



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Inducción de Fuerza Electromagnética en un Cristal
Fotónico 3D

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

MAESTRO EN CIENCIAS FÍSICA APLICADA

por

Hugo Avalos Sánchez

Asesorado por

Dr. Miller Toledo Solano

Dr. Siva Kumar Krishnan

Puebla Pue.
Diciembre de 2021



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Inducción de Fuerza Electromagnética en un Cristal
Fotónico 3D

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

MAESTRO EN CIENCIAS FÍSICA APLICADA

por

Hugo Avalos Sánchez

Asesorado por

Dr. Miller Toledo Solano

Dr. Siva Kumar Krishnan

Puebla Pue.
Diciembre de 2021

Título: Inducción de Fuerza Electromagnética en un Cristal Fotónico 3D

Estudiante: HUGO AVALOS SÁNCHEZ

COMITÉ

Dr. José Juan Gervacio Arciniega
Presidente

Dr. Rodolfo Palomino Merino
Secretario

Dr. César Márquez Beltrán
Vocal

Dr. Abraham Nehemías Meza Rocha
Suplente

Dr. Miller Toledo Solano
Asesor

Dr. Siva Kumar Krishnan
Asesor

Agradecimientos

Gracias a mis padres por el apoyo en cada momento al realizar este proyecto.

También agradezco al Dr. Miller Toledo Solano por su ayuda en todo momento para realizar este trabajo.

Agradezco al Dr. Siva Kumar Krishnan por las observaciones realizadas en este trabajo.

Especial reconocimiento merece el interés mostrado por mi trabajo y las sugerencias recibidas de los profesores miembros del jurado.

Índice general

Resumen	IX
Objetivos	XI
Introducción	XIII
1. Cristales Fotónicos	1
1.1. Las ecuaciones de Maxwell	2
2. Reflectancia y transmitancia en la aproximación de ondas escalares	7
2.1. Aproximación de Ondas Escalares	7
2.1.1. Relación de Dispersión en la AOE	10
2.2. Espectros de Reflectancia y Transmitancia	11
3. Fuerza Electromagnética Sobre Una Capa Dieléctrica	17
3.1. Ley de Lorentz	17
3.2. Densidad de Fuerza de Volumen	18
3.3. El tensor de esfuerzos de Maxwell y la fuerza electromagnética	18
3.4. Tensor de esfuerzos en una capa que no absorbe	19
4. Resultados de la presión de radiación sobre un ópalo artificial	23
4.0.1. Densidad de fuerza de Lorentz	24
4.0.2. Arreglo experimental para la determinación de las fuerzas electromagnéticas en el ópalo	26
4.0.3. Avances en la síntesis de ópalos de SiO ₂	27
Conclusión	31
A. Coeficientes de Fourier de la Constante Dieléctrica	33
Bibliografía	35

Resumen

En este trabajo estudiamos teóricamente la inducción de fuerzas electromagnéticas en cristales fotónicos tridimensionales cuando la luz incide normalmente sobre un conjunto de nanoesferas de SiO_2 conocidas como ópalos artificiales. Investigamos la propagación electromagnética a lo largo de una dirección de alta simetría del cristal, específicamente a lo largo del eje del cristal [111] mediante la aproximación de onda escalar.

Mostramos que la presión de radiación puede ser obtenida, tanto por el tensor de esfuerzos de Maxwell (que hace uso de las expresiones analíticas de los coeficientes de reflexión y transmisión obtenidos por la aproximación de onda escalar), como desde de la densidad de fuerza volumétrica de Lorentz. Los valores obtenidos de la presión de radiación en estas estructuras puede ser tan alta como $1,33 \times 10^{-4} \text{N/m}^2$, cuando la potencia del láser es 60 mW con tamaño de punto de 3 mm^2 .

Con todo esto, esta tesis aporta al conocimiento científico el análisis teórico y el desarrollo experimental de cristales fotónicos dieléctricos 3D, con el fin de inducir un incremento en las fuerzas electromagnéticas para auto-oscilaciones de estas estructuras en la generación de energías mecánica y eléctrica.

Objetivos

Objetivo general

Diseñar de manera teórica una estructura fotónica a base de ópalo artificiales de SiO_2 , con el fin de estudiar la inducción de fuerzas electromagnéticas que produzcan oscilaciones de mayor amplitud como una función del espesor (del número capas de esferas) y de la potencia del láser aplicado.

Objetivos particulares

- Usar la aproximación de ondas escalares para obtener una expresión analítica para los coeficientes de reflexión y transmisión de un cristal fotónico FCC, necesarios para la obtención de la presión de radiación sobre el cristal fotónico.
- Describir a la fuerza electromagnética mediante el tensor de esfuerzos de Maxwell.
- Obtener expresiones analíticas de las fuerzas dentro, paralela y perpendicular al ópalo.
- Sintetizar un ópalo de SiO_2 que será usado como el dispositivo fotónico.
- Plantear el diseño óptico para la medición de las fuerzas electromagnéticas perpendiculares al ópalo.

Introducción

Los cristales fotónicos son un tipo de estructuras artificiales que, en las últimas dos décadas, han surgido como un medio prometedor para controlar la dinámica de la radiación de materiales activos y la propagación de la radiación electromagnética en formas no permitidas por los materiales convencionales. En esencia, un cristal fotónico es un material en el que el índice de refracción se modula periódicamente en una escala de longitud comparable a la longitud de onda de la luz [1, 2, 3]. El cristal fotónico más simple que se considera es el reflector o espejo de Bragg, en el cual la periodicidad toma lugar a lo largo de una dimensión. En tal sistema, la forma de la relación de dispersión se desvía de la de los materiales constituyentes que aparecen como un conjunto de intervalos de frecuencias permitidas y prohibidas. La aparición de estos intervalos prohibidos es una consecuencia de la difracción de Bragg por los planos que forman el cristal, y su posición y anchura espectral se determina tanto por el período y los índices de refracción de los materiales constituyentes. Para aquellas frecuencias contenidas dentro de estas brechas ('Gaps'), el vector de onda asociado toma valores imaginarios y la luz que se propaga a lo largo del cristal con esas frecuencias se atenúa exponencialmente.

Aunque los espejos de Bragg se han estudiado a fondo durante las últimas décadas y sus propiedades ópticas son bien entendidas [1], es ahora cuando la periodicidad se ha extendido a tres dimensiones (3D) del espacio donde se consigue todo el potencial de este tipo de estructuras. Los primeros cristales fotónicos tridimensionales con gap completo se obtuvieron en el rango de microondas en 1990 [4]. Este rango es fácilmente accesible tecnológicamente, puesto que la periodicidad dieléctrica requerida es del orden de milímetros. Desde aquel año en adelante se ha ido reduciendo el período de la constante dieléctrica, habiéndose observado gaps completos en el infrarrojo medio y lejano [5, 6] y, muy recientemente, en el infrarrojo cercano [7, 8]. Para esto, se han empleado sofisticadas y costosas técnicas litográficas con las que ha sido posible construir tan solo unas pocas celdas unidad. Existen también cristales fotónicos en el visible e infrarrojo cercano cuya obtención es relativamente sencilla y económica. Son los cristales coloidales, que surgen de la auto-ordenación en suspensión de partículas esféricas de tamaño micrométrico, generalmente de látex o sílice. Estos cristales, bien conocidos desde hace tiempo [9], han despertado el interés desde el punto de vista fundamental, ya que presentan pseudogaps fotónicos en un rango de frecuencias de muy difícil acceso [10, 11]. El principal inconveniente es que su contraste dieléctrico es generalmente muy bajo, debido a la cercanía de los índices de refracción de las partículas y el medio en el que se encuentran, por lo que no presentan un gap completo. Por otra parte, no son fácilmente manejables y se desestabilizan con facilidad. Sin embargo, otros materiales, estrechamente relacionados con los cristales coloidales, presentan ciertas características estructurales que los convierten en una alternativa interesante para desarrollar cristales fotónicos a partir de ellos, tanto con gap completo como con pseudogap. Estos materiales son los ópalos artificiales, que deben su nombre a la similitud estructural existente entre ellas y los ópalos naturales. La obtención de ópalos artificiales de SiO_2 consta de dos procesos bien diferenciados. En primer lugar, hay que sintetizar partículas esféricas de SiO_2 con una estrecha distribución de tamaños. En segundo, se deben ordenar en una estructura periódica tridimensional. La calidad del ópalo dependerá tanto de la esfericidad y de la uniformidad de tamaños de las partículas que la formen como de la adecuada ubicación de éstas en la estructura cristalina.

Debido a la experiencia adquirida en la síntesis y caracterización de ópalo de SiO_2 en nuestro grupo de trabajo [12, 13], en esta tesis se plantea un análisis sistemático para la inducción de fuerzas electromagnéticas sobre estas estructuras dieléctricas bajo la radiación de luz modulada. La inducción de un incremento en las fuerzas electromagnéticas en estas estructuras puede ser usada para potenciales aplicaciones en la generación de energías mecánica y eléctrica que podrían emplear energía solar como fuente.

Esta tesis se divide en cuatro Capítulos y una sección de conclusiones.

En el primer Capítulo se habla sobre la literatura respecto a la teoría de las estructuras fotónicas.

Se describe el fenómeno de la banda prohibida y su explicación a partir de las ecuaciones de Maxwell en medios materiales.

En el segundo Capítulo se describe la aproximación de ondas escalares con el uso de la matriz de transferencia y se obtiene una expresión analítica para los coeficientes de reflexión y transmisión de un cristal fotónico FCC, donde también se tomara un ópalo artificial de SiO_2 necesarios para la obtención de la presión de radiación sobre el cristal.

El tercer Capítulo contiene el estudio de la fuerza electromagnética sobre una capa dieléctrica. Se describe a la fuerza electromagnética mediante el tensor de esfuerzos de Maxwell y la densidad de fuerza de Lorentz. Se presentan expresiones analíticas de las fuerzas dentro, paralela y perpendicular a la capa y la información que nos proporciona la densidad de fuerza de Lorentz.

El cuarto Capítulo presenta los resultados teóricos de la presión de radiación sobre un ópalo artificial. La densidad de fuerza ejercida por la radiación EM sobre el cristal fue calculada mediante la aplicación directa del método de fuerza de Lorentz. Para efectos de comparación, en una tabla de datos para las diferentes potencias de los láseres usados, los valores de las presiones sobre un ópalo de un espesor fijo, son analizados. Finalmente se muestran algunos avances en la síntesis de los cristales fotónicos formados por esferas de SiO_2 .

Capítulo 1

Cristales Fotónicos

Un cristal es una disposición periódica de átomos o moléculas. El patrón con el que los átomos o moléculas se repiten en el espacio es la red cristalina. El cristal presenta un potencial periódico a un electrón que se propaga a través de él, y tanto los componentes del cristal como la geometría de la red dictan las propiedades de conducción del cristal.

Un cristal fotónico es, por tanto, un material en el que existe una modulación periódica de la constante dieléctrica en una, dos o las tres direcciones del espacio; lo que clasifica los cristales fotónicos en unidimensionales (1D), bidimensionales (2D) y tridimensionales (3D), respectivamente [13], tal y como se muestra en la Fig. 1.1.

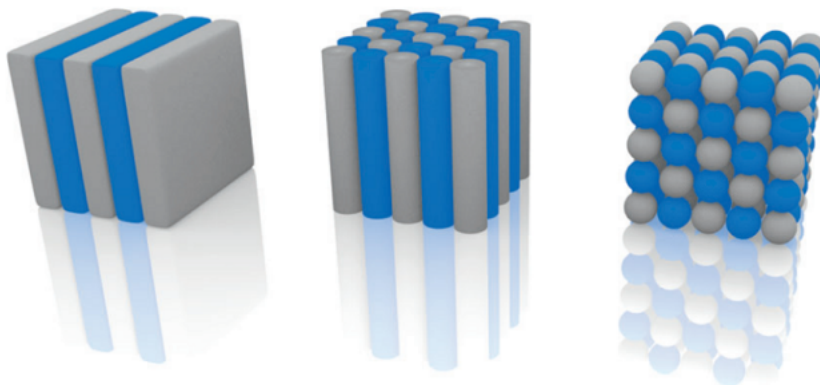


Figura 1.1: Cristales fotónicos unidimensionales (1D), bidimensionales (2D) y tridimensionales (3D)[1].

El objetivo en la investigación en cristales fotónicos, es controlar los patrones de los materiales en una escala de longitud comparable a la longitud de onda de la luz, en una, dos y tres dimensiones, creando así materiales con características ópticas diseñadas [14].

Las principales aplicaciones de los cristales fotónicos se encuentran en guías de onda (fibras ópticas), en la mejora la eficiencia de circuitos optoacoplados y ordenadores ópticos, en la biomedicina sirven como detectores químicos y biosensores. Otros usos son la creación de espejos de alta reflectividad en láseres [15].

Los cristales fotónicos unidimensionales (1D) y los cristales fotónicos planares o bidimensionales (2D) son candidatos para la realización de fuentes compactas de luz láser en nanocavidades ópticas y su integración con guías de onda, moduladores y detectores. Hasta el momento se han realizado diferentes tipos de emisores láser a temperatura ambiente basados en nanocavidades bidi-

mensionales y más recientemente, se han propuesto nuevos modelos para la fabricación de cristales fotónicos. También se han diseñado, fabricado y caracterizado nuevos dispositivos optoelectrónicos basados en cristales fotónicos 1D y 2D, como fotodetectores de alta velocidad y diversos tipos de emisores láser en cristales fotónicos bidimensionales. Estos dispositivos pueden ser usados como futuras nanofuentes de emisión láser para telecomunicaciones ópticas o sensores ópticos [17].

Además, los cristales fotónicos permiten generalizar y escalar las propiedades útiles de las cavidades y guías de ondas para abarcar una gama más amplia de frecuencias. Es posible construir un cristal fotónico de una geometría dada con dimensiones milimétricas para el control de microondas, o con dimensiones en micrones para el control del infrarrojo.

Si, para algún rango de frecuencia, un cristal fotónico prohíbe la propagación de ondas electromagnéticas de cualquier polarización que viajen en cualquier dirección desde cualquier fuente, decimos que el cristal tiene una banda prohibida fotónica completa. Un cristal con una banda prohibida completa obviamente será un reflector omnidireccional, pero lo contrario no es necesariamente cierto [18].

Por lo general, para crear una banda prohibida fotónica completa, se debe disponer que la red dieléctrica sea periódica a lo largo de tres ejes, constituyendo un cristal fotónico tridimensional. Sin embargo, existen excepciones. Una pequeña cantidad de desorden en un medio que de otro modo sería periódico no destruirá una banda prohibida, e incluso un medio muy desordenado puede prevenir la propagación de una manera útil a través del mecanismo de localización de Anderson. Otra clase interesante de materiales no periódicos que pueden tener espacios de banda fotónicos completos son las estructuras cuasicristalinas.

1.1. Las ecuaciones de Maxwell

La estructura de bandas determina muchas de las propiedades del material, para conocer y describir todas las propiedades debemos estudiar la electrodinámica del sistema. En la teoría de electromagnetismo macroscópico, incluida la propagación de la luz en un cristal fotónico, se rige por las cuatro ecuaciones de Maxwell [16], las cuales están dadas por las siguientes expresiones.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad \text{Ley de Gauss,} \qquad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \qquad \text{Ley de Ampere,} \qquad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{Ley de Faraday-Lentz,} \qquad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{Inexistencia de monopolos magnético,} \qquad (1.4)$$

donde \vec{E} y \vec{H} son los campos eléctricos y magnéticos, \vec{D} y \vec{B} son los campos de desplazamiento y de inducción magnética, además ρ y \vec{J} son las densidades de corriente y carga libre, respectivamente.

Estas ecuaciones deben ser desacopladas para obtener expresiones que contengan solo al campo eléctrico y magnético respectivamente, seguiremos el procedimiento utilizado en [1].

Consideremos una onda que se propaga dentro de un medio dieléctrico mixto (macroscópico e isotrópico), sin dispersión, sin cargas o corrientes libres y que las intensidades de campo son lo suficientemente pequeñas como para suponer que estamos en el régimen lineal, entonces \vec{E} y \vec{D} se relacionan por ϵ_0 y ϵ permitividad del vacío y permitividad relativa respectivamente. Cuando se considera este tipo de medio, donde la luz se propaga pero no hay fuentes de luz, se puede afirmar que $\rho = 0$ y $\vec{J} = 0$.

También debemos relacionar \vec{D} con \vec{E} y \vec{B} con \vec{H} , usando las relaciones constitutivas ya conocidas, así tenemos que $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$. Análogamente una expresión similar relaciona $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ donde μ_0 es la permeabilidad en el vacío.

CAPÍTULO 1. CRISTALES FOTÓNICOS
1.1. LAS ECUACIONES DE MAXWELL

En la mayoría de los materiales dieléctricos de interés la permeabilidad magnética relativa μ se toma como la unidad y así establecer que $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

Con todos estos supuestos, las ecuaciones de Maxwell (1.1-1.4) se expresan la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) &= 0, & \nabla \cdot \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t) &= 0, \\ \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) &= \epsilon_0 \epsilon(\vec{r}) \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}, & \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

A pesar de restringirse a medios lineales y sin pérdidas; y de no tomar en cuenta otros fenómenos físicos, es común realizar aproximaciones a casos ideales en los que los sistemas son simples, dando como resultado una fácil modelación matemática. Además de que muchas propiedades interesantes y útiles surgen del caso elemental de materiales lineales sin pérdidas.

Ahora, tanto \vec{E} como \vec{H} son campos dependientes del tiempo y del espacio, pero debido a que las ecuaciones de Maxwell son lineales, podemos separar la dependencia temporal de la espacial. De esta manera, al escribir una expresión para los campos eléctrico y magnético observaremos lo siguiente:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t}. \quad (1.6)$$

Sustituyendo las Ec. (1.6) en las relaciones de la divergencia del campo eléctrico y magnético respectivamente en Ec. (1.5), se obtiene:

$$\nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0, \quad \nabla \cdot \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) = 0. \quad (1.7)$$

La interpretación física de estas últimas dos ecuaciones es simple: debido a que no hay fuentes puntuales o sumideros de desplazamiento y campos magnéticos en el medio.

De la misma forma, sustituyendo en las ecuaciones del rotacional del campo eléctrico y magnético respectivamente (Ec. 1.5) y realizando las derivadas temporales, se obtiene como resultado un par de ecuaciones acopladas como las siguientes:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = i\omega \mu_0 \vec{H}(\vec{r}), \quad \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = -i\omega \epsilon_0 \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}). \quad (1.8)$$

Para desacoplar las ecuaciones, debemos dividir por $\epsilon(\vec{r})$ en la ecuación de la derecha, posteriormente aplicar el rotacional sobre la ecuación. Luego al usar la ecuación del lado izquierdo se elimina la dependencia del campo $\vec{E}(\vec{r})$. Además, sabemos que las constantes ϵ_0 y μ_0 están relacionadas con la velocidad de la luz en el vacío mediante la siguiente expresión, $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$.

Tomando en cuenta todo lo anterior, obtenemos una ecuación solo para el campo magnético de la siguiente forma:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) \right) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \vec{H}(\vec{r}). \quad (1.9)$$

Ahora en el campo eléctrico, se aplica el rotacional a la ecuación del lado izquierdo. Luego al usar la ecuación del lado derecho y eliminar $\vec{H}(\vec{r})$, se obtiene una expresión solo para el campo eléctrico descrita de la siguiente manera:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \right) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}). \quad (1.10)$$

Recordando que $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ y al usar el hecho de que la divergencia del campo eléctrico es nula (debido a que se considera $\rho = 0$), en la anterior ecuación podemos obtener la ecuación de Helmholtz para el campo eléctrico

CAPÍTULO 1. CRISTALES FOTÓNICOS
1.1. LAS ECUACIONES DE MAXWELL

$$-\nabla^2 \vec{E} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon(\vec{r}) \vec{E}. \quad (1.11)$$

La Ec.(1.11) será usada en el siguiente capítulo para explicar la propagación de luz en una estructura cristalina, la cual se presenta cuando la constante dieléctrica de la estructura es periódica. Las eigensoluciones de la Ec. (1.11) tienen forma de serie de la función $\omega_n(k)$, que puede ser visto como sucesiones (n) de las energías ω para cada vector de onda k . Las colecciones de todas las soluciones de $\omega_n(k)$ se conoce como estructura de bandas.

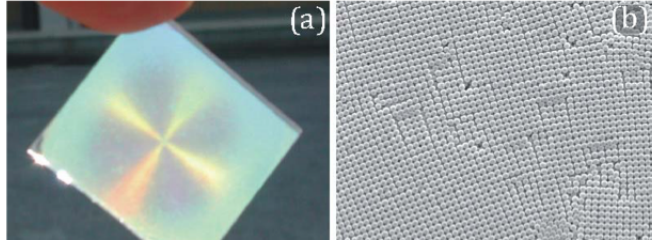


Figura 1.2: (a) Fotografía de un ópalo artificial formado por esferas de 400 nm (b) Imagen de microscopía electrónica de barrido del cristal coloidal anteriormente descrito.

Los CF auto ensamblados son generalmente estructuras tridimensionales, formados por capas de esferas uniformes apiladas y compactas que exhiben características de CF tridimensionales Fig. (1.2). Estos CF son conocidos como cristales coloidales u ópalos artificiales [19].

Estos ópalos artificiales pueden ser dopados de nanopartículas (NPs) de diferentes tipos, por ejemplo: O_4 , Co, Au, Fe_3 , entre otras. Estas NPs modifican de forma única las propiedades físicas del material, un ejemplo, es un ópalo de SiO_2 con NPs de Co, el cual genera un amplio contraste dieléctrico que permite la aparición de gaps completos [20].

Además, se debe tomar en cuenta que las funciones de onda de los electrones en un cristal son periódicas, y cada una puede mantener una periodicidad Λ_p , de tal manera que, en lugar de trabajar en el espacio directo de los vectores \vec{R} de la red de Bravais, es más útil trabajar con los vectores de onda \vec{G} en el espacio de la transformada de Fourier. En caso de los cristales, este espacio se le denomina espacio recíproco, debido a que los vectores \vec{G} tienen dimensiones inversas o recíprocas que los \vec{R} .

Los cálculos en el espacio recíproco se pueden limitar a una sola celda primitiva recíproca y relacionando el resto de celdas las cuales se repiten mediante traslaciones de los vectores \vec{G} .

Es útil elegir una celda primitiva que contenga todas las simetrías puntuales de la red de Bravais, la cual es denominada como la primera zona de Brillouin, debido a que la simetría nos permite trabajar únicamente en una pequeña región.

En la figura (1.3) se ilustra un esquema de zona reducida para un ópalo formado por esferas de SiO_2 con estructura cúbica centrada en las caras (FCC). Este diagrama muestra como las energías están representadas para los valores de \vec{k} de la primera zona de Brillouin, donde se toma el punto $\Gamma(k=0)$ como el origen, el gap se abre en el punto L entre la primera y segunda bandas de la figura, ésta es la causa del intenso pico de atenuación observado en los espectros de transmisión obtenidos a incidencia normal ($\theta = 0^\circ$) con respecto a los planos (111). También se observa de manera la forma de las bandas en diversas direcciones que corresponden a ΓK , ΓL , ΓW y ΓX .

La figura (1.4) muestra el poliedro correspondiente a la primera zona de Brillouin del un ópalo, donde se ilustra las direcciones de alta simetría [29].

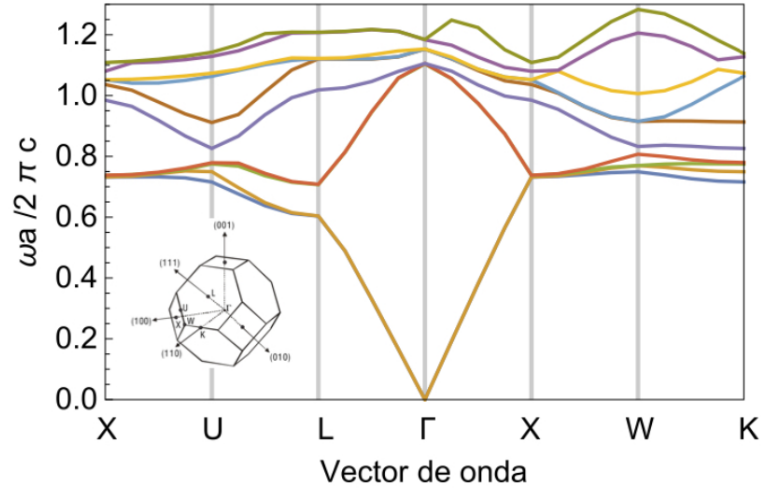


Figura 1.3: Estructura de bandas para un ópalo de esferas de SiO_2 con estructura FCC. La figura en la parte inferior izquierda muestra la primera zona de Brillouin de SiO_2 donde se observan los puntos de alta simetría correspondientes a un ópalo de esferas de SiO_2 .

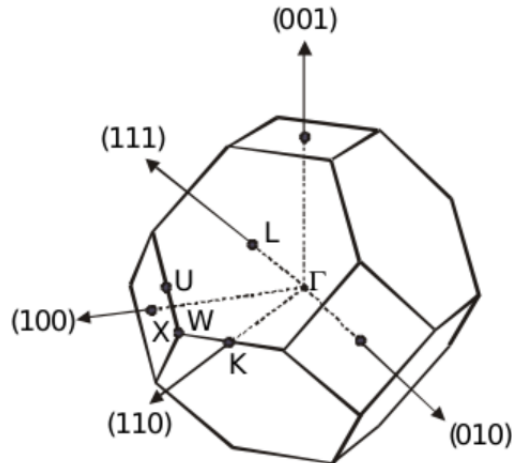


Figura 1.4: Primera zona de Brillouin de la estructura FCC. El punto Γ , en el centro del cubooc-taedro, indica el origen de coordenadas en el espacio recíproco. Los puntos en el borde de zona X , K , L , W y U determinan direcciones de alta simetría en el cristal.

Capítulo 2

Reflectancia y transmitancia en la aproximación de ondas escalares

El estudio de las propiedades ópticas de los materiales con constantes dieléctricas periódicas ha sido realizado por varios autores [21, 22] y han señalado que es necesario un enfoque más simple el cual pueda proporcionar una comprensión cualitativa. El candidato más común para esto es la aproximación de onda escalar denominada AOE, la cual es aplicada al problema de banda fotónica por Satpathy y sus colegas [23]. Además, son bien conocidas las dificultades y deficiencias de la AOE ampliamente [24], estos problemas están relacionadas principalmente con su uso en la descripción de la propagación a lo largo de una dirección arbitraria en el cristal tridimensional. En el trabajo presentado a continuación, nos enfocaremos únicamente de la propagación electromagnética a lo largo de direcciones de alta simetría del cristal, la dirección (111) será de alto interés en esta discusión.

En esta ejemplo, la aproximación unidimensional inherente de la AOE es simple y apropiada, además está de acuerdo con las observaciones experimentales de una manera razonable verificada por otros autores [29].

2.1. Aproximación de Ondas Escalares

En un cristal periódico, considerando comúnmente como un material sin pérdida, donde la constante dieléctrica depende de la posición $\epsilon(\vec{r})$, el campo eléctrico puede ser obtenido por medio de la ecuación (1.11)

$$-\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon'(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) = \epsilon_p \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}). \quad (2.1)$$

es importante notar que la constante dieléctrica $\epsilon(\vec{r})$ es dependiente \vec{r} y puede ser separada en dos partes como se muestra a continuación:

$$\epsilon(\vec{r}) = \epsilon'(\vec{r}) + \epsilon_p, \quad (2.2)$$

en la Ec. 2.2, ϵ_p es la constante dieléctrica promedio y $\epsilon'(\vec{r})$ la parte periódica de la constante dieléctrica. Por otra parte la constante dieléctrica promedio se puede expresar como

$$\epsilon_p = f\epsilon_s + (1 - f)\epsilon_b = [(\epsilon_c - 1)f + 1]\epsilon_b, \quad (2.3)$$

aquí f es el factor de estructura (la fracción de volumen de las esferas dieléctricas en el cristal), ϵ_s es la constante dieléctrica de las nanoesferas y ϵ_b la constante dieléctrica del espacio intersticial y $\epsilon_c = \epsilon_s/\epsilon_b$ es el contraste dieléctrico.

**CAPÍTULO 2. REFLECTANCIA Y TRANSMITANCIA EN LA
APROXIMACIÓN DE ONDAS ESCALARES**
2.1. APROXIMACIÓN DE ONDAS ESCALARES

El factor de estructura f para un cristal FCC es determinado por

$$f = 4 \frac{\frac{4}{3}\pi R_s^3}{a^3}, \quad (2.4)$$

donde a es la constante de red y R_s es el radio de las esferas dieléctricas.

La periodicidad de la constante dieléctrica del cristal fotónico $\epsilon'(\vec{r})$ puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\epsilon'(\vec{r}) = \epsilon_b + (\epsilon_s - \epsilon_b)\theta(\vec{r}), \quad (2.5)$$

donde $\theta(\vec{r})$ es la función escalón unitaria; $\theta(\vec{r}) = 1$ para $|\vec{r}| \leq R_s$ y cero en otro caso. Además, la Ec. (2.5) puede ser reescrita de una forma usual mas conveniente como

$$\epsilon'(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} U_{\vec{G}} e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}}, \quad (2.6)$$

donde \vec{G} es un vector de la red recíproca y donde los coeficientes de Fourier $U_{\vec{G}}$ para un ópalo de esferas con estructura FCC, están dados por (ver Apéndice A)

$$U_{\vec{G}} = \frac{16\pi}{(R_s G)^3} (\epsilon_c - 1) \epsilon_b [\sin(GR_s) - GR_s \cos(GR_s)]. \quad (2.7)$$

En la descripción de la propagación de las ondas en la estructura periódica, es necesario hacer dos suposiciones muy importantes para la aproximación de ondas escalares. La primera suposición es que el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ se trata como una cantidad escalar y no como cantidad vectorial, para el caso de incidencia normal a los planos (111). Con esta suposición el campo eléctrico puede representarse en función de vectores de Bloch:

$$E(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \sum_{\vec{k}} C_{\vec{k}-\vec{G}} e^{i(\vec{k}-\vec{G})\cdot\vec{r}}, \quad (2.8)$$

donde $\sum_{\vec{G}}$ esta sumado sobre todos los vectores de la red recíproca y $\sum_{\vec{k}}$ sobre la primera zona de Brillouin.

Si sustituimos la Ec. (2.6) para la constante dieléctrica y la Ec. (2.8) del campo eléctrico expandido en función de vectores de Bloch en la Ec. (2.1), se llega a la siguiente expresión

$$-\sum_{\vec{G}, \vec{k}} C_{\vec{k}-\vec{G}} \nabla^2 e^{i(\vec{k}-\vec{G})\cdot\vec{r}} - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}} U_{\vec{G}} e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} \sum_{\vec{G}, \vec{k}} C_{\vec{k}-\vec{G}} e^{i(\vec{k}-\vec{G})\cdot\vec{r}} = -\epsilon_p \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}, \vec{k}} C_{\vec{k}-\vec{G}} e^{i(\vec{k}-\vec{G})\cdot\vec{r}}. \quad (2.9)$$

Aplicando el laplaciano sobre la función exponencial y además hacemos los cambios de índice $\vec{G} \rightarrow \vec{G}'$ y $\vec{k} \rightarrow \vec{k}'$ en la segunda y tercera suma respectivamente, ahora podemos obtener una pexpresión mas sencilla para la Ec. (2.9) descrita por

$$\sum_{\vec{G}, \vec{k}} (\vec{k} - \vec{G})^2 C_{\vec{k}-\vec{G}} e^{i(\vec{k}-\vec{G})\cdot\vec{r}} - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}, \vec{G}', \vec{k}'} U_{\vec{G}'} C_{\vec{k}'-\vec{G}} e^{i(\vec{G}'+\vec{k}'-\vec{G})\cdot\vec{r}} = -\epsilon_p \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}, \vec{k}} C_{\vec{k}-\vec{G}} e^{i(\vec{k}-\vec{G})\cdot\vec{r}}.$$

Factorizando términos semejantes resulta

$$\sum_{\vec{G}, \vec{k}} \left[(\vec{k} - \vec{G})^2 - \epsilon_p \frac{\omega^2}{c^2} \right] C_{\vec{k}-\vec{G}} e^{i(\vec{k}-\vec{G})\cdot\vec{r}} = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}, \vec{G}', \vec{k}'} U_{\vec{G}'} C_{\vec{k}'-\vec{G}} e^{i(\vec{G}'+\vec{k}'-\vec{G})\cdot\vec{r}}. \quad (2.10)$$

Al usar la condición de dispersión donde se establece que $\vec{k} + \vec{G} = \vec{k}'$, se pueden cambiar los términos dependientes de $\vec{k}' - \vec{G}$ por \vec{k} , de esta manera, la suma triple se reduce a una suma doble:

$$\sum_{\vec{G}, \vec{k}} \left[(\vec{k} - \vec{G})^2 - \epsilon_p \frac{\omega^2}{c^2} \right] C_{\vec{k}-\vec{G}} e^{i(\vec{k}-\vec{G})\cdot\vec{r}} = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}', \vec{k}} U_{\vec{G}'} C_{\vec{k}} e^{i(\vec{G}'+\vec{k})\cdot\vec{r}}. \quad (2.11)$$

**CAPÍTULO 2. REFLECTANCIA Y TRANSMITANCIA EN LA
APROXIMACIÓN DE ONDAS ESCALARES**
2.1. APROXIMACIÓN DE ONDAS ESCALARES

Como paso final, se realiza el cambio de índice \vec{G}' por $-\vec{G}$ en la parte derecha de la Ec. 2.11 y en particular para una estructura FCC, el valor de $U_{\vec{G}}$ solo depende de la magnitud del vector \vec{G} (este resultado es descrito en el Apéndice A), y notando que $U_{\vec{G}} = U_{-\vec{G}}$, la Ec. (2.11) tomará la siguiente forma

$$\sum_{\vec{G}, \vec{k}} \left[(\vec{k} - \vec{G})^2 - \epsilon_p \frac{\omega^2}{c^2} \right] C_{\vec{k}-\vec{G}} e^{i(\vec{k}-\vec{G}) \cdot \vec{r}} = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\vec{G}, \vec{k}} U_{\vec{G}} C_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}-\vec{G}) \cdot \vec{r}}, \quad (2.12)$$

Ahora, al igualar término a término, es fácil ver que

$$\left[(\vec{k} - \vec{G})^2 - \epsilon_p \frac{\omega^2}{c^2} \right] C_{\vec{k}-\vec{G}} = \frac{\omega^2}{c^2} U_{\vec{G}} C_{\vec{k}}. \quad (2.13)$$

La segunda suposición en la aproximación de ondas planas es considerar que las condiciones del experimento favorecen fuertemente la dispersión de un conjunto de planos (111), (en particular una estructura FCC) y además los efectos de los otros planos pueden ser despreciables. Todo esto se puede justificar notando que la probabilidad de dispersión está determinada por los coeficientes de Fourier de $U_{\vec{G}}$, los cuales decrecen con el incremento de $|\vec{G}|$.

Entonces, los valores más pequeños de los vectores de la red recíproca son los únicos que contribuyen fuertemente para la incidencia a un ángulo de 0° . La onda incidente se propaga normal a los planos (111), entonces, es necesario considerar la difracción desde estos planos.

Estableciendo todo lo anterior y tomando en cuenta las siguientes expresiones

$$|\vec{k} - \vec{G}| \approx |\vec{k}| \quad \text{y} \quad |\vec{G}| = \left[\frac{2\pi}{d_{111}} \right]. \quad (2.14)$$

Ahora es más fácil reducir la Ec. (2.13) eliminando el carácter vectorial y dando como resultado el par de ecuaciones acopladas

$$\left[k^2 - \epsilon_p \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right] C_k - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 U_G C_k = 0, \quad (2.15)$$

$$\left[(k - G)^2 - \epsilon_p \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right] C_{k-G} - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 U_G C_k = 0. \quad (2.16)$$

De la Ec. (2.15), el cociente C_{k-G}/C_k puede escribirse como

$$\sum \equiv \frac{C_{k-G}}{C_k} = \frac{k^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \epsilon_p}{\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 U_G} = \frac{k^2 - k_0^2 \epsilon_p}{U_G k_0^2}, \quad (2.17)$$

donde $k_0 = \omega/c$. Sustituyendo C_{k-G} de la Ec. (2.17) en la Ec. (2.16) se puede eliminar la dependencia de los coeficientes C_k , obteniendo

$$\left[k^2 - \epsilon_p \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right] \left[(k - G)^2 - \epsilon_p \frac{\omega^2}{c^2} \right] = \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 U_G^2. \quad (2.18)$$

Si definimos $x^2 \equiv \epsilon_p (\omega/c)^2$ y $A \equiv \frac{U_G}{\epsilon_p} x^2$, la Ec. (2.18) es reescrita de la siguiente manera

$$(k^2 - x^2) [(k - G)^2 - x^2] = A^2. \quad (2.19)$$

**CAPÍTULO 2. REFLECTANCIA Y TRANSMITANCIA EN LA
APROXIMACIÓN DE ONDAS ESCALARES**
2.1. APROXIMACIÓN DE ONDAS ESCALARES

2.1.1. Relación de Dispersión en la AOE

En la Ec. (2.19) se puede obtener la relación de dispersión k en términos de ω , el procedimiento para esto se puede llevar a cabo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
A^2 &= (k^2 - x^2) [(k - G)^2 - x^2] \\
&= (k^2 - x^2) [k^2 - 2kG + G^2 - x^2] \\
&= [(k^2 - x^2)(k^2 - x^2)] - [(k^2 - x^2)(2kG - G^2)] \\
&= [(k^2 - x^2)]^2 - 2G(k - \frac{G}{2})(k^2 - x^2) \\
&= k^4 - 2k^2x^2 + x^4 - \left[2k^2G(k - \frac{G}{2})\right] + \left[2Gx^2(k - \frac{G}{2})\right] \\
&= k^4 - 2k^2x^2 + x^4 - 2k^2Gk + k^2G^2 + 2Gx^2k - Gx^2G \\
&= [k^4 - 2k^2Gk + k^2G^2] + [2x^2(kG - k^2)] + x^4 - x^2G^2 \\
&= (k^2 - kG)^2 - 2x^2(k^2 - kG) + x^4 - x^2G^2 \\
&= [(k^2 - kG) - x^2]^2 - x^2G^2.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Entonces la Ec. (2.19) es

$$A^2 = [(k^2 - kG) - x^2]^2 - x^2G^2, \tag{2.21}$$

reordenando términos, vemos que

$$k^2 - kG - x^2 = \pm \sqrt{A^2 + x^2G^2}. \tag{2.22}$$

Ahora, para acompletar el binomio cuadrado debemos sumar y restar $(G/2)^2$ en la parte izquierda de la Ec. (2.22), entonces

$$\left(k - \frac{G}{2}\right)^2 - \left(\frac{G}{2}\right)^2 - x^2 = \sqrt{A^2 + x^2G^2}, \tag{2.23}$$

si resolvemos para k se obtiene

$$k = \frac{G}{2} \pm \sqrt{F(\omega)}, \tag{2.24}$$

aquí $F(\omega)$ esta dado por

$$F(\omega) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_p + \left(\frac{G}{2}\right)^2 \pm \sqrt{U_G^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_p G^2}, \tag{2.25}$$

Es importante aclarar que para $F(\omega) > 0$ corresponde a modos permitidos, dicho de otra manera son los modos que se pueden propagar por el cristal y para los cuales k es real. Por otro lado, cuando $F(\omega) < 0$ corresponde a modos prohibidos, en los cuales $k = G/2 \pm iq$ es compleja y donde $q = |F(\omega)|$.

Ahora, se debe introducir una variable adimensional para obtener la relación de dispersión en términos de la longitud de onda incidente λ . Esta nueva variable es descrita de la siguiente manera

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\lambda_B} - 1, \tag{2.26}$$

donde λ_B es la longitud de onda de Bragg y para la incidencia normal con $G = 2\pi/d_{111}$ se obtiene que:

$$\lambda_B = 2d_{111}\sqrt{\epsilon_p} = 2\frac{2\pi}{G}\sqrt{\epsilon_p} = \frac{4\pi\sqrt{\epsilon_p}}{G}, \tag{2.27}$$

**CAPÍTULO 2. REFLECTANCIA Y TRANSMITANCIA EN LA
APROXIMACIÓN DE ONDAS ESCALARES**
2.2. ESPECTROS DE REFLECTANCIA Y TRANSMITANCIA

Ahora, al sustituir la Ec. (2.27) en la Ec. (2.26) y usando la relación $k_0 = (\omega/c)^2 = 2\pi/\lambda$ se puede llegar a:

$$G = 2(\Lambda + 1)k_0\sqrt{\epsilon_p}. \quad (2.28)$$

Usando la ecuación (2.24) para la relación de dispersión expresada de la siguiente manera

$$k = \frac{G}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_p + \left(\frac{G}{2}\right)^2 - \sqrt{U_G^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_p G^2}}, \quad (2.29)$$

si en la Ec. (2.29) se factoriza $(G/2)$ y se usa la relación $k_0 = (\omega/c)$, entonces tomará la siguiente forma

$$k = \frac{G}{2} \left[1 \pm \sqrt{\frac{4k_0^2 \epsilon_p}{G^2} + 1 - 4\sqrt{\frac{U_G^2 k_0^4}{G^4} + \frac{k_0^2 \epsilon_p}{G^2}}} \right]. \quad (2.30)$$

Si se hace uso de la Ec. (2.28) que relaciona a G y se sustituye en (2.30) se obtiene:

$$k = (\Lambda + 1)k_0\sqrt{\epsilon_p} \left[1 \pm \sqrt{\frac{1}{(\Lambda + 1)^2} + 1 - 4\sqrt{\frac{U_G^2}{2^4(\Lambda + 1)^4 \epsilon_p^2} + \frac{4}{2^4(\Lambda + 1)^2}}} \right]. \quad (2.31)$$

Finalmente, multiplicando $(\Lambda + 1)$ en la Ec. (2.31) se llega a

$$k = k_0\sqrt{\epsilon_p} \left[(\Lambda + 1) \pm \sqrt{1 + (\Lambda + 1)^2 - \sqrt{\frac{U_G^2}{\epsilon_p^2} + 4(\Lambda + 1)^2}} \right], \quad (2.32)$$

notando que $k_0 = 2\pi/\lambda$ y $(\Lambda + 1) = \lambda/\lambda_B$, es fácil modificar la Ec. (2.32) y reescribirla de la siguiente manera

$$k = 2\pi\sqrt{\epsilon_p} \left[\frac{1}{\lambda_B} \pm \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda_B^2} - \sqrt{\frac{U_G^2}{\epsilon_p^2 \lambda^4} + \frac{4}{\lambda^2 \lambda_B^2}}} \right]. \quad (2.33)$$

este es el resultado más importantes en la AOE.

2.2. Espectros de Reflectancia y Transmitancia

Los límites de validez para la AOE deben ser determinados mediante la teoría y es necesario calcular el espectro de transmisión para poder compararlo con los datos experimentales.

Para el caso tomado en teste trabajo, es necesario establecer continuidad en las condiciones de frontera, tanto del campo eléctrico como en su primera derivada.

Como se está dentro del régimen de la AOE se debe tratar al campo eléctrico como un escalar para el caso de incidencia normal. Entonces, el campo eléctrico puede ser expresado de la siguiente manera:

$$E(z) = \begin{cases} a_0 e^{ik_0(z-z_0)} + b_0 e^{-ik_0(z-z_0)} & (z < z_0) \\ a_1 \frac{e^{ik(z-z_1)} + \Sigma e^{i(k-G)(z-z_1)}}{1+\Sigma} + b_1 \frac{e^{-ik(z-z_1)} + \Sigma e^{-i(k-G)(z-z_1)}}{1+\Sigma} & (z_0 < z < z_1) \\ a_s e^{ik_0(z-z_1)} + b_s e^{-ik_0(z-z_1)} & (z_1 < z) \end{cases}, \quad (2.34)$$

donde Σ viene dado por el término de la Ec. (2.17).

Dentro del material fotónico, el campo eléctrico, que puede ser escrito desde la ecuación expandida en función de vectores de Bloch Ec. (2.8), consiste de una onda viajando hacia la derecha y

**CAPÍTULO 2. REFLECTANCIA Y TRANSMITANCIA EN LA
APROXIMACIÓN DE ONDAS ESCALARES**
2.2. ESPECTROS DE REFLECTANCIA Y TRANSMITANCIA

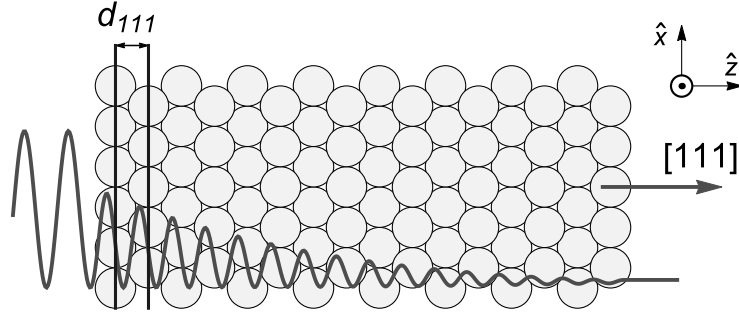


Figura 2.1: Esquema de una vista lateral del conjunto de esferas de la FCC. Las rectas paralelas representan los planos (111), cuya distancia interplanar es d_{111} . El cristal está orientado de manera que el eje (111) sea normal a las superficies planas. La onda incidente que viaja en la dirección $+z$ se localiza dentro de la banda prohibida fotónica.

una viajando hacia la izquierda, donde k y $k - G$ son las componentes z de los vectores de onda y en donde, a_1 y b_1 son constantes en las capas de este material.

Aplicando las condiciones para, $E(z)$ y dE/dz , para asegurar la continuidad en las fronteras de $z_0 = 0$ y $z_1 = Nd_{111}$, donde N es un número de planos de la red (111), d_{111} es la distancia entre planos del conjunto (111), z_0 es el inicio del material y z_1 es el final del material.

Considerando la continuidad el campo E en $z = z_0 = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 &= a_1 \frac{e^{-ikz_1} + \Sigma e^{-ikz_1}}{1 + \Sigma} + b_1 \frac{e^{ikz_1} + \Sigma e^{ikz_1}}{1 + \Sigma} \\ &= a_1 e^{-ikz_1} + b_1 e^{ikz_1} \\ &= a'_1 + b'_1. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Dado que $a'_1 = a_1 e^{-ikz_1}$ y $b'_1 = b_1 e^{ikz_1}$, este resultado se puede escribir en forma matricial tomando en cuenta que $\phi = kz_1$

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ b'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Notemos que la primer matriz del lado derecho, es conocida como la matriz de propagación P .

$$P = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Considerando al continuidad de la primera derivada del campo $E(z)$ en $z = z_0 = 0$, es posible escribir

$$\begin{aligned} a_0 ik_0 - b_0 ik_0 &= a_1 \frac{(ik)e^{-ikz_1} + \Sigma(i(k-G))e^{-ikz_1}}{1 + \Sigma} + b_1 \frac{(-ik)e^{ikz_1} + \Sigma(-i(k-G))e^{ikz_1}}{1 + \Sigma} \\ &= a_1 \frac{k + \Sigma(k-G)}{1 + \Sigma} i e^{-ikz_1} - b_1 \frac{k + \Sigma(k-G)}{1 + \Sigma} i e^{ikz_1}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Sustituyendo $a_1 = a'_1 e^{ikz_1}$ y $b_1 = b'_1 e^{-ikz_1}$ en la ecuación anterior, se obtiene

**CAPÍTULO 2. REFLECTANCIA Y TRANSMITANCIA EN LA
APROXIMACIÓN DE ONDAS ESCALARES**
2.2. ESPECTROS DE REFLECTANCIA Y TRANSMITANCIA

$$\begin{aligned}
k_0(a_0 - b_0) &= a_1 \frac{k + \Sigma(k - G)}{1 + \Sigma} e^{-ikz_1} - b_1 \frac{k + \Sigma(k - G)}{1 + \Sigma} e^{ikz_1} \\
&= a'_1 e^{ikz_1} \frac{k + \Sigma(k - G)}{1 + \Sigma} e^{-ikz_1} - b'_1 e^{-ikz_1} \frac{k + \Sigma(k - G)}{1 + \Sigma} e^{ikz_1} \\
&= a'_1 \frac{k + \Sigma(k - G)}{1 + \Sigma} - b'_1 \frac{k + \Sigma(k - G)}{1 + \Sigma}.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Definiendo las matrices siguientes

$$D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_0 & -k_0 \end{pmatrix} \quad y \quad D_{opalo} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{k + \Sigma(k - G)}{1 + \Sigma} & -\frac{k + \Sigma(k - G)}{1 + \Sigma} \end{pmatrix}, \tag{2.40}$$

entonces las ecuaciones (2.35) y (2.39) pueden ser reescritas como:

$$D_0 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = D_{opalo} \begin{pmatrix} a'_1 \\ b'_1 \end{pmatrix}. \tag{2.41}$$

De esta manera

$$\begin{aligned}
D_0 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} &= D_{opalo} P_{opalo} D_{opalo}^{-1} D_s \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} &= D_0^{-1} D_{opalo} P_{opalo} D_{opalo}^{-1} D_s \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.42}$$

donde

$$D_0^{-1} = \frac{1}{2k_0} \begin{pmatrix} k_0 & 1 \\ k_0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad D_{opalo}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1 + \Sigma}{k + \Sigma(k - G)} \\ 1 & -\frac{1 + \Sigma}{k + \Sigma(k - G)} \end{pmatrix}. \tag{2.43}$$

Al realizar las operaciones correspondientes en la Ec. (2.42), sustituyendo los valores obtenidos y teniendo en cuenta que $D_s = D_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_0 & 1 \\ k_0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{k + \Sigma(k - G)}{1 + \Sigma} & -\frac{k + \Sigma(k - G)}{1 + \Sigma} \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1 + \Sigma}{k + \Sigma(k - G)} \\ 1 & -\frac{1 + \Sigma}{k + \Sigma(k - G)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_0 & -k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{4k_0} \begin{pmatrix} k_0 + \frac{k + \Sigma(k - G)}{1 + \Sigma} & k_0 - \frac{k + \Sigma(k - G)}{1 + \Sigma} \\ k_0 - \frac{k + \Sigma(k - G)}{1 + \Sigma} & k_0 + \frac{k + \Sigma(k - G)}{1 + \Sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1 + \Sigma}{k + \Sigma(k - G)} \\ 1 & -\frac{1 + \Sigma}{k + \Sigma(k - G)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_0 & -k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{4k_0} \begin{pmatrix} (k_0 + \frac{k + \Sigma(k - G)}{1 + \Sigma})e^{-i\phi} & (k_0 - \frac{k + \Sigma(k - G)}{1 + \Sigma})e^{i\phi} \\ (k_0 - \frac{k + \Sigma(k - G)}{1 + \Sigma})e^{-i\phi} & (k_0 + \frac{k + \Sigma(k - G)}{1 + \Sigma})e^{i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1 + \Sigma}{k + \Sigma(k - G)} \\ 1 & -\frac{1 + \Sigma}{k + \Sigma(k - G)} \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_0 & -k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad y para compactar un poco las expresiones se tomará por ahora $f = \frac{1 + \Sigma}{k + \Sigma(k - G)}$, de esta manera la expresión anterior toma la forma:

**CAPÍTULO 2. REFLECTANCIA Y TRANSMITANCIA EN LA
APROXIMACIÓN DE ONDAS ESCALARES**
2.2. ESPECTROS DE REFLECTANCIA Y TRANSMITANCIA

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4k_0} \begin{pmatrix} (k_0 + \frac{1}{f})e^{-i\phi} & (k_0 - \frac{1}{f})e^{i\phi} \\ (k_0 - \frac{1}{f})e^{-i\phi} & (k_0 + \frac{1}{f})e^{i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f \\ 1 & -f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_0 & -k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4k_0} \begin{pmatrix} k_0e^{-i\phi} + \frac{1}{f}e^{-i\phi} + k_0e^{i\phi} - \frac{1}{f}e^{i\phi} & k_0fe^{-i\phi} + e^{-i\phi} - k_0fe^{i\phi} + e^{i\phi} \\ k_0e^{-i\phi} - \frac{1}{f}e^{-i\phi} + k_0e^{i\phi} + \frac{1}{f}e^{i\phi} & k_0fe^{-i\phi} - e^{-i\phi} - k_0fe^{i\phi} - e^{i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_0 & -k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4k_0} \begin{pmatrix} k_0(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) - \frac{1}{f}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) & (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) - k_0f(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) \\ k_0(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) + \frac{1}{f}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) & -(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) - k_0f(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_0 & -k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

Aquí hacemos uso de las equivalencias trigonométricas relacionadas con el exponencial

$$\cos \phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}, \quad \sin \phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}, \quad (2.47)$$

entonces

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4k_0} \begin{pmatrix} k_0 2 \cos \phi - \frac{1}{f} 2i \sin \phi & 2 \cos \phi - k_0 f 2i \sin \phi \\ k_0 2 \cos \phi + \frac{1}{f} 2i \sin \phi & -2 \cos \phi - k_0 f 2i \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_0 & -k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2k_0} \begin{pmatrix} k_0 \cos \phi - \frac{1}{f} i \sin \phi & \cos \phi - k_0 f i \sin \phi \\ k_0 \cos \phi + \frac{1}{f} i \sin \phi & -\cos \phi - k_0 f i \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_0 & -k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2k_0} \begin{pmatrix} k_0 \cos \phi - \frac{1}{f} i \sin \phi + k_0 \cos \phi - k_0^2 f i \sin \phi & k_0 \cos \phi - \frac{1}{f} i \sin \phi - k_0 \cos \phi + k_0^2 f i \sin \phi \\ k_0 \cos \phi + \frac{1}{f} i \sin \phi - k_0 \cos \phi - k_0^2 f i \sin \phi & k_0 \cos \phi + \frac{1}{f} i \sin \phi + k_0 \cos \phi + k_0^2 f i \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2k_0} \begin{pmatrix} 2k_0 \cos \phi - i(\frac{1}{f} + k_0^2 f) \sin \phi & i(-\frac{1}{f} + k_0^2 f) \sin \phi \\ i(\frac{1}{f} - k_0^2 f) \sin \phi & 2k_0 \cos \phi + i(\frac{1}{f} + k_0^2 f) \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \cos \phi - i(\frac{1}{k_0 f} + k_0 f) \sin \phi & i(-\frac{1}{k_0 f} + k_0 f) \sin \phi \\ i(\frac{1}{k_0 f} - k_0 f) \sin \phi & 2 \cos \phi + i(\frac{1}{k_0 f} + k_0 f) \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Usando el valor de $f = \frac{1+\Sigma}{k+\Sigma(k-G)}$, se puede definir una nueva variable

$$\beta_0 = \frac{k_0(1-\Sigma)}{k(1-\Sigma) + \Sigma G}. \quad (2.50)$$

**CAPÍTULO 2. REFLECTANCIA Y TRANSMITANCIA EN LA
APROXIMACIÓN DE ONDAS ESCALARES**
2.2. ESPECTROS DE REFLECTANCIA Y TRANSMITANCIA

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \cos \phi - i(\frac{1}{\beta_0} + \beta_0) \sin \phi & i(-\frac{1}{\beta_0} + \beta_0) \sin \phi \\ i(\frac{1}{\beta_0} - \beta_0) \sin \phi & 2 \cos \phi + i(\frac{1}{\beta_0} + \beta_0) \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\beta_0} \begin{pmatrix} 2\beta_0 \cos \phi - i(1 + \beta_0^2) \sin \phi & i(-1 + \beta_0^2) \sin \phi \\ i(1 - \beta_0^2) \sin \phi & 2\beta_0 \cos \phi + i(1 + \beta_0^2) \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\beta_0 \cos \phi - i(1 + \beta_0^2) \sin \phi}{2\beta_0} & \frac{i(-1 + \beta_0^2) \sin \phi}{2\beta_0} \\ \frac{i(1 - \beta_0^2) \sin \phi}{2\beta_0} & \frac{2\beta_0 \cos \phi + i(1 + \beta_0^2) \sin \phi}{2\beta_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

donde la matriz M es la matriz de transferencia y es equivalente a

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & \frac{r^*}{t^*} \\ \frac{r}{t} & \frac{1}{t^*} \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

De esta manera $t = \frac{1}{M_{11}}$, define el coeficiente de trasmisión como

$$t(\lambda) = \frac{2\beta_0}{2\beta_0 \cos(kNd_{111}) - i(1 + \beta_0^2) \sin(kNd_{111})}, \quad (2.56)$$

donde N es el número de planos de la red (111) o capas en el cristal, k es el vector de onda en función de ω .

Por otro lado, para el coeficiente de reflexión se tiene que $r = \frac{M_{21}}{M_{11}}$, entonces

$$r(\lambda) = i \frac{(1 - \beta_0^2) \sin(kNd_{111})}{2\beta_0 \cos(kNd_{111}) - i(1 + \beta_0^2) \sin(kNd_{111})}. \quad (2.57)$$

Las ecuaciones (2.56) y (2.57) serán usadas en los próximos capítulos.

Capítulo 3

Fuerza Electromagnética Sobre Una Capa Dieléctrica

3.1. Ley de Lorentz

La fuerza ejercida por un campo electromagnético sobre una corriente eléctrica se conoce como fuerza de Lorentz [25]. Según la electrostática, la fuerza eléctrica sobre una carga puntual en reposo está dada por:

$$\vec{F}_E = q\vec{E}, \quad (3.1)$$

donde q es la carga de la partícula y \vec{E} es el campo eléctrico al cual se encuentra sometida la carga. Sin embargo, si dicha carga se encuentra en movimiento, se verá sometida a una fuerza adicional la cual es la fuerza magnética, dicha fuerza está dada por

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (3.2)$$

donde \vec{v} es el vector velocidad de la partícula y \vec{B} es el campo magnético al cual se encuentra sometida la carga. De esta forma, la fuerza total sobre la carga puntual está dada por

$$\vec{F}_{EM} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (3.3)$$

Esta expresión es válida tanto para sistemas estáticos o dinámicos y es denominada Fuerza de Lorentz.

La ecuación (3.3) solo puede aplicarse a un sistema de una carga puntual, de esta forma, si queremos aplicar esta ley sobre un cuerpo con cierta carga Q , debemos considerar una densidad de carga de la región s . Si consideramos una región con volumen ν y densidad de carga ρ , la fuerza de Lorentz estará descrita por la siguiente expresión:

$$\vec{f}_{EM}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{J}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t), \quad (3.4)$$

siendo \vec{f}_{EM} la fuerza electromagnética por unidad de volumen (también conocida como densidad de fuerza), ρ la densidad de carga del volumen ν y $\vec{J} = \rho\vec{v}$ la densidad de corriente. De esta forma, la fuerza electromagnética total sobre la distribución de carga ρ en el volumen ν está dado por

$$\vec{F}_{Tot}^{EM}(t) = \int_{\nu} \vec{f}_{EM}(\vec{r}, t) d^3r, \quad (3.5)$$

donde la integral se aplica sobre el volumen ν .

3.2. Densidad de Fuerza de Volumen

Dentro de las capas dieléctricas, la densidad de fuerza volumétrica de Lorentz viene dada por

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}, \quad (3.6)$$

donde ρ es la densidad de carga eléctrica, \vec{J} es la densidad de corriente eléctrica, \vec{E} es el campo eléctrico y \vec{B} es la inducción magnética.

En un material polarizable con densidad de polarización \vec{P} , la densidad de carga efectiva macroscópica es $\rho = -\nabla \cdot \vec{P}$, y la densidad de corriente efectiva es $\vec{J} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$. Dado que en un material dieléctrico $\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ y $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ como no hay carga libre, se deduce que $\rho = 0$. Por lo tanto, solo el segundo término de la ecuación (3.6) es distinto de cero, y la densidad de fuerza de volumen, usando $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, da como resultado

$$\vec{f} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \mu_0 \vec{H}. \quad (3.7)$$

Específicamente, para campos armónicos con dependencia del tiempo, la densidad de fuerza promedio viene dada por

$$\langle \vec{f} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [i\omega \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}^* \times \mu_0 \vec{H}], \quad (3.8)$$

donde \vec{E} y \vec{H} son las frecuencias dominantes del campo eléctrico y magnético, respectivamente.

3.3. El tensor de esfuerzos de Maxwell y la fuerza electromagnética

El tensor de esfuerzos de Maxwell, es un tensor que se usa en electromagnetismo clásico, el cual es útil para representar la interacción entre las fuerzas electromagnéticas y el impulso, cuya expresión es:

$$T_{ij} = \epsilon (E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2) + \frac{1}{\mu} (B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2), \quad (3.9)$$

donde $i, j = 1, 2, 3$ y $i, j = 1 = x, i, j = 2 = y, i, j = 3 = z$, los índices i, j del tensor de Maxwell corresponden a las componentes x, y, z de los campos E y B . Por otro lado, la δ_{ij} es la función delta de Kronecker, ϵ la permitividad eléctrica y μ la permeabilidad magnética del medio.

La expresión (3.9) puede ser reescrita como una divergencia.

De esta forma, el resultado más importante obtenido de este desarrollo es

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = & \epsilon \left((\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E} + \vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) - \frac{1}{2} \nabla (\vec{E} \cdot \vec{E}) \right) \\ & + \frac{1}{\mu} \left((\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} (\nabla \cdot \vec{B}) - \frac{1}{2} \nabla (\vec{B} \cdot \vec{B}) \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Usando la expresión de la Ec. (3.10), se obtiene la expresión para la densidad de fuerza EM de una forma más compacta y elegante como

$$\vec{f}_{EM} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} - \epsilon \mu \frac{\partial \vec{S}}{\partial t}, \quad (3.11)$$

donde \vec{S} es el vector de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\epsilon \mu} (\vec{D} \times \vec{B}). \quad (3.12)$$

**CAPÍTULO 3. FUERZA ELECTROMAGNÉTICA SOBRE UNA CAPA
DIELÉCTRICA**

3.4. TENSOR DE ESFUERZOS EN UNA CAPA QUE NO ABSORBE

Por otro lado, la Ec. (3.11) es solo la densidad de fuerza EM, así que para calcular la fuerza electromagnética total, se debe integrar sobre la región de interés Ec. (3.5), de esta forma, la fuerza electromagnética total de nuestro sistema será

$$\vec{F}_{tot}^{EM} = \int_{\nu} \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} - \epsilon\mu \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} d^3r. \quad (3.13)$$

Considerando que el volumen ν es cerrado, se puede hacer uso del teorema integral de la divergencia para reescribir la Fuerza EM total de la siguiente forma

$$\vec{F}_{tot}^{EM} = \oint_{\partial\nu} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} ds - \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_{\nu} \vec{S}(\vec{r}, t) d^3r, \quad (3.14)$$

donde $\partial\nu$ es la frontera del volumen ν

Promedio temporal

Debido a las variaciones temporales de los campos eléctrico y magnético, la Ec. (3.14) obtenida anteriormente tiene dependencia temporal. El trabajo que se busca desarrollar implica una interacción constante y longeva con la onda electromagnética, por lo tanto, vamos a estar interesados en el promedio de la fuerza temporal, es decir:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \left\langle \vec{F}_{Tot}^{EM}(t) \right\rangle = \left\langle \oint_{\partial\nu} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} ds - \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_{\nu} \vec{S}(\vec{r}, t) d^3r \right\rangle \\ &= \left\langle \oint_{\partial\nu} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} ds \right\rangle - \left\langle \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_{\nu} \vec{S}(\vec{r}, t) d^3r \right\rangle \\ &= \left\langle \oint_{\partial\nu} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} ds \right\rangle - \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_{\nu} \left\langle \vec{S}(\vec{r}, t) \right\rangle d^3r \\ &= \left\langle \oint_{\partial\nu} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} ds \right\rangle - \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_{\nu} \frac{1}{2} Re \left\{ \vec{S}(\vec{r}) \right\} d^3r \\ &= \left\langle \oint_{\partial\nu} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} ds \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.15)$$

El segundo término de la expresión (3.15) se anulará ya que al usar el valor promedio del vector de poynting obtenemos un término independiente del tiempo. Por lo tanto, el promedio temporal de la fuerza solo dependerá del primer término, es decir:

$$\vec{F} = \left\langle \vec{F}_{Tot}^{EM}(t) \right\rangle = \left\langle \oint_{\partial\nu} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} ds \right\rangle = \frac{1}{2} Re \left\{ \oint_{\partial\nu} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} ds \right\}, \quad (3.16)$$

donde $\overleftrightarrow{T}(\vec{r})$ es el tensor de esfuerzos de Maxwell complejo y para medios sin pérdida dado por:

$$\overleftrightarrow{T} = [\vec{D}\vec{E}^* + \vec{B}^*\vec{H}] - \frac{1}{2}[\vec{D} \cdot \vec{E}^* + \vec{B}^* \cdot \vec{H}]\bar{I}, \quad (3.17)$$

con \bar{I} es la matriz identidad de 3×3 y $(*)$ denota el complejo conjugado

3.4. Tensor de esfuerzos en una capa que no absorbe

La teoría necesaria para conocer la fuerza a la cual es sometido un medio materia, debido a la radiación de una onda electromagnética se puede conocer analizando la siguiente figura [30].

**CAPÍTULO 3. FUERZA ELECTROMAGNÉTICA SOBRE UNA CAPA
DIELÉCTRICA**

3.4. TENSOR DE ESFUERZOS EN UNA CAPA QUE NO ABSORBE

Comenzaremos definiendo una región infinitesimal con grosor δ_z alrededor de las fronteras entre la región 0 y la región 1, de igual forma entre las regiones 1 y 2 Fig. (3.1).

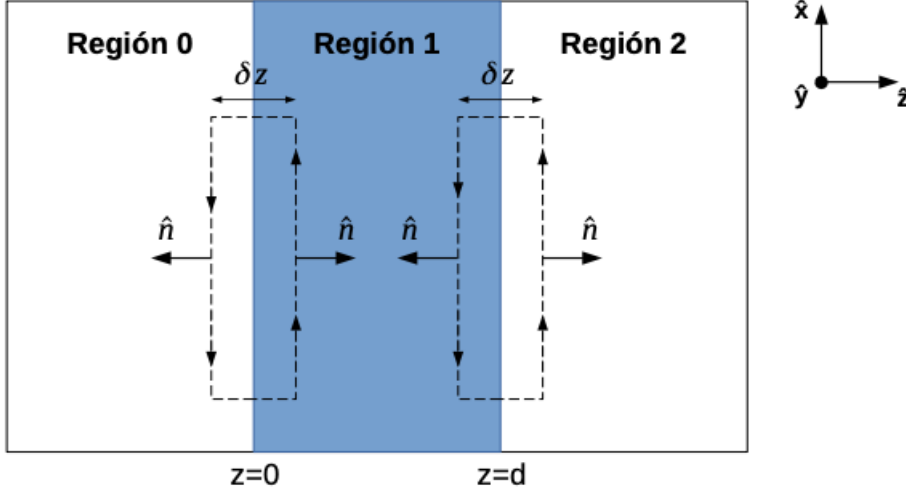


Figura 3.1: Las líneas punteadas muestran la ruta de integración para la aplicación del tensor de esfuerzo de Maxwell para calcular la fuerza sobre el cristal. La ruta se reduce de modo que $\delta_z \rightarrow 0$. La integración se realiza a lo largo de la superficie en ambos lados de los límites.

De esta forma, podemos usar el resultado para la fuerza en términos del tensor de esfuerzo de Maxwell.

Aplicando dicho resultado en cada una de las regiones infinitesimales la fuerza EM será

$$\vec{F} = \frac{1}{2} Re \left\{ -\hat{z} \cdot \overleftrightarrow{T}(z=0^-) + \hat{z} \cdot \overleftrightarrow{T}(z=0^+) - \hat{z} \cdot \overleftrightarrow{T}(z=d^-) + \hat{z} \cdot \overleftrightarrow{T}(z=d^+) \right\}. \quad (3.18)$$

Realizando todos los productos de la ecuación (3.18) se puede llegar a la siguiente forma

$$\vec{F} = \frac{1}{2} |E_0|^2 \{ \epsilon_0 \cos \theta_i (|r|^2 + 1) - \epsilon_2 \cos \theta_T |t|^2 \} \hat{z}. \quad (3.19)$$

En la ecuación (3.19), la región cero y la región dos son diferentes, pero si consideramos que el medio de la región 0 es el mismo medio que la región 2, entonces $\epsilon_0 = \epsilon_2$ y $\theta_i = \theta_T = \theta$, por lo tanto, la ecuación se reduce a:

$$\vec{F} = \frac{1}{2} |E_0|^2 \epsilon_0 \cos \theta (1 + |r|^2 - |t|^2) \hat{z}. \quad (3.20)$$

En incidencia normal, la ecuación (3.20) se puede escribir simplemente como la suma de los componentes de la fuerza debido a la conservación del momento

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= \frac{\epsilon_0}{2} |E_0|^2 \hat{z} \\ \vec{F}_r &= \frac{\epsilon_0}{2} |E_0|^2 |r|^2 \hat{z} \\ \vec{F}_T &= -\frac{\epsilon_0}{2} |E_0|^2 |t|^2 \hat{z} \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde \vec{F}_i , \vec{F}_r y \vec{F}_T son las fuerzas debidas a los momentos de onda incidente, reflejado y transmitido, respectivamente.

**CAPÍTULO 3. FUERZA ELECTROMAGNÉTICA SOBRE UNA CAPA
DIELÉCTRICA**
3.4. TENSOR DE ESFUERZOS EN UNA CAPA QUE NO ABSORBE

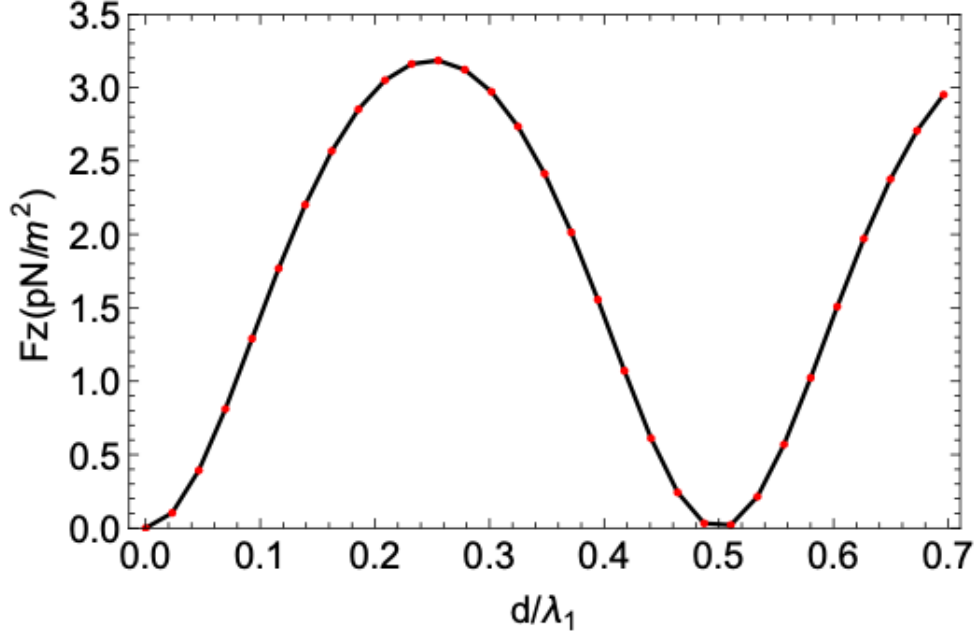


Figura 3.2: Densidad de fuerza para una onda que incide normal a una capa dieléctrica sin pérdida como una función de ancho del espesor d . La longitud de onda en el espacio libre es $\lambda = 430\text{nm}$ y $\epsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$ y el campo incidente es $E_i = 1\text{V/m}$. Se muestran las fuerzas calculadas desde la fuerza distribuida de Lorentz (círculos rojos) y el tensor de esfuerzos de Maxwell (línea).

La figura (3.2) muestra la fuerza sobre una capa dieléctrica sin pérdida con $\epsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$. Los máximos o mínimos en la fuerza se deben a la dependencia periódica de la reflectancia y la transmitancia en el espesor de la capa. El mínimo de la fuerza se observa para espesores igual o múltiplos de la mitad de la longitud de onda $n\frac{\lambda}{2}$ y la fuerza máxima se observa para espesores igual a múltiplos impares de un cuarto de la longitud de onda $(2n + 1)\frac{\lambda_1}{4}$, donde λ_1 es la longitud de la luz dentro de la capa y $n \in [0, 1, 2, \dots]$.

Capítulo 4

Resultados de la presión de radiación sobre un ópalo artificial

Como ya se ha mencionado, la figura (2.1) muestra onda plana que incide perpendicular a la superficie de un ópalo formado por las capas de esferas dieléctricas. Como se sabe, parte de la onda es reflejada y otra parte es transmitida por el ópalo.

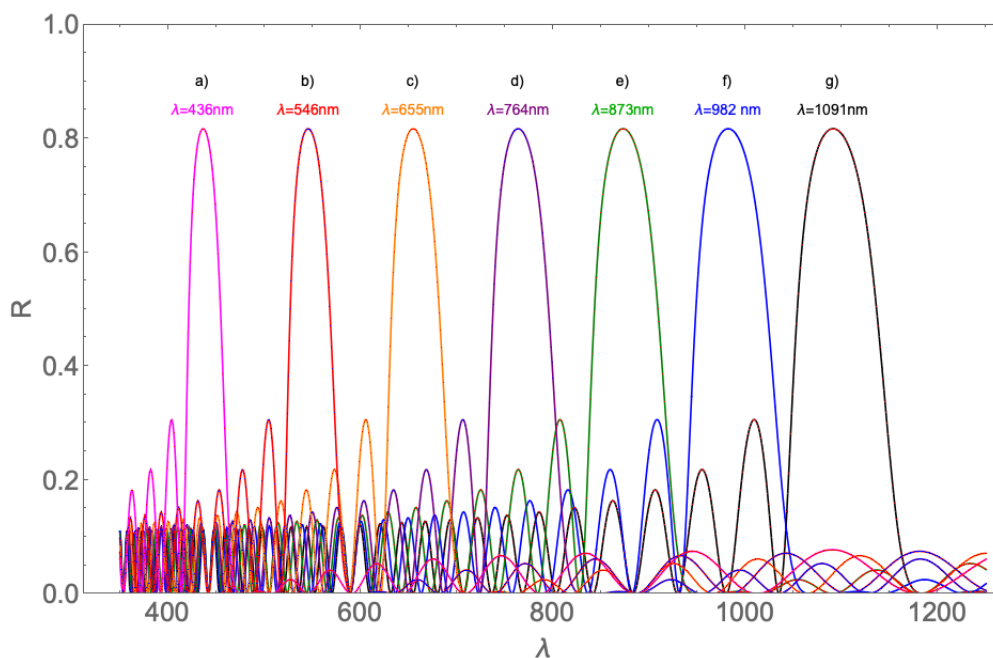


Figura 4.1: Reflectancia para diferentes tamaños de esferas de SiO_2 a) 200 nm, b) 250 nm, c) 300 nm, d) 350 nm, e) 400 nm, f) 450 nm, g) 500 nm.

Para conocer la fuerza electromagnética ejercida por la luz sobre el ópalo en incidencia normal, en esta tesis se considera al ópalo como una capa dieléctrica efectiva $\epsilon_{\text{ópalo}}(z)$, obtenida desde la ecuación (2.5) como

$$\epsilon_{\text{ópalo}}(z) = \epsilon_p + 2U_G \cos(Gz), \quad (4.1)$$

donde G es un vector de la red recíproca y donde los coeficientes de Fourier U_G para un ópalo de esferas con estructura FCC, están dados por (ver Apéndice A). De esta manera, es importante

CAPÍTULO 4. RESULTADOS DE LA PRESIÓN DE RADIACIÓN SOBRE UN ÓPALO ARTIFICIAL

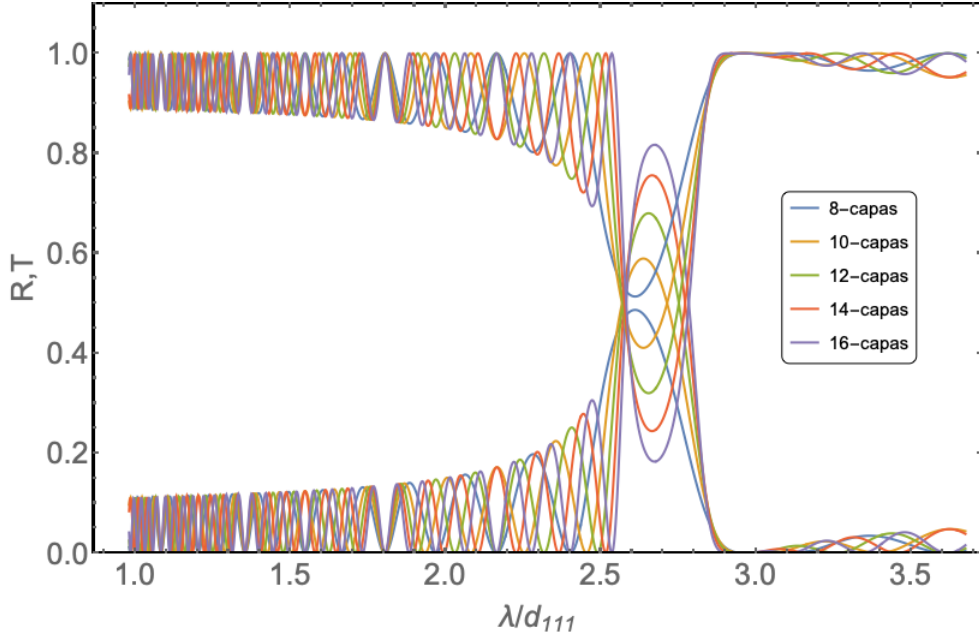


Figura 4.2: Reflectancia y transmitancia para una película delgada compuesta por N capas de esferas de SiO_2 . La luz de incidencia es normal a la superficie.

analizar los espectros de reflexión y transmisión que nos llevan a determinar la presión de radiación en la estructura fotónica del ópalo, con vista lateral del arreglo FCC presentado en la figura (2.1).

En la figura 4.1 se muestra la reflectancia para un ópalo de 16 capas haciendo uso de la ecuación (2.57), donde el único parámetro que varía es el tamaño de las nanoesferas de SiO_2 . Se puede notar que guardan una proporcionalidad los picos de cada reflectancia, ya que cada que las esferas crecen en 50 nm el pico de la reflectancia se mueve a la derecha con un aumento de 109 nm en cada caso.

La Figura (4.2) muestra una serie de espectros de reflectancia (R) y transmitancia (T) para una muestra compuesta de N capas en el caso de incidencia normal. La longitud de onda se normaliza al espaciado entre planos (111). A medida que aumenta el número de capas, el máximo de R que define la banda fotónica sufre un corrimiento hacia el rojo hasta alcanzar el valor de $2\sqrt{\epsilon_0}$ para $N > 50$. Además, ambos espectros se obtuvieron utilizando el modelo de aproximación de dipolos discretos (DDA) [21]. La comparación muestra que la AOE podría ser una buena opción para tener una idea de la cantidad de capas del cristal en menos tiempo.

4.0.1. Densidad de fuerza de Lorentz

La fuerza ejercida por la radiación EM sobre el cristal se puede conocer mediante la aplicación directa del método de fuerza de Lorentz o aplicando, como ya ha sido mostrado, mediante el tensor de esfuerzos de Maxwell. Con una incidencia normal, la fuerza sobre los cristales de N capas está en la dirección de propagación de la onda. La densidad de fuerza volumétrica de Lorentz promediada en el tiempo se escribe como:

$$\langle f_z \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\epsilon_0(\epsilon_{\text{opalo}}(z) - 1)E^*(z)dE(z)/dz], \quad (4.2)$$

donde $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ es la permitividad en el vacío. La presión total es

$$\langle F_{z,T} \rangle = \int_0^{Nd_{111}} dz \langle f_z \rangle. \quad (4.3)$$

CAPÍTULO 4. RESULTADOS DE LA PRESIÓN DE RADIACIÓN SOBRE UN ÓPALO ARTIFICIAL

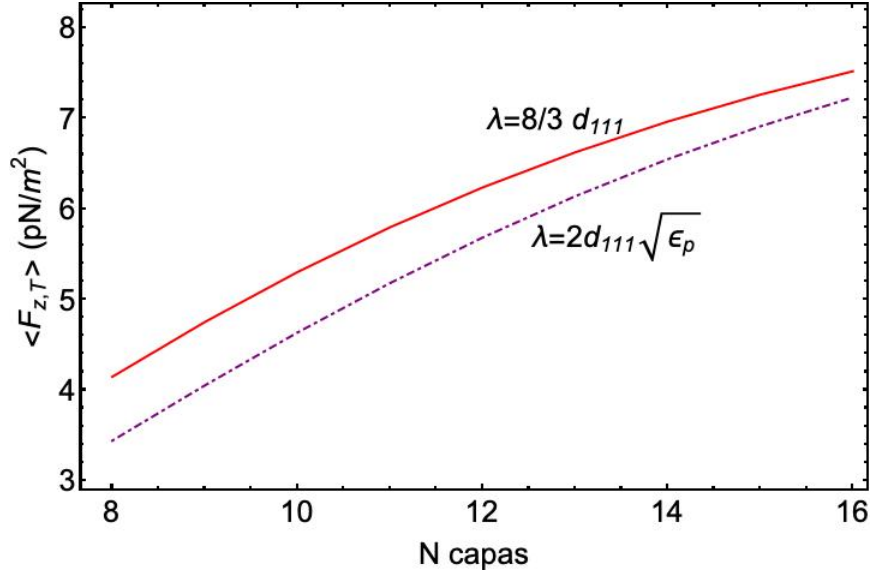


Figura 4.3: Densidad de fuerza de la luz incidente normal sobre un ópalo en función del número N de capas. El campo eléctrico incidente tiene una magnitud de 1 V/m . Si el número de capas aumenta, la línea continua y la punteada se aproximarán y nos darán el mismo resultado.

La figura (4.3) muestra la fuerza de densidad volumétrica sobre una película de ópalo compuesto de 8 a 16 capas, como en la figura (4.2). La fuerza se calcula en $\lambda = \frac{8}{3}d_{111}$ y en $\lambda = 2\sqrt{\epsilon_p}$, los valores correspondientes a la máxima reflectancia para 16 capas y el valor correspondiente al centro de la banda prohibida fotónica para un ópalo 3D de un número muy grande de capas.

Para tener una idea de la presión de radiación producida por un apuntador láser sobre el ópalo, consideramos lo siguiente. En el espacio libre la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica son $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}$ y $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$, respectivamente. Para una onda electromagnética, el promedio en el tiempo del vector de Poynting es llamada la intensidad I y se define como

$$I = S_{AV} = \frac{E_{max}B_{max}}{2\mu_0} = \frac{E_{max}^2}{2\mu_0c} = \frac{cB_{max}^2}{2\mu} \quad (4.4)$$

donde E_{max} y B_{max} es la amplitud de campo eléctrico y magnético respectivamente, además c es la velocidad de la luz en el vacío. Como se sabe, la intensidad de la onda electromagnética puede ser escrita como

$$I = \frac{\mathcal{P}_{av}}{A}, \quad (4.5)$$

donde \mathcal{P}_{AV} es la potencia de salida promedio de la fuente que atraviesa una área A . Sustituyendo la ecuación (4.4) en (4.5) se obtiene

$$\mathcal{P}_{AV} = \frac{E_{max}^2 A}{2\mu_0c}. \quad (4.6)$$

Usualmente, un apuntador láser crea un punto sobre una pantalla de alrededor de 3 mm^2 . Para obtener un campo eléctrico de 1 V/m como el discutido anteriormente, se necesita un apuntador láser con una potencia de $\mathcal{P}_{AV} = 4 \times 10^{-9} \text{ W}$. Un apuntador láser con una longitud de onda de $\lambda = 532 \text{ nm}$ y potencia $\mathcal{P}_{AV} = 60 \times 10^{-3} \text{ W}$ producirá un $E_{max} = 3,88 \times 10^3 \text{ V/m}$. Así, la presión de radiación con este tipo de láser sobre el ópalo podría ser un poco más de $F_z = 1 \times 10^{-2} \text{ N/m}^2$.

**CAPÍTULO 4. RESULTADOS DE LA PRESIÓN DE RADIACIÓN SOBRE UN
ÓPALO ARTIFICIAL**

\mathcal{P}_{AV} (mW)	E (V/m)	F (N/m^2)
0.5	355	1.11×10^{-6}
1	501	2.22×10^{-6}
1.5	614	3.33×10^{-6}
2	709	4.44×10^{-6}
5*	1121	1.11×10^{-5}
10*	1586	2.22×10^{-5}
20	2242	4.44×10^{-5}
21	2298	4.67×10^{-5}
22	2352	4.89×10^{-5}
23	2405	5.11×10^{-5}
24	2456	5.33×10^{-5}
25	2507	5.56×10^{-5}
30*	2746	6.67×10^{-5}
40*	3171	8.89×10^{-5}
50*	3545	1.11×10^{-4}
60*	3883	1.33×10^{-4}

Tabla 4.1: Datos del cálculo de fuerzas.

Para hacer una comparación de las fuerzas que pueden ser aplicada a un ópalo mediante un láser, la siguiente tabla de datos muestra las diferentes potencias y las fuerzas correspondientes. Los datos que tienen un asterisco son los láseres que se encuentran disponibles en el laboratorio de óptica de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la BUAP y que podrían ser utilizados.

Cabe mencionar que la presión acústica mínima requerida por un oyente es de alrededor de $2 \times 10^{-5} N/m^2$. Con esto podemos tener una idea de la fuerza que sienten estas estructuras, usando un láser con una potencia mayor a 10 mW.

4.0.2. Arreglo experimental para la determinación de las fuerzas electromagnéticas en el ópalo

El arreglo experimental que se propone es el siguiente:

Para las auto-oscilaciones, la figura 4.4 muestra la configuración experimental en la que se introduce el dispositivo fotónico (1), que está montado en una etapa rotatoria y lineal XY (2), formando un bucle positivo por la señal de medición de movimiento, esa es la señal de velocidad en tiempo real proporcionada por un medidor de vibración muy sensible (7,9) procesada a través de un generador de funciones (11), cuya salida controla el láser y el chopper (5,6). Esto significa que cuando el dispositivo fotónico comience a moverse, inmediatamente el circuito bloquea la luz láser por medio del chopper. Y cuando el dispositivo vuelve a la posición inicial, se vuelve a activar el láser, y así sucesivamente [26].

Una vez cerrado el bucle, el dispositivo oscilará durante unos segundos a distintas frecuencias. Después de ese período, el dispositivo deberá de mostrar una clara tendencia a estabilizar la oscilación automática en 16,1 Hz con un ciclo de trabajo del 52 %. A esta frecuencia, el movimiento presentará un espectro más puro con una distribución de frecuencia estrecha.

Mediante el osciloscopio y una fotocelda (componentes 8,10), se verificará la señal y se reconocerá los pulsos deseados de y la presencia de una componente de señal de 60 Hz (algunos milivoltios inducidos desde la línea eléctrica). No se filtrará este ruido de 60 Hz porque es útil para excitar el bucle debido a que rompe la inercia. Es decir, ayuda a iniciar el movimiento del dispositivo agregando una pequeña vibración a la cuchilla del chopper que origina los picos de luz de bombeo.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS DE LA PRESIÓN DE RADIACIÓN SOBRE UN ÓPALO ARTIFICIAL

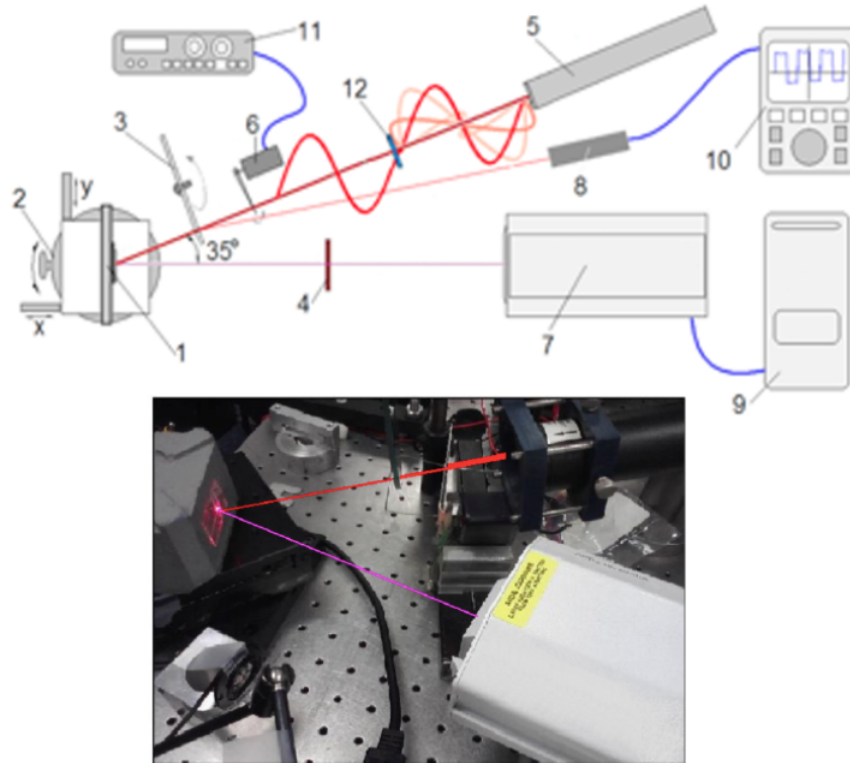


Figura 4.4: 1) Dispositivo fotónico, 2) Portaobjetos XY, 3) Filtro circular, 4) Filtro pasabandas infrarrojo, 5) Láser He-Ne, 6) Chopper, 7) Vibrómetro, 8) Fotocelda, 9) Computadora, 10) Osciloscopio, 11) Generador de funciones, 12) Polarizador lineal. La imagen insertada muestra los componentes principales de la configuración real.

De lo contrario, se excitará el circuito interrumpiendo el paso del haz de bombeo (manualmente) a una frecuencia de 2 a 3 Hz.

Por último para evitar que las señales de reflexión indeseables ingresen al medidor de vibraciones, se utilizará un filtro de paso de banda de infrarrojos (4) y también se considera la opción de usar diferentes intensidades de luz láser.

4.0.3. Avances en la síntesis de ópalos de SiO_2

A continuación se describen los avances alcanzados en la síntesis de los ópalos artificiales a base de SiO_2 , hasta el momento de la presentación de esta tesis.

Los materiales para llevar a cabo la síntesis de las partículas de SiO_2 , fueron tetraetilortosilicato (TEOS, grado analítico de Fluka), hidróxido de amonio (NH_4OH , 28-30 % como NH_3 , de Sigma-Aldrich), etanol y metanol (de Sigma-Aldrich). Los accesorios utilizados para la reacción fueron lavados con solución de ácido clorhídrico, agua y etanol antes de ser utilizados.

Utilizando el método de hidrólisis de Stöber [27], se sintetizaron dos grupos de muestras de sílice. En ambos grupos se utilizó al TEOS como precursor del SiO_2 , al hidróxido de amonio como catalizador de la reacción de hidrólisis, como solventes se utilizó al metanol y etanol. La reacción se realizó usando reactores de vidrio con un volumen de 200 ml, bajo agitación rigurosa, a temperatura

CAPÍTULO 4. RESULTADOS DE LA PRESIÓN DE RADIACIÓN SOBRE UN ÓPALO ARTIFICIAL

ambiente.

Mediante el siguiente procedimiento se obtuvieron las nanoesferas de SiO_2 :

- Las esferas de sílice se prepararon siguiendo el método de Stöber modificado.
- Se mezclaron 20 ml de metanol/etanol (MeOH/EtOH) y 20 mL de hidróxido de amonio (NH_4OH , 28-30 %) en cierta cantidad de agua destilada mediante agitación magnética durante 5 min.
- Luego, se agregaron lentamente 5 mL de tetraetilortosilicato ($\text{TEOS} \geq 98\%$) a la mezcla de solución y se agitó magnéticamente durante 4 horas a temperatura ambiente.
- Las esferas de SiO_2 se separaron por centrifugación y se lavaron tres veces en etanol y se usaron para la formación de cristales fotónicos.

La Figura (4.5) muestra las imágenes de microscopía electrónica de barrido (SEM, por Scanning Electron Microscope) de bajo y alto aumento de esferas de SiO_2 . Como se muestra en la Figura 4.5 a), b), las partículas de SiO_2 son de forma altamente esférica con una uniformidad aceptable con un tamaño promedio de 80 nm. El tamaño de las esferas de SiO_2 se puede ajustar variando el TEOS y la relación etanol/metanol. Como se muestra en la Figura 4.5 c), d), las esferas de SiO_2 obtenidas al aumentar la cantidad de etanol/metanol (20 mL). Puede observarse que las esferas resultantes son muy uniformes y de forma esférica con un tamaño promedio de 200 nm.

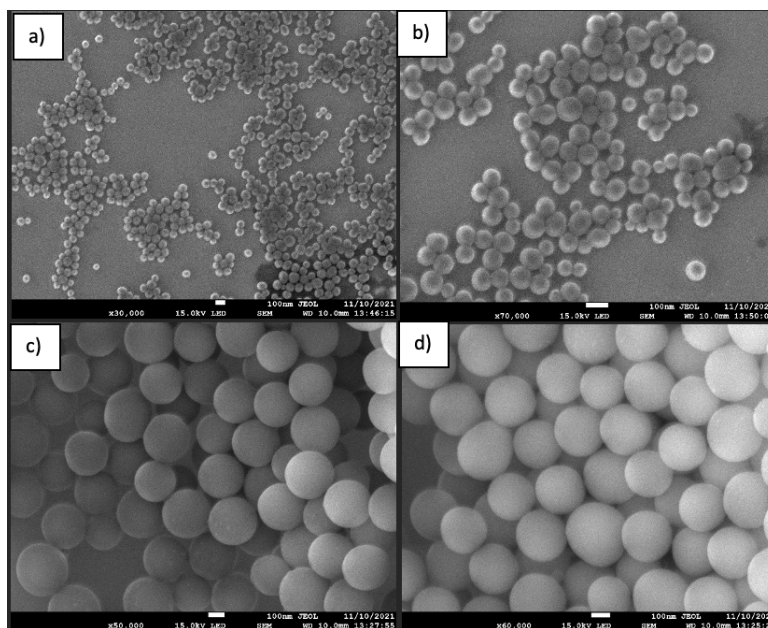


Figura 4.5: Imágenes SEM de bajo y alto aumento de nanoesferas de SiO_2 con tamaño promedio de 80 nm a), b) y 200 nm c), d), respectivamente.

Para la fabricación de los ópalos se tuvo en cuenta el siguiente procedimiento.

- Para la formación de cristales, las esferas de sílice obtenidas se mezclaron con 30 ml de etanol en un vaso de precipitado de 50 mL.
- El sustrato de vidrio se sumergió verticalmente en la solución de reacción que contenía esferas de SiO_2 y se dejó evaporar lentamente a temperatura ambiente.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS DE LA PRESIÓN DE RADIACIÓN SOBRE UN ÓPALO ARTIFICIAL

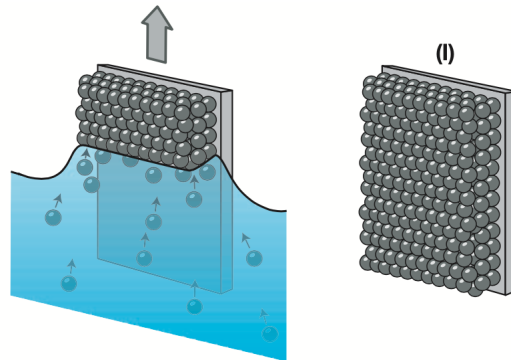


Figura 4.6: Proceso de formación de nanocrisales de ópalo [28].

- Para formar la monocapa, la solución se diluyó 5 veces, las condiciones restantes fueron las mismas.

La calidad cristalina es uno de los más importantes parámetros en la determinación del rendimiento de cristales coloidales en aplicaciones ópticas. La formación de defectos o dominios pueden tener un impacto enorme en las propiedades de difracción.

La figura 4.7 a)-d) muestra una imagen SEM de un solo cristal con un tamaño 80 nm de diámetro en las esferas, el cual se formó utilizando los métodos descritos anteriormente. Esta muestra exhibe una disposición compacta ordenada de esferas de SiO_2 , que se extiende sobre un área aún mayor. Además, el cristal formado posee aproximadamente de 6 a 7 capas de nanoesferas de SiO_2 con una disposición muy ordenada, tal como se puede mostrar en las imágenes SEM de sección transversal en 4.7 b). Las imágenes SEM de mayor aumento en la Figura 4.7 c), d) confirman la formación de una estructura con un ordenamiento fcc para las esferas de SiO_2 .

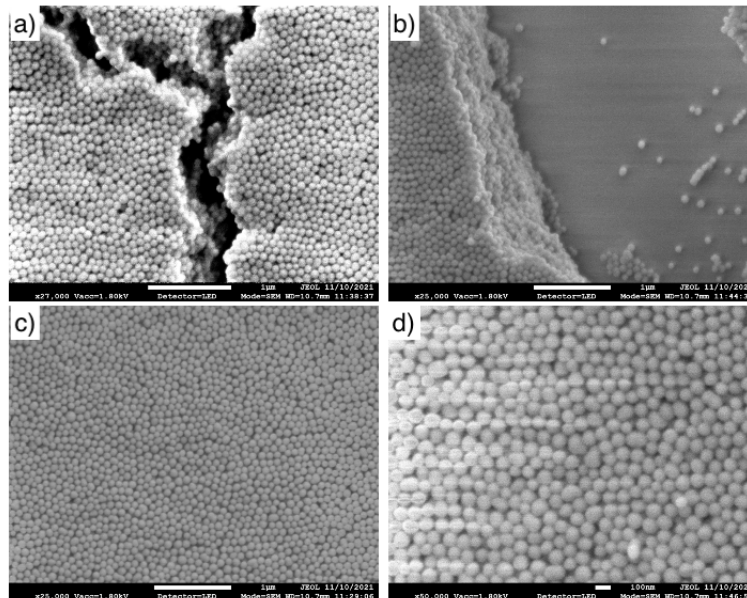


Figura 4.7: Micrografías SEM de nanoesferas de SiO_2 con un tamaño de 80 nm de diámetro.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS DE LA PRESIÓN DE RADIACIÓN SOBRE UN ÓPALO ARTIFICIAL

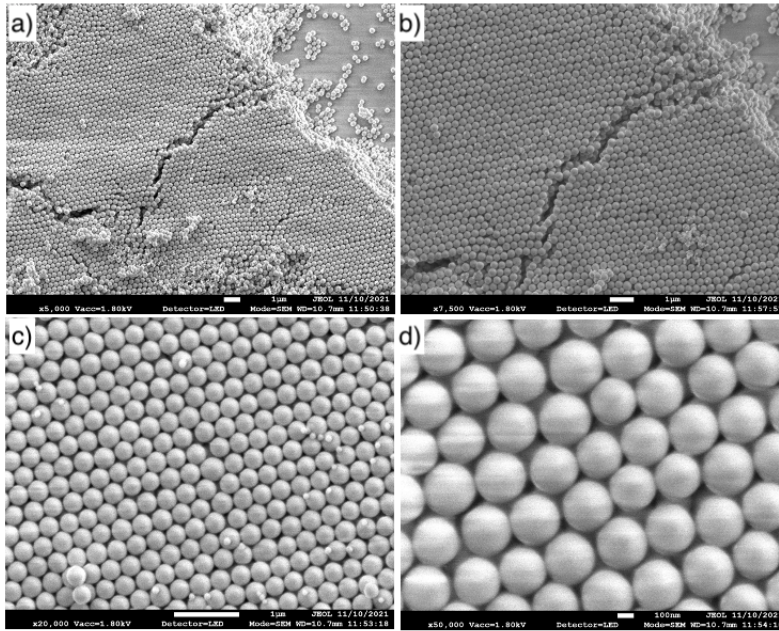


Figura 4.8: Micrografías SEM de nanoesferas de SiO_2 con un tamaño de 200 nm de diámetro.

La Figura 4.8 a)-d) muestra imágenes SEM de un cristal con mayor tamaño de partícula (200 nm). Como puede verse en la Figura 4.8 a), b), el orden de largo alcance se confirma mediante imágenes SEM de bajo aumento. Notablemente, el nanocristal formado con 200 nm exhibe un crecimiento de estructura compacta y muy uniforme que contiene múltiples capas de nanoesferas de SiO_2 (aproximadamente 7 capas). Las imágenes SEM de gran aumento también proporcionan una fuerte evidencia de la formación de una disposición empaquetada muy ordenada de nanoesferas de SiO_2 .

Conclusión

En esta tesis hemos abordado el estudio de la fuerza electromagnética sobre un cristal fotónico tridimensional a base de esferas de SiO_2 para la síntesis de ópalos artificiales.

Las principales conclusiones de estos estudios son las siguientes.

- Se mostraron dos maneras diferentes de obtener la fuerza que se ejerce en el ópalo de SiO_2 , mediante el tensor de esfuerzos de Maxwell y la densidad de fuerza volumétrica de Lorentz. Para el primer método usamos la aproximación de ondas planas donde se obtienen las ecuaciones para la reflectancia y transmitancia, mientras que para el segundo método se usa el campo eléctrico y la constante dieléctrica del ópalo.
- Se demostró que la presión de radiación ejercidas por fuerzas tangenciales son nulas.
- Se demostró la presión de radiación sobre el ópalo como una función del número de capas N de esferas, y para diferentes potencias del láser usado.
- La medición experimental de la presión de radiación era de los objetivos planteados al inicio de la pandemia por el coronavirus SARS-COV2. Este objetivo queda pendiente como tema de investigación a futuro y solo se plantea el arreglo experimental.
- Se avanzó en la síntesis de ópalos con tamaños de esferas de 80 y 200 nm, respectivamente.

Con los resultados obtenidos en esta tesis, es posible ahora plantear un análisis sistemático para la inducción de fuerzas y auto-oscilaciones en estas estructuras dieléctricas bajo la radiación de luz láser modulada. Para establecer los principios de mejoramiento de la fuerza electromagnética, es importante analizar la transmisión así como la presión de radiación en la estructura fotónica tridimensional formada por dos ópalos con una cavidad de aire, como en los trabajos antes mencionados. Todas estas consideraciones mencionadas son problemas de investigación en trabajos futuros.

Apéndice A

Coeficientes de Fourier de la Constante Dieléctrica

De la Ec. (2.6), multiplicando ambos lados por $e^{-i\vec{G}'\cdot\vec{r}}$ e integrando sobre el volumen de celda unitaria V_c , se puede obtener la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \int_{V_c} e^{-i\vec{G}'\cdot\vec{r}} \epsilon'(\vec{r}) d^3r &= \sum_{\vec{G}} U_{\vec{G}} \int_{V_c} e^{-i(\vec{G}-\vec{G}')\cdot\vec{r}} d^3r \\ &= \sum_{\vec{G}} U_{\vec{G}} V_c \delta_{(\vec{G},\vec{G}')} \\ &= V_c U_{\vec{G}}, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

donde se utiliza la relación

$$\frac{1}{V_c} \int_{V_c} e^{-i(\vec{G}-\vec{G}')\cdot\vec{r}} d^3r = \delta_{(\vec{G},\vec{G}')}, \quad (\text{A.2})$$

de tal forma que cambiando $\vec{G}' \rightarrow \vec{G}$ en la Ec. (A.1), obtenemos que los coeficientes de Fourier $u_{\vec{G}}$ están dados por:

$$U_{\vec{G}} = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} \epsilon'(\vec{r}) d^3r, \quad (\text{A.3})$$

donde V_c es el volumen de la celda unitaria primitiva del cristal.

Sustituyendo la relación para la constante dieléctrica dada por la Ec. (2.5) en la Ec. (A.3), podemos resolver la integral para valores $\vec{G} \neq \vec{0}$.

$$\begin{aligned} U_{\vec{G}} &= \frac{1}{V_c} \int_{V_c} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} [\epsilon_b + (\epsilon_s - \epsilon_b)\theta(\vec{r})] d^3r \\ &= \frac{\epsilon_b}{V_c} \int_{V_c} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} d^3r + \frac{\epsilon_s - \epsilon_b}{V_c} \int_{V_c} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} \theta(\vec{r}) d^3r, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

usando la Ec. (A.2) con $\vec{G}' = \vec{0}$, la primer integral resulta ser nula, por otro lado, para la segunda integral usando la propiedad de la función $\theta(\vec{r})$, la integral sólo tendrá sentido cuando se esté dentro de las esferas que llenan el volumen de la celda primitiva, por lo tanto podemos resolver la integral solo sobre el volumen de una esfera V_A y multiplicarla por el número total de esferas dentro de el volumen de la celda primitiva V_c . Para una estructura FCC el número de esferas dentro de una

**APÉNDICE A. COEFICIENTES DE FOURIER DE LA CONSTANTE
DIELÉCTRICA**

celda es 4 y el volumen de la celda primitiva es $V_c = a^3$. Por lo tanto la integral (A.4) resulta

$$\begin{aligned}
 U_{\vec{G}} &= \frac{\epsilon_b}{V_c} \int_{V_c} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} d^3r + \frac{\epsilon_s - \epsilon_b}{V_c} \int_{V_c} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} \theta(\vec{r}) d^3r \\
 &= \epsilon_b \delta_{(\vec{G}, \vec{0})} + \frac{4(\epsilon_s - \epsilon_b)}{a^3} \int_{V_A} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} d^3r \\
 &= 0 + \frac{4(\epsilon_s - \epsilon_b)}{a^3} \int_0^{R_s} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-iGr \cos \theta} r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr \\
 &= \frac{4(\epsilon_s - \epsilon_b)}{a^3} \int_0^{R_s} \int_0^{2\pi} \frac{2 \sin(Gr)r}{G} d\phi dr \\
 &= \frac{16\pi(\epsilon_s - \epsilon_b)}{a^3} \int_0^{R_s} \frac{2 \sin(Gr)r}{G} dr \\
 &= \frac{16\pi(\epsilon_s - \epsilon_b)}{(aG)^3} [\sin(GR_s) - GR_s \cos(GR_s)],
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

por lo tanto, de la Ec. (A.5) los coeficientes de Fourier para un ópalo con un arreglo FCC son:

$$U_{\vec{G}} = \frac{16\pi}{(aG)^3} (\epsilon_c - 1) \epsilon_b [\sin(GR_s) - GR_s \cos(GR_s)]. \tag{A.6}$$

Bibliografía

- [1] J.D. JOANNOPOULOS, R.D. MEADE, J.N. WINN, “*Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*”, Princeton University Press, Princeton 1995.
- [2] J.D. JOANNOPOULOS, P.R. VILLENEUVE & SHANHUI FAN, *Photonic crystals: putting a new twist on light*, Nature 386, 143 (1997); J.G. Fleming and Shawn-Yu Lin, Optics Letters 24, 49 (1999).
- [3] V. MIZEIKIS, S. JUODKAZIS, A. MARCINKEVIEIUS, S. MATSIO, H. MISAWA, “*Tailoring and characterization of photonic crystals*” , J. Photochemistry and Photobiology C: Photochemistry Reviews 2, 35 (2001).
- [4] E. YABLONOVITCH, T.J. GMITTER, K.M. LEUNG. Phys. Rev. Lett. 67, 2295 (1991).
- [5] C. C. CHENG, A. SCHERER. J. VAC. Sci. Technol. B 13, 2696 (1995).
- [6] S.Y. Lin et al. Nature 394, 251 (1998).
- [7] J.G. FLEMING, S.Y. LIN. Optics Lett. 24, 49 (1999); J.G. Fleming, S.Y. Lin. IEEE J. Lightwave Technol. 17, 1944 (1999).
- [8] S. NODA et al. Appl. Phys. Lett. 75, 905 (1999); S. Noda et al. IEEE J. Lightwave Technol. 17, 1948 (1999).
- [9] P. A. HILTNER, I. M. KRIEGER. J. Phys. Chem. 73, 2386 (1969).
- [10] I. I. TARHAN, G.H. WATSON. Phys. Rev. Lett. 76, 315 (1996).
- [11] A. IMHOF et al. Phys. Rev. Lett. 83, 2942 (1999).
- [12] A. J. CARMONA-CARMONA, M.A. PALOMINO-OVANDO, ORLANDO HERNÁNDEZ-CRISTOBAL, E. SÁNCHEZ-MORA, M. TOLEDO-SOLANO, Journal of Crystal Growth 462, 6 (2017).
- [13] L. A. ROMERO-CRUZ, A. SANTOS-GÓMEZ, M. A. PALOMINO-OVANDO, ORLANDO HERNÁNDEZ-CRISTOBAL, E. SÁNCHEZ-MORA, A. L. GONZÁLEZ, M. TOLEDO-SOLANO, Superlattices and Microstructures 123, 71, (2018).
- [14] CAMILO ANTONIO RESTREPO BENTANCOR, “*Estudio de las propiedades ópticas de cristales fotónicos 1D y 2D*”, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia (2018).
- [15] C. MONAT, C. SEASSAL, X. LETARTRE, P. REGRENY, M. GENDRY, P. ROJO ROMEO, AND P. VIKTOROVITCH. Journal of Applied Physics 93, 23 (2003).
- [16] POCHI YEH, “*Optical Waves in Layered Media*”, John Wiley Sons, California (1988).

- [17] KYLE T. HUFZIGER, ALYSSA B. ZRIMSEK, SANFORD A. ASHER. “*Solid Deep Ultraviolet Diffracting Inverse Opal Photonic Crystals*”. ACS Applied Nano Materials 2018, 1 (12) , 7016-7024.
- [18] LIKUN WANG, YU XU, ZHAORAN CHU, WENWEI TANG, YANFEI QIU, XUELING ZHAO, WEIZHONG JIANG, JIAYI YE, CHENG CHEN. “*Rapid Coating of Ultraviolet Shielding Colloidal Crystals*”. Crystals 2020.
- [19] ÁLVARO BLANCO MONTES, “*Cristales Fotónicos Ópalo-Semiconductor*”, Departamento de Física de Materiales Facultad de Ciencias Universidad Autónoma de Madrid (2001).
- [20] CARLOS MORANTE MÉNDEZ. “*Estudio de las propiedades ópticas de ópalo de dióxido de silicio con inclusiones de nanopartículas de cobalto*”. Tesis de Maestría en Física Aplicada. Benemerita Universidad Autonoma de Puebla (2016).
- [21] K. W. K. SHUNG AND Y. C. TSAI, Phys. Rev. B 48, 11265 (1993).
- [22] P. M. HUI, W. M. LEE, AND N. F. JOHNSON, Solid State Commun. 91, 65 (1994).
- [23] SATPATHY, Z. ZHANG, AND M. R. SALEHPOUR, Phys. Rev. Lett. 64, 1239 (1990).
- [24] S. DATTA, C. T. CHAN, K. M. HO, AND C. M. SOUKOULIS, Phys. Rev. B 48, 14936 (1993).
- [25] REITZ J.R., MILFORD F.J., CHRISTY R.W. “*Fundamentos de la Teoría Electromagnética*”, Addison Wesley, 1992.
- [26] J. E. LUGO, R. DOTI, N. SÁNCHEZ, M. B. DE LA MORA, J. A. DEL RÍO, AND J. FAUBERT, SCIENTIFIC REPORTS 4, 3705 (2014).
- [27] R. ZANELLA, “*Metodologías para la síntesis de nanopartículas: controlando forma y tamaño*”, (2012) Mundo Nano.
- [28] W. CHENG, J. WANG, U. JONAS, G. FYTAS, AND N. STEFANOU. Nature materials, (2006).
- [29] MÉNDEZ E. Y.(2020). “*Presión de Radiación sobre un Cristal Fotónico 3D*”, Tesis de licenciatura. BUAP.
- [30] BRANDON A. KEMP, TOMASZ M. GRZEGORCZYK, AND JIN AU KONG “*Ab initio study of the radiation pressure on dielectric and magnetic media*”. OPTICS EXPRESS 9291 (2005)