2} , γ_{l_3} y γ_{l_4} se presenta simetría entre la configuración abierta (Azul) y la configuración cerrada (Rojo), mientras que el coeficiente γ_{θ_1} no presenta esta simetría. Estos coeficientes nos muestran la sensibilidad de la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ a los errores en las longitudes de los eslabones y al error en la coordenada angular de entrada. Los coeficientes son variables con la posición de la coordenada angular de entrada. En general, mientras más pequeño sea el mecanismo de cuatro barras con longitudes diferentes, mayor serán estos coeficientes. [22]

Posteriormente, en la figura 2.21 se muestra al error total $\delta i_{31TOTAL}$ en la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ con diferentes grados de calidad IT. Se puede notar que mientras mayor es el grado IT mayor es el error en la relación de transmisión.

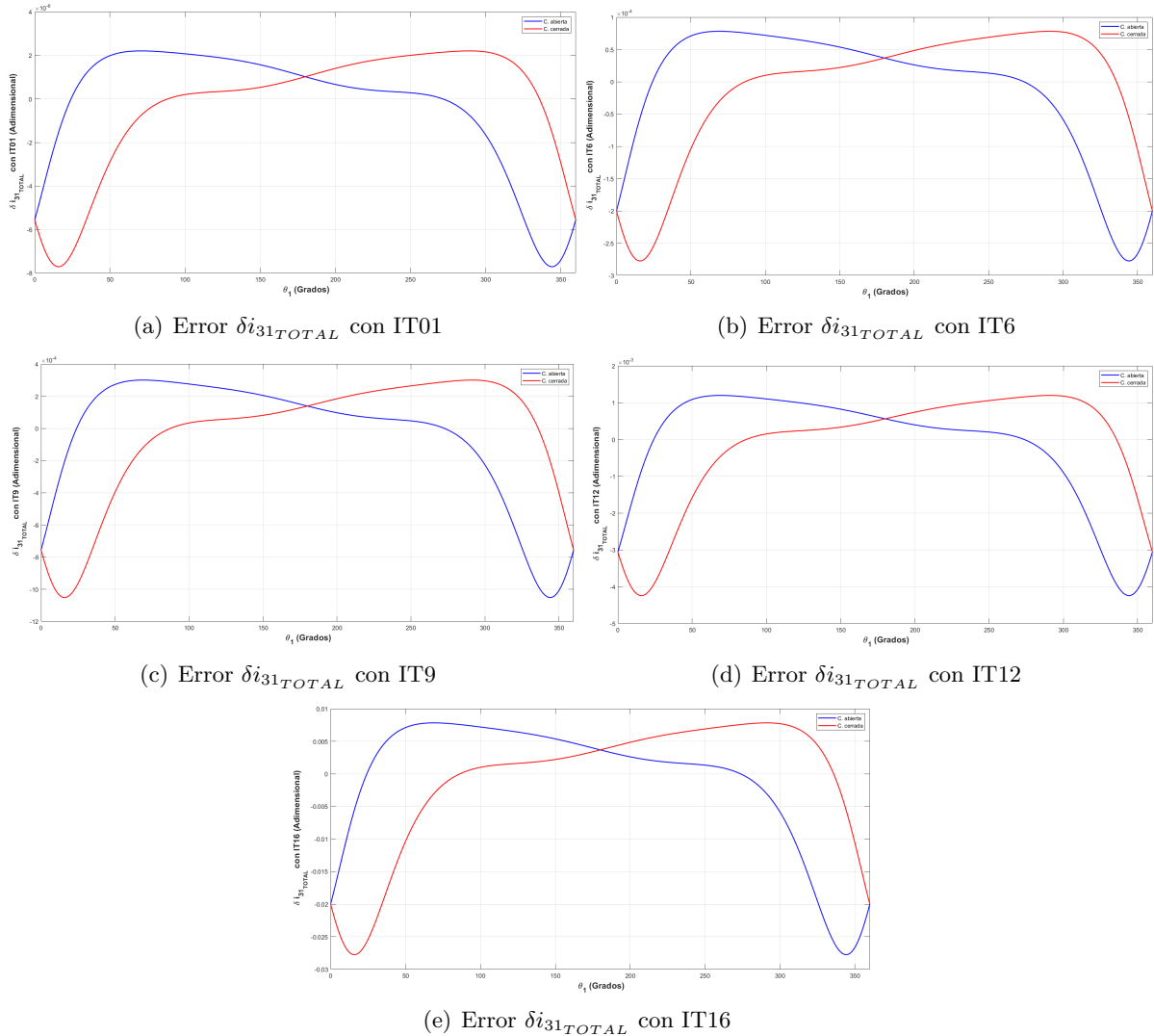
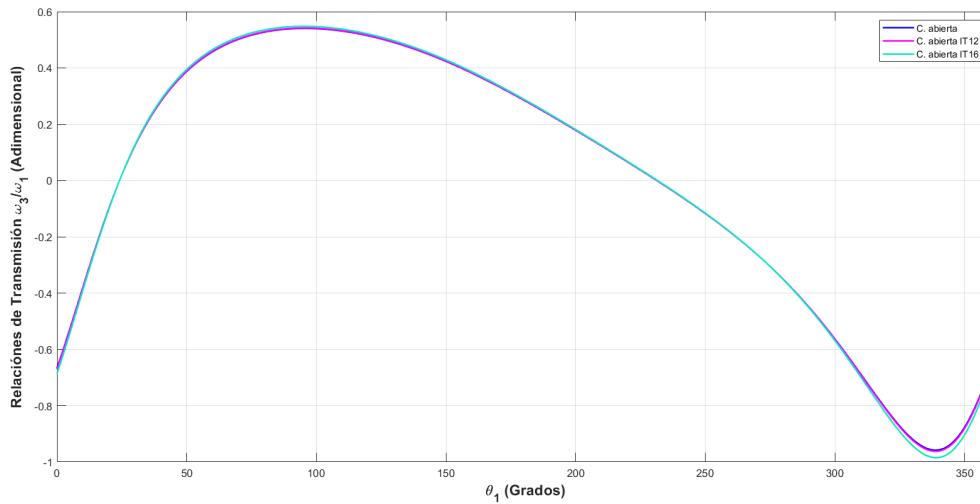


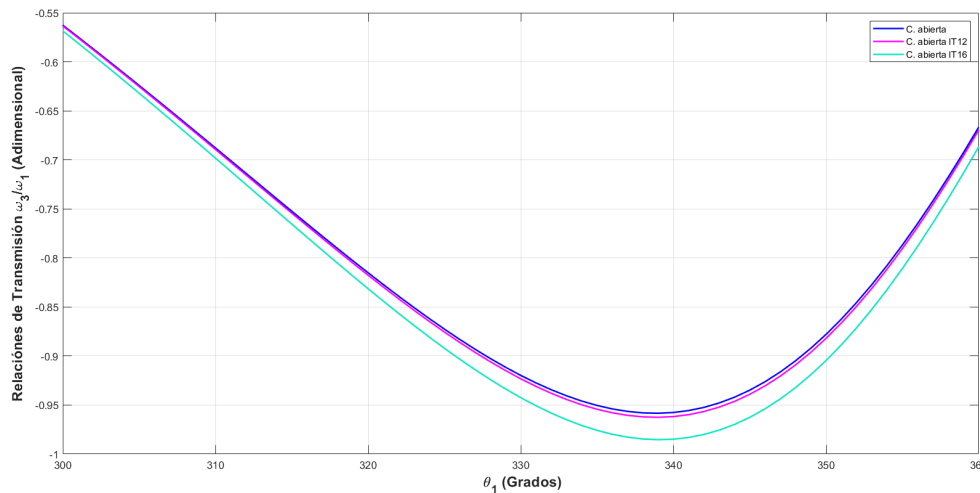
Figura 2.21: Error $\delta i_{31TOTAL}$ con diferentes grados de calidad IT, mientras mayor es el grado IT mayor es el error. Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).

El error total $\delta i_{31TOTAL}$ presenta simetría entre sus configuraciones abierta y cerrada ya que la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ también presenta simetría entre sus configuraciones. La simetría en el error $\delta i_{31TOTAL}$ se mantendrá mientras no exista ninguna desviación u holgura en la coordenada angular de entrada θ_1 . Para este caso de estudio particular las configuraciones se intersectan cuando la coordenada angular de entrada está posicionada en $0, \pi$ o 2π [23]. En general, mientras mayor sea el grado de tolerancia IT más afectará a la relación de transmisión

[30]. En los procesos de manufactura y fabricación siempre se generan errores al fabricar diversos elementos. Para el caso concreto de los mecanismos de cuatro barras, éstos se generan al momento de fabricar los eslabones. Estos errores son de tipo longitudinal. Durante el montaje del mecanismo también se pueden encontrar errores errores posicionales de los apoyos en el bastidor. Además, si el eslabón de entrada no se posiciona dentro del error angular permitido, habrá un error en la relación de transmisión. Para este caso de estudio se analizará la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ ideal sin errores y dos relaciones de transmisión reales sujetas a errores como los describen las ecuaciones (2.82) y (2.83) siendo las calidades IT12 e IT16 las que más afectan a la relación de transmisión. En la figura 2.22 se muestran estas tres diferentes relaciones de transmisión en configuración abierta. [22] [23] [24]



(a) Diferentes relaciones de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ para el primer caso de estudio particular



(b) Diferentes relaciones de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ (Ampliación) para el primer caso de estudio particular

Figura 2.22: Diferentes relaciones de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ en configuración abierta

Se puede notar en la figura 2.22 (b) que la mayor incidencia se da cuando la coordenada angular de entrada θ_1 está posicionada entre 300 y 360 grados. Así mismo, se observa que la relación de transmisión con calidad IT12 causa un error perceptible mientras que la relación de transmisión con calidad IT16 causa la mayor desviación en la relación de transmisión

A continuación, en la figura 2.23 se presenta la cota de error máxima en la relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$. El error $\epsilon_{21TOTAL}$ se consigue al tomar el valor absoluto de la multiplicación de los coeficientes λ_{l_1} , λ_{l_2} , λ_{l_3} , λ_{l_4} y λ_{θ_1} por las respectivas tolerancias dimensionales δl_1 , δl_2 , δl_3 , δl_4 , $\delta \theta_1$ para posteriormente sumarlos. La ecuación (2.84) describe estas curvas.

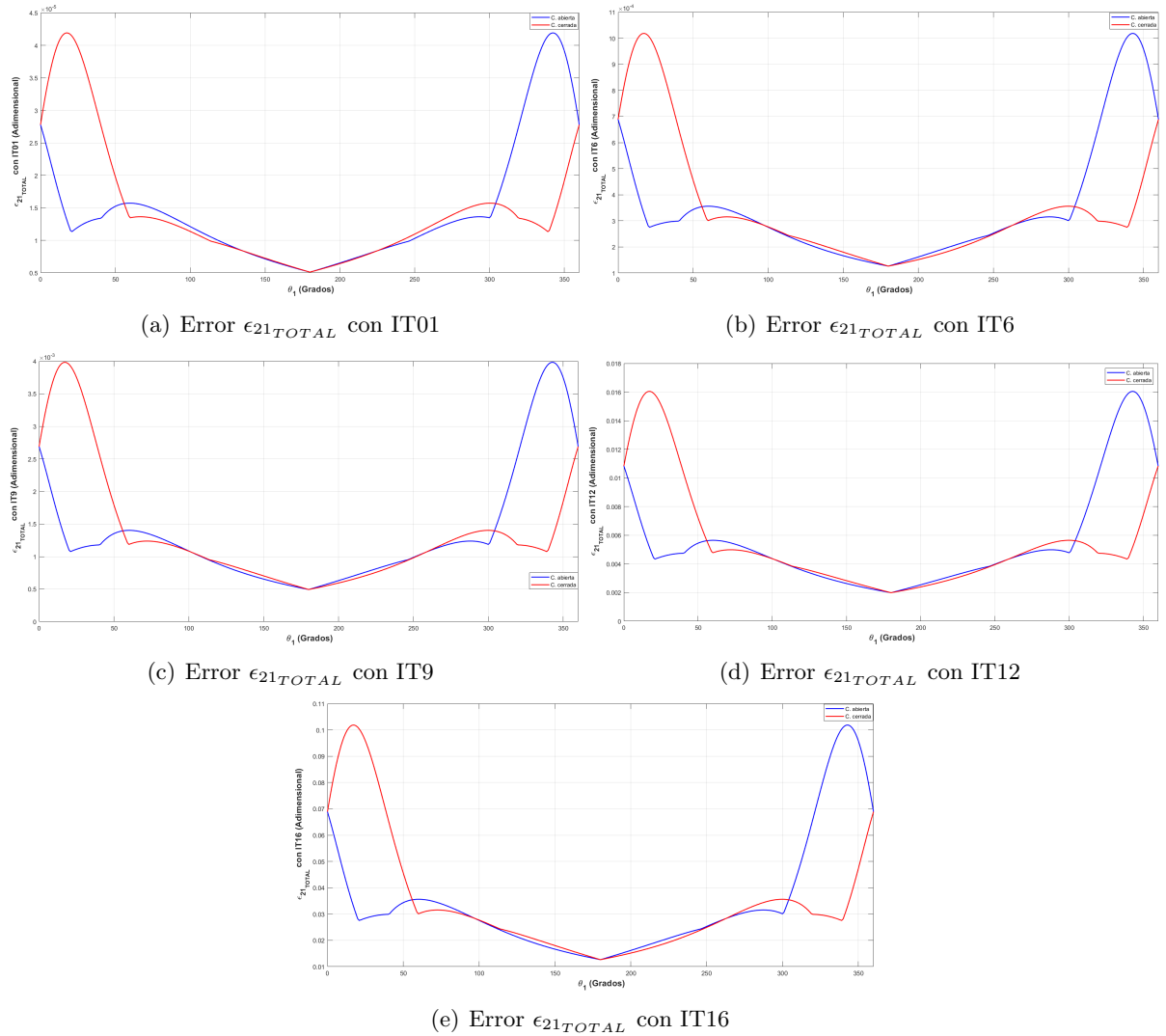


Figura 2.23: Error $\epsilon_{21TOTAL}$ con diferentes grados de calidad IT, mientras mayor es el grado IT mayor es el error. Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo) para el primer caso de estudio.

Se puede notar en la figura 2.23 que mientras mayor es el grado IT mayor es la cota máxima de error. El error $\epsilon_{21TOTAL}$ presenta simetría entre sus configuraciones abierta y cerrada. Para

este caso de estudio particular las configuraciones se intersectan cuando la coordenada angular de entrada esta posicionada en $0, \pi$ o 2π . El error $\epsilon_{21TOTAL}$ es variable y completamente positivo.

A continuación, en la figura 2.24 se presenta la cota de error máxima en la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$. El error $\epsilon_{31TOTAL}$ se obtiene al tomar el valor absoluto de la multiplicación de los coeficientes $\gamma_{l_1}, \gamma_{l_2}, \gamma_{l_3}, \gamma_{l_4}$ y γ_{θ_1} por las respectivas tolerancias dimensionales $\delta l_1, \delta l_2, \delta l_3, \delta l_4, \delta \theta_1$ para posteriormente sumarlas. Estas curvas se consiguen a través de la ecuación (2.85).

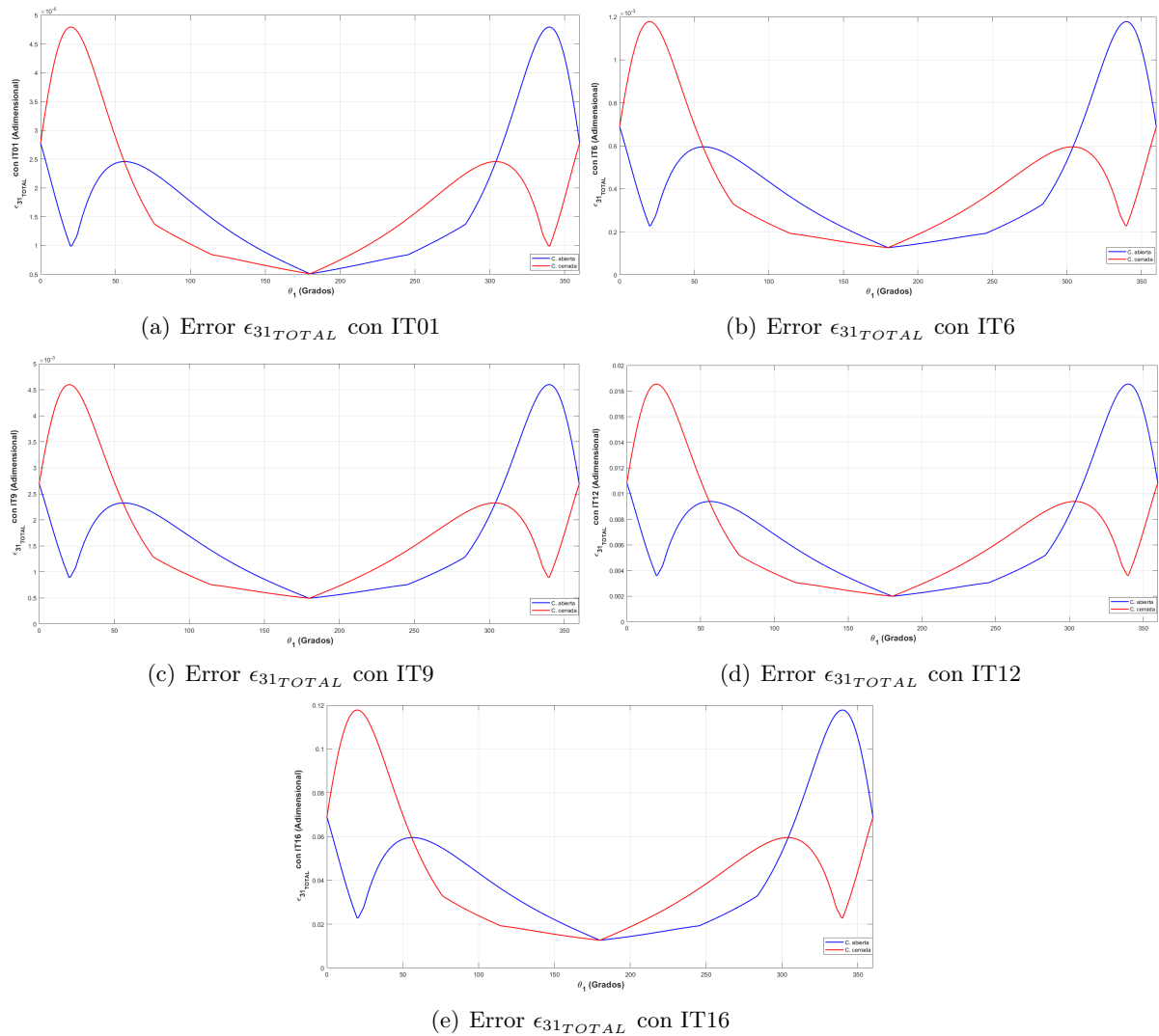


Figura 2.24: Error $\epsilon_{31TOTAL}$ con diferentes grados de calidad IT, mientras mayor es el grado IT mayor es el error. Se presenta la configuracion abierta (Azul) y cerrada (Rojo) para el primer caso de estudio.

Se puede notar en la figura 2.24 que mientras mayor es el grado IT mayor es la cota maxima de error en la relación de transmisión. El error $\epsilon_{31TOTAL}$ presenta simetría entre sus configuraciones abierta y cerrada. Para este caso de estudio particular las configuraciones se intersectan cuando la coordenada angular de entrada está posicionada en $0, \pi$ o 2π . El error $\epsilon_{31TOTAL}$ es

variable y completamente positivo. En la práctica, no se alcanzan los valores de $\epsilon_{21_{TOTAL}}$ y $\epsilon_{31_{TOTAL}}$ ya que los coeficientes λ_{l_1} , λ_{l_2} , λ_{l_3} , λ_{l_4} , λ_{θ_1} , γ_{l_1} , γ_{l_2} , γ_{l_3} , γ_{l_4} y γ_{θ_1} son de signo y magnitud variable. Sin embargo, las cotas máximas de error pueden ser un referente en cuanto al máximo error posible alcanzado en las relaciones de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ y $\frac{\omega_3}{\omega_1}$. Si por alguna razón, se alcanzan estos valores, se deberá dar una revisión de las tolerancias dimensionales IT de los parámetros geométricos, pues podrían haber sido asignados incorrectamente.

Posteriormente, se presentan las gráficas de posición y velocidad angular. Estas gráficas son obtenidas a través del modelo virtual del mecanismos de cuatro barras con longitudes diferentes realizado en Solidworks y hecho con el complemento "Solidworks Motion" y la herramienta "Análisis de Movimiento". Estas herramientas, nos generan vectores de datos que son enviados al programa Microsoft Excel que posteriormente son leídos por el software MATLAB que realiza el tratamiento de estos vectores de datos. Los vectores de datos de posición y velocidad angular son leídos a través de MATLAB y comparados con el modelado matemático para validar que los resultados coinciden con la respuesta del modelo virtual. El mecanismo virtual es construido con los parámetros dados en el cuadro 2.1 e introducidas en el software MATLAB. Al comparar los resultados, se puede notar que el modelo matemático y la respuesta dada por Solidworks coinciden. Esto nos conduce a validar a través de dos distintas plataformas, como lo son MATLAB y Solidworks, los modelos de posición y velocidad angular generados. En la figura 2.25 se presenta un esquema general entre estos dos programas. El mecanismo de cuatro barras virtual debe ser construido con los parámetros longitudinales correctos. Así mismo, la coordenada angular de entrada θ_1 y la velocidad angular de entrada ω_1 deben tener los valores establecidos en el cuadro 2.1 ya que de no ser así, conduciría a resultados erróneos e interpretaciones erradas. Así mismo, es importante hacer un análisis dimensional para no confundirse en las unidades.

Esquema General de MATLAB y Solidworks

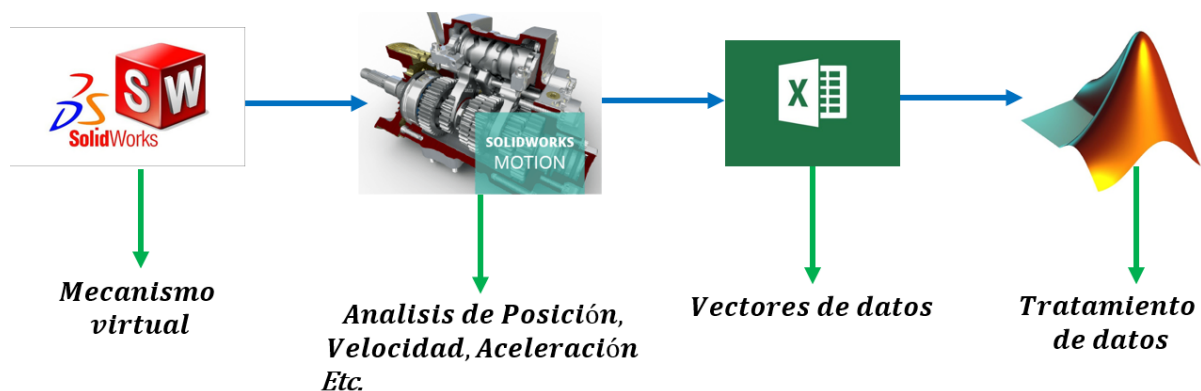
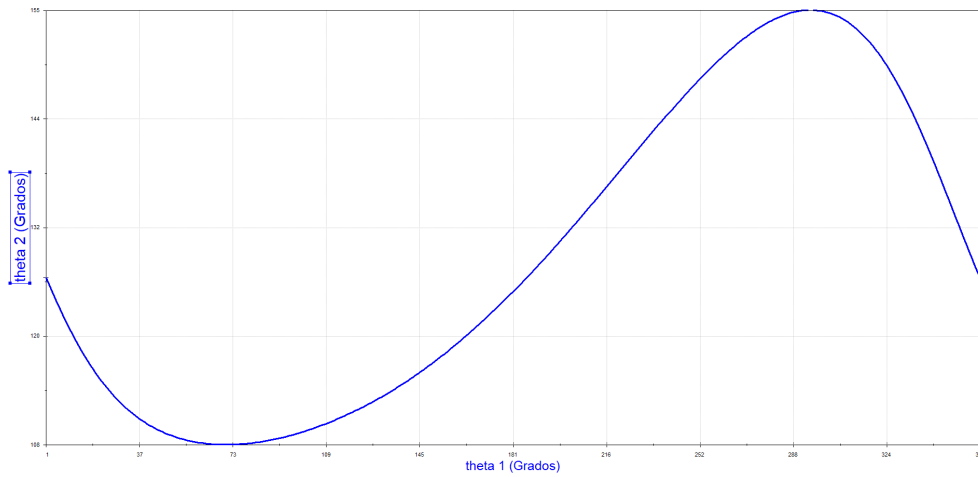


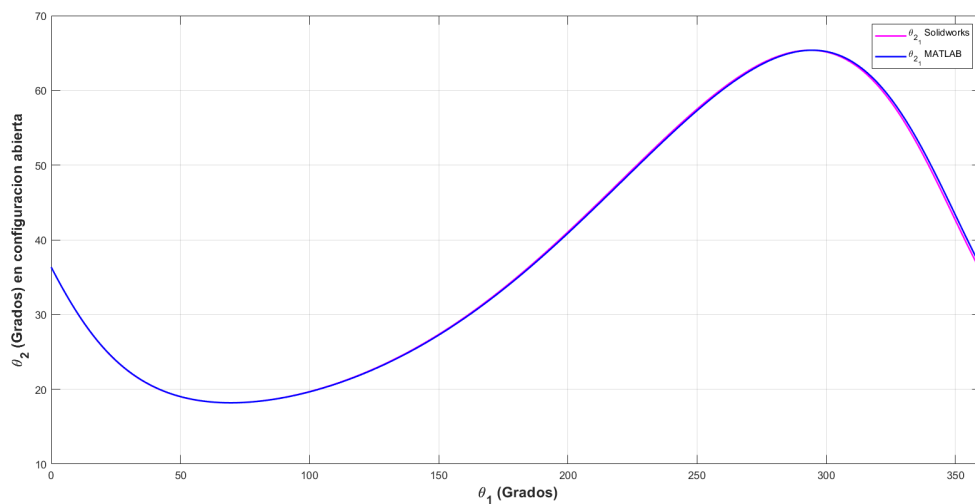
Figura 2.25: Esquema general de MATLAB y Solidworks

A continuación, en la figura 2.26 se presenta la posición angular de salida θ_2 en configuración abierta, obtenida a través del mecanismo de cuatro barras virtual construido en Solidworks y

generada a través de MATLAB. En la figura 2.26 (a) se presenta el gráfico generado por Solidworks y en la figura 2.26 (b) se presenta el gráfico comparativo. La ecuación que describe la posición angular de salida θ_2 esta dada en la ecuación (2.24). Se puede notar que está posición angular esta en función de la coordenada angular de entrada θ_1 . La trayectoria de θ_2 es de tipo sinusoidal, cíclica y suave. Esto es característico de un mecanismo que cumple la ley de Grashof.



(a) Posición angular de salida θ_2 del mecanismo de cuatro barras en configuración abierta obtenida en Solidworks.

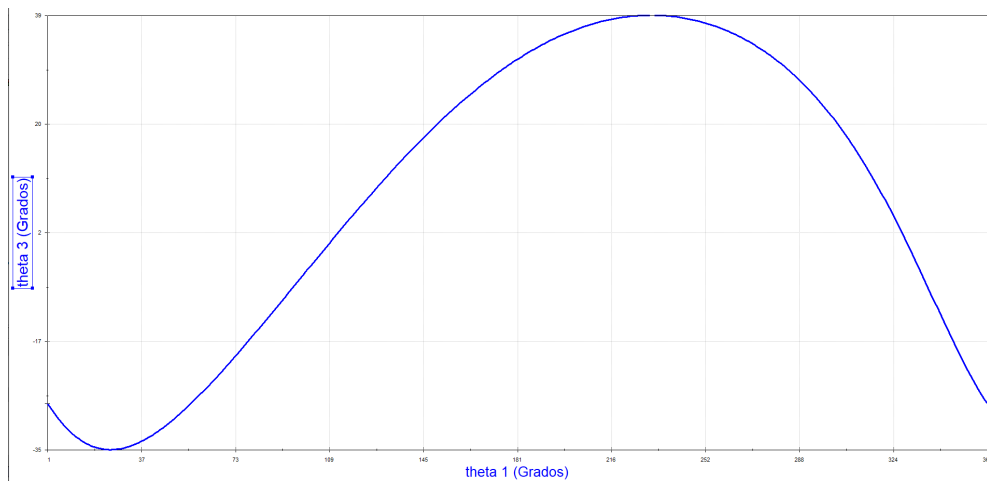


(b) Comparativa de posición angular de salida θ_2 del mecanismo de cuatro barras en configuración abierta obtenida en Solidworks (Magenta) y MATLAB (Azul).

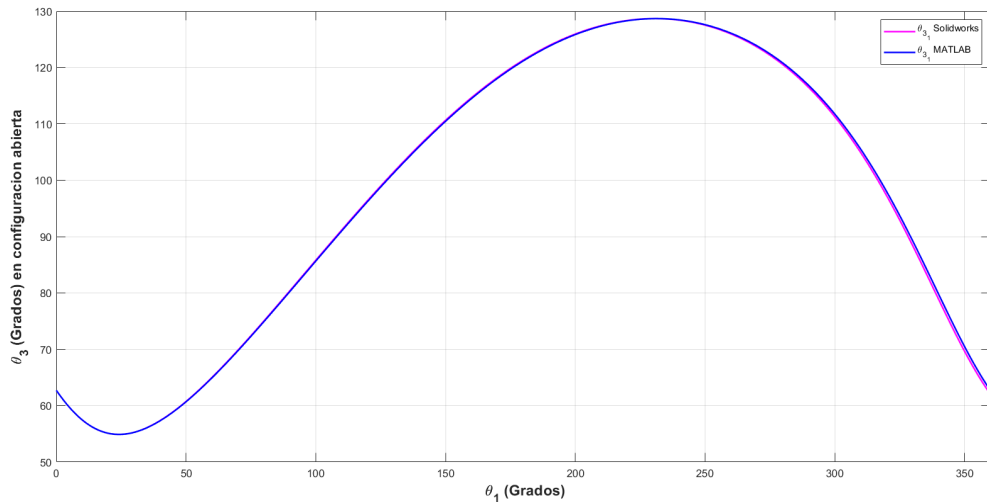
Figura 2.26: Comparativa de posición angular de salida θ_2 del mecanismo de cuatro barras en configuración abierta obtenida en Solidworks y MATLAB.

Se puede notar que tanto el modelo matemático obtenido para la posición angular θ_2 , como la respuesta obtenida a través del mecanismo virtual, coinciden. En la figura 2.26 (b) las posiciones obtenidas a través de los diferentes programas se corresponden y se superponen. Se puede notar que hay un pequeño desfase menor que un grado entre ambas curvas. Esto

se puede minimizar al tomar más muestras del Análisis de Movimiento en Solidworks. Sin embargo, es evidente que la gráfica de ambas curvas es la misma. Posteriormente, en la figura 2.27 se presenta la posición angular de salida θ_3 en configuración abierta, obtenida a través del mecanismo de cuatro barras virtual construido en Solidworks y generada a través de MATLAB. En la figura 2.27 (a) se muestra el gráfico generado por Solidworks y en la figura 2.27 (b) se presenta el gráfico comparativo. La ecuación que describe la posición angular de salida θ_3 está dada en la ecuación (2.18). Se puede notar que esta posición angular está en función de la coordenada angular de entrada θ_1 . La gráfica de θ_3 es de tipo sinusoidal, cíclica y suave. Esto es característico de un mecanismo de cuatro barras que cumple la ley de Grashof. [26]



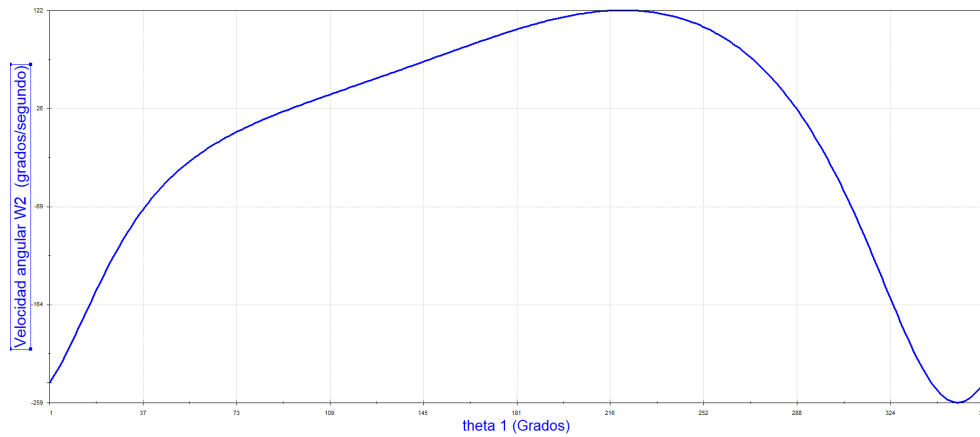
(a) Posición angular de salida θ_3 del mecanismo de cuatro barras en configuración abierta obtenida en Solidworks.



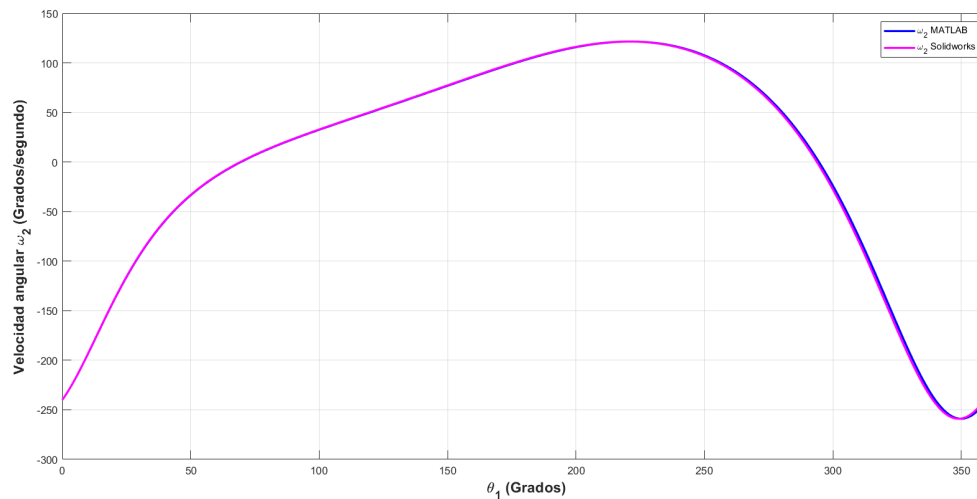
(b) Comparativa de posición angular de salida θ_3 del mecanismo de cuatro barras en configuración abierta obtenida en Solidworks (Magenta) y MATLAB (Azul).

Figura 2.27: Comparativa de posición angular de salida θ_3 del mecanismo de cuatro barras en configuración abierta obtenida en Solidworks y MATLAB.

Se puede notar que tanto el modelo matemático obtenido para la posición angular θ_3 , como la respuesta obtenida a través del mecanismo virtual, coinciden. En la figura 2.27 (b), las posiciones obtenidas a través de los diferentes programas son iguales y se superponen. En la figura 2.28, tenemos a la velocidad angular de salida ω_2 en Solidworks comparada con la velocidad obtenida a través de MATLAB. Se puede notar que ambas están sobrepuestas, esto es un indicador de que las ecuaciones son correctas. La expresión que describe a ω_2 está dada en la ecuación (2.98).



(a) Velocidad angular de salida ω_2 del eslabon l_2 obtenida en Solidworks.

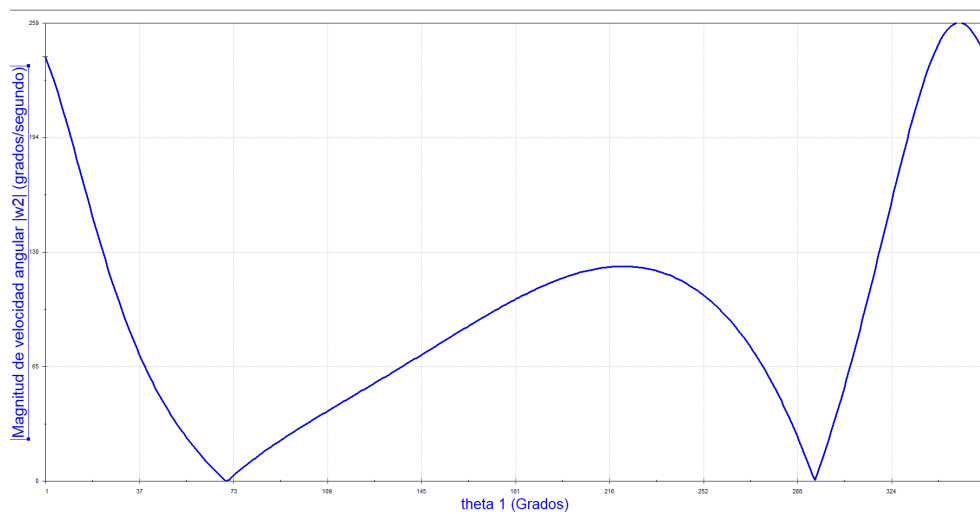


(b) Comparativa de velocidad angular de salida ω_2 del eslabon l_2 obtenida en Solidworks (Magenta) y MATLAB (Azul).

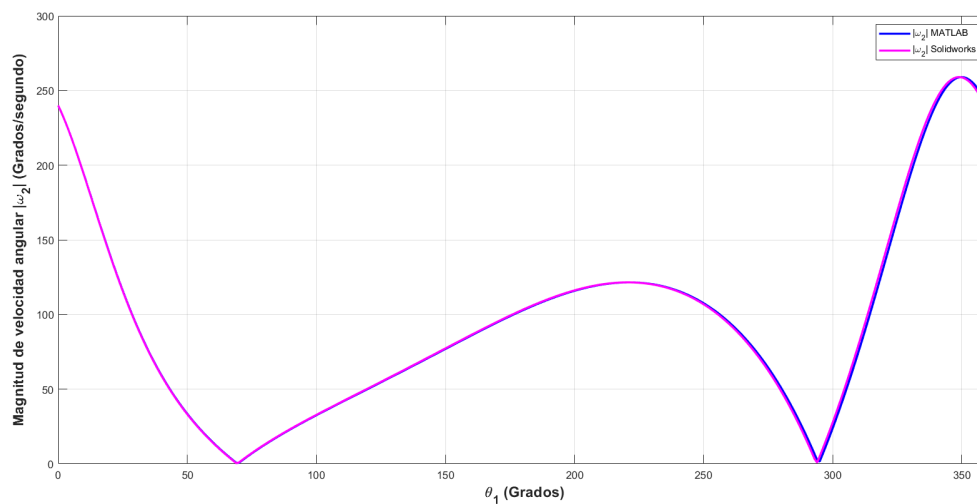
Figura 2.28: Comparativa de velocidad angular de salida ω_2 obtenida en Solidworks y MATLAB.

Se puede notar un pequeño desfase de un grado en la figura 2.28 (b). Esto es debido al número de muestras tomadas en Solidworks. Mientras más muestras se tomen, el desfase desaparece. Sin embargo las gráficas coinciden. En la figura 2.29, se presenta la magnitud de la velocidad angular de salida ω_2 obtenida a través del mecanismo de cuatro barras virtual

construido en Solidworks y generada a través de MATLAB. En la figura 2.29 (a) se muestra el gráfico generado por Solidworks y en la figura 2.29 (b) se presenta el gráfico comparativo. La expresión que describe a $|\omega_2|$ se da en la ecuación (2.99).



(a) Magnitud de velocidad angular de salida ω_2 del eslabon l_2 obtenida en Solidworks.

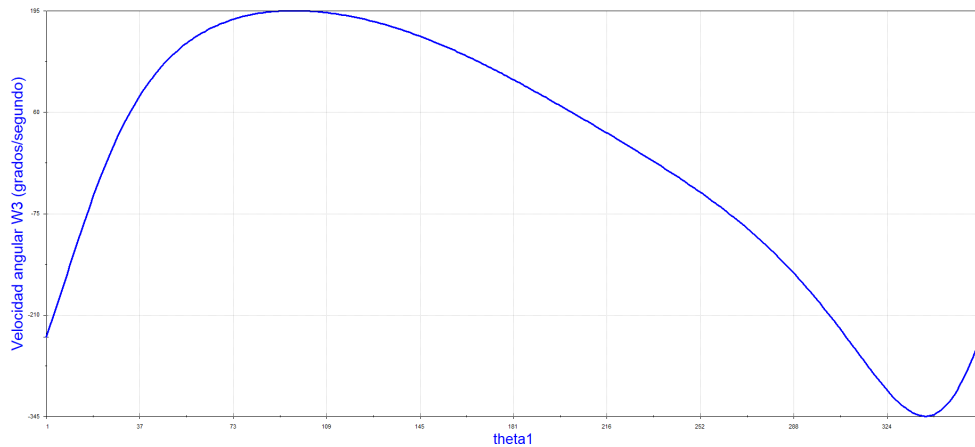


(b) Comparativa de magnitud de velocidad angular de salida ω_2 del eslabon l_2 obtenida en Solidworks (Magenta) y MATLAB (Azul).

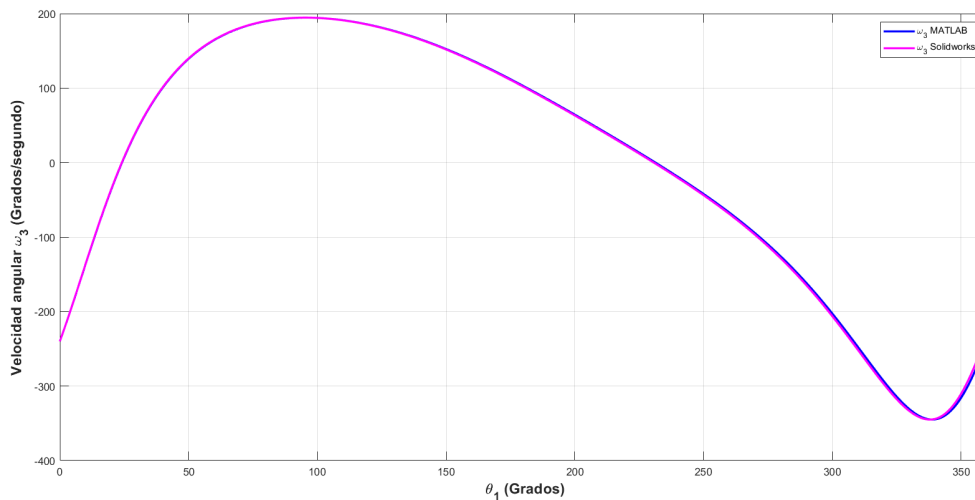
Figura 2.29: Comparativa de magnitud de velocidad angular de salida ω_2 del eslabón l_2 obtenida en Solidworks y MATLAB.

En la figura 2.29 se presentan picos en las gráficas de la magnitud de velocidad angular de salida ω_2 del eslabón l_2 . Estos picos se generan alrededor de donde la velocidad angular ω_2 se hace cero. Es importante mencionar que las velocidades angulares de salida son variables y pueden ser tanto positivas, negativas o cero. Al tomar los valores absolutos de estas velocidades angulares, estas son variables y completamente positivas.

En la figura 2.30 tenemos a la velocidad angular de salida ω_3 en Solidworks comparada con la velocidad angular obtenida a través de MATLAB. Esta velocidad se proyecta sobre el eje z . Se puede notar que ambas están sobrepuestas. Esto nos indica que las ecuaciones y la programación son correctas. La expresión que describe a ω_3 está dada en la ecuación (2.101). En general, para mecanismos de Grashof, las gráficas de las velocidades angulares de salida serán suaves y cíclicas.



(a) Velocidad angular de salida ω_3 del eslabón l_3 obtenida en Solidworks.

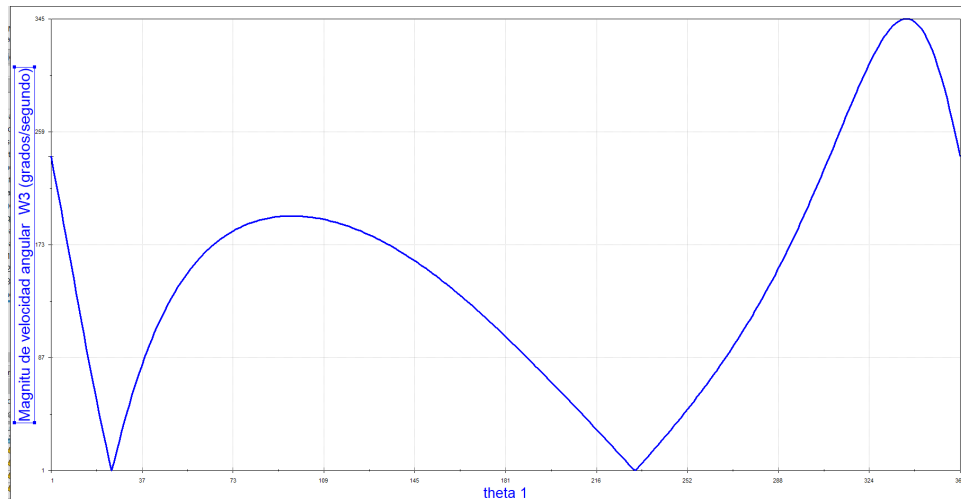


(b) Comparativa de velocidad angular de salida ω_3 del eslabón l_3 obtenida en Solidworks (Magenta) y MATLAB (Azul).

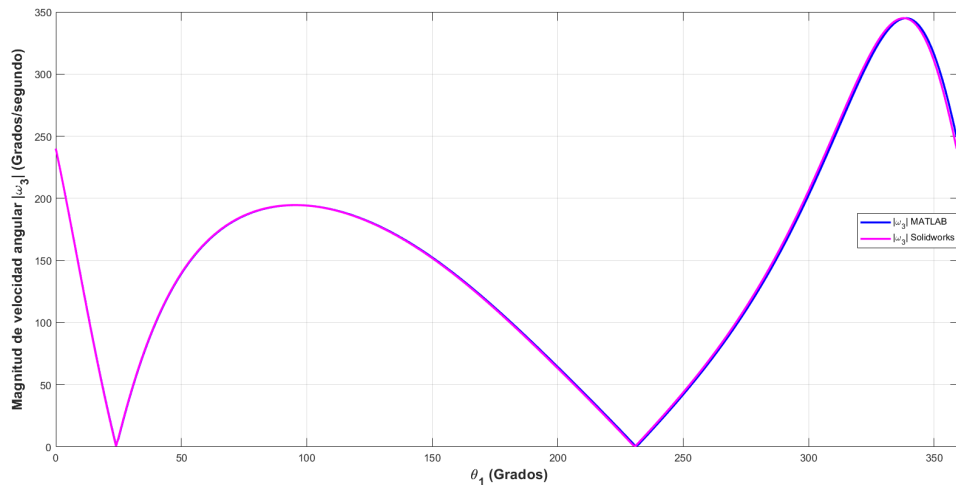
Figura 2.30: Comparativa de velocidad angular de salida ω_3 del eslabón l_3 obtenida en Solidworks y MATLAB.

Se puede notar que los gráficos de ω_3 no presentan picos observables, así mismo, esta velocidad angular de salida es de signo variable. El modelado matemático de velocidades angulares y su programación en MATLAB concuerda de manera adecuada con las simulaciones realizadas en Solidworks. A continuación, en la figura 2.31 se presenta la magnitud de la velocidad an-

gular de salida ω_3 obtenida a través del mecanismo de cuatro barras con longitudes diferentes construido en Solidworks y generado con MATLAB. En la figura 2.31 (a) se muestra el gráfico generado por Solidworks a través de la herramienta "Solidworks Motion". En la figura 2.31 (b) se presenta el gráfico comparativo de Solidworks Motion y MATLAB. La expresión que describe a $|\omega_3|$ está dada en la ecuación (2.102).



(a) Magnitud de velocidad angular de salida ω_3 del eslabón l_3 obtenida en Solidworks.



(b) Comparativa de magnitud de velocidad angular de salida ω_3 del eslabón l_3 obtenida en Solidworks (Magenta) y MATLAB (Azul).

Figura 2.31: Comparativa de velocidad angular de salida ω_3 obtenida en Solidworks y MATLAB.

En la figura 2.31 existen picos en las trayectorias de la magnitud de velocidad angular ω_3 . Estos picos están presentes cuando la velocidad angular ω_3 es cero. El valor absoluto $|\omega_3|$ es positivo. A través de este análisis, se ha comparado el modelado matemático con modelos CAD. Las simulaciones coincidentes indican que los cálculos son adecuados. En general, el modelado matemático tanto de posición y velocidad angular se puede realizar en mecanismos planos.

2.11. Segundo caso de estudio particular: Paralelogramo articulado.

En el segundo caso de estudio se analizará un paralelogramo articulado. Este es un caso particular del mecanismo de cuatro barras con longitudes distintas. De todos los diferentes mecanismos que existen, el mecanismo de cuatro barras es el más conocido y uno de los más importantes puesto que está presente en diferentes ámbitos industriales, como por ejemplo en máquinas retroexcavadoras de la industria pesada. El paralelogramo articulado es un mecanismo en el que cuatro eslabones están conectados a través de juntas rotatorias. Como se muestra en la figura 2.32, las longitudes de los eslabones l_1 y l_3 son idénticas. Así mismo, las longitudes de los eslabones l_2 y l_4 son iguales. A partir de este mecanismo se han generado nuevos mecanismos paralelos de n grados de libertad que cuentan con capacidades de rotación muy altas y con aplicaciones en robots industriales y máquinas de cinemática paralela. Para este caso de estudio particular se analizarán las posiciones angulares, las relaciones de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ y $\frac{\omega_3}{\omega_1}$, los coeficientes λ_{l_1} , λ_{l_2} , λ_{l_3} , λ_{l_4} , λ_{θ_1} , γ_{l_1} , γ_{l_2} , γ_{l_3} , γ_{l_4} y γ_{θ_1} , los errores totales en las relaciones de transmisión y las cotas máximas de error. [22] [31]

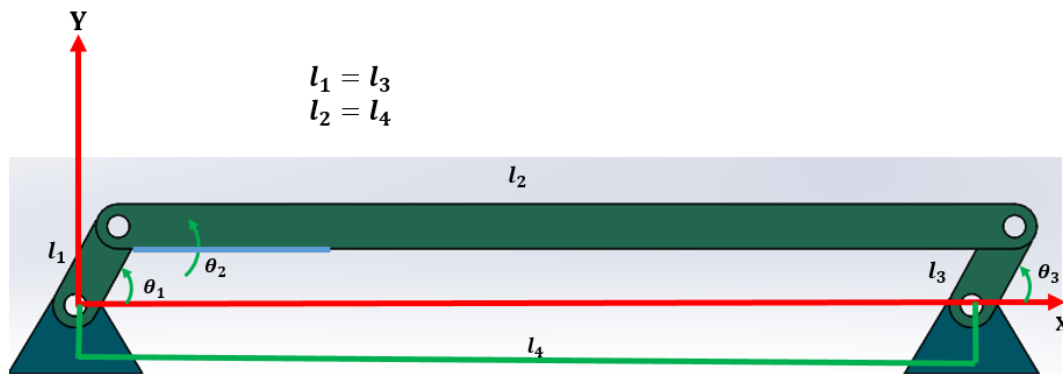


Figura 2.32: Paralelogramo articulado y sus parámetros geométricos.

Los parámetros de entrada para este caso particular se dan en el cuadro 2.3. Estos parámetros corresponden a las longitudes de los eslabones y al ángulo de entrada θ_1 . Las longitudes están dadas en milímetros y el ángulo de entrada θ_1 tiene un recorrido completo de 360 grados, todos estos datos son ingresados en el software MATLAB.

Parámetro	Valor numérico	Unidades
Longitud l_1	1	mm
Longitud l_2	10	mm
Longitud l_3	1	mm
Longitud l_4	10	mm
Ángulo de entrada θ_1	$0 - 2\pi$	rad

Cuadro 2.3: Parámetros de entrada para el mecanismo de paralelogramo articulado.

2.11. SEGUNDO CASO DE ESTUDIO PARTICULAR: PARALELOGRAMO ARTICULADO.61

El posicionamiento angular de los ángulos de salida θ_2 y θ_3 con sus respectivas configuraciones abierta y cerrada se presentan en las figuras 2.33 y 2.34.

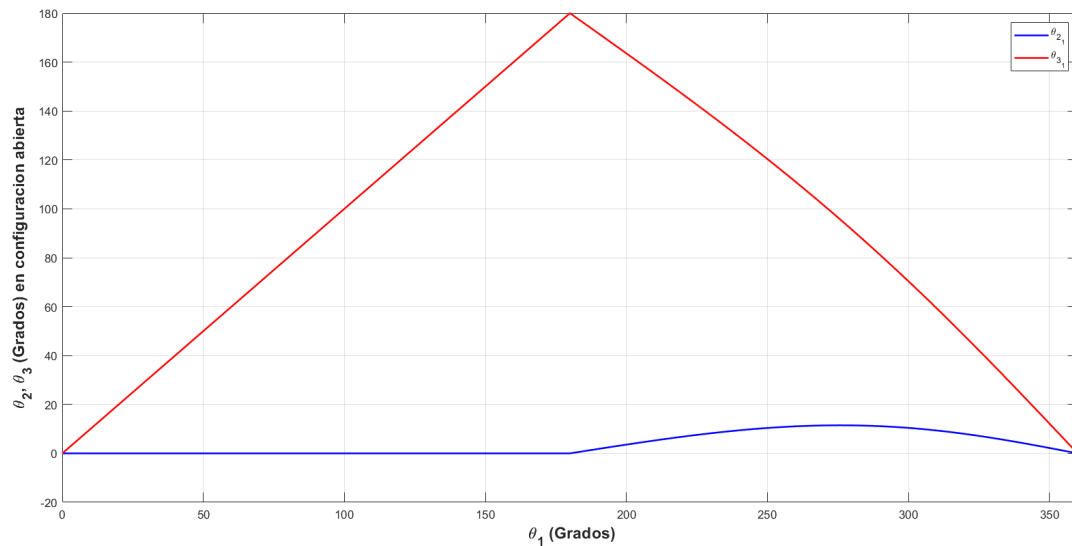


Figura 2.33: Posiciones Angulares de Salida θ_2 y θ_3 del paralelogramo articulado en configuración abierta.

En la figura 2.34 se muestran las posiciones angulares de salida θ_2 y θ_3 en configuración cerrada. Las ecuaciones que describen estas curvas se muestran en (2.19) y (2.25).

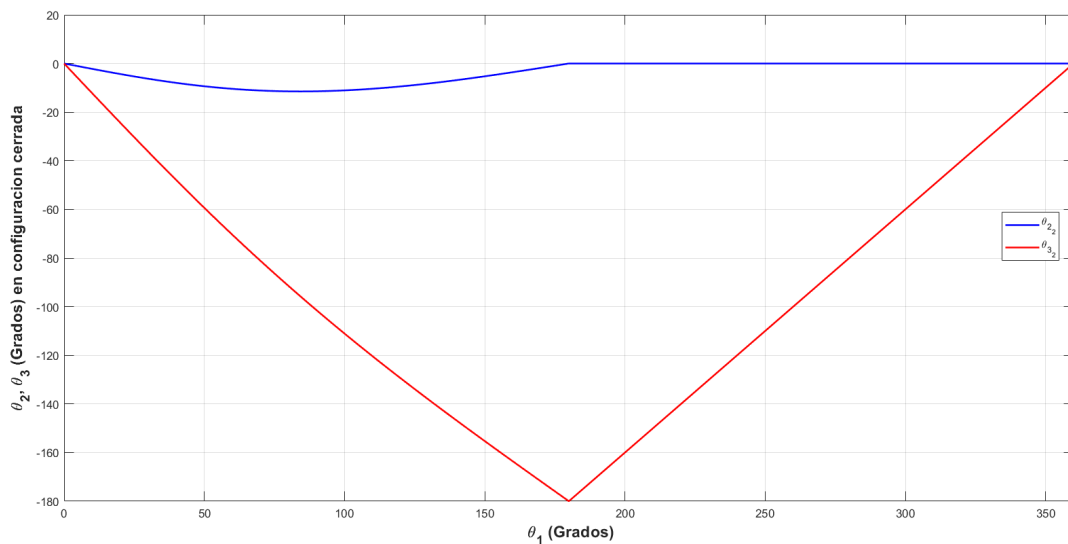


Figura 2.34: Posiciones Angulares de Salida θ_2 y θ_3 del paralelogramo articulado en configuración cerrada.

A continuación, en la figura 2.35 tenemos a la relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, que relaciona la velocidad angular del elemento de entrada asociado al eslabón l_1 con la velocidad angular del

elemento de salida asociado al eslabón l_2 . Se puede notar que en la configuración abierta la ganancia de velocidades angulares $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ es cero cuando la coordenada angular de entrada está en el intervalo $[0, \pi]$ y variable cuando la coordenada angular de entrada está en el intervalo $[\pi, 2\pi]$. En la configuración cerrada $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ es variable cuando la coordenada angular de entrada θ_1 está en el intervalo $[0, \pi]$ y cero en el intervalo $[\pi, 2\pi]$. La relación entre ambas configuraciones es simétrica. Se puede notar que la relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ es bastante pequeña [22]. Se puede ver además que existe un pico cuando la coordenada angular de entrada θ_1 está posicionada en π . La relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ es de tipo adimensional y corresponde al mismo gráfico que el del coeficiente de influencia ε_{25} . Esta ganancia de velocidades angulares puede ser obtenida a través de medición directa. Sin embargo, a través del coeficiente de influencia ε_{25} se puede obtener $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ de una manera mucho más fácil, puesto que este coeficiente de influencia depende de pocos parámetros, ya que el coeficiente ε_{25} solo es función de las longitudes de los eslabones y del posicionamiento angular de entrada y de salida. En general, la ganancia de velocidad angular $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ será pequeña en mecanismos de paralelogramo articulado. La expresión que describe a $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ está dada en la ecuación (2.56).

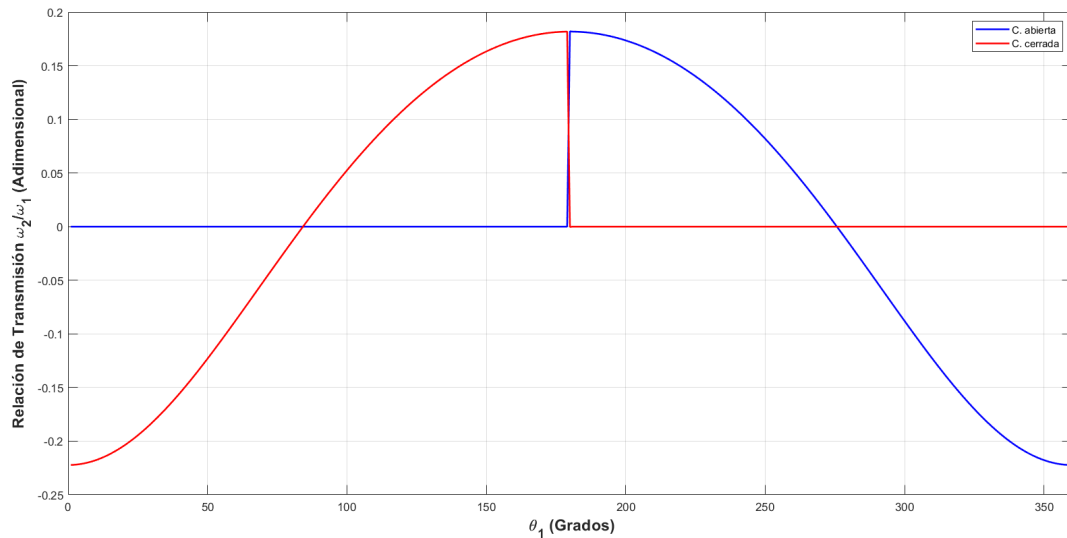


Figura 2.35: Relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ para la configuración abierta (Azul) y la configuración cerrada (Rojo), se presenta simetría entre ambas configuraciones.

En la figura 2.36 se muestra la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ que relaciona la velocidad angular del elemento de entrada asociado al eslabón l_1 con la velocidad angular del elemento de salida asociado al eslabón l_3 . La relación de transmisión entre estos elementos puede verse como una ganancia de velocidades angulares. Se denotan las relaciones de transmisión para la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo) [22]. Se puede notar que en la configuración abierta la ganancia de velocidades angulares $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ es unitaria cuando la coordenada angular de entrada está en el intervalo $[0, \pi]$ y variable cuando la coordenada angular de entrada está en el intervalo $[\pi, 2\pi]$. En la configuración cerrada $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ es variable cuando la coordenada angular de entrada θ_1 está en el intervalo $[0, \pi]$ y unitario en el intervalo $[\pi, 2\pi]$. La relación entre ambas configuraciones es de tipo simétrica. Se puede notar que $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ es de tipo adimensional y que existe un pico cuando la coordenada angular de entrada θ_1 está posicionada en π . La

2.11. SEGUNDO CASO DE ESTUDIO PARTICULAR: PARALELOGRAMO ARTICULADO.63

relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ corresponde al mismo gráfico que el del coeficiente de influencia ε_{35} .

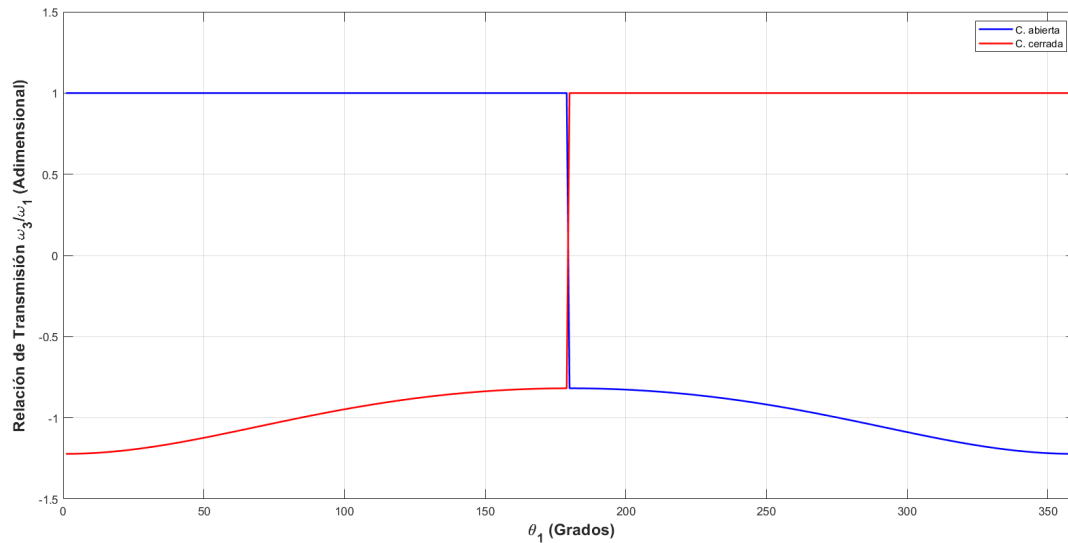


Figura 2.36: Relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ para la configuración abierta (Azul) y la configuración cerrada (Rojo), se presenta simetría entre ambas configuraciones

El gráfico de $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ coincide con el realizado en 2010 por Gerald Rothenhofer en su artículo "Transmission ratio based analysis and robust design of mechanisms" [22] en el que principalmente estudia la relación de transmisión en paralelogramos articulados. La gráfica de relación de transmisión correspondiente a su artículo se muestra a continuación en la figura 2.37.

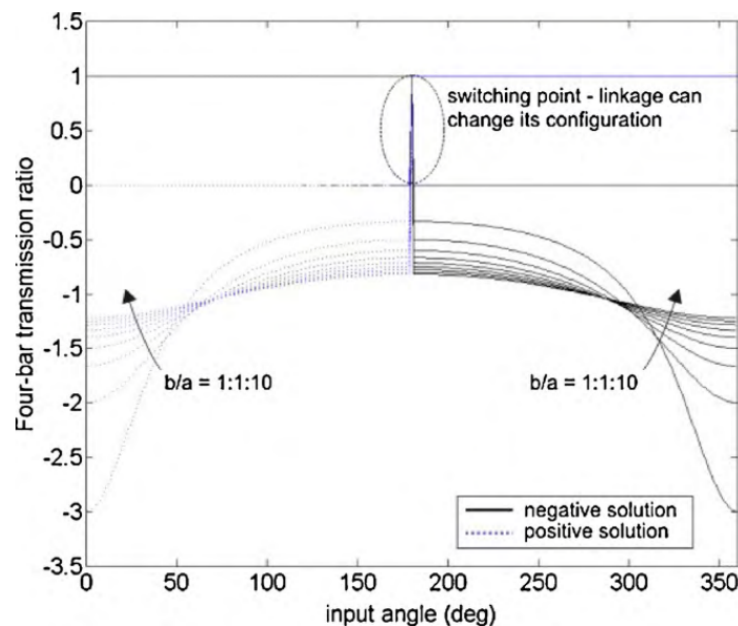


Figura 2.37: Gráfico de $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ obtenido del artículo "Transmission ratio based analysis and robust design of mechanisms" [22]

Cuando la coordenada angular de entrada está posicionada en 0 o en π no es posible determinar la relación de transmisión en ninguna configuración. Esto viene del hecho de que las relaciones de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ pueden ser expresadas como coeficientes de influencia que son dependientes de la matriz $[\mathbf{B}]^{-1}$ expresada en la ecuación (2.32). Las singularidades de esta matriz se presentan en 0, π o múltiplos de ellos, ya que en estos casos todos los eslabones del paralelogramo articulado quedan alineados entre sí. [22]

El mecanismo de paralelogramo articulado tiene la máxima relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ posible en mecanismos de cuatro barras. El valor máximo constante que alcanzará este mecanismo es unitario. En el intervalo en el que la ganancia de velocidades angulares $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ es constante se comporta como una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos, puesto que en una transmisión por engranajes de este tipo la relación de transmisión es constante idealmente. Por lo tanto, el mecanismo de paralelogramo articulado es el que más se aproxima a un mecanismo de transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos cuyos radios base son idénticos. En general, para mecanismos de paralelogramo articulado la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ será mucho mayor que $\frac{\omega_2}{\omega_1}$.

Ya que las relaciones de transmisión o ganancias de velocidad angular son sensibles a los errores de fabricación y posición se analizarán los errores $\delta i_{21TOTAL}$ con diferentes grados de calidad IT y sus respectivos coeficientes λ_{l_i} , λ_{θ_1} . Así mismo, se mostrarán los diferentes errores $\delta i_{31TOTAL}$ con diferentes grados de precisión IT y sus respectivos coeficientes γ_{l_i} , γ_{θ_1} . Los errores en las relaciones de transmisión son variables ya que los coeficientes también lo son. Para los errores totales en las relaciones de transmisión, las tolerancias dimensionales también serán extraídas de la Norma ISO 286. En las tablas dadas en la norma ISO 286 vienen los diferentes tipos de calidades IT de acuerdo al tamaño nominal de las dimensiones l_1 , l_2 , l_3 , l_4 . Para las dimensiones que ocuparemos en este segundo caso de estudio particular se utilizarán las calidades IT01, IT6, IT9, IT12 e IT16 [28]. La calidad IT01 es una calidad de ultra precisión que solo puede ser obtenida a través de herramientas y maquinaria muy compleja. Las calidades IT6 e IT9 son calidades estándar y las calidades IT12 e IT16 son calidades de baja precisión. En el cuadro 2.4 se presentan las tolerancias admitidas correspondientes a las calidades mencionadas anteriormente. Para este segundo caso de estudio particular, también asumiremos a $\delta\theta_1$ como cero. Las tolerancias y los signos positivos garantizan que el mecanismo sea de Grashof (ver Apéndice A).

Parámetro	IT01	IT6	IT9	IT12	IT16	UNIDADES
δl_1	0.0003	0.006	0.025	0.1	0.6	mm
δl_2	0.0004	0.009	0.036	0.15	0.9	mm
δl_3	0.0003	0.006	0.025	0.1	0.6	mm
δl_4	0.0004	0.009	0.036	0.15	0.9	mm

Cuadro 2.4: Tolerancias para las longitudes l_1 , l_2 , l_3 , l_4 (tomado de la Norma ISO 286).

A continuación, en la figura 2.18 se muestran los coeficientes λ_{l_1} , λ_{l_2} , λ_{l_3} , λ_{l_4} y λ_{θ_1} dados en las ecuaciones (2.76) a (2.80). Estos coeficientes están involucrados en el error total en la

relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$. Los coeficientes λ_{l_1} , λ_{l_2} , λ_{l_3} , λ_{l_4} tienen unidades de $\frac{1}{mm}$, mientras que el coeficiente λ_{θ_1} es de tipo adimensional.

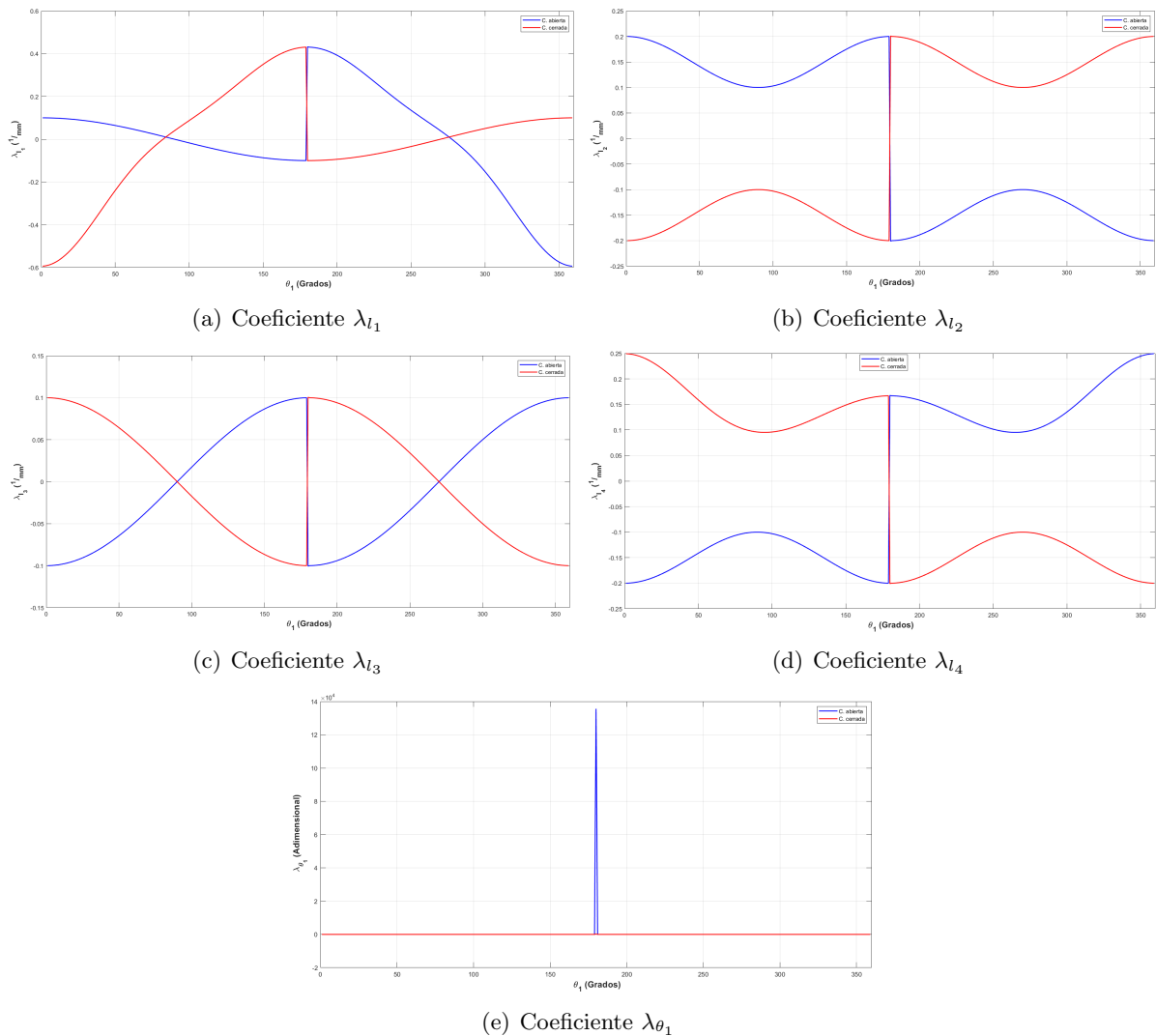


Figura 2.38: Coeficientes λ_{l_1} , λ_{l_2} , λ_{l_3} , λ_{l_4} y λ_{θ_1} . Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).

Se puede notar que en los coeficientes λ_{l_1} , λ_{l_2} , λ_{l_3} , λ_{l_4} se presenta una simetría entre la configuración abierta (Azul) y la configuración cruzada (Rojo). El coeficiente λ_{θ_1} no presenta esta simetría y aparece un pico cuando la coordenada angular de entrada está posicionada en π . Estos coeficientes nos muestran las sensibilidades de la relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ a los errores en las longitudes de los eslabones y al error en el posicionamiento angular de entrada θ_1 . Los coeficientes son variables con la posición de la coordenada angular de entrada. Para este caso de estudio particular, una desviación en la coordenada angular de entrada representará un error en la relación de transmisión significativo ya que el coeficiente λ_{θ_1} es de una magnitud enorme en comparación con λ_{l_1} , λ_{l_2} , λ_{l_3} , λ_{l_4} . [22]

Posteriormente, en la figura 2.39 se muestra al error $\delta i_{21TOTAL}$ en la relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ con diferentes grados de calidad IT. Se nota que mientras mayor es el grado IT mayor es el error en la relación de transmisión.

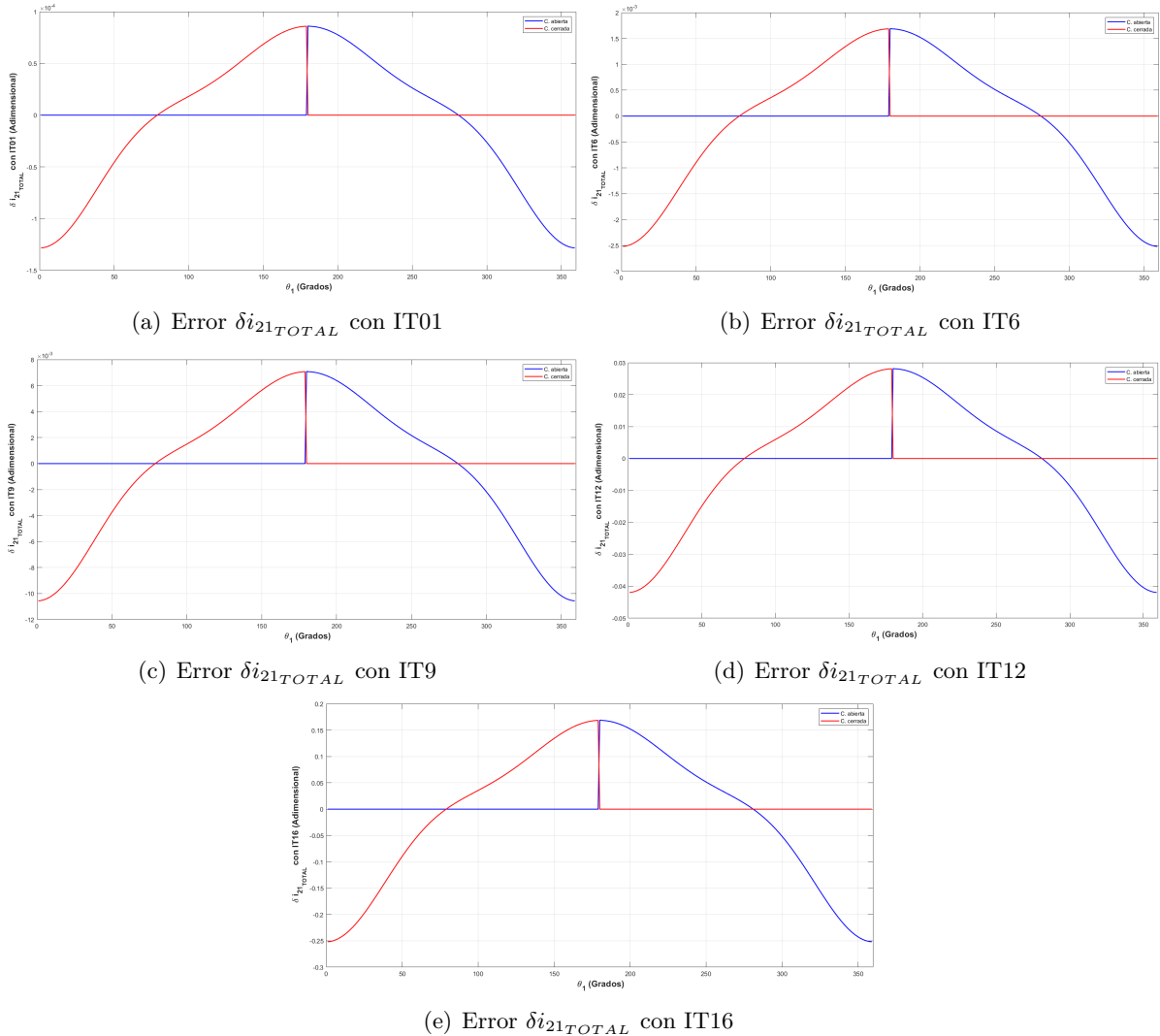


Figura 2.39: Error $\delta i_{21TOTAL}$ con diferentes grados de calidad IT, mientras mayor es el grado IT mayor es el error. Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo)

El error $\delta i_{21TOTAL}$ presenta simetría entre sus configuraciones abierta y cerrada ya que la relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ también presenta simetría entre sus configuraciones. Esta simetría se mantendrá mientras no exista ninguna desviación o error en la coordenada angular de entrada θ_1 . Es posible notar que el error $\delta i_{21TOTAL}$ tiene una zona de error máximo y una zona de error mínimo puesto que es un error de magnitud y signo variable. Cuando la coordenada angular de entrada está posicionada en 0 , π o 2π no es posible determinar el valor de $\delta i_{21TOTAL}$.

2.11. SEGUNDO CASO DE ESTUDIO PARTICULAR: PARALELOGRAMO ARTICULADO.67

A continuación, en la figura 2.40 se muestran los coeficientes γ_{l_1} , γ_{l_2} , γ_{l_3} , γ_{l_4} y γ_{θ_1} dados en las ecuaciones (2.64) a (2.68). Estos coeficientes están involucrados en el error total en la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$. Los coeficientes γ_{l_1} , γ_{l_2} , γ_{l_3} , γ_{l_4} tienen unidades de $\frac{1}{mm}$, mientras que el coeficiente γ_{θ_1} es de tipo adimensional y tiene la mayor magnitud de todos los coeficientes por varios ordenes de magnitud.

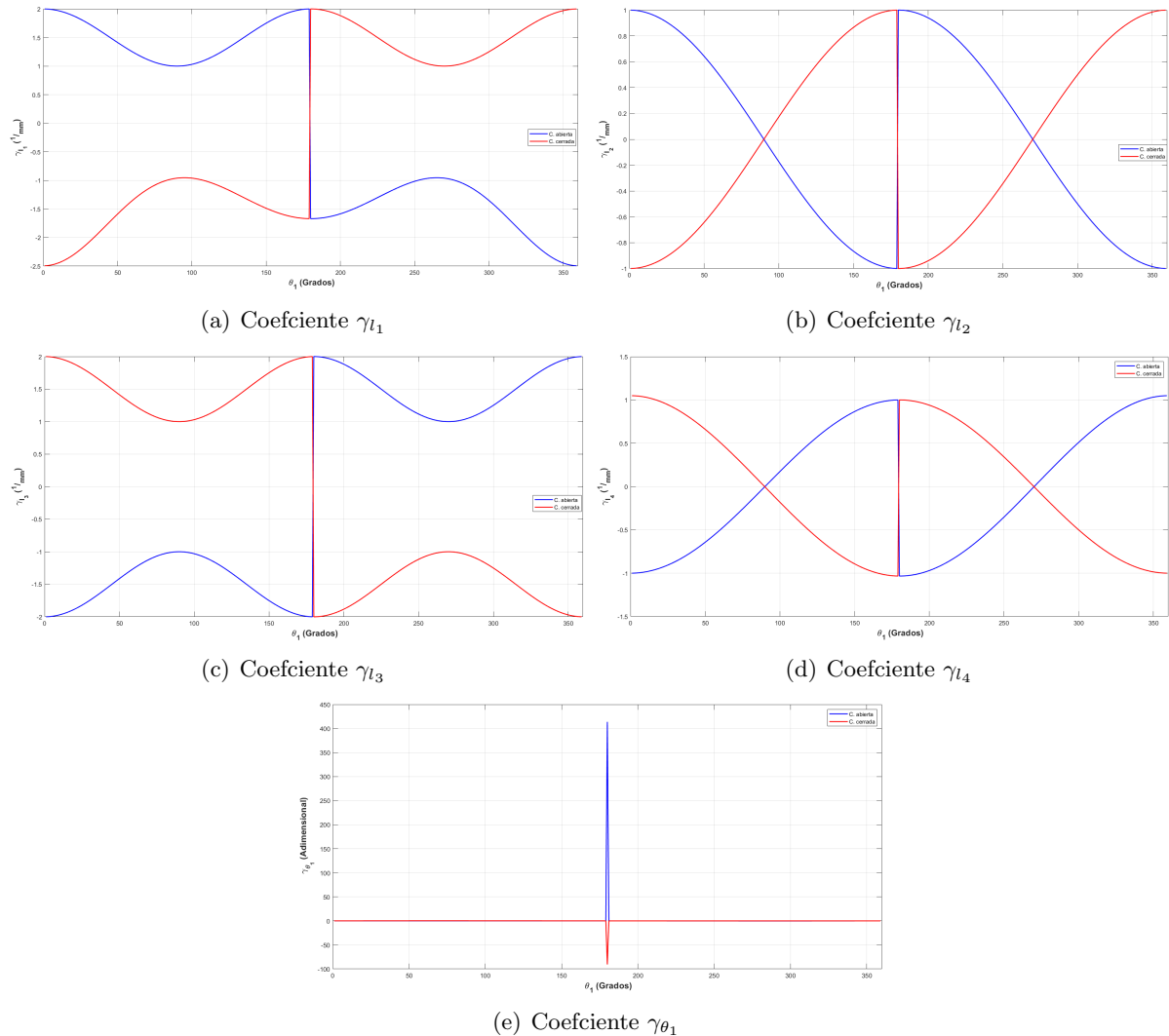


Figura 2.40: Coeficientes γ_{l_1} , γ_{l_2} , γ_{l_3} , γ_{l_4} y γ_{θ_1} . Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).

Se puede notar que en los coeficientes γ_{l_1} , γ_{l_2} , γ_{l_3} y γ_{l_4} se presenta simetría entre la configuración abierta (Azul) y la configuración cerrada (Rojo), mientras que el coeficiente γ_{θ_1} no presenta esta simetría. Estos coeficientes nos muestran la sensibilidad de la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ a los errores en las longitudes de los eslabones y al error en la coordenada angular de entrada. Los coeficientes son variables con la posición de la coordenada angular de entrada. En general, en los mecanismos de paralelogramo articulado estos coeficientes serán mucho más

grandes que en los mecanismos de cuatro barras con longitudes diferentes.

El gráfico de los coeficientes γ_{l_1} , γ_{l_2} , γ_{l_3} y γ_{l_4} coincide con los obtenidos en 2010 por Gerald Rothenhofer en el artículo "Transmission ratio based analysis and robust design of mechanisms" [22] en el que se aborda esta temática. La gráfica de estos coeficientes correspondientes a su artículo se muestran a continuación en la figura 2.41.

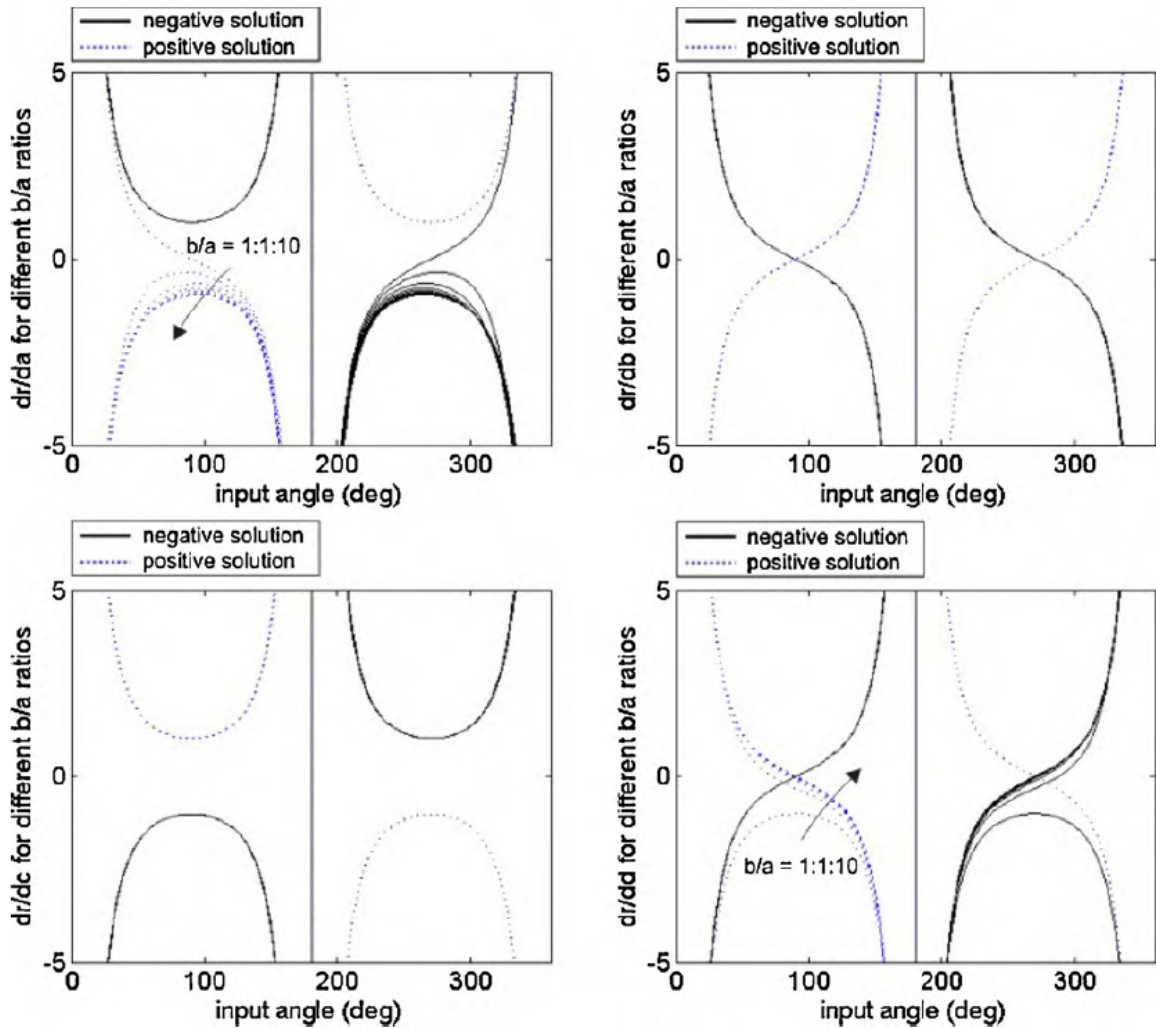


Figura 2.41: Coeficientes γ_{l_1} , γ_{l_2} , γ_{l_3} y γ_{l_4} obtenidos del artículo "Transmission ratio based analysis and robust design of mechanisms" [22]

En los coeficientes λ_{l_1} , λ_{l_2} , λ_{l_3} , λ_{l_4} , λ_{θ_1} , γ_{l_1} , γ_{l_2} , γ_{l_3} , γ_{l_4} y γ_{θ_1} no es posible determinar su valor cuando la coordenada angular de entrada θ_1 está posicionada en 0 , π o 2π . En estos valores se generan picos. Para este caso de estudio particular los coeficientes γ_{l_i} son mayores a los coeficientes λ_{l_i} . Estos coeficientes están en función del posicionamiento angular de entrada y de salida, las longitudes de los eslabones y los coeficientes de influencia. [19] [20] [22]

Posteriormente, en la figura 2.42 se muestra al error total $\delta i_{31TOTAL}$ en la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ con diferentes grados de calidad IT. Se puede notar que mientras mayor es el grado IT mayor es el error en la relación de transmisión.

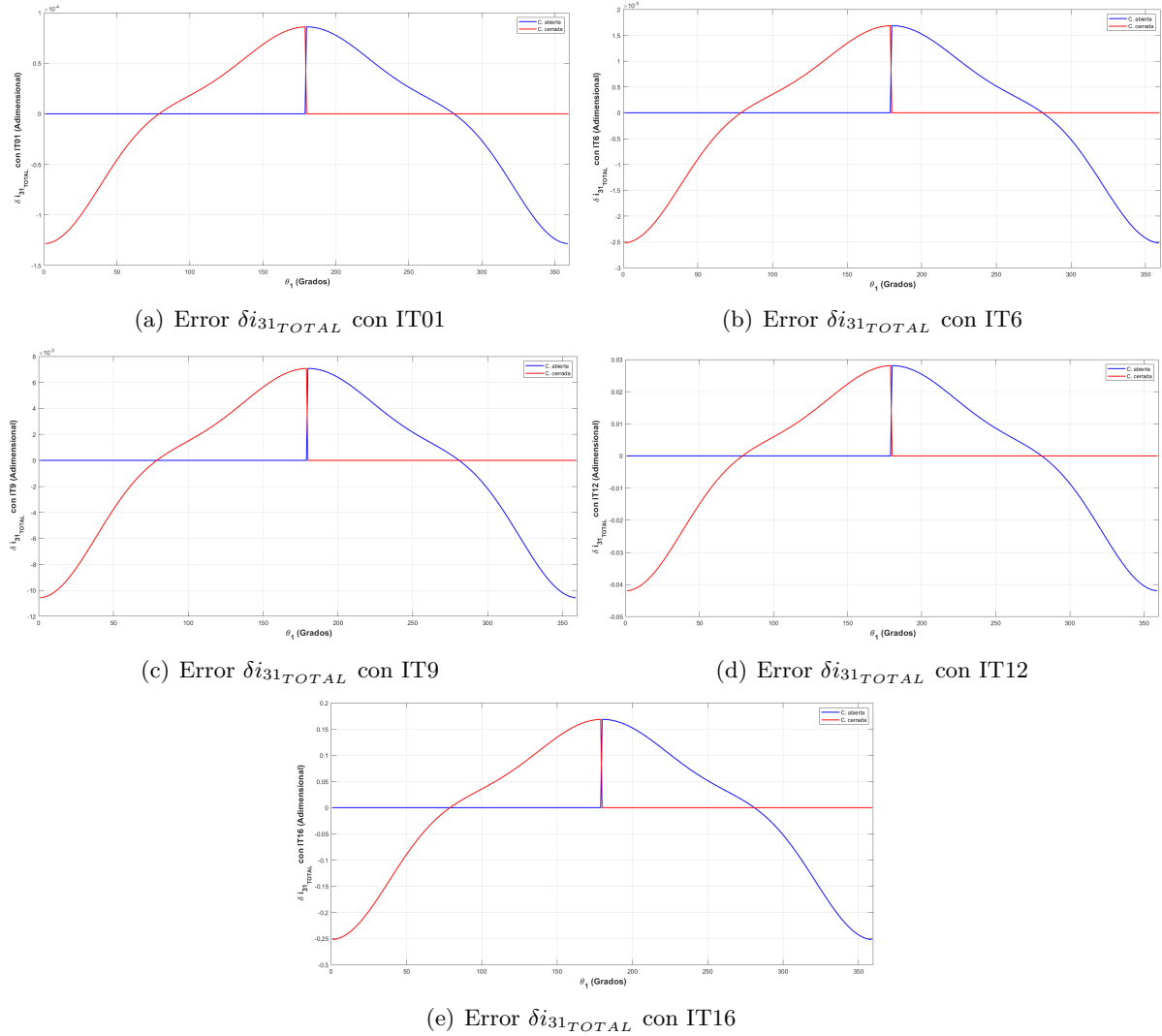
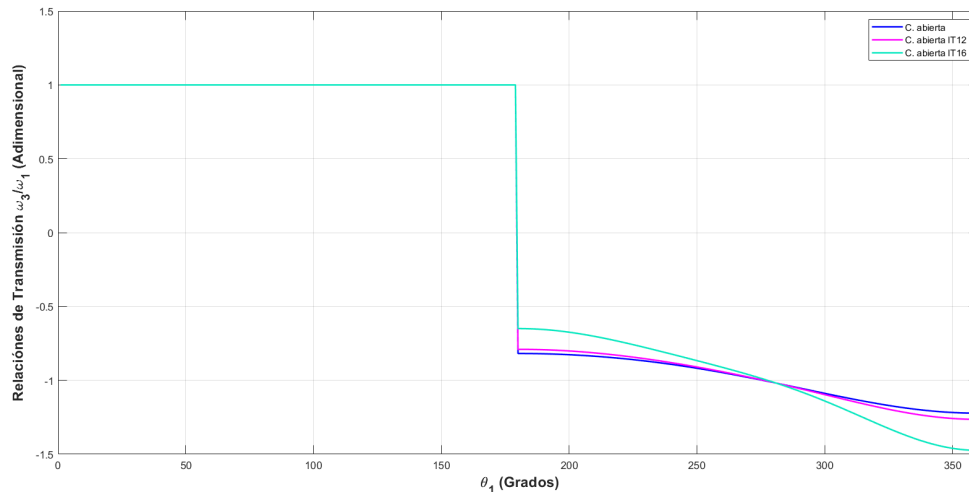


Figura 2.42: Error $\delta i_{31TOTAL}$ con diferentes grados de calidad IT, mientras mayor es el grado IT mayor es el error. Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo).

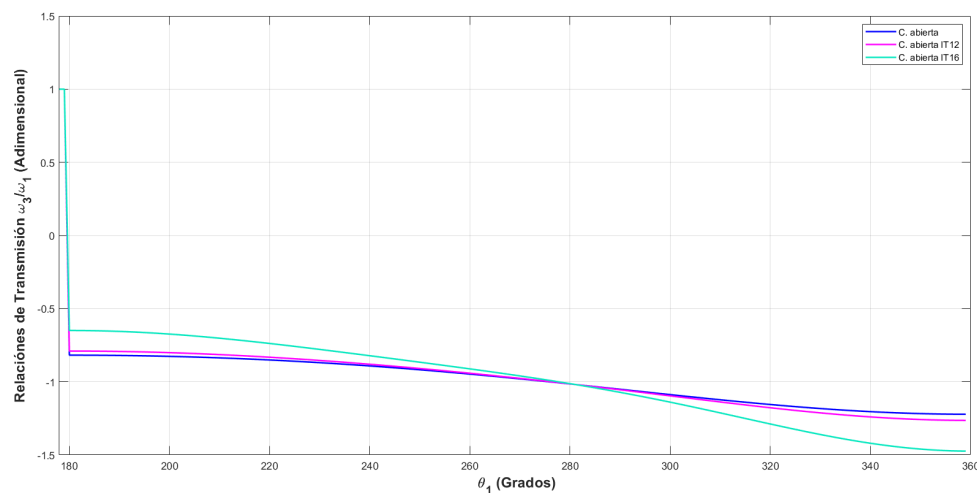
El error total $\delta i_{31TOTAL}$ presenta simetría entre sus configuraciones abierta y cerrada ya que la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ también presenta simetría entre sus configuraciones. La simetría en el error $\delta i_{31TOTAL}$ se mantendrá mientras no exista ninguna desviación u holgura en la coordenada angular de entrada θ_1 . Es posible notar que este error presenta una zona máxima de error y una zona mínima de error puesto que $\delta i_{31TOTAL}$ es de magnitud variable. En general, mientras mayor sea el grado de tolerancia IT más afectará a la relación de transmisión.

Para este caso de estudio se analizará la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ ideal sin errores y dos

relaciones de transmisión reales sujetas a errores como los describen las ecuaciones (2.82) y (2.83), siendo las calidades IT12 e IT16 las que más afectan a la relación de transmisión. En la figura 2.43 se muestran estas tres diferentes relaciones de transmisión en configuración abierta.



(a) Diferentes relaciones de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ para el segundo caso de estudio particular



(b) Diferentes relaciones de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ (Ampliación) para el segundo caso de estudio particular

Figura 2.43: Diferentes relaciones de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ en configuración abierta

Se puede notar en la figura 2.43 (b) que la mayor incidencia se da cuando la coordenada angular de entrada θ_1 está posicionada entre 180 y 360 grados. La menor incidencia se presenta en el intervalo entre 0 y 180 grados. Así mismo, se observa que la relación de transmisión con calidad IT12 causa un error notorio mientras que la relación de transmisión con calidad IT16 causa la mayor desviación en la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$. Cuando la fabricación de los eslabones es de baja calidad se obtienen diferentes valores en las relaciones de transmisión que afectan al desempeño de los mecanismos. [22] [23] [24] [25]

2.11. SEGUNDO CASO DE ESTUDIO PARTICULAR: PARALELOGRAMO ARTICULADO.71

A continuación, en la figura 2.44 se muestra la cota de error máxima en la relación de transmisión $\frac{\omega_2}{\omega_1}$. El error $\epsilon_{21TOTAL}$ se consigue al tomar el valor absoluto de la multiplicación de los coeficientes λ_{l_1} , λ_{l_2} , λ_{l_3} , λ_{l_4} y λ_{θ_1} por las respectivas tolerancias dimensionales δl_1 , δl_2 , δl_3 , δl_4 , $\delta \theta_1$ para posteriormente sumarlos. La ecuación (2.84) describe estas curvas.

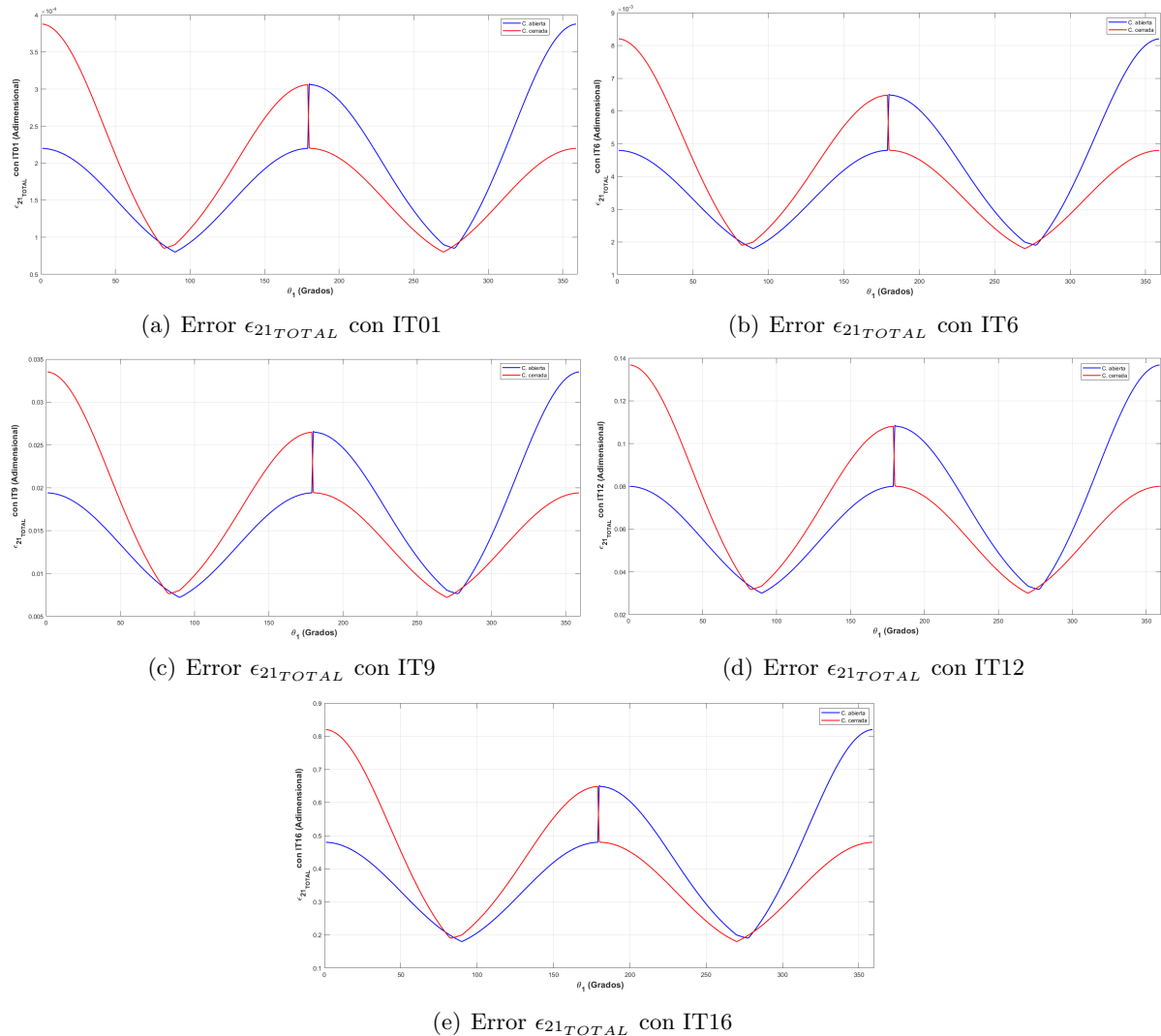


Figura 2.44: Error $\epsilon_{21TOTAL}$ con diferentes grados de calidad IT, mientras mayor es el grado IT mayor es el error. Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo) para el segundo caso de estudio particular.

Se puede notar en la figura 2.44 que mientras mayor es el grado IT, mayor es la cota máxima de error. Los errores $\epsilon_{21TOTAL}$ con IT12 e IT16 presentan los valores mas grandes de error que corresponden a una baja calidad en la fabricación de los eslabones. El error $\epsilon_{21TOTAL}$ presenta simetría entre sus configuraciones abierta y cerrada. Para este caso de estudio particular, se observan picos cuando la coordenada angular de entrada está posicionada en 0, π o 2π . El error

$\epsilon_{21TOTAL}$ es de magnitud variable y completamente positivo.

A continuación, en la figura 2.45 se muestra la cota de error máxima en la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$. El error $\epsilon_{31TOTAL}$ se obtiene al tomar el valor absoluto de la multiplicación de los coeficientes γ_{l_1} , γ_{l_2} , γ_{l_3} , γ_{l_4} y γ_{θ_1} por las respectivas tolerancias dimensionales δl_1 , δl_2 , δl_3 , δl_4 , $\delta \theta_1$ para posteriormente sumarlas. Estas curvas se consiguen a través de la ecuación (2.85). Estos errores son de tipo adimensional.

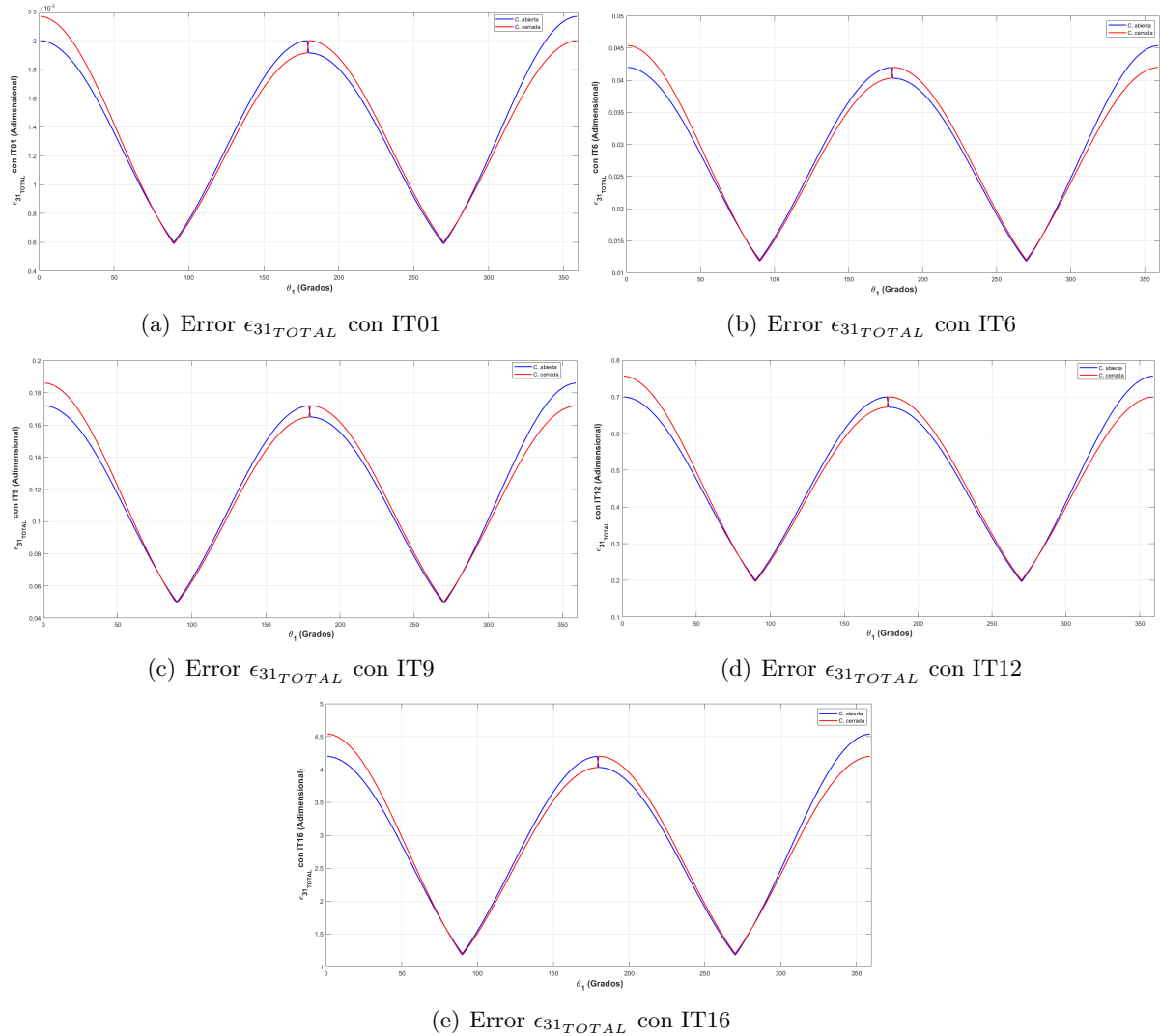


Figura 2.45: Error $\epsilon_{31TOTAL}$ con diferentes grados de calidad IT. Mientras mayor es el grado IT, mayor es el error. Se presenta la configuración abierta (Azul) y cerrada (Rojo) para el segundo caso de estudio particular.

Se puede notar en la figura 2.45 que mientras mayor es el grado IT, mayor es la cota máxima de error en la relación de transmisión. Los errores $\epsilon_{31TOTAL}$ con IT12 e IT16 presentan los valores más grandes de error correspondientes a una baja calidad de fabricación de los es-

labones. El error $\epsilon_{31TOTAL}$ presenta simetría entre sus configuraciones abierta (Azul) y cerrada (Rojo). Ambas configuraciones muestran picos cuando la coordenada angular de entrada θ_1 esta posicionada en 90 grados y en 270 grados. Las configuraciones se intersectan cuando θ_1 está posicionada en 180 grados. El error $\epsilon_{31TOTAL}$ es de magnitud variable y completamente positivo y es el error máximo posible en la relación de transmision $\frac{\omega_3}{\omega_1}$. En general, en mecanismos de paralelogramo articulado, el error $\epsilon_{31TOTAL}$ será mayor que el error $\epsilon_{21TOTAL}$.

En la práctica, no se alcanzarán los valores de $\epsilon_{21TOTAL}$ y $\epsilon_{31TOTAL}$ ya que los coeficientes $\lambda_{l_1}, \lambda_{l_2}, \lambda_{l_3}, \lambda_{l_4}, \lambda_{\theta_1}, \gamma_{l_1}, \gamma_{l_2}, \gamma_{l_3}, \gamma_{l_4}$ y γ_{θ_1} son de signo y magnitud variable. Sin embargo, las cotas máximas de error son un referente en cuanto al máximo error posible alcanzado en las relaciones de transmision $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ y $\frac{\omega_3}{\omega_1}$. Las cotas máximas de error dependen de los coeficientes $\lambda_{l_i}, \lambda_{\theta_1}, \gamma_{l_i}, \gamma_{\theta_1}$ y de las tolerancias dimensionales $\delta l_1, \delta l_2, \delta l_3, \delta l_4, \delta \theta_1$. Los coeficientes $\lambda_{l_i}, \lambda_{\theta_1}, \gamma_{l_i}, \gamma_{\theta_1}$ a su vez dependen del posicionamiento angular de entrada, de salida, de las longitudes de los eslabones y de los coeficientes de influencia. Si se dan los errores $\epsilon_{21TOTAL}$ y $\epsilon_{31TOTAL}$ entonces el mecanismo funcionaría de manera ineficiente e incorrecta. En este caso se tendrá que dar una revisión de las tolerancias dimensionales IT de los parámetros geométricos puesto que podrían haber sido asignados de manera errónea. Por otra parte, los valores que presenta $\epsilon_{31TOTAL}$ con IT16 son hasta cinco veces mayores que la relación de transmision unitaria $\frac{\omega_3}{\omega_1}$, por lo tanto la fabricación de los eslabones debe hacerse con calidades mas pequeñas que IT16.

Ya que existe una cota maxima de error, también existirá una cota mínima de error. Ésta se conseguirá tomando el valor absoluto de la multiplicación de los coeficientes $\lambda_{l_1}, \lambda_{l_2}, \lambda_{l_3}, \lambda_{l_4}, \lambda_{\theta_1}$ y $\gamma_{l_1}, \gamma_{l_2}, \gamma_{l_3}, \gamma_{l_4}, \gamma_{\theta_1}$ por las respectivas tolerancias dimensionales $\delta l_1, \delta l_2, \delta l_3, \delta l_4, \delta \theta_1$. Cada valor absoluto es precedido por un signo negativo. Las cotas mínimas de error se presentan en las ecuaciones (2.104) y (2.105). De este modo, los errores parciales en las relaciones de transmisión debidos a las tolerancias dimensionales son todos negativos y el error sumario es grande. [22] [30]

$$\xi_{21TOTAL} = -|\lambda_{l_1}\delta l_1| - |\lambda_{l_2}\delta l_2| - |\lambda_{l_3}\delta l_3| - |\lambda_{l_4}\delta l_4| - |\lambda_{\theta_1}\delta \theta_1| \quad (2.104)$$

$$\xi_{31TOTAL} = -|\gamma_{l_1}\delta l_1| - |\gamma_{l_2}\delta l_2| - |\gamma_{l_3}\delta l_3| - |\gamma_{l_4}\delta l_4| - |\gamma_{\theta_1}\delta \theta_1| \quad (2.105)$$

Por lo tanto, también las siguientes igualdades se dan en los mecanismos de paralelogramo articulado.

$$\epsilon_{21TOTAL} > \delta i_{21TOTAL} > \xi_{21TOTAL} \quad (2.106)$$

$$\epsilon_{31TOTAL} > \delta i_{31TOTAL} > \xi_{31TOTAL} \quad (2.107)$$

Donde $\epsilon_{21TOTAL}, \epsilon_{31TOTAL}$ son las cotas máximas de error, $\delta i_{21TOTAL}, \delta i_{31TOTAL}$ son los errores totales en las relaciones de transmision y $\xi_{21TOTAL}, \xi_{31TOTAL}$ son las cotas mínimas de error.

2.12. Conclusiones del capítulo 2.

1. El posicionamiento angular de salida teórico cuando no se toman en cuenta los errores de posicionamiento de cada eslabón está únicamente en función de las longitudes de los eslabones y de la coordenada angular de entrada θ_1 . Sin embargo, dependiendo de la calidad de fabricación de los eslabones, existirán errores en las posiciones de salida, por lo tanto estas posiciones angulares quedan en función de estos errores. En general, un mecanismo de cuatro barras se puede ver como un robot de un grado de libertad.
2. Las relaciones de transmisión teóricas $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ y $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ pueden ser expresados en función de los coeficientes de influencia ε_{25} y ε_{35} respectivamente. Estos coeficientes dependen de pocos parámetros ya que están en función de las longitudes y el posicionamiento angular de entrada y de salida. Los cocientes $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ y $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ presentan simetría entre sus configuraciones abierta y cerrada cuando se grafican en función de la coordenada angular de entrada θ_1 . Sin embargo, los errores asociados a las relaciones de transmisión modifican esta simetría.
3. El cálculo de los coeficientes de influencia en los errores de posicionamiento de los eslabones de salida de mecanismos de cuatro barras nos permite designar posiciones fundamentales adecuadas ya que los errores de posicionamiento angular dependen de estos coeficientes y de las tolerancias dimensionales. Estos errores se pueden minimizar alternando los signos de las tolerancias dimensionales. Las posiciones fundamentales se asignan por encima o por debajo de cero, es decir, las tolerancias dimensionales pueden ser positivas o negativas.
4. Los coeficientes λ_{l_i} , λ_{θ_1} , γ_{l_1} , γ_{θ_1} dependen de las longitudes de los eslabones, del posicionamiento angular de entrada θ_1 , del posicionamiento angular de salida θ_2 , θ_3 y de los coeficientes de influencia. A su vez, éstos también dependen del posicionamiento angular y de las longitudes de los eslabones, por lo tanto, el cálculo de estos coeficientes se realiza a través de parámetros conocidos. Estos coeficientes se utilizan para calcular los errores totales en las relaciones de transmisión. En el caso del mecanismo de paralelogramo articulado mientras mayor sean las longitudes de los eslabones, los coeficientes anteriormente mencionados serán mas pequeños, mientras menor sean las longitudes de los eslabones, los coeficientes λ_{l_i} , λ_{θ_1} , γ_{l_1} , γ_{θ_1} serán mayores.
5. El mecanismo de paralelogramo articulado presenta la máxima relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ posible en mecanismos de cuatro barras, la cual es unitaria. En los intervalos en que la relación de transmisión es constante se comporta como una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos cuyos radios base son iguales.
6. La metodología utilizada en esta sección se puede extender a mecanismos y robots manipuladores de n grados de libertad, puesto que siempre habrá errores de fabricación en los eslabones y mecanismos que constituyen a estos elementos.

Capítulo 3

Engranajes cilíndricos de dientes rectos

3.1. Engranajes cilíndricos de dientes rectos

Los engranes cilíndricos de dientes rectos son el tipo de engrane más simple de estudiar, ya que su modelo matemático está reportado en la literatura clásica. Es también el más sencillo de fabricar. Los engranajes cilíndricos de dientes rectos funcionan de manera excelente a velocidades angulares moderadas, pero tienden a generar ruido a altas velocidades angulares. Los dientes de los engranes rectos se fabrican con perfil de involuta. La mayoría de los engranajes están fabricados con este tipo de perfil y con ángulos de presión estandarizados. En general, los engranes cilíndricos de dientes rectos se dividen en dos categorías principales: externos e internos. Sin embargo, en este trabajo, solo nos centraremos en los externos cuyos dientes están cortados por fuera de un cilindro. En general, este tipo de engranes se emplea para velocidades lentas. Los engranajes cilíndricos de dientes rectos cuentan con dientes montados sobre ejes paralelos que les permite llevar el movimiento de rotación de un eje hacia otro. En ámbitos industriales este tipo de elementos son uno de los más confiables y utilizados. Los engranajes rectos destacan porque en ellos no se inducen fuerzas axiales ya que sus dientes son paralelos al eje de simetría del engrane. Este tipo de elementos solo pueden engranarse si sus ejes son paralelos y si la distancia entre centros es la correcta. Los engranes cilíndricos de dientes rectos se pueden encontrar en diferentes tipos de maquinaria como en trituradoras, relojes mecánicos, batidoras, lavadoras, mezcladoras, cortadoras, etc. Estos elementos se utilizan para aumentar o disminuir el par o torque motor que llegará al árbol de entrada de la máquina. Al incrementar el par, disminuye la velocidad angular y al aumentar la velocidad angular, el par disminuye. Los engranes rectos están sujetos a errores en su fabricación. En esta sección, se estudiará su cinemática, su radio de curvatura, su relación de transmisión, además, se estudiarán los errores vinculados a su relación de transmisión debidos a los errores de fabricación de los radios base de cada rueda dentada y de los ángulos de presión. Se incorporan dos casos de estudio particular para engranes cilíndricos de dientes rectos usando el software MATLAB para mostrar los resultados del modelo matemático. [23] [24] [25] [26]

3.2. Radio de Curvatura de una curva involuta

El radio de curvatura es una magnitud que mide el inverso de la curvatura de un elemento geométrico tal como una línea curva o semicurva. En general, los engranes cilíndricos de dientes rectos se fabrican con perfil de involuta, las cuales se generan a partir de círculos base. En la literatura clásica se aborda muy poco esta temática, sin embargo, es importante conocer tanto la curvatura y radio de curvatura de este tipo de curvas. [32]

Partiremos de la siguiente definición:

“La curva involuta de un círculo es el lugar geométrico de la punta de una cuerda que se desenrolla, manteniéndola tensa, a partir del círculo correspondiente conocido como círculo base” [33].

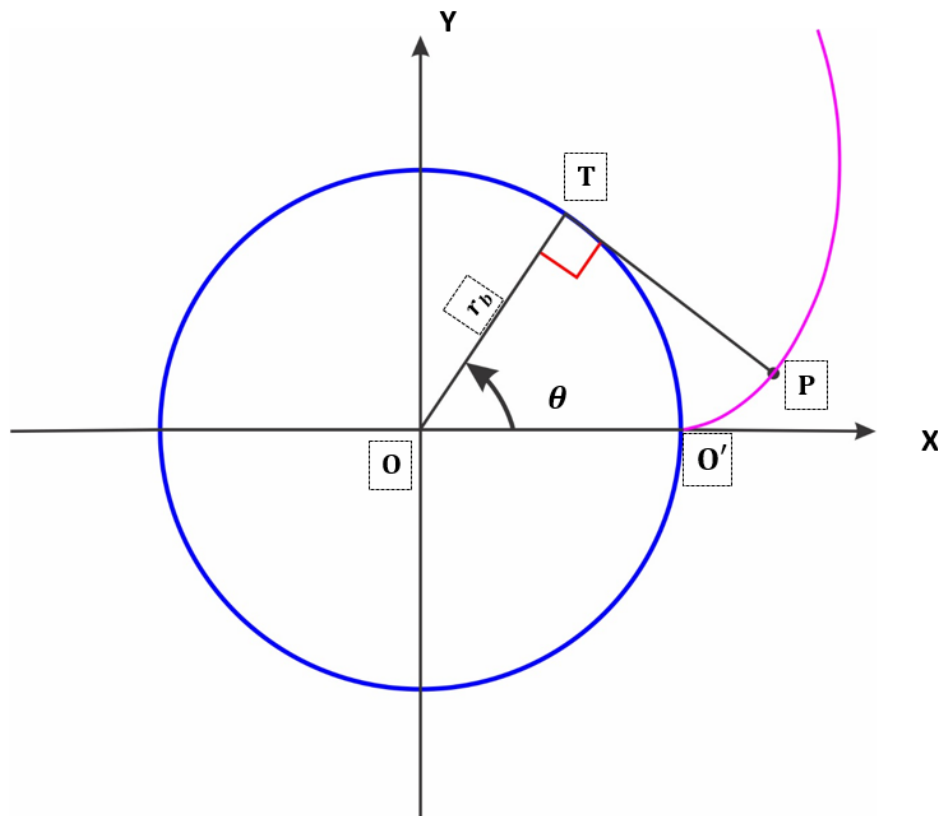


Figura 3.1: Círculo base (Azul) y su curva involuta (Magenta).

En la figura 3.1 se presenta un círculo base con su curva involuta y sus parámetros geométricos. El círculo base tiene un radio r_b , y el ángulo formado entre el eje x y el radio base está denotado como θ , se puede observar que el ángulo formado entre los segmentos \overline{OT} y \overline{TP} es de 90 grados.

En la figura 3.1 se observa que la longitud del arco $\widehat{O'T}$ está dada como se muestra en la

ecuación (3.1).

$$\widehat{O'T} = \theta r_b \quad (3.1)$$

Por definición, el ángulo θ está señalado en la ecuación (3.2).

$$\theta = \frac{\widehat{O'T}}{r_b} \quad (3.2)$$

De acuerdo a la figura 3.1, la longitud de arco también queda definida según (3.3).

$$\widehat{O'T} = \overline{TP} \quad (3.3)$$

A su vez, la longitud \overline{TP} se puede expresar en función del ángulo θ y del radio base r_b como se indica en la ecuación (3.4).

$$\overline{TP} = \theta r_b \quad (3.4)$$

Por otra parte, el ángulo θ entre la línea \overline{OT} y la línea de referencia horizontal $\overline{OO'}$ es el mismo ángulo que se forma entre la línea \overline{TP} y la vertical que pasa por T , como se muestra en la figura 3.1. La proyección del segmento \overline{TP} sobre los ejes x e y se da en la ecuación (3.5).

$$\overline{TP} = \theta r_b (\sin(\theta)\hat{i} - \cos(\theta)\hat{j}) \quad (3.5)$$

Por otro lado las ecuaciones paramétricas del punto P están dadas por las expresiones en (3.6).

$$\begin{aligned} x &= r_b (\cos(\theta) + \theta \sin(\theta)) \\ y &= r_b (\sin(\theta) - \theta \cos(\theta)) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para una curva definida en forma paramétrica por las ecuaciones $x = x(\theta)$, $y = y(\theta)$, entonces su curvatura K en cualquier punto (x, y) viene dada por la ecuación (3.7). La curvatura puede ser positiva, negativa o nula. El numerador es un polinomio con base en una función suave, y también lo es el denominador. El resultado estará dado también por una función suave [32].

$$K = \frac{|x'y'' - y'x''|}{[(x')^2 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.7)$$

Por lo tanto, de acuerdo a la ecuación (3.7) se necesita obtener las primeras y segundas derivadas respecto a θ de las ecuaciones paramétricas descritas en la ecuación (3.6). Las primeras derivadas de las ecuaciones paramétricas se describen en (3.8).

$$\begin{aligned}x' &= r_b(\theta \cos(\theta)) \\y' &= r_b(\theta \sin(\theta))\end{aligned}\tag{3.8}$$

Las segundas derivadas de las ecuaciones paramétricas dadas en (3.6) están expresadas en la ecuación (3.9).

$$\begin{aligned}x'' &= r_b(\cos(\theta) - \theta \sin(\theta)) \\y'' &= r_b(\sin(\theta) + \theta \cos(\theta))\end{aligned}\tag{3.9}$$

Al sustituir las ecuaciones (3.8) y (3.9) en (3.7) se obtendrá la expresión para la curvatura K en cualquier punto de la curva involuta como se muestra en la ecuación (3.10).

$$K = \frac{\left| r_b^2(\theta \cos(\theta) \sin(\theta) + \theta^2 \cos^2(\theta)) - r_b^2(\theta \cos(\theta) \sin(\theta) - \theta^2 \sin^2(\theta)) \right|}{\left[r_b^2 \theta^2 \cos^2(\theta) + r_b^2 \theta^2 \sin^2(\theta) \right]^{\frac{3}{2}}}\tag{3.10}$$

Finalmente, desarrollando el álgebra obtenemos la curvatura K descrita por la ecuación (3.11).

$$K = \frac{1}{\theta r_b}\tag{3.11}$$

Como el radio de curvatura en un punto arbitrario está dado como el inverso de la curvatura K [32]. La expresión para el radio de curvatura en un punto arbitrario de la involuta se describe en la ecuación (3.12). El radio de curvatura está denotado por la letra ρ .

$$\rho = \frac{1}{K}\tag{3.12}$$

Al sustituir la ecuación (3.12) en la ecuación (3.11) obtenemos el radio de curvatura en un punto arbitrario de la involuta. El radio de curvatura está dado como el producto del ángulo θ por el radio del círculo base r_b , y también como la longitud \overline{TP} como se indica en (3.13).

$$\rho = \theta r_b = \overline{TP}\tag{3.13}$$

De aquí se propone el siguiente corolario:

Corolario: “El centro de curvatura de una curva de tipo involuta en un punto arbitrario siempre yacerá sobre el círculo base de la misma involuta, así mismo, la evoluta de la involuta de un círculo base es el propio círculo base, estando el radio de curvatura en función del radio base y su correspondiente ángulo.” [32] [33]

3.3. Relación de transmisión en engranes cilíndricos de dientes rectos.

Los engranes cilíndricos de dientes rectos se estudian porque la transmisión del movimiento rotatorio de un eje a otro eje se presenta prácticamente en todas las máquinas imaginables. Los engranes cilíndricos de dientes rectos constituyen uno de los mejores mecanismos disponibles para transmitir movimiento continuo y constante. La relación de transmisión en engranes cilíndricos de dientes rectos es una ganancia de velocidades angulares [23] [25]. Esta relación se debe a la diferencia de diámetros de las dos ruedas. Idealmente una transmisión por engranes cilíndricos de dientes rectos debe tener una relación de transmisión constante y continua. Matemáticamente, la relación de transmisión entre dos engranes cilíndricos de dientes rectos con un determinado número de dientes se puede expresar como se muestra en la ecuación (3.14).

$$i = \frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{Z_1}{Z_2} \quad (3.14)$$

En donde i corresponde a la relación de transmisión, ω_e es la velocidad angular de entrada, ω_s es la velocidad angular de salida transmitida, Z_1 es el número de dientes de la rueda dentada de entrada, Z_2 es el número de dientes de la rueda dentada de salida. [23-26]

3.3.1. Terminología y definiciones.

Los engranes cilíndricos de dientes rectos sirven para transmitir movimiento rotatorio entre ejes paralelos. En general, los dientes de este tipo de engranes son paralelos al eje de rotación. A continuación se presentan definiciones y terminología común para este tipo de engranes.

- **Círculo de paso:** Es un círculo teórico sobre el que generalmente se basan todos los cálculos. Los círculos de paso de un par de engranes acoplados son tangentes entre sí. El piñón es el más pequeño de los dos engranes acoplados, el más grande generalmente es llamado engrane o rueda.
- **Paso circular:** Es la distancia, medida sobre el círculo de paso, desde un punto en un diente a un punto correspondiente en un diente adyacente. De esta manera, el paso circular es igual a la suma del espesor del diente y del ancho del espacio.
- **Módulo:** Es la razón del diámetro de paso al número de dientes. La unidad de longitud acostumbrada es el milímetro. El módulo es el índice del tamaño del diente en el SI (Sistema Internacional), en tanto que el paso diametral solo se emplea con las unidades comúnmente empleadas en Estados Unidos.
- **Paso Diametral:** Está dado por la relación del número de dientes en el engrane respecto del diámetro de paso. Por lo tanto, es el recíproco del módulo. Debido a que el paso diametral se utiliza sólo con unidades del sistema inglés, se expresa en dientes por pulgada.
- **Addendum:** Es la distancia radial entre el borde superior del diente y el círculo de paso.
- **Dedendum:** Es la distancia radial que va del borde inferior del diente hasta el círculo de paso.

- **Altura total:** Es la suma del addendum y el dedendum.
- **Círculo de holgura:** Es un círculo tangente al de addendum del engrane acoplado. El dedendum en un engrane dado excede al addendum del engrane con el que se acopla.
- **Juego entre dientes:** Es la cantidad en la que la anchura de un espacio entre dientes excede al espesor del diente acoplado sobre los círculos de paso.

En la figura 3.2 se ilustra la terminología de los dientes de los engranes, en donde se muestran la mayor parte de las definiciones anteriores.

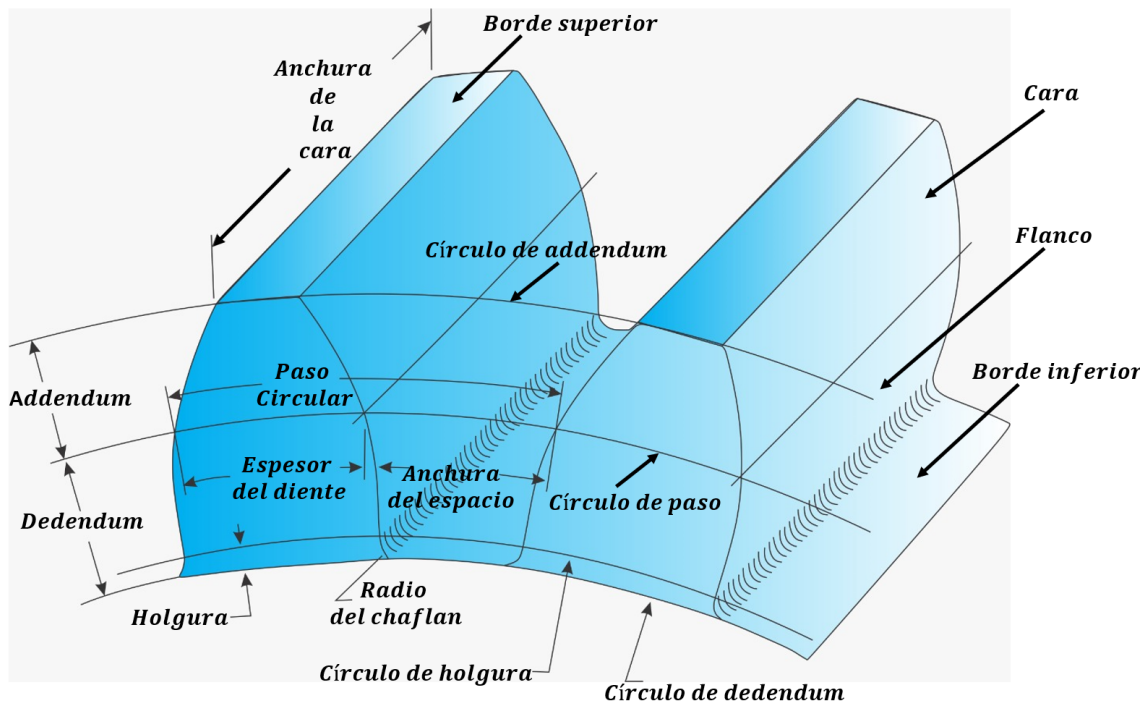


Figura 3.2: Terminología en un engrane cilíndrico de dientes rectos. [26]

3.3.2. Ley Fundamental del engranado.

A continuación se presentan dos acepciones de la Ley Fundamental del engranado.

- **Primera acepción de la ley fundamental:** De acuerdo a esta primera acepción de la ley, la relación de las velocidades angulares entre el elemento de salida y el de entrada (en este orden) en una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos, siempre es constante independientemente de la etapa de endendamiento en que se encuentren los dientes en contacto. [26]
- **Segunda acepción de la ley fundamental:** De acuerdo a esta segunda acepción de la ley, la fuerza de reacción normal a la superficie del diente de una rueda en el punto de contacto siempre pasa por un punto fijo P sobre la línea de centros, que divide a dicho segmento (al segmento que une los centros de las ruedas) en dos partes de distintos

3.3. RELACIÓN DE TRANSMISIÓN EN ENGRANES CILÍNDRICOS DE DIENTES RECTOS.81

tamaños entre sí (pudiendo incluso ser iguales), pero invariantes de tamaño con el tiempo. Esta reacción mantiene siempre una misma dirección (o inclinación) y brazo respecto al centro de giro de cada engrane, independientemente de la etapa de endendamiento en que se encuentren los dientes en contacto. [26]

En un problema genérico en el que dos elementos están vinculados a bastidor y ambos están en contacto por un par superior, la normal común en el punto de contacto pasa por un punto P que divide a la línea de centros en dos segmentos. En el caso más general posible, estos segmentos no tienen porque permanecer del mismo tamaño conforme transcurre el tiempo y de hecho son de tamaños diferentes para dos instantes de tiempo distintos en un mecanismo de leva-seguidor, por lo que en un problema genérico de este tipo, el cociente de la velocidad angular de salida a la velocidad angular de entrada es variable, como se demuestra a continuación. Sin embargo, en una transmisión de engranajes dicho cociente no es variable sino constante, independientemente de la etapa del contacto en que se encuentren la leva y el seguidor. [23-26]

A continuación se va a demostrar que, para un instante de tiempo dado, cuando se transmite el movimiento de giro desde un elemento de entrada ligado a bastidor hasta uno de salida, también ligado a bastidor, por medio de un par superior como se muestra en la figura 3.3, el cociente de la velocidad angular de salida a la velocidad angular de entrada es directamente proporcional al cociente de los segmentos $\overline{PO_{13}}$ y $\overline{PO_{12}}$ en que el punto P divide la línea de centros $\overline{O_{12}O_{13}}$.

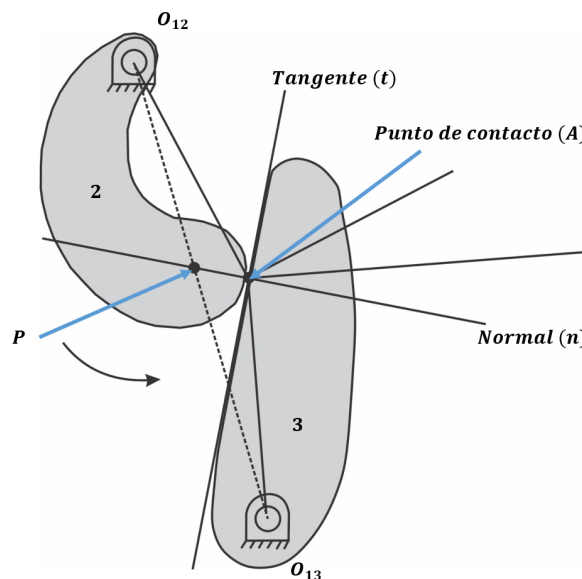


Figura 3.3: Mecanismo de Leva-seguidor. Se muestran las rectas $\overline{O_{12}A}$ y $\overline{O_{13}A}$ y sus respectivas perpendiculares por A

Posteriormente sobre las perpendiculares de $\overline{O_{12}A}$ y $\overline{O_{13}A}$ estarán los vectores de veloci-

dad obligadas \vec{V}_{A2} y \vec{V}_{A3} . En la tangente común a ambos elementos (leva y seguidor) hay deslizamiento y las velocidades de A2 y A3 son diferentes, mientras que en la normal común las velocidades de A2 y A3 son iguales. En la figura 3.4 se muestra la misma figura 3.3, ahora con los segmentos $\overline{O_{12}a}$ y $\overline{O_{13}b}$ de perpendiculares a la línea normal. Estas perpendiculares intersectan en los puntos a y b a la línea normal. Se puede observar como se han formado diferentes triángulos rectángulos. [23-26]

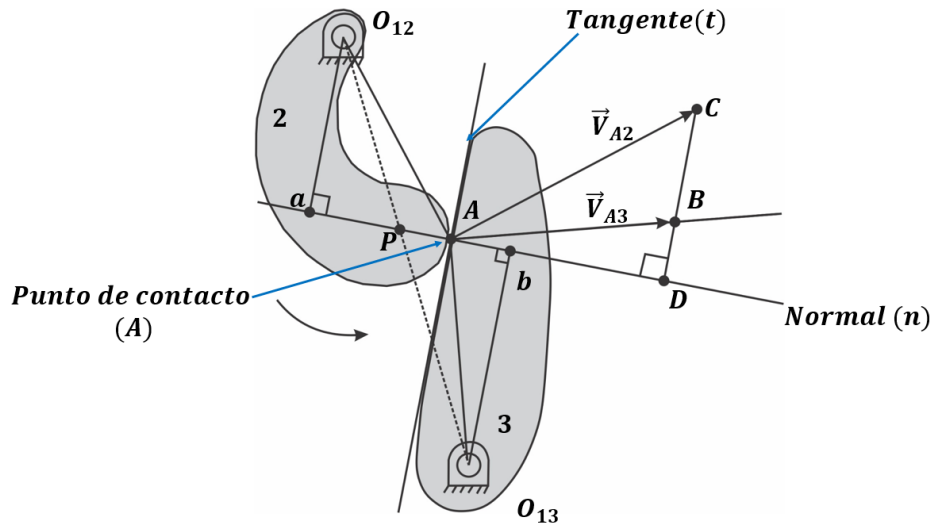


Figura 3.4: Mecanismo de Leva-seguidor. Trazado por $\overline{PO_{12}}$ y $\overline{PO_{13}}$ de perpendiculares a la línea normal, estas intersectan en los puntos a y b a dicha línea normal.

De la construcción de la figura 3.4 nos queda que los triángulos $O_{12}Aa$ y ACD son semejantes, también se puede notar que los segmentos \overline{AD} y \overline{Aa} están sobre la misma base que es la línea normal. De la igualdad de los triángulos rectángulos podemos expresar la ecuación (3.15)

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{O_{12}a}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{O_{12}A}} \quad (3.15)$$

El cociente $\frac{\overline{AC}}{\overline{O_{12}A}}$ en el lado derecho de la ecuación anterior es la velocidad angular ω_2 del cuerpo 2. A la relación descrita por la ecuación (3.15) también se puede llegar a través de igualar el coseno del ángulo en A en el triángulo ACD con el coseno del ángulo en O_{12} en el triángulo $O_{12}Aa$. Por otra parte, los triángulos ADB y AbO_{13} son también semejantes, cumpliéndose la ecuación (3.16)

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{O_{13}b}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{O_{13}A}} \quad (3.16)$$

El cociente $\frac{\overline{AB}}{\overline{O_{13}A}}$ en el lado derecho de la ecuación anterior es la velocidad angular ω_3 del cuerpo 3. A la relación descrita en la ecuación (3.16) también se puede llegar a través de igualar

3.3. RELACIÓN DE TRANSMISIÓN EN ENGRANES CILÍNDRICOS DE DIENTES RECTOS.83

el coseno del ángulo en A en el triángulo ABD con el coseno del ángulo en O_{13} en el triángulo $O_{13}Ab$. Posteriormente dividiremos la ecuación (3.15) entre la ecuación (3.16) como se muestra en la ecuación (3.17).

$$\frac{\frac{\overline{AD}}{\overline{O_{12}a}}}{\frac{\overline{AD}}{\overline{O_{13}b}}} = \frac{\frac{\overline{AC}}{\overline{O_{12}A}}}{\frac{\overline{AB}}{\overline{O_{13}A}}} = \frac{\omega_2}{\omega_3} \quad (3.17)$$

Al desarrollar el álgebra correspondiente en la ecuación (3.17) obtenemos la ecuación (3.18)

$$\frac{\overline{O_{13}b}}{\overline{O_{12}a}} = \frac{\omega_2}{\omega_3} \quad (3.18)$$

La ecuación (3.18) también es equivalente a la ecuación (3.19) que se describe a continuación.

$$\frac{\overline{O_{12}a}}{\overline{O_{13}b}} = \frac{\omega_3}{\omega_2} \quad (3.19)$$

Queda demostrado entonces que la relación de transmisión está dada como el cociente entre las longitudes $\overline{O_{12}a}$ y $\overline{O_{13}b}$. Este cociente es equivalente al cociente entre la velocidad angular del elemento de salida 3 y la velocidad angular de entrada del elemento 2. A continuación, a partir de la figura 3.5 también se demostrará la relación de transmisión $\frac{\omega_3}{\omega_2}$.

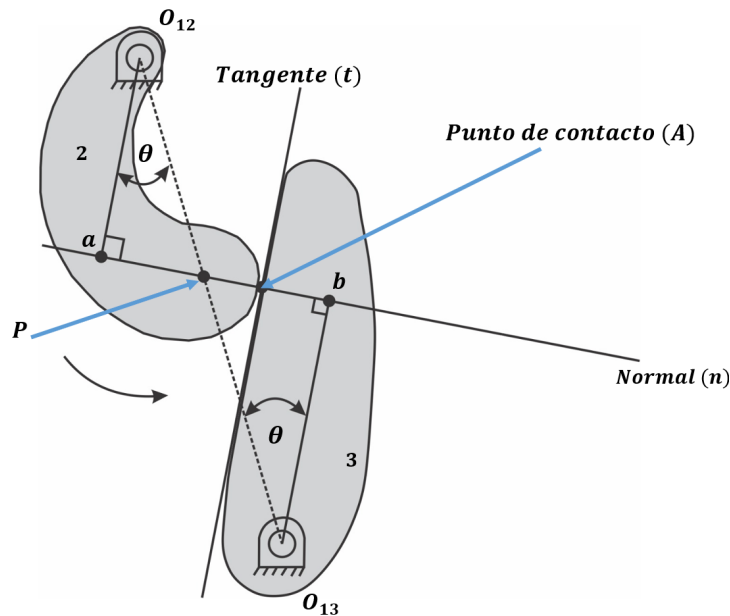


Figura 3.5: Mecanismo de Leva-seguidor. Relación entre los segmentos $\overline{O_{13}b}$ y $\overline{O_{12}a}$ con los segmentos $\overline{O_{12}P}$ y $\overline{O_{13}P}$.

Podemos notar en la figura 3.5 que los triángulos $O_{12}aP$ y $O_{13}bP$ son semejantes, cumpliéndose para el triángulo $O_{12}aP$ la ecuación (3.20).

$$\cos(\theta) = \frac{\overline{O_{12}a}}{\overline{O_{12}P}} \quad (3.20)$$

En el caso del triángulo $O_{13}bP$ se cumple la ecuación (3.21).

$$\cos(\theta) = \frac{\overline{O_{13}b}}{\overline{O_{13}P}} \quad (3.21)$$

Posteriormente, se igualan las ecuaciones (3.20) y (3.21) como se indica en la ecuación (3.22).

$$\cos(\theta) = \frac{\overline{O_{12}a}}{\overline{O_{12}P}} = \frac{\overline{O_{13}b}}{\overline{O_{13}P}} \quad (3.22)$$

A partir de la ecuación (3.22) realizamos álgebra de fracciones y llegamos a la expresión dada en la ecuación (3.23)

$$\cos(\theta) = \frac{\overline{O_{12}a}}{\overline{O_{13}b}} = \frac{\overline{O_{12}P}}{\overline{O_{13}P}} \quad (3.23)$$

Sabemos de la ecuación (3.19) que $\frac{\overline{O_{12}a}}{\overline{O_{13}b}} = \frac{\omega_3}{\omega_2}$ por lo tanto podemos simplificar la ecuación (3.23) como se indica en la ecuación (3.24).

$$\frac{\overline{O_{12}a}}{\overline{O_{13}b}} = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{\overline{O_{12}P}}{\overline{O_{13}P}} \quad (3.24)$$

Esto quiere decir que el cociente $\frac{\omega_3}{\omega_2}$ está en proporción inversa a la distancia en que el punto P divide la línea de centros, siendo el punto P , el punto de intersección entre la normal común y la línea de centros. En general, y como ya se ha dicho anteriormente, la posición del punto P no es fija. El punto P se mueve sobre la línea de centros conforme los dos elementos van girando haciendo que el cociente $\frac{\omega_3}{\omega_2}$ sea variable (aún cuando la velocidad angular ω_2 sea constante). A partir de lo anterior se enuncian los siguientes corolarios.

Corolario: “Si la línea de acción normal o línea práctica del engranaje siempre interseca a la línea de los centros en un punto fijo P , conforme ambos elementos van girando, entonces la relación $\frac{\omega_3}{\omega_2}$ permanece constante. Puede conseguirse una relación de velocidades constantes entre dos miembros en contacto con deslizamiento siempre que las formas de los perfiles de los eslabones sean tales que la normal común en el punto de contacto pase siempre por un punto fijo en la línea de centros. En este caso, se dice que los perfiles de ambos eslabones son conjugados. El punto P recibe el nombre de punto de paso o punto primitivo. Como ya sabemos, el punto primitivo P se corresponde con el punto de contacto entre dos supuestas circunferencias primitivas que ruedan sin deslizamiento, transmitiendo el movimiento del piñón a la rueda

3.4. MECANISMO EQUIVALENTE DE CUATRO BARRAS PARA UNA TRANSMISIÓN POR ENGRANAJES

con la misma relación $\frac{\omega_3}{\omega_2}$. Las curvas matemáticas estandarizadas en el mundo que se usan como perfiles conjugados en una transmisión por engranajes son las evolventes (o involutas) de círculos bases y las curvas cicloidales. Las cicloidales se emplearon inicialmente (y continúan usándose en relojería) y ahora se han reemplazado con la involuta. La involuta o evolvente de un círculo tiene varias ventajas, entre las cuales se destacan su facilidad de fabricación y el hecho de que la distancia entre centros de dos engranes de involuta puede variar (por ejemplo, debido a las tolerancias de montaje y errores de fabricación), sin que por ello cambie la relación $\frac{\omega_3}{\omega_2}$. El círculo a partir del cual se genera la involuta no es el círculo de raíz, sino un círculo que se conoce como **círculo base de la evolvente**, el cual es el fundamento esencial del sistema de engranajes de involuta”. [25] [26]

Corolario: “Como la relación de transmisión es inversamente proporcional a la distancia perpendicular desde los centros fijos a la línea de acción, la relación de transmisión no se ve afectada por cambios en la distancia entre centros. El cociente de los radios de los círculos base, que son invariantes una vez formadas las ruedas, es el que determina la relación de velocidad angulares de las ruedas, luego ese cociente permanece constante aun cuando se cambie la distancia entre centros.” [23]

3.4. Mecanismo equivalente de cuatro barras para una transmisión por engranajes.

En la figura 3.6 se muestran dos involutas en contacto o “engranadas” en un instante de tiempo. Se representan los círculos de paso del piñón y de la rueda, los círculos base del piñón y del engrane y la línea de acción normal que es tangente a ambos círculos base, también se muestran los dientes del piñón y del engrane o rueda [23]. Además, de la figura 3.6 es posible observar el mecanismo de cuatro barras equivalente formado por el radio base del engrane, el radio base del piñón, la línea de acción normal y la distancia entre centros C . Este mecanismo equivalente consiste de una etapa de engranado que, a diferencia de un mecanismo de cuatro barras convencional, éste es estático. De acuerdo a la geometría de la figura 3.6 y a lo visto en la sección anterior es posible definir la relación de transmisión como se indica en la ecuación (3.25).

$$i = \frac{\overline{O_4P}}{\overline{O_2P}} \quad (3.25)$$

En la ecuación (3.25), i representa la relación de transmisión teórica que es de tipo adimensional. El segmento $\overline{O_4P}$ es la línea horizontal desde el centro del engrane o rueda al punto de paso P y $\overline{O_2P}$ es la línea horizontal desde el centro del piñón al punto de paso P . El punto P es el punto de paso donde los círculos de paso del engrane y el piñón son tangentes entre sí. No necesariamente la configuración debe ser la descrita por la figura 3.6 ya que el piñón puede estar del lado izquierdo y el engrane o rueda del lado derecho o ambos engranes pueden tener el mismo radio base. A su vez, uno puede estar arriba o abajo o en diagonal. La línea de acción normal siempre es perpendicular a los radios base. [23]

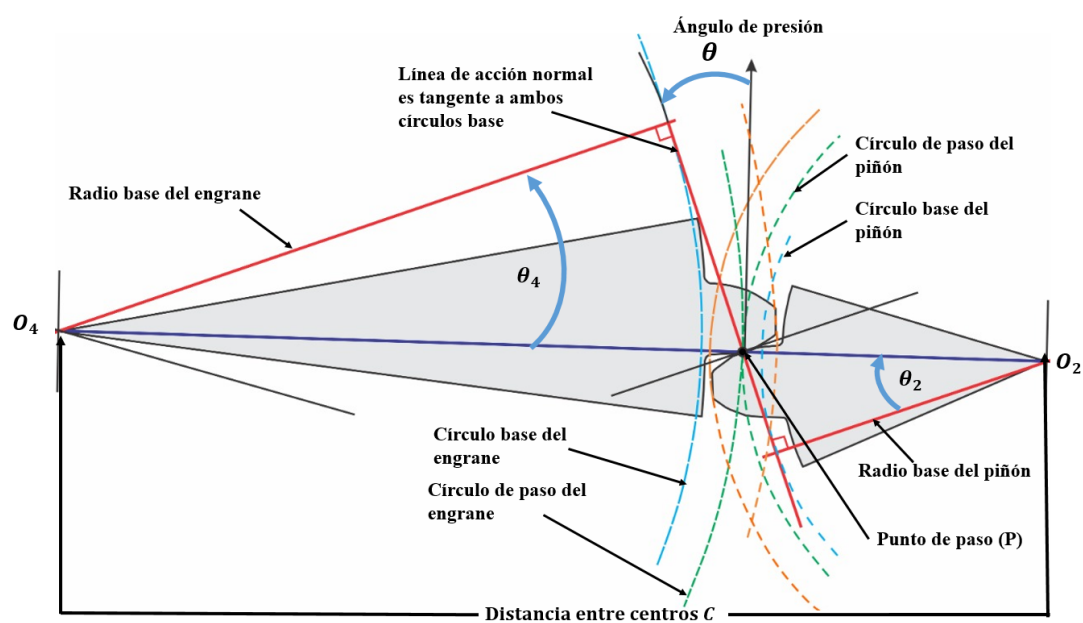


Figura 3.6: Geometría de contacto en una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos. [23]

Podemos extraer de la figura 3.6 el mecanismo equivalente de cuatro barras indicado en líneas rojas y mostrado en la figura 3.7, el cual está conformado por dos lazos vectoriales triángulares.

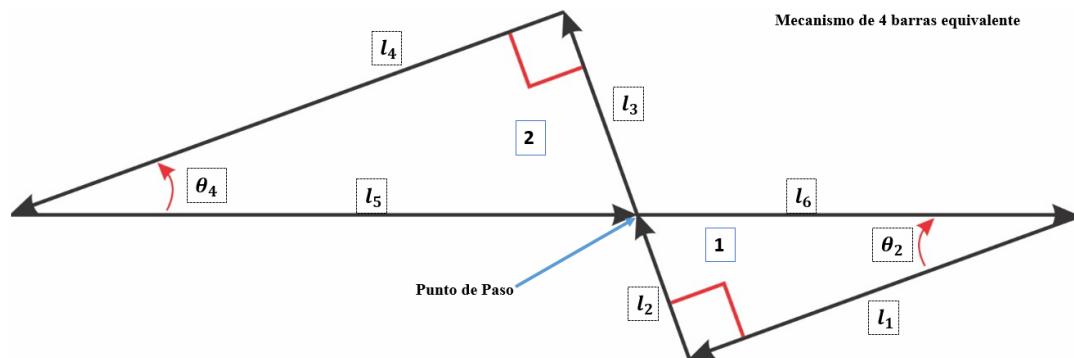


Figura 3.7: Modelo de cuatro barras estático equivalente para una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos.

De acuerdo al modelo equivalente de la figura 3.7, el mecanismo de cuatro barras está conformado por: la longitud l_1 correspondiente al radio base del piñón, las longitudes l_2 y l_3 asociadas a la longitud de la línea de acción normal, la longitud l_4 es el radio base del engrane, la longitud l_5 corresponde a la línea horizontal $\overline{O_4P}$ y la longitud l_6 es la línea horizontal $\overline{O_2P}$. A su vez, el ángulo θ_2 representa el ángulo de presión del piñón y el ángulo θ_4 el ángulo de presión del engrane. Teóricamente, los ángulos θ_2 y θ_4 son iguales [23]. A partir del modelo equivalente se modelan las ecuaciones de restricción cinemática sobre los ejes x e y , respectivamente. Las

3.4. MECANISMO EQUIVALENTE DE CUATRO BARRAS PARA UNA TRANSMISIÓN POR ENGRANA

ecuaciones del primer lazo vectorial están dadas como se muestra en la ecuación (3.26).

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \cos(\theta_2) + l_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) - l_6 = 0 \\y_1 &= -l_1 \sin(\theta_2) + l_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = 0\end{aligned}\tag{3.26}$$

Las ecuaciones para el segundo lazo vectorial están dadas en la ecuación (3.27).

$$\begin{aligned}x_2 &= l_3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_4\right) + l_4 \cos(\theta_4) - l_5 = 0 \\y_2 &= l_3 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_4\right) - l_4 \sin(\theta_4) = 0\end{aligned}\tag{3.27}$$

De acuerdo a las funciones trigonométricas fundamentales [34] indicadas en (3.28), es posible reestructurar las ecuaciones de restricción cinemática dadas en las expresiones (3.26) y (3.27).

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin(\theta) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos(\theta)\end{aligned}\tag{3.28}$$

Las expresiones reestructuradas se muestran en (3.29). Las ecuaciones dadas en (3.29) son mas compactas, esto permitirá un manejo mas adecuado de las operaciones matemáticas.

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \cos(\theta_2) + l_2 \sin(\theta_2) - l_6 = 0 \\y_1 &= -l_1 \sin(\theta_2) + l_2 \cos(\theta_2) = 0 \\x_2 &= l_3 \sin(\theta_4) + l_4 \cos(\theta_4) - l_5 = 0 \\y_2 &= l_3 \cos(\theta_4) - l_4 \sin(\theta_4) = 0\end{aligned}\tag{3.29}$$

De las ecuaciones dadas en (3.29) podemos despejar los parámetros geométricos l_2 , l_3 , l_5 y l_6 , en función de los radios bases del piñón y el engrane, respectivamente, como se indica en las expresiones dadas en (3.30).

$$\begin{aligned}l_2 &= l_1 \tan(\theta_2) \\l_3 &= l_4 \tan(\theta_4) \\l_5 &= l_4 \left(\cos(\theta_4) + \tan(\theta_4) \sin(\theta_4) \right) \\l_6 &= l_1 \left(\cos(\theta_2) + \tan(\theta_2) \sin(\theta_2) \right)\end{aligned}\tag{3.30}$$

La cinemática del mecanismo de cuatro barras equivalente está en función de los parámetros geométricos l_1 , l_2 , l_3 , l_4 , l_5 , l_6 , θ_2 , θ_4 . A continuación, se desarrollarán los diferenciales totales aplicados a las ecuaciones de restricción cinemática. Relacionaremos los diferenciales de las ecuaciones (3.29) con los errores en la relación de transmisión del mecanismo a través de los grados de calidad IT. [27-29]

3.5. Errores totales del mecanismo equivalente de cuatro barras.

Aplicamos los diferenciales totales a las ecuaciones cinemáticas [19-20] descritas en la ecuación (3.29), lo cual genera las nuevas ecuaciones que se describen en (3.31).

$$\begin{aligned}
\delta x_1 &= \cos(\theta_2)\delta l_1 + \sin(\theta_2)\delta l_2 - \delta l_6 - l_1 \sin(\theta_2)\delta\theta_2 + l_2 \cos(\theta_2)\delta\theta_2 = 0 \\
\delta y_1 &= -\sin(\theta_2)\delta l_1 + \cos(\theta_2)\delta l_2 - l_1 \cos(\theta_2)\delta\theta_2 - l_2 \sin(\theta_2)\delta\theta_2 = 0 \\
\delta x_2 &= \cos(\theta_4)\delta l_4 + \sin(\theta_4)\delta l_3 - \delta l_5 + l_3 \cos(\theta_4)\delta\theta_4 - l_4 \sin(\theta_4)\delta\theta_4 = 0 \\
\delta y_2 &= -\sin(\theta_4)\delta l_4 + \cos(\theta_4)\delta l_3 - l_4 \cos(\theta_4)\delta\theta_4 - l_3 \sin(\theta_4)\delta\theta_4 = 0
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Expresadas en notación matricial, las cuatro ecuaciones anteriores quedan compactadas como se muestra en (3.32).

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta_2) & 0 & 0 & -1 \\ \cos(\theta_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta_4) & -1 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_4) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_5 \\ \delta l_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & -l_1 \sin(\theta_2) + l_2 \cos(\theta_2) & 0 \\ -\sin(\theta_2) & 0 & -l_1 \cos(\theta_2) - l_2 \sin(\theta_2) & 0 \\ 0 & \cos(\theta_4) & 0 & l_3 \cos(\theta_4) - l_4 \sin(\theta_4) \\ 0 & -\sin(\theta_4) & 0 & -l_3 \sin(\theta_4) - l_4 \cos(\theta_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_4 \\ \delta\theta_2 \\ \delta\theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

A partir de aquí, despejaremos las variables de interés que son δl_5 y δl_6 , para determinar la influencia de las tolerancias dimensionales en la relación de transmisión de una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos. Tenemos que en la forma matricial, las matrices **A** y **B** están expresadas en función de los ángulos de presión del engrane y el piñón, y de las longitudes que componen el mecanismo de cuatro barras equivalente [23]. Las matrices están dadas en (3.33).

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \sin(\theta_2) & 0 & 0 & -1 \\ \cos(\theta_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta_4) & -1 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_4) & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & -l_1 \sin(\theta_2) + l_2 \cos(\theta_2) & 0 \\ -\sin(\theta_2) & 0 & -l_1 \cos(\theta_2) - l_2 \sin(\theta_2) & 0 \\ 0 & \cos(\theta_4) & 0 & l_3 \cos(\theta_4) - l_4 \sin(\theta_4) \\ 0 & -\sin(\theta_4) & 0 & -l_3 \sin(\theta_4) - l_4 \cos(\theta_4) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Podemos notar que ambas matrices son cuadradas de orden 4. La expresión (3.32) se puede reescribir en una forma compacta y denotada por la ecuación (3.34). En esta forma será más fácil manejar las operaciones matriciales. [22] [30]

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_5 \\ \delta l_6 \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_4 \\ \delta\theta_2 \\ \delta\theta_4 \end{bmatrix} = 0 \tag{3.34}$$

3.5. ERRORES TOTALES DEL MECANISMO EQUIVALENTE DE CUATRO BARRAS.89

Los errores longitudinales de interés son δl_5 y δl_6 y serán despejados a través de la expresión matricial en forma compacta dada en (3.35).

$$\begin{bmatrix} \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_5 \\ \delta l_6 \end{bmatrix} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_4 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_4 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

De aquí tenemos que una consideración importante es que exista la inversa de la matriz \mathbf{A} , para que las operaciones matriciales puedan realizarse. A continuación, en la expresión (3.36) se muestra la inversa de la matriz \mathbf{A} . [30]

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\cos(\theta_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\cos(\theta_4)} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{\sin(\theta_4)}{\cos(\theta_4)} \\ -1 & \frac{\sin(\theta_2)}{\cos(\theta_2)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

En la ecuación (3.36) tenemos que la matriz \mathbf{A} es invertible y por lo tanto es posible realizar el producto matricial indicado en (3.35). A continuación en la ecuación (3.37) se muestra el determinante de la matriz \mathbf{A} .

$$\det \mathbf{A} = \cos(\theta_2) \cos(\theta_4) \quad (3.37)$$

En la ecuación (3.37), el determinante de la matriz \mathbf{A} nunca es nulo, puesto que θ_2 y θ_4 son los ángulos de presión de los engranes cilíndricos de dientes rectos y éstos se fabrican entre valores de 20 y 25 grados. La expresión completa de la ecuación (3.35) se muestra en (3.38).

$$\begin{bmatrix} \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_5 \\ \delta l_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sin(\theta_2) & 0 & 0 & -1 \\ \cos(\theta_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta_4) & -1 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_4) & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & -l_1 \sin(\theta_2) + l_2 \cos(\theta_2) & 0 \\ -\sin(\theta_2) & 0 & -l_1 \cos(\theta_2) - l_2 \sin(\theta_2) & 0 \\ 0 & \cos(\theta_4) & 0 & l_3 \cos(\theta_4) - l_4 \sin(\theta_4) \\ 0 & -\sin(\theta_4) & 0 & -l_3 \sin(\theta_4) - l_4 \cos(\theta_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_4 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_4 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

En la matriz \mathbf{B} del lado derecho de la expresión (3.39) se han sustituido las variables correspondientes a l_2 y l_3 en función de las variables l_1 y l_4 , asociadas estas últimas a los radios base del piñón y el engrane, de acuerdo a las ecuaciones dadas en (3.30).

$$\begin{bmatrix} \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_5 \\ \delta l_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sin(\theta_2) & 0 & 0 & -1 \\ \cos(\theta_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta_4) & -1 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_4) & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_2) & 0 & -l_1 (\cos(\theta_2) + \tan(\theta_2) \sin(\theta_2)) & 0 \\ 0 & \cos(\theta_4) & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\theta_4) & 0 & -l_4 (\cos(\theta_4) + \tan(\theta_4) \sin(\theta_4)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_4 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_4 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

El resultado de la multiplicación de la matriz inversa \mathbf{A}^{-1} con la matriz \mathbf{B} , afectado por el signo negativo, se escribe en la expresión (3.40). El resultado está dado por una matriz cuadrada de orden cuatro. [30]

$$\begin{bmatrix} \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_5 \\ \delta l_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan(\theta_2) & 0 & \frac{l_1(\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\tan(\theta_2))}{\cos(\theta_2)} & 0 \\ 0 & \tan(\theta_4) & 0 & \frac{l_4(\cos(\theta_4) + \sin(\theta_4)\tan(\theta_4))}{\cos(\theta_4)} \\ 0 & \cos(\theta_4) + \frac{\sin^2(\theta_4)}{\cos(\theta_4)} & 0 & \frac{l_4 \sin(\theta_4)(\cos(\theta_4) + \sin(\theta_4)\tan(\theta_4))}{\cos(\theta_4)} \\ \cos(\theta_2) + \frac{\sin^2(\theta_2)}{\cos(\theta_2)} & 0 & \frac{l_1 \sin(\theta_2)(\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\tan(\theta_2))}{\cos(\theta_2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_4 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_4 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

De la ecuación (3.40) podemos obtener las expresiones para los errores δl_2 , δl_3 , δl_5 y δl_6 . Estas ecuaciones se dan en (3.41). De las expresiones dadas en (3.41), tomaremos los errores δl_5 y δl_6 que son los únicos necesarios para calcular el error en la relación de transmisión de los engranajes cilíndricos de dientes rectos, como se indica en la ecuación (3.42).

$$\begin{aligned} \delta l_2 &= \tan(\theta_2)\delta l_1 + \frac{l_1(\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\tan(\theta_2))}{\cos(\theta_2)}\delta \theta_2 \\ \delta l_3 &= \tan(\theta_4)\delta l_4 + \frac{l_4(\cos(\theta_4) + \sin(\theta_4)\tan(\theta_4))}{\cos(\theta_4)}\delta \theta_4 \\ \delta l_5 &= \left(\cos(\theta_4) + \frac{\sin^2(\theta_4)}{\cos(\theta_4)}\right)\delta l_4 + \frac{l_4 \sin(\theta_4)(\cos(\theta_4) + \sin(\theta_4)\tan(\theta_4))}{\cos(\theta_4)}\delta \theta_4 \\ \delta l_6 &= \left(\cos(\theta_2) + \frac{\sin^2(\theta_2)}{\cos(\theta_2)}\right)\delta l_1 + \frac{l_1 \sin(\theta_2)(\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\tan(\theta_2))}{\cos(\theta_2)}\delta \theta_2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Sabemos de la ecuación (3.25) que la relación de transmisión en una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos está dada por el cociente entre los segmentos $\overline{O_4P}$ y $\overline{O_2P}$ que es equivalente al cociente entre las longitudes l_5 y l_6 del mecanismo equivalente de cuatro barras. En la ecuación (3.42) se muestra a la relación de transmisión teórica en el mecanismo equivalente de cuatro barras. [23-26]

$$i = \frac{\overline{O_4P}}{\overline{O_2P}} = \frac{l_5}{l_6} \quad (3.42)$$

La relación de transmisión en una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos es idealmente constante y adimensional, también lo es en el mecanismo equivalente de cuatro barras estático. La relación de transmisión descrita en la ecuación (3.42) también se puede expresar en función de los radios base del piñón y el engrane. Al sustituir las expresiones que involucran a l_5 y l_6 dadas en (3.30) en la ecuación (3.42) tenemos que la relación de transmisión también esta dada por la expresión (3.43).

$$i = \frac{l_4(\cos(\theta_4) + \tan(\theta_4)\sin(\theta_4))}{l_1(\cos(\theta_2) + \tan(\theta_2)\sin(\theta_2))} \quad (3.43)$$

Si ahora aplicamos el diferencial total a la ecuación (3.42) obtendremos el error presente en la relación de transmisión debido a las tolerancias dimensionales. La expresión para el diferencial total de la relación de transmisión del mecanismo equivalente de cuatro barras se da en la ecuación (3.44).

$$\delta i = \frac{\delta l_5 l_6 - l_5 \delta l_6}{l_6^2} \quad (3.44)$$

En la ecuación (3.44), δi es de tipo adimensional al igual que la relación de transmisión. La relación de transmisión real no teórica y con errores está compuesta por la combinación de las variables correspondientes a l_5 , l_6 , δl_5 , δl_6 . Las magnitudes l_5 , l_6 son las distancias en las que la línea de acción divide a la línea de centros, es decir, la distancia desde el centro del engrane al punto de paso P y la distancia desde el centro del piñón al mismo punto. Las longitudes l_5 y l_6 se encuentran expresadas en (3.30). Las variables δl_5 , δl_6 representan los errores en las longitudes l_5 y l_6 debido a procesos de fabricación, las expresiones de δl_5 , δl_6 se dan en (3.41). Finalmente la relación de transmisión real está denotada en la ecuación (3.45).

$$i_{Real} = \frac{l_4 \left(\cos(\theta_4) + \tan(\theta_4) \sin(\theta_4) \right)}{l_1 \left(\cos(\theta_2) + \tan(\theta_2) \sin(\theta_2) \right)} + \frac{\delta l_5 l_6 - l_5 \delta l_6}{l_6^2} \quad (3.45)$$

A continuación, se presentarán dos casos de estudio particular generadas en MATLAB para corroborar el modelado matemático. Se analizarán dos transmisiones por engranajes cilíndricos de dientes rectos con diferentes radios base y diferentes grados de calidad IT. [27-29]

3.6. Primer caso de estudio particular.

Como primer caso de estudio particular, se estudiará una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos con radios base de diferente longitud. Los parámetros de entrada para este caso particular se dan en el cuadro 3.1. Estos parámetros corresponden a las longitudes de los radios base y a los ángulos de presión. En este caso de estudio se presentan ruedas dentadas de diámetros bastante pequeños. Este tipo de ruedas pueden ser encontradas por ejemplo, en mecanismos de reloj o en servomotores pequeños. [23]

Parámetro	Valor numérico	Unidades
Longitud l_1	19	<i>mm</i>
Longitud l_4	37	<i>mm</i>
Ángulo de presión θ_2	20-25	<i>grad</i>
Ángulo de presión θ_4	20-25	<i>grad</i>

Cuadro 3.1: Parámetros de entrada para una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos con diferentes longitudes en sus radios base.

En general, la relación de transmisión en engranes cilíndricos de dientes rectos es sensible a los errores de fabricación. Estos errores se obtendrán de las tolerancias dimensionales extraídas de la Norma ISO 286 [28]. En las tablas dadas en esta norma vienen los diferentes tipos de calidades IT, de acuerdo al tamaño nominal de las dimensiones l_1 , l_4 , que son las únicas que influyen en el error en la relación de transmisión. Para las dimensiones que ocuparemos en este caso de estudio particular, se utilizarán las calidades IT01, IT6, IT9, IT12 e IT16. La calidad IT01 es una calidad de ultra precisión, las calidades IT6 e IT9 son calidades estándar y las calidades IT12 e IT16 son bajas. En el cuadro 3.2, se presentan las tolerancias admitidas correspondientes a las calidades ya mencionadas. Para este caso de estudio particular asumiremos a $\delta\theta_2$ y $\delta\theta_4$ como cero para solo medir la influencia de los errores en los radios base en la relación de transmisión. [22]

Parámetro	IT01	IT6	IT9	IT12	IT16	UNIDADES
δl_1	0.0006	0.013	0.052	0.21	1.3	mm
δl_4	0.0006	0.016	0.062	0.25	1.6	mm

Cuadro 3.2: Tolerancias para las longitudes l_1 , l_4 (tomado de la Norma ISO 286).

La relación de transmisión ideal, de acuerdo a la ecuación (3.43) es de un valor constante de 1.9474. El cuadro 3.3 indica las diferentes relaciones de transmisión que se obtienen cuando los radios bases son de 19 y 37 mm, para ángulos de presión comerciales entre 20 y 25 grados y los distintos grados IT de tolerancias para los radios base. La primera columna es la relación de transmisión teórica de acuerdo a la ecuación (3.43). Los datos del cuadro 3.3 se obtienen a través de MATLAB.

Grados	Relación de transmisión teórica	Relación de transmisión con IT01	Relación de transmisión con IT6	Relación de transmisión con IT9	Relación de transmisión con IT12	Relación de transmisión con IT16
20	1.9474	1.9473	1.9469	1.9453	1.9390	1.8983
21	1.9474	1.9473	1.9469	1.9453	1.9390	1.8983
22	1.9474	1.9473	1.9469	1.9453	1.9390	1.8983
23	1.9474	1.9473	1.9469	1.9453	1.9390	1.8983
24	1.9474	1.9473	1.9469	1.9453	1.9390	1.8983
25	1.9474	1.9473	1.9469	1.9453	1.9390	1.8983

Cuadro 3.3: Diferentes relaciones de transmisión para diferentes valores de calidad IT

De la simulación en MATLAB se obtiene que la relación de transmisión, según el grado IT de calidad, es esencialmente constante para ángulos de presión entre 20 y 25 grados, siendo estos ángulos los más empleados en la industria de la fabricación de engranajes. Sin embargo, las relaciones de transmisión obtenidas al tomar en cuenta las tolerancias dimensionales en los radios bases, difieren de la relación de transmisión teórica [22-25]. A continuación, en el cuadro 3.4 se muestra el porcentaje de error máximo existente entre las relaciones de transmisión teórica y las reales para este caso de estudio.

Grados	Porcentaje de error para IT01	Porcentaje de error para IT6	Porcentaje de error para IT9	Porcentaje de error para IT12	Porcentaje de error para IT16
20	-0.0015	-0.0252	-0.1061	-0.4296	-2.5178
21	-0.0015	-0.0252	-0.1061	-0.4296	-2.5178
22	-0.0015	-0.0252	-0.1061	-0.4296	-2.5178
23	-0.0015	-0.0252	-0.1061	-0.4296	-2.5178
24	-0.0015	-0.0252	-0.1061	-0.4296	-2.5178
25	-0.0015	-0.0252	-0.1061	-0.4296	-2.5178

Cuadro 3.4: Porcentajes de error máximos entre la relación de transmisión teórica y la real.

A continuación en la figura 3.8 se muestran las relaciones de transmisión con diferentes grados de calidad IT.

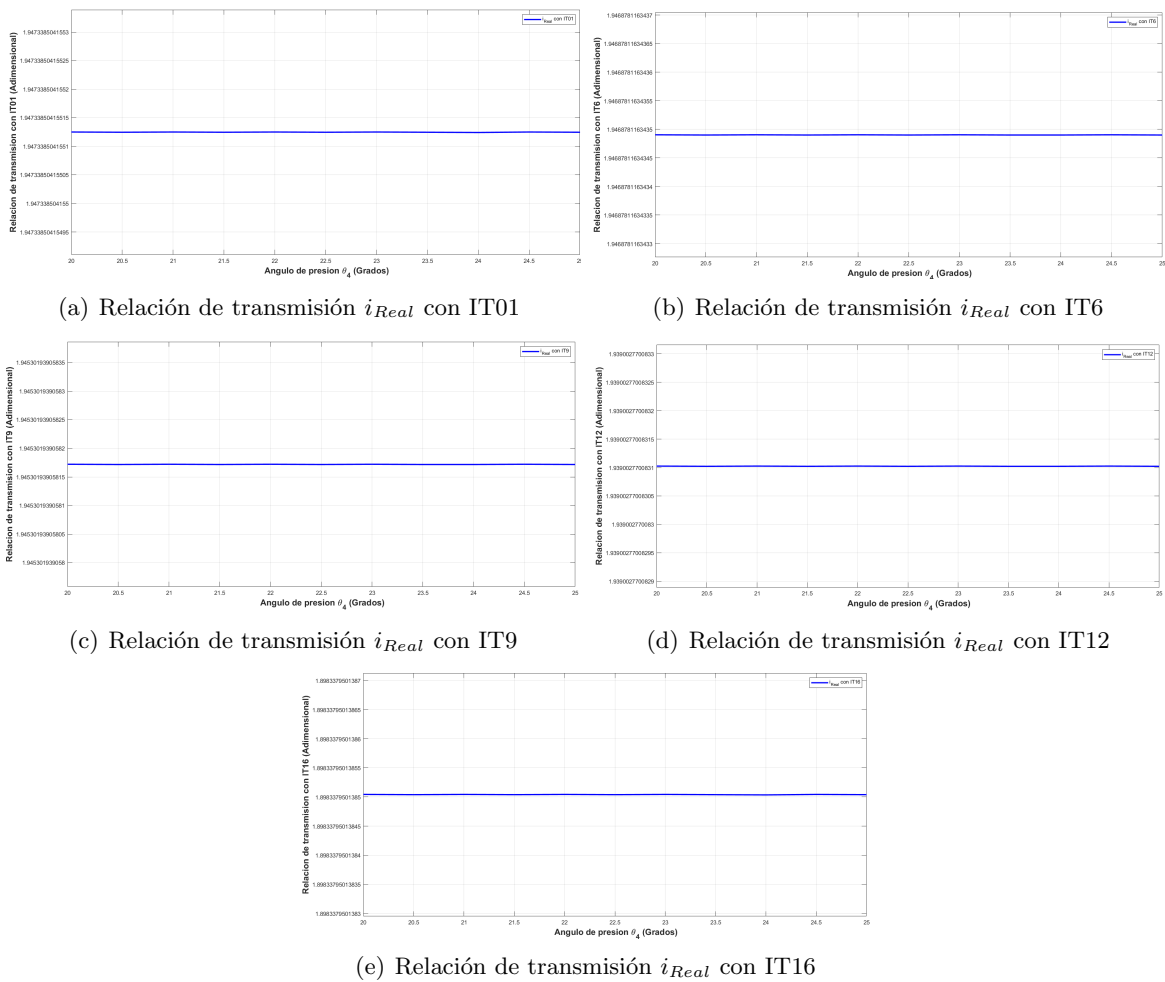


Figura 3.8: Diferentes relaciones de transmisión i_{Real} con diferentes grados de calidad IT.

Las diferentes relaciones de transmisión con diferentes grados de calidad IT son esencialmente constantes para ángulos de presión de entre 20 y 25 grados. Cuando la calidad de las tolerancias en los radios base es baja (IT16) se obtienen errores de hasta -2.52 por ciento.

3.7. Segundo caso de estudio particular.

En el segundo caso de estudio se analizará una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos con radios base de longitudes diferentes. Los parámetros longitudinales serán mucho mayores que en el caso anterior. Los parámetros de entrada para este caso de estudio particular se dan en el cuadro 3.5. Estos parámetros corresponden a las longitudes de los radios base y a los ángulos de presión. En este caso de estudio, se presentan ruedas dentadas de diámetros estándares. Este tipo de ruedas dentadas pueden ser encontradas por ejemplo en maquinaria de tipo industrial. [23]

Parámetro	Valor numérico	Unidades
Longitud l_1	190	<i>mm</i>
Longitud l_4	370	<i>mm</i>
Ángulo de presión θ_2	20-25	<i>grad</i>
Ángulo de presión θ_4	20-25	<i>grad</i>

Cuadro 3.5: Parámetros de entrada para una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos con diferentes longitudes en sus radios base.

Para poder obtener los errores en la relación de transmisión, las tolerancias dimensionales serán extraídas también de la Norma ISO 286 [28]. En las tablas dadas por la norma ISO 286 vienen los diferentes tipos de calidades IT de acuerdo al tamaño nominal de las dimensiones l_1 , l_4 . Para las dimensiones que ocuparemos en este segundo caso de estudio particular utilizaremos también las calidades IT01, IT6, IT9, IT12 e IT16. En el cuadro 3.6 se presentan las tolerancias dimensionales admitidas correspondientes a las calidades antes mencionadas. En este caso de estudio seguiremos asumiendo a $\delta\theta_2$ y $\delta\theta_4$ como cero. [22]

Parámetro	IT01	IT6	IT9	IT12	IT16	UNIDADES
δl_1	0.002	0.029	0.115	0.46	2.9	<i>mm</i>
δl_4	0.003	0.036	0.140	0.57	3.6	<i>mm</i>

Cuadro 3.6: Tolerancias para las longitudes l_1 , l_4 (tomado de la Norma ISO 286).

La relación de transmisión ideal de acuerdo a la ecuación (3.43) es de un valor constante de 1.947. En el cuadro 3.7 se indican las diferentes relaciones de transmisión que se obtienen cuando los radios base son de 190 y 370 mm, para ángulos de presión comerciales entre 20 y 25 grados y los distintos grados IT de tolerancias dimensionales para los radios base. La primera

columna es la relación de transmisión teórica de acuerdo a la ecuación (3.43). Los datos del siguiente cuadro se obtienen a través de MATLAB. [35] [36]

Grados	Relación de transmisión teórica	Relación de transmisión con IT01	Relación de transmisión con IT6	Relación de transmisión con IT9	Relación de transmisión con IT12	Relación de transmisión con IT16
20	1.9474	1.9474	1.9473	1.9469	1.9457	1.9366
21	1.9474	1.9474	1.9473	1.9469	1.9457	1.9366
22	1.9474	1.9474	1.9473	1.9469	1.9457	1.9366
23	1.9474	1.9474	1.9473	1.9469	1.9457	1.9366
24	1.9474	1.9474	1.9473	1.9469	1.9457	1.9366
25	1.9474	1.9474	1.9473	1.9469	1.9457	1.9366

Cuadro 3.7: Diferentes relaciones de transmisión para diferentes valores de calidad IT

De la simulación realizada en MATLAB obtenemos que las diferentes relaciones de transmisión con diferentes grados de calidad IT, son constantes para ángulos de presión de entre 20 y 25 grados. Las relaciones de transmisión obtenidas al tomar en cuenta las tolerancias dimensionales en los radios base difieren de la relación de transmisión teórica, pero en menor medida que en el primer caso de estudio particular, por lo tanto, mientras más pequeñas sean las ruedas dentadas de dientes rectos más se afectará la relación de transmisión debido a los errores en las longitudes de los radios base. En el cuadro 3.7 se puede notar que mientras mayor es el grado IT, mayor es el error admisible permitido y mucho menos exigente la calidad de fabricación. A continuación, en el cuadro 3.8 se muestra el porcentaje de error máximo existente entre las relaciones de transmisión teórica y las reales para este caso de estudio particular.

Grados	Porcentaje de error para IT01	Porcentaje de error para IT6	Porcentaje de error para IT9	Porcentaje de error para IT12	Porcentaje de error para IT16
20	-0.241×10^{-3}	-0.005	-0.022	-0.088	-0.553
21	-0.241×10^{-3}	-0.005	-0.022	-0.088	-0.553
22	-0.241×10^{-3}	-0.005	-0.022	-0.088	-0.553
23	-0.241×10^{-3}	-0.005	-0.022	-0.088	-0.553
24	-0.241×10^{-3}	-0.005	-0.022	-0.088	-0.553
25	-0.241×10^{-3}	-0.005	-0.022	-0.088	-0.553

Cuadro 3.8: Porcentajes de error máximos entre la relación de transmisión teórica y la real.

Se puede notar que los porcentajes de error son mucho menores que en el primer caso de estudio particular, por lo tanto, mientras mayores sean los radios base de las ruedas dentadas menor serán afectadas las diferentes relaciones de transmisión debido a errores longitudinales en los radios base. A continuación, en la figura 3.9 se muestran las diferentes relaciones de transmisión con diferentes grados de calidad IT. [27-29]

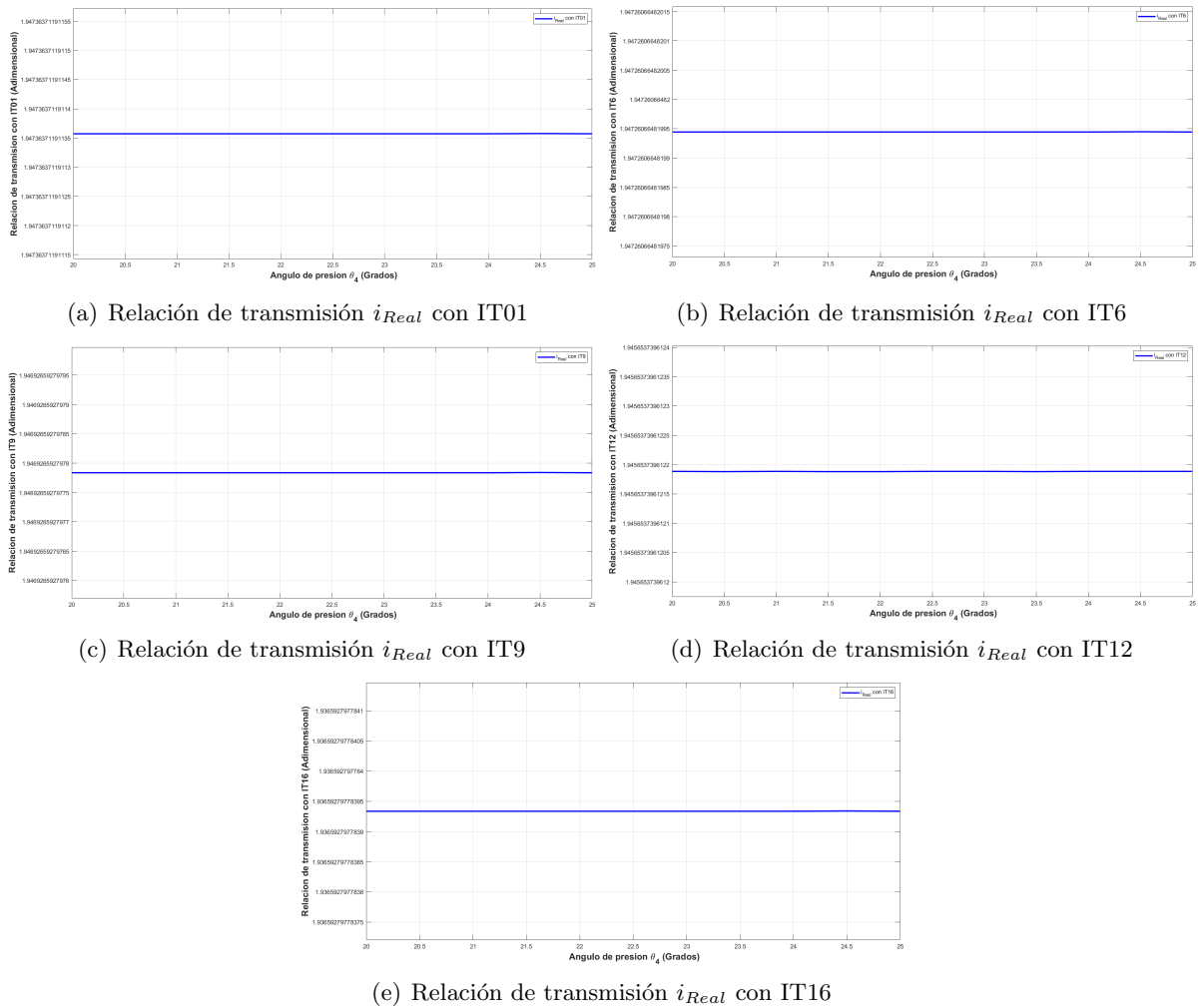


Figura 3.9: Diferentes relaciones de transmisión i_{Real} con diferentes grados de calidad IT.

Las diferentes relaciones de transmisión, con distintos grados de calidad IT [28], son constantes para ángulos de presión estandarizados de entre 20 y 25 grados. Los engranes cilíndricos de dientes rectos con estos valores de ángulos de presión son muy utilizados en la maquinaria de tipo industrial. De acuerdo a la figura 3.9, la relación de transmisión que más difiere de la teórica es la relación de transmisión real con calidad IT16. Mientras mayor sean los radios base de las ruedas dentadas menor será afectada la relación de transmisión debido a errores de fabricación de los engranes. Por otro lado, entre más pequeñas son las ruedas dentadas, mayor es el porcentaje de error encontrado en la relación de transmisión. Para que el error δi sea completamente cero en ambos casos de estudio particular es necesario que los valores de δl_5 y δl_6 sean cero o que los productos $\delta l_5 l_6$ y $\delta l_6 l_5$ sean iguales. Sin embargo ya que los parámetros l_5 , l_6 , δl_5 , dependen de las longitudes de los radios base y los ángulos de presión θ_2 , θ_4 y generalmente en la fabricación de engranajes se presentan errores en el momento de la fabricación, no es posible que δi sea cero. Sin embargo con herramientas especializadas es posible generar engranes con calidad de ultra precisión correspondiente a la calidad IT01. [28]

3.8. GRADOS DE LIBERTAD DEL MECANISMO EQUIVALENTE DE CUATRO BARRAS (MOVILIDAD)

En una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos se presentan tres diferentes casos en la relación de transmisión, estos casos son: cuando la relación es mayor a 1, cuando es menor a 1 y cuando la relación de transmisión es unitaria, esto dependerá de los valores que tomen las longitudes l_1 , l_4 del mecanismo de cuatro barras equivalente. Para los tres casos, i se mantiene constante. En la figura 3.10 se ilustra lo antes mencionado.

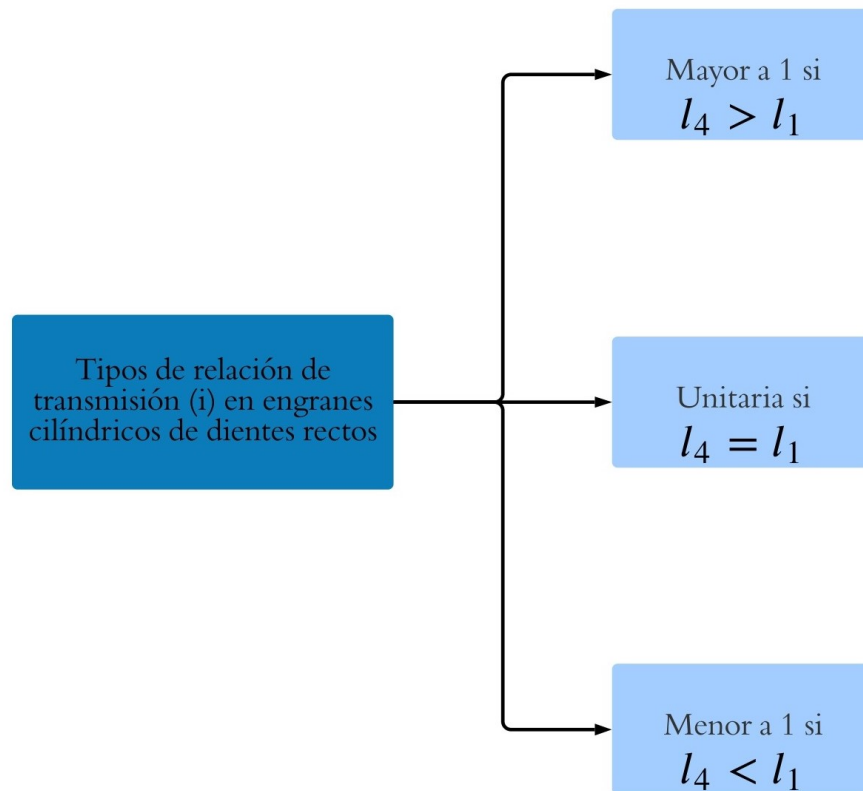


Figura 3.10: Tipos de relación de transmisión i en engranajes cilíndricos de dientes rectos.

Lo anterior sucede cuando los ángulos de presión θ_2 , θ_4 son iguales. A continuación, se mostrarán los grados de libertad que presenta el mecanismo de cuatro barras equivalente.

3.8. Grados de libertad del mecanismo equivalente de cuatro barras (Movilidad).

En general en mecanismos planos, la movilidad m (grados de libertad) puede ser calculada por la ecuación de Kutzbach–Gruebler [22] dada en la ecuación (3.46).

$$m = 3(n - 1) - 2j_1 - j_2 \quad (3.46)$$

En donde n es el número de eslabones o elementos, j_1 es el número total de uniones de un grado de libertad, j_2 es el número de uniones de dos grados de libertad. En el caso de una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos tenemos que $n = 3$ puesto que hay tres elementos, el engrane o rueda, el piñón y el bastidor. A su vez, $j_1 = 2$ ya que tenemos dos uniones o juntas en los centros de los engranes que conectan con el bastidor, $j_2 = 1$ y corresponde a la línea de acción normal, ya que ésta permite la rotación relativa entre ambos engranes y también permite la traslación de deslizamiento entre ambos engranes, por lo tanto, una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos tiene una movilidad unitaria. Una transmisión por engranajes puede verse como un mecanismo plano y su mecanismo equivalente de cuatro barras estático puede analizarse como un robot o sistema de un grado de libertad. Un mecanismo de cuatro barras móviles tiene movilidad unitaria (un grado de libertad), por lo tanto, el mecanismo equivalente de una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos también tenga movilidad unitaria. [23-26]

3.9. Comparativa entre mecanismos de cuatro barras y transmisiones por engranajes cilíndricos de dientes rectos.

A continuación, se hará una comparativa de desempeño en las diferentes facetas en las que se puede presentar una relación de transmisión entre los mecanismos de cuatro barras presentados en el capítulo anterior y una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos. En el cuadro 3.9 se muestra que un mecanismo de cuatro barras con longitudes diferentes presenta una relación de transmisión variable y menor a 1. Por otra parte, un mecanismo de paralelogramo articulado muestra una relación de transmisión que puede ser unitaria, constante o variable por intervalos. Finalmente, una transmisión por engranajes puede presentar una relación de transmisión unitaria, una relación mayor a 1 o una relación menor a 1, dependiendo de las longitudes de los radios base. [23] [26]

Parámetro	Mecanismo de cuatro barras con longitudes diferentes.	Mecanismo de Paralelogramo articulado.	Transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos.
Relación de transmisión variable.	Si	Si	No
Relación de transmisión constante.	No	Si	Si
Relación de transmisión unitaria.	No	Si	Si
Relación de transmisión mayor a 1.	No	No	Si
Relación de transmisión menor a 1.	Si	Si	Si

Cuadro 3.9: Comparativa de desempeño entre mecanismos de cuatro barras y una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos

En la figura 3.11 se ilustra, a través de un diagrama de Venn, la relación que tiene un mecanismo de paralelogramo articulado y una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos en cuanto a la ganancia de velocidades angulares. [22] [35]

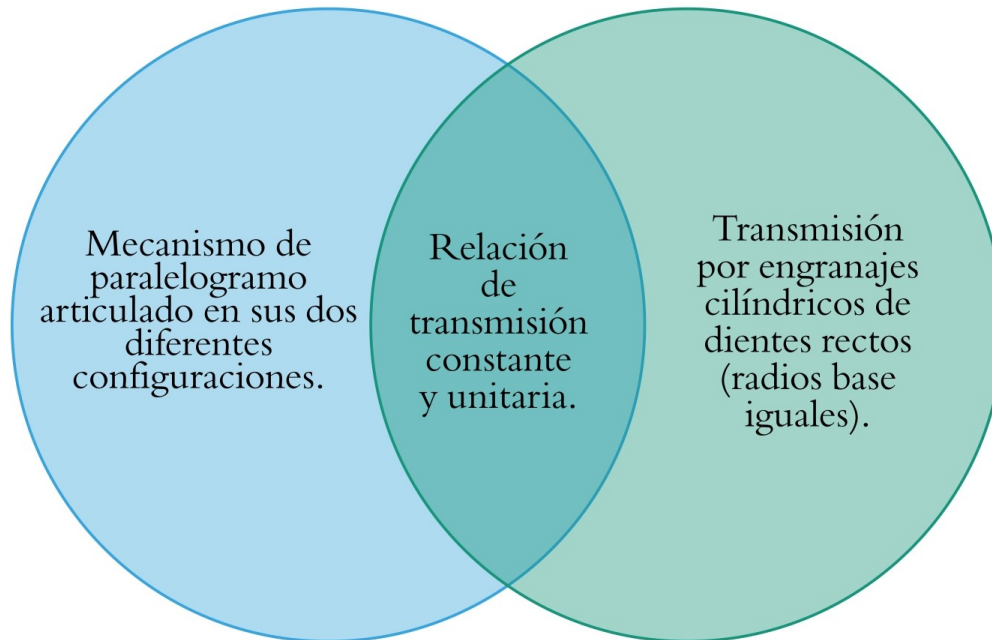


Figura 3.11: Diagrama de Venn que ilustra la relación que existe entre un mecanismo de paralelogramo articulado y una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos.

El mecanismo de paralelogramo articulado tiene una relación de transmisión constante y unitaria en sus dos diferentes configuraciones. En la configuración abierta, en el intervalo $[0, 180]$ grados y en la configuración cerrada, en el intervalo $[180, 360]$ grados. En engranes cilíndricos de dientes rectos, la relación de transmisión es unitaria y constante cuando los radios bases son del mismo valor. Los mecanismos de cuatro barras con longitudes diferentes presentan relaciones de transmisión de signo y magnitud variable y en general con valores inferiores a la unidad.

3.10. Función de transferencia en engranajes cilíndricos de dientes rectos.

En la teoría de control clásico se presentan a los engranajes cilíndricos de dientes rectos como elementos mecánicos que transmiten energía desde una parte del sistema a otro en una forma tal que se alteran la fuerza, el par motor, la velocidad angular y el desplazamiento angular. Estos dispositivos también se pueden ver como elementos de acoplamiento empleados para lograr la máxima transferencia de potencia. En la figura 3.12 se presentan dos engranes cilíndricos de dientes rectos acoplados. La inercia y la fricción de los engranes son despreciados en el caso ideal considerado aquí. [37]

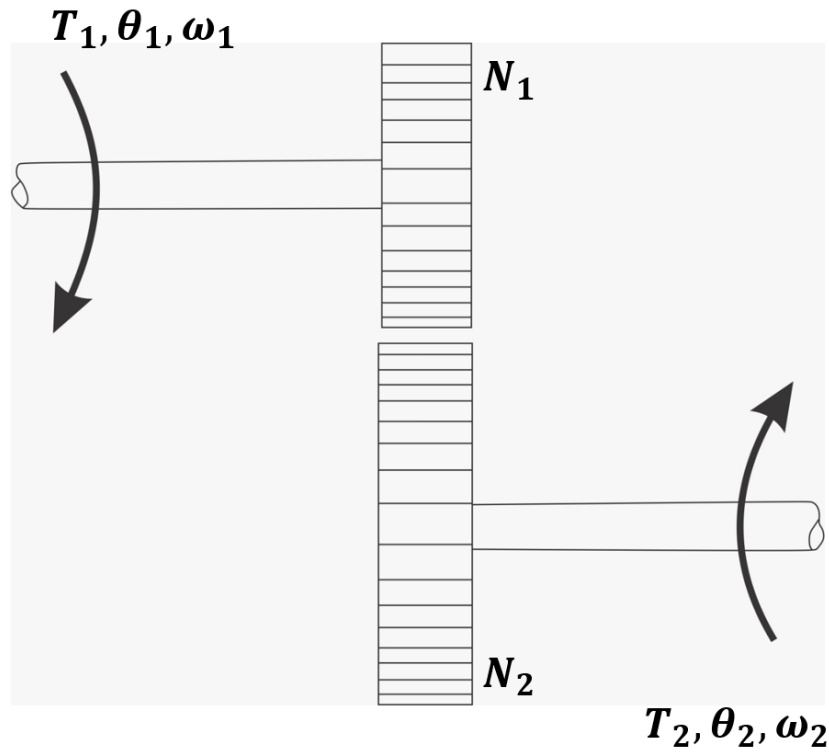


Figura 3.12: Tren de engranes cilíndricos de dientes rectos. [37]

La figura 3.12 muestra los pares T_1 y T_2 , los desplazamientos angulares θ_1 y θ_2 y los números de dientes N_1 y N_2 del tren de engranes. En este tren se tienen las siguientes propiedades:

- El número de dientes sobre la superficie de los engranes es proporcional a los radios base r_1 y r_2 de los engranes. Esto se refleja en la ecuación (3.47).

$$r_1 N_1 = r_2 N_2 \quad (3.47)$$

- La distancia que viaja cada punto de paso de cada engrane es la misma, por lo tanto, se aplica la ecuación (3.48).

$$r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2 \quad (3.48)$$

- El trabajo realizado por las fuerzas en cada engrane son iguales en valor absoluto, y si se supone que no hay pérdidas en el caso ideal, se aplica la ecuación (3.49).

$$T_1 \theta_1 = T_2 \theta_2 \quad (3.49)$$

- La ganancia de velocidades angulares o función de transferencia es equivalente al cociente de radios base del elemento de entrada con el elemento de salida. En ambos casos las unidades de esta ganancia son de tipo adimensional.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} \quad (3.50)$$

Las propiedades y expresiones anteriores coinciden con la teoría desarrollada a lo largo del capítulo con respecto a la relación de transmisión en engranes cilíndricos de dientes rectos. Aunque en la literatura clásica se aborda la relación de transmisión en engranes rectos como el cociente entre la velocidad angular de salida y la velocidad angular de entrada, se ha demostrado que los errores en la manufactura de los engranes conlleva a cambios en los valores de relación de transmisión real con respecto al ideal. En la práctica, los engranes tienen inercia y fricción entre los dientes de los engranes acoplados que a menudo no se pueden despreciar. En la figura 3.13 se muestran un par de engranes cilíndricos de dientes rectos con fricción viscosa, fricción de coulomb e inercia. [23] [37]

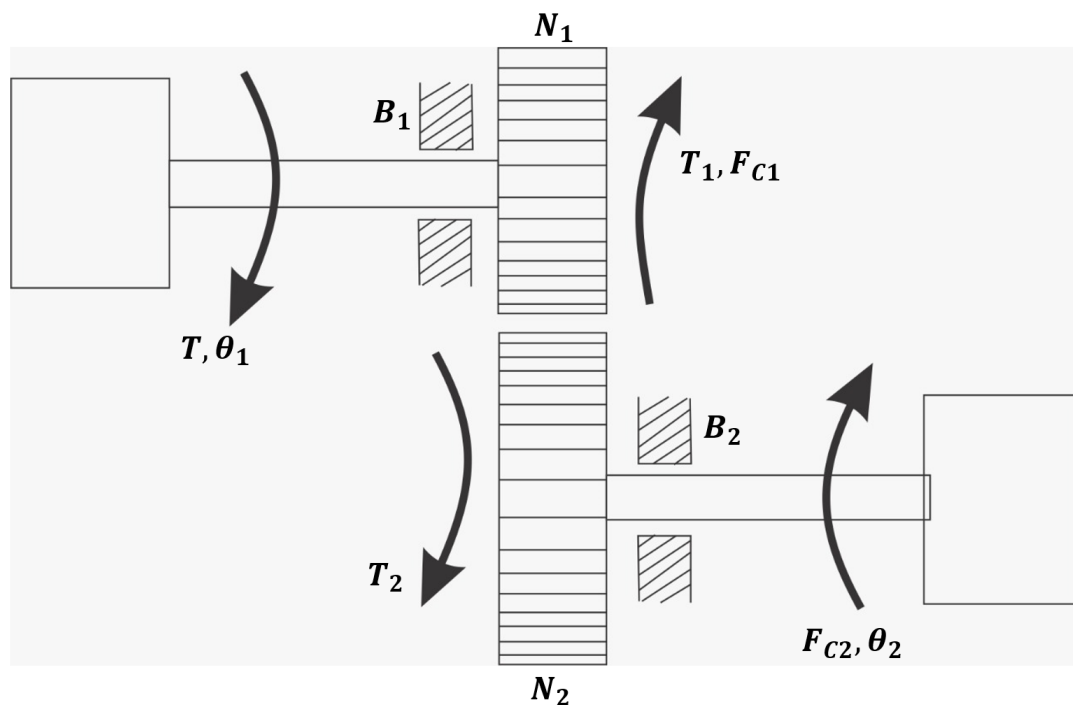


Figura 3.13: Tren de engranes cilíndricos de dientes rectos. [37]

En la figura 3.13 se muestra un par de engranes rectos, en donde T denota el par aplicado, T_1 y T_2 son los pares de torsión transmitidos, F_{c1} y F_{c2} son los coeficientes de la fricción de Coulomb y B_1 , B_2 son los coeficientes de fricción viscosa. [37]

3.11. Conclusiones del capítulo 3.

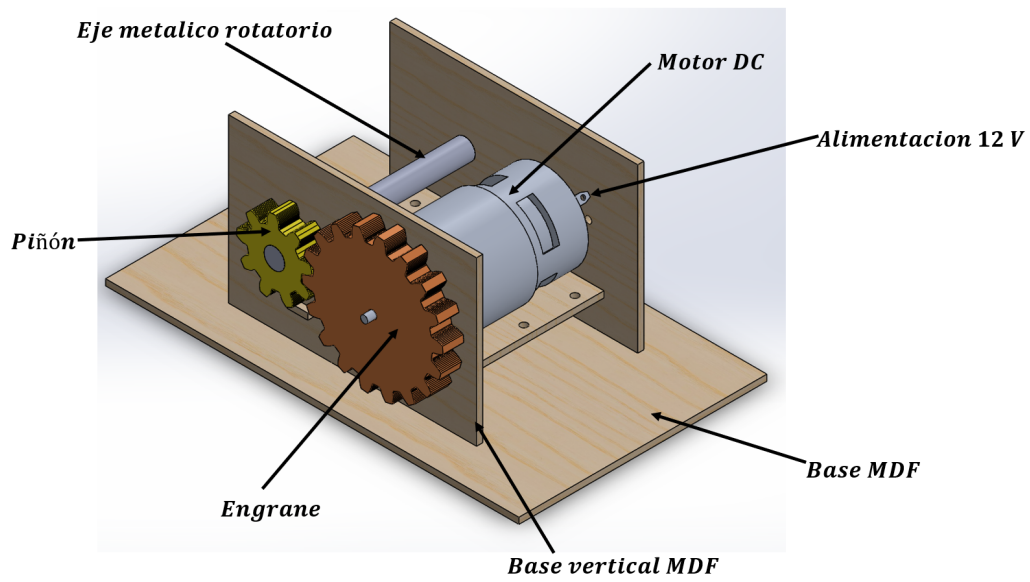
1. De acuerdo a los datos obtenidos, sabemos que entre más pequeñas son las ruedas dentadas, mayor es el porcentaje de error encontrado en la relación de transmisión. El porcentaje de error entre la relación de transmisión teórica y la que resulta al tomar en cuenta las tolerancias dimensionales en el radio base y en los ángulos de presión, aumenta conforme aumenta el número IT normalizado de las dimensiones lineales y angulares de estos dos parámetros geométricos.
2. El método de definir las ecuaciones geométricas de restricción cinemática y tomar las diferenciales totales de estas ecuaciones, usado en el mecanismo equivalente de cuatro barras estacionario, se puede extender para abarcar mecanismos de cuatro barras móviles. El conocimiento de cómo las tolerancias dimensionales y las posiciones fundamentales de estas tolerancias influye en la relación de transmisión, permite asignar grados IT normalizados y posiciones fundamentales más racionales, con el fin de disminuir el porcentaje de error respecto a la relación de transmisión teórica.
3. Las relaciones de transmisión teóricas en una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos son constantes y pueden ser unitarias, mayores a 1 o menores a 1. El mecanismo más aproximado a una transmisión por engranajes cilíndricos de dientes rectos, es un paralelogramo articulado que es un caso particular de un mecanismo de cuatro barras.

Capítulo 4

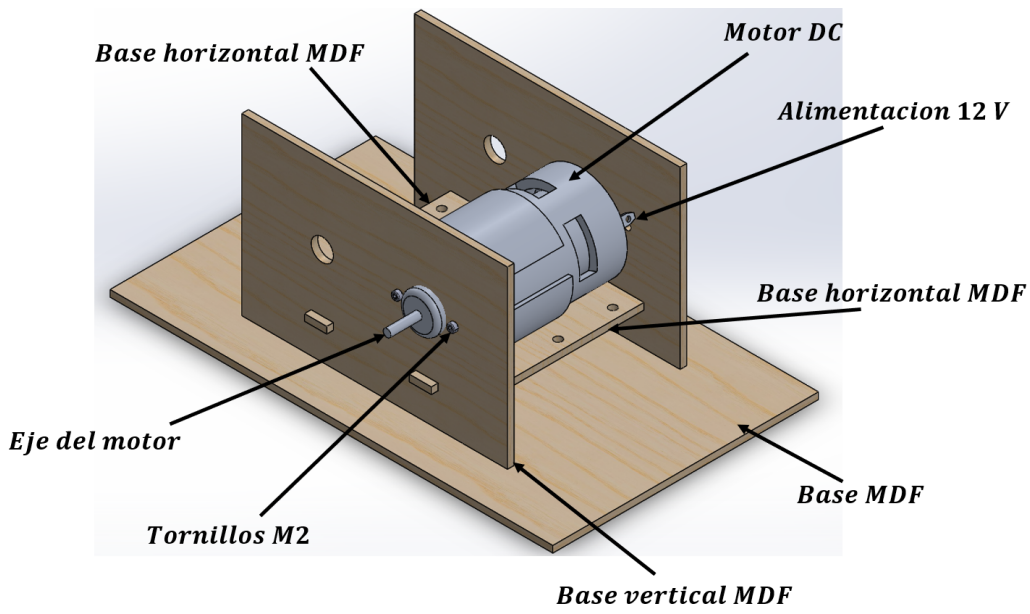
Arreglo experimental de engranes cilíndricos de dientes rectos.

4.1. Arreglo experimental de engranes cilíndricos de dientes rectos.

Se fabricará un arreglo experimental con un tren de engranes diseñados en Solidworks y prototipados en impresión 3D en material PLA (poliácido láctico). El PLA es un polímero que tiene propiedades similares al PET (tereftalato de polietileno). Es un termoplástico cuyos materiales de base se obtienen a partir de almidón de maíz o de yuca o mandioca, o de caña de azúcar. El engrane conductor esta acoplado a un motor DC que es alimentado a través de una fuente Keithley 2231A. En el engrane y en el piñón impresos en 3D se acopla un imán de neodimio para medir la velocidad angular en cada engrane con sensores de efecto hall KY024 que estarán conectados a una tarjeta Arduino UNO. La velocidad angular también será medida a través de un tacómetro comercial para comparar los valores predichos por el modelo matemático, con las lecturas dadas por los sensores. Las lecturas otorgadas por los sensores serán pasadas de Arduino a Excel y posteriormente leídas y comparadas con los valores que arroja el modelo matemático. La base del arreglo experimental está construida con MDF (tableros de fibras de densidad media). Este material se fabrica mediante compresión de fibras de madera, mezcladas con resinas que aportan mayor resistencia al material. La forma en la que está construida el arreglo experimental es de acuerdo a diseño press fit, con lo cual las base verticales y horizontales se pueden ver como una sola pieza. En la figura 4.1 (a) se muestra una vista isométrica del ensamble del arreglo experimental en Solidworks. En la figura 4.1 (b) se observa a el arreglo experimental y sus detalles internos, incluyendo la tornillería M2 empleada.



(a) Vista isométrica del arreglo experimental realizada en Solidworks.



(b) Vista isometrica sin engranes del arreglo experimental realizada en Solidworks.

Figura 4.1: Ensamblaje realizado en Solidworks .

Se fabricaron tres pares de engranes con errores angulares introducidos en cada caso. En el caso ideal, los engranes tienen un valor en el ángulo de presión de 20 grados, el cual es un valor comercial. Los tres pares de engranes tendrán un valor de ángulo de presión de 20.005, 20.05, 20.5 grados respectivamente.

4.2. Metodología de desarrollo.

En el caso de la metodología del desarrollo, lo primero fue acoplar el engrane conductor al eje del motor de 12 Volts, el engrane conducido fue montado sobre un eje rotatorio, un imán de neodimio de 1 mm de radio fue montado sobre cada engrane en su parte trasera, posteriormente los sensores de efecto Hall KY024 fueron montados sobre la altura radial de cada engrane, los engranes están conectados al voltaje y tierra de una tarjeta Arduino UNO que procesa 360 muestras que se toman y miden las revoluciones por minuto de cada engrane, posteriormente se generan dos vectores que almacenan los datos obtenidos, una vez tomadas las 360 muestras se hace el cociente de vectores para encontrar el valor de la relación de transmisión, posterior a esto estos vectores son exportados a Excel para un mejor tratamiento como vectores y posteriormente estos vectores son leídos y tratados con MATLAB. En la figura 4.2 se ilustra la metodología de desarrollo del arreglo experimental.

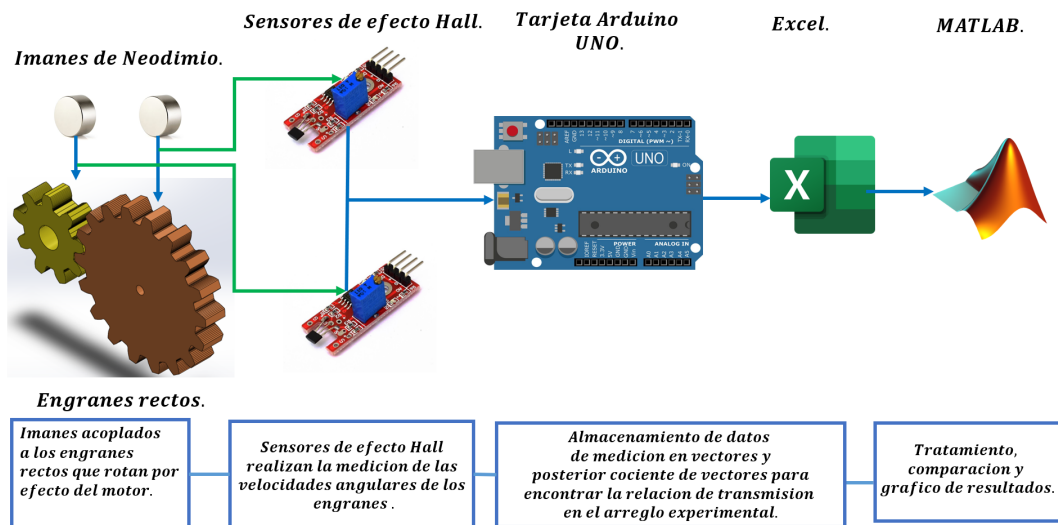


Figura 4.2: Esquema de la metodología de desarrollo para el arreglo experimental.

El diagrama de bloques que describe la metodología de desarrollo también se ilustra en la figura 4.3

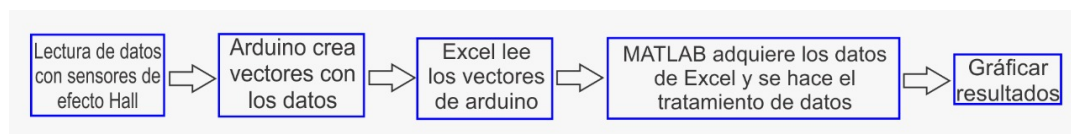


Figura 4.3: Diagrama de bloques de la metodología de desarrollo para el arreglo experimental.

A continuación se describen las características eléctricas y de funcionamiento del sensor de efecto Hall utilizado para el arreglo experimental.

4.3. Sensor de efecto Hall.

Para la medición de la velocidad angular de cada engrane recurriremos al sensor KY024 el cual es un módulo que integra un sensor magnético de Efecto Hall con salida digital. Este sensor nos permite detectar de forma fácil, rápida y precisa campos magnéticos producidos cerca del modulo. A continuación se muestran algunas de sus características mas importantes.

- Voltaje de funcionamiento: 3.3V a 5V
- Consumo de Corriente: Reposo 3 mA y funcionamiento 8 mA
- Tipo: Sensor magnético de (Efecto Hall)
- Transistor del sensor: 3144
- Señal de salida: Digital
- Rango de temperatura de funcionamiento: -25 °C a 85 °C
- Dimensiones 18mm x 15mm
- Peso: 10 g

La configuración en que esta conectada este sensor se da en la figura 4.4

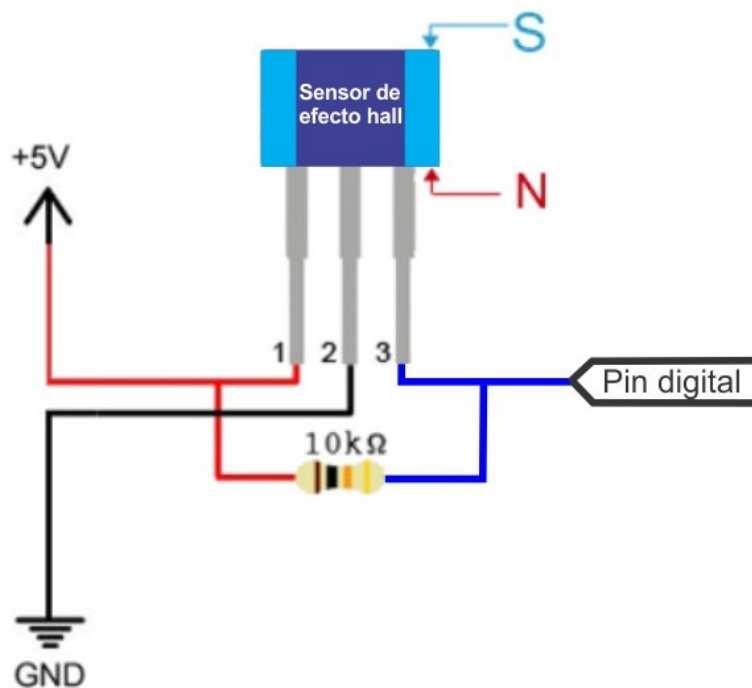


Figura 4.4: Conexión de los sensores de efecto Hall con la tarjeta Arduino y sus Puertos.

A continuación se describe el diagrama de flujo usado para la metodología de desarrollo.

4.4. Diagrama de Flujo de la metodología de desarrollo.

Para el caso de la tarjeta Arduino UNO el diagrama de flujo que describe el proceso en el que son adquiridas las 360 muestras de la lectura de los sensores para obtener la velocidad angular de cada una de ellas se describe a continuación. El proceso termina cuando la fuente de alimentación es desconectada del motor de 12 V. y el voltaje se vuelve cero, esto es cuando las 360 muestras han sido tomadas. El diagrama de flujo para este arreglo experimental se da en la figura 4.5.

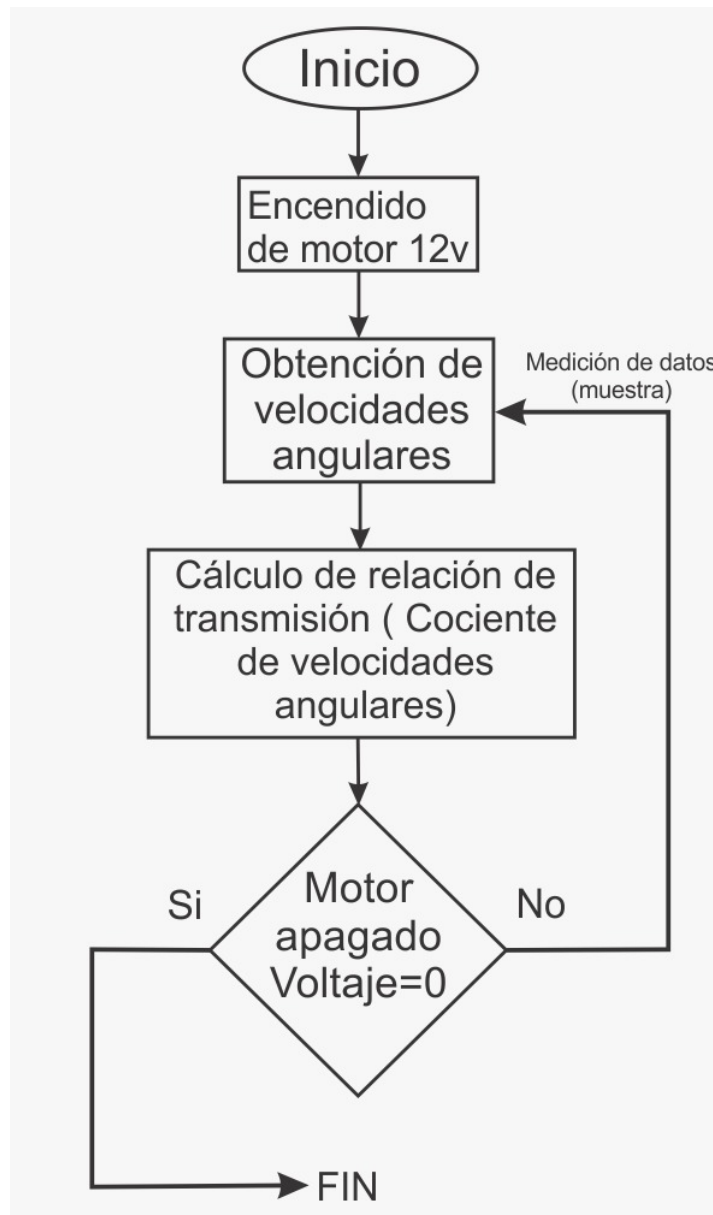


Figura 4.5: Diagrama de Flujo del arreglo experimental.

4.5. Par de engranes con error en el ángulo de presión de 0.005 grados.

En el caso del primer par de engranes a través de los datos obtenidos en Excel se presentan en el cuadro 4.1 concretamente 30 muestras de las 360 obtenidas, estos datos posteriormente se leen a través de MATLAB para su tratamiento y su posterior representación gráfica.

Cuadro 4.1: Tablas en Excel

IDEAL		Errores MATLAB		Solidworks	Arduino	Tacómetro
Muestra	Tiempo	MATLAB	i con errores (MATLAB)	i Solidworks	i Arduino	i Tacometro
1	0.000	2.18	2.17	2.00	2.15	2.30
2	0.003	2.18	2.17	2.00	2.16	2.30
3	0.006	2.18	2.17	2.00	2.18	2.30
4	0.008	2.18	2.17	2.00	2.19	2.30
5	0.011	2.18	2.17	2.00	2.20	2.30
6	0.014	2.18	2.17	2.00	2.21	2.30
7	0.017	2.18	2.17	2.00	2.22	2.30
8	0.019	2.18	2.17	2.00	2.24	2.30
9	0.022	2.18	2.17	2.00	2.23	2.30
10	0.025	2.18	2.17	2.00	2.25	2.30
11	0.028	2.18	2.17	2.00	2.24	2.30
12	0.031	2.18	2.17	2.00	2.23	2.30
13	0.033	2.18	2.17	2.00	2.22	2.30
14	0.036	2.18	2.17	2.00	2.21	2.30
15	0.039	2.18	2.17	2.00	2.20	2.30
16	0.042	2.18	2.17	2.00	2.21	2.30
17	0.045	2.18	2.17	2.00	2.21	2.30
18	0.047	2.18	2.17	2.00	2.21	2.30
19	0.050	2.18	2.17	2.00	2.21	2.30
20	0.053	2.18	2.17	2.00	2.21	2.30
21	0.056	2.18	2.17	2.00	2.21	2.30
22	0.058	2.18	2.17	2.00	2.21	2.30
23	0.061	2.18	2.17	2.00	2.21	2.30
24	0.064	2.18	2.17	2.00	2.21	2.30
25	0.067	2.18	2.17	2.00	2.21	2.30
26	0.070	2.18	2.17	2.00	2.21	2.30
27	0.072	2.18	2.17	2.00	2.21	2.30
28	0.075	2.18	2.17	2.00	2.21	2.30
29	0.078	2.18	2.17	2.00	2.17	2.30
30	0.081	2.18	2.17	2.00	2.18	2.30

El primer par de engranes introducido en el arreglo experimental corresponde al error angular de 0.005 grados en el ángulo de presión, siendo este ángulo el menor error angular de los tres errores que se van a probar. A continuación, en el cuadro 4.2 se muestra los parámetros de entrada para el primer par de engranes cilíndricos de dientes rectos. Los valores de las tolerancias dimensionales correspondientes a δl_1 y δl_4 son obtenidos de las especificaciones de la impresora 3D flashforge creator pro, mientras que las tolerancias angulares son introducidas a partir del modelado CAD en Solidworks.

Parámetro	Valor numérico	Unidades
Longitud l_1 (Radio base piñón)	13.205	<i>mm</i>
Longitud l_4 (Radio base engrane)	28.845	<i>mm</i>
Ángulo de presión θ_2	20	<i>grad</i>
Ángulo de presión θ_4	20	<i>grad</i>

Cuadro 4.2: Parámetros de entrada para el primer par de engranes cilíndricos de dientes rectos con diferentes longitudes en sus radios base.

4.5. PAR DE ENGRANES CON ERROR EN EL ÁNGULO DE PRESIÓN DE 0.005 GRADOS.109

A continuación en el cuadro 4.3 se presentan las tolerancias dimensionales correspondientes a δl_1 , δl_4 , $\delta \theta_2$ y $\delta \theta_4$. Las tolerancias angulares son introducidas en el modelo CAD en Solidworks, mientras que las tolerancias longitudinales son introducidas al momento de fabricar los engranes mediante la resolución de la impresión 3D. La calidad IT dada en esta impresora para el piñón oscila entre IT12 e IT13. Así mismo, la calidad IT para el engrane es IT12.

Parámetro	Valor numérico	Unidades
δl_1	0.2	mm
δl_4	0.2	mm
$\delta \theta_2$	0.005	grad
$\delta \theta_4$	0.005	grad

Cuadro 4.3: Tolerancias para los parámetros de entrada del primer par de engranes cilíndricos de dientes rectos.

A continuación, se mostrarán las velocidades angulares del piñón y el engrane simulados a través de la herramienta Motion de Solidworks. Es importante mencionar que en Solidworks no existe una herramienta que nos entregue la relación de transmisión, por lo tanto, al hacer el cociente de velocidades angulares obtenemos un valor adimensional de 2. En la figura 4.6 se muestra las velocidades angulares del piñón y del engrane generadas a través de Solidworks. Se puede observar que en el caso de engranes cilíndricos de dientes rectos, las velocidades angulares tanto de entrada como de salida, son constantes a diferencia de los mecanismos de cuatro barras.

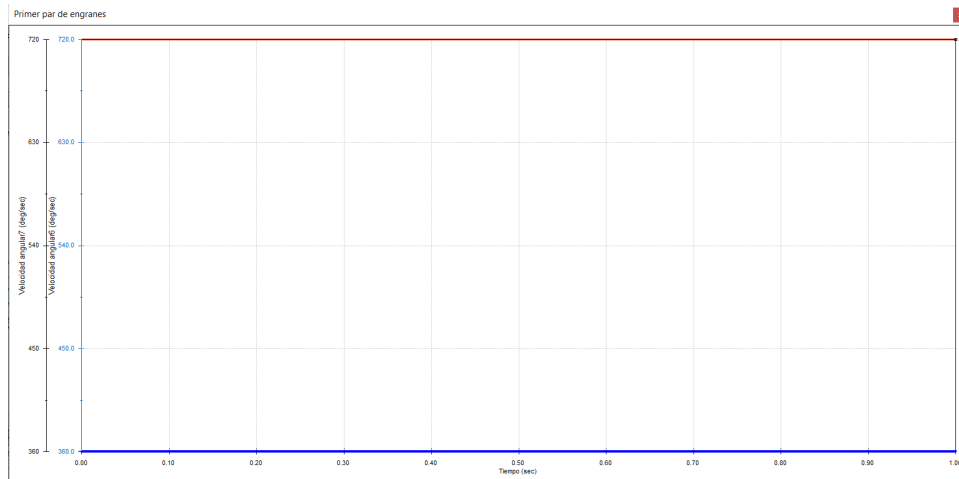


Figura 4.6: Velocidades angulares del piñón (Rojo) y del engrane (Azul) obtenidas a través de Solidworks.

A continuación, se muestra el gráfico de la relación de transmisión para este par de engranes medido con los programas Solidworks, MATLAB y Arduino. Así mismo, también se compara con la medición física realizada con sensores de efecto hall KY024 y un tacómetro de tipo industrial. En la figura 4.7 se puede observar que el error máximo ocurre cuando se usa el

tacómetro y éste difiere en un seis por ciento con respecto al valor calculado con MATLAB.

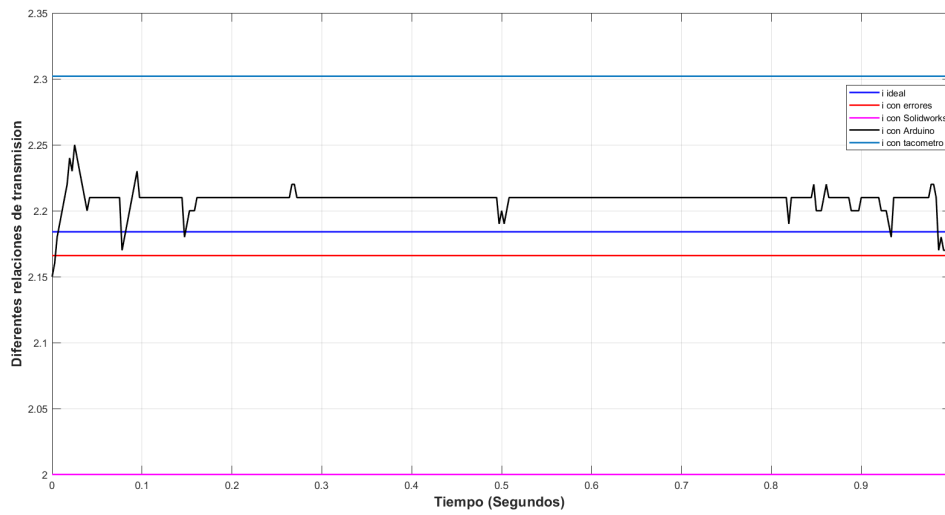


Figura 4.7: Diferentes relaciones de transmisión para el primer par de engranes cilíndricos de dientes rectos. Las curvas son: i teórica (Azul) comparada con MATLAB (Rojo), Solidworks (Magenta), Arduino (Negro) y tacómetro industrial (Azul oscuro).

De la figura 4.7, es posible observar que el pico de la medición de la relación de transmisión efectuada con el Arduino difiere en un 3.9 por ciento de la calculada con MATLAB. La medición de la relación de transmisión con el Arduino muestra un valor esencialmente constante. En el caso de la medición realizada con Arduino los picos presentes se deben a vibraciones del mecanismo usado como prototipo, sin embargo, es posible observar como hay intervalos de tiempo en los que la medición es constante. A continuación, en el cuadro 4.4 se presenta los valores de la relación de transmisión realizada a través de Solidworks, Arduino y MATLAB. También se muestra el valor de la relación de transmisión cuando se usa como herramienta de medición el tacómetro.

Herramienta utilizada	Valor numérico de i	Unidades
i ideal MATLAB	2.184	adimensional
i con errores MATLAB	2.166	adimensional
i con Solidworks	2	adimensional
i con Arduino	2.2086	adimensional
i con tacómetro	2.302	adimensional

Cuadro 4.4: Comparación de relación de transmisión para el primer par de engranes, los valores de relación de transmisión son muy cercanos.

A continuación se estudiará el segundo par de engranes.

4.6. Par de engranes con error en el ángulo de presión de 0.05 grados.

El segundo par de engranes introducidos en el arreglo experimental ha sido fabricado con errores medios de 0.05 grados en el ángulo de presión. A continuación en el cuadro 4.5 se muestra los parámetros de entrada para el segundo par de engranes cilíndricos de dientes rectos. Los valores de las tolerancias dimensionales correspondientes a δl_1 y δl_4 son obtenidos de las especificaciones de la impresora 3D Flashforge Creator Pro, mientras que las tolerancias angulares son introducidas a partir del modelado CAD en Solidworks.

Parámetro	Valor numérico	Unidades
Longitud l_1 (radio base del piñón)	13.205	<i>mm</i>
Longitud l_4 (radio base del engrane)	28.845	<i>mm</i>
Ángulo de presión θ_2	20	<i>grad</i>
Ángulo de presión θ_4	20	<i>grad</i>

Cuadro 4.5: Parámetros de entrada para el segundo par de engranes cilíndricos de dientes rectos con diferentes longitudes en sus radios base.

A continuación en el cuadro 4.6 se presentan las tolerancias dimensionales correspondientes a δl_1 , δl_4 , $\delta\theta_2$ y $\delta\theta_4$. Las tolerancias angulares son introducidas en el modelo CAD en Solidworks, mientras que las tolerancias longitudinales son introducidas al momento de fabricar los engranes mediante la impresora 3D que tiene una resolución de 0.2 mm.

Parámetro	Valor numérico	Unidades
δl_1	0.2	<i>mm</i>
δl_4	0.2	<i>mm</i>
$\delta\theta_2$	0.05	<i>grad</i>
$\delta\theta_4$	0.05	<i>grad</i>

Cuadro 4.6: Tolerancias para los parámetros de entrada del segundo par de engranes cilíndricos de dientes rectos.

A continuación, se mostrarán las velocidades angulares del piñón y el engrane, simulados a través de la herramienta Motion de Solidworks. Es importante mencionar que en Solidworks no existe una herramienta que entregue la relación de transmisión, pero si las velocidades angulares de salida y de entrada. Al hacer el cociente de estas velocidades angulares obtenemos un valor adimensional de 2. En la figura 4.8 se muestra las velocidades angulares del piñón y del engrane generadas a través de Solidworks. Se puede observar que en el caso de engranes cilíndricos de dientes rectos, las velocidades angulares, tanto de entrada como de salida, son constantes a diferencia de los mecanismos de cuatro barras, y por lo tanto, la relación de transmisión también es constante.

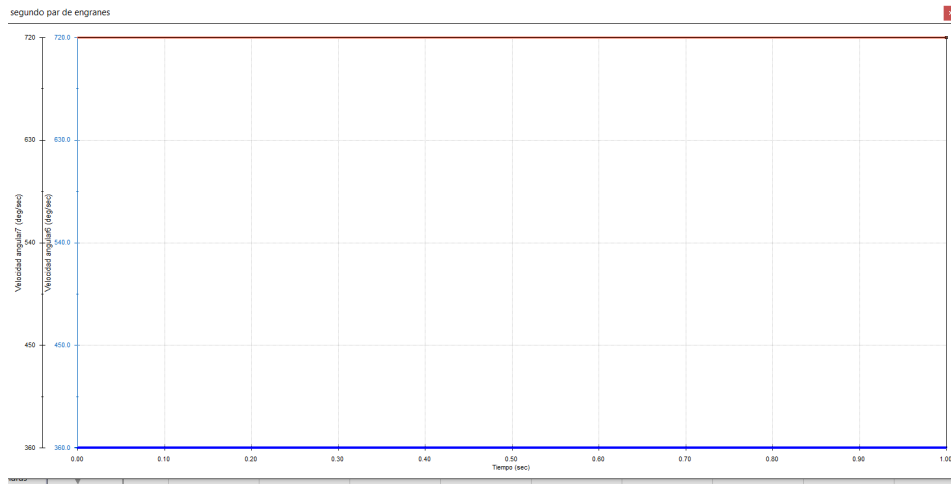


Figura 4.8: Velocidades angulares del piñón (Rojo) y del engrane (Azul) obtenidas a través de Solidworks.

A continuación, se muestra el gráfico de la relación de transmisión para este par de engranes, medida por los programas Solidworks, MATLAB y Arduino. Así mismo, también se compara la relación de transmisión con la medición física realizada con sensores de efecto hall KY024 y un tacómetro industrial. En la figura 4.9 se puede observar que las diferentes mediciones difieren en 1.19 por ciento, 9.2 por ciento para Solidworks y 5 por ciento en la medición del tacómetro, respecto al valor teórico.

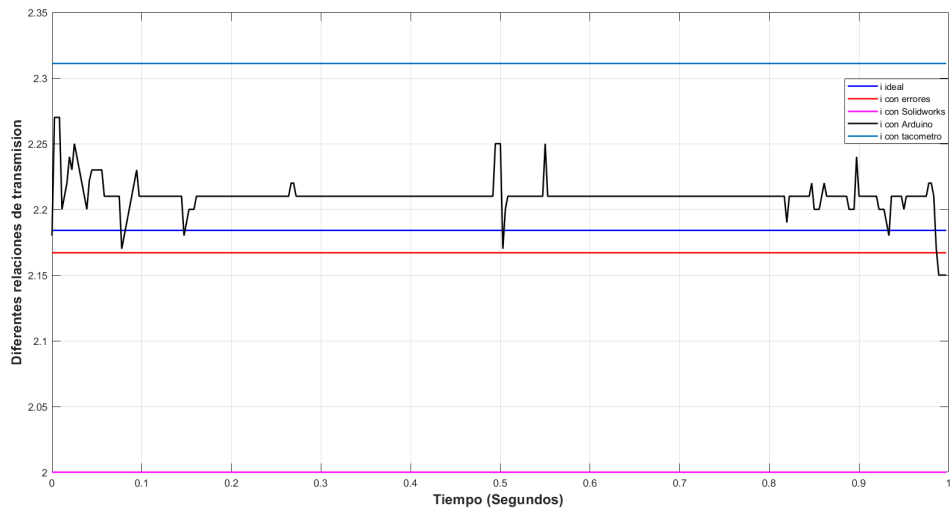


Figura 4.9: Diferentes relaciones de transmisión para el primer par de engranes cilíndricos de dientes rectos, i teórica (Azul) comparada con MATLAB (Rojo), Solidworks (Magenta), Arduino (Negro) y tacómetro industrial (Azul oscuro).

En el caso de la medición realizada con Arduino, los picos presentes se deben a vibraciones del mecanismo del arreglo experimental. Para este caso, los picos son mayores que en el primer caso (errores en el ángulo de presión de 0.005 grados). Sin embargo, es posible observar como hay zonas en las que la medición si es constante. A continuación, en el cuadro 4.7 se presentan

4.7. PAR DE ENGRANES CON ERROR EN EL ÁNGULO DE PRESIÓN DE 0.5 GRADOS.113

los valores de la relación de transmisión realizados a través de los diferentes programas y herramientas utilizadas.

Herramienta utilizada	Valor numérico de i	Unidades
i ideal	2.184	adimensional
i con errores	2.167	adimensional
i con Solidworks	2	adimensional
i con Arduino	2.2100	adimensional
i con tacómetro	2.311	adimensional

Cuadro 4.7: Comparación de la relación de transmisión cuando el error angular es de 0.05 grados.

A continuación se estudiara el tercer par de engranes.

4.7. Par de engranes con error en el ángulo de presión de 0.5 grados.

El tercer par de engranes introducido en el arreglo experimental corresponde al error angular en el ángulo de presión más grande, siendo éste de 0.5 grados. A continuación, en el cuadro 4.8 se muestra los parámetros de entrada para el tercer par de engranes cilindricos de dientes rectos. Los valores de las tolerancias dimensionales correspondientes a δl_1 y δl_4 son obtenidos de las especificaciones de la impresora 3D Flashforge Creator Pro, mientras que las tolerancias angulares son introducidas a partir del modelado CAD en Solidworks.

Parámetro	Valor numérico	Unidades
Longitud l_1	13.205	mm
Longitud l_4	28.845	mm
Ángulo de presión θ_2	20	$grad$
Ángulo de presión θ_4	20	$grad$

Cuadro 4.8: Parámetros de entrada teóricos para el par de engranes cilíndricos de dientes rectos con error angular de 0.5 grados en el angulo de presión.

A continuación, en el cuadro 4.9 se presentan las tolerancias dimensionales correspondientes a δl_1 , δl_4 , $\delta \theta_2$ y $\delta \theta_4$. Las tolerancias angulares son introducidas en el modelo CAD en Solidworks, mientras que las tolerancias longitudinales son introducidas al momento de fabricar los engranes mediante la impresión 3D.

Parámetro	Valor numérico	Unidades
δl_1	0.2	<i>mm</i>
δl_4	0.2	<i>mm</i>
$\delta \theta_2$	0.5	<i>grad</i>
$\delta \theta_4$	0.5	<i>grad</i>

Cuadro 4.9: Tolerancias para los parámetros de entrada del tercer par de engranes cilíndricos de dientes rectos con error angular de 0.5 grados en el ángulo de presión.

A continuación, se mostrarán las velocidades angulares del piñón y el engrane, simulados a través de la herramienta Motion de Solidworks. Es importante mencionar que en Solidworks no existe una herramienta que nos entregue la relación de transmisión, por lo tanto al hacer el cociente de velocidades angulares obtenemos un valor adimensional de 2. En la figura 4.10 se muestran las velocidades angulares del piñón y del engrane generadas a través de Solidworks. Se puede observar que en el caso de engranes cilíndricos de dientes rectos, las velocidades angulares tanto de entrada como de salida son constantes a diferencia de los mecanismos de cuatro barras y por lo tanto la relación de transmisión también es constante.

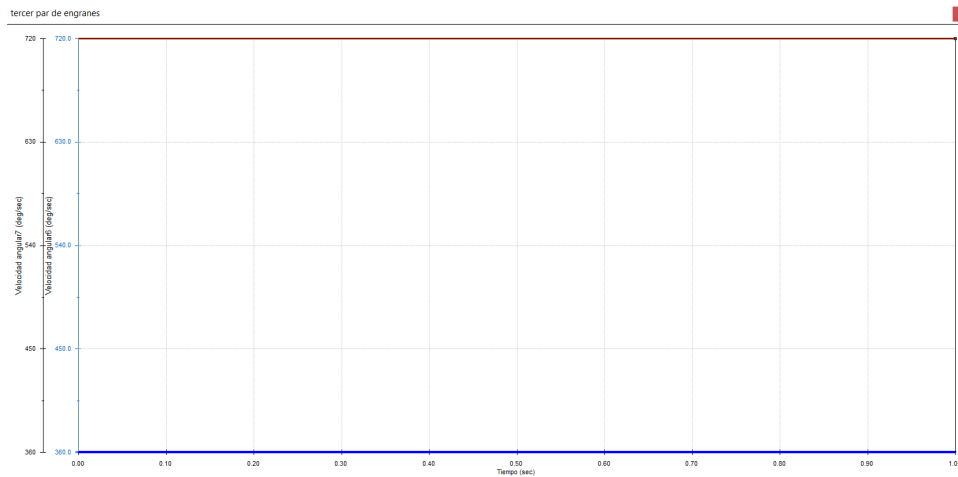


Figura 4.10: Velocidades angulares del piñón (Rojo) y del engrane (Azul) obtenidas a través de Solidworks.

A continuación, se muestra el gráfico de la relación de transmisión para este par de engranes con error angular de 0.5 grados en el ángulo de presión, medida con diferentes programas: Solidworks, MATLAB y Arduino. Así mismo, se compara la relación de transmisión con la medición física realizada mediante sensores de efecto hall KY024 y un tacómetro industrial. En la figura 4.11 se puede observar que las diferentes mediciones difieren en un 2 por ciento para Arduino, 8.35 por ciento con Solidworks, y 6 por ciento con el tacómetro industrial, con respecto al valor teórico dado por MATLAB.

4.7. PAR DE ENGRANES CON ERROR EN EL ÁNGULO DE PRESIÓN DE 0.5 GRADOS.115

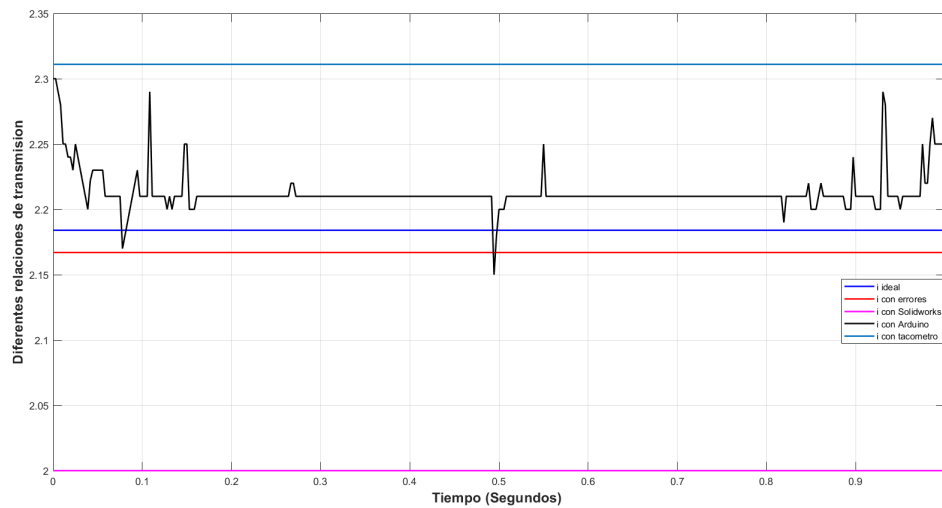


Figura 4.11: Diferentes relaciones de transmisión para el par de engranajes cilíndricos de dientes rectos con error angular de 0.5 grados en el ángulo de presión, i teórica (Azul) comparada con MATLAB (Rojo), Solidworks (Magenta), Arduino (Negro) y tacómetro industrial (Azul oscuro).

De la figura 4.7 es posible observar que las diferentes mediciones realizadas no difieren significativamente, y son esencialmente constantes. En el caso de la medición realizada con Arduino los picos presentes se deben a vibraciones en el arreglo experimental, para este caso, los picos son mayores que en el primer y segundo par de engranajes cuando los errores angulares son de 0.005 y 0.05 grados respectivamente. Sin embargo, es posible observar como hay zonas en las que la medición si es constante y se aproxima al valor calculado por MATLAB. A continuación, en el cuadro 4.9, se presentan los valores de la relación de transmisión realizada a través de los diferentes programas y herramientas utilizadas.

Herramienta utilizada	Valor numérico de i	Unidades
i ideal	2.184	adimensional
i con errores	2.167	adimensional
i con Solidworks	2	adimensional
i con Arduino	2.2130	adimensional
i con tacómetro	2.318	adimensional

Cuadro 4.10: Comparación de la relación de transmisión entre Solidworks, Arduino, tacómetro y MATLAB .

Independientemente del software o herramienta utilizada para medir la relación de transmisión, los valores numéricos son bastante cercanos con respecto al valor teórico como lo muestra el cuadro 4.9. En los tres pares de engranajes utilizados se presentó un pico durante la mitad de las adquisiciones de datos a través de la tarjeta Arduino por efecto de vibraciones mecánicas en la estructura de MDF, sin embargo se presentaron intervalos de relación de transmisión constantes.

En los tres ejemplos anteriores se ha constatado que mientras mayor es el error en el ángulo de presión mayores son los picos medidos por la tarjeta Arduino y por lo tanto mayor es la incidencia con respecto a la medida teórica de relación de transmisión, algo que comparten los tres casos de estudio anteriores es que las velocidades angulares de cada engrane permanecen esencialmente constantes durante las distintas mediciones realizadas, por lo tanto aun sumando los errores modelados las relaciones de transmisión permanecen constantes pero con valores distintos a los teóricos. Los pares de engranes utilizados fueron construidos a través de impresión 3D con calidades IT media-altas, si los engranes fuesen fabricados a través de máquinas de control numérico o CNC con calidades IT mas bajas los picos serán mucho mas pequeños. Los errores en los distintos mecanismos y máquinas siempre van a existir puesto que no es posible fabricar actualmente con calidades mas pequeñas a IT01. Los errores tanto de tipo longitudinal o de tipo angular tienen un mayor efecto en los trenes de engranes con longitudes de radios base pequeños, mientras que los trenes de engranes con longitudes mayores en los radios base se ven mucho menos afectados por este tipo de errores.

En la figura 4.12 y 4.13 se muestra la parte física del mecanismo constituido por un bastidor y dos ruedas dentadas, piñón y corona usado como arreglo experimental de comprobación. Es posible observar la fuente DC utilizada, los sensores, la tarjeta Arduino y el haz de láser del tacómetro.

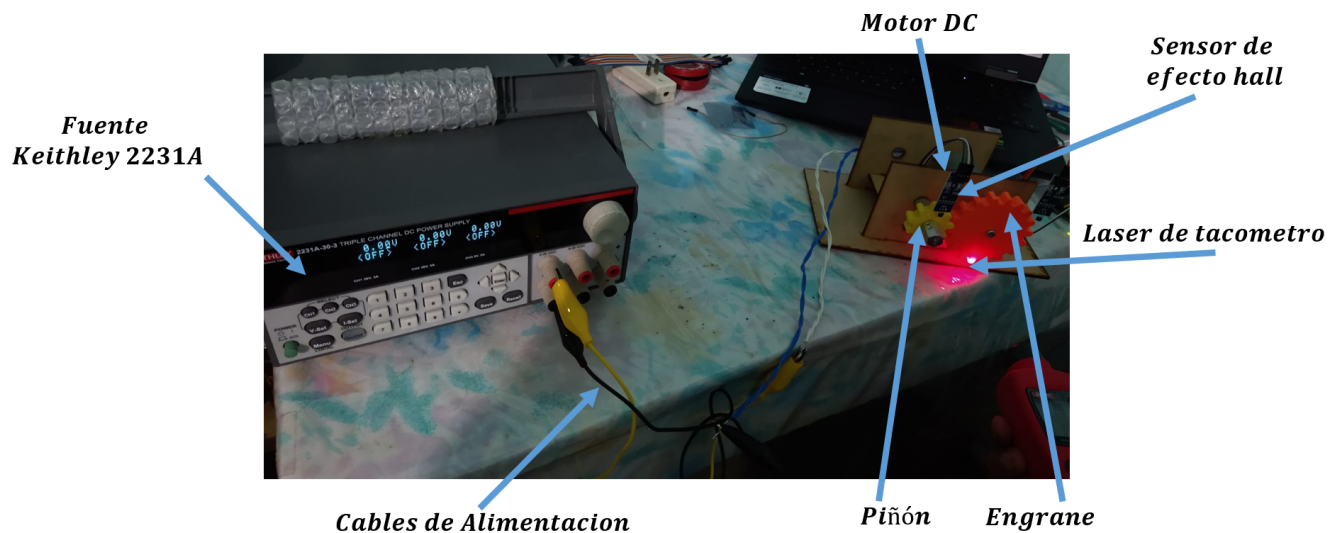


Figura 4.12: Arreglo experimental funcional con tacómetro y fuente DC de 30 V.

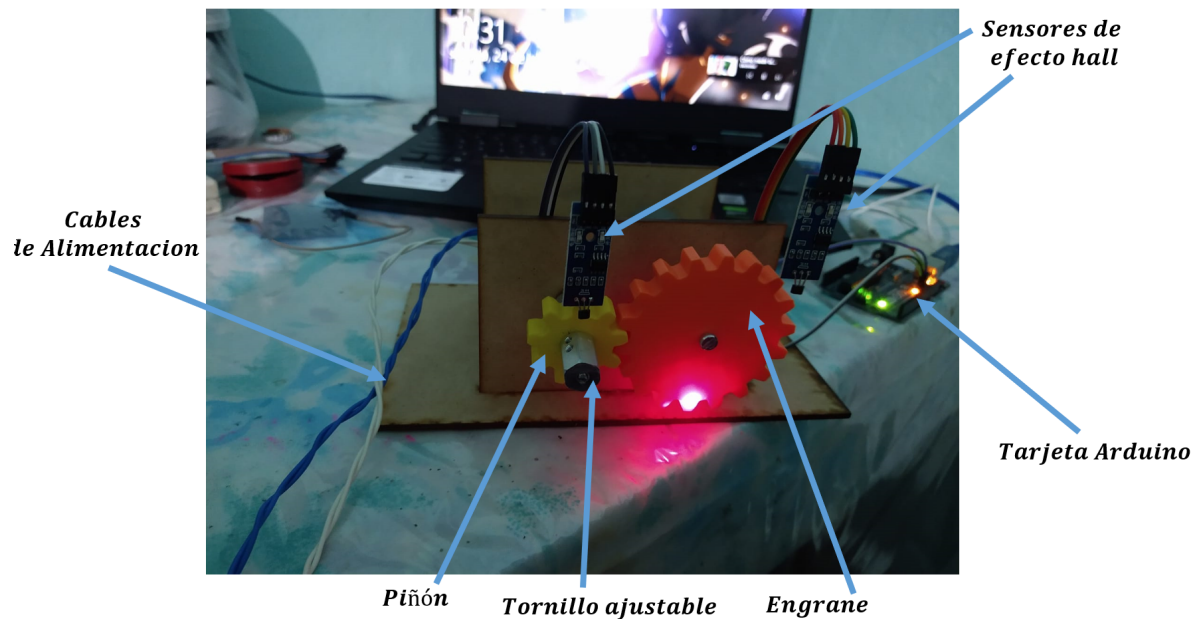


Figura 4.13: Arreglo experimental y su implementación física..

En general, mientras mayor sea el error angular, mayor son los picos que presenta el análisis con los sensores de efecto Hall. Sin embargo, los datos obtenidos a través de Arduino difieren en un 3.9, 1.9 y 2 por ciento para los pares de engranes con error angular de 0.005, 0.05 y 0.5 grados, respecto al valor calculado por MATLAB. A continuación, en la figura 4.14 se muestra el esquema general entre Arduino y MATLAB, la conexión entre ambos software es a través de Excel que lee los vectores de datos arrojados por Arduino y a su vez, MATLAB hace el tratamiento de datos contenido en Excel. [38]

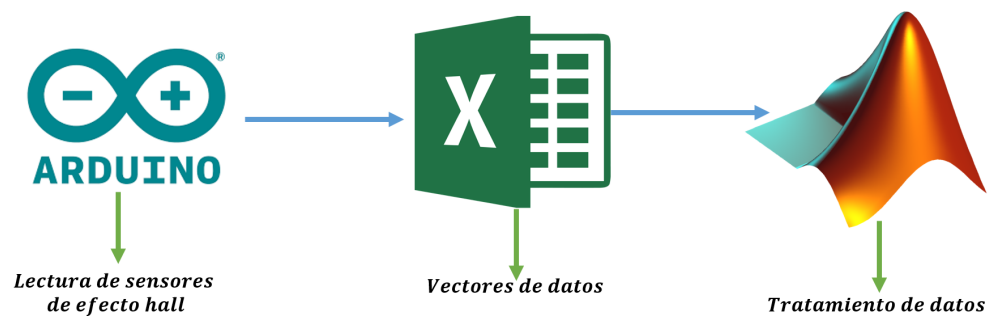


Figura 4.14: Esquema General de interconexión entre Arduino y MATLAB

4.8. Impresora 3D Flasforgue Creator Pro y Tacómetro UT371.

A continuación, se mostrará en la figura 4.15, la impresora 3D utilizada para realizar los engranes de 18 y 9 dientes, la cual es una Flasforgue Creator Pro.

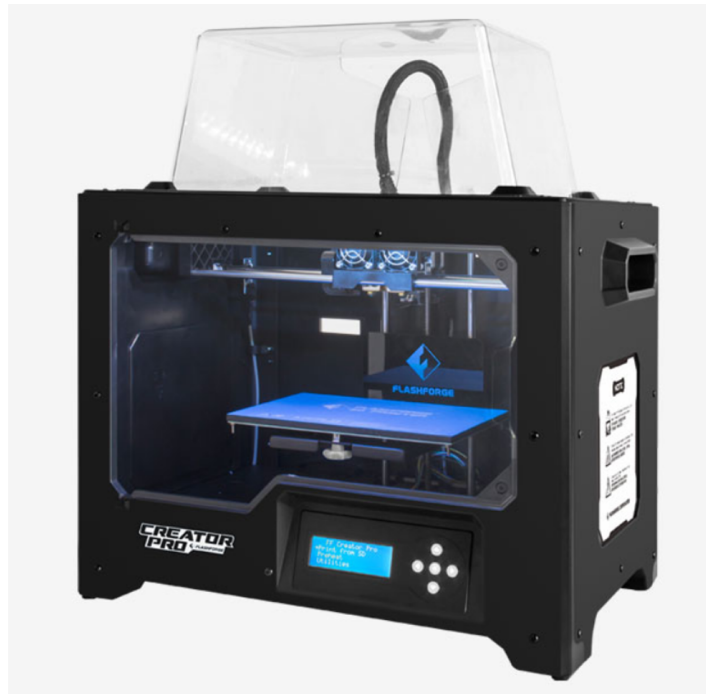


Figura 4.15: Impresora 3D Flashforge Creator Pro utilizada para fabricar los engranes del arreglo experimental.

A continuación se muestran las características generales y de impresión.

Specification	
Printing	Mechanical & Dimension
Extruder Quantity	2
Nozzle Diameter	0.4mm
Maximum Extruder Temperature	240°C (464°F)
Print Speed	30-100mm/s
Maximum platform Temperature	120°C (248°F)
Filament Compatibility	PLA, TPU95A, ABS, PETG
Filament Diameter	1.75mm (0.069IN)
Print Volume	227*148*150mm (8.9*5.8*5.9IN)
Layer Thickness	0.1mm-0.4mm
Print Precision	±0.2mm
Printer Dimension	526*360*403mm (20.7*14.2*15.9IN)
Screen	LCD screen
Net Weight	14.8kg (32.63LBS)
Gross Weight	21.5kg (47.4LBS)
Spool	External
Running Noise	50dB
Working Environment	15-30°C (59-86°F)

Figura 4.16: Especificaciones de la impresora 3D Flashforge Creator pro utilizada para fabricar los engranes del arreglo experimental.

Ahora, se muestra el tacómetro de gama media utilizado para hacer mediciones en los engranes cilíndricos de dientes rectos, En la figura 4.17 se muestra al tacómetro UNIT modelo UT371 el cual hace mediciones a través de un láser incorporado.



Figura 4.17: Tacómetro UT371.

A continuación, en la figura 4.18 se muestra las especificaciones del tacómetro utilizado.

Specifications	Range	UT371
RPM range	10RPM~99RPM	$\pm(0.03\%)$
	100RPM~999RPM	$\pm(0.04\% + 2)$
	1000RPM~9999RPM	$\pm(0.04\% + 2)$
	10000RPM~99999RPM	$\pm(0.04\% + 2)$
Counts	Range: 0~99999	√
	Max. input frequency: 10kHz; bandwidth: 5%	
Target distance	50mm~200mm	√
Features		
Display count		100000

Figura 4.18: Especificaciones del tacómetro UT371.

4.9. Recomendaciones de diseño.

1. Los materiales de la base de MDF pueden ser remplazados por una lámina de acero o aluminio cortados por láser para una mayor rigidez. Es cuestión de costos, los materiales mas rígidos elevan el coste total del arreglo experimental.
2. Fabricar los engranes a través de CNC. Esto dará mayor precisión a los engranes pero también elevan su costo.
3. Sensores de mayor precisión pueden ser utilizados en el momento de la medición. Así mismo, una tarjeta de mayor procesamiento como una FPGA puede dar mayor precisión al momento de hacer las mediciones. Nuevamente, esto eleva el costo. Se intenta hacer una un arreglo experimental prototipo de una forma barata, rápida y funcional.

Conclusiones

A través de los análisis cinemáticos realizados a los mecanismos de cuatro barras y a las transmisiones por engranajes cilíndricos de dientes rectos se llega a expresiones generales de relación de transmisión o ganancia de velocidad angular entre las velocidades angulares de entrada y de salida. Además, se obtienen expresiones que modelan los errores en las diferentes relaciones de transmisión presentes en estos mecanismos a partir de la posición y la longitud de los eslabones. Estas expresiones no están presentes en la literatura clásica, por ello se llevó a cabo una recapitulación del análisis de la posición y velocidad angular de los mecanismos de cuatro barras y se probaron casos de estudio particular con software CAD y software matemático. En el caso de los engranes cilíndricos de dientes rectos, se determinó que el modelo equivalente usado para hallar los errores en la relación de transmisión debido a los errores en los parámetros geométricos de una transmisión por engranajes es un caso particular de un mecanismo de cuatro barras estacionario, algo no documentado en la literatura clásica.

Este trabajo permite conocer la influencia que tienen los errores en el ángulo de presión y en los radios bases del piñón y la corona, sobre la relación de transmisión de los engranajes cilíndricos de dientes rectos. Se concluye que a medida que los radios base son más pequeños, la influencia de los errores de fabricación en el error en la relación de transmisión es más grande, así por ejemplo, para una transmisión por engranajes en el que el radio base del piñón es de 13 mm y el radio base del engrane es de 28 mm, el error máximo alcanzado es de 8.35 por ciento con respecto al valor teórico y en una transmisión donde el radio base del piñón es de 190 mm y el radio base del engrane es de 370 mm, la incidencia del error con respecto al valor teórico es de 0.5 por ciento. Los errores angulares en el ángulo de presión influyen en mayor medida en el error en la relación de transmisión que los errores longitudinales en los radios base del piñón y la corona.

Tratándose de los mecanismos de cuatro barras, se demuestra que las magnitudes de los errores en la relación de transmisión pueden ser reducidos mediante una adecuada asignación del grado de precisión IT y del signo de la posición fundamental de las tolerancias dimensionales de las longitudes de los eslabones. Se encontraron las expresiones generales para los errores en las relaciones de transmisión como cociente de las velocidades angulares de salida entre las velocidades angulares de entrada, y se modelaron las expresiones generales de los coeficientes asociados a estos errores en función de las longitudes y las posiciones angulares, así como del grado IT de tolerancia dimensional de estas longitudes y su posición fundamental. Se concluye que la Ley de Grashof tiene incidencia significativa en los mecanismos de paralelogramo articulado al momento de asignar las tolerancias IT y los signos de las mismas, pudiendo un

mecanismo de paralelogramo articulado ser o no un mecanismo de Grashof, en dependencia del grado de precisión IT de las longitudes de los eslabones y del signo de la posición fundamental. De igual forma, se demostró que existen diferentes metodologías para encontrar las distintas relaciones de transmisión en este tipo de mecanismos planos. Estas son, la de los coeficientes de influencia, la de diferenciación implícita y la de la medición directa de la velocidad angular.

Se ha encontrado, además, el interesante resultado de que el modelo matemático puede ser ampliado para estudiar la influencia de los errores de fabricación en la exactitud de posicionamiento y la relación de transmisión de diversos mecanismos planos y robots de n grados de libertad.

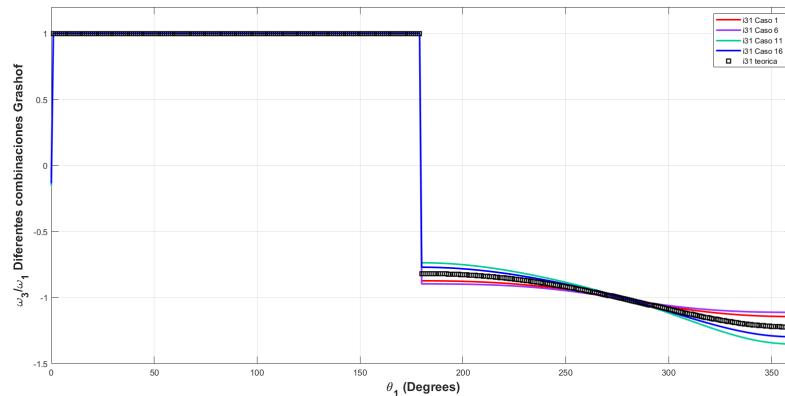
Apéndice A: Signos para δ_i .

En mecanismos de cuatro barras y mecanismos de paralelogramo articulado, cuando asignamos las tolerancias dimensionales debemos asignar los signos adecuados. En el caso de los mecanismos de paralelogramo articulado es importante asignar la combinación de signos adecuada ya que este mecanismo está en el límite de la Ley de Grashof, cuya ecuación está dada en (2.45). Si la combinación es inadecuada, el mecanismo de paralelogramo articulado se convertirá en un mecanismo de cuatro barras con longitudes diferentes, cuya relación de transmisión será menor a 1 y no será constante en ningún intervalo. Podría ocurrir también que el paralelogramo articulado se convierta en un mecanismo no Grashof y existirán intervalos de entrada en los que la relación de transmisión no existiría debido a posiciones límites más allá de las cuales estos mecanismos no pueden moverse. En el cuadro 11 se presentan las posibles combinaciones de diseño para las tolerancias, tomando en cuenta que $\delta\theta_1$ es cero y el mecanismo tiene rotación completa de π grados. Como tenemos cuatro variables $\delta l_1, \delta l_2, \delta l_3, \delta l_4$ para las tolerancias dimensionales, entonces el número de combinaciones de signos será de 2^k con $k=4$.

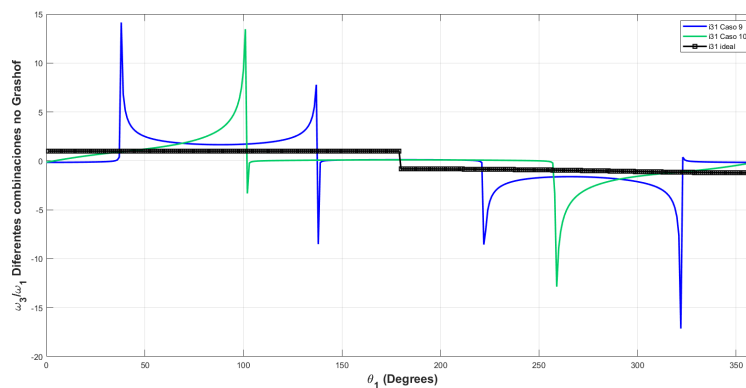
Numero de caso	δl_1	δl_2	δl_3	δl_4
1	-	-	-	-
2	-	-	-	+
3	-	-	+	-
4	-	-	+	+
5	-	+	-	-
6	-	+	-	+
7	-	+	+	-
8	-	+	+	+
9	+	-	-	-
10	+	-	-	+
11	+	-	+	-
12	+	-	+	+
13	+	+	-	-
14	+	+	-	+
15	+	+	+	-
16	+	+	+	+

Cuadro 11: Signos de las tolerancias dimensionales finales de las dieciséis combinaciones posibles para mecanismos articulados de cuatro barras de rotación completa.

En mecanismos de cuatro barras con longitudes diferentes, el criterio de Grashof no se ve particularmente afectado por el signo de las tolerancias dimensionales porque el mecanismo seguirá siendo de Grashof independientemente de las tolerancias dimensionales. Sin embargo, en mecanismos de paralelogramo articulado, éstos están en el límite de la ley de Grashof y una elección inadecuada del signo de las tolerancias hará que el elemento de entrada del mecanismo no pueda dar vueltas completas y al mismo tiempo hará que la relación de transmisión no sea constante. En estos mecanismos de paralelogramo articulado, solo cuatro combinaciones de signo para las tolerancias conducen a mecanismos de tipo Grashof, siendo éstas las combinaciones 1,6,11 y 16. Las demás combinaciones de signos generan mecanismos no Grashof con intervalos de relación de transmisión nula y picos debido a las posiciones límites de la coordenada angular de entrada. A continuación, en la figura 19 se retoma el ejemplo del paralelogramo articulado del capítulo 2. En este caso, la calidad es IT16 y se presentan las diferentes relaciones de transmisión, tanto la teórica (sin tomar en cuenta los errores) como las cuatro combinaciones Grashof (figura 19 (a)). En todos los casos se mantienen constantes las relaciones de transmisión de los mecanismos Grashof en el intervalo $[0^\circ, 180^\circ]$ y las desviaciones de la relación de transmisión son menores a la relación de transmisión teórica en el intervalo $[180^\circ, 360^\circ]$.



(a) Diferentes relaciones de transmisión Grashof.



(b) Diferentes relaciones de transmisión no Grashof. Se incluye la teórica (Negra) y dos combinaciones no Grashof.

Figura 19: Diferentes relaciones de transmisión con calidad IT16 cuando los signos de las tolerancias en un paralelogramo articulado conducen a mecanismos de Grashof y no Grashof respectivamente.

Apéndice B: Artículo Nacional.



Errores en la relación de transmisión de los engranajes cilíndricos de dientes rectos

Reyes Méndez Alfonso Daniel, Félix Beltrán Olga Guadalupe, Mendoza Quiñonez
Jesús Alberto

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias de la Electrónica, Maestría en
Ciencias de la Electrónica, Opción en Automatización
alfonso.reyes@alumno.buap.mx

Resumen

En algunos mecanismos utilizados en mecatrónica la precisión es importante y solo gracias a ella el mecanismo puede cumplir su función. La bibliografía clásica no trata el modo cómo los errores de fabricación y montaje influyen en la cinemática funcional del mecanismo. En este trabajo, se muestra cómo los errores de fabricación asociados a los radios bases y a los ángulos de presión de una transmisión por engranajes influyen en el error de su relación de transmisión teórica, para la cual no se toma en cuenta estos errores. Para resolver este problema se plantea un mecanismo equivalente de cuatro barras que sustituye al modelo geométrico del piñón, del engrane y del bastidor que los soporta. Para ello se plantea las ecuaciones de restricción cinemática del mecanismo equivalente en el campo de las posiciones, tomando las diferenciales totales de estas ecuaciones para encontrar la relación entre los errores en la relación de transmisión y los errores en los parámetros geométricos del mecanismo equivalente de cuatro barras. Los resultados se muestran haciendo uso de MATLAB. Se obtiene que el error para la transmisión por engranajes aquí estudiada puede llegar a ser hasta de un 3 % cuando los grados de precisión IT de fabricación no son exigentes.

Palabras clave: Tolerancias dimensionales, relación de transmisión, involuta, transmisiones por engranajes cilíndricos rectos, errores en la relación de transmisión.

1. Introducción

Los engranes son elementos de máquinas que transmiten movimiento mediante sus dientes que embonan de una manera sucesiva transmitiendo movimiento de un eje giratorio a otro [1].

Existen numerosas aplicaciones de precisión en las que una razón de velocidad angular constante se debe transmitir de un eje a otro. Debido a la diversidad que existe de tipo de engranes, los ejes de entrada no tienen que estar alineados ni paralelos, así mismo se pueden obtener diferentes razones de velocidad angular variables si los engranes utilizados son no circulares [2].

El método de encontrar las ecuaciones de restricción cinemática de un mecanismo y sus diferenciales totales también se conoce con el nombre de método de los desplazamientos virtuales de los eslabones de un mecanismo [3].

En este trabajo, se presenta un modelo matemático para encontrar cómo los errores asociados a las tolerancias dimensionales del radio base y del ángulo de presión de la transmisión, influyen en el error en la relación de transmisión. Para esto, se modela la transmisión por engranajes como un mecanismo de cuatro barras equivalente cuyas cuatro barras son: el bastidor definido como la distancia entre centros fijos, el radio base del piñón como elemento de entrada, el radio base del engrane conducido y la línea de acción normal como la biela.

A través de MATLAB se grafican los errores en la relación de transmisión en función de las tolerancias dimensionales de los parámetros geométricos del mecanismo de cuatro barras equivalente. Se presentan ejemplos del cálculo de las tolerancias dimensionales de una pareja de engranes rectos, con un radio base del engrane de 37 mm y un radio base del piñón de 19 mm, para varios grados de calidad IT. Se determina su relación de transmisión teórica y se compara con la obtenida al tomar en cuenta las tolerancias dimensionales de sus parámetros geométricos, para un juego de calidades IT de ISO correspondientes a IT01, IT6, IT9, IT12 e IT16, de acuerdo a la tabla de calidades IT normalizadas.

1.1 Radio de Curvatura de una curva involuta

Para comprender los fundamentos matemáticos relacionados con este trabajo partiremos de la siguiente definición: “la curva involuta de un círculo es el lugar geométrico de la punta de una cuerda que se desenrolla y se mantiene tensa a partir de un círculo conocido como círculo base” [1].

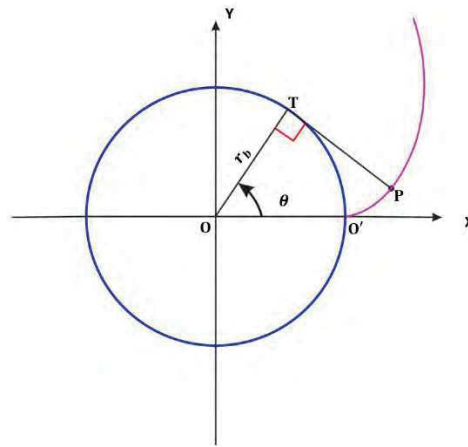


Figura 1. Círculo base y su curva involuta.

En la figura 1 se presenta la curva involuta generada a partir de un círculo de radio base r_b . La longitud del arco $\widehat{O^T T}$ está dada a partir de la ecuación (1).

$$\widehat{O^T T} = \theta r_b \quad (1)$$

Por definición, el ángulo θ está definido como se señala en (2).

$$\theta = \frac{\widehat{O^T T}}{r_b} \quad (2)$$

De acuerdo a la figura 1, la longitud de arco también queda definida según (3).

$$\widehat{O^T T} = \overline{TP} \quad (3)$$

A su vez, la longitud \overline{TP} se puede expresar en función del ángulo θ y del radio base r_b como se indica en la ecuación (4).

$$\overline{TP} = \theta r_b \quad (4)$$

Por otra parte, el ángulo θ entre la línea \overline{OT} y la línea de referencia horizontal $\overline{OO'}$ es el mismo ángulo que se forma entre la línea \overline{TP} y la vertical que pasa por T , como se muestra en la figura 1. La proyección del segmento \overline{TP} sobre los ejes x e y es la indicada en (5).



$$\overline{TP} = \theta r_b (\text{sen}(\theta)\hat{i} - \text{cos}(\theta)\hat{j}) \quad (5)$$

Por otro lado, las ecuaciones paramétricas del punto P están dadas en (6).

$$\begin{aligned} x &= r_b (\text{cos}(\theta) + \theta \text{sen}(\theta)) \\ y &= r_b (\text{sen}(\theta) - \theta \text{cos}(\theta)) \end{aligned} \quad (6)$$

Para una curva definida en forma paramétrica por las ecuaciones $x = x(\theta)$, $y = y(\theta)$, entonces su curvatura K en cualquier punto (x, y) viene dada por la ecuación (7). El numerador es un polinomio con base en una función suave y también lo es el denominador, el resultado estará dado también por una función suave [2].

$$K = \frac{|x'y'' - y'x''|}{|(x')^2 + (y')^2|^{\frac{3}{2}}} \quad (7)$$

Por lo tanto, de acuerdo a la ecuación (7), necesitamos obtener las primeras y segundas derivadas de las ecuaciones paramétricas. Las primeras derivadas se describen en las ecuaciones dadas en (8).

$$\begin{aligned} x' &= r_b (\theta \text{cos}(\theta)) \\ y' &= r_b (\theta \text{sen}(\theta)) \end{aligned} \quad (8)$$

Las segundas derivadas de las ecuaciones paramétricas indicadas en (6) están dadas en (9).

$$\begin{aligned} x'' &= r_b (\text{cos}(\theta) - \theta \text{sen}(\theta)) \\ y'' &= r_b (\text{sen}(\theta) + \theta \text{cos}(\theta)) \end{aligned} \quad (9)$$

Al sustituir las ecuaciones (8) y (9) en la ecuación (7), se obtendrá la expresión para la curvatura en cualquier punto de la curva involuta, como se muestra en la ecuación (10).

$$K = \frac{r_b(\theta \text{cos}(\theta))(r_b(\text{sen}(\theta) + \theta \text{cos}(\theta))) - r_b(\theta \text{sen}(\theta))(r_b(\text{cos}(\theta) - \theta \text{sen}(\theta)))}{[(r_b \theta \text{cos}(\theta))^2 + (r_b \theta \text{sen}(\theta))^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (10)$$

Finalmente, desarrollando el álgebra obtenemos la curvatura descrita por la ecuación (11).

$$K = \frac{1}{\theta r_b} \quad (11)$$

Como el radio de curvatura en un punto arbitrario está dado como el inverso de la curvatura K [2], la expresión para el radio de curvatura en un punto arbitrario de la involuta se describe en la ecuación (12). El radio de curvatura está denotado por la letra ρ .

$$\rho = \frac{1}{K} \quad (12)$$

Al sustituir la ecuación (12) en la ecuación (11) obtenemos el radio de curvatura en un punto arbitrario de la involuta, como se indica en (13).

$$\rho = \theta r_b = \overline{TP} \quad (13)$$

De este resultado se enuncia el siguiente corolario:

El centro de curvatura de una curva de tipo involuta en un punto arbitrario siempre yacerá sobre el círculo base de la misma involuta, así mismo la evoluta de la involuta de un círculo base es el propio círculo base, estando el radio de curvatura en función del radio base y su correspondiente ángulo [1].

2. Desarrollo

2.1 Modelación de un mecanismo equivalente de cuatro barras para un engranaje cilíndrico de dientes rectos

En la figura 2, se muestra dos involutas en contacto o “engranadas” y se representan los dientes del piñón y del engrane. De la figura 2 es posible observar el mecanismo de 4 barras equivalente formado por el radio base del engrane, el radio base del piñón, la línea de acción y la distancia entre centros. Este mecanismo equivalente consiste de una etapa de engranado. De acuerdo a la geometría es posible definir la relación de transmisión como se indica en la ecuación (14).

$$i = \frac{O_4P}{O_2P} \quad (14)$$

En la ecuación (14), i representa la relación de transmisión. El segmento $\overline{O_4P}$ es la línea horizontal desde el centro del engrane al punto de paso y $\overline{O_2P}$ es la línea horizontal desde el centro del piñón al punto de paso, siendo P dicho punto de paso donde los círculos de paso del engrane y el piñón son tangentes entre sí.

Podemos extraer de la figura 2 el mecanismo equivalente de cuatro barras como se indica en líneas rojas. En la figura 3 se muestra el mecanismo equivalente de cuatro barras, el cual está conformado por dos lazos vectoriales triangulares.

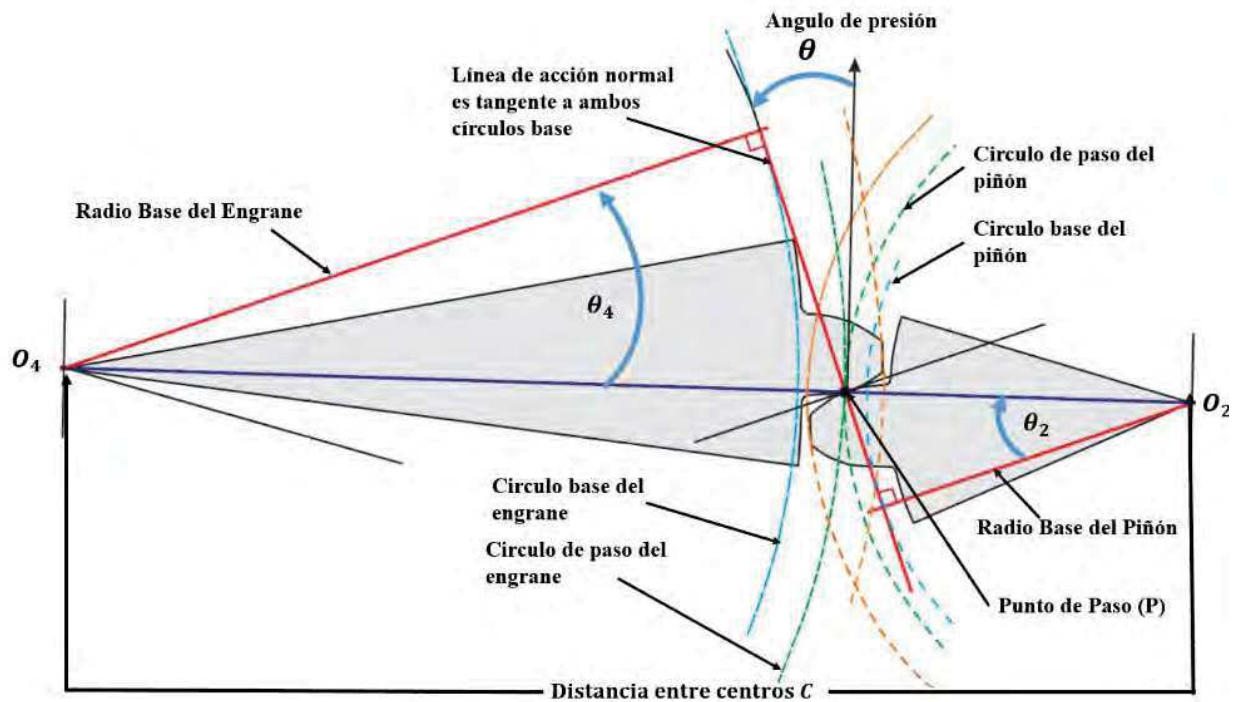


Figura 2. Geometría de contacto entre un piñón y un engrane.

De acuerdo al modelo equivalente de la figura 3, el mecanismo de cuatro barras está conformado por: la longitud l_1 correspondiente al radio base del piñón, las longitudes l_2 y l_3 asociadas a la longitud de la línea de acción, la longitud l_4 es el radio base del engrane, la longitud l_5 corresponde a la línea horizontal $\overline{O_4P}$ y la longitud l_6 es la línea horizontal $\overline{O_2P}$. A su vez, el ángulo θ_2 representa el ángulo de presión del piñón y el ángulo θ_4 el ángulo de presión del engrane. Teóricamente los ángulos θ_2 y θ_4 son iguales [3].

A partir del modelo equivalente se modelan las ecuaciones de restricción cinemática sobre los ejes x , y , respectivamente. Las ecuaciones del primer lazo vectorial están dadas como se muestra en (15).

Las ecuaciones para el segundo lazo vectorial están dadas en (16).

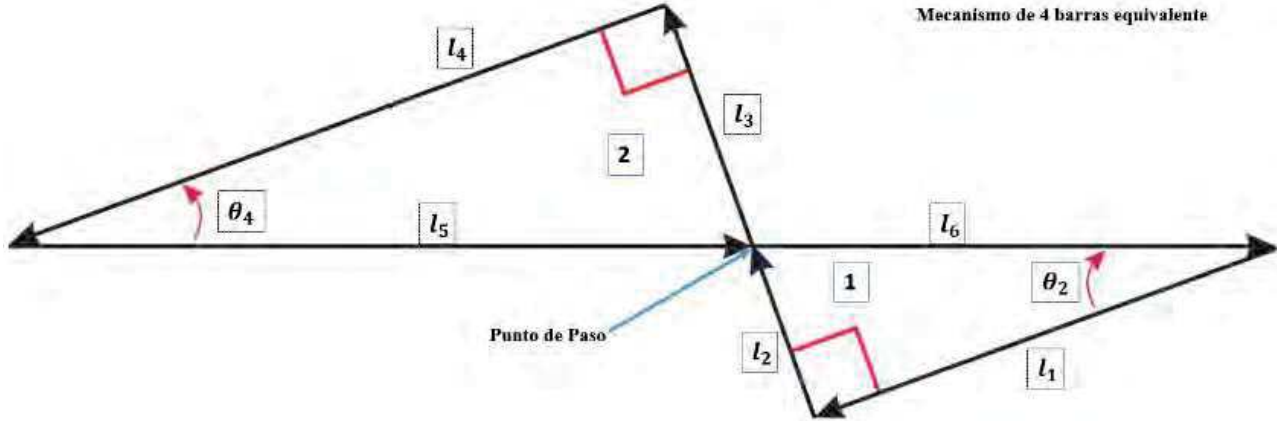


Figura 3. Geometría de contacto entre un piñón y un engrane.

$$\begin{aligned} l_1 \cos(\theta_2) + l_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) - l_6 &= 0 \\ -l_1 \sin(\theta_2) + l_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} l_3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_4\right) + l_4 \cos(\theta_4) - l_5 &= 0 \\ l_3 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_4\right) - l_4 \sin(\theta_4) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

De acuerdo a las funciones trigonométricas fundamentales [4] indicadas en (17), es posible reestructurar las ecuaciones de restricción cinemática, reescribirlas y denotarlas como se indica en (18).

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin(\theta) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos(\theta) \end{aligned} \quad (17)$$

En las ecuaciones dadas en (18) tenemos las ecuaciones de manera más compacta que nos permitirá un manejo mucho más adecuado de las operaciones.

$$\begin{aligned} l_1 \cos(\theta_2) + l_2 \sin(\theta_2) - l_6 &= 0 \\ -l_1 \sin(\theta_2) + l_2 \cos(\theta_2) &= 0 \\ l_3 \sin(\theta_4) + l_4 \cos(\theta_4) - l_5 &= 0 \\ l_3 \cos(\theta_4) - l_4 \sin(\theta_4) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

De las ecuaciones dadas en (18) podemos despejar los parámetros geométricos l_2 , l_3 , l_5 y l_6 , en función de los radios bases del piñón y el engrane, respectivamente, como se indica en la ecuación (19).

$$\begin{aligned} l_2 &= l_1 \tan(\theta_2) \\ l_3 &= l_4 \tan(\theta_4) \\ l_5 &= l_4 (\cos(\theta_4) + \tan(\theta_4) \sin(\theta_4)) \\ l_6 &= l_4 (\cos(\theta_2) + \tan(\theta_2) \sin(\theta_2)) \end{aligned} \quad (19)$$



Los dos lazos vectoriales están en función de las variables del mecanismo de cuatro barras equivalente $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, \theta_2, \theta_4$. A las cuatro ecuaciones de restricción cinemática del mecanismo equivalente dadas en (18,) se le aplicará la diferencial total [5] [6] con respecto a las variables implicadas. Obtenemos las ecuaciones señaladas en (20)

$$\begin{aligned} \cos(\theta_2)\delta l_1 + \sin(\theta_2)\delta l_2 - \delta l_6 - l_1\sin(\theta_2)\delta\theta_2 + l_2\cos(\theta_2)\delta\theta_2 &= 0 \\ -\sin(\theta_2)\delta l_1 + \cos(\theta_2)\delta l_2 - l_1\cos(\theta_2)\delta\theta_2 - l_2\sin(\theta_2)\delta\theta_2 &= 0 \\ \cos(\theta_4)\delta l_4 + \sin(\theta_4)\delta l_3 - \delta l_5 + l_3\cos(\theta_4)\delta\theta_4 - l_4\sin(\theta_4)\delta\theta_4 &= 0 \\ -\sin(\theta_4)\delta l_4 + \cos(\theta_4)\delta l_3 - l_4\cos(\theta_4)\delta\theta_4 - l_3\sin(\theta_4)\delta\theta_4 &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Las diferenciales de las ecuaciones de restricción cinemática expresadas en forma matricial se denotan como se indica en (21).

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta_2) & 0 & 0 & -1 \\ \cos(\theta_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta_4) & -1 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_4) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_5 \\ \delta l_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & -l_1\sin(\theta_2) + l_2\cos(\theta_2) & 0 \\ -\sin(\theta_2) & 0 & -l_1\cos(\theta_2) - l_2\sin(\theta_2) & 0 \\ 0 & \cos(\theta_4) & 0 & l_3\cos(\theta_4) - l_4\sin(\theta_4) \\ 0 & -\sin(\theta_4) & 0 & -l_3\sin(\theta_4) - l_4\cos(\theta_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_4 \\ \delta l_{\theta_2} \\ \delta l_{\theta_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Despejando las variables de interés, que son δl_5 y δl_6 , se puede determinar la influencia de las tolerancias en la relación de transmisión de un engranaje cilíndrico de dientes rectos, ya que la relación de transmisión viene dada por el cociente $\frac{l_5}{l_6}$ [7].

Las matrices **A** y **B** mostradas en (22) quedan expresadas en función de los ángulos de presión del engrane y el piñón, así como de las longitudes l_1, l_2, l_3, l_4 que componen el mecanismo de cuatro barras equivalente.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_2) & 0 & 0 & -1 \\ \cos(\theta_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta_4) & -1 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_4) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & -l_1\sin(\theta_2) + l_2\cos(\theta_2) & 0 \\ -\sin(\theta_2) & 0 & -l_1\cos(\theta_2) - l_2\sin(\theta_2) & 0 \\ 0 & \cos(\theta_4) & 0 & l_3\cos(\theta_4) - l_4\sin(\theta_4) \\ 0 & -\sin(\theta_4) & 0 & -l_3\sin(\theta_4) - l_4\cos(\theta_4) \end{bmatrix}$$

Podemos notar que ambas matrices son cuadradas de orden 4 x 4. La expresión (21) se puede reescribir en una forma compacta como se indica en (23).

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_5 \\ \delta l_6 \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_4 \\ \delta l_{\theta_2} \\ \delta l_{\theta_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Las incógnitas de interés son δl_5 y δl_6 , las cuales serán despejadas de la expresión matricial compacta dada en (23).

$$\begin{bmatrix} \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_5 \\ \delta l_6 \end{bmatrix} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_4 \\ \delta l_{\theta_2} \\ \delta l_{\theta_4} \end{bmatrix} \quad (24)$$

La expresión completa se muestra en (25), donde tenemos que la matriz **A** es invertible y por lo tanto es posible realizar el producto matricial indicado en (24). El resultado de la operación será una matriz de 4 x 4.



$$\begin{bmatrix} \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_5 \\ \delta l_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sin(\theta_2) & 0 & 0 & -1 \\ \cos(\theta_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta_4) & -1 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_4) & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & -l_1 \sin(\theta_2) + l_2 \cos(\theta_2) & 0 \\ -\sin(\theta_2) & 0 & -l_1 \cos(\theta_2) - l_2 \sin(\theta_2) & 0 \\ 0 & \cos(\theta_4) & 0 & l_3 \cos(\theta_4) - l_4 \sin(\theta_4) \\ 0 & -\sin(\theta_4) & 0 & -l_3 \sin(\theta_4) - l_4 \cos(\theta_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_4 \\ \delta l_{\theta_2} \\ \delta l_{\theta_4} \end{bmatrix} \quad (25)$$

En la expresión (26) se han sustituido las variables correspondientes a l_2 y l_3 en función de las variables l_1 y l_4 correspondientes a los radios del piñón y el engrane de acuerdo a las ecuaciones dadas en (19).

$$\begin{bmatrix} \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_5 \\ \delta l_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sin(\theta_2) & 0 & 0 & -1 \\ \cos(\theta_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta_4) & -1 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_4) & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_2) & 0 & -l_1 \left(\cos(\theta_2) + \frac{\sin^2(\theta_2)}{\cos(\theta_2)} \right) & 0 \\ 0 & \cos(\theta_4) & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\theta_4) & 0 & -l_4 \left(\cos(\theta_4) + \frac{\sin^2(\theta_4)}{\cos(\theta_4)} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_4 \\ \delta l_{\theta_2} \\ \delta l_{\theta_4} \end{bmatrix} \quad (26)$$

El resultado de la multiplicación de la matriz inversa A^{-1} con la matriz B afectado por el signo negativo se escribe en (27).

$$\begin{bmatrix} \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_5 \\ \delta l_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan(\theta_2) & 0 & \frac{l_1 \cos(\theta_2) + \tan(\theta_2) \sin(\theta_2)}{\cos(\theta_2)} & 0 \\ 0 & \tan(\theta_4) & 0 & \frac{l_4 \cos(\theta_4) + \tan(\theta_4) \sin(\theta_4)}{\cos(\theta_4)} \\ 0 & \cos(\theta_4) + \frac{\sin^2(\theta_4)}{\cos(\theta_4)} & 0 & \frac{l_4 \sin(\theta_4) (\cos(\theta_4) + \tan(\theta_4) \sin(\theta_4))}{\cos(\theta_4)} \\ \cos(\theta_2) + \frac{\sin^2(\theta_2)}{\cos(\theta_2)} & 0 & \frac{l_1 \sin(\theta_2) (\cos(\theta_2) + \tan(\theta_2) \sin(\theta_2))}{\cos(\theta_2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_4 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_4 \end{bmatrix} \quad (27)$$

De la ecuación (27) se deduce los valores δl_2 , δl_3 , δl_5 y δl_6 . De estos, tomaremos los errores δl_5 y δl_6 , necesarios para calcular los errores buscados en la relación de transmisión de los engranajes cilíndricos de dientes rectos. La ecuación (28) muestra el despeje.

$$\begin{aligned} \delta l_2 &= \tan(\theta_2) \delta l_1 + \frac{l_1 (\cos(\theta_2) + \tan(\theta_2) \sin(\theta_2))}{\cos(\theta_2)} \delta \theta_2 \\ \delta l_3 &= \tan(\theta_4) \delta l_4 + \frac{l_4 (\cos(\theta_4) + \tan(\theta_4) \sin(\theta_4))}{\cos(\theta_4)} \delta \theta_4 \\ \delta l_5 &= \left(\cos(\theta_4) + \frac{\sin^2(\theta_4)}{\cos(\theta_4)} \right) \delta l_4 + \frac{l_4 \sin(\theta_4) (\cos(\theta_4) + \tan(\theta_4) \sin(\theta_4))}{\cos(\theta_4)} \delta \theta_4 \\ \delta l_6 &= \left(\cos(\theta_2) + \frac{\sin^2(\theta_2)}{\cos(\theta_2)} \right) \delta l_1 + \frac{l_1 \sin(\theta_2) (\cos(\theta_2) + \tan(\theta_2) \sin(\theta_2))}{\cos(\theta_2)} \delta \theta_2 \end{aligned} \quad (28)$$

Sabemos también que la relación de transmisión [7] está dada por el cociente entre las variables l_5 y l_6 como se describe en (29).

$$i = \frac{l_5}{l_6} \quad (29)$$

La relación de transmisión de un engranaje es idealmente constante [3] y adimensional. Al sustituir las expresiones que involucran a l_5 y l_6 dadas en (19), en la ecuación (29), tenemos que la relación de transmisión en un engranaje cilíndrico recto está dada por la expresión (30).

$$i = \frac{l_4 (\cos(\theta_4) + \tan(\theta_4) \sin(\theta_4))}{l_1 (\cos(\theta_2) + \tan(\theta_2) \sin(\theta_2))} \quad (30)$$



3. Resultados

Si ahora tomamos la diferencial total de la ecuación (29), obtendremos el error buscado en la relación de transmisión en función de los errores en el radio base y en el ángulo de presión.

La expresión para el diferencial total de la relación de transmisión se indica en (31).

$$\delta i = \frac{\delta l_5 l_6 - l_5 \delta l_6}{l_6^2} \quad (31)$$

En la ecuación (31) δi también será adimensional, por lo tanto, la relación de transmisión real, no teórica, está dada por la combinación de las variables correspondientes a l_5 , l_6 , δl_5 , δl_6 y se expresa en la ecuación (32).

$$i = \frac{l_4(\cos(\theta_4) + \tan(\theta_4)\text{sen}(\theta_4))}{l_1(\cos(\theta_2) + \tan(\theta_2)\text{sen}(\theta_2))} + \frac{\delta l_5 l_6 - l_5 \delta l_6}{l_6^2} \quad (32)$$

En esta ecuación (32) los valores de δl_5 y δl_6 se obtienen de la ecuación (28). Las magnitudes l_5 y l_6 son las distancias en las que la línea de acción divide a la línea de centros, es decir, la distancia desde el centro del engrane al punto de paso y la distancia desde el centro del piñón al mismo punto.

3.1 Primer Caso de Estudio Particular

Se presentan dos casos de estudio particular, el primero de ellos corresponde a un par de engranajes que tienen diferentes longitudes en sus radios base. En la tabla 1 se muestran los datos de entrada para este problema, el radio base del engrane es de 37 mm y el radio base del piñón de 19 mm. En este ejemplo se presenta ruedas dentadas de diámetros bastante pequeños. Este tipo de ruedas pueden ser encontradas por ejemplo, en mecanismos de reloj o en servomotores pequeños.

Tabla 1. Radios base del piñón y el engrane.

Parámetro	Longitud [mm]
l_1 (radio base piñón)	19
l_4 radio base engrane)	37

Los valores de δl_1 (Tolerancia dimensional del radio base del piñón), δl_4 (Tolerancia dimensional del radio base del engrane), $\delta \theta_2$ (Tolerancia dimensional del error angular del ángulo de presión para el piñón) y $\delta \theta_4$ (Tolerancia dimensional del error angular del ángulo de presión para el engrane) serán obtenidos a través de una tabla IT de medidas normalizadas, como se muestra en la tabla 2.

Los valores δl_1 y δl_4 son extraídos de la Norma ISO 286 según la tabla 2. En esta tabla vienen los diferentes tipos de calidades IT [8] de acuerdo al tamaño nominal de las dimensiones l_1 y l_4 , del radio base del piñón y del radio base del engrane. Para las dimensiones que ocuparemos en este trabajo se utilizarán las calidades IT01, IT6, IT9, IT12 e IT16. La calidad IT 01 es una calidad de ultra precisión, la calidad IT 6 es una calidad de precisión, la calidad IT 9 es una calidad estándar que se puede dar en los talleres con facilidad, y las calidades IT 12 e IT 16 son bajas. Las calidades IT están dadas en micrones [9]. Para este caso, asumiremos $\delta \theta_2$ y $\delta \theta_4$ iguales a cero, para solo medir la influencia de los errores en los radios base en la relación de transmisión.



Tabla 2. Tabla de calidades IT normalizada (Tolerancias dadas en micrones) [8].

Díametros [mm]	IT 01	IT 0	IT 1	IT 2	IT 3	IT 4	IT 5	IT 6	IT 7	IT 8	IT 9	IT 10	IT 11	IT 12	IT 13	IT 14	IT 15	IT 16
d≤3	0.3	0.5	0.8	1.2	2	3	4	6	10	14	25	40	60	100	140	250	400	600
3<d≤6	0.4	0.6	1	1.5	2.5	4	5	8	12	18	30	48	75	120	180	300	480	750
6<d≤10	0.4	0.6	1	1.5	2.5	4	6	9	15	22	36	58	90	150	220	360	580	900
10<d≤18	0.5	0.8	1.2	2	3	5	8	11	18	27	43	70	110	180	270	430	700	1100
18<d≤30	0.6	1	1.5	2.5	4	6	9	13	21	33	52	84	130	210	330	520	840	1300
30<d≤50	0.6	1	1.5	2.5	4	7	11	16	25	39	62	100	160	250	390	620	1000	1600
50<d≤80	0.8	1.2	2	3	5	8	13	19	30	46	74	120	190	300	460	740	1200	1900
80<d≤120	1	1.5	2.5	4	6	10	15	22	35	54	87	140	220	350	540	870	1400	2200
120<d≤180	1.2	2	3.5	5	8	12	18	25	40	63	100	160	250	400	630	1000	1600	2500
180<d≤250	2	3	4.5	7	10	14	20	29	46	72	115	185	290	460	720	1150	1850	2900
250<d≤315	2.5	4	6	8	12	16	23	32	52	81	130	210	320	520	810	1300	2100	3200
315<d≤400	3	5	7	9	13	18	25	36	57	89	140	230	360	570	890	1400	2300	3600
400<d≤500	4	6	8	10	15	20	27	40	63	97	155	250	400	630	970	1550	2500	4000

En la tabla 3 se muestran los errores δl_1 , δl_4 admitidos para las calidades IT01, IT6, IT9, IT12 e IT16. Se puede notar que mientras mayor es el grado IT mayor es el error admisible permitido y menos exigente la calidad.

Tabla 3. Tolerancias para los radios bases del piñón y el engrane (tomado de la Norma ISO 286).

Parámetro	IT 01 [mm]	IT 6 [mm]	IT 9 [mm]	IT 12 [mm]	IT 16 [mm]
δl_1	0.0006	0.016	0.062	0.25	1.6
δl_4	0.0008	0.019	0.074	0.21	1.9

La tabla 4 indica las diferentes relaciones de transmisión que se obtienen cuando los radios bases son de 19 y 37 mm, para ángulos de presión comerciales entre 20 y 25 grados y los distintos grados IT de tolerancias para los radios base. La primera columna es la relación de transmisión teórica de acuerdo a la ecuación (14). La tabla 4 es obtenida a través de MATLAB.

De la simulación en MATLAB se obtiene que la relación de transmisión, según el grado IT de calidad, es esencialmente constante para ángulos de presión entre 20 y 25 grados, siendo estos ángulos los más empleados en la industria de la fabricación de engranajes. Sin embargo, las relaciones de transmisión obtenidas al tomar en cuenta las tolerancias dimensionales en los radios bases, difieren de la relación de transmisión teórica [10], en mayor o menor medida obteniéndose un error hasta de -3.2 % cuando la calidad de las tolerancias en los radios bases es baja (IT16).

La tabla 5 muestra el porcentaje de error máximo existente entre las relaciones de transmisión teórica y la real para este caso de estudio.



Tabla 4. Diferentes relaciones de transmisión para diferentes valores de calidad IT

Grados	Relación de transmisión teórica	Relación de transmisión con IT 01	Relación de transmisión con IT 6	Relación de transmisión con IT 9	Relación de transmisión con IT 12	Relación de transmisión con IT 16
20.0	1.947	1.947	1.947	1.943	1.932	1.881
20.5	1.947	1.947	1.947	1.943	1.932	1.881
21.0	1.947	1.947	1.947	1.943	1.932	1.882
21.5	1.947	1.947	1.947	1.943	1.932	1.882
22.0	1.947	1.947	1.947	1.943	1.932	1.882
22.5	1.947	1.947	1.947	1.943	1.932	1.883
23.0	1.947	1.947	1.947	1.943	1.933	1.883
23.5	1.947	1.947	1.947	1.943	1.933	1.884
24.0	1.947	1.947	1.947	1.943	1.933	1.884
24.5	1.947	1.947	1.947	1.943	1.933	1.885
25.0	1.947	1.947	1.947	1.943	1.933	1.886

Tabla 5. Porcentajes de error máximos entre la relación de transmisión teórica y la real cuando los radios base del piñón y el engrane son de 19 mm y 37 mm, respectivamente, y el ángulo de presión varía entre 20 y 25 grados.

Grados	Porcentaje de Error para IT 01 [%]	Porcentaje de Error para IT 6 [%]	Porcentaje de Error para IT 9 [%]	Porcentaje de Error para IT 12 [%]	Porcentaje de Error para IT 16 [%]
20.0	-0.001	-0.033	-0.130	-0.772	-3.392
20.5	-0.001	-0.033	-0.129	-0.767	-3.371
21.0	-0.001	-0.033	-0.128	-0.763	-3.351
21.5	-0.001	-0.033	-0.128	-0.758	-3.330
22.0	-0.001	-0.033	-0.127	-0.753	-3.308
22.5	-0.001	-0.032	-0.126	-0.748	-3.287
23.0	-0.001	-0.032	-0.125	-0.743	-3.264
23.5	-0.001	-0.032	-0.124	-0.738	-3.242
24.0	-0.001	-0.032	-0.123	-0.733	-3.219
24.5	-0.001	-0.031	-0.122	-0.727	3.195
25.0	-0.001	-0.031	-0.121	-0.722	-3.172

En la figura 4 se muestra el porcentaje de error entre la relación de transmisión real y la teórica para ángulos de presión entre 20 y 25 grados y tolerancias dimensionales IT de ultra precisión a muy baja precisión.

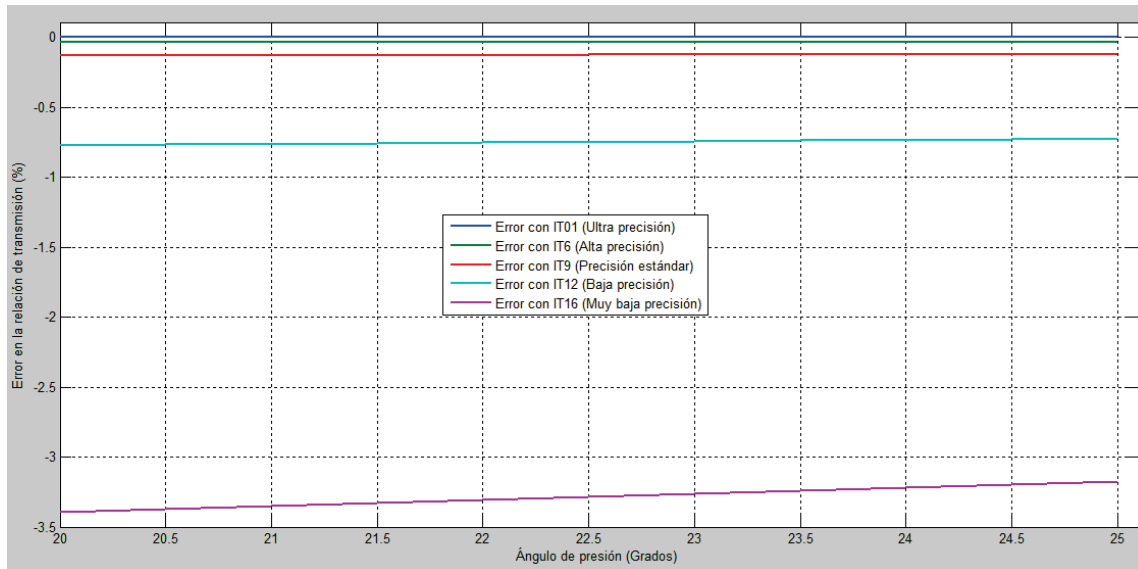


Figura 4. Errores en la relación de transmisión para el caso 1 para diferentes valores de ángulos de presión y tolerancias dimensionales IT de los radios base del piñón (19 mm) y del engrane (37 mm).

1.1 Segundo Caso de Estudio Particular

Para un siguiente ejemplo usaremos una pareja de engranes rectos con un radio base del engrane de 370 mm y un radio base del piñón de 190 mm. La tabla 6 muestra los parámetros de entrada para este caso.

Tabla 6. Parámetros de entrada de los radios base .

Parámetro	Longitud [mm]
l_1 (radio base piñón)	190
l_4 (radio base engrane)	370

En la tabla 7 se muestran los errores δl_1 , δl_4 , asociados a los parámetros anteriores con las calidades IT01, IT6, IT9, IT12 e IT16 respectivamente.

Tabla 7. Tolerancias para los radios bases del piñón y el engrane (tomado de la Norma ISO 286).

Parámetro	IT 01 [mm]	IT 6 [mm]	IT 9 [mm]	IT 12 [mm]	IT 16 [mm]
δl_1	0.003	0.036	0.140	0.57	3.6
δl_4	0.002	0.029	0.115	0.46	2.9

La tabla 8 muestra las diferentes relaciones de transmisión para diferentes ángulos de presión comerciales de engranes. Se incluye la relación de transmisión teórica de acuerdo a la ecuación (14), y diferentes valores de relación de transmisión en función de los grados IT de la tabla 2. La tabla 8 es obtenida a través de MATLAB.

En la figura 5, podemos visualizar de manera gráfica como las relaciones de transmisión son prácticamente constantes, al aumentar en el caso 2 los radios base tanto del piñón como del engrane.



Se observa que la relación de transmisión no cambia con el ángulo de presión y los errores son ahora mucho menores que en el caso 1.

Tabla 8. Diferentes relaciones de transmisión para diferentes valores de calidad IT

Grados	Relación de transmisión teórica	Relación de transmisión con IT 01	Relación de transmisión con IT 6	Relación de transmisión con IT 9	Relación de transmisión con IT 12	Relación de transmisión con IT 16
20.0	1.947	1.947	1.947	1.946	1.943	1.925
20.5	1.947	1.947	1.947	1.946	1.943	1.925
21.0	1.947	1.947	1.947	1.946	1.943	1.925
21.5	1.947	1.947	1.947	1.946	1.943	1.925
22.0	1.947	1.947	1.947	1.946	1.943	1.925
22.5	1.947	1.947	1.947	1.946	1.943	1.925
23.0	1.947	1.947	1.947	1.946	1.943	1.925
23.5	1.947	1.947	1.947	1.946	1.943	1.926
24.0	1.947	1.947	1.947	1.946	1.944	1.926
24.5	1.947	1.947	1.947	1.946	1.944	1.926
25.0	1.947	1.947	1.947	1.946	1.944	1.926

La tabla 9 muestra el porcentaje de error máximo existente en las relaciones de transmisión, al tomar en cuenta las tolerancias dimensionales de los radios bases y los ángulos de presión del piñón y del engrane, tanto como la relación de transmisión teórica.

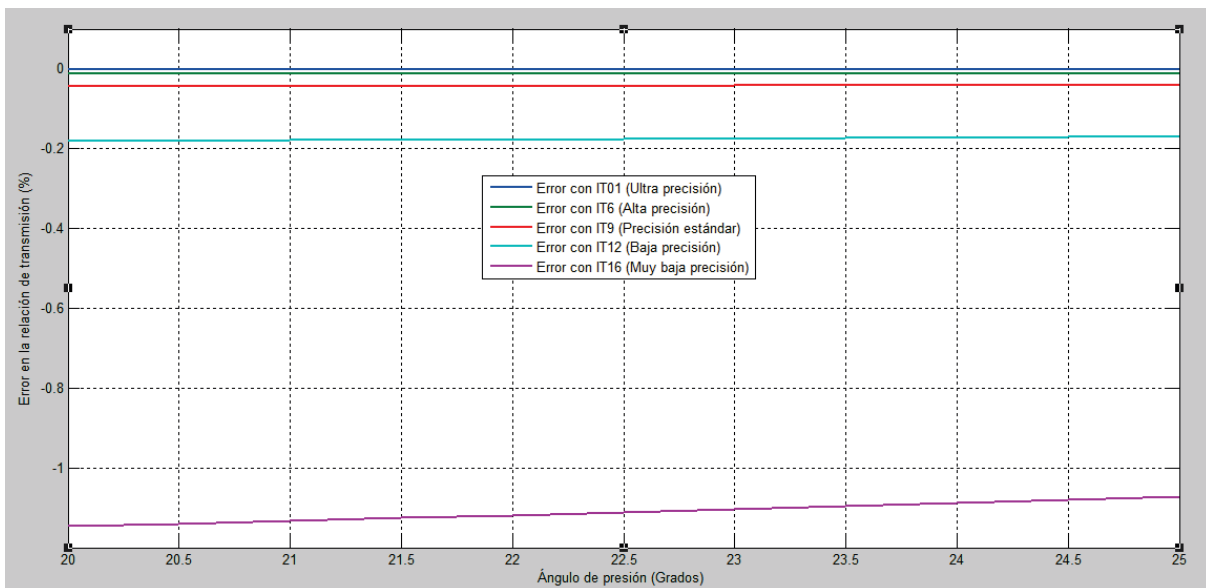


Figura 5. Errores en la relación de transmisión para el caso 2 para diferentes valores de ángulos de presión y tolerancias dimensionales IT de los radios base del piñón (190 mm) y del engrane (370 mm).



Tabla 9. Porcentajes de errores máximos entre la relación de transmisión teórica y la real cuando los radios base del piñón y el engrane son de 190 mm y 370 mm respectivamente, y el ángulo de presión varía entre 20 y 25 grados.

Grados	Porcentaje de Error para IT 01 [%]	Porcentaje de Error para IT 6 [%]	Porcentaje de Error para IT 9 [%]	Porcentaje de Error para IT 12 [%]	Porcentaje de Error para IT 16 [%]
20.0	-0.001	-0.011	-0.043	-0.181	-1.146
20.5	-0.001	-0.011	-0.043	-0.180	-1.140
21.0	-0.001	-0.011	-0.043	-0.179	-1.133
21.5	-0.001	-0.011	-0.043	-0.178	-1.125
22.0	-0.001	-0.011	-0.042	-0.176	-1.118
22.5	-0.001	-0.011	-0.042	-0.175	-1.111
23.0	-0.001	-0.011	-0.042	-0.174	-1.103
23.5	-0.001	-0.010	-0.042	-0.173	-1.096
24.0	-0.001	-0.010	-0.041	-0.172	-1.088
24.5	-0.001	-0.010	-0.041	-0.170	-1.080
25.0	-0.001	-0.010	-0.041	-0.169	-1.072

2. Conclusiones

De acuerdo a los datos obtenidos, sabemos que entre más pequeñas son las ruedas dentadas, mayor es el porcentaje de error encontrado en la relación de transmisión. El porcentaje de error entre la relación de transmisión teórica y la que resulta al tomar en cuenta las tolerancias dimensionales en el radio base y en los ángulos de presión, aumenta conforme disminuye el grado de precisión IT normalizado de las dimensiones lineales y angulares de estos dos parámetros geométricos. El método de definir las ecuaciones geométricas de restricción cinemática y tomar las diferenciales totales de estas ecuaciones, usado en el mecanismo equivalente de cuatro barras estacionario, se puede extender para abarcar mecanismos de cuatro barras móviles. El conocimiento de cómo las tolerancias dimensionales y las posiciones fundamentales de estas tolerancias influye en la relación de transmisión, permite asignar grados IT normalizados y posiciones fundamentales más racionales, con el fin de disminuir el porcentaje de error respecto a la relación de transmisión teórica.

Referencias

- [1] Ángeles, A. J. (1978). Análisis y Síntesis Cinemáticas de Sistemas Mecánicos, Limusa Wiley: Ciudad de México.
- [2] Rutter J. (2000).). Geometry of Curves. Chapman H. Mathematics Series Ingles 1st Edition.
- [3] Norton, R. L. (2013). Diseño de Maquinaria. McGraw-Hill. Quinta Edición.
- [4] Stewart, J. (2001). Cálculo multivariable. Thomson. Cuarta edición.
- [5] Fogarasy A., Smith M. (1998). The influence of manufacturing tolerances on the kinematic performance mechanisms. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. Proc. Inst. Mech. Engrs. Vol 209. Pp. 35-45.
- [6] Mendoza, J. Otero L. (2002). Influencia de las tolerancias dimensionales de fabricación de los eslabones de un mecanismo de cuatro barras sobre el posicionado preciso del elemento de salida. Revista Universidad, Ciencia y Tecnología. Vol. 6 Núm. 21. Pp. 43-49.
- [7] Mott, R. (1992). Diseño de Elementos de Máquinas. Edición Prentice Hall, segunda edición. México
- [8] Norma ISO 286. Español

Apéndice C: Constancia Congreso Nacional.

La Asociación Mexicana de Mecatrónica
A.C. otorga el presente

RECONOCIMIENTO

a:

Reyes Méndez Alfonso Daniel



Por su conferencia técnica

“Errores en la relación de transmisión de los engranajes cilíndricos de dientes rectos”, en el marco del 19° Congreso Nacional de Mecatrónica.

Lic. Jorge Enrique Orozco Ramírez

Presidente

3 y 4 de Diciembre
2020, México

Dr. J. Emilio Vargas Soto

Fundador

Apéndice D: Constancia Seminario MCEA.



Facultad de Ciencias de la Electrónica
A través de la Maestría en Ciencias de la Electrónica, Opción Automatización
otorga la presente

CONSTANCIA

al: **Ing. Alfonso Daniel Reyes Méndez**

Por su participación en el Seminario MCEA semanal con la conferencia:

"Mecanismos planos de un grado de libertad y sus errores en sus diferentes relaciones de transmisión (w_2/w_1) y (w_3/w_1)"

"Pensar bien, para vivir mejor"

H. Puebla de Zaragoza a 29 de octubre de 2021


Dr. José Eligio Moisés Gutiérrez Arias
Coordinador MCEA


Dr. Gerardo Mino Aguilar
Secretario de Investigación


Dr. Luis Abraham Sánchez Gaspariano
Responsable del Seminario MCEA

Apéndice E: Constancia Charla Ibero Puebla.



Fablab Puebla
Del Instituto de Diseño e Innovación Tecnológica de la
Universidad Iberoamericana Puebla

Otorga el presente

Reconocimiento a:

Alfonso Daniel Reyes Méndez

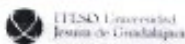
Por su participación en el conversatorio "Ingeniería para prototipado"
San Andrés Cholula, Puebla. Octubre 12 de 2021

Mtro. Luis Alberto Camacho Luyando
Coordinador Fablab

LA VERDAD NOS HARÁ LIBRES



IBERO. CIUDAD DE MEXICO • LEÓN • PUEBLA • TULANA • TORREÓN



Apéndice F: Constancia TOEFL.

TOEFL ITP Score Report

Name of Institution: FUNDACION UNIVERSIDAD DE LAS AMERICAS

Name: REYES, ALFONSO

Student Number: 202169

DOB: 29 Aug 1993

Sex: M

Times Taken TOEFL: 1

Native Country: Mexico

Native Language: SPA - Spanish

Scaled Scores:

Listening Comprehension:	51
Structure & Written Expression:	61
Reading Comprehension:	60
Total Score:	573

Test Date: 26 Mar 2021
Form: TOEFL ITP Level 1



The face of this document has a security background. The back contains a watermark. Hold at an angle to view.

The TOEFL® ITP Assessment Series is designed to be used for placement, progress monitoring, and exit purposes. TOEFL® ITP scores can also be used for admissions to programs and institutions where English is not the dominant language of instruction for content courses. Learn more at www.ets.org/toefl_itp/use.

140021-16573 • FB1219R100 • Printed in U.S.A.

I.N. 770462

Copyright © 2012 by Educational Testing Service.

Student's File Copy
Do Not Copy

Bibliografía

- [1] Price, Derek de Solla (1974). «Gears from the Greeks. The Antikythera Mechanism: A Calendar Computer from ca. 80 B. C.». Transactions of the American Philosophical Society, New Series 64 (7): 1-70.
- [2] Arthur G. Erdman, George N. Sandor, Sridahr Kota. Mechanical Design Analysis and Synthesis 1 (2001, Prentice Hall)
- [3] Takanashi Akihiro. Effect of Tolerance and Clearance in the Geneva Mechanism. Bulletin of the JSME. Vol. 16, No 101, Pag. 1758-1766. November 1973.
- [4] Nobuyoshi Morita, Takeshi Furuhashi and Masayuki Matsuura. Research on Dynamics of Four-Bar Linkage with Clearance at Turning Pairs.(2nd Report). Bulletin of the JSME, Vol. 21, No. 158, pp. 1284-1304. August, 1978
- [5] Hiroaki Funabashi, Mikio Horie and Kiyoshi Ogawa. A Dynamic Analysis of Mechanism with Clearances. Bulletin of the JSME. Vol. 21, No 161, Pag. 1652-1659. November. 1978.
- [6] Koichi Tsuda and Norio Koizumi. Dynamics of the Piston Slap. Bulletin of the JSME. Vol. 18, No 116, Pag. 166-176. February 1975.
- [7] Atsushi Yamaguchi and Yutaka Tanioka. Motion of Pistons in piston-type hydraulic machines (1st Report: Theoretical Analysis). Bulletin of the JSME. Vol. 19, No 130, Pag. 402-412. April, 1976.
- [8] Atsushi Yamaguchi. Motion of Pistons in piston-type hydraulic machines (3rd Report: Exponential Function-Type Piston). Bulletin of the JSME. Vol. 19, No 130, Pag. 413-419. April, 1976.
- [9] Atsushi Yamaguchi. Motion of the piston in piston pumps and motors: The case of Metallic Contact. Bulletin of the JSME. Vol. 20. 1977.
- [10] G. Sutherland and N. Karwa. 4-Bar Synthesis with Tolerance Considerations. Mechanism and Machine Theory. Vol. 13, pp. 311-327. April. 1978.
- [11] Mikio Horie, Hiroaki Funabashi, Hiroshi Kobayashi and Kiyoshi Ogawa. A Displacement Analysis of Spatial Four-Bar Mechanisms with Clearances and Tolerances. Bulletin of the JSME. Vol. 28, No 241, Pag. 1535-1542. July 1985.

- [12] Funabashi H., Iwatsuki N. and Yokoyama Y., A synthesis of Crank-Length Adjusting Mechanisms. Bulletin of the JSME. Vol. 29, No 252, Pag. 1946-1951. June 1986.
- [13] Zhongxiu S., Fengqiang Li., Shian Q., y Fei W., “Analysis and Synthesis of Mechanical Error in Path Generating Linkages Based on Realiability”. IEEE. “Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium”, 1997, pp 303-306.
- [14] Yoshihiro Sakamoto, Hiroaki Funabashi, Mikio Horie and Kiyoshi Ogawa. A Synthesis of Planar Mechanisms with Optimum Tolerances. JSME International Journal. Series III Vol. 33, No 2, Pp. 139-144.1990.
- [15] R. Weill, B. Shani. Assessment of Accuracy of Robots in Relation with Geometrical Tolerances in Robot Link. 41 st General Assembly of CIRP. Stanford University, Palo Alto (USA), August18 to 24, 1991. Published by “Technische Rundschau”. Switzerland. 1991.
- [16] Kota, S., and Chiou S. Use of orthogonal arrays in mechanism synthesis. Mech. Mach. Theory. Vol. 28, N 6, pp 777-794, 1993.
- [17] Hachkowski M., Peterson L. A comparative history of the precision of deployable spacecraft structures. Center for Aerospace structures and Department of Aerospace Engineering Sciences. University of Colorado. December 1995.
- [18] Basu S., Sonawane D. and Datar A. Reliability assessment based on design and manufacturing tolerances for control burst mechanism of small arms. Defence Science Journal. 1997.
- [19] A Fogarasy M R Smith. The Case for a general method of kinematic analysis of plane mechanisms based on equations of constraint. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. Proc Instn Mech Engrs Vol 209. Pp. 337-343. 1995.
- [20] Fogarasy A., Smith M. The influence of manufacturing tolerances on the kinematic performance of mechanisms. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. Proc Instn Mech Engrs Vol 209. Pp. 35-45. 1998.
- [21] Harold Rothbart. Mechanical Design and Systems Handbook. Second edition. 1985. Mc Graw Hill. ISBN: 0-07-054020-9. Capítulo 12 página 11
- [22] Rothenhofer G., Walsh C., Slocum A. (2010). Transmission ratio based analysis and robust design of mechanisms. Precision Engineering 34. Pp. 790–797.
- [23] Norton, R. L. (2012). DISEÑO DE MAQUINAS (5ta. ed., 1a. reimp.). MEXICO: PRENTICE HALL.
- [24] BUDYNAS, R. G. (2008). DISEÑO EN INGENIERIA MECANICA DE SHIGLEY (8a. ed., 8a. reimp.). MEXICO: MCGRAW-HILL INTERAMERICANA.
- [25] MOTT, R. L. (2006). DISEÑO DE ELEMENTOS DE MAQUINAS (4a. ed., 4a. reimp.). MEXICO: S.P.I.

- [26] Joseph Edward Shigley y John Joseph Uicker (1983). Teoría de máquinas y mecanismos. Editorial McGraw-Hill.
- [27] ASME Y14.5-2009
- [28] Norma ISO 286:1988
- [29] Norma ISO 2768:1989
- [30] Mendoza, J. Otero L., “Influencia de las tolerancias dimensionales de fabricación de los eslabones de un mecanismo de cuatro barras sobre el posicionado preciso del elemento de salida”.
- [31] Liu X-J, Wang J. Some new parallel mechanisms containing the planar four-bar parallelogram. *Int J Robot Res* 2003;22(September (9)):712–32.
- [32] Rutter, J.W.: *Geometry of Curves*. CRC press, Boca Raton (2000)
- [33] Ángeles, A. J. (1978), *Análisis y Síntesis Cinemáticas de Sistemas Mecánicos*, Limusa Wiley: Ciudad de México.
- [34] Stewart James *calculo de una variable. trascendentes tempranas / 7 ed.*
- [35] Benjamin Schleich, Sandro Wartzack. SA discrete geometry approach for tolerance analysis of mechanism. *Mechanism and Machine Theory*, Volume 77, 2014, Pages 148-163.
- [36] Flores P. (2015) On the Study of the Kinematic Position Errors Due to Manufacturing and Assembly Tolerances. In: Kecskeméthy A., Geu Flores F. (eds) *Interdisciplinary Applications of Kinematics*. *Mechanisms and Machine Science*, vol 26. Springer.
- [37] Kuo B. (1996) *Sistemas de Control Automático*. 1 Ed. Mexico, Prentice Hall Hispanoamericana
- [38] Reyes F. (2015) *Arduino. Aplicaciones En Robótica Mecatronica E Ingenierías*. Editorial Alfaomega.